UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

**U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES**
**Département de mathématiques**
**mémoire de master**

| | |
|---|---|
| **DOMAINE :** | SCIENCES ET TECHNOLOGIES |
| **MENTION :** | MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS |
| **SPÉCIALITÉ :** | MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES |
| **OPTION :** | MÉCANIQUE |

**Sujet :**

# Ecoulement potentiel d'un fluide compressible,visqueux et isotherme

**Présenté le 10 Octobre 2020 par** Ibrahima DRAME

**Sous la direction de :** Pr Edouard DIOUF

Devant le jury ci-après :

| **Prénoms et Noms** | **Grade** | **Qualité** | **Établissement** |
|---|---|---|---|
| Pr Diéne NGOM | Professeur Assimilé | Président du jury | UASZ |
| Dr Timack NGOM | Maitre de Conférences Titulaire | Examinateur | UASZ |
| Dr Clément MANGA | Maitre de Conférences Titulaire | Examinateur | UASZ |
| Pr Edouard DIOUF | Professeur Assimilé | Directeur | UASZ |

Année universitaire : 2019 – 2020

# Dédicace

Au nom de Dieu, le clément et le miséricordieux, louange à Allah le tout puissant qui m'a permis de dédier ce modeste travail :
en signe de respect, de reconnaissance et de remerciement :
à l'homme auprès de qui j'ai grandi, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui a financé mes études de l'école primaire à l'université et celui qui s'est sacrifié pour me voir réussir, puisse Allah te prêter une très longue vie et beaucoup de santé jusqu'à ce qu'il réalise tous tes voeux sur nous ; à toi mon père.
A toi qui, même de très loin m'as toujours accompagné par tes prières, toi qui ne m'as jamais lésé et qui a toujours été douce envers moi ; je t'aime maman.
Aux deux personnes qui, par mes relations avec elles m'ont permis de mesurer mon amour pour les enfants, à vous mes très chères nièces Dado FALL et sarang DRAME.
A mon grand frère Lamine DRAME, envers qui, j'exprime mes vives reconnaissances pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté durant mon cursus universitaire.
A vous mes deux meilleurs amis de longue date, mes confidents, mes frères Yaya SAGNA et Lassana GASSAMA.
Aux personnes dont j'ai bien aimées la présence à ce jour, à tous mes frères : Sanousy, Doudou, Mamadou Lamine, Mamadou Sola, Madi, Souleymane, Ibrahima, Ousmane, Mamadou Warr et Tidiane DRAME, toutes mes Soeurs Fatou, Siré, Mamis, Awa, Diatou, Aby, Mama, Diarra, Gnima et Dianké, mes nièces , Siré, Mariama, Amy Collé, Fatou Kiné, Bintou,Mame Fatou, mes neveux Fodé, Landing, Lamine et Chérif, et mes tantes maman Niaria, maman Diané, tante Fatou, tante Siré et tante Ndèye, je dédie ce travail dont le grand plaisir leur revient en premier lieu pour leur prière, conseil, aide et encouragement.
Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagné durant mon parcours d'études supérieures, mes aimables amis, condisciples et frères de religion, toi Mouhamadou Moustapha DIEDHIOU, Mamadou Aliou DIALLO et sa femme Fatima BA, Moctar DIALLO, Mamadou FATY, Kindy BA, Cheikh DIOP, Cheikh NIASS, Rosario MANGOU, Ibrahima TABANE, Adama SYLLA, Balla SYLLA, Souleymane MENDY, Fatoumata Bintou DIALLO, Daouda NDIAYE,Chérif LAM, Abdou Lahat NIANG, Malang BAYO, Boubacar CAMBAYE...

J'ai été cet élève puis étudiant qui éprouvait du plaisir à taquiner ses camarades jusqu'à outrepasser dés fois les limites, je tiens à dédier ce travail en guise de demande de pardon à toi Malick DIBA, Ibrahima DIOP, Ibrahima MANE, Manting SADIO, Mariama THIERRO, Mame Fatou NDIAYE, Seckou TAMBA, Salim GASSAMA, Alphouseyni DIATTA, Moctar GASSAMA, Doudou MANE, à tous ces amis Diola ; si un jour j'ai une seule fois lésé quelqu'un de par mes attitudes de taquin.
Je rends un vif et grand hommage à mon frère Mamadou Sagna auprès de qui je passais toutes mes vacances, qu'Allah te pardonne et t'acceuille dans son paradis.

# Remerciement

Au terme de ce travail, je tiens à adresser mes vifs et sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide et leur soutien, en particulier :
le professeur Edouard DIOUF, d'abord pour l'aide qu'il m'a apportée durant tous ces moments d'initiation à la recherche, et pour m'avoir gentiment accueilli et encadré. J'apprécie particulièrement sa disponibilité, son soutien moral et surtout sa sympathie.
Mes remerciements vont à l'endroit du Professeur Diéne NGOM, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury, des autres membres du jury :
le Dr Timack NGOM,
le Dr Clément MANGA,
pour avoir bien voulu lire ce mémoire et faire part de leurs remarques.
Mes remerciements vont également à l'endroit de tout les membres du laboratoire de mathématiques et applications en particulier le Dr Jérémie Gaston SAMBOU qui m'a toujours épaulé tout au long de la réalisation de ce travail.
Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation de ce modeste travail.

# Table des matières

# Résumé

Des solutions de l'équation de Hamilton Jacobi, on trouve certains écoulements potentiels d'un fluide compressible, visqueux et isotherme. Lorsque la dimension spatiale $d$ des équations de Navier Stockes est égale à 1, ces solutions sont globales dans le temps et dans l'espace. Sinon elles sont locales dans le temps et dans l'espace.

# Abstract

From solutions of the Hamilton Jacobi equation, we find some potential flows of a compressible, viscous and isothermal fluid. When the spatial dimension $d$ of the Navier-Stockes equations equals 1, these solutions are global in time and space. Otherwise they are local in time and space.

# Abréviations et Notations

$\frac{\boldsymbol{\partial} u}{\boldsymbol{\partial} t} = \boldsymbol{\partial}_t u = u_t$ :dérivée partielle de $u$ par rapport a t

$\boldsymbol{\Delta} u$ : laplacien de $u$

$\boldsymbol{\nabla} u$ : gradient de $u$

$\boldsymbol{div} u = \boldsymbol{\nabla .} u$ : divergence de $u$

$(u.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} u.u = \sum_i u_i \boldsymbol{\partial}_i u_j$ : dérivée directionnelle

$||x||$ : norme de $x$ dans $\mathbb{R}^d$

EDP :équations aux dérivées partielles

$B(x, r)$ : boule de centre $x$ et de rayon $r$

$\boldsymbol{Df}()$ : diférentielle première de $f$

$\boldsymbol{D^2 f}()$ : différentielle seconde de $f$

$u = \boldsymbol{\nabla} f(x, t)$ : écoulement potentiel

$\underline{u} = \boldsymbol{\nabla} f$ : tenseur d'ordre 1

$u(x, t)$ : vitesse du fluide

$\rho(x, t)$ : densité du fluide

$\underline{\underline{D}}$ :tenseur des vitesses de déformation

$\underline{\underline{\sigma}}$ : tenseur des contraintes de cauchy

$< x, y >= x.y$ : produit scalaire de $x$ et $y$

# Introduction

L'un des domaines qui étudie le milieu continu, la mécanique des fluides est la branche de la physique qui analyse les écoulements des fluides lorsque ceux-ci subissent une ou des contraintes. L'origine de cette étude remonte bien avant l'antiquité avec les connaissances traditionnelles telles que l'irrigation dans l'agriculture, les canaux, les fontaines....
Aujourd'hui présente dans bon nombre de phénomènes naturels, la mécanique des fluides se retrouve aussi au cœur d'applications industrielles et d'activités humaines plus variées.
Au $XVIII^e$ siècle, après l'association des mathématiques à la Physique, la mécanique des fluides gagne en profondeur.
En 1738, Daniel Bernoulli établit le principe de conservation de l'énergie mécanique.
La connaissance du différentiel permet à Jean Le Rond D'alembert en 1749 d'exposer, les bases de l'hydrodynamiques en présentant le principe de la pression interne d'un fluide, du champ de vitesse et des dérivées partielles appliquées aux fluides. Leonhard Euler complète plus tard l'analyse de D'Alembert sur la pression interne et publie en 1755 un traité qui donne les EDP décrivant un fluide parfait incompressible.
En 1820 Henri Navier introduit la notion de frottement sous forme d'un nouveau terme dans les équations mathématiques des fluides. George Gabriel Stock aboutit en 1845 à une équation permettant de décrire un écoulement du fluide visqueux. Les équations de Navier-Stockes marqueront ainsi l'histoire de la mécanique des fluides.
Ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (visqueux) dans l'approximation des milieux continus. Elles modélisent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides.
La mise en œuvre de ces équations conduit à l'élaboration d'un problème mathématique dont la solution est constituée d'un champ de déplacement et d'un champ de contrainte. Ces champs sont généralement des fonctions spatiales relativement régulières.
Le thème de ce mémoire rejoint ces notions à savoir : le comportement rhéologique d'un fluide compressible isotherme gouverné par les équations des Navier-Stock.
En effet, la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi issue d'une équation de Navier-Stockes en compressible, nous permet de décrire l'évolution de l'écoulement potentiel d'un fluide compressible visqueux.

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier ces solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi en utilisant les dimensions spatiales des équations de Navier-Stock $d = 1$ et $d \geq 2$.
Notre étude s'appuie essentiellement sur les références suivantes :
$[15, 10, 7, 16, 4]$ pour la première partie, $[12, 6, 5, 14, 3, 2]$ pour la seconde partie, $[6, 2, 8, 11, 13, 1, 17]$ pour la troisième et quatrième parties,
Dans la première partie, nous présentons les principales notions de base sur la théorie d'un fluide et des équations de Navier-Stock issues des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ainsi, nous rassemblerons ci-après quelques définitions, remarques et théorèmes démontrés pour mieux aborder la suite.
Dans la deuxième partie, nous rappelons d'abord la définition de l'équation de Hamilton-Jacobi, ensuite énonçons un lemme permettant de démontrer que la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi atteint son infimum, puis à partir des équations de Navier-Stockes, nous obtenons un système à résoudre pour avoir la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi qui décrit l'écoulement potentiel et enfin à travers un théorème fondamental de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, nous avons démontré la solution régulière convexe de ces équations puis confirmé que $u(x, t)$ et $\rho(x, t)$ sont solutions des équations de Navier-Stockes.
Dans la troisième partie, pour atteindre l'unicité, P.L. Lions et Michael G.Crandall ont introduit dans les années 80 [11], la notion de solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi dont nous rappelons brièvement la définition et quelques propriétés, puis étudions les résultats d'existence et d'unicité selon que la dimension spatiale des équations de Navier-Stock $d = 1$.
Dans la quatrième partie, nous étudions cette même équation de Hamilton-Jacobi pour $d \geq 2$ puis illustrons la partie par un exemple avec $f_0(x) = ||x||$ avant de faire une généralisation sur la solution régulière $f$ de l'équation de Hamilton-Jacobi dans un ensemble $K$ convexe.

# 1 Notions préliminaires

## 1.1 Généralités sur les fluides

Un milieu $(D)$ d'un espace physique est dit continu, si toutes les applications liées ou définies dans $(D)$ sont continues au sens mathématique du terme.

### Définitions 1.1

$\star$ On dit qu'un milieu continu est fluide si le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est fonction du tenseur des vitesses de déformation $\underline{\underline{D}}$, ie $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{D}})$ ;

avec $D_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ i,j=1,2,3...n

où $\overrightarrow{u}_i$ la vitesse du fluide dans la direction de $i$ et $x$ sa position.
$\star$ Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement.
$\star$ un fluide est dit isotrope s'il existe une application $f$ telle que $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{D}})$.

