UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Algébre

Thème : Groupes de Brauer des algèbres de H-dimodules

Présenté par : Lamine SAMBOU

Devant le jury ci-aprés :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Alassane DIÉDHIOU	Maître de conférences	Examinateur	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président de jury	UASZ
Oumar SALL	Maître de conférences	Examinateur	UASZ
Mansour SANÉ	Assistant	Examinateur	UASZ
Amoussou Thomas GUEDENON	Maître assistant	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2015-2016

Remerciements

Il est d'usage de commencer par remercier son directeur de mémoire. Je remercie donc chaleureusement Mr **Thomas Guédénon** pour sa disponibilité, ses encouragements, ses conseils et son engagement dans l'accomplissement de ce travail et dans mon initiation *à* la recherche.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à Mr.**Salomon Sambou**, Mr.**Oumar Sall**, Mr.**Alassane Diédhiou** et Mr.**Mansour Sané** pour avoir accepté de participer au jury et de juger ce travail, nonobstant leurs multiples occupations. Je suis honoré qu'ils prennent de leur temps pour lire mon manuscrit.

Ma gratitude va également à tous les professeurs du département de mathématiques, pour la qualité de l'enseignement qu'il nous ont dispensé et la rigueur dans le travail qu'il nous ont inculqué.

Je remercie au passage l'ensemble de mes camarades, particuliérement, ceux du département de mathématiques, précisément, **Ibrahima Hamidine**, **Souhaibou Sambou**, **Kindy Ba**, **Aliou Coulibaly**, **Moctar Traoré** et **Mouhamad D. Gassama** pour leurs efforts de soutien ; certains dans les conseils et d'autres pour la saisie du travail.

Résumé

Soit H une algèbre de Hopf commutative et cocommutative sur un anneau commutatif k. Un H-dimodule est à la fois un H-module et un H-comodule, avec une relation de compatibilité. Une algèbre de H-dimodule est à la foi une algèbre de H-module, une algèbre de H-comodule et un H-dimodule. Deux algèbres de H-dimodules A et B sont dites Brauer équivalents si et seulement si il existent deux H-dimodules projectifs de type fini M et N sur k tels $A\#End(M) \cong B\#End(N)$.

L'ensemble des algèbres de H-dimodules quotienté par cette relation est un groupe appelé groupe de Brauer des algèbres de dimodules.

Introduction

Dans ce document, on va développer la théorie du groupe de Brauer des algèbres de H-dimodules qui sont simultanément des algèbres H-modules et des H-comodules, *où* H est une algèbre de Hopf sur un anneau commutatif k.

Tout commence par le groupe de Brauer des corps introduit par Richard Brauer en 1929 dans le but de classer les algèbres de divisions de dimensions finies. Ces éléments sont des classes d'équivalences d'algèbres centrales simples.

Ce groupe fut généralisé par Auslander et Goldman en 1960 au groupe de Brauer des anneaux commutatifs : algèbre centrale simple est remplacée par algèbre séparable, appelée algèbre d'Azumaya. Les généralisations du groupe de Brauer des corps se sont poursuivies dans d'autres directions.

Wall introduit le groupe de Brauer des algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées, dans le but d'inclure ces algèbres dans le groupe de Brauer. Ce groupe est appelé groupe de Brauer-Wall. Il est plus tard généralisé par Knus pour obtenir le groupe de Brauer des algèbres G-graduées o*ù* G est un groupe abélien quelconque.

Le groupe de Brauer des anneaux commutatifs fut proposé par C. Small en 1971 et respectivement une généralisation pour tout groupe abélien fut faite par L.N.Childs, Garfinkel et M.Orzech avec le groupe de Brauer des algèbres d'Azumaya graduées. Long généralisa tous ces groupes, introduisant le groupe de Brauer des algèbres G-graduées ayant une graduation qui préserve l'action. Un beau travail fut effectué, en remplaçant algèbre G-graduée par algèbre de H-dimodules où H de Hopf commutative et cocommutative. C'est le groupe de Brauer des algèbres de dimodules aujourd'hui appelé groupe de Brauer-Long.

Ainsi notre travail sera articulé sur trois chapitres.

- Dans le premier chapitre, on fera des rappels, notamment sur les anneaux, les modules d'une part, et les algèbres, les coalgèbres et les bialgèbres sur des anneaux commutatifs, d'autre part.

- Dans le deuxième chapitre, nous définissons les H-modules, les H-comodules et les

H-dimodules ainsi que les algèbres de H-modules, de H-comodules et de H-dimodules.

- Enfin dans le dernier chapitre, on passera aux définitions du groupe de Brauer des algèbres de H-modules, de H-comodules et H-dimodules.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Anneaux

Définition 1.1.1. *Soit R un ensemble muni de deux opérations " $+$ " et " $\cdot$ " appelées respectivement addition et multiplication. On dit que R est un anneau si :*

(1) $(R, +)$ est un groupe abélien ;

(2) la multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

Remarque 1.1.1. *S'il existe un élément 1_R de R tel que $1_R \cdot r = r \cdot 1_R = r$; $\forall r \in R$, alors on dit que l'anneau est unitaire.*

L'anneau est dit commutatif si la multiplication est commutative et il est dit associatif si $a(bc) = (ab)c$ pour tout a,b et c dans R.
Dans notre travail, les anneaux sont supposés associatifs et unitaires.
Un corps est un anneau commutatif dont tout élément non nul est inversible.

Définition 1.1.2. *Soient A et B deux anneaux. Une application $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneau si :*

1 - f est un morphisme de groupe additif,

2 - $f(a\tilde{a}) = f(a)f(\tilde{a})$ $\forall a, \tilde{a} \in A$

3 - $f(1_A) = 1_B$.

Définition 1.1.3. *soit A un anneau. L'opposé de A noté A^o ou A^{op} est défini par $A^o = A$ en tant que groupe additif et si $\bar{a}, \bar{b} \in A^o$, on a $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ba}$ où $\bar{a}$ désigne $a \in A$ vu comme élément de A^o.*

Il est bien connu que $(A^o, +, \cdot)$ est un anneau et que si A est commutatif, alors $A^o = A$.

1.2 Modules sur un anneau

Dans tout le reste de notre travail k est un anneau commutatif fixé unitaire et $\otimes$ et Hom sont pris sur k.

Définition 1.2.1. *Soit A un anneau. On dit qu'un ensemble M muni d'une addition est un A-module à gauche si $(M,+)$ est un groupe additif abélien et s'il existe une loi externe*
$\alpha : A \times M \longrightarrow M$
$(a,m) \longmapsto a.m = am$
vérifiant :
1- $\forall a, a' \in A$ et $\forall m \in M$;$(a + a')m = am + a'm$
2- $\forall a \in A$ et $\forall m, m' \in M$; $a(m + m') = am + am'$
3- $\forall a, á \in A$ et $\forall m \in M$; $(aa')m = a(a'm)$
4- $\forall m \in M$; $(1_A)m = m$

Remarque 1.2.1. *On a de même la notion de A-module à droite.*

Exemple 1.2.1. *-Tout groupe additif est un $\mathbb{Z}$- module : pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $m \in M$, on a :*
$nm = \underbrace{m + m + ... + m}_{|n| fois}$, $0m = 0$, $(-n)m = n(-m)$.

-Si A est un corps, un A- module n'est rien d'autre qu'un A-espace vectoriel .

-Le produit d'un anneau A munit le groupe additif $(A,+)$ d'une structure naturelle de A-module à gauche et à droite.

-Plus généralement, si ϕ :$A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, tout B-module à gauche est un A-module à gauche avec comme loi :

$A \times M \longrightarrow M$
$(a,m) \longmapsto \phi(a)m.$

Lemme 1.2.1. *Soit A un anneau. Si M est un A-module à gauche, alors M est un A^o-module à droite. La loi est définie par*
$M \times A^o :\longrightarrow M$
$(m, \bar{a}) \longmapsto m\bar{a}$ = : am

Définition 1.2.2. *Soit M un A-module à gauche. Soit $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de M où I est un ensemble d'indices. On dit que $\{x_i\}_{i\in I}$ est une famille libre si toute combinaison A-linéaire nulle de ces x_i est à coéfficients nuls.*

En particulier, Si la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est finie, elle est libre si $\sum_i a_i.x_i$ = 0, implique a_i = 0 $\forall i \in I$ et $a_i \in A$

Définition 1.2.3. *Un A-module à gauche M est dit libre s'il est engendré par une famille $(x_i)_{i\in I}$ et $(x_i)_{i\in I}$ est libre.*

Définition 1.2.4. *Soit M un A-module à gauche. Soit m un élément de M. L'annulateur* *à gauche de m dans A souvent noté $Ann(m)$ est l'ensemble défini par $Ann(m) = \{a \in A, am = 0\}$.*

L'annulateur de M est défini par $Ann(M) = \{a \in A; am = 0 \quad \forall \quad m \in M\}$

Définition 1.2.5. *Soit M un A-module à gauche. on dit que M est fidèle (ou A-fidèle) si $Ann(M) = \{0\}$*

Définition 1.2.6. *Soit M et N deux A-modules à gauche. Une application $f : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme de A-modules ou une application A-liéaire si :*
-$f(m + m') = f(m) + f(m)$; $\forall m, m' \in M$
-$f(am) = af(m)$; $(\forall a \in A); (\forall m \in M)$

Notation 1.2.1. *Soit M et N deux A-modules à gauche. On note :*

${}_AHom(M, N) = \{f : M \longrightarrow N; f \quad homomorphisme \quad de \quad A - modules\}$
${}_AEnd(M) ={}_A Hom(M, M)$

Remarque 1.2.2. *${}_AHom(M, N)$ est un groupe additif abélien. Si A est commutatif, alors $Hom_A(M, N)$ est un A-module.*

Définition 1.2.7. *Soit M un A-module à gauche et soit N un sous-ensemble de M. On dit N est un sous-A-module de M si N est un sous-groupe additif de M et la restriction de la loi externe ($A \times M \longrightarrow M$) de M à N confére à N une structure de A-module à gauche, c'est à dire :*
-N est un sous-groupe additif de M,
-$\forall a \in A, \quad \forall n \in N, an \in N$

Définition 1.2.8. *Soit M un A-module à gauche et soit M_1 un sous-module de M. On dit que M_1 est un facteur direct de M s'il existe un sous-module M_2 de M tel que $M = M_1 \bigoplus M_2$*

Définition 1.2.9. *Soit M un A-module à gauche. On dit M est de type fini s'il existe un ensemble non vide I d'indices fini et un morphisme $\varphi : A^I \longrightarrow M$ surjective.*

On dit qu'un A-module M est libre de type fini s'il est libre et de type fini.

Définition 1.2.10. *Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules et soit $(f_i)_{i\in I}$ des morphismes de A-modules tels que $f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$. La chaine ... $M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2}$... est appelée une suite de modules.*

Une telle suite est dite exacte si pour tout $i \in I$, on a $Imf_{i-1} = ker f_i$

Définition 1.2.11. *On appelle suite exacte courte de modules toute suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow^f N \longrightarrow^g P \longrightarrow 0$ où M,N,P sont des A-modules à gauche et f,g des morphismes de A-modules.*

Définition 1.2.12. *Soient M,N,P des A-modules à gauche et $0 \longrightarrow M \longrightarrow^i N \longrightarrow^\pi P \longrightarrow 0$ un suite exacte de A-modules. On dit que la suite est scindée s'il existe un morphisme $t : P \longrightarrow N$ tel que $\pi \circ t = id_P$*

Proposition 1.2.1. *Pour tout A-module à gauche P, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) P est isomorphe à un facteur direct d'un A-module libre ;
2) toute suite exacte courte de A-modules de la forme $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *est scindée ;*
3) Pour tout épimorphisme $g : M \longrightarrow N$ *et tout homomorphisme* $h : P \longrightarrow N$*, il existe* $t \in {}_AHom(P, M)$ *tel que :* $g \circ t = h$

Définition 1.2.13. *Soit P un A-module à gauche. On dit que P est un A-module projectif (ou module A-projectif) si P vérifie l'une des propriétés précédentes.*

1.3 Algèbres par diagramme

Si M est un k-module, alors $k \otimes M \cong M \cong M \otimes k$. Si on parle k-module projectif de type fini, alors k est corps (ie un anneau commutatif dont tout élément non nul est inversible).

Définition 1.3.1. *Soit k un anneau commutatif. On dit qu'un ensemble A est une k-algébre si :*
-A est un anneau
-A est un k-module
-$\forall \lambda \in k, \forall a, a' \in A, \lambda(aa') = (\lambda a)a' = a(\lambda a')$

Définition 1.3.2. *Soit A un ensemble et k un anneau commutatif. On dit que A est une k-algébre si A est un k-module et il existe :*

- une application k-bilinéaire

$$\begin{aligned} m_A : A \bigotimes A &\longrightarrow A \\ a \bigotimes a' &\longmapsto aa' \end{aligned}$$

(c'est la multiplication de l'algébre)
-et une application k-linéaire

$$\begin{aligned} \eta_A : k &\longrightarrow A \\ \lambda &\longmapsto \eta_A(\lambda) \end{aligned}$$

(c'est l'application unité de l'algèbre) telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m_A"] \arrow[d, "m_A \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m_A"] & A \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

c'est l'associativité de A ;

$$\begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r, "\eta_A \otimes id_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\ & A \end{tikzcd} \quad (1.2)$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes k \arrow[r, "id_A \otimes \eta_A"] \arrow[dr, "g"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\ & A \end{tikzcd} \quad (1.3)$$

où $fetg$ sont des morphismes canoniques.

On a donc : $f(a \otimes \lambda) = a\lambda = \lambda a$ et $g(\lambda \otimes a) = \lambda a = a\lambda$ $\eta(1_k)$ est l'unité de A.

Remarque 1.3.1. *Les définitions 1.3.1 et 1.3.2 sont équivalentes. En effet en utilisant la commutativité des diagrammes 1.1, 1.2 et 1.3, on retrouve les axiomes de la définition 1.3.1.*

Exemple 1.3.1. *- k est lui même une k-algèbre.*

- Soit k un anneau commutatif et G un groupe. Alors l' anneau de groupe kG dont les éléments sont de la forme $\sum_g \lambda_g g$ est une algèbre. Sa multiplication est telle que $m(h \otimes g) = hg$ et son unité tel que $\eta(1_k) = 1_k e_G$

Proposition 1.3.1. *Soient A et B deux algèbres. Alors $A \otimes B$ est une algèbre : c'est le produit tensoriel de A et B avec $m_{A \otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (id_A \otimes \tau_{B \otimes A} \otimes id_B)$, τ étant défini comme suit*

$\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$
$(a \otimes a') \longmapsto (a' \otimes a)$

Définition 1.3.3. *Soient A et B deux k-algèbres et $\phi : A \longrightarrow B$ une application k-linéaire.*

ϕ est un morphisme d'algèbres si :

-$m_B \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ (m_A)$

-$\phi \circ \eta_A = \eta_B$,

C'est à dire les diagrammes suivants sont commutatifs ;

$$\begin{tikzcd} A \bigotimes A \arrow[r, "\phi \bigotimes \phi"] \arrow[d, "m_A"'] & B \bigotimes B \arrow[d, "m_B"'] \\ A \arrow[r, "\phi"] & B \end{tikzcd} \quad (1.4)$$

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta_B"'] & A \arrow[d, "\phi"'] \\ & B \end{tikzcd} \quad (1.5)$$

Autrement dit, ϕ est une application k-linéaire et un homomorphisme d'anneaux.

Définition 1.3.4. *Une k-algèbre A sera dite commutative si elle est commutative en tant qu'anneau, ou de manière équivalente si $m_A \circ \tau = m_A$ où τ est définie par :*

$\tau : A \otimes A :\longrightarrow A \otimes A$
$(a \otimes a') \longmapsto (a' \otimes a)$

1.4 coalgèbres

Définition 1.4.1. *Soit C un ensemble. On dit que C est une k-coalgèbre ou une cogèbre s'il existe deux applications k-linéaires $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ (c'est le coproduit de la cogèbre) ;*
et $\epsilon_C : C \longrightarrow k$ (c'est la counité de C)
telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "\Delta_C"] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta_C \otimes id_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id_C \otimes \Delta_C"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad (id_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C = (\Delta_C \otimes id_C) \circ \Delta_C \tag{1.6}$$

:coassociativité de C et

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\Delta_C"] & C \otimes k \\ k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon_C \otimes id_C"] \arrow[u, "id_C \otimes \epsilon_C"'] \end{tikzcd} \qquad (\epsilon_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = id_C = (id_C \otimes \epsilon) \circ \Delta \tag{1.7}$$

$f(c) = c \otimes 1_k = c$ et $g(c) = 1_k \otimes c = c$

Exemple 1.4.1. *k est lui même une k-coalgèbre.*

Proposition 1.4.1. *Soient A et B des cogèbres. Alors $A \otimes B$ est une cogèbre : c'est produit tensoriel de A et B ; son coproduit est $\Delta_{A\otimes B} = (id_A \otimes \tau_{A\otimes B} \otimes id_B) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B)$ et sa counité est $\epsilon_{A\otimes B} = \epsilon_A \otimes \epsilon_B$.*

Définition 1.4.2. *Une k-cogèbre est cocommutative lorsque $\tau \circ \Delta = \Delta$ où τ est tel que $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$, $\forall x, y \in C$*

Notation de *Sweedler* : le *coproduit* d'un élément de C est une somme de tenseurs simples de $C \otimes C$.

Pour écrire le *coproduit*, on utilise la notation $\Delta(x) = \sum_x x_1 \otimes x_2 = \sum x_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes x_2$.

