UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE :	**Sciences et Technologies**
MENTION :	**Mathématiques et Applications**
SPÉCIALITÉ :	**Mathématiques Pures**
OPTION :	**Géométrie Algébrique**

Théme :

Théorème de Riemann-Roch

Présenté par : Moustapha CAMARA

Sous la direction de : Professeur Oumar SALL

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Salomon SAMBOU	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Amoussou Thomas GUEDENON	Maître de conférences	Examinateur	UASZ
Mansour SANE	Maître assistant	Examinateur	UASZ
Oumar SALL	Professeur titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2018 – 2019

Théorème de Riemann-Roch

Moustapha CAMARA

26 octobre 2019

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire, Monsieur Oumar SALL, pour l'encadrement dont j'ai bénéficié de sa part tout au long de ce travail de mémoire. Je salue ses pertinentes remarques qui sont très enrichissantes, ses recadrages et ses précieux conseils m'ont toujours aidé à avancer dans mes travaux.

Je suis honoré par la présence de Monsieur Salomon SAMBOU qui a particité à l'encadrement et qui a accepté de présider le jury de ce mémoire, je le remercie sincèrement.

Je remercie Monsieur Amoussou Thomas GUEDENON et Monsieur Mansour SANE pour avoir accepté de faire partie du jury.

Nos remerciements vont à l'endroit de tous les professeurs du département de mathématiques de l'Université Assane SECK de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont dispensé, particulièrement à Salomon SAMBOU, Oumar SALL, Amoussou Thomas GUEDENON, Alassane DIEDHIOU, Daouda Niang DIATTA, Timack NGOM et Clément MANGA.
Je n'oublie pas les professeurs de l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar particulièrement à Diaraf SECK et Bacary MANGA.
Merci encore !.

Nous disons un grand merci à Abdoulaye CAMARA, Mouhamadou Moustapha Sy GAYE, Sény DIATTA, Souhaibou SAMBOU et Chérif Mamina COLY pour leur aide, leur soutien permanent et encouragements incessants.

Mes remerciements s'adressent à mes camarades de promotion et mes amis non mathématiciens dont les encouragements m'ont permis de ne pas dévier de mon objectif final. Merci à Papa BADIANE, Raymond DIATTA, Abdoulaye SABALY, Amadou LY et Hameth BA.

Mes remerciements s'adressent également à Laye FATY, Ismahila DJIBA et à toute l'équipe pour divers services qu'ils m'ont rendus.

Résumé

La source de motivation de ce travail est le théorème de Bernhard Riemann qui plus tard a été complété par son étudiant Gustav Roch, pour obtenir ainsi le théorème qu'on nomme maintenant théorème de Riemann-Roch. C'est surtout par les idées mises en œuvre et les outils mis en place que le théorème de Riemann-Roch a eu une importance considérable à travers ses applications dans de nombreuses branches des mathématiques et en particulier en géométrie algébrique. Ces applications sont multiples et on donne ici quelques exemples eu égard aux notions de base rappelées pour aider à comprendre les trois versions du théorème de Riemann-Roch citées dans ce mémoire.

Notations et Abréviations

$\nmid$	Ne divise pas
❏	Marque la fin des preuves
i.e.	C'est-à-dire
$\mathrm{car}(k)$	Caractéristique du corps k

Introduction

La géométrie algébrique est un domaine des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des ensembles algébriques, c'est-à-dire ceux qui sont définis par l'annulation d'un ou de plusieurs polynômes. L'attention particulière est accordée aux variétés algébriques. Il existe deux types de catégories essentielles de variétés algébriques, celles qui sont