$\star$ La rhéologie (étude de la déformation et de l'écoulement d'une matière sous l'effet d'une contrainte) d'un fluide dépend de sa pression et de sa vitesse de déformation, i.e. le gradient de vitesse.

Les fluides peuvent être classés en deux familles relativement à leur viscosité : la famille des fluides newtoniens(eau, gaz, air...) et celle des fluides non newtoniens (sang, boues, p$\hat{a}$tes...).

La plupart des fluides ont un comportement de fluides newtoniens pour lesquels le tenseur des contraintes dépend de manière linéaire, homogène et isotrope du tenseur de la vitesse de déformation.

$\star$ On dit qu'un fluide est newtonien si sa viscosité est constante ou s'il ne peut varier qu'en fonction de la température. En d'autres termes si sa loi de comportement $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{D}})$ est une fonction affine.
$\star$ Dans le cas contraire le fluide est dit non newtonien.

Les fluides newtoniens sont classés comme : fluides parfaits, réels, incompressibles et compressibles.
Un fluide parfait est un fluide théorique de viscosité nul ($\gamma = \lambda = 0$).
Contrairement à un fluide parfait, un fluide réel est un fluide de viscosité prise en considération. C'est uniquement au repos que l'on admettra que le fluide réel se comporte comme fluide parfait.
**Remarque** : En réalité tous les fluides sont visqueux.
$\star$ La configuration lagrangienne du mouvement d'un fluide consiste à décrire les grandeurs physiques caractéristiques du milieu à l'instant $t$ dans la configuration $Q_t$ comme des fonctions de la variable $x$ dans $Q_{t_0}$ et du temps $t$ (avec $Q_t$ la configuration à l'instant $t$ et $Q_{t_0}$ la configuration à l'instant $t_0$). En d'autres termes, dans la description lagrangienne on identifie les particules fluides et on les suit dans leurs mouvements.

$\star$ A la différence de la description lagrangienne où l'on identifie les particules, la configuration eulérienne consiste à fixer un point d'observation $x$ dans l'espace et à enregistrer au cours du temps la vitesse $u(x,t)$ des particules fluides qui défilent en ce point.

### 1.1.1 Loi de comportement

Soit $S$ une particule fluide. L'étude de $S$ ne peut pas se faire à l'échelle macroscopique ($S$ est très petite), ni à l'échelle microscopique (impossible de déterminer la vitesse). Elle se détermine plutôt à l'échelle mésoscopique (échelle intermédiaire).
A partir de cette configuration, on peut appliquer toute la théorie de l'élasticité en considérant $S$ comme un milieu continu physique.
**Remarque 1.1** La configuration eulérienne est privilégiée en mécanique des fluides.

## 1.2 Équations bilan

## Théorème 1.1(théorème de la divergence)

Soit $Q$ un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, de frontière $\partial Q$ et soit $u \in C^1(\overline{Q})$ un champ de vecteur continu (voir [15]). Alors

$$\int_{\partial Q} u.\boldsymbol{\eta} ds = \int_Q \mathbf{div}(u) dv \tag{1.1}$$

avec $\boldsymbol{\eta}$ la normale unitaire orientée vers l'extérieur sur $\partial Q$.

### 1.2.1 Conservation de la masse

Un fluide possède une masse $m \in \mathbb{R}^+$, la formule générale ou intégrale (voir [15]) de conservation de la masse en fonction du temps s'écrit :

$$m(t) = \int_Q dm(x,t) \ \text{ avec } \ dm(x,t) = \rho(x,t)dv.$$

Il existe alors une densité du fluide telle que, pour un domaine fluide quelconque $Q_t$ dans $\mathbb{R}^d$, on ait :

$$m(t) = \int_Q \rho(x,t)dv \tag{1.2}$$

où la densité du fluide $\rho(t,x) \geq 0$ est un champ scalaire défini sur $Q_t$. Le principe de conservation de la masse d'un fluide est donné par

$$\frac{d}{dt}m(t) = 0 \tag{1.3}$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\int_Q \rho(x,t)dv = 0, \ \ \forall \ Q(t) \tag{1.4}$$

### 1.2.2 Dérivée particulaire

Le champ de vitesses d'un corps d'une particule fluide dans une transformation $\varphi$ de configuration de référence $Q_{t_0}$ vers une configuration à un instant $t > 0$ est défini par :

$$\underline{V}(\underline{X},t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{X},t) \text{ avec } \underline{X} \in Q_t \text{ le tenseur d'ordre 1}$$

La description eulérienne de ce champ de vitesses est :

$$\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{V}(\varphi^{-1}(\underline{x}),t) = \underline{V}(\underline{X},t) \ [15]$$

Plus généralement, les grandeurs utilisées en mécanique des milieux continus sont considéré tantôt comme fonction de variables Lagragiennes $F(\underline{X},t)$ ou comme fonction de variables eulériennes $f(\underline{x},t)$ :

$$F(\underline{x},t) = f(\underline{x},t) = f(\varphi(\underline{X},t),t)$$

On utilise les notation $F$, $f$ et on pose $\underline{x} = \varphi(\underline{X},t)$.
La derivée particulaire ou encore derivée temporelle d'une quantité $F$, suivant le mouvement est définie par :

$$\frac{d}{dt}F(X,t) = \frac{\partial}{\partial t}F(\underline{X},t) = \frac{d}{dt}f(\varphi(\underline{X},t),t) = \frac{\partial}{\partial t}f(\underline{x},t)+\frac{\partial}{\partial \underline{x}}f(\underline{x},t).\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{x}}(\underline{X},t)$$

où apparait le terme convectif $(\bigtriangledown \boldsymbol{f}).v$
donc pour une particule fluide,

$$\frac{d}{dt}f(X,t) = \frac{\partial}{\partial t}f + (\bigtriangledown \boldsymbol{f}).v$$

Alors d'après le principe de conservation de la masse (1.4) et la formule de la dérivée particulaire on a :

$$\int_{Q_t}[\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}+\rho(x,t)\mathbf{div}(\overrightarrow{v})]dv = 0, \ \ \forall\, Q_T$$

D'après le théorème de l'intégrale nulle,

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \rho(x,t)\mathbf{div}(v) = 0 \qquad \text{(équation de continuité )} \tag{1.5}$$

### Théorème 1.2 :(théorème de transport de Reynolds)

Soient $Q$ un domaine régulier de $\mathbb{R}^d$, $\partial Q$ la frontière de $Q$ et $\mathbf{v}$ la vitesse normale sortante au point $x \in \partial Q$. Alors pour tout champ de tenseur continu (voir [15]) admettant une dérivée temporelle, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_Q f dv = \int_Q \partial_t f dv + \int_{\partial Q} f.\boldsymbol{\eta} ds \tag{1.6}$$

Avec $\boldsymbol{\eta}$ la normale unitaire orientée vers l'extérieur.

## Preuve

On a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_Q f dv &= \int_Q \frac{d}{dt}(f dv)\\ &= \int_Q (\frac{d}{dt}f + f(\frac{d}{dt}dv))dv\\ &= \int_Q (\frac{\partial}{\partial t}f + (\bigtriangledown f).v + f(\mathbf{div}v))dv\end{aligned}$$

or $\mathbf{div}(fv) = (\bigtriangledown f).v + f(\mathbf{div}v)$

donc $\frac{d}{dt}\int_Q f dv = \int_Q (\frac{\partial}{\partial t} f dv + \mathbf{div}(fv))dv$

$$= \int_Q \frac{\partial}{\partial t} f dv + \int_{\partial Q} fv.\boldsymbol{\eta} ds$$

d'où $\frac{d}{dt}\int_Q f dv = \int_Q \frac{\partial}{\partial t} f dv + \int_{\partial Q} fv.\boldsymbol{\eta} ds.$ □

Cette relation est fondamentale car elle permet d'obtenir toutes les relations fondamentales de la mécanique.

### 1.2.3 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement correspond à la fonction $\rho u$. En appliquant le théorème de transport de Reynolds à la fonction $\rho u$, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_Q \rho u du = \int_Q \partial_t \rho u du + \int_{\partial Q} \rho u (u.\boldsymbol{\eta}) ds \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{dt}\int_Q \rho u du - \int_Q \partial_t \rho u du - \int_{\partial Q} \rho u (u.\boldsymbol{\eta}) ds = 0$$

D'après le théorème de la divergence on a :

$$\int_{\partial Q} \rho u (u.\boldsymbol{\eta}) ds = \int_Q \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) du \tag{1.8}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\int_Q \rho u du - \int_Q \partial_t \rho u du - \int_Q \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) du = 0$$

$$\Rightarrow \int_Q [\frac{d}{dt}\rho u - \partial_t \rho u - \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u})] du = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\rho u - \partial_t \rho u - \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\rho u du = \partial_t \rho u + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u})$$

Le principe fondamental de la dynamique veut que toute variation de quantité de mouvement résulte de l'application des forces. Donc la relation générale de conservation de la quantité de mouvement est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\int_Q \rho u du = \int_Q \partial_t \rho u du + \int_Q \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) ds = \int_{\partial_Q} \sigma.\boldsymbol{\eta} ds + \int_Q f du \tag{1.9}$$

D'après le théorème de la divergence :

$$\int_{\partial Q} \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\eta} ds = \int_{Q} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) du$$

la loi de conservation de la quantité de mouvement est donnée par :

$$\boldsymbol{\partial_t(\rho u)}+\mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) = \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})+f \tag{1.10}$$

avec $\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{div}(-p\mathbf{I}+2\gamma\mathbf{D}+\lambda\mathbf{div}(\mathbf{u})\mathbf{I})$ appelée équation de lamé,

$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\bigtriangledown\boldsymbol{u} + \bigtriangledown^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{u})$ le tenseur de déformation,
et $\mathbf{I}$ la matrice identité.
C'est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux en espace pour les fluides visqueux.

$$\frac{d}{dt}\rho u du = \partial_t \rho u+\mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) \tag{1.11}$$

est l'équation de continuité de la quantité de mouvement.

## 1.3 Équation de Navier-Stokes en compressible

Nous disposons de plusieurs formulations mathématiques pour étudier le mouvement d'un fluide (liquide, gaz,...). Un tel fluide est complètement décrit par sa densité $\rho = \rho(x,t) \in \mathbb{R}_t$ et son champ de vitesse $u = u(x,t) \in \mathbb{R}_x^d$, où $x$ désigne la variable d'espace dans $\mathbb{R}^d$ et $t \geqslant 0$ le temps.
C'est en 1820 que Navier fournit les équations qui regissent les mouvements d'un fluide visqueux incompressible [16].

$$\begin{cases} \partial_t u + (u.\bigtriangledown)u + \bigtriangledown \boldsymbol{p} & = \gamma\boldsymbol{\Delta u} \\ \qquad \mathbf{div}(\boldsymbol{u}) & = 0 \\ \qquad u(x,0) & = u_0(x) \end{cases} \tag{1.12}$$

où $\gamma$ représente la constante de viscosité du fluide, $p = p(x,t)$ sa pression supposée régulière et $u_0(x)$ le champ de vitesse initiale du fluide.
Nous allons nous intéresser tout au long de ce travail à l'écoulement d'un fluide compressible visqueux et isotherme dans un domaine $Q_t$ de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$.
Les équations de Navier Stokes qui permettent de décrire le mouvement de ce fluide sont données par :

$$\rho_t + \boldsymbol{div(\rho u)} = 0 \tag{1.13}$$

$$(\rho u)_{\mathbf{t}} + \mathbf{div}\ (\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) + \bigtriangledown \boldsymbol{p} = (\gamma + \lambda)\boldsymbol{\Delta u} + \gamma \bigtriangledown\mathbf{div}(\boldsymbol{u}) \tag{1.14}$$

Les constantes $\gamma$ et $\lambda$ sont positives et représentent les coefficients de Lamé. La célérité du son $c$ s'obtient par la relation

$c^2 = \dfrac{\bigtriangledown \boldsymbol{p}}{\bigtriangledown \boldsymbol{\rho}}$, ou $\bigtriangledown \boldsymbol{p} = c^2 \bigtriangledown \boldsymbol{\rho}$.