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)(x_1 \otimes x_2) &= \Delta(x_1) \otimes id(x_2) && (1.8) \\ &= x_{11} \otimes x_{12} \otimes x_2 && (1.9) \\ (id \otimes \Delta)(x_1 \otimes x_2) &= id(x_1) \otimes \Delta(x_2) && (1.10) \\ &= x_1 \otimes x_{21} \otimes x_{22} && (1.11) \end{aligned}$$

Ainsi, d'aprés la coassocitivitée, $\forall x \in C$, on a :

$x_{11} \otimes x_{12} \otimes x_2 = x_1 \otimes x_{21} \otimes x_{22} = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$

On peut ainsi, définir par récurrence les coproduits itérés :
$[(\Delta \otimes id^{\otimes(n-1)}) \circ (\Delta \otimes id^{\otimes(n-2)}) \circ ... \circ (\Delta)](x) = \sum_x x_1 \otimes ... \otimes x_{n+1}$

où $id^{\otimes n} = \underbrace{id \otimes id \otimes ... \otimes id}_{nfois}$

L'axiome de la counité s'écrit $\sum_x \epsilon(x_1)x_2 = \sum_x x_1\epsilon(x_2) = x$, pour tout x élément de C

Remarque 1.4.1. *La counité est unique. En effet si ϵ et ϵ' sont deux counités, alors $\forall x \in C$, en posant $\Delta(x) = \sum_x x_1 \otimes x_2$, on a :*

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \sum_x \epsilon(x_1\epsilon'(x_2)) && (1.12)\\ &= \sum_x \epsilon(x_1)\epsilon'(x_2) && (1.13)\\ &= \sum_x \epsilon'(\epsilon(x_1)x_2) && (1.14)\\ &= \epsilon'(x) && (1.15) \end{aligned}$$

Proposition 1.4.2. *1-) Soit C=(C,Δ, ϵ) une cogèbre. Alors C^* est une algèbre avec le produit défini par : $(f * g)(x) = (f \otimes g) \circ \Delta(x) = \sum_x f(x_1)g(x_2)$.*

L'unité est la counité de C.

2-) Soit $A = (A, m, \eta)$ une algèbre de dimension finie. Alors A^* est une cogèbre avec $\Delta_{A^*} = m^* : A^* \longrightarrow (A \otimes A)^* \approx A^* \otimes A^*$ comme coproduit $\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab)$ et la counité est $\epsilon(f) = f(1)$. on a $\Delta_{A^*}(f) = f_1 \otimes f_2$ avec $(f_1 \otimes f_2)(x \otimes y) = f(xy)$.

Démonstration. 1-)Associativité : soit f, g, h $\in C^*$; pour tout $x \in C$, on a :

$((fg)h)(x) = \sum(gf)(x_1)h(x_2) = \sum f((x_1)_1)g((x_1)_2)h(x_2)$

$=\sum f(x_1)g((x_2)_1)h((x_2)_2)$

$=\sum_x f(x_1)(gh)(x_2) = f(gh)(x)$

d'où l'associativité

De plus, pour tout x $\in C$; $\quad (\epsilon f)(x) = \sum_x \epsilon(x_1)f(x_2) = f(\sum_x \epsilon(x_1)x_2) = f(x)$.

Donc $\epsilon f = f$. On montre de même que $f\epsilon = f$. Ainsi, ϵ est l'élément neutre de C^*.

2-)coassocitivité : Soit f $\in A^*$; en identifiant $(A \otimes A \otimes A)^*$ *à* $A^* \otimes A^* \otimes A^*$, on a pour tout $x \otimes y \otimes z \in A \otimes A \otimes A$:

$((\Delta \otimes id) \circ \Delta(f))(x \otimes y \otimes z) = (\Delta(f_1) \otimes f_2)(x \otimes y \otimes z)$

$= \Delta(f_1)(x \otimes y) \otimes f_2(z)$

$= f_1(xy) \otimes f_2(z)$

$= f_1(xy)f_2(z)$

$= f(x(yz)) = f_1(x) \otimes \Delta(f_2)(yz)$

$= (id \otimes \Delta)\Delta(f)(x \otimes y \otimes z)$

ce qui montre l'associativité de Δ. D'autre part pour tout x $\in A$, on a :

$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta f(x) = f(1.x) = f(x)$;

$(id \otimes \epsilon) \circ \Delta f(x) = f(x.1) = f(x)$

car $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta)(f) = \epsilon(f_1) \otimes f_2 = \epsilon(f_1)f_2 = f$ □

Remarque 1.4.2. *Si A n'est pas de dimension finie comme algèbre, $A^* \otimes A^* \subsetneq (A \otimes A)^*$ et m^* n'est pas nécessairement un coproduit.*

Définition 1.4.3. *Soit C et D deux cogèbres et $\phi : C \longrightarrow D$ une application k-linéaire.*
On dit que ϕ est un morphisme de cogèbres si les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\phi\otimes\phi"] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \Delta_D \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_C \tag{1.16}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\epsilon_C"] \arrow[d, "\phi"'] & k \\ D \arrow[ur, "\epsilon_D"'] & \end{tikzcd} \quad \epsilon_D \circ \phi = \epsilon_C \tag{1.17}$$

1.5 Bialgèbres

Lemme 1.5.1. *Soit H un ensemble muni d'une structure d'algèbre (H,m,η) et d'une structure de cogèbre (H,Δ, ϵ). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1^o) Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres,

2^o) m et η sont des morphismes de cogèbres ,

3^o) pour tout $x, y \in H$,

$\Delta(xy) = \sum x_1y_1 \otimes x_2y_2$

$\Delta(1) = 1 \otimes 1$

$\epsilon(1) = 1$

Démonstration. • 1 $\Longleftrightarrow$ 3 :

$\Delta : H \longrightarrow H$ est un morphisme d'algèbres si et seulement si :

- pour tous x,y $\in H$, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum_x \sum_y x_1y_2 \otimes x_2y_2$

- $\Delta(1) = 1_H \otimes 1_H$

$\epsilon : H \longrightarrow k$ est un morphisme d'agèbres si et seulement si :

- $\forall x, y \in H, \epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y)$,

- $\epsilon(1) = 1_k = 1$.

Donc les conditions 1 et 3 sont équivalentes.

• $2 \Longleftrightarrow 3$

m : $H \otimes H \longrightarrow H$ est un morphisme de cogèbres si et seulement si

$\forall\ x \otimes y \in H \otimes H, \quad \Delta_H \circ m(x \otimes y) = (m \otimes m) \circ \Delta_{H \otimes H}(x \otimes y)$

$\Longleftrightarrow \Delta(xy) = (m \otimes m)(\sum (x \otimes y)_1 \otimes (x \otimes y)_2 = \sum x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$

comme (1) est une base de k, $\eta : k \longrightarrow H$ est un morphisme de cogèbres si et seulement si

$(\Delta_H \circ \eta)(1) = (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_k(1)$

$\Longleftrightarrow (\eta \otimes \eta)(1 \otimes 1) = \Delta_H(1_H)$

$\Longleftrightarrow \Delta(1) = 1 \otimes 1$

-$\epsilon_H \circ \eta(1) = \epsilon_H(1) = \epsilon_k(1)$

ainsi les conditions 2 et 3 sont équivalentes. Et on a les conditions 1 et 2 sont équivalentes. □

Définition 1.5.1. *: Une bialgèbre ou bigèbre est une famille (H,m,η,Δ,ϵ) telle que :*

1- (H,m,η) est une algèbre

2- (H,Δ,ϵ) est une cogèbre

3- Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres.

Exemple 1.5.1. *soient G un groupe et k un anneau. soit kG l'espace vectoriel de base les éléments de G. Les éléments de kG s'écrivent $\sum \lambda_g g$, $g \in G$.*

Si par linéarité le produit de G est étendu à kG tout entier, on définit un coproduit et une counité dans kG comme suit :

$\Delta(g) = g \otimes g\ \forall g \in G$;

$\epsilon(g) = 1\ \forall g \in G$.

Munit de ce coproduit et de cette counité, kG est une cogèbre. De plus, pour g,h $\in G$, on a :

$\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h)$

$\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\epsilon(gh) = \epsilon(g)\epsilon(h) = 1$. *Donc Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres.*

Ainsi kG est bigèbre.

1.6 Algèbres de Hopf

Proposition-Définition 1.6.1. *Soit $C = (C, \Delta, \epsilon)$ une coalgèbre et $A = (A, \beta, \eta)$ une algèbre. L'ensemble $Hom(C, A)$ est muni d'une structure d'algèbre de la maniére suivante : pour f,g $\in Hom(C, A)$ $f * g = \beta \circ (f \otimes g) \circ \Delta$. Autrement dit, pour $x \in C$*

$(f * g)(x) = (\beta \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(x) = \beta[(f \otimes g)(\Delta(x))]$
$= \beta[(f \otimes g)(x_1 \otimes x_2)]$
$= \beta(f(x_1) \otimes g(x_2))$
$= f(x_1)g(x_2)$
Ce produit est appelé produit de convolution ; l'unité est l'application $x \longmapsto \epsilon(x)1_A$

Démonstration. Associativité : soit f,g et h $\in Hom(C, A)$; $\forall x \in C$, on a :

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \sum_x (f * g)(x_1)h(x_2) && (1.18) \\ &= \sum_x f(x_1)g(x_2)h(x_3) && (1.19) \\ &= (f * (g * h))(x). && (1.20) \end{aligned}$$

D'autre part, pour f $\in Hom(C, A)$ et $\forall$ x $\in$ C, on a
$(id * f)(x) = \sum_x \epsilon(x_1)f(x_2) = f(\epsilon(x_1)x_2) = f(x)$
$(f * id)(x) = \sum_x f(x_1)\epsilon(x_2) = f(x_1\epsilon(x_2)) = f(x)$.
Donc $id * f = f * id =$ f. C'est *à* dire id est le neutre de $Hom(C, A)$ □

Exemple 1.6.1.

(1) Si $A = k$ *l'algèbre* $Hom(C, A)$ *est simplement* C^*

(2) Si H est une bigèbre, on peut prendre $A = C = H$. *Alors* $Hom(H, H)$ *est muni d'un produit "$*$" qui n'est pas la composition. Le neutre de ce produit est l'application* $x \longmapsto \epsilon(x)1_H$. *Ce n'est pas l'application identitée* id_H

Définition 1.6.1. *Soit H une bigèbre. On dit que H est une algèbre de Hopf si l'application identité* id_H *admet un inverse dans l'algèbre de convolution* $(Hom(H, H), *)$.

L'unique inverse de id_H *est appelé antipode de H et est généralement noté S.*

$\forall\ x \in H \sum_x S(x_1)x_2 = \epsilon(x)1 = \sum_x x_1S(x_2)$.

Autrement dit, une algèbre de *Hopf* est un k-module H avec les structures d'applications suivantes :

- multiplication :$m_H : H \otimes H \longrightarrow H$;
- unité :$\eta_H : k \longrightarrow H$ (on l'utilise pour représenter l'élément unité) ;
- comultiplication :Δ : H $\longrightarrow H \otimes H$;
- counité :$\epsilon_H : H \longrightarrow k$;
- antipode : s : H $\longrightarrow$ H.

C'est *à* dire : (H, m_H, η_H) est une algèbre, (H,Δ_H, ϵ_H) est une cogèbre et (H,$m_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H$) est une bigèbre.

Définition 1.6.2. *Soit H une algèbre de Hopf. On dit que H est commutative si la multiplication est commutative et cocommutative si la comultiplication est cocommutative, c'est à dire* $\sum_h h_1 \otimes h_2 = \sum_h h_2 \otimes h_1$ *pour tout* $h \in H$.

Remarque 1.6.1. *Par unicité de l'inverse dans l'algèbre associative* $(Hom(H, H), *)$*, si l'antipode existe, est unique.*

Exemple 1.6.2. *Soit G un groupe. Soit* $S : kG \longrightarrow kG$ *l'application linéaire transformant g en* g^{-1} *pour tout* $g \in G$*. Alors pour tout* $g \in G$ *on a :*
$(S * id)(g) = S(g)g = g^{-1}g = 1 = \epsilon(g)1 = gg^{-1} = gs(g) = (id * S)(g)$*,*
donc kG est une algèbre de Hopf et son antipode est S.

Théorème 1.6.1. *Soit* $(H, \beta, \eta, \Delta, \epsilon)$ *une algèbre de Hopf. Alors on a :*

(1) $s(1) = 1$ *et pour tout* $x, y \in H$ $s(xy) = s(x)s(y)$

(2) $\epsilon \circ s = \epsilon$ *et pour tout* $x \in H$, $\Delta(s(x)) = \sum_x s(x_2) \otimes s(x_1)$.

Démonstration. Comme $H \otimes H$ est une cogèbre et H est algèbre, $Hom(H \otimes H, H)$ est une algébre de convolution. Le produit $*$ vérifie $(f * g)(x \otimes y) = f(x_1 \otimes y_1)g(x_2 \otimes y_2)$.
L'élément neutre i vérifie $i(x \otimes y) = \epsilon(x)\epsilon(y)$.
Cherchons l'inverse de β dans $Hom(H \otimes H, H)$. On a :
$(s \circ \beta) * (\beta(x \otimes y)) = \sum_x \sum_y s(x_1y_1)x_2y_2 = \sum_{x,y} s((xy)_1)(xy)_2$
$= \epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y) = i(x \otimes y)$
donc $(s \circ \beta) * \beta = i$.
$(\beta * (\beta \circ (s \otimes s)) \circ \tau)(x \otimes y) = \sum_x \sum_y x_1y_1s(y_2)s(x_2)$
$= \epsilon(y) \sum_x x_1s(x_2) = \epsilon(x)\epsilon(y)$
donc $\beta * (\beta \circ (s \otimes s) \circ \tau) = i$.
Par associativité de la loi $*$ on a :
$s \circ \epsilon = (s \circ \epsilon) * (\epsilon * (\epsilon \circ (s \otimes s) \circ \tau)) = ((s \circ \epsilon) * \epsilon) * (\epsilon(s \otimes s) \circ \tau) = \epsilon(s \otimes s) \circ \tau$
Comme H est cogèbre et $H \otimes H$ est algèbre, donc $Hom(H, H \otimes H)$ est une algèbre de convolution. Cherchons l'inverse de Δ dans cette algèbre.
$((\Delta \circ s) * \Delta)(x) = \sum_x \sum_{s(x_1)} s(x_1)x_2 \otimes s(x_2)x_3$
$= \sum_x \sum_{s(x_1} (s(x_1)x_2)_1 \otimes (s(x_1)x_2)_2 = \Delta(\epsilon(x)) = \epsilon(x)1 \otimes 1 = i(x)$.
Donc $(\Delta \circ s) \circ \Delta = i$.
$\Delta * (\tau \circ (s \otimes s) \circ \Delta)\Delta(x) = \sum_x x_1s(x_4) \otimes x_2s(x_3)$
$= \sum_x x_1s(x_3) \otimes \epsilon(x_2)$
$= \sum_x x_1s(x_2) \otimes 1 = \epsilon(x)1 \otimes 1 = i(x)$.
Donc $\Delta * (\tau \circ (s \otimes s) \circ \Delta)\Delta = i$. D'après ce qui précéde, on a $\Delta \circ s = \tau \circ (s \otimes s) \circ \Delta$

Comme $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ et $s(1)1 = \epsilon(1)1 = 1$, donc $s(1) = 1$. Pour tout x $\in H$,
$\epsilon(x) = \epsilon(\epsilon(x)1) = \sum_x \epsilon(x_1 s(x_2)) = \sum_x \epsilon(x_1)\epsilon(s(x_2))$
$= \epsilon(s(\sum_x \epsilon(x_1)x_2)) = \epsilon(s(x))$.
Donc $\epsilon = \epsilon \circ s$. $\square$

Chapitre 2

Algèbres de H-modules, Algèbres de H-comodules et Algèbres de H-dimodules

2.1 Algèbres de H-modules

Dans toute la suite H est algèbre de Hopf.

Définition 2.1.1. *Soit A une algèbre. Un A-module à gauche M est tout couple (M, p) où M est un k-module et p est une application k-linéaire de $A \otimes M$ dans M ($p(a \otimes m) = a.m$) vérifiant les axiomes suivants :*

- associativité

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes p"] \arrow[d, "m_A \otimes id_M"] & A \otimes M \arrow[d, "p"] \\ A \otimes M \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd} \quad : p \circ (m_A \otimes id_M) = p \circ (id_A \otimes p) \tag{2.1}$$

- unité

$$\begin{tikzcd} k \otimes M \arrow[r, "\eta \otimes id_M"] \arrow[dr] & A \otimes M \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd} \quad : p \circ (\eta \otimes id_M) = id_M. \tag{2.2}$$

Remarques 2.1.1. *- L'associativité est équivalente à $a.(b.m) = (ab).m$ et l'unité à $1_A.m = m$.*

- Si M est un A-module à gauche, alors on peut définir :

$\rho : A \longrightarrow End(M)$ par $\rho(a)(m) = a.m$ pour tout $a \in A$ et $m \in M$.

- Réciproquement, si on se donne une représentation $\rho : A \longrightarrow End(M)$, alors M est A-module à gauche défini par $a.m = \rho(a)(m)$ pour tout $a \in A$ et $m \in M$.

Définitions 2.1.1. *Si (M,p) et (M',p') sont des A-modules, un morphisme de A-modules est une application k-linéaire $f : M \longrightarrow M'$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "id_A\otimes f"] & M \arrow[d, "f"] \\ A\otimes M' \arrow[r, "p'"] & M' \end{tikzcd} . \tag{2.3}$$

Proposition 2.1.1. *Soient M et N deux H-modules à gauche avec comme actions respectives ρ_M et ρ_N. Alors :*

(i) l'application $\rho_{M\otimes N}$:$H\otimes M\otimes N \longrightarrow^{\Delta\otimes id_M\otimes id_N} H\otimes H\otimes M\otimes N$

$\longrightarrow^{id_H\otimes\tau_{H\otimes M}\otimes id_N} H\otimes M\otimes H\otimes N \longrightarrow^{\rho_M\otimes\rho_N} M\otimes N \quad (h(m\otimes n) = h_1m\otimes h_2n)$,

donne une structure de H-module à gauche à $M\otimes N$.

(ii) $Hom(M,N)$ est un H-module à gauche avec comme action :

$(h \rightharpoonup f)(m) = \sum_h h_1 \rightharpoonup_N [f(s(h_2) \rightharpoonup_M)]$; $h\in H$, $m\in M$ et $f\in Hom(M,N)$.