En remplaçant $\bigtriangledown \boldsymbol{p}$ dans l'équation de Navier-Stokes on a :

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u}) = 0 \\ \\ (\rho u)_{\mathbf{t}} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) + c^2 \bigtriangledown \boldsymbol{\rho} = (\gamma + \lambda) \boldsymbol{\Delta u} + \gamma \bigtriangledown \mathbf{div}(\boldsymbol{u}) \end{cases} \tag{1.15}$$

On suppose généralement que $\gamma \geq 0$ et $\lambda d + 2\gamma \geqslant 0$ (voir [16]).
Le problème (1.15) peut également être complété par la donnée des conditions initiales pour la densité et la vitesse du fluide :
$\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ et $u(x, 0) = u_0(x)$
avec $x \in \mathbb{R}^d$.
La première équation de (1.15) est l'équation de continuité et provient du principe de conservation de la masse.
La deuxième équation de (1.15) est l'équation de la quantité de mouvement et provient du principe de conservation de la quantité de mouvement.

# Dérivation de 1.15

D'après le principe de conservation de la masse on a :

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} \int_Q \rho(x, t) = 0$$

$$\int_Q \partial_{\mathbf{t}} \rho dv + \int_{\partial Q} \rho(u.\boldsymbol{\eta}) ds = 0$$

$$\int_Q \partial_{\mathbf{t}} \rho dv + \int_Q \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u}) dv = 0$$

$$\int_Q (\partial_{\mathbf{t}} \rho dv + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u})) dv = 0$$

donc $\quad \partial_{\mathbf{t}} \rho + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u}) = 0$.

D'où la première équation de (1.15)
la loi de conservation de la quantité de mouvement implique que :

$$\partial_{\mathbf{t}}(\rho u) + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) = \bigtriangledown \boldsymbol{.} (-p\mathbf{I} + \gamma(\bigtriangledown \boldsymbol{u} + \bigtriangledown^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{u}) I + \lambda \mathbf{div}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{I})$$

$$\Rightarrow \partial_{\mathbf{t}}(\rho u) + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) + \bigtriangledown \boldsymbol{p} = \gamma \boldsymbol{\Delta u} + \gamma \bigtriangledown \mathbf{div}(\boldsymbol{u}) + \lambda \bigtriangledown \mathbf{div}(\boldsymbol{u})$$

$\Rightarrow \partial_{\mathbf{t}}(\rho u) + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) + c^2 \bigtriangledown \boldsymbol{\rho} = (\gamma + \lambda) \bigtriangledown \mathbf{div}(\boldsymbol{u}) + \gamma \boldsymbol{\Delta u}$.
Ce qui donne la seconde équation de (1.15) □
La différence entre l'écoulement compressible et incompressible est que :
le champ de vitesse $u$ d'un fluide incompressible est constant et $\nabla . u = 0$.
tandis que le champ de vitesse $u(t, x)$ d'un fluide compressible est fonction du temps et de l'espace et $\nabla . u(t, x) \neq 0$

## 1.4 Fonctions convexes

Les fonctions convexes sont très utiles dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées et notamment dans le domaine de la mécanique des fluides. Nous verrons d'ailleurs dans la deuxième section comment elles sont reliées aux solutions qui décrivent l'écoulement des fluides.
Commençons par donner d'abord une définition de ces fonctions

## Définition 1.2

Soit $G$ une partie convexe de $\mathbb{R}^d$, c'est à dire que si $x, y \in G$, le segment $(1-\theta)x - \theta y$ , $\theta \in [0, 1]$ appartient à $G$. Les points intérieurs des segments appartenant à $G$ sont appelés les points intérieurs à $G$. Tout autre point d'accumulation appartenant ou non à $G$ sera appelé point limite de $G$.
Une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$f((1-\theta)x+\theta y) \leqslant (1-\theta)f(x)+\theta f(y) \tag{1.16}$$

pour tout $x, y \in G$ et tout $\theta \in [0, 1]$. Cela implique que $f(x)$ est continue en tout points intérieurs à $G$ .
Si l'inégalité de convexité est stricte, alors f est dite strictement convexe.

## Remarque 1.1

i) Si $f : G \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^1$ sur un intervalle $G$ de $\mathbb{R}$. Alors $f$ est convexe si et seulement si $f'$ est croissante sur $G$, et elle est strictement convexe si et seulement $f'$ est strictement croissante sur $G$.
ii) Si $f : G \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^2$ sur un intervalle $G$ de $\mathbb{R}$. Alors $f$ est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$ , et elle est strictement convexe si et seulement si $f'' > 0$.

## Théorème 1.3 :

Soit $I$ un domaine de $\mathbb{R}$. On note $H$ l'ensemble des fonctions affines sur $I$ (voir [4]).

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = \sup_{\substack{h \in H \\ h \leqslant f}} \{h(x),\ \forall x \in I\} \tag{1.17}$$

# Preuve

Pour n'importe quelle fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit

$$\widetilde{f} = \sup_{\substack{h \in H \\ h \leqslant f}} \{h(x),\ \forall x \in I\} \tag{1.18}$$

Si $f$ est convexe, il existe des droites sous la courbe $C_f$, i.e. que l'ensemble des fonctions affines $h \leq f$ est non vide et en particulier $\widetilde{f}$ est bien définie et vérifie que $\widetilde{f} \leqslant f$.
Pour tout point $x \in I$, il existe une fonction affine $h$ telle que $h(x) = f(x)$ et $h \leqslant f$.
Ceci prouve bien finalement que

$$\widetilde{f} = f$$

Supposons maintenant que $\widetilde{f} = f$. En particulier cela implique que l'ensemble $H$ des fonctions affines de $h$ telles que $h \leqslant f$ est non vide.
On fixe une telle fonction affine $h \in H$ et $x, y \in I$ telle que, $\lambda \in [0, 1]$.
Comme $h$ est affine, on a l'égalité :

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y) \tag{1.19}$$

Comme $h \leqslant f$ nous en déduisons

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y). \tag{1.20}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $h \in H$, on peut prendre le supprimum par rapport à $h$ et obtenir :

$$\sup_{\substack{h \in H \\ h \leqslant f}} h(\lambda x+(1-\lambda)y) = \widetilde{f}(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y). \tag{1.21}$$

Comme $\widetilde{f} = f$, on a l'inégalité de convexité pour $f$. $\square$

### Définition 1.3 :Équation de la tangente

Soit $f$ une fonction dérivable et

$$C_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^d\}, \tag{1.22}$$

le graphe de $f$,
le sous espace affine tangent au graphe de $f$ aux points $(x_0, f(x_0))$ à pour équation

$$y = f(x_0) + < \bigtriangledown f(x_0), x - x_0 > . \tag{1.23}$$

Cette équation est appelée aussi équation de l'hyperplan.
Le vecteur normal à cet hyperplan est fourni par :

$$(\bigtriangledown f(x_0), -1) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}.$$

### Définition 1.4

Dans un domaine $Q$ fluide, le flot représente la pression exercée au bord $\partial Q$ du domaine : c'est l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \partial Q & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array} \right. \tag{1.24}$$

Si $f(t,x)$ vérifie l'équation de Hamilton Jacobi suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t,x) = -H(t, \nabla f(t,x)) \\ \\ f(0,x) = f_0(x), \end{array} \right. \tag{1.26}$$

alors le flot préserve cette équation.
**Remarque :** L'opérateur $H$ repésente l'hamiltonien et est défini comme un opérateur qui coincide de manière générale avec le Lagragien qui est une fonction importante permettant de décrire les mouvements des variables dynamiques d'un système physique.

### Définition 1.5

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est dite lipschitzienne si pour une certaine constante $C$, pour tout $(x,y) \in D^2$, on a :

$$||f(x) - f(y)|| \leqslant C||x - y||. \tag{1.25}$$

### Définition 1.6

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^d$. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est dite localement lipschitzienne si pour tout compact $K \subseteq D$, il existe une constante $C_K$ telle que

$$||f(x)-f(y)|| \leqslant C_K||x-y||. \tag{1.26}$$

# 2 Équation de Hamilton-Jacobi

### Définition 2.1

Une équation de Hamilton Jacobi est une équation de la forme.

$$\begin{cases} H(x, f, \bigtriangledown f) = 0 \quad \text{dans} \quad Q \\ f = \varphi \quad sur \quad \partial Q \end{cases} \tag{2.1}$$

où $Q$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f$ est l'inconnue, $\bigtriangledown f$ son gradient et $H$ est appelé l'hamiltonien (voir [6]).
L'équation (2.1) est une formulation générale des équations de Hamilton Jacobi qui contient une formulation plus habituelle :

$$\begin{cases} \partial_t f + H(x, \bigtriangledown_x f) = 0 \quad \text{dans} \quad Q \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ f(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

### Remarque 2.1

On peut passer de l'une à l'autre formulation en considérant,

$$y = (x,t)\ , \ \ H(y, \bigtriangledown_y f) = \frac{\partial f}{\partial t} + H(x, \bigtriangledown_x f) \tag{2.3}$$

Ces deux équations ont chacune une signification.
Ainsi, la première évoque un problème de condition au limite et $\varphi$ représente la contrainte imposée au bord $Q$.
La seconde se rapporte d'avantage à un problème d'évolution avec la donnée de conditions initiales (voir [6]).
La question telle que la construction de solutions du problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton Jacobi sera examinée dans la suite.

### 2.0.1 Propriétés de base

Soit $f(x, \xi)$, $\xi \in E$ ($E$, un espace de paramètres fixés), une famille de fonctions de valeurs réelles de $x$ dans un domaine $D$ de $\mathbb{R}^d$ et satisfaisant au

trois conditions suivantes.
*a*) $f(x,\xi)$ est localement uniformément lipschitzienne en $x \in D$, c'est à dire, chaque point $x \in D$ a un voisinage en $D$, de même pour $\xi \in E$, où $f$ en fonction de $x$ satisfait la condition de Lipschitz pour tout $\xi \in E$.

*b*) Il existe un ensemble $N \subset D$ qui est indépendant de $\xi$ et tel que pour chaque $\xi \in E$ et à chaque point $x \in D - N$, le gradient $f_x(x,\xi)$ existe et l'équation différentielle (2.2) est satisfaite par $f = f(x,\xi)$.

*c*) Pour chaque $x \in D$, $f(x,\xi)$ atteint son infimum fini dans $E$, à $\xi = \xi(x)$.

### Lemme 2.1

Soit $E$ un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$. Supposons que :
$\alpha$) $f(x,\xi)$ et $f_x(x,\xi)$ sont respectivement continues en $x$ et $\xi$ où $x \in D$ et $\xi \in E$,

$\beta$) Si $E$ n'est pas borné, alors $f(x,\xi) \longrightarrow \infty$ quand $||\xi|| \longrightarrow \infty$ est localement uniforme en $x \in D$, et

$\gamma$) $f(x,\xi)$ est pour chaque $\xi \in E$ fixé, une solution exacte de (2.2) dans $D$.
Alors

$$f(x) = \inf_{\xi \in E} f(x,\xi) \quad x \in D,\ \xi \in E \tag{2.4}$$

est atteinte dans $E$ et représente une solution localement lipschitzienne de (2.2) dans $D$.

## Preuve

Fixons un point $\xi \in E$. Soit $x_0 \in D$ fixé.
En vertus de $\alpha$), continuité de $f$, il existe un voisinage $V_0$ de $x_0$ dans lequel $f(x,\xi)$ est bornée,

$$f(x,\xi) \leqslant C, \quad x \in V_0 \tag{2.5}$$

D'après l'hypothèse $\beta$), il exist un voisinage $V_1$ de $x_0$ tel que
$f(x,\xi) \longrightarrow \infty$ quand $||\xi|| \longrightarrow \infty$ est uniforme par rapport à $x \in V_1$.
Par conséquent,

$$x \in V_1, ||\xi|| > \omega \ \Rightarrow f(x,\xi) > C+1,\ \omega > |\xi^0|, \tag{2.6}$$

Si $\omega$ est choisie de manière appropriée.
Prenons maintenant un voisinage $V$ de $x_0$ dont la fermeture est contenue à la fois dans $V_0$ et $V_1$. Les inéquations (2.5) et (2.6) sont vérifiées si $V_i$ est remplacé par $V$. Par conséquent pour tout $x \in V$,

$$\inf_{\xi} f(x,\xi) \;\; x \in D,\; \xi \in E$$

est atteint.
En vertus de l'hypothèse $\alpha)$ $f_x(x,\xi)$ est continue dans le produit cartésien des deux ensembles compacts, fermeture de $V$ et $E$.
Puisque c'est à nouveau compact, $f_x$ y est bornée,

$$f_x(x,\xi) \leqslant L, \quad x \in \mathbb{R} \;,\;\; \xi \in E \tag{2.7}$$

$V$ peut être choisi convexe. Par conséquent $f(x,\xi)$ est uniformément lipschitzienne en $V$ par rapport à $\xi$ dans $E$.
Les propriétés de base peuvent être maintenant appliquées, en remplaçant $D$ par $V$. Les hypothèses $\alpha)$, $\beta)$ et $\gamma)$ sont réalisées. Par conséquent , la conclusion de ce Lemme est aussi valable dans $V$.
Comme $x_0$ était un point quelconque de $D$ et $V$ un voisinage de $x_0$, alors $f(x)$ est une solution localement lipschitzienne de l'équation de Hamilton Jacobi (2.2) dans $D$ . □
Ce lemme est très fondamental pour montrer que la solution de l'équation de Hamilton Jacobi atteint son infimum.

### 2.0.2 Solution de l'équation de Hamilton Jacobi

Considérons le problème (1.15) des équations de Navier Stokes qui gouvernent l'évolution de la densité $\rho(x,t)$ et de la vitesse $u(x,t)$ d'un fluide isotherme dans un domaine $Q$ de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{t}} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u}) &= 0 \\ (\rho u)_{\mathbf{t}} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) + c^2 \triangledown \boldsymbol{\rho} &= (\gamma+\lambda)\boldsymbol{\Delta u} + \gamma \boldsymbol{\nabla}\mathbf{div}(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

On cherche des solutions particulières dont le champ dérive d'un potentiel $u = \triangledown \boldsymbol{f}$ et dont la pression équilibre les contraintes dues à la viscosité $\rho = \alpha \boldsymbol{\Delta f}$ avec $\alpha = c^{-2}(2\gamma+\lambda)$
En vertus de l'équation de quantité de mouvement on a :

$$u\partial_t\rho + \rho\partial_t u + \rho(u.\boldsymbol{\nabla})u + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u})u + c^2\triangledown\boldsymbol{\rho} = (\gamma+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{div}(\boldsymbol{u}) + \gamma\boldsymbol{\Delta u}$$

$$\Rightarrow u[\partial_t\rho + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u})] + \rho[\partial_t u + (u.\boldsymbol{\nabla})u] + c^2\boldsymbol{\nabla\rho} = (\gamma+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{div}(\boldsymbol{u}) + \gamma\boldsymbol{\Delta u}$$

D'après l'équation de continuité de la conservation de la masse on a :

$\partial_t \rho + \mathbf{div}(\boldsymbol{\rho u}) = 0$

Donc l'équation de la quantité de mouvement devient :

$$\rho(\partial_{\mathbf{t}} u + (u.\boldsymbol{\nabla})u) = (\gamma+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{div}(\boldsymbol{u}) + \gamma\boldsymbol{\Delta u} - c^2\boldsymbol{\nabla\rho} \tag{2.8}$$

L'opérateur $u.\boldsymbol{\nabla}$ désigne la dérivée dans la direction de $\overrightarrow{u}$ et s'écrit

$$(u.\boldsymbol{\nabla})u = \sum_{i=1}^{d} u_i \partial_i u. \tag{2.9}$$

En remplaçant $u$ et $\rho$ respectivement par $\boldsymbol{\nabla f}$ et $\alpha\boldsymbol{\Delta f}$ dans le problème (1.15), on à :

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{\Delta f}(\partial_{\mathbf{t}}\boldsymbol{\nabla f} + (\boldsymbol{\nabla f.\nabla})\boldsymbol{\nabla f}) &= (\gamma+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\mathbf{div}(\boldsymbol{\nabla f}) + \gamma\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\nabla f}) \\ &\quad - c^2\boldsymbol{\nabla}(c^{-2}(2\gamma+\lambda)\boldsymbol{\Delta f}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{\Delta f}(\partial_{\mathbf{t}}\boldsymbol{\nabla f} + (\boldsymbol{\nabla f.\nabla})\boldsymbol{\nabla f}) &= (\gamma+\lambda)\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\nabla f}) + \boldsymbol{\Delta}(\triangledown \boldsymbol{f}) \\ &\quad - \boldsymbol{\nabla}((2\gamma+\lambda)\boldsymbol{\nabla f}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha\boldsymbol{\Delta f}(\partial_{\mathbf{t}}\boldsymbol{\nabla f} + (\boldsymbol{\nabla f.\nabla})\boldsymbol{\nabla f}) = (2\gamma+\lambda)\boldsymbol{\Delta}(\triangledown \boldsymbol{f}) - (2\gamma+\lambda)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\Delta f})$$

$$\Rightarrow \alpha\boldsymbol{\Delta f}(\partial_{\mathbf{t}}\boldsymbol{\nabla f} + (\boldsymbol{\nabla f.}\triangledown)\boldsymbol{\nabla f}) = 0 \tag{2.10}$$

Donc

$\partial_t \boldsymbol{\nabla f} + (\boldsymbol{\nabla f.\nabla})\boldsymbol{\nabla f} = 0$

Comme

$$(\boldsymbol{\nabla f.\nabla})\boldsymbol{\nabla} f = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}||\boldsymbol{\nabla f}||^2 + rot(\boldsymbol{\nabla f})\wedge\boldsymbol{\nabla f} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}||\boldsymbol{\nabla f}||^2$$

car

$rot(\boldsymbol{\nabla f}) = 0$

donc :

$$\boldsymbol{\nabla}(\partial_{\mathbf{t}} f + \frac{1}{2}||\boldsymbol{\nabla f}||^2) = (\partial_{\mathbf{t}} u + (u.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}) = 0$$

Les équations de (1.15) se réduisent alors à :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta f_t} + \mathbf{div}(\boldsymbol{\nabla f \Delta f}) = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla}(\partial_t f + \frac{1}{2}||\boldsymbol{\nabla f}||^2) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Le potentiel $u = \bigtriangledown \boldsymbol{f}$ n'est défini par l'écoulement qu'à l'addition d'une fonction du temps près. On peut alors fixer son évolution en intégrant la deuxième équation de (2.11) sous la forme d'une équation de Hamilton-Jacobi :

$$f_t + \frac{1}{2}||\bigtriangledown \boldsymbol{f}||^2 = 0 \tag{2.12}$$

Le gradient de la deuxième équation de (2.11) donne :

$$\boldsymbol{\Delta}(f_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}||\boldsymbol{\nabla f}||^2) = 0 \tag{2.13}$$

Par comparaison entre la première équation de (2.11) et (2.13) on a :

$$\mathrm{div}\boldsymbol{(\Delta f \nabla f)} = \boldsymbol{\Delta}(\frac{1}{2}||\boldsymbol{\nabla f}||^2)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Delta f}\mathrm{div}\boldsymbol{(\nabla f)} + \boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{\nabla(\Delta f)}) = \boldsymbol{\nabla}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}||\boldsymbol{\nabla f}||^2)$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{\Delta f})^2 = \boldsymbol{\nabla}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}||\boldsymbol{\nabla f}||^2) - \boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{\nabla(\Delta f)})$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{\Delta f})^2 = \boldsymbol{\nabla((\nabla f.\nabla)\nabla f}) - \boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{\nabla(\Delta f)})$$

D'apres (2.9)

$$\boldsymbol{(\bigtriangledown f.\bigtriangledown)} \bigtriangledown \boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{d} (\bigtriangledown f)_i \partial_i \bigtriangledown f = \sum_{i=1}^{d} \partial_i f \partial_i \partial_j f$$

Donc

$$(\boldsymbol{\Delta f})^2 = \bigtriangledown \sum_{i=1}^{d} (\bigtriangledown f)_i \partial_i \bigtriangledown f - \bigtriangledown \boldsymbol{f}(\bigtriangledown \boldsymbol{(\Delta} f))$$

$$(\boldsymbol{\Delta f})^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \partial_i \partial_j f \partial_i \partial_j f - \bigtriangledown \boldsymbol{f}(\bigtriangledown \boldsymbol{(\Delta} f))$$

Si $f$ est une sur-solution de viscosité alors $\boldsymbol{\nabla f}(\bigtriangledown \boldsymbol{(\Delta} f)) = 0$, donc

$$\boldsymbol{\sum_{i,j=1}^{d} (\partial_i \partial_j f)^2} = (\boldsymbol{\Delta f})^2 \tag{2.14}$$

D'un point de vue mathématique, la description de l'écoulement dans un milieu fluide $Q_t$ à l'instant $t > 0$ peut se restreindre à l'étude du système qui se résume ainsi au problème (2.15) suivant :

$$\begin{cases} f_t + \frac{1}{2} \| \bigtriangledown \boldsymbol{f} \|^2 = 0 \\ \sum\limits_{\boldsymbol{i,j=1}}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{(\partial_i \partial_j f)^2} = (\boldsymbol{\Delta f})^2 \\ f(0,x) = f_0(x) \end{cases} \tag{2.15}$$

$*$ La deuxième équation de (2.15) est triviale pour $d = 1$.

$*$ Pour $d = 2$ :

$$(\partial_1\partial_1 f)^2 + (\partial_1\partial_2 f)^2 + (\partial_2\partial_1 f)^2 + (\partial_2\partial_2 f)^2 = (\Delta f)^2 = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \partial_i^2 f \partial_j^2 f$$

$$\Rightarrow (\partial_1\partial_2 f)^2 + (\partial_2\partial_1 f)^2 = \partial_1^2 f \partial_2^2 f + \partial_2^2 f \partial_1^2 f \tag{2.16}$$

pour $f$ suffisamment régulière et s'il existe $x_1$ tel que $f_0(x) = h(x_1)$, le théorème de Cauchy Schwarz implique que :

$$\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f; \tag{2.17}$$

c'est à dire

$$(\partial_1\partial_2 f)^2 = \partial_1^2 f \partial_2^2 f \tag{2.18}$$

Ainsi si $f_0(x)$ satisfait (2.18), alors la solution de l'équation de Hamilton Jacobi (2.12) satisfait l'équation (2.18)

$*$Pour $d = 3$ on a :

$$\begin{bmatrix} (\partial_1\partial_1 f)^2 & (\partial_1\partial_2 f)^2 & (\partial_1\partial_3 f)^2 \\ (\partial_2\partial_1 f)^2 & (\partial_2\partial_2 f)^2 & (\partial_2\partial_3 f)^2 \\ (\partial_3\partial_1 f)^2 & (\partial_3\partial_2 f)^2 & (\partial_3\partial_3 f)^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \partial_i^2 f \partial_j^2 f \tag{2.19}$$

Qui est un tenseur d'ordre 2,
donc ce résultat ne nous permet pas de conclure sur la compatibilité de la solution de l'équation de Hamilton Jacobi (2.12) et (2.19)