Démonstration. (i) $\rho_{M\otimes N}(h\otimes(m\otimes n)) = (\rho_M\otimes\rho_N \circ (id_H\otimes\tau_{H\otimes M}\otimes id_N)\circ(\Delta\otimes$

$id_M\otimes id_N))(h\otimes m\otimes n) = \rho_{M\otimes N}[(id_H\otimes\tau_{H\otimes M}\otimes id_N)(h_1\otimes h_2\otimes m\otimes n)]$

$= \rho_{M\otimes N}(h_1\otimes m\otimes h_2\otimes n) = \rho_M(h_1\otimes m)\otimes\rho_N(h_2\otimes n) = h_1m\otimes h_2n$

$(\rho_{M\otimes N}\circ(m_H\otimes id_M))(h\otimes h'\otimes(m\otimes n)) = \rho_{M\otimes N}[(m_H\otimes id_M)(h\otimes h'\otimes(m$

$\otimes n)]$

$=(\rho_{M\otimes N}(h.h'\otimes(m\otimes n)) = (h.h')_1m\otimes(h.h')_2n)$

$[\rho_{M\otimes N}\circ(id_H\otimes\rho_{M\otimes N})(h\otimes h'\otimes(m\otimes n = \rho_{M\otimes N}[(id_H\otimes\rho_{M\otimes N})(h$

$\otimes h'\otimes(m\otimes n)]$

$=\rho_{M\otimes N}(h\otimes h'_1m\otimes h'_2n) = h_1h_1m\otimes h_2h'_2 = (h.h')_1m\otimes(h.h')_2n,$

d'où $\rho_{M\otimes N}\circ(m_H\otimes id_M) = \rho_{M\otimes N}\circ(id_H\otimes\rho_{M\otimes N})$.

D'autre part, on a :

$(\rho_{M\otimes N}\circ(\eta_H\otimes id_M))(r\otimes m) = \rho_{M\otimes N}[(\eta_H\otimes id_M)(r\otimes m)] = \rho_{M\otimes N}(1_H\otimes m\otimes n)$

$= (1_H)_1m\otimes(1_H)_2n = m\otimes n$, ainsi $M\otimes N$ est H-module.

(ii) Soit f $\in Hom(M,N)$, m $\in$ M, $h, h'\in$ H ;

$(h.h' \rightharpoonup f)(m) = \sum(h.h')_1 \rightharpoonup [f(s(h.h')_2 \rightharpoonup m)]$

$= \sum(h_1.h'_1) \rightharpoonup [f(s(h_2.h'_2) \rightharpoonup m)]$

$= \sum(h_1.h'_1) \rightharpoonup [f(s(h_2)s(h'_2) \rightharpoonup m]$

$= \sum h_1 \rightharpoonup \{h'_1 \rightharpoonup [f(s(h_2 \rightharpoonup (s(h'_2) \rightharpoonup m)]\}$

$= \sum h_1 \rightharpoonup [(h' \rightharpoonup f)(s(h_2) \rightharpoonup m)]$

$= (h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup f))(m)$, d'où $(h.h') \rightharpoonup f = h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup f)$. □

Remarque 2.1.1. *On a k est un H-module trivial ($h.\lambda = \epsilon(h)\lambda$).*

Définition 2.1.2. *Soit H une algèbre de Hopf. On appelle algèbre de H-module à gauche A tout k-module et H-module à gauche telles que les applications*
$\epsilon_A : k \longrightarrow A$ *et* $m_A : A \otimes A \longrightarrow A$ *sont des morphismes de H-modules,*
i.e, $h(aa) = (h_1 a)(h_2 a') \quad \forall \quad h \in H \quad et \quad a, a' \quad \in A.$

Si A est une algèbre de H-module, alors on note A^{op} son algèbre opposée. On sait qu'elle est isomorphe $\grave{a}$ A comme k-module. Donc si A est un H-module, alors A^{op} est automatiquement un H-module.

Définition 2.1.3. *Un morphisme d'algèbres de H-modules est un morphisme de H-modules qui est aussi un morphisme de k-algèbres.*

Proposition 2.1.2. *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative. Si A et B sont des algèbres de H-modules à gauche, alors* $A \otimes B$ *et* A^{op} *sont des algèbres H-modules et* $A \otimes B$ *et* $B \otimes A$ *sont isomorphes comme algèbres de H-modules.* $h.a^{op} = (h.a)^{op}, \quad a^{op} \quad \in A^{op}$.

Proposition 2.1.3. *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative. Si M est H-module de type fini à gauche, alors End(M) est une algèbre de H-module à gauche. L'action est celle de la proposition 2.1.1.*

Démonstration. On a $End(M) = Hom(M, M)$ est un H-module. Soient h $\in$ H, m $\in$ M, f et g $\in End(M)$. Alors

$$\begin{aligned}
[h(fg)](m) &= [\sum(h_1 \rightharpoonup f).(h_2 \rightharpoonup g)](m) && (2.4)\\
&= \sum(h_1 \rightharpoonup f)[(h_2 \rightharpoonup g)(m)] && (2.5)\\
&= \sum(h_1 \rightharpoonup f)[h_2 \rightharpoonup (g(s(h_3) \rightharpoonup m))] && (2.6)\\
&= \sum h_1 \rightharpoonup \{f[s(h_2) \rightharpoonup (h_3 \rightharpoonup [g(h_4) \rightharpoonup m)])]\} && (2.7)\\
&= \sum h_1 \rightharpoonup \{f[(s(h_2).h_3) \rightharpoonup (g[s(h_4) \rightharpoonup m])]\} && (2.8)\\
&= \sum h_1 \rightharpoonup [f(\epsilon(h_2).1_H \rightharpoonup [g(s(h_3) \rightharpoonup m)])] && (2.9)\\
&= \sum h_1 \epsilon(h_2) \rightharpoonup [f(g[s(h_3) \rightharpoonup m])] && (2.10)\\
&= \sum h_1 \rightharpoonup [(f.g)(s(h_2) \rightharpoonup m)] && (2.11)\\
&= (h \rightharpoonup (f.g))(m), && (2.12)
\end{aligned}$$

donc h $\rightharpoonup$ f.g $= \sum(h_1 \rightharpoonup f).(h_2 \rightharpoonup g)$

$$\begin{aligned}
(h \rightharpoonup I_M)(m) &= \sum h_1 \rightharpoonup [I_M(s(h_2) \rightharpoonup m)] && (2.13)\\
&= \sum h_1 \rightharpoonup (s(h_2) \rightharpoonup m) && (2.14)\\
&= \sum h_1.s(h_2) \rightharpoonup m && (2.15)\\
&= \epsilon(h)m, && (2.16)
\end{aligned}$$

d'où h$\rightharpoonup I_M = \epsilon(h).I_M$. Ainsi, $End(M)$ est une algèbre de H-module. $\square$

Remarque 2.1.2. *Si M et N sont des H-modules à gauche qui sont projectifs de types finis sur k (H cocommutative) , alors l'isomorphisme naturel $End(M) \otimes End(N) \cong End(M \otimes N)$ est un morphisme d'algèbres de H-modules.*

2.2 Algèbres de H-comodules

Définition 2.2.1. *Soit (C, Δ, ϵ) une cogèbre et M un k-module. On dit que M est un C-comodule à gauche s'il est existe une application linéaire $\rho : M \longrightarrow C \otimes M$ telle que les diagrammes suivants commutent.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & C \otimes M \arrow[d, "id_C \otimes \rho"] \\ C \otimes M \arrow[r, "\Delta \otimes id_M"] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} , \quad (2.17)$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "id_M"'] & C \otimes M \arrow[d, "\epsilon \otimes id_M"] \\ & k \otimes M \end{tikzcd} . \quad (2.18)$$

Remarque 2.2.1. *Pour un C-comodule à droite, on a les diagrammes commutatifs suivants .*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & M \otimes C \arrow[d, "\rho \otimes id_C"] \\ M \otimes C \arrow[r, "id_M \otimes \Delta"] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \quad (2.19)$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "id_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \epsilon"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd} . \quad (2.20)$$

Remarques 2.2.1. *- Dire que les diagrammes de la définition 2.2.1 commutent est équivalent à : $(id_C \otimes \rho) \circ \rho = (\Delta \otimes id_M) \circ \rho$ et $(\epsilon \otimes id_M) \circ \rho = id_M$.*

- Pour un C-comodule à gauche ou à droite M, on notera (M, ρ) où ρ est la coaction à gauche ou à droite de C sur M.

D'après la notation de sweedler :

- si (M, ρ) est un comodule à droite, on a $\rho(m) = \sum_m m_0 \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1$

- si (M, ρ) est un comodule à gauche, on a $\rho(m) = \sum_m m_{-1} \otimes m_0 = m_{-1} \otimes m_0$.

Donc le diagramme de la remarque 2.2.1 donne :

$m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$.

Définition 2.2.2. *Soient (V,ρ) et (W,ρ') des C-comodules. Supposons que $f : V \longrightarrow W$ est une application k-linéaire. Alors f est un morphisme de comodules si le diagramme*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"] & W \arrow[d, "\rho'"] \\ V \otimes C \arrow[r, "f\otimes id_C"] & W \otimes C \end{tikzcd} \quad \textit{commute.} \tag{2.21}$$

En d'autres termes, $f : V \longrightarrow W$ est un morphisme de comodules à droite, si $(f \otimes id_C)(\rho(v)) = \rho'(f(v))$.

Avec la notation de Sweedler on a : $\sum f(v_0) \otimes v_1 = \sum f(v)_0 \otimes f(v)_1$

pour $v \in V$ *où* $\rho(v) = v_0 \otimes v_1$.

Proposition 2.2.1. *Soit C une cogèbre. Si M est un C-comodule à droite, alors M est un C^*-module à gauche.*

Démonstration. Si $\rho : M \longrightarrow M \otimes C$ est l'application qui définit la structure de comodule de M avec $\rho(v) = \sum v_0 \otimes v_1$, alors posons : $f.v = \sum f(v_1)v_0$ pour tout f $\in C^*$ et v $\in M$.

Il est facile de voir que ceci définit une action de module. On note

$(f * g).v = \sum f(v_1)g(v_2)v_0 = f.\sum g(v_1)v_0 = f.(g.v)$

et $\epsilon.v = \sum \epsilon(v_1)v_0 =$ v, pour tout $f, g \in C^*$ et v $\in M$. □

Proposition 2.2.2. *Soit A une algèbre projective de type fini comme k-module. Si M est un A-module à gauche, alors M est un $A^* -$ comodule à droite.*

Soit H une algèbre de Hopf projective de type fini comme k-module. Alors, on a un isomorphisme naturel

$\lambda : Hom(M, M \otimes H) \longrightarrow Hom(H^* \otimes M, M)$ donné par :

$\lambda(f)(h^* \otimes m) = (id_M \otimes h^*)f(m)$, $f \in Hom(M, M \otimes H)$, $h^* \in H^*$ et m $\in$ M.

Proposition 2.2.3. *(i) Si H est une algèbre de Hopf projectif de type fini comme k-module, alors $\chi : M \longrightarrow M \otimes H$ définit une structure de H-comodule à droite sur M si et seulement si $\lambda(\chi) : H^* \otimes M \longrightarrow M$ définit une structure de H^*-module à gauche.*

(ii) Si M, N sont des H-comodules à droite donc des H^*-modules à gauche et si $f \in Hom(M, N)$, alors f est un morphisme H-comodules à droite si et seulement si f est un morphisme de H^*-modules à gauche.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$: Supposons que $\chi : M \longrightarrow M \otimes H$ définit une structure de H-comodule sur M et montrons que $\lambda(\chi) \circ (\beta \otimes id_M) = \lambda(\chi) \circ (id_{H^*} \otimes \lambda(\chi))$.

On a :

$$\begin{aligned} [(\lambda(\chi) \circ (\beta \otimes id_M)](h_1{}^* \otimes h_2{}^* \otimes m) &= \lambda(\chi)((h_1{}^* * h_2{}^*) \otimes m) && (2.22)\\ &= (id_M \otimes (h_1{}^* * h_2{}^*))\chi(m) && (2.23)\\ &= (id_M \otimes (h_1{}^* * h_2{}^*))(m_0 \otimes m_1) && (2.24)\\ &= m_0 \otimes h_1{}^*(m_{11})h_2{}^*(m_{12}), && (2.25) \end{aligned}$$

car H^* est une algèbre pour $({h_1}^*{h_2}^*)(h) = \sum_h {h_1}^*(h_1){h_2}^*(h_2)$. On a ainsi,

$$\begin{aligned}
(\lambda(\chi)\circ(id_{H^*}\otimes\lambda(\chi)))({h_1}^*\otimes{h_2}^*\otimes m) &= \lambda(\chi)[{h_1}^*\otimes(id_M\otimes{h_2}^*)\chi(m)] && (2.26)\\
&= \lambda(\chi)[{h_1}^*\otimes(m_0\otimes{h_2}^*(m_1)] && (2.27)\\
&= \lambda(\chi)[{h_1}^*{h_2}^*(m_1)\otimes m_0] && (2.28)\\
&= [id_M\otimes{h_1}^*{h_2}^*(m_1)]\chi(m_0) && (2.29)\\
&= m_{00}\otimes{h_1}^*(m_{01}){h_2}^*(m_1) && (2.30)\\
&= m_0\otimes{h_1}^*(m_{11}){h_2}^*(m_{12}). && (2.31)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda(\chi)[(\mu\otimes id_M)(1_k\otimes m)] &= \lambda(\chi)(\epsilon\otimes m) && (2.32)\\
&= (id_M\otimes\epsilon)(m_0\otimes m_1) && (2.33)\\
&= m_0\otimes\epsilon(m_1) && (2.34)\\
&= m_0\epsilon(m_1) && (2.35)\\
&= m. && (2.36)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda(\chi)$ définit une structure de H^*-module *à* gauche sur M.

[$\Leftarrow$ Les relation 2.29 et 2.33 montrent que $m_0\otimes m_{01}\otimes m_{11} = m_0\otimes m_{11}\otimes m_{12}$ et, donc, χ est une structure de H-comodule.

(ii) On sait que M et N sont des H-comodules *à* droite si et seulement si ils sont des H^*-modules *à* gauche. Donc $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de H-comodule *à* droite si et seulement si f est un morphisme de H^*-module *à* gauche. $\square$

Proposition 2.2.4. *Soit M et N des H-comodules à droite avec les actions χ_M et χ_N. Alors l'application*

$\chi_{M\otimes N} : M\otimes N \longrightarrow^{\chi_M\otimes\chi_N} M\otimes H\otimes N\otimes H \longrightarrow^{id_M\otimes\tau_{H\otimes N}\otimes id_N} M\otimes N\otimes H\otimes H \longrightarrow^{id_M\otimes id_N\otimes\beta_H}$ $M\otimes N\otimes H$ *donne à $M\otimes N$ une structure de H-comodule à droite ; c'est le produit tensoriel de M et N.*

Démonstration. On va montrer que : $(\chi_{M\otimes N}\otimes id_H)\circ\chi_{M\otimes N} = (id_{M\otimes N}\otimes\Delta_H)\circ\chi_{M\otimes N}$.

Posons $\chi = \chi_{M\otimes N}$. Ceci donne pour m $\in$ M et n $\in$ N :

$$\begin{aligned}
\chi(m\otimes n) &= ((id_M\otimes id_N\otimes\beta)\circ(id_M\otimes\tau_{N\otimes H}\otimes id_H)\circ(\chi_M\otimes\chi_N))(m\otimes n) && (2.37)\\
&= ((id_M\otimes id_N\otimes\beta)\circ(id_M\otimes\tau_{N\otimes H}\otimes id_H))(\chi_M(m)\otimes\chi_N(n) && (2.38)\\
&= ((id_M\otimes id_N\otimes\beta)\circ(id_M\otimes\tau_{N\otimes H}\otimes id_H))(m_0\otimes m_1\otimes n_0\otimes n_1) && (2.39)\\
&= (id_M\otimes id_N\otimes\beta)(m_0\otimes n_0\otimes m_1\otimes n_1) && (2.40)\\
&= m_0\otimes n_0\otimes\beta(m_1\otimes n_1) && (2.41)\\
&= m_0\otimes n_0\otimes m_1n_1. && (2.42)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\chi\otimes id_H)(\chi(m\otimes n)) = (\chi\otimes id_H)(m_0\otimes n_0\otimes m_1n_1 \qquad (2.43)$$

$$
\begin{aligned}
&= \chi(m_0 \otimes n_0) \otimes m_1 n_1 && (2.44)\\
&= m_{00} \otimes n_{00} \otimes m_{01} n_{01} \otimes m_1 n_1 \quad par \quad Sweedler && (2.45)\\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2 (1), && (2.46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(id_{M\otimes N} \otimes \Delta_H)(\chi(m \otimes n)) &= (id_{M\otimes N} \otimes \Delta)(m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) && (2.47)\\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes (m_1 n_1)_1 \otimes (m_1 n_1)_2 && (2.48)\\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_{11} n_{11} \otimes m_{12} n_{12} \quad par \quad Sweedler && (2.49)\\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2 (2), && (2.50)
\end{aligned}
$$

(1) et (2) donne l'égalitée. En fin, on a

$$
\begin{aligned}
(id_{M\otimes N} \otimes \epsilon)(\chi(m \otimes n)) &= (id_{M\otimes N} \otimes \epsilon)(m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) && (2.51)\\
&= (m_0 \otimes n_0)\epsilon(m_1 n_1) && (2.52)\\
&= (m_0 \epsilon(m_1)) \otimes (n_0 \epsilon(n_1)) && (2.53)\\
&= m \otimes n. && (2.54)
\end{aligned}
$$

D'o*ù* M $\otimes$ N est un H-comodule *à* droite. □

Supposons que M est projectif de type fini comme k-module et que $\chi_M : M \longrightarrow M \otimes H$ donne

à M une structure de H-comodule *à* droite. Définissons l'application

$$
f : M^* \longrightarrow Hom(M, H)
$$
$$
m^* \longmapsto f_{m^*}
$$

par $f_{m^*}(m) = (m^* \otimes id_H)\chi_M(m) = \sum m^*(m_0) \otimes m_1 = \sum \langle m^*, m_0 \rangle m_1$.
Identifiant $Hom(M, H)$ avec $H \otimes M^*$, on a une application $\chi_{M^*} : M^* \longrightarrow H \otimes M^*$.