$*$ Pour $d > 3$ on a :

$$\begin{bmatrix} (\partial_1\partial_1 f)^2 & \dots & (\partial_1\partial_k f)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_k\partial_1 f)^2 & \dots & (\partial_k\partial_k f)^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \partial_i^2 f \partial_j^2 f \neq \sum_{i_1=1}^{d} ... \sum_{i_d=1}^{d} \partial_{i_1}^2 f ... \partial_{i_d}^2 f \quad (2.20)$$

ce résultat ne nous permet encore pas de conclure sur la compatibilité de la solution de l'équation de Hamilton Jacobi (2.12) et (2.20)
On a alors vérifié que si $d = 2$, l'équation (2.14) est compatible avec l'équation de Hamilton-Jacobi (2.12) c'est à dire si $f(\cdot, t = 0)$ satisfait (2.14) : la solution de (2.12) continue de satisfaire (2.14) tant qu'elle est régulière.
Cependant pour $d \geq 3$, la compatibilité de (2.14) et (2.12) n'est plus possible.
Plus précisément, l'égalité (2.14), qui s'écrit aussi

$$\boldsymbol{tr(M^2) = (tr(M))^2} \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{M = D_x^2 f}. \tag{2.21}$$

Si $f$ est régulière alors $D_x^2 f \in S^d$ avec $S^d$ l'espace vectoriel des matrices réelles symétrique de taille $d$.
(2.21) n'est préservée par le flot de (2.12) que si de plus

$$\boldsymbol{tr(M^3) = (tr(M))^3}. \tag{2.22}$$

De même cette nouvelle équation n'est préservée par le flot de (2.12) que si

$$\boldsymbol{tr(M^4) = (tr(M))^4}$$

Par récurrence on en déduit :

$$\boldsymbol{tr(M^k) = (tr(M))^k} \text{ , } \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.23}$$

où $\mathbf{M}$ est définie dans la base formée de vecteurs propres.
Ce qui équivaut au fait que 0 soit valeur propre pour $\mathbf{M}$ de multiplicité $d-1$ ou $d$. Comme $\mathbf{M}$ est une matrice symétrique, donc diagonalisable, il revient au même de dire que le rang de $\mathbf{M(x,t)}$ est au plus égale à 1.
Réciproquement, si le rang de $\boldsymbol{D_x^2 f_0}$ où $f_0$ est une condition initiale régulière, est partout au plus égale à 1, alors cela reste vrai pour la solution de (2.12) tant que celle-ci est régulière. Précisons ce fait quantitativement dans le cas qui nous intéresse, celui où $\boldsymbol{\Delta f_0} \geqslant 0$ (pour assurer que $\rho \geqslant 0$ puisque c'est une densité de masse). Cette inégalité et l'hypothèse montrent que :

pour $d = 1$, $\boldsymbol{D_x^2 f_0}$ est triviale

$$\text{pour } d = 2,\ \boldsymbol{D_x^2 f_0} = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f_0 & 0 \\ 0 & \partial_2\partial_2 f_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{pour } d = 2,\ \boldsymbol{D_x^2 f_0} = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f_0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2\partial_2 f_0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3\partial_3 f_0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\text{pour } d = k,\ \boldsymbol{D_x^2 f_0} = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f_0 & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots & \partial_k\partial_k f_0 \end{bmatrix}$$

Donc il existe un champ de vecteurs (unique au signe près) $\boldsymbol{n(x)}$ tel que

$$\boldsymbol{D_x^2 f_0(x) = n(x) \otimes n(x)} \tag{2.24}$$

Ainsi $\boldsymbol{D_x^2 f_0} \geqslant 0$ :$f_0$ est convexe.
Le théorème 1.3 nous permet alors d'écrire $f_0$ comme le supprimum de ses fonctions affines tangentes :

$$f_0(x) = \sup\{\bigtriangledown \boldsymbol{f_0(y)}.(x-y)+f_o(y), y \in D\} \tag{2.25}$$

où $D$ est le domaine (convexe) de définition de $f_0$.
L'hypothèse sur le rang de $\boldsymbol{D_x^2 f_0}$ signifie que le graphe de $f_0$ est développable sur $\mathbb{R}^d$ c'est à dire que les espaces tangents au graphe de $f_0$ en deux points $y + V$ et $y$, tels que $n(y).V = 0$, sont égaux.
On peut donc sans changer la valeur de $f_0$, réduire le supprimum en ne gardant que les points $y$ d'une courbe $\Gamma$ (qui n'est jamais normale au champ de vecteur $\mathbf{n}$). Enfin la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, tant qu'elle est régulière, est donnée par :

$$f(x,t) = \sup\{\bigtriangledown \boldsymbol{f_0(y)}.(x-y) + f_0(y) - \frac{t}{2} || \bigtriangledown \boldsymbol{f_0(y)} ||^2, y \in \Gamma\}. \tag{2.26}$$

Ceci montre que le graphe de $f(\cdot,t)$ est l'enveloppe d'une famille à un paramètre d'hyperplans, donc est développable.
la condition de rang 1 est donc satisfaite. De plus, $f$ est convexe, de sorte que $\rho = \alpha\boldsymbol{\Delta f} \geqslant 0$ est bien une densité.
Considérons le problème de Cauchy dans un domaine $D$ convexe :

$$\begin{cases} f_t + \frac{1}{2}|| \bigtriangledown \boldsymbol{f} ||^2 = 0 \quad \text{dans} \quad D \\ \\ f_0(x) = f(0,x) \qquad \text{dans} \quad D \end{cases} \tag{2.27}$$

Plus précisément trouvons localement une fonction lipschitzienne $f(t,x)$ qui satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi (2.12) :

$$f_t + \frac{1}{2}|| \bigtriangledown \boldsymbol{f} ||^2 = 0 \qquad \text{p.p dans } D \tag{2.28}$$

et qui remplit la condition initiale

$$\lim_{|(t,x)\longrightarrow(0,x)} = f_0(x) = f(0,x) \tag{2.29}$$

où $f(t,x)$ est définie et continue lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
Notons par $(t,x;y)$ les points de l'espace $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d_x, \mathbb{R}^d_y)$ de dimension $d$
Tout au long de cette section nous supposerons que :
✓ $\mathbf{I} \subset \Gamma$ est un fermé de $\Gamma$.
✓ $f$ est définie et strictement convexe dans le domaine $D$.
La fonction convexe conjuguée de $f$ est alors définie par la définition suivante :

## Définition 2.2

Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ . Son conjuguée ou transformée de legendre est la fonction convexe $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(y.x - f(x)) \tag{2.30}$$

**Notation** : notons par $\pounds(f)(y) = g(y)$ conjuguée de la fonction $f$.

### Proposition 2.1

$g$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$.
En effet soit $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $\theta \in [0,1]$, on a alors :

$$\begin{aligned}
g(\theta u + (1-\theta)v) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{\langle \theta u + (1-\theta)v, x\rangle - f(x)\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{\langle \theta u, x\rangle + \langle (1-\theta)v, x\rangle - f(x)\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{\theta\langle u, x\rangle + (1-\theta)\langle v, x\rangle - f(x)\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{\theta(\langle u, x\rangle - f(x)) + (1-\theta)(\langle v, x\rangle - f(x))\} \\
&\leqslant \theta \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{\langle u, x\rangle - f(x)\} + (1-\theta) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{\langle v, x\rangle - f(x)\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

où $\langle a, b\rangle$ est le produit scalaire de a et b.

### Théorème 2.1

La transformée de Legendre est involutive c'est à dire que si $g$ est la transformée de Legendre de $f$ alors $f$ est la transformée de Legendre de $g$.
C'est à dire $\pounds(\pounds(f))(x) = \pounds(g)(y) = f(y)$ (2.31)

## Preuve

Donnons une preuve géométrique basée sur le fait que si $g(y) = \pounds(f)(y)$ alors la droite d'équation $z = x.y - g(y)$ de pente $y$ est tangente au graphe de $f$. Puisque $f$ est convexe alors toutes les tangentes sont au dessous de la courbe de $f$. Si on fixe $x = x_0$, alors le supprimum de $x_0.y - g(y)$ comme fonction en $y$ est $f(x_0)$. En effet pour $x = x_0$,

$$g(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (y.x_0 - f(x_0)) \tag{2.32}$$

$$= y.x_0 - f(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) = y.x_0 - g(x_0)$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc} \quad \pounds(\pounds(f))(x_0)) &= \pounds(g)(x_0) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (x_0.y - g(y)) \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

Nous allons profiter de la fonction affine tangente
$\boldsymbol{\bigtriangledown f_0(y)}.(x-y)+f_0(y), y \in D$, pour l'équation de Hamilton Jacobi (2.12) et pour notre problème de Cauchy (2.27), d'une famille de solution contenant le paramètre $y$.

$$f = f(t,x,y) = \boldsymbol{\bigtriangledown f_0(y)}.(x-y)+f_0(y)-\frac{t}{2}||\boldsymbol{\bigtriangledown f_0(y)}||^2 \tag{2.33}$$

où $y \in$ est un vecteur quelconque.
La solution locale du problème de Cauchy (2.27) est donnée par le théorème :

### Théorème 2.2

Soit $L_y : x \mapsto q(y).x + b(y)$ une famille à un paramètre de fonctions affines, dépendant régulièrement de $y \in I$.
Soit $D$ un domaine convexe sur lequel la fonction convexe
$f_0(x) = sup\{L_y(x); y \in I\}$ est de classe $C^2$. Alors la fonction définie par :

$$f(t,x) = \sup_{x \in D} f(t,x,y) \tag{2.34}$$

est une solution locale de classe $C^2$ de l'équation de Hamilton-Jacobi (2.12) satisfaisant $f(x,0) = f_0(x)$. De plus $f(\cdot,t)$ atteint son infimum, est convexe et les formules $u = \boldsymbol{\bigtriangledown f}$, $\rho = \alpha\boldsymbol{\Delta f}$ définissent une solution des équations de Navier-Sokes (1.15).

### Lemme 2.2

$$\frac{g(y)}{||y||} \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque } ||y|| \longrightarrow \infty \tag{2.35}$$

## Preuve

$\forall x \in D$ fixé [14], alors d'après (2.30) on a :

$$\frac{g(y)}{||y||} \geq (\frac{y}{||y||}).x - \frac{f(x)}{||y||} \tag{2.36}$$

si nous définissons

$$x = (\frac{z}{||y||}).y \tag{2.37}$$

où z est positive, fixé alors :

$$\frac{g(y)}{||y||} \geq z - \frac{1}{||y||} f(x) \tag{2.38}$$

$$\Rightarrow \frac{g(y)}{||y||} \geq z - \frac{1}{||y||} \sup_{|x| \longrightarrow z} f(x) \tag{2.39}$$

Donc

$$\lim_{||y|| \longrightarrow \infty} \frac{g(y)}{||y||} \geqslant z \tag{2.40}$$

Puisque $z$ est quelconque, cette inégalité prouve le lemme.