Proposition 2.2.5. *χ_{M^*} donne une structure de H-comodule à gauche à M^*.*

Démonstration. En posant $\chi_{M^*}(m^*) = \sum_{m^*} {m^*}_{-1} \otimes {m^*}_0$, on a :
$\sum_{m^*} {m^*}_{-1} \langle {m^*}_0, m \rangle = f_{m^*}(m) = \sum_m \langle m^*, m_0 \rangle m_1$ (i).
Ainsi, $\forall$ m $\in$ M,

$$
\begin{aligned}
\sum \epsilon({m^*}_{-1})\langle {m^*}_0, m\rangle &= \epsilon(\textstyle\sum_{m^*} {m^*}_{-1}\langle {m^*}_0, m\rangle)\\
&= \epsilon(\textstyle\sum_m \langle m^*, m_0\rangle m_1)\\
&= \textstyle\sum_m \langle m^*, m_0 \epsilon(m_1)\rangle\\
&= \langle m^*, m\rangle.
\end{aligned}
$$

Donc, $m^* = \sum_{m^*} \epsilon({m^*}_{-1}){m^*}_0 = (\epsilon \otimes id_H) \circ \chi_{M^*}(m^*)$; c'est la counité pour M^*
On a un morphisme de M^* dans $H \otimes H \otimes M^*$. Maintenant que $H \otimes H \otimes M^* \cong Hom(M, H \otimes H)$, on va travailler sur $Hom(M, H \otimes H)$. On veut montrer que : $(id_{M^*} \otimes \chi_{M^*}) \circ \chi_{M^*} = (\Delta \otimes id_H) \circ \chi_{M^*}$.

$\forall$ m $\in$ M,

$$
\begin{aligned}
[(id_{M^*} \otimes \chi_{M^*}) \circ \chi_{M^*}](m) &= \sum_{m^*} m^*{}_{-1} \otimes [\sum_{m^*{}_0} m^*{}_{(0)(-1)} \langle m^*{}_{(0)(0)}, m \rangle] && (2.55) \\
&= \sum_{m^*} m^*{}_{-1} \otimes [\sum_{m} \langle m^*{}_0, m_0 \rangle m_1] \quad par \quad (i) && (2.56) \\
&= \sum_{m} \sum_{m^*} m^*{}_{-1} \langle m^*{}_0, m_0 \rangle \otimes m_1 && (2.57) \\
&= \sum_{m} \langle m^*, m_0 \rangle m_1 \otimes m_2 \quad par \quad (i) && (2.58)
\end{aligned}
$$

$\forall$ m $\in$ M,

$$
\begin{aligned}
[(\Delta \otimes id_H) \circ \chi_{M^*}](m) &= \sum_{m^*} \Delta(m^*_{-1}) \langle m^*_0, m \rangle && (2.59) \\
&= \Delta(\sum_{m}^{*} m^*{}_{-1} \langle m^*{}_0, m \rangle) && (2.60) \\
&= \Delta(\sum_{m} \langle m^*, m_0 \rangle \otimes m_1 && (2.61) \\
&= \sum_{m} \langle m^*, m_0 \rangle m_1 \otimes m_2 && (2.62)
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposition 2.2.6. *Soit M,N des H-comodules avec M projectif de type fini sur k. Alors on peut mettre un structure de H-comodule à droite sur $Hom(M, N)$.*

Démonstration. i) Si x $\longmapsto \sum_x x_{(-1)} \otimes x_{(0)}$ est une structure de H-comodule $\grave{a}$ gauche, alors :
$((id \otimes \chi) \circ \chi)(x) = (id \otimes \chi)(x_{(-1)} \otimes x_{(0)} = x_{(-1)} \otimes x_{(0)(-1)} \otimes x_{(0)(0)}$ et
$(\Delta \otimes id) \circ \chi(x) = (\Delta \otimes)(x_{(-1)} \otimes x_{(0)}) = (x_{(-1)})_1 \otimes (x_{(-1)})_2 \otimes x_0$
ii) Si x $\longmapsto \sum_x x_{(0)} \otimes S(x_{(-1)})$ est une structure de H-comodule $\grave{a}$ droite, alors :
$(\chi \otimes id) \circ \chi(x) = (\chi \otimes id)(x_0 \otimes S(x_{(-1)})) = x_{(0)(0)} \otimes S(x_{(0)(-1)}) \otimes S(x_{(-1)})$ et
$(id \otimes \Delta) \circ \chi(x) = (id \otimes \Delta)(x_0 \otimes S(x_{(-1)}) = x_0 \otimes S(x_{(-1)(2)}) \otimes S(x_{(-1)(1)})$.
D'aprèes i) et ii), on conclut que x $\longmapsto \sum_x x_{(-1)} \otimes x_{(0)}$ est une structure de H-comodule $\grave{a}$ gauche si et seulement si x $\longmapsto \sum_x x_{(0)} \otimes S(x_{(-1)})$ est une structure de H-comodule $\grave{a}$ droite.
D'autre part, d'après la proposition 2.2.5, M^* est un H-comodule $\grave{a}$ gauche. D'après ce qui précéde, M^* est un H-comodule $\grave{a}$ droite. Et par la proposition 2.4, $N \otimes M^*$ est un H-comodule $\grave{a}$ droite. Comme il est isomorphe $\grave{a}$ $Hom(M, N)$, $Hom(M, N)$ est un H-comodule $\grave{a}$ droite. $\square$

On construit l'application suivante :

$N \otimes M^* \longrightarrow^{\chi_N \otimes \chi_{M^*}} N \otimes H \otimes H \otimes M^* \longrightarrow^{I_N \otimes I_H \otimes \tau_{H \otimes M^*}} N \otimes H \otimes M^* \otimes H$

$\longrightarrow^{I_N \otimes \tau_{H \otimes M^*} \otimes s} N \otimes M^* \otimes H \otimes H \longrightarrow^{w^{-1} \otimes \beta} Hom(M,N) \otimes H$

où $w : Hom(M,N) \longrightarrow N \otimes M^*$

Si $f \leftrightarrow n \otimes m^*$, alors on a : $f \longmapsto [\sum_n \sum_{m^*} n_0 \otimes {m^*}_0 \otimes n_1.s({m^*}_{-1})]$.

Lemme 2.2.1. *Avec l'action décrite précédemment, en posant* $\chi(f) = f_0 \otimes f_1$*, on a :* $\chi(f)(m) = \sum_{mf(m_0)} f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_1.s(m_1) = f_0(m) \otimes f_1$ *;* $m \in M$ *et* $f \in Hom(M,N)$*. C'est la coaction de* $Hom(M,N)$*.*

Démonstration. Soit $f \leftrightarrow n \otimes m^*$ dans l'isomorphisme $w : Hom(M,N) \cong N \otimes M^*$. Posons $f(m) = n\langle m^*, m\rangle$ et $\chi(f) = \sum_{(n)(m^*)} n_0 \otimes {m^*}_0 \otimes n_1.s({m^*}_{(-1)})$.

On a :

$$\begin{aligned}
\chi(f)(m) &= \sum_{(n)(m^*)} n_0\langle {m^*}_0, m\rangle \otimes n_1 s({m^*}_{(-1)}) && (2.63)\\
&= \sum_{(n)(m)} n_0\langle m^*, m_0\rangle \otimes n_1.s(m_1) && (2.64)\\
&= \sum_{m} \sum_{f(m_0)} f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_1.s(m_1). && (2.65)
\end{aligned}$$

On a M et N sont des H-comodules, donc

$m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$ et

$f(m_0)_{00} \otimes f(m_0)_{01} \otimes f(m_0)_1 = f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_{11} \otimes f(m_0)_{12}$,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)(\chi(f)(m) &= (id \otimes \Delta)(f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_1.s(m_1) && (2.66)\\
&= f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_{11}.s(m_{12}) \otimes f(m_0)_{12} s(m_{12}) && (2.67)\\
&= f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_{11}.s(m_2) \otimes f(m_0)_{12}.s(m_1) && (2.68)\\
(\chi \otimes id)(\chi(f)(m)) &= (\chi \otimes id)(f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_1.s(m_1)) && (2.69)\\
&= \chi(f_0)(m_0) \otimes f(m_0)_1.s(m_1) && (2.70)\\
&= f(m_{00})_{00} \otimes f(m_{00})_{01}.s(m_{01}) \otimes f(m_0)_1.s(m_1) && (2.71)\\
&= f(m_0)_0 \otimes f(m_1)_{11}.s(m_2) \otimes f(m_0)_{12}.s(m_1), && (2.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_0(m)\epsilon(f_1) &= f(m_0)_0 \epsilon(f(m_0)_1 s(m_1)) && (2.73)\\
&= f(m_0)_0 \epsilon(f(m_0)_1)\epsilon(s(m_1)) && (2.74)\\
&= f(m_0)\epsilon(m_1) && (2.75)\\
&= f(m_0 \epsilon(m_1) && (2.76)\\
&= f(m), && (2.77)
\end{aligned}$$

$\forall$ m $\in$ M, donc $f_0\epsilon(f_1) = f$.

Par suite, $Hom(M,N)$ est un H-comodule à droite. $\square$

Proposition 2.2.7. *Si H est projectif de type fini sur k, alors la structure précédente est la même que celle obtenue en passant aux H^*-modules.*

Démonstration. On a M est un H^*-module par $h^* \rightharpoonup m = \sum_m m_0\langle h^*, m_1\rangle$ (i) car M et N sont des H-comodules. En regardant M et N comme des H^*-modules, on a $Hom(M,N)$ est un H^*-module par ce qu'il est un H-comodule et on a :

$$(h^* \rightharpoonup f)(m) = \sum {h^*}_1 \rightharpoonup [f(s({h^*}_2) \rightharpoonup m)] \tag{2.78}$$

$$= \sum {h^*}_1 \rightharpoonup [f(m_0\langle s({h^*}_2), m_1\rangle)] \tag{2.79}$$

$$= \sum [f(m_0\langle s({h^*}_2), m_1\rangle)]_0\langle h^*, [f(m_0\langle s({h^*}_2), m_1\rangle)]_1\rangle \quad d'après \quad (i) \tag{2.80}$$

$$= \sum f(m_0)_0\langle {h^*}_1, f(m_0)_1\rangle\langle {h^*}_2, s(m_1)\rangle \tag{2.81}$$

$$= \sum f(m_0)_0\langle h^*, f(m_0)_1.s(m_1)\rangle. \tag{2.82}$$

$\square$

Définition 2.2.3. *On dit qu'un ensemble A est une algèbre de H-comodule à droite si A est une k-algèbre qui a une structure de H-comodule à droite telle que les applications structurelles : $\mu_A : k \longrightarrow A$ et $\beta : A \otimes A \longrightarrow A$ sont des morphismes de H-comodules à droite.*

C'est à dire, $\chi(1_A) = 1_A \otimes 1_H$ et $\chi_A(a.b) = \sum a_0b_0 \otimes a_1b_1$, pour tout a, b $\in$ A.

Proposition 2.2.8. *Soit H commutative. Si A et B sont des algèbres de H-comodules à droite, alors il en est de même pour $A \otimes B$ et A^{op}, $\chi_{A^{op}}(a^{op}) = (a^{op})_0 \otimes (a^{op})_1 = (a_0)^{op} \otimes a_1$. De plus $A \otimes B$ et $B \otimes A$ sont isomorphes comme algèbres de H-comodules.*

Démonstration. (i) $A \otimes B$ est une algèbre de H-comodule à droite. On sait déjà que $A \otimes B$ est un H-comodule.

Soit $a \otimes b \in A \otimes B$:

$$\chi[(a \otimes b)(c \otimes d)] = \chi(ac \otimes bd) \tag{2.83}$$

$$= a_0c_0 \otimes b_0d_0 \otimes a_1c_1b_1d_1, \tag{2.84}$$

$$[(a \otimes b)_0(c \otimes d)_0] \otimes [(a \otimes b)_1(c \otimes d)_1] = [(a \otimes b)_0 \otimes (a \otimes b)_1][(c \otimes d)_0 \otimes (c \otimes d)_1] \tag{2.85}$$

$$= [a_0 \otimes b_0 \otimes a_1b_1][c_0 \otimes d_0 \otimes c_1d_1] \tag{2.86}$$

$$= a_0c_0 \otimes b_Od_0 \otimes a_1b_1c_1d_1 \tag{2.87}$$

$$= (a \otimes b)_0 \otimes (c \otimes d)_0 \otimes a_1c_1b_1d_1, \quad H \quad commutative \tag{2.88}$$

Par suite, on a $A \otimes B$ est une algèbre de H-comodule car 2.88 = 2.92. $\square$

Définition 2.2.4. *On appelle morphisme d'algèbres de comodules tout morphisme de comodules qui est un morphisme d'algèbres.*

Proposition 2.2.9. *Soit H commutative. Soit M et N des H-comodules à droite qui sont projectifs et de type fini sur k. Alors $End(M)$ est une algèbre de H-comodule à droite et l'isomorphisme $End(M) \otimes End(N) \cong End(M \otimes N)$ est morphisme de H-comodules.*

Démonstration. On a $End(M) = Hom(M, M)$ est un H-comodule c'est aussi une k-algèbre pour la composition des applications. Posons I $= id_M$

$$\begin{aligned} \chi(I)(m) &= \sum I(m_0)_0 \otimes I(m_0)_1 s(m_1) && (2.89)\\ &= \sum m_0 \otimes m_1.s(m_2) && (2.90)\\ &= \sum m_0 \otimes \epsilon(m_1)1_H && (2.91)\\ &= \sum m_0\epsilon(m_1) \otimes 1_H && (2.92)\\ &= m \otimes 1_H. && (2.93)\end{aligned}$$

Ainsi, la premiére condition est vérifiée. Pour l'autre, on va prouver que :
$\sum(f.g)_0 \otimes (f.g)_1 = \sum f_0.g_0 \otimes f_1.g_1$ avec $f.g = f \circ g$.

$$\begin{aligned} \sum[f_0.g_0](m) \otimes f_1g_1 &= \sum f_0(g(m_0)_0) \otimes f_1(g(m_0)_1).s(m_1) && (2.94)\\ &= \sum f(g(m_0)_0)_0 \otimes f(g(m_0)_0)_1.s(g(m_0)_1).g(m_0)_2.s(m_1) && (2.95)\\ &= \sum f(g(m_0)_0)_0 \otimes f(g(m_0)_0)_1.s(g(m_0)_{11}).g(m_0)_{12}.s(m_1) && (2.96)\\ &= \sum f(g(m_0))_0 \otimes f(g(m_0)_0)_1.\epsilon(g(m_0)_1).s(m_1) && (2.97)\\ &= \sum f(g(m_0))_0 \otimes f(g(m_0)_1.s(m_1) && (2.98)\\ &= \sum f(g(m_0))_0 \otimes f(g(m_0))_1.s(m_1) && (2.99)\\ &= \chi(f.g)(m), && (2.100)\end{aligned}$$

d'où $(f.g)_0 \otimes (f.g)_1 = f_0g_0 \otimes f_1g_1$.
(ii) :On a :

$$\phi : End(M) \otimes End(N) \longrightarrow End(M \otimes N)$$
$$(f \otimes g) \longmapsto f.g.$$

Posons $\chi_{End(M)\otimes End(N)} = \chi$ et $\chi_{End(M\otimes N)} = \chi_E$.
On a $(\chi_E \circ \phi)(f \otimes g) = \chi_E(f.g) = (f.g)_0 \otimes (f.g)_1$

$$\begin{aligned} ((\phi \otimes id_H) \circ \chi)(f \otimes g) &= (\phi \otimes id_H)(f_0 \otimes g_0 \otimes f_1.g_1) && (2.101)\\ &= f_0.g_0 \otimes f_1.g_1 && (2.102)\end{aligned}$$

et d'aprés (i) on a ϕ est morphisme de H-comodule. □

2.3 Algèbres de H-dimodules

Dans cette section H est commutative et cocommutative.

Définition 2.3.1. *Un H-dimodule est un k-module M qui est à la fois un H-module* ($\rho_M : H \otimes M \longrightarrow M$) *et un H-comodule* ($\chi_M : M \longrightarrow M \otimes H$) *tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} H \otimes M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "id_H \otimes \chi_M"] & M \arrow[d, "\chi_M"] \\ H \otimes M \otimes H \arrow[r, "\rho_M \otimes id_H"] & M \otimes H \end{tikzcd}, \tag{2.103}$$

le diagramme est commutatif signifie $\chi_M \circ \rho_M = (\rho_M \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \chi_M)$.

c'est à dire $\chi_M(hm) = h.m_0 \otimes m_1 \Longrightarrow (hm)_0 \otimes (hm)_1 = hm_0 \otimes m_1$.

Définition 2.3.2. *Soient M et N deux H-dimodules et f :* $M \longrightarrow N$ *une application k-linéaire.*

Alors f est un morphisme de H-dimodules si f est à fois un morphisme de H-modules et un morphisme de H-comodules.

Remarque 2.3.1. *(i) Si M et N sont des H-dimodules, alors* $M \otimes N$ *est un H-dimodule et si M ou H est projectif de type fini sur k, alors* M^* *est un H-dimodule. En effet on a :*

$$\begin{aligned} (\chi_{M\otimes N}(\rho_{M\otimes N)}(h \otimes (a \otimes b)) &= \chi_{M\otimes N)}(h_1 a \otimes h_2 b) && (2.104)\\ &= (h_1 a)_0 \otimes (h_2 b)_0 \otimes (h_1 a)_1.(h_2 b)_1 && (2.105)\\ &= h_1 a_0 \otimes h_2 b_0 \otimes a_1.b_1 && (2.106)\\ (\rho_{M\otimes N} \otimes id_H)(id_H \otimes \chi_{M\otimes N})(h \otimes a \otimes b) &= (\rho_{M\otimes N} \otimes id_H)(h \otimes a_0 \otimes b_0 \otimes a_1 b_1) && (2.107)\\ &= h_1 a_0 \otimes h_2 b_0 \otimes a_1.b_1; && (2.108) \end{aligned}$$

avec $a \in M$, $b \in N$ *et* $h \in H$.

(ii) Si H est une algèbre de Hopf projective de type fini sur k, on peut prendre la structure de H-comodule à la place de la structure de H^**-module.*

Définition 2.3.3. *Une algèbre de H-dimodule est un k-module qui est un H-dimodule tel qu'il est une algèbre de H-module et une algèbre de H-comodule.*

Définition 2.3.4. *Soient A et B des algèbres de H-dimodules et f :* $A \longrightarrow B$ *une application k-linéaire. On dit que f est morphisme d'algèbres de H-dimodules s'il est un morphisme de H-dimodules et un morphisme d'algèbres.*

On peut mettre un produit sur $A \otimes B$ pour A et B des algèbres de H-dimodules comme suit :

$A \otimes B \otimes A \otimes B \longrightarrow^{id_A \otimes \chi_B \otimes id_A \otimes id_B} A \otimes B \otimes H \otimes A \otimes B$

$\longrightarrow^{id_A \otimes id_B \otimes \rho_A \otimes id_B} A \otimes B \otimes A \otimes B \longrightarrow^{id_A \otimes \tau_{A\otimes B} id_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \longrightarrow^{\beta_A \otimes \beta_B} A \otimes B.$

Définition 2.3.5. $A \otimes B$ *avec ce produit est noté* $A\#B$ *et est appelé le "smash produit" (produit brisé) de A et B.* $A\#B$ *est égale à* $A \otimes B$ *comme H-dimodule et a une H-action héritée du k-module* $A \otimes B$.