# Preuve du théorème 2.2

La fonction convexe conjuguée de $f_0$ est définie par

$$g(y) = \sup_{x \in D}(y.x - f_0(x)) \tag{2.41}$$

Puisque $I \subset \Gamma$ est un fermé, donc pour chaque $y \in I$, la fonction $y.x - f_0(x)$ en fonction de $x$, atteint son supprimum par la continuité et le lemme 2.2 sur $f_0$ [14].
De (2.33) et (2.41), on déduit :

$$f(t,x) = \sup_{x \in D}\{\boldsymbol{\nabla} f_0(y).(x-y) + f_0(y) - \frac{t}{2}||\boldsymbol{\nabla} f_0(y)||^2\} \tag{2.42}$$

$$\Rightarrow f(t,x) = f_0(y) + \sup_{x \in D}\{\boldsymbol{\nabla} f_0(y).(x-y) - \frac{t}{2}||\boldsymbol{\nabla} f_0(y)||^2\} \tag{2.43}$$

D'après la formule de transformée de légendre c'est à dire :

$$g(u) = \sup_{w \in D}(u.w - f(w)) \tag{2.44}$$

et $w = \boldsymbol{\nabla} f_0(y)$ , $u = x - y$ et $f(w) = \frac{t}{2}||\boldsymbol{\nabla} f_0(y)||^2$ on a :

$$g(x-y) = \sup_{x \in D}\{\boldsymbol{\nabla} f_0(y).(x-y) - \frac{t}{2}||\boldsymbol{\nabla} f_0(y)||^2\}, \tag{2.45}$$

comme de plus $g$ est convexe, on a alors :

$$t.g(\frac{x-y}{t}) = \sup_{x \in D}\{\boldsymbol{\nabla} f_0(y).(x-y) - \frac{t}{2}||\boldsymbol{\nabla} f_0(y)||^2\} \tag{2.46}$$

ce qui donne $\quad f(t,x) = f_0(y)+t.g(\dfrac{x-y}{t}).$ $\hfill (2.47)$

En posant $v = \frac{x-y}{t}$, la fonction conjuguée $g(v)$ est de classe $C^2$ car $f_0$ est de classe $C^2$ par hypothèse.
On a en effet $f_t(t,x;y) = g(v) - v.g_v(v)$ et $f_x(t,x;y) = g_v(v)$ où $v = \frac{x-y}{t}$ et l'équation de Hamilton Jacobi se réduit à :

$$g(v)-v.\theta+H(\theta) = 0, \quad \theta = g_v(v) \tag{2.48}$$

La validité de cette relation peut être déduite de la définition du conjugué convexe $g(v)$ de $f$.
Commençons avec un $v = v_0$ donné et notons $\theta = \theta_0$ le point auquel le supprimum est atteint [3]. On a alors

$$g(v) \leqslant v.\theta - H(\theta) \quad \text{et} \quad \text{par} \quad \text{conséquent}, \tag{2.49}$$

$$H(\theta_0) \leqslant v.\theta_0 - g(v) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad \text{v}, \tag{2.50}$$

avec une égalité pour $v = v_0$.
Ainsi le gradient du côté droit devait disparaitre à $v = v_0$ et donc (2.48) est satisfaite à $v = v_0$.
Par conséquent

$$f(t,x) = \sup_{x\in D}\{\boldsymbol{\nabla} f_0(y).(x-y)+f_0(y)-\frac{t}{2}||\boldsymbol{\nabla} f_0(y)||^2\}$$

est pour chaque $y$ fixé, une solution de classe $C^2$ de l'équation de Hamilton Jacobi (2.12).
Montrons que $f(t,x)$ satisfait la condition initiale.
$g$ étant une fonction convexe, donc L-lipschitzienne

$$\text{On a alors } f(t,x) = f_0(y)+tg(v) \geqslant f_0(x)+t(g(v)-L||v||) \tag{2.51}$$

où $v = \frac{x-y}{t}$ et $L$ la constante de Lipschitz.
Le Lemme 2.2 implique que $g(v) - L||v|| \longrightarrow \infty$ lorsque $||v|| \longrightarrow \infty$ ce qui montre que $g(v) - L||v||$ est bornée, et par suite.
$f(t,x) \geq f_0(x) + \gamma t$ $\hfill (2.52)$
D'autre part :
Pour $x = y$

$$f(t,x) \leqslant f_0(x) + g_t(0) \tag{2.53}$$

Ces deux dernières inégalités impliquent que :

$$\lim_{||(t,x)||\longrightarrow(0,x)} f(t,x) = f(0,x) \tag{2.54}$$

Donc la solution de l'équation de Hamilton Jacobi (2.27) satisfait la condition initiale.
Nous appliquons maintenant le Lemme 2.1 à $f(t, x)$ avec l'espace de paramètre $E = \mathbb{R}^+$ et le domaine $\widetilde{D} = \{(t, x); t > 0, |x| < \infty\}$ [3].
$f_x$ et $f_t = -H(x, f_x)$ sont évidemment continues en $y$ et $(t, x)$ dans $\mathbb{R}^+$ et $\widetilde{D}$.
Il reste à vérifier l'hypothèse que

$$f(t,x) \longrightarrow \infty, \text{ quand } ||y|| \longrightarrow \infty \tag{2.55}$$

est localement uniforme par rapport à $(t, x) \in D$.

Supposons $f_0(y)$ lipschitzienne. Désignons par $L$ la constante de Lipschitz. Il s'ensuit que

$f_0(y) \geqslant f_0(x) - L||x - y||$, et de (2.47 ) que

$$f(t,x) \geqslant f_0(x) + t(g(v) - L(v)), \quad v = \frac{x-y}{t} \tag{2.56}$$

Le lemme 2.2 implique $g(v) - L(v) \longrightarrow \infty$ quand $||v|| \longrightarrow \infty$

Donc toutes les hypothèses du lemme 2.1 sont satisfaites.
Par conséquent

$$f(t,x) = \inf_{y \in D} \{\sup_{x \in D} (f_0(y) + w.(x-y)) - H(w)t\} \tag{2.57}$$

est atteint pour tout $(t, x) \in D$ et représente une solution locale de classe $C^2$.
De plus comme $f(., t)$ est l'enveloppe d'une famille de fonction convexe, alors $f(., t)$ est convexe.
$u = \bigtriangledown \boldsymbol{f}$ et $\rho = \alpha \boldsymbol{\Delta f}$ vérifient (1.15) donc ils sont solutions des équations de Navier-Stockes (1.15) $\square$

**Remarques 2.2 :** Tout au long de cette section, nous avons considéré que $f$ est une sur-solution du viscosité.
L'existence de solutions $C^2$ n'est à priori possible qu'en temps fini, d'où l'introduction des notions de solutions faibles dans la suite de cette étude.

## 2.1 Le cas de la dimension $d = 1$

Ici, la condition (2.14) est triviale, tandis que l'équation de Hamilton-Jacobi possède une et une seule solution régulière globale $f$ pour $t > 0$ dès que $f_0$ est convexe, même si $f_0$ n'est que localement lipschitzienne. Il s'agit de la solution de viscosité :

### 2.1.1 Solution de viscosité : Définitions et propriétés

Une solution de viscosité est une application continue $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, on utilise des fonction tests dérivables à souhait pour estimer $f$ dans l'équation différentielle.

## Définition 2.1.1

On considère l'équation de Hamilton Jacobi Suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f + H(x, \boldsymbol{\nabla}_x f) = 0 \\ f(0, x) = f_0(x) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Une solution de viscosité $f$ de (2.1.1) est une fonction uniformément continue et bornée telle que :
1) Pour toute fonction test $g \in C^\infty$, si $f - g$ a un maximum locale au point $x_0$, alors

$$\partial_t f + H(x, \bigtriangledown_x g) \leqslant 0 \tag{2.1.2}$$

2) Pour toute fonction test $g \in C^\infty$, si $f - g$ a un minimum locale au point $x_0$, alors

$$\partial_t f + H(x, \boldsymbol{\nabla}_x g) \geq 0 \tag{2.1.3}$$

Une fonction qui vérifie 1)(resp 2)) est appelée sous (resp sur)-solution de viscosité.
Une fonction qui vérifie à la fois 1) et 2) est appelée solution de viscosité.
On obtient la définition équivalente en utilisant les différentiels généralisés.
Le sur-différentiel (resp. sous-différentiel) de $f$ au point $x_0$ est l'ensemble convexe fermé éventuellement vide donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^+ f(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}\,;\, &\lim_{y \longrightarrow x_0} \sup_{y \in Q} \{f(y) - f(x_0) \\ &- \nabla f(x_0), y - x_0\}|y - x_0|^{-1} \leq 0\} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

$$\begin{aligned} (\text{resp}\mathbf{D}^- f(x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}\,;\, &\lim_{y \longrightarrow x_0} \inf_{y \in Q} \{f(y) - f(x_0) \\ &- \boldsymbol{\nabla} f(x_0), y - x_0\}|y - x_0|^{-1} \geq 0\}) \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

## Définition 2.1.2

$f$ est solution de viscosité de l'équation de Hamilton Jacobi (2.1.1) si

$$\forall x \in Q, \forall \xi \in \mathbf{D}^+ f(x) \ , \ \partial_t f + H(x, \xi) \leqslant 0 \tag{2.1.6}$$

$$\forall x \in Q, \forall \xi \in \mathbf{D}^- f(x) \ , \ \partial_t f + H(x, \xi) \geq 0 \tag{2.1.7}$$

### Proposition 2.1.1

Une solution régulière est une solution de viscosité :

# Preuve

Soit $f$ une solution régulière de l'équation de Hamilton Jacobi (2.1.1).
Si $f - g$ admet un extremum local, alors

$$\mathbf{D}(f-g)(x_0, y_0) = 0 \tag{2.1.8}$$

donc

$$H(x_0, f(x_0), \mathbf{D}g(x_0)) = 0 \tag{2.1.9}$$

d'où la preuve de la proposition.

### Remarques 2.1.1

• Si $f$ est une solution de viscosité de l'équation de Hamilton Jacobi, alors $f$ vérifie l'équation de Hamilton Jacobi en tout point de différentiabilité. En particulier si $f$ est localement lipschitzienne, l'équation de Hamilton Jacobi a lieu presque partout.

• Les inégalités de la définition proviennent en fait du cadre plus général des équations élliptiques du type :

$$H(x, f(x), D_x f(x), \mathbf{D}^2 f(x)) = 0 \tag{2.1.10}$$

### Proposition 2.1.1

Si $f$ est une solution de viscosité, $g$ une fonction test, alors en un point $(x_0, T)$ où $f - g$ admet un maximum local [6], on a

$$f_t(x_0, T) + H(\mathbf{D}g(x_0, T), x_0) \leq 0 \tag{2.1.11}$$

# Preuve

Supposons tout d'abord que le maximum local est strict.
Posons

$$h(x, t) = g(x, t) + \frac{\epsilon}{T - t} \tag{2.1.12}$$

Comme en $T$, $f-h$ tend vers $-\infty$, cette fonction admet un maximum local en un certain point $(x_\epsilon, t_\epsilon)$ avec $t_\epsilon \leq T$. De plus par passage à la limite :

$$\forall x, t \in [0,T[,\ \liminf h(x_\epsilon, t_\epsilon) \geq h(x,t) \tag{2.1.13}$$

par conséquent

$$(x_\epsilon, t_\epsilon) \longrightarrow (x_0, T) \tag{2.1.14}$$

Donc

$$h_t(x_\epsilon, t_\epsilon) + H(\mathbf{D}h_x(x_\epsilon, t_\epsilon), x_\epsilon) \leq 0 \tag{2.1.15}$$

$$g_t(x_\epsilon, t_\epsilon) + H(\mathbf{D}g_x(x_\epsilon, t_\epsilon), x_\epsilon) + \frac{\epsilon}{(T-t)^2} \leq 0 \tag{2.1.16}$$

$$f_t(x_0, T) + H(\mathbf{D}g(x_0, T), x_0) \leq 0 \tag{2.1.17}$$

Dans le cas plus général où le maximum n'est pas nécessairement strict, il suffit d'appliquer la preuve précédente à

$$g\prime = g - ||x - x_0||^2 - (t - t_0)^2 \tag{2.1.18}$$

La preuve est similaire dans le cas où l'on a un minimum local. □

**Remarque :** Cette proposition n'est rien d'autre que la vérification de la propriété de viscosité en un temps maximal.

### 2.1.2 La forme d'une solution de viscosité

jusqu'ici, nous avons défini les solutions de viscosité puis donné un exemple et justifié leur existence.
Néanmoins, nous n'avons jamais donné une idée de leur forme. c'est ce que nous nous proposons de faire dans cette partie [6].
Notons que les considérations qui vont suivre sont des grandes sources de réflexion pour les chercheurs plus spécialisés dans la programmation dynamique.