En symbole, on a : $(a\#b).(c\#d) = \sum a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0.d$, où $h \rightharpoonup m = hm$ et $\chi(b) = b_0 \otimes b_1$

Remarque 2.3.2. *On voit que le "smash product" ne dépend que de la structure de comodule de B et de la structure module de A.*

Théorème 2.3.1. *Avec la structure définie précédemment (avec H commutative et cocommutative), $A\#B$ et $A \otimes B$ sont des algébres de H-dimodules .*

Démonstration. (i) $A \otimes B$ est une algébre de H-dimodule. On a déjà vu qu'il est une algébre de H-module et de H-comodule. D'après la remarque 2.41, $A \otimes B$ est un H-dimodules et par suite, il est une algèbre de H-dimodule.

(ii) $A\#B$ est une algèbre de dimodule.

$A\#B$ est un H-dimodule car il est égal à $A \otimes B$ comme H-dimodule.

$$\begin{aligned}
h \rightharpoonup [(a\#b)(c\#d)] &= h \rightharpoonup \sum_b (a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0 d) && (2.109)\\
&= \sum_b h \rightharpoonup (a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0 d) && (2.110)\\
&= \sum_b h_1 \rightharpoonup (a.(b_1 \rightharpoonup c)\#h_2 \rightharpoonup (b_0 d) && (2.111)\\
&= (h_1 \rightharpoonup (a\#b))(h_2 \rightharpoonup (c\#d), && (2.112)
\end{aligned}$$

donc $A\#B$ est une algébre de H-module.

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\chi[(a\#b)(c\#d)] &= \chi[\sum_b a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0 d)] && (2.113)\\
&= \sum_b (a(b_1 \rightharpoonup c))_0\#(b_0 d)_0 \otimes && (2.114)\\
(a(b_1 \rightharpoonup c))_1(b_0 d)_1 & && (2.115)\\
&= \sum_b a_0(b_1 \rightharpoonup c_0)\#b_{00}d_0 \otimes && (2.116)\\
a_1(c_1)b_{01}d_1 & && (2.117)\\
&= \sum_b a_0(b_1 \rightharpoonup c_0)\#b_0 d_0 \otimes && (2.118)\\
a_1(c_1)b_1 d_1 & && (2.119)\\
(a\#b)_0(c\#d)_0 \otimes (a\#b)_1(c\#d)_1 &= (a_0\#b_0)(c_0\#d_0) \otimes a_1 b_1 c_1 d_1 && (2.120)\\
&= \sum_{b_0} a_0(b_{01} \rightharpoonup c_0)\#b_{00}d_0 \otimes a_1 b_1 c_1 d_1 && (2.121)\\
&= \sum_b a_0(b_1 \rightharpoonup c_0)\#b_0 d_0 \otimes a_1 b_1 c_1 d_1 && (2.122)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\chi[(a\#b)(c\#d)] = (a\#b)_0(c\#d)_0 \otimes (a\#b)_1(c\#d)_1$ et par suite, $A\#B$ est une algèbre de H-comodule. D'où $A\#B$ est une algèbre de dimodule. $\square$

Remarque 2.3.3. *On a un isomorphisme d'algèbre de H-dimodule* $(A\#B)\#C \cong A\#B(B\#C)$ *donné par* $(a\#b)\#c \longmapsto a\#(b\#c)$

Définition 2.3.6. *Soit* A *une algèbre de H-dimodule. On définit* $\bar{A}$ *comme étant isomorphe à* A *comme H-dimodule avec la multiplication définie par :*
$\bar{a}.\bar{b} = \overline{\sum_a (a_1 \rightharpoonup b).a_0}$ *et la H-action héritée de* A *.*

Théorème 2.3.2. $\bar{A}$ *est une algèbre de dimodule avec comme action et coaction respectives* $h.\bar{a} = \overline{h.a}$ *et* $\chi_{\bar{A}}(\bar{a}) = (\overline{a})_0 \otimes (\overline{a})_1 = \overline{a_0} \otimes a_1$*. De plus, on a les isomorphismes d'algèbres de dimodules suivants :*
$\overline{\overline{A}} \cong A$ *donné par :*$a \longmapsto \overline{\overline{\sum_a a_1 \rightharpoonup a_0}}$ *et* $\bar{B}\#\bar{A} \cong \overline{A\#B}$ *donné par* $\bar{b}\#\bar{a} \longmapsto \overline{\sum_b (b_1 \rightharpoonup a)\#b_0}$.

Démonstration. $\bar{A}$ est une algèbre de dimodule :

$$\begin{aligned}
\chi(\bar{a}.\bar{b}) &= \chi(\overline{\sum (a_1 \rightharpoonup b).a_0}) && (2.123)\\
&= \overline{\sum [((a_1 \rightharpoonup b).a_0)]_0} \otimes [((a_1 \rightharpoonup b).a_0)]_1 && (2.124)\\
&= \overline{\sum (a_1 \rightharpoonup b)_0.a_{00}} \otimes ((a_1 \rightharpoonup b)_1.a_{01}) && (2.125)\\
&= \overline{\sum (a_1 \rightharpoonup b_0)a_{00})} \otimes b_1.a_{01} && (2.126)\\
&= \overline{(\sum (a_{01} \rightharpoonup b_0)a_{00})} \otimes b_1.a_1 && (2.127)\\
&= \bar{a}_0.\bar{b}_0 \otimes (\bar{a})_1.(\bar{b})_1 && (2.128)
\end{aligned}$$

$\chi(\bar{1_A}) = \overline{(1_A)} \otimes 1_H$
d'où $\bar{A}$ est une algébre de comodule.

$$\begin{aligned}
h \rightharpoonup (\bar{a}.\bar{b}) &= h \rightharpoonup (\overline{\sum_a (a_1 \rightharpoonup b).a_0}) && (2.129)\\
&= \overline{\sum_a h \rightharpoonup (a_1 \rightharpoonup b).a_0} && (2.130)\\
&= \overline{\sum_a (h_1 \rightharpoonup (a_1 \rightharpoonup b))(h_2 \rightharpoonup a_0)} && (2.131)\\
&= \overline{\sum_a (h_1.a_1 \rightharpoonup b)(h_2 \rightharpoonup a_0)} && (2.132)\\
&= \overline{(h_1 \rightharpoonup a)}.\overline{(h_2 \rightharpoonup b)} && (2.133)\\
&= (h_1 \rightharpoonup \bar{a})(h_2 \rightharpoonup \bar{b}). && (2.134)
\end{aligned}$$

Ainsi $\bar{A}$ est une algèbre de H-module.
(ii)

$$\pi : A \longrightarrow \bar{\bar{A}}$$
$$a \longmapsto \textstyle\sum_a a_1 \rightharpoonup a_0$$

$$
\begin{aligned}
\pi(h \rightharpoonup a) &= \overline{\overline{\sum_{h \rightharpoonup a} (h \rightharpoonup a)_1 \rightharpoonup (h \rightharpoonup a)_0}} && (2.135)\\
&= \overline{\overline{\sum_{a} h \rightharpoonup (a_1 \rightharpoonup a_0}} && (2.136)\\
&= h \rightharpoonup \overline{\overline{\sum_{a} a_1 \rightharpoonup a_0}} && (2.137)\\
&= h \rightharpoonup \pi(a) && (2.138)
\end{aligned}
$$

d'oǜ π est un morphisme de H-modules.

$$
\begin{aligned}
\chi(\pi(a)) &= \chi(\overline{\overline{\sum_{a} a_1 \rightharpoonup a_0}}) && (2.139)\\
&= (\overline{\overline{\sum_{a} (a_1 \rightharpoonup a_0)}})_0 \otimes (\sum_{a} (a_1 \rightharpoonup a_0)_1 && (2.140)\\
&= \sum_{a} \overline{\overline{(a_1 \rightharpoonup a_0)_0}} \otimes (a_1 \rightharpoonup a_O)_1 && (2.141)\\
&= \sum_{a} \overline{\overline{a_1 \rightharpoonup a_{00}}} \otimes a_{01}, \quad car \quad A \quad est \quad un \quad H-dimodule && (2.142)\\
&= \sum_{a} \overline{\overline{(a_{01} \rightharpoonup a_{00})}} \otimes a_1 && (2.143)\\
(\pi \otimes id)(\chi(a)) &= (\pi \otimes id_H)(a_0 \otimes a_1) && (2.144)\\
&= \pi(a_0) \otimes a_1 && (2.145)\\
&= \overline{\overline{\sum_{a_0} a_{01} \rightharpoonup a_{00}}} \otimes a_1 && (2.146)\\
&= \overline{\overline{\sum_{a} (a_1 \rightharpoonup a_0)}} \otimes a_1 && (2.147)
\end{aligned}
$$

donc π est un morphisme de H-comodules.

$$
\begin{aligned}
\pi(a).\pi(b) &= \sum \overline{\overline{(a_1 \rightharpoonup a_0)}}.\overline{\overline{(b_1 \rightharpoonup b_0)}} && (2.148)\\
&= \overline{\sum \overline{[(a_1 \rightharpoonup a_0)_1 \rightharpoonup (b_1 \rightharpoonup b_0)]._{\bar{A}}(a_1 \rightharpoonup a_0)_0}} && (2.149)\\
&= \overline{\sum \overline{[(a_1 \rightharpoonup (b_1 \rightharpoonup b_0)]._{\bar{A}}(a_2 \rightharpoonup a_0)}} && (2.150)\\
&= \overline{\overline{\sum [a_1 \rightharpoonup (b_1 \rightharpoonup b_0]_1 \rightharpoonup (a_1 \rightharpoonup a_0)[a_1 \rightharpoonup (b_1 \rightharpoonup b_0)]_0}} && (2.151)\\
&= \overline{\overline{\sum (a_1 b_1 \rightharpoonup b_0)_1 \rightharpoonup (a_1 \rightharpoonup a_0)](a_1 b_1 \rightharpoonup b_0)_0}} && (2.152)\\
&= \overline{\overline{\sum (b_1 \rightharpoonup (a_2 \rightharpoonup a_0))(a_1 \rightharpoonup (b_2 \rightharpoonup b_0))}} && (2.153)
\end{aligned}
$$

$$= \overline{\overline{\sum (b_1 a_2 \rightharpoonup a_0)(a_1 b_2 \rightharpoonup b_0)}} \tag{2.154}$$

$$= \overline{\overline{\sum (a_1 b_1 \rightharpoonup a_0)(a_2 b_2 \rightharpoonup b_0)}} \tag{2.155}$$

$$H \quad commutatif \quad et \quad cocommutatif \tag{2.156}$$

$$= \overline{\overline{\sum a_1 b_1 \rightharpoonup a_0 b_0}} \tag{2.157}$$

$$= \overline{\overline{\sum (ab)_1 \rightharpoonup (ab)_0}} = \pi(ab) \tag{2.158}$$

□

Remarque 2.3.4. *Si A est une algèbre de H-dimodule, alors A^{op} son algèbre opposée est aussi une algèbre de H-dimodule.*

Théorème 2.3.3. *Si M et N sont des H-dimodules projectifs de type fini sur k, alors il en est de même que $Hom(M,N)$. Plus encore, $End(M)$ est une algèbre de H-dimodule.*

Démonstration. On sait déjà que $Hom(M,N)$ est un H-module et un H-comodule. Il reste à montrer que $\chi(h \rightharpoonup f) = \sum_f (h \rightharpoonup f_0) \otimes f_1$. On a :

$$\chi(h \rightharpoonup f)(m) = \sum [(h \rightharpoonup f)(m_0)]_0 \otimes [(h \rightharpoonup f)(m_0)]_1 . s(m_1) \tag{2.159}$$

$$= \sum (h_1 \rightharpoonup_N [f(s(h_2) \rightharpoonup_M m_0)])_0 \otimes \tag{2.160}$$

$$(h_1 \rightharpoonup_N [f(s(h_2) \rightharpoonup_M m_0)])_1 . s(m_1) \tag{2.161}$$

$$= \sum h_1 \rightharpoonup_N [(f(s(h_2) \rightharpoonup_M m_0))_0] \otimes [f(s(h_2) \rightharpoonup_M m_0)]_1 \tag{2.162}$$

$$.s(m_1) \tag{2.163}$$

$$= \sum h_1 \rightharpoonup_N [f((s(h_2) \rightharpoonup_M m)_0)]_0 \otimes [f((s(h_2) \rightharpoonup_M m)_0)]_1 \tag{2.164}$$

$$.s((s(h_2) \rightharpoonup_M m)_1) \tag{2.165}$$

$$= \sum h_1 \rightharpoonup_N [f_0(s(h_2) \rightharpoonup_M m)] \otimes f_1 \tag{2.166}$$

$$= \sum (h_1 \rightharpoonup f_0)(m) \otimes f_1 \tag{2.167}$$

ceci est vrai pour tout m dans M. Donc $\chi(h \rightharpoonup f) = \sum_f h \rightharpoonup f_0 \otimes f_1$, et par suite, $Hom(M,N)$ est un H-dimodule. Ainsi, $End(M) = Hom(M,M)$ est une algèbre de H-module et de H-comodule. Comme c'est un dimodule, donc il est une algèbre de dimodule. □

Définition 2.3.7. *Soit M un H-dimodule. Pour $m \in M, h \in H$, définissons l'application suivante :*

$$f_h : M \longrightarrow M$$
$$m \longmapsto f_h(m) = h \rightharpoonup m.$$

avec $f_{h_1} f_{h_2} = f_{h_1 h_2}$ et $f_{1_H} = I_M$

Proposition 2.3.1. *Pour $f_h \in End(M)$ et $f \in End(M)$ on a $h \rightharpoonup f = \sum_h f_{h_1} . f . f_{s(h_2)}$.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\chi(f_h)(m) &= \sum f_h(m_0)_0 \otimes f_h(m_0)_1.s(m_1) && (2.168)\\
&= \sum (h \rightharpoonup m_0)_0 \otimes (h \rightharpoonup m_0)_1.s(m_1) && (2.169)\\
&= \sum h \rightharpoonup m_0 \otimes m_1.s(m_2), \quad car \quad M \quad est \quad un \quad H-dimodule && (2.170)\\
&= \sum h \rightharpoonup m_0 \otimes 1_H.\epsilon(m_1) && (2.171)\\
&= \sum h \rightharpoonup m_0\epsilon(m_1) \otimes 1_H && (2.172)\\
&= h \rightharpoonup m \otimes 1_H && (2.173)\\
&= f_h(m) \otimes 1_H && (2.174)
\end{aligned}$$

Montrons que $f_h \in End(M)$.

On a :

$$\begin{aligned}
f_{hh'}(m') &= (hh') \rightharpoonup (m') && (2.175)\\
&= (h \rightharpoonup (h \rightharpoonup m') && (2.176)\\
&= (f_h.f_h)(m) && (2.177)\\
donc \quad f_{hh'} = f_h.f'_h. & && (2.178)\\
on \quad a \quad f_h(m+m') &= (h) \rightharpoonup (m+m') && (2.179)\\
&= h \rightharpoonup m + h \rightharpoonup m' && (2.180)\\
&= f_h(m) + f_h(m') && (2.181)\\
on \quad a \quad f_h(\lambda.m) &= (h \rightharpoonup (\lambda m) && (2.182)\\
&= \lambda(h \rightharpoonup m) && (2.183)\\
&= \lambda f_h(m) && (2.184)
\end{aligned}$$

Ainsi, $f_h \in End(M)$

Montrons que si $f \in End(M)$, alors : $h \rightharpoonup f = f_{h_1}.f.f_{sh_2}$.

Soit $f \in End(M)$. On a :

$$\begin{aligned}
(h \rightharpoonup f)(m) &= h_1 \rightharpoonup [f(s(h_2) \rightharpoonup m)] && (2.185)\\
&= f_{h_1}.[f(s(h_2) \rightharpoonup m)] && (2.186)\\
&= f_{h_1}.[f.(f_{s(h_2)}(m))] && (2.187)\\
donc \quad h \rightharpoonup f = f_{h_1}.f.f_{s(h_1)} & && (2.188)
\end{aligned}$$

□

On a la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. *Soient H commutatif, M un H-dimodule qui est projectif et de type fini sur k et B une algèbre de dimodule. Alors l'application $\phi : End(M)\#B \longrightarrow End(M) \otimes B$ donnée par $\phi(f\#b) = \sum_b f.f_{b_1} \otimes b_0$ est un isomorphisme d'algèbres de H-dimodules.*

Démonstration. Soient f et g des él'ements de $End(M)$ et m dans M.

$(f_h.g_{h'})(m) = f_h(h' \rightharpoonup m) = h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup m) = hh' \rightharpoonup m = (fg)_{hh'}(m) = f_{hh'}(m)$

d'oừ, on a :$f_h.g'_h = (fg)_{hh'} = f_{hh'}$

(i) ϕ est un morphisme d'algèbres :

$$\begin{aligned}
\phi((f\#a)(g\#b)) &= \phi((\sum_a f.(a_1 \rightharpoonup g)\#a_0b) && (2.189)\\
&= \sum_{(a,a_0,b)} (f.(a_1 \rightharpoonup g)((f.(a_1 \rightharpoonup g))_{a_{O1}b_1} \otimes a_{00}b_0 && (2.190)\\
&= \sum_{(a,b)}(f.(a_1 \rightharpoonup g))((f.(a_2 \rightharpoonup g))_{a_3b_1} \otimes a_0b_0 && (2.191)\\
&= \sum_{(a,b)}(f.g_{a_{11}}.g.g_{s(a_12)})(f.g_{a_{21}}.g.g_{s(a_{22})})_{a_3b_1} \otimes a_0b_0 && (2.192)\\
&= \sum_{(a,b)}(f.g_{a_1}.g.g_{s(a_2)})g_{(a_3b_1)} \otimes a_0b_0 && (2.193)\\
&= \sum_{(a,b)} f.g_{a_1}.g.g_{s(a_2)}.g_{a_3}.g_{b_1} \otimes a_0b_0 && (2.194)\\
&= \sum_{(a,b)} f.g_{a_1}.g.g_{\epsilon(a_2)}.g_{b_1} \otimes a_0b_0 && (2.195)\\
&= \sum_{(a,b)} f.f_{a_1}.g.g_1 \otimes a_0b_0 && (2.196)\\
&= (\sum_a f.f_{a_1} \otimes a_0)(\sum_b g.g_{b_1} \otimes b_0) && (2.197)\\
&= \phi(f\#a)\phi(g\#b). && (2.198)
\end{aligned}$$

Ainsi, ϕ est un morphisme d'algèbres.

(ii) ϕ est morphisme de H-modules :

H est commutatif, donc $(f_h.f'_h)(m) = f_h(h' \rightharpoonup m) = h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup m) = hh' \rightharpoonup m = h'h \rightharpoonup m = f'_h.f_h$

$$\begin{aligned}
\phi(h \rightharpoonup (f\#b)) &= \phi(\sum_h(h_1 \rightharpoonup f)\#(h_2 \rightharpoonup b)) && (2.199)\\
&= \sum_{h,b,h_1} f_{h_11}.f.f_{s(h_12)}.f_{(h_2 \rightharpoonup b)_1} \otimes (h_2 \rightharpoonup b)_0 && (2.200)\\
&= \sum_{(h,b)} f_{h_1}.f.f_{s(h_2)}.f_{b_1} \otimes h_3 \rightharpoonup b_0 && (2.201)\\
&= \sum_{(h,b)} f_{h_1}.f.f_{b_1}.f_{s(h_2)} \otimes h_3 \rightharpoonup b_0 && (2.202)\\
h \rightharpoonup \phi(f\#b) &= h \rightharpoonup (\sum_b f.f_{b_1} \otimes b_0 && (2.203)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(h,b)} h_1 \rightharpoonup (f.f_{b_1}) \otimes h_2 \rightharpoonup b_0 \tag{2.204}$$
$$= \sum_{(h,b,h_1)} (f.f_{b_1})_{h_11}.f.f_{b_1}(f.f_{b_1})_{s(h_{12})} \otimes h_2 \rightharpoonup b_0 \tag{2.205}$$
$$= \sum_{(h,b)} f_{h_1}.f.f_{b_1}.f_{s(h_2)} \tag{2.206}$$

$\Rightarrow \phi(h \rightharpoonup (f\#b)) = h \rightharpoonup \phi(f\#b)$, donc ϕ est un morphisme de H- modules.

(iii) ϕ est morphisme de H-comodules : on a $\chi(f_h) = f_h \otimes 1_H$

$$\chi(\phi(f\#b)) = \chi(\sum_b f.f_{b_1} \otimes b_0 \tag{2.207}$$
$$= \sum_{(b,f)} f_0.f_{b_2} \otimes b_0 \otimes f_1.b_1 \tag{2.208}$$
$$= \sum_{f,b} f_0.f_{b_1} \otimes b_0 \otimes f_1.b_1 \tag{2.209}$$
$$(\phi \otimes I_H)(\chi(f\#b)) = (\phi \otimes I_H)(\sum_{f,b} f_0\#b_0 \otimes f_1.b_1) \tag{2.210}$$
$$= \sum_{f,b,} \phi(f_0\#b_0) \otimes f_1.b_1 \tag{2.211}$$
$$= \sum_{f,b,b_0} f_0.f_{b_{01}} \otimes f_1.b_1 \tag{2.212}$$
$$= \sum_{f,b} f_0.f_{b_1} \otimes b_0 \otimes f_1.b_1 \tag{2.213}$$

$\Rightarrow \chi(\phi(f\#b)) = (\phi \otimes I_H)(\chi(f\#b))$, et donc ϕ est un morphisme de H-comodules.

Définissons l'application $\phi' : End(M) \otimes B \longrightarrow End(M)\#B$ donnée par $f \otimes b \longmapsto \sum_b f.f_{s(b_1)}\#b_0$.

On a :

$$(\phi \circ \phi')(f\#b) = \phi(\sum_b f.f_{s(b_1)}\#b_0) \tag{2.214}$$
$$= \sum_b \sum_{b_0} (f.f_{s(b_1)}).(f.f_{s(b_1)})_{b_{01}} \otimes b_{00} \tag{2.215}$$
$$= \sum_b f.f_{s(b_1)}.f_{b_2} \otimes b_0 \tag{2.216}$$
$$= f \otimes b = id_{End(M)\otimes B} \tag{2.217}$$
$$(\phi' \circ \phi)(f\#b) = \phi'(\sum_b f.f_{b_1)} \otimes b_0 \tag{2.218}$$
$$= \sum_b \sum_{b_0} (f.f_{b_1}).(f.f_{b_1})_{s(b01)}\#b_{00} \tag{2.219}$$
$$= \sum_b f.f_{b_2}.f_{s(b_1)}\#b_0 \tag{2.220}$$

$$= \sum_b f.f_{s(b_1)}.f_{b_1}\#b_0 \quad (2.221)$$
$$= f\#b = id_{End(M)\#B}, \quad (2.222)$$

donc ϕ' est l'inverse de ϕ .

Par suite, ϕ est isomorphisme d'algèbres de dimodules. □

Corollaire 2.3.1. *Si M et N sont des H-dimodules projectifs et de type fini sur k, alors on a* $End(M)\#End(N) \cong End(M \otimes N)$ *comme algébres de H-dimodules.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a :

$End(M)\#End(N) \cong End(M) \otimes End(N) \cong End(M \otimes N)$ □

Soit M un H-dimodule projectif de type fini sur k. Soit $f \in End(M)$. Supposons que $f \leftrightarrow \sum_i m_i \otimes {m_i}^*$ dans l'isomorphisme $End(M) \cong M \otimes M^*$. Alors définissons l'application $\zeta : End(M) \longrightarrow H \otimes M$ par $\zeta(f) = \sum_{(i)(m_i)} s({m_i}^1) \otimes ({m_i}^0 \otimes {m_i}^*)$.

Posons $\zeta(f) = \sum_f f_{-1} \otimes f_0$.

Lemme 2.3.1. *(i)* $\zeta(f)(m) = \sum_{f(m)} s(f(m)_1) \otimes f(m)_0,\ m \in M$*;*

(ii) $\zeta(h \rightharpoonup f) = \sum_f f_{(-1)} \otimes (h \rightharpoonup f_0)$

Démonstration. f est un morphisme H-comodules donc $(f(m))_1 = m_1$ et $f(m_0) = (f(m))_0$

(i)

$$\zeta(f)(m) = \sum_{(i)(m_i)} s({m_i}^1) \otimes ({m_i}^0 \otimes {m_i}^*)(m) \quad (2.223)$$
$$= \sum_{(i)(m_i)} s({m_i}^1) \otimes ({m_i}^0 \otimes {m_i}^*(m)) \quad (2.224)$$
$$= \sum_{(i)(m_i)} s({m_i}^1) \otimes ({m_i}^0 \langle {m_i}^0, m\rangle) \quad (2.225)$$
$$= \sum_{f(m)} s(f(m)_1) \otimes f(m)_0 \quad (2.226)$$
$$(2.227)$$

(ii)

$$\zeta(h \rightharpoonup f)(m) = \sum_{(h\rightharpoonup f)(m)} s((h \rightharpoonup f)(m)_1) \otimes (h \rightharpoonup f)(m)_0 \quad (2.228)$$
$$= \sum_{f(m)} s((h \rightharpoonup f)_{-1}) \otimes (h \rightharpoonup f)_0(m) \quad (2.229)$$
$$= \sum_{f} s(f_{-1}) \otimes (h \rightharpoonup f_0)(m), \quad (2.230)$$
$$(2.231)$$

d'où $\zeta(h \rightharpoonup f) = \sum_f f_{-1} \otimes (h \rightharpoonup f_0)$ □

Proposition 2.3.3. *Soient M un H-dimodule projectif de type fini sur k et B une algèbre de H-dimodules. Alors l'application $\rho : B\#End(M) \longrightarrow B \otimes End(M)$ donnée par $\rho(b\#f) = \sum_f (f_{-1} \rightharpoonup b) \otimes f_0$ est un isomorphisme d'algèbres de H-dimodules.*

Démonstration. (i) ρ est un morphisme d'algèbres : d'après le lemme précédent, on a $f_{-1} = s(f(m)_1)$.

$$\rho[(a\#f)(b\#g)] = \rho[\sum_{(f)} a.(f_1 \rightharpoonup b)\#f_0 g] \tag{2.232}$$

$$= \sum_{(f)(f_0g)} (f_0g)_{-1} \rightharpoonup [a.(f_1 \rightharpoonup b)] \otimes (f_0g)_0 \tag{2.233}$$

$$= \sum_{(f)(f_0g(m))} s((f_0g(m))_1 \rightharpoonup [a.(f_1 \rightharpoonup b)] \otimes (f_0g(m))_0 \tag{2.234}$$

$$= \sum_{g(m),f(g(m)_0)} (s(f(g(m)_0)_1) \rightharpoonup [a._B(f(g(m)_0)_2._H s(g(m)_1) \rightharpoonup b)] \tag{2.235}$$

$$\otimes f(g(m)_0)_0 \tag{2.236}$$

$$= \sum_{g(m),f(g(m)_0)} (s(f(g(m)_0)_1) \rightharpoonup a)._B(s(g(m)_1) \rightharpoonup b) \otimes f(g(m)_0)_0 \tag{2.237}$$

$$= \sum_{f,g(m)} (f_{-1} \rightharpoonup a).(s(g(m)_1) \rightharpoonup b) \otimes f_0(g(m)_0) \tag{2.238}$$

$$= \sum_{f,g} (f_{-1} \rightharpoonup a).(g_{-1} \rightharpoonup b) \otimes f_0(g_0(m)) \tag{2.239}$$

$$\rho(a\#f).\rho(b\#g)(m) = (\sum_f (f_{-1} \rightharpoonup a) \otimes f_0).(\sum_g (g_1 \rightharpoonup b) \otimes g_0)(m) \tag{2.240}$$

$$= \sum_{f,g} (f_{-1} \rightharpoonup a).(g_{-1} \rightharpoonup b) \otimes f_0(g_0(m)). \tag{2.241}$$

Donc $\rho(a\#f)(b\#g) = \rho(a\#f)\rho(b\#g)$.

$\rho(1_B\#id_{End(M)})(m) = \sum_m (s(m_1) \rightharpoonup 1_B) \otimes m_0 = 1_B \otimes m$;

c'est à dire $\rho(1_B\#id_{End(M)}) = 1_B \otimes id_{End(M)}$.

(ii) ρ est un morphisme de comodules. $f \leftrightarrow m \otimes m^*$

$$\chi(\rho(b\#f)) = \chi[(\sum_f (f_{-1} \rightharpoonup b) \otimes f_0] \tag{2.242}$$

$$= \chi[\sum_m (s(m_1) \rightharpoonup b) \otimes (m_0 \otimes m_i{}^*] \tag{2.243}$$

$$= \sum_{b,m,m^*} (s(m_2) \rightharpoonup b)_0 \otimes (m_0 \otimes m^*)_0 \tag{2.244}$$

$$\otimes (s(m^1) \rightharpoonup b)_1 (m_0 \otimes m^*)_1 \tag{2.245}$$

$$= \sum_{b,m,m_i{}^*} (s(m^2) \rightharpoonup b_0) \otimes (m^0 \otimes m^{*(0)}) \otimes \tag{2.246}$$

$$b_1 m^1 s(m^{*(-1)}) \quad (2.247)$$

$$= \quad (\rho \otimes id_H)\chi(b\#f). \quad (2.248)$$

D'où on a ρ est un morphisme de comodules.

(iii) ρ est un morphisme de H-modules.

$$\begin{aligned}
\rho(h \rightharpoonup (b\#f)) &= \rho(\sum_h (h_1 \rightharpoonup b)\#(h_2 \rightharpoonup f)) && (2.249)\\
&= \sum_{h,f} (h_2 \rightharpoonup f)_{-1} \rightharpoonup (h_1 \rightharpoonup b) \otimes (h_2 \rightharpoonup f)_0 && (2.250)\\
&= \sum_{h,f} h_1 \rightharpoonup (f_{-1} \rightharpoonup b) \otimes (h_2 \rightharpoonup f_0 && (2.251)\\
&= \sum_f h \rightharpoonup [(f_{-1} \rightharpoonup b) \otimes f_0] && (2.252)\\
&= h \rightharpoonup [\sum_f f_{-1} \rightharpoonup b \otimes f_0] && (2.253)\\
&= h \rightharpoonup \rho(b\#f). && (2.254)
\end{aligned}$$

ainsi, ρ est un morphisme de H-modules.

Posons $\rho' : B \otimes End(M) \longrightarrow B\#End(M)$ définie par $\rho'(b \otimes f) = \sum_f [s(f_{-1} \rightharpoonup b]\#f_0$.

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \rho')(b \otimes f) &= \rho(\sum_f (s(f_{-1}) \rightharpoonup b) \otimes f_0 && (2.255)\\
&= \sum_{f,f_0} f_{(0)(-1)} \rightharpoonup (s(f_{-1}) \rightharpoonup b) \otimes f_{00} && (2.256)\\
&= \sum_f (f_{-2}s(f_{-1}) \rightharpoonup b) \otimes f_0 && (2.257)\\
&= \sum_f (\epsilon(f_{-1}) \rightharpoonup b) \otimes f_0 && (2.258)\\
&= b \otimes f = id_{(B\otimes End(M))} && (2.259)\\
(\rho' \circ \rho)(b\#f) &= \rho'(\sum_f (f_{-1} \rightharpoonup b) \otimes f_0 && (2.260)\\
&= \sum_{f,f_0} s(f_{(0)(-1)} \rightharpoonup (f_{-1} \rightharpoonup b)\#f_{00} && (2.261)\\
&= \sum_f [s(f_{-2})f_{-1} \rightharpoonup b]\#f_0 && (2.262)\\
&= \sum_f (\epsilon(f_{-1}) \rightharpoonup b)\#f_0 && (2.263)\\
&= b\#f = id_{(B\#End(M))}. && (2.264)
\end{aligned}$$

Donc ρ' est l'inverse de ρ, et par suite, ρ est un isomorphisme de H-dimodules. $\square$

Corollaire 2.3.2. *Pour M et B comme précédemment, on a $B\#End(M) \cong End(M)\#B$ comme algèbres de dimodules.*

Démonstration. On a :$B\#End(M) \cong B \otimes End(M) \cong End(M) \otimes B \cong End(M)\#B$ □

Proposition 2.3.4. *Soit M un H-dimodule projectif de type fini sur k. Alors l'application $\tau : \overline{End(M)} \longrightarrow End(M)^{op}$ définie par $\tau(\bar{f})(m) = \sum_m (m_1 \rightharpoonup f)(m_0)$ est un isomorphisme d'algèbres de H-dimodules.*

Démonstration. (i) τ est morphisme d'algèbres :

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{f}.\bar{g})(m) &= \tau(\sum_f \overline{[(f_1 \rightharpoonup g).f_0]})(m) && (2.265)\\
&= \sum_{m,f} \{m_1 \rightharpoonup [(f_1 \rightharpoonup g).f_0]\}(m0) && (2.266)\\
&= \sum_{m,f} m_1 \rightharpoonup [(f_1 \rightharpoonup g).f_0](m_0) && (2.267)\\
&= \sum_{m,f} m_1 \rightharpoonup (f_1 \rightharpoonup g).(m_2 \rightharpoonup f_0)(m_0) && (2.268)\\
&= \sum_{m,f} (m_1 f_1 \rightharpoonup g)(m_2 \rightharpoonup [f_0(s(m_3) \rightharpoonup m_0]) && (2.269)\\
&= \sum_{m,f(s(m_4) \rightharpoonup m_0)} \{[m_1(f(s(m_4) \rightharpoonup m_0))_1 s(m_2)] \rightharpoonup g\} && (2.270)\\
(m_3 \rightharpoonup [f(s(m_4) \rightharpoonup m_0)])_0 & && (2.271)\\
&= \sum_{m,f(s(m_2) \rightharpoonup m_0)} [f(f(s(m_2) \rightharpoonup m_0)_1 \rightharpoonup g] && (2.272)\\
(m_1 \rightharpoonup [f(s(m_2 \rightharpoonup m_0)_0)])_0 & && (2.273)\\
&= \tau(\bar{g})(\sum_m (m_1 \rightharpoonup f)(m_0)) && (2.274)\\
&= \tau(\bar{g})\tau(\bar{f})(m) && (2.275)
\end{aligned}$$

$\therefore \tau(\bar{f}.\bar{g}) = \tau(\bar{g}).\tau(\bar{f})$ dans $End(M)$ et
$\therefore \tau(\bar{f}.\bar{g}) = \tau(\bar{f}).\tau(\bar{g})$ dans $End(M)^{op}$

$$\begin{aligned}
\tau(i\bar{d}_M)(m) &= \sum_m (m_1 \rightharpoonup id_M)(m_0) && (2.276)\\
&= \sum_{m,m_1} m_{11} \rightharpoonup [id_M(s(m_{12}) \rightharpoonup m_0)] && (2.277)\\
&= \sum_m m_1 \rightharpoonup (s(m_2) \rightharpoonup m_0) && (2.278)\\
&= \sum_m m_1.s(m_2) \rightharpoonup m_0 && (2.279)\\
&= \epsilon(m_1).m_0 && (2.280)
\end{aligned}$$

dans $End(M)^{op}$, on a $\tau(id_M)(m) = m_0.\epsilon(m) = m = id_M$.

(ii) τ est un morphisme de H-comodules :

$$\begin{aligned}
\chi(\tau(\bar{f})(m)) &= \chi(\sum_m (m_1 \rightharpoonup f)m_0) && (2.281)\\
&= \sum_m \chi(m_1 \rightharpoonup f)\chi(m_0) && (2.282)\\
&= \sum_m [\sum_{m_1 \rightharpoonup f} (m_1 \rightharpoonup f)_0 \otimes (m_1 \rightharpoonup f)_1][\sum_{m_0} m_{00} \otimes m_{01}] && (2.283)\\
&= \sum_m (\sum_f m_1 \rightharpoonup f_0 \otimes f_1)(\sum_{m_0} m_{00} \otimes m_{01}) && (2.284)\\
&= \sum_{m,f} (m_1 \rightharpoonup f_0 \otimes f_1)(m_0 \otimes m_2) && (2.285)\\
&= \sum_{m,f} (m_1 \rightharpoonup f_0)m_0 \otimes f_1 m_2 && (2.286)\\
&= (\tau \otimes id)\chi(\bar{f}), && (2.287)
\end{aligned}$$

d'où τ est un morphisme de H-comodules.