## Formule de Hoph-Lax

Considérons le problème aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} f_t + \frac{1}{2} || \bigtriangledown \boldsymbol{f} ||^2 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d \times [0,T] \\ \\ f_0(x) = f(0,x) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \times 0 \end{cases} \tag{2.1.19}$$

Supposons que l'hamiltonien $H$ et $f_0$ satisfont aux conditions suivantes :

$$1- \; m \longrightarrow H(m) \text{ est convexe} \tag{2.1.20}$$

$$2- \lim_{||m|| \longrightarrow \infty} \frac{H(m)}{||m||} = \infty \tag{2.1.21}$$

3– $f_0$ est une fonction lipschitzienne.

## Définition 2.1.2

Pour $H$ satisfaisant les conditions précédentes

$$C(n) = \sup_{m \in \mathbb{R}} [m.n - H(m)] \tag{2.1.22}$$

est la fonction conjuguée de $H$.

## Remarques 2.1.2

1– justifions l'existence de $C$

$$m.n - H(m) = ||m||[\frac{m.n}{||m||} - \frac{H(m)}{||m||}] \tag{2.1.23}$$

or pour un certain $n$ fixé, $m \longrightarrow \dfrac{m.n}{||m||}$ est bornée et $\displaystyle\lim_{||m|| \longrightarrow \infty} \frac{H(m)}{||m||} = \infty$,

donc il existe un supprimum fini $C(n)$ tel que.

$$C(n) = \sup_{m \in \mathbb{R}} [m.n - H(m)]$$

$$2 - \frac{C(H)(m)}{||m||} = \sup_{m \in \mathbb{R}} |n|[\frac{m.n - H(m)}{||m|||n|}] \tag{2.1.24}$$

donc $\dfrac{C(H)(m)}{||m||}$ tend vers $\infty$ quand $||m|| \longrightarrow \infty$

3– Notons $C(H)$ la fonction conjuguée de $H$. Alors

$$C(C(H)c) = \sup_{b \in \mathbb{R}} [b.c - C(H)(b)] \tag{2.1.25}$$

$$= \sup_{b \in \mathbb{R}} [b.c - \sup_{a \in \mathbb{R}} [a.b - H(b)]] \tag{2.1.26}$$

$$= \sup_{b\in\mathbb{R}}[\sup_{a\in\mathbb{R}}[(a-c).b - H(b)]] \quad (2.1.27)$$

Ainsi de façon évidente

$$C(C(H)c) = H(c) \quad (2.1.28)$$

Ceci est en effet une traduction de la convexité de $H$. Donc $C$ est une transformation involutive.

### Théorème 2.1.2 de viscosité sous la forme de Hoph-Lax

Supposons qu'en plus des conditions précédentes, $f_0$ est bornée.
Dans ce cas la solution de viscosité du problème précédent est donnée sous la forme :

$$f(x,t) = \inf_{y\in\mathbb{R}^d}\{tC(\frac{x-y}{t}) + f_0(y), y \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1.29)$$

$$= \inf_{y\in\mathbb{R}^d}\{f_0(y) + \frac{||x-y||^2}{2t}, y \in \mathbb{R}\} \quad (2.1.30)$$

avec $C$ la fonction conjuguée de $f$.

## Preuve

1–En procédant exactement comme dans le Théorème 2.2, $f$ est une fonction lipschitzienne égale à $f_0$ en 0 et bornée
2–Soit $g \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$ telle que $f-g$ ait un maximum local en $(x_0,t_0)$.
Montrons alors que

$$\forall t_0 < t \; f(x_0,t_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}}[(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t}) + f(x,t)] \quad (2.1.31)$$

En effet

$$\begin{aligned}\forall t_0 < t \; \inf_{x\in\mathbb{R}}[(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t}) + f(x,t)] = \inf_{x,y\in\mathbb{R}}[(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t}) \\ + tC(\frac{x-y}{t}) + f_0(y)]\end{aligned} \quad (2.1.32)$$

en prenant $y = x_0$,

$$\begin{aligned}t_0 < t \; \inf_{x\in\mathbb{R}}[(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t}) + f(x,t)] = \inf_{x,x_0\in\mathbb{R}}[(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t}) \\ + tC(\frac{x-x_0}{t}) + f_0(x_0)]\end{aligned} \quad (2.1.33)$$

donc $\forall t_0 < t \ \inf_{x\in\mathbb{R}}[(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t})+f(x,t)] \leq f(x_0,t_0)$ (2.1.34)

D'autre part,

$$(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t})+tC(\frac{x-y}{t})+f_0(y) \geq \sup_{m\in\mathbb{R}}[m.(x_0-y)-t_0H(m)+f_0(y)] \quad (2.1.35)$$

car $\sup_m\{U(m)\}+\sup_m\{V(m)\} \geq \sup_m\{U(m)+V(m)\}$ (2.1.36)

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\{(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t})+f(x,t)\} \geq \inf_{x\in\mathbb{R}}\{tC(\frac{x_0-y}{t})+f_0(y)\}$$

donc $\inf_{x\in\mathbb{R}}\{(t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t})+f(x,t)\} \geq f(x_0,t_0)$

Puisque $f-g$ admet un maximum local en $(x_0,t_0)$, donc suffisamment proche de $(x_0,t_0)$,

$$g(x_0,t_0)-g(x,t) \leq (t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t}) \quad (2.1.37)$$

Posons $\begin{cases} r = t_0-t \\ s = \frac{x_0-x}{t_0-t} \end{cases}$ (2.1.38)

Alors en divisant (2.1.37) par $r$ puis en faisant tendre $r$ vers 0 donc

$$g_t(x_0,t_0)+\mathbf{D}g(x_0,t_0).s \leq C(s) \quad (2.1.39)$$

Ceci étant vrai pour tout $s\in\mathbb{R}$, on a :

$$\sup_s[g_t(x_0,t_0)+\mathbf{D}g(x_0,t_0).s-C(s)] \leq 0. \quad (2.1.40)$$

Donc

$$g_t(x_0,t_0)+H[\mathbf{D}g(x_0,t_0)] \leq 0 \quad (2.1.41)$$

3– Supposons $f-g$ admet un minimum local en $(x_0,t_0)$. Pour $(x,t)$ assez proche de $(x_0,t_0)$.
En prenant ce qui précède dans l'autre sens

$$g(x_0,t_0)-g(x,t) \geq (t_0-t)C(\frac{x_0-x}{t_0-t}) \quad (2.1.42)$$

Posons maintenant

$$f(x_0,t_0) = tC(\frac{x_0-y}{t})+f_0(y) \quad (2.1.43)$$

Fixons $h > 0$ et posons

$$\begin{cases} w = t - h \\ z = \frac{w}{t}x + (1 - \frac{w}{t})y \end{cases} \tag{2.1.44}$$

Alors

$$\frac{x-y}{t} = \frac{z-y}{w} \tag{2.1.45}$$

$$f(x,t) - f(z,w) \geq tC(\frac{x-y}{t}) + f_0(y) - [wC(\frac{x-y}{w}) + f_0(y)] \tag{2.1.46}$$

$$f(x,t) - f(z,w) \geq (t-w)C(\frac{x-y}{t}) \tag{2.1.47}$$

ce qui s'écrit

$$\frac{f(x,t) - f((1-\frac{h}{t})x + \frac{h}{t}y, t-h)}{h} \geq C(\frac{x-z}{t}) \tag{2.1.48}$$

Quand $h$ tend vers 0, on obtient

$$\frac{x-z}{t}.Df(x,t) + f_t(x,t) \geq C(\frac{x-z}{t}) \tag{2.1.49}$$

Par conséquent, on a

$$f_t(x,t) + H(Df(x,t)) = f_t(x,t) + \sup\{q.Df(x,t) - C(q)\} \geq 0 \tag{2.1.50}$$

Donc $f_t(x,t) + H(Df(x,t)) \geq 0$ (2.1.51)

Donc $g_t(x_0,t_0) + H[\mathbf{D}g(x_0,t_0)] \geq 0$ (2.1.52)

$$f(x,t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d}\{tC(\frac{x-y}{t}) + f_0(y), y \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1.53}$$

$$= \inf_{y \in \mathbb{R}^d}\{\sup\{t.m(\frac{x-y}{t}) - H(m)\} + f_0(y)\} \tag{2.1.54}$$

Avec $m = \boldsymbol{\nabla} f$ et $H(m) = \frac{1}{2} || \bigtriangledown \boldsymbol{f} ||^2$

$C(\frac{x-y}{t}) = H(\frac{x-y}{t})$ car C est involutive

Or $H(\frac{x-y}{t}) = \frac{1}{2}\frac{||x-y||^2}{t^2}$ (2.1.55)

donc $f(x,t) = \inf_{y \in \mathbb{R}}\{f_0(y) + \frac{||x-y||^2}{2t}, y \in \mathbb{R}\}$ (2.1.56)

Par conséquent $f$ est une solution de viscosité du problème (2.1.24).

### 2.1.3 Unicité des solutions de viscosité

Considérons l'équation de Hamilton Jacobi aux valeurs initiales :
Fixons un temps $T > 0$.

$$\begin{cases} \partial_t f + H(x, \bigtriangledown f) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times [0, T] \\ \\ f(0, x) = f_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times 0 \end{cases} \tag{2.1.57}$$

**Théorème 2.1.3 : (théorème d'unicité de la solution de viscosité).**

Supposons que l'hamiltonien satisfait aux conditions dites de continuité de Lipschitz [6], i.e.

$$\begin{cases} H(p, x) - H(q, x) \leq K|p - q| \\ H(p, x) - H(p, y) \leq K|x - y|(1 + |p|) \end{cases} \tag{2.1.58}$$

Alors, l'équation de Hamilton Jacobi admet au plus, une seule solution de viscosité.

# Preuve

Soit $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \{tH(\frac{x - y}{t}) + f_0(y), y \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1.59}$$

Soit $t > 0$ fixé, $x \in \mathbb{R}$. Prenons

$$\widetilde{f}(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \{\int_0^t H(y(s))ds + f_0(x(t)), y \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1.60}$$

où pour tout $y(.) \in \mathbb{N}$. On définit

$$y = x(t) = x - \int_0^t (y(s))ds \tag{2.1.61}$$

Pour tout $y(.) \in \mathbb{N}$ l'inégalité de Jensen donne

$$\widetilde{f}(x, t) \geq \inf_{y \in \mathbb{R}} \{tH(\frac{1}{t} \int_0^t y(s)ds) + f_0(y), y \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1.62}$$

$$\Rightarrow \widetilde{f}(x, t) \geq \inf_{y \in \mathbb{R}} \{tH(\frac{x - y}{t}) + f_0(y), y \in \mathbb{R}\} = f(x, t). \tag{2.1.63}$$

D'autre part, en posant

$$y(s) = \frac{x-y}{t} \tag{2.1.64}$$

$$\widetilde{f}(x,t) = \inf_{y\in\mathbb{R}}\{\int_0^t H(\frac{x-y}{t})ds + f_0(x(t)), y \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1.65}$$

$$\Rightarrow \widetilde{f}(x,t) \leq \inf_{y\in\mathbb{R}}\{tH(\frac{x-y}{t}) + f_0(y), y \in \mathbb{R}\} = f(x,t). \tag{2.1.66}$$

Donc $f(x,t)$ est l'unique solution de viscosité du problème (2.1.1) $\square$

### Corollaire 2.1.1

La fonction $f$ définit par la formule de Lax-Hoph (2.1.29) est une solution lipschitzienne sur $\mathbb{R} \times [0,T]$, de plus $f(t,x) = f(0,x)\ \forall\ t = 0$.