(iii) τ est un morphisme de H-modules :

$$\begin{aligned}
\tau(h \rightharpoonup \bar{f})(m) &= \sum_m (m_1 \rightharpoonup (h \rightharpoonup f))m_0 && (2.288)\\
&= \sum_m (m_1 h \rightharpoonup f)m_0 && (2.289)\\
&= h \rightharpoonup \sum_m (m_1 \rightharpoonup f)m_0 && (2.290)\\
&= h \rightharpoonup \tau(\bar{f})(m) && (2.291)
\end{aligned}$$

ainsi, τ est morphisme de H-modules.

Posons $\tau'(f^{op})(^m) = \sum_(s(m_1) \rightharpoonup f)m_0$

$$\begin{aligned}
(\tau \circ \tau')(f^{op})(m) &= \tau(\sum_m (s(m_1) \rightharpoonup f)m_0) && (2.292)\\
&= \sum_m \tau(s(m_1) \rightharpoonup f)(m_0) && (2.293)\\
&= \sum_{m,m_0} [m_{O1} \rightharpoonup (s(m_1) \rightharpoonup f)]m_{00} && (2.294)\\
&= \sum_m [m_2 \rightharpoonup (s(m_1) \rightharpoonup f)]m_0 && (2.295)\\
&= \sum_m [m_1 s(m_2) \rightharpoonup f]m_0 && (2.296)\\
&= \sum_m (\epsilon(m_1) \rightharpoonup f)m_0 && (2.297)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& = f(m) && (2.298)\\
(\tau' \circ \tau)(f)(m) & = \tau(\sum_{m}(m_1 \rightharpoonup f)m_0) && (2.299)\\
& = \sum_{m,m_O}(s(m_{01}) \rightharpoonup (m_1 \rightharpoonup f))m_{00} && (2.300)\\
& = \sum_{m}(s(m_2)m_1 \rightharpoonup f)m_0 && (2.301)\\
& = \sum_{m}(\epsilon(m_1) \rightharpoonup f)m_0 && (2.302)\\
& = f(m) && (2.303)
\end{aligned}
$$

donc τ et τ' sont inverses l'un de l'autre, et par suite, τ est un isomorphisme d'algèbres de H-dimodules. □

Proposition 2.3.5. *Soit M un H-dimodule projectif et de type fini sur k. Alors $End(M)^{op} \cong End(M^*)$ comme algébres de dimodules.*

Chapitre 3

Groupe de Brauer des algèbres de H-dimodules

Dans toute la suite H est commutative et cocommutative.

3.1 Catégorie

Définition 3.1.1. *On appelle catégorie C la donnée :*

(i) d'une classe $\mathcal{O}b(C)$ d'objets de C,

(ii) pour tout couple (X,Y) d'objets de C, d'un ensemble $Hom_C(X,Y)$ dont les éléments sont appelés morphismes de X dans Y (avec la notation $f : X \longrightarrow Y$ pour dire que $f \in Hom_C(X,Y)$) tels que :

- pour tout triplet (X,Y,Z) d'objets de C, on a une application :

$$\begin{gathered} Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z) \longrightarrow Hom_c(X,Z) \\ (f,g) \longmapsto g \circ f \end{gathered}$$

appelée composition de morphismes qui est associative,

- pour tout objet X de C, il existe un élément $1_X \in Hom_C(X,X)$ appelé identité de X (noté par fois id_X), tel que $\forall f \in Hom_C(X,Y)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $\forall f \in Hom_C(Y,X)$ on a $1_X \circ f = f$.

Exemple 3.1.1. *- Ens est la catégorie des ensembles, les morphismes sont les applications.*

- la catégorie des algèbres de H-modules projectives de type fini sur k ; qui sont des algèbres d'Azumaya dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de H-modules, elle sera notée $\mathcal{A}_H$.

- la catégorie des algèbres de H-comodules projectives de type fini sur k ; qui sont des algèbres d'Azumaya dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de H-comodules, elle sera notée $\mathcal{A}^H$.

- la catégorie des algèbres de H-dimodules projectives de type fini sur k ; qui H-Azumaya dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de H-dimodules, elle sera notée $\mathcal{A}_H^H$.

Définition 3.1.2. *Une algèbre A sur un anneau commutatif k est dite algèbre d'Azumaya si A est un k-module projective de type fini et l'homomorphisme $f : A \otimes A^{op} \longrightarrow End(A)$ défini par $f_{a\otimes b^{op}})(c) = acb$ est un isomorphisme.*

Proposition 3.1.1. *Soit A et B des algèbres d'Azumaya. Alors $A \otimes B$ est une algèbre d'Azumaya.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(A \otimes B) \otimes (A \otimes B)^{op} &\cong A \otimes B \otimes B^{op} \otimes A^{op} && (3.1)\\
&\cong A \otimes End(B) \otimes A^{op} && (3.2)\\
&\cong A \otimes A^{op} \otimes End(B) && (3.3)\\
&\cong End(A) \otimes End(B) \cong End(A \otimes B) && (3.4)
\end{aligned}$$

ainsi, $A \otimes B$ est une algèbre d'Azumaya. □

3.2 Groupe de Brauer des algèbres de H-modules

On notera $\mathcal{M}_H$ la catégorie des H-modules qui sont des k-modules projectifs de type fini.

Proposition 3.2.1. *Si A est une algèbre de H-module à gauche, alors l'application $f : A \otimes A^{op} \longrightarrow End(A)$ définie par $(f_{a\otimes b^{op}})(c) = acb$ est un morphisme d'algèbres de H-modules.*

Démonstration. Soit $f : A \otimes A^{op} \longrightarrow End(A)$ définie par $f(a \otimes a^{op})(x) = a.x.b$ avec a,b et x $\in$ A. Montrons f est H-linéaire.

Soit a,b,c $\in$ A.

$$\begin{aligned}
(h \rightharpoonup f_{a\otimes b^{op}})(c) &= h_1 \rightharpoonup f_{a\otimes b^{op}}(s(h_2) \rightharpoonup c) && (3.5)\\
&= h_1 \rightharpoonup (a.(s(h_2) \rightharpoonup c).b) && (3.6)\\
&= (h_1 \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup (s(h_3) \rightharpoonup c)b) && (3.7)\\
&= (h_1 \rightharpoonup a)(h_2 s(h_3) \rightharpoonup c)(h_4 \rightharpoonup b && (3.8)\\
&= (h_1 \rightharpoonup a)(\epsilon(h_2) \rightharpoonup c)(h_3 \rightharpoonup b) && (3.9)\\
&= (h_1 \rightharpoonup a).c.(h_2 \rightharpoonup b) && (3.10)\\
&= f_{a\otimes b^{op}}(h \rightharpoonup c) && (3.11)
\end{aligned}$$

On sait que f est un morphisme d'algèbre □

Proposition 3.2.2. *Soit A une algébre de H-module. L'application $\pi : A \longrightarrow (A^{op})^{op}$ donnée par $\pi(a) = (a^{op})^{op}$ est un isomorphisme d'algébres de H-modules.*

Démonstration. $\pi(h \rightharpoonup a) = ((h \rightharpoonup a)^{op})^{op} = h \rightharpoonup (a^{op})^{op} = h \rightharpoonup \pi(a)$, donc π est morphisme de H-modules.

$\pi(ab) = ((ab)^{op})^{op} = ((b^{op})(a^{op})^{op})^{op} = (a^{op})^{op}.(b^{op})^{op} = \pi(a)\pi(b)$,

ainsi, π est un morphisme d'algèbres.

On voit que π est injective et surjective. □

Proposition 3.2.3. *Soit A une algèbre de H-module qui est aussi une algèbre d'Azumaya. Alors A^{op} est une algèbre d'Azumaya.*

Démonstration. On a A Azumaya. Donc $A \otimes A^{op} \cong End(A) \cong A^{op} \otimes A$.

Comme $A \cong (A^{op})^{op}$ on a $A^{op} \otimes (A^{op})^{op} \cong End(A^{op}$. Donc A^{op} est Azumaya. □

Définition 3.2.1. *Soit A,B $\in \mathcal{A}_H$. On dit que A et B sont Brauer équivalents (et on note A $\sim$ B) s'il $\exists$ des k-modules projectifs de type fini sur k M et N qui sont aussi des H-modules à gauche tels que $A \otimes End(M) \cong B \otimes End(N)$ comme algèbres de H-modules.*

Proposition 3.2.4. *La relation précédemment définie est une relation d'équivalence et l'ensemble quotient est un groupe pour la loi $\otimes$.*

Démonstration. A) Montrons que la relation est une relation d'équivalence :

(i) réflexivité : soit A $\in \mathcal{A}_H$, A est un H-module projectif de type fini.

On a donc $A \otimes End(A) \cong A \otimes End(A)$, c'est à dire $A \sim A$.

(ii) symétrie : soit A et B $\in \mathcal{A}_H$ tel que $A \sim B$.

$A \sim B \iff \exists$ M et N $\in \mathcal{M}_H$ tel que $A \otimes End(M) \cong B \otimes End(N) \Longrightarrow B \otimes End(N) \cong A \otimes End(M) \Longrightarrow B \sim A$, d'où la symétrie.

(iii) Transitivité : soient A,B et C $\in \mathcal{A}_H$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$.

$A \sim B \iff \exists$ M et N $\in \mathcal{M}_H$ tels que $A \otimes End(M) \cong B \otimes End(N)$.

$B \sim C \iff \exists$ M' et N' $\in \mathcal{M}_H$ tels que $B \otimes End(M') \cong C \otimes End(N')$.

$$\begin{aligned}
A \otimes End(M \otimes M') &\cong A \otimes End(M) \otimes End(M') && (3.12)\\
&\cong B \otimes End(N) \otimes End(M') && (3.13)\\
&\cong B \otimes End(M') \otimes End(N) && (3.14)\\
&\cong C \otimes End(N') \otimes End(N) && (3.15)\\
&\cong C \otimes End(N' \otimes N) && (3.16)
\end{aligned}$$

Ainsi, A $\sim$ C

Par suite, on a la transitivitée. Ce qui prouve qu'on a une relation d'équivalence.

B) Montrons que l'ensemble quotient $BM(k, H)$ est un groupe pour la loi "." définie comme suit :$[A].[B] = [A \otimes B]$.

- Soit [A],[B] et [C] des éléments de BM(k,H).

$$\begin{aligned}
([A].[B]).[C] &= [(A \otimes B].[C] && (3.17)\\
&= [(A \otimes B) \otimes C] && (3.18)\\
&= [A \otimes (B \otimes C)] && (3.19)\\
&= [A].[B \otimes C] && (3.20)\\
&= [A].([B].[C]) && (3.21)
\end{aligned}$$

d'où l'associativité.

- Soit $[A] \in BM(k,H)$, on a

$$[A].[k] = [A \otimes k] = [A], \qquad (3.22)$$

donc $[k]$ est l'élément neutre de $BM(k,H)$.

- Soit $[B] \in BM(k,H)$. On a :

$$\begin{aligned}
[B].[B^{op}] &= [B \otimes B^{op}] && (3.23)\\
&= [End(B)] && (3.24)\\
&= [k] && (3.25)
\end{aligned}$$

c'est à dire $[B^{op}]$ est l'inverse de $[B]$. □

On a de plus un isomorphisme entre $A \otimes B$ et $B \otimes A$. Donc la loi $\otimes$ est commutative.

On conclut ainsi que l'ensemble quotient est un groupe abelien. Il sera noté $BM(k,H)$.

3.3 Groupe de Brauer des algèbres de H-comodules

On notera $\mathcal{M}^H$ la catégorie des H-comodules.

Proposition 3.3.1. *Soit H une algébre de Hopf commutative, A une algébre de H-comodule, projectif de type fini sur k. Alors l'application* $F : A \otimes A^{op} \longrightarrow End(A)$ *définie par* $F_{(a\otimes b^{op})}(c) = a.c.b$ *est un morphisme de H-comodules.*

Démonstration. Le morphisme est $F : A \otimes A^{op} \longrightarrow End(A)$ tel que $F(a \otimes b^{op}) = F_{a\otimes b^{op}}$ avec $F_{(a\otimes b^{op})}(c) = a.c.b$

$$\begin{aligned}
\chi(F_{(a\otimes b^{op})})(c) &= \sum_{(c)(a.c_0.b)} (a.c_0.b)_0 \otimes (a.c_0.b)_1 s(c_1) && (3.26)\\
&= \sum_{a,b,c} a_0.c_0.b_0 \otimes a_1.c_1.b_1.s(c_2) && (3.27)\\
&= \sum_{a,b} a_0.c.b_0 \otimes a_1.b_1 && (3.28)\\
&= \sum_{(a\otimes b^{op})} F((a \otimes b^{op})_0)(c) \otimes (a \otimes b^{op})_1 && (3.29)\\
& && (3.30)
\end{aligned}$$

ainsi $\chi(F(a \otimes b^{op})) = (F \otimes id)\chi(a \otimes b^{op})$.

On a F est un morphisme d'algèbres. $\square$

Définition 3.3.1. *Soient A et B des éléments de $\mathcal{A}^H$. On dit que A et B sont Brauer équivalents s'il $\exists$ M et N dans $\mathcal{M}^H$ tels que $A \otimes End(M) \cong B \otimes End(N)$ comme algèbres de H-comodules.*

Proposition 3.3.2. *C'est une relation d'équivalence et l'ensemble quotient est un groupe abelien, avec la même loi que celle définie dans le cas des H-modules.*

Pour la preuve, elle est identique à celle faite dans cas des H-modules.

Définition 3.3.2. *Ce groupe est appelé groupe de Brauer des algèbres de H-comodules projectifs de type fini sur k et il sera noté $BC(k, H)$*

3.4 Groupe de Brauer des algèbres de H-dimodules

Dans cette section, tout k-module (sauf peut être H) est fidèle projectif de type fini sur k et H est commutatif et cocommutatif.

Soit A une algèbre de H-dimodule. Définissons les applications suivantes

$F : A\#\bar{A} \longrightarrow End(A)$ et $G : \bar{A}\#A \longrightarrow End(A)^{op}$ par

$F(a\#\bar{b}) = F_{a\#\bar{b}}$ avec $F_{a\#\bar{b}}(c) = \sum_b a.(b_1 \rightharpoonup c).b_0$

$G(\bar{a}\#b) = G_{\bar{a}\#b}$ avec $G_{\bar{a}\#b}(c) = \sum_c (c_1 \rightharpoonup a).c_0.b$.

Proposition 3.4.1. *F et G sont des morphismes d'algèbres de H-dimodules.*

Démonstration. Pour F

$$(a\#\bar{b}).(c\#\bar{d}) = \sum_b a.(b_1 \rightharpoonup c)\#\bar{b_0}.\bar{d} \tag{3.31}$$

$$= \sum_b a.(b_2 \rightharpoonup c)\#\overline{(b_1 \rightharpoonup d).b_0} \tag{3.32}$$

$$F_{[(a\#\bar{b}).(c\#\bar{d})]}(e) = \sum_{b,d} [a.(b_2 \rightharpoonup c)][((b_1 \rightharpoonup d).b_0)_1 \rightharpoonup e]((b_1 \rightharpoonup d).b_0)_0 \tag{3.33}$$

$$= \sum_{b,d} [a.(b_3 \rightharpoonup c)][b_2.d_1 \rightharpoonup e][(b_1 \rightharpoonup d_0)b_0] \tag{3.34}$$

$$= \sum_{b,d} a(b_1 \rightharpoonup c)[b_2 \rightharpoonup (d_1 \rightharpoonup e)](b_3 \rightharpoonup d_0)b_0 \tag{3.35}$$

$$= \sum_{b,d} a[b_1 \rightharpoonup (c(d_1 \rightharpoonup e)d_0)]b_0 \tag{3.36}$$

$$= F_{(a\#\bar{b})}F_{(c\#\bar{d})} \tag{3.37}$$

$F_{1_A\#\bar{1_A}} = I_A$,
donc F est un morphisme d'algèbres.

$$\begin{aligned}
F_{[h\rightharpoonup(a\#\bar{b})]}(c) &= \sum_{h,b}(h_1 \rightharpoonup A)((h_2 \rightharpoonup b)_1 \rightharpoonup c)(h_2 \rightharpoonup b)_O && (3.38)\\
&= \sum_{h,b}(h_1 \rightharpoonup a)(b_1 \rightharpoonup c)(h_2 \rightharpoonup b_0) && (3.39)\\
&= \sum_{h,b}(h_1 \rightharpoonup a)(\epsilon(h_2)b_1 \rightharpoonup c)(h_3 \rightharpoonup b_0) && (3.40)\\
&= \sum_{h,b}(h_1 \rightharpoonup a)(h_2 b_1 s(h_3) \rightharpoonup c)(h_4 \rightharpoonup b_0) && (3.41)\\
&= \sum_{h,b} h_1 \rightharpoonup [a(b_1 \rightharpoonup (s(h_2) \rightharpoonup c))b_0] && (3.42)\\
&= \sum_{h} h_1 \rightharpoonup [F_{(a\#\bar{b})}(s(h_2) \rightharpoonup c)] && (3.43)\\
&= (h \rightharpoonup F_{a\#\bar{b}})(c), && (3.44)
\end{aligned}$$

donc F est un morphisme d'algèbres de H-modules.

$$\begin{aligned}
\chi(F_{a\#\bar{b}})(c) &= \sum_{c,F_{a\#\bar{b}(c_0)}} [F_{a\#\bar{b}}(c_0) \underset{0}{\ } \otimes [F_{a\#\bar{b}(c_0)}]_1 s(c_1) && (3.45)\\
&= \sum_{c,b}[a.(b_1 \rightharpoonup c_0).b_0]_0 \otimes [a.(b_1 \rightharpoonup c_0).b_0]_1 s(c_1) && (3.46)\\
&= \sum_{a,b,c} a_O(b_1 \rightharpoonup c_0).b_0 \otimes a_1.c_1.b_1.s(c_2) && (3.47)\\
&= \sum_{a,b,c} a_0.(b_2 \rightharpoonup c_0).b_0 \otimes \epsilon(c_1).a_1.b_1 && (3.48)\\
&= \sum_{a,b} a_0.(b_2 \rightharpoonup c).b_0 \otimes a_1.b_1 && (3.49)\\
&= (F \otimes I)\chi(a\#\bar{b})(c), && (3.50)
\end{aligned}$$

ainsi, F est un morphisme d'algèbres de H-comodules.
Par suite, on conclut que F est un morphisme d'algèbres de H-dimodules.
$(\bar{a}\#b)(\bar{c}\#d) = \sum_b(\bar{a}(b_1 \rightharpoonup \bar{c}))\#b_0.d = \sum_{a,b}\overline{(a_1b_1 \rightharpoonup c).a_0}\#b_0d$

$$\begin{aligned}
G_{(\bar{a}\#b)(\bar{c}\#d)}(v) &= \sum_{a,b,v}[v_1 \rightharpoonup (a_1.b_1 \rightharpoonup c).a_0].v_0.b_0.d && (3.51)\\
&= \sum_{a,b,v}[v_1.a_1.b_1 \rightharpoonup c].v_0.b_0.d && (3.52)\\
&= G_{\bar{c}\#d}G_{\bar{a}\#b}(v) && (3.53)
\end{aligned}$$

dans $End(A)$ et dans $End(A)^{op}$ on a $G_{(\bar{a}\#b)(\bar{c}\#d)} = G_{\bar{a}\#b}G_{\bar{c}\#d}$ d'où G est un morphisme d'algèbres.

$$
\begin{aligned}
G_{h\rightharpoonup(\bar{a}\#b)}(c) &= \sum_{h,c}(c_1 \rightharpoonup (h_1 \rightharpoonup a)).c_0.(h_2 \rightharpoonup b) && (3.54)\\
&= \sum_{h,c}(c_1h_1 \rightharpoonup a).c_0.(h_2 \rightharpoonup b) && (3.55)\\
&= \sum_{h,c}(c_1h_1 \rightharpoonup a)(\epsilon(h_2) \rightharpoonup c_0)(h_3 \rightharpoonup b) && (3.56)\\
&= \sum_{h,c}(c_1h_1 \rightharpoonup a)(h_2s(h_3) \rightharpoonup c_0)(h_4 \rightharpoonup b) && (3.57)\\
&= \sum_{h,c} h_1 \rightharpoonup [(c_1h_1 \rightharpoonup a)(s(h_2) \rightharpoonup c)_0.b && (3.58)\\
&= \sum_{h} h_1 \rightharpoonup G_{\bar{a}\#b}(s(h_2) \rightharpoonup c) && (3.59)\\
&= h \rightharpoonup G_{\bar{a}\#b}(c), && (3.60)
\end{aligned}
$$

donc G est morphisme d'algèbres de H-modules.

$$
\begin{aligned}
\chi(G_{\bar{a}\#b})(c) &= \sum_{c,G_{(\bar{a}\#b)}(c_0)} [G_{(\bar{a}\#b)}(c_0)]_0 \otimes [G_{(\bar{a}\#b)}(c_0)]_1 s(c_1) && (3.61)\\
&= \sum_{c}[(c_{01} \rightharpoonup a).c_{00}.b]_0 \otimes [(c_{01} \rightharpoonup a).c_{00}.b]_1 s(c_1) && (3.62)\\
&= \sum_{a,b,c}[(c_1 \rightharpoonup a).c_0.b]_0 \otimes [(c_1 \rightharpoonup a).c_0.b]_1 s(c_2) && (3.63)\\
&= \sum_{a,b,c}(c_1 \rightharpoonup a_0).c_0.b_0 \otimes a_1.c_2.b_1 s(c_3) && (3.64)\\
&= \sum_{a,b,c}(c_1 \rightharpoonup a_0).c_0.b_0 \otimes a_1.b_1.\epsilon(c_2) && (3.65)\\
&= \sum_{a,b,c}(c_1 \rightharpoonup a_0)c_0\epsilon(c_1)b_0 \otimes a_1.b_1 && (3.66)\\
&= \sum_{a,b,c}(c_1 \rightharpoonup a_0)c_0.b_0 \otimes a_1.b_1 && (3.67)\\
&= (G \otimes I)\chi(\bar{a}\#b)(c), && (3.68)
\end{aligned}
$$

donc G est un morphisme d'algèbres comodules. Par suite, G est un morphisme d'algèbres de dimodules. □

Définition 3.4.1. *Si A est une algèbre de H-dimodule telle que F et G sont des isomorphismes, on dit que A est H-Azumaya.*

Théorème 3.4.1. *(i) Si M un H-dimodule, alors $End(M)$ est H-Azumaya.*

(ii) A,B H-Azumya $\Longrightarrow$ $A\#B$ est H-Azumaya.

(iii) A H-Azumaya $\Longrightarrow$ $\bar{A}$ est H-Azumaya.

Démonstration. (i)

$$\begin{aligned}
End(M)\#\overline{End(M)} &\cong End(M)\otimes End(M)^{op} && (3.69)\\
&\cong End(M) && (3.70)\\
\overline{End(M)}\#End(M) &\cong \overline{End(M)}\#\overline{\overline{End(M)}} && (3.71)\\
&\cong End(M)^{op}\#\overline{End(M)^{op}} && (3.72)\\
&\cong End(M)^{op}, && (3.73)
\end{aligned}$$

ainsi, $End(M)$ est H-Azumaya.

(ii)

$$\begin{aligned}
(A\#B)\#\overline{(A\#B)} &\cong (A\#B)\#(\bar{B}\#\bar{A}) && (3.74)\\
&\cong A\#(B\#\bar{B})\#\bar{A} && (3.75)\\
&\cong A\#End(B)\#\bar{A} && (3.76)\\
&\cong A\#\bar{A}\#End(M) && (3.77)\\
&\cong End(A)\#End(B) && (3.78)\\
&\cong End(A)\otimes End(B) && (3.79)\\
&\cong End(A\otimes B) && (3.80)\\
&\cong End(A\#B) && (3.81)\\
\overline{(A\#B)}\#(A\#B) &\cong (\bar{B}\#\bar{A})\#(A\#B) && (3.82)\\
&\cong \bar{B}\#\bar{A}\#A\#B && (3.83)\\
&\cong \bar{B}\#End(A)^{op}\#B && (3.84)\\
&\cong \bar{B}\#B\#End(A)^{op} && (3.85)\\
&\cong End(B)^{op}\#End(A)^{op} && (3.86)\\
&\cong End(A\otimes B)^{op} && (3.87)\\
&\cong End(A\#B)^{op}, && (3.88)
\end{aligned}$$

donc $A\#B$ est H-Azumaya.

(iii)

$$\begin{aligned}
A\#\bar{A} &\cong \bar{\bar{A}}\#\bar{A} && (3.89)\\
&\cong \bar{\bar{A}}\otimes\bar{A} && (3.90)\\
&\cong \overline{End(A)} && (3.91)\\
&\cong End(A)^{op}, && (3.92)\\
& && (3.93)
\end{aligned}$$

ainsi, on a $\bar{\bar{A}}\#\bar{A}\cong End(A)^{op}$ et $\bar{A}\#\bar{\bar{A}}\cong End(A)$, par suite, $\bar{A}$ est H-Azumaya. □

Définition 3.4.2. *Soient A et B des algèbres de dimodules H-Azumaya. Alors on dit que A et B sont Brauer équivalents (et on note $A\sim B$) s'il existe des H-dimodules M et N projectifs de type fini sur k tels que $A\#End(M)\cong B\#End(N)$ comme algèbres de H-dimodules.*

Proposition 3.4.2. *$\sim$ est un relation d'équivalence qui respecte l'opération # et l'ensemble quotient est un groupe.*

Démonstration. (i) $\sim$ est une relation d'équivalance :

a) soit A $\in \mathcal{A}$; existe-t-il M,N dans $\mathcal{L}_H^H$ tels que $A\#End(M) \cong A\#End(N)$?

On a $A\#End(A) \cong A\#End(A)$

b) Soi A ,B et C $\in \mathcal{A}_H^H$ telles que $A \sim B$ et $B \sim C$.

- $A \sim B \Longleftrightarrow \exists$ M et N dans $\mathcal{L}_H^H$ tels que $A\#End(M) \cong B\#End(N)$

- $B \sim C \Longleftrightarrow \exists$ M' et N' dans $\mathcal{L}_H^H$ tels que $B\#End(M') \cong C\#End(N')$

$$\begin{aligned} A\#End(M \otimes M') &\cong A\#End(M)\#End(M') && (3.94)\\ &\cong B\#End(N)\#End(M') && (3.95)\\ &\cong B\#End(M')\#End(N) && (3.96)\\ &\cong C\#End(N')\#End(N) && (3.97)\\ &\cong C\#End(N' \otimes N) && (3.98) \end{aligned}$$

D'o*ù* la transitivité.

c)Soit A et B des éléments de $\mathcal{A}$ telles que A $\sim$ B

On a $A \sim B \Longrightarrow \exists$ M et N dans $\mathcal{L}_H^H$ tels que $A\#End(M) \cong B\#End(N)$.

Or $A\#End(M) \cong B\#End(N) \Longleftrightarrow B\#End(N) \cong A\#End(M)$,

donc il existe M et N dans $\mathcal{L}_H^H$ tels que $A\#End(M) \cong B\#End(N)$, c'est *à* dire $B \sim A$. D'o*ù* la symétrie. Ainsi, $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) L'ensemble quotient est un groupe : notons BD(k,H) cette ensemble dont la loi est définie comme suit $[A].[B] = [A\#B]$

- Soit [A] $\in$ BD(k,H).On a $[A].[k] \cong [A\#k]$, or $A\#k \cong A \otimes k \cong A$; donc $[A]\#[k] \cong [A]$ et par suite, [k] est le neutre dans BD(k,H).

- Soit [A],[B] et [C] des éléments de BD(k,H) ; on a :

$([A].[B]).[C] = [A\#B].[C] = [(A\#B)\#C]$, or $(A\#B)\#C \cong A\#(B\#C)$ donc

$[(A\#B)\#C] = [A\#(B\#C)] = [A]([B\#C])$ et par suite, $([A].[B]).[C] = [A].([B].[C])$.

Ce qui prouve l'associativité.

- Comme $A\#\bar{A} \cong End(A) \cong k$ donc $[A].[\bar{A}] = [A\#\bar{A}] = [K]$ d'o*ù* A a pour inverse $\bar{A}$.

Ainsi $(BD(k,H), .)$ est un groupe. □

Définition 3.4.3. *On note ce groupe par $BD(k,H)$ et on l'appelle groupe de Brauer des alg*è*bres de H-dimodules.*

3.5 Exemples du BD(k,H)

Définition 3.5.1. *- Soit M un H-module avec pour action ρ_M. On dit que M est trivial, si $\rho_M(h \otimes m) = \epsilon_H(h)m \quad \forall h \in H, m \in M$.*

- Soit M un H-comodule avec χ_M comme coaction. On dira que M est trivial si $\chi_M(m) = m \otimes 1_H \quad \forall m \in M$.

Proposition 3.5.1. *1) Soit M un H-module. En munissant M de la structure de H-comodule trivial, M est un H-dimodule.*

2) Soit N un H-comodule. En munissant N de la structure de H-module trivial, il est un H-dimodule.

Démonstration. 1)- $(\chi \circ \rho)(h \otimes m) = \chi(hm) = hm \otimes 1_H$,

- $(\rho \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \chi)(h \otimes m) = (\rho \otimes id_H)(h \otimes m \otimes 1_H) = hm \otimes 1_H$,

donc M est dimodule.

2)- $(\chi \circ \rho)(h \otimes n) = \chi(\epsilon(h)n) = \epsilon(h_1)n_0 \otimes \epsilon(h_2)n_1 = \epsilon(h_1\epsilon(h_2))n_0 \otimes n_1 = \epsilon(h)n_0 \otimes n_1$

- $(\rho \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \chi)(h \otimes n) = (\rho \otimes id_H)(h \otimes n \otimes n_1) = \epsilon(h)n_0 \otimes n_1$,

ainsi, N est dimodule. □

Proposition 3.5.2. *1) Soit A une algèbre de H-module. Alors A est une algèbre de H-dimodule.*

2) Soit B une algèbre de H-comodule. Alors B est une algèbre de H-dimodule.

Démonstration. 1) On a A une algèbre de H-module, donc c'est un H-module. Ainsi A est un H-dimodule avec $\chi_A(a) = a \otimes 1_H$.

Soit a,a' $\in$ A. $\chi_A(aa') = \chi_A(a)\chi_A(a') = (a \otimes 1_H)(a' \otimes 1_H) = (aa' \otimes 1_H)$,

donc A est une algèbre de H-comodule. Par suite, A est une algèbre de H-dimodule.

2) B algèbre de H-comodule, donc c'est un H-comodule. Par suite B, est un H-dimodule avec $\rho_B(h \otimes b) = \epsilon(h)b$.

$\rho(h \otimes bb') = \epsilon(h)bb' = \epsilon(h_1\epsilon(h_2))bb' = \epsilon(h_1)\epsilon(h_2)bb' = (\epsilon(h_1)b)(\epsilon(h_2)b') = \rho(h_1 \otimes b)\rho(h_2 \otimes b')$.

Donc B est une algèbre de H-module, et par suite, c'est une algèbre de H-dimodule. □

Remarque 3.5.1. *Soient A et B des algèbres de H-dimodules.*

- Notons A^{op} l'opposé de A.

⋆ Si l'action de H sur A est triviale, $\bar{a}.\bar{b} = \overline{\sum_a (a_1.b)a_0} = \overline{\sum_a (\epsilon(a_1).b)a_0} = \overline{\sum_a b.\epsilon(a_1).a_0} = \overline{ba}$; ainsi, on a $A^{op} = \bar{A}$.

⋆ Si la coation est triviale, $\bar{a}.\bar{b} = \overline{\sum_a (a_1.b)a_0} = \overline{\sum_a (1_H.b)a} = \overline{\sum_a b.a} = \overline{ba}$, par suite, $A^{op} = \bar{A}$.

⋆ *si l'action de H sur B est triviale, alors*

$a(b_1.a')\#b_0b' = a(\epsilon(b_1).a') \otimes b_0b' = aa' \otimes b_0\epsilon(b_1)b' = aa' \otimes bb'$ *qui est le produit usuel sur* $A \otimes B$*, ainsi* $A\#B = A \otimes B$

⋆ *si la coaction est triviale, alors*

$a(b_1.a')\#b_0b' = a(1_H.a') \otimes bb' = aa' \otimes bb'$*, ainsi* $A\#B = A \otimes B$.

Soit A une algèbre de H-module qui est Azumaya. A munie de la structure triviale de H-comodule est une algèbre de H-dimodule.

On a $A\#\bar{A} \cong A \otimes A^{op} \cong End(A)$ et $\bar{A}\#A \cong A^{op} \otimes A \cong End(A)^{op}$.

Donc si A est une algèbre de H-module ou de H-comodule qui est Azumaya, alors A est une algèbre de H-dimodule H-Azumaya.

Soit [A] ∈ BD(k,H). Donc il existe B ∈ $\mathcal{A}$ telle que $A \sim B$, c'est *à* dire qu'il existe M et N ∈ $\mathcal{M}_H$ tel que $A \otimes End(M) \cong B \otimes End(N)$.

En munissant A et B d'une part et M et N d'autre part de la structure de H-comodule triviale, on a A et B sont des algèbres de H-dimodules et M et N sont des H-dimodules.

On obtient par suite, $A \otimes End(M) = B\#End(N) \cong B \otimes End(N) = B\#End(N)$, c'est *à* dire $A\#End(M) \cong B\#End(N)$. Ainsi [A] ∈ BD(k,H).

On en fin BM(k,H) ⊂ BD(k,H) ⊃ BC(k,H).

Remarque 3.5.2. *on a :*

$$\begin{aligned} \gamma_{A,B} : A \otimes B &\longrightarrow B \otimes A \\ a \otimes b &\longmapsto a_1 b \otimes a_0 \end{aligned}$$

est un isomorphisme de H-dimodules.

$(a\#B)(a'\#b') = (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \gamma_{B,A} \otimes id_B)(a \otimes b \otimes a' \otimes b')$ *; car* $(m_A \otimes m_B)(a \otimes b_1.a') \otimes b_0 \otimes b') = a.(b_1.a') \otimes b_0 b'$

Si l'action est triviale, $\gamma = \tau$ *(permutation) ; si la coaction est triviale,* $\gamma = \tau$ *.*

Conclusion

Ce travail a permis la construction du groupe de Brauer des algèbres de H-dimodules. Les caractéres commutatif et cocommutatif des algèbres de Hopf étaient d'importances remarquables. Cela a permis de montrer que l'opposé de l'algèbre de dimodule est une algèbre de dimodule.

L'introduction du produit croisé, qui généralise le produit tensoriel, nous a permis de voir que la notion d'algèbre de dimodule H-Azumaya généralise la définition usuelle d'algèbre d'Azumaya.

La commutativité de l'algèbre de Hopf H nous a été utile dans le passage du produit tensoriel au produit croisé et vice versa par isomorphisme. Ceci a permis de montrer que les groupes de Brauer des algèbres de H-modules et H-comodules sont des cas particuliers du groupe de Brauer des algèbres de dimodules.

Bibliographie

1. H. BASS, "Lectures on Topics in Algèbrais K-Theoriy", Tata institute of Fundamental research, Bombay, 1967.
2. Loïc Foissy, Algèbres de Hopf combinatoires.
3. R. G.LARSON, Caracters of Hopf algebras, J. Algebra 17 (1971), 352-368.
4. F. W. LONG, A generalization of the Brauer groupe of graded algebras, Proc London.
5. Fred Van Oystaeyen and Yinhuo Zhang, the Brauer groupe of a braided monoïdal catégories.
6. B. PAREIGIS, When Hopf algebras are Frobenius algebras, J. Algebra 18 (1971), 588-596.
7. Richard B. Tan, Brauer groupe of H-dimodule algebras and Truncated power series Hopf algebras.
8. Christopher David Walker, Freeness of Hopf Algebras, june. 2006.