# Preuve

Montrons d'abord que $f$ est lipschitzienne en $x$. Fixons pour cela $t > 0$ et $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que ;

$$f(x,t) = f_0(z) + tC(\frac{x-z}{t}) \tag{2.1.67}$$

on a alors,

$$f(\widetilde{x},t) - f(x,t) = \inf_{y\leq\mathbb{R}}\{f_0(y) + tC(\frac{\widetilde{x}-y}{t})\} - f_0(z) - tC(\frac{x-z}{t}) \tag{2.1.68}$$

$$\leq f_0(\widetilde{x} - x + z) - f_0(z) \tag{2.1.69}$$

$$\leq L||\widetilde{x} - x|| \tag{2.1.70}$$

En échangeant les rôles de $\widetilde{x}\ et\ x$, on obtient

$$||f(\widetilde{x},t) - f(x,t)|| \leq L||\widetilde{x} - x|| \tag{2.1.71}$$

Regardons maintenant ce qui se passe par rapport à la variable $t$, après avoir fixé $x \in \mathbb{R}$.
En prenant $x = y$ dans la formule de Lax-Hoph (2.1.29) on voit

$$f(x,t) = tC(0) + f_0(x) \tag{2.1.72}$$

De plus en notant $L$ la constante de Lipschitz de $f_0(x)$, on a

$$f(x,t) \geq \inf_{y\leq\mathbb{R}}\{f_0(x)-L||x-y||+tC(\frac{x-y}{t})\} \quad (2.1.73)$$

$$\geq f_0(x)+\inf_{y\leq\mathbb{R}}\{-L||x-y||+tC(\frac{x-y}{t})\} \quad (2.1.74)$$

$$\geq f_0(x)-t\sup_{z\in\mathbb{R}}\{-L||z||-C(z)\} \quad (2.1.75)$$

Par conséquent, en posant $B = B(0,L)$ la boule de centre 0 et de rayon L, on obtient

$$f(x,t) \geq f_0(x)-t\sup_{w\in B}\sup_{z\in\mathbb{R}}\{w.z-C(z)\} = f_0(x)-t\sup_{p\in B}H(P) \quad (2.1.76)$$

Cette inégalité implique donc, en posant $C = \max\{L||0||, \sup_B(H)\}$

$$||f(x,t)-f_0(x)|| \leq Ct \quad (2.1.77)$$

Donc $f$ est aussi lipschitzienne en $t$.
Par conséquent $f$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}\times[0,T]$.
En plus

$$\lim_{(t,x)\longrightarrow(0,x)} ||f(x,t)-f_0(x)|| = 0 \quad (2.1.78)$$

D'où $f(x,t) \longrightarrow f_0(x) \ \ \forall\ t = 0$
En résumé, étant donnée une densité initiale $\rho_0 \geqslant 0$, il éxiste un champ de vitesses (unique à une constante additive près) $u_0$, fourni par $\alpha u' = \rho_0$, tel que l'écoulement correspondant soit un potentiel et vérifie en permanence $\alpha\partial_x u = \rho$.
on a $u = \partial_x f$ où $f$ est une fonction convexe, solution de (2.12).
Le fait que la donnée initiale puisse être lipschitzienne entraine que la masse initiale est concentrée en certains points. On a ainsi le phénomène de "big bang", où la masse initiale concentre en une un point et s'étale sur une droite dès que,

$$f_0(x) = \begin{cases} ax & x<0, \\ bx & x>0, \end{cases} \quad (2.1.79)$$

où $a < b$ sont deux constantes.

La masse totale, concentrée à l'origine, est $m = \alpha(b-a)$[2]. (2.1.80)

En vertu de (2.1.30) et du corollaire 2.1.1, la solution de viscosité de l'équation de Hamilton Jacobi est :

$$f(x,t) = \begin{cases} ax - \frac{a^2}{2}t & x < at, \\ \frac{x^2}{2t} & at < x < bt, \\ bx - \frac{b^2}{2}t & x > bt, \end{cases} \tag{2.1.81}$$

La masse est donc, à l'instant $t$, répartie de manière uniforme sur son support $[at, bt]$ sur lequel la vitesse est affine.
On peut constater que la condition de contrainte nulle à la surface libre a bien lieu (en fait, la contrainte $(2\mu + \lambda)u_x - c^2\rho$ est nulle partout). La surface est libre de toute contrainte : la vitesse, étant affine, tout ses termes quadratiques sont nuls.

## 2.2 Le cas de dimension $d \geq 2$

La situation est beaucoup moins favorable en dimension $d \geq 2$.
En effet, $f_0$ ne peut à la fois être régulière et satisfaire la condition (2.14) que s'il existe une variable scalaire, disons $x_1$ telle que

$$f_0(x) = h(x_1) \tag{2.2.1}$$

et ceci nous ramène au cas mono-dimensionnel. Par ailleurs, si $f_0$ est convexe, l'équation de Hamilton-Jacobi possède une et une seule solution reguliere pour $t > 0$, toujours donnée par la formule de Lax

$$f(x,t) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \{f_0(y) + \frac{||x-y||^2}{2t}, y \in \mathbb{R}\} \tag{2.2.2}$$

Par contre cette solution ne satisfait plus la condition (2.14) si $f_0$ a une singularité générale (i.e un point où $f_0$ n'est pas entièrement définie).
Voyons sur un exemple en prenant

$$f_0(x) = ||x|| \tag{2.2.3}$$

qui est un bon exemple pour décrire le big bang, on a

$$f(x,t) = \begin{cases} ||x|| - \frac{t}{2} & ||x|| > t, \\ \\ \frac{||x||^2}{2t} & ||x|| < t, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

qui ne satisfait pas (2.14) dans la boule $B(0;t)$.
L'explication de ce phénomène est que le sous-différentiel de $f_0$ à l'origine

est un convexe d'intérieur non vide, donc de dimension 2, de sorte que la solution de viscosité (la seule qui soit régulière dans ce cas) est le supprimum d'une famille à deux paramètres de fonctions affines [2].
Plus généralement [2], si $f_0$ est convexe, l'ensemble $K$ des valeurs de son sous-différentiel est un convexe et la solution régulière de l'équation de Hamilton Jacobi est donnée par

$$f(x,t) = \sup\{L(x)+c-\frac{t}{2}||L||,\ \ L+c \in K\} \tag{2.2.5}$$

La condition de compatibilité n'est satisfaite que si $K$ est lui-même un segment.
Dans le cas où $f_0$ possède une singularité en $x_0$, le sous-différentiel $\partial f_0(x_0)$ n'est pas réduit à un point et détermine donc la direction de $K$.
Pour que la condition (2.14) soit satisfaite, il est nécessaire que la caustique passant par $(x_0, f(x_0))$ soit en fait incluse dans un hyperplan tangent en $x_0$ au graphe de $f_0$. Ceci limite considérablement l'intérêt de notre construction dans le cas multidimensionnel.
Donc les solutions obtenues sont ou bien locales en espace-temps, ou bien en fait mono-dimensionnelles.

## Remarque :

De façon générale, un écoulement est plan (d=1,2) : c'est le cas des écoulements entre deux plaques planes parallélles, écoulement Couette, écoulement poisseuille, tourbillion etc.
Très récemment, des chercheurs astrophysiciens ont avancé qu'il existe un écoulement en 3D en apesenteur.
De façon plus analytique, il existe des solutions pour $d \geq 3$ dépendant de deux approches.
On ne parlera d'existance de solution que si la solution géométrique de l'équation de Hamilton Jacobi coincide avec la solution variationnelle.

# Conclusion

La solution de l'équation de Hamilton Jacobi issue d'une équation de Navier Stock en compressible, nous permet de décrire l'évolution de l'écoulement potentiel d'un fluide compressible visqueux selon que la dimension spatiale $d$ des équations de Navier Stockes soit égale à 1 ou supérieur ou égale à 2. En effet l'idée de la solution de viscosité amenée par une observation simple, a permis de résoudre ces problèmes.
Cette solution existe et est unique si la dimension spatiale $d$ des équations de Navier Stockes est égale à 1 et l'écoulement correspondant est potentiel et vérifie en permanence $u(x,t) = \boldsymbol{\nabla} f(x,t)$ et $\rho(x,t) = \alpha \boldsymbol{\Delta} f(x,t)$. Mais lorsque la dimension spatiale $d \geq 2$, la solution de viscosité n'existe et n'est unique que si l'on revient au cas mono-dimensionnelle ou si elle est locale. Dans ce cas l'écoulement serait encore potentiel et vérifierait $u(x,t)$ et $\rho(x,t)$.
L'ensemble des écoulements potentiels exacts décrit ici est manifestement très petit.
En négligeant le terme convectif, Kazhikhov [1] obtient une classe plus large pour des lois de pression générales.
Néanmoins les résultats de ce modeste travail constituent les bases des nouvelles perspectives avec des études beaucoup plus approfondies.
lesquelles sont :
recherche de la solution régulière de l'équation de Hamilton Jacobi lorsque $f$ est une sous-solution.
Recherche de la solution de viscosité de l'équation de Hamilton Jacobi lorsque la dimension spatiale $d$ est supérieur ou égale à 2 en faisant recours à d'autres types de solutions ou de notions.
Validation de ces études avec des données expérimentales.

# Références


[1] A.V. Kazhikhov, *The equations of potential flows of compressible viscous fluids at low Reynolds number*,(preprint) (1993).

[2] D. Serre, *Ecoulement Potentiel d'un Fluide Compressible Visqueux Isotherme.* Ecole Normale Superieurede Lyon, UMPA-UMR 128 46, allee d'Italie,69364 Lyon, cedex 07, France, Received November 1993, accepted December 1993.

[3] Eberhard Hoph,*Generalized Solutions of non-linear Equations of First Orde.* Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 14, No. 6 (1965), pp. 951-973, Indiana University Mathematics Department,Tue, 28 Jan 2020 11 :20 :07 UTC.

[4] F. Boyer, *Fonctions convexes.* Aix-Marseille Université, 2013/2014

[5] Frédéric Jean,*Systèmes Dynamiques Stabilité et Commande.* AO 102, Edition 2017/2018

[6] Gabriel Faraud et Yanos Zylberberg, *Equation de Hamilton-Jacobi.* 22 juin 2004

[7] *Introduction à la dynamique des fluides Newtoniens compressibles.* Université des sciences et rechnologies de Lille, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées Département de Mécanique, Enseignement du Master 2 de Mécanique.

[8] M. Bard and L. C. Evan *On Hoph's formulas for solution of Hamilton-Jacobi equations* ,Seminario Matematico. Universita di Padova, via Belzoni 7. 35131 Padova, Italy,Department of Mathematics, University of Maryland, College Park. MD 20742, U.S.A.Received 7 Ocrober 1983 ; received for publicarion 23 January 1984.

[9] Nicolas Bonnotte Amaury Freslon, *Solutions entropiques des lois de conservation scalaires unidimensionnelles*,Ecole normale supérieure, PARIS,3 décembre 2008.

[10] Olivier Louisnard,*Cours de mécanique des fluides.* Creative Commons,171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA, 25 septembre 2012.

[11] P.L. Lion and Michael G.Crandall *viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical society, Volume 277, Number 1, May 1983.

[12] P.L. Lions,*Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman Research Notes in Mathematics,No. 69, London, (1982).

[13] P.L.Lion *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre et applications*, séminaire équations aux dérivées partielles (école Polytechnique centre des mathématiques, 91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE) (1983-1984), exp. no 6, p. 1-12.

[14] Sadakazu Aizawa and Norio Kikuchi, *A Mixed Initial and Boundary-Value Problem for the Hamilton-Jacobi Equation in Several Space Variables.* Kobe University, Ricevita la 30-an de majo, 1966.

[15] Samuel Forest, Michel Amestoy Gilles Damamme, Serge Kruch,Vincent Maurel, Matthieu Mazière,*mécanique des milieux continus.* école des mines de Paris, 2009–2010.

[16] Stephane Vento,*Navier-Stokes Compressible et Problème d'Approximation de type Stokes en 2D.* Stage de DEA dirigé par Marco Cannone, Juin 2004.

[17] Valentine Roos, *Différent types de solutions à l'équation de Hamilton Jacobi* , Encadrement : Patrick Bernaid, 11 octobre 2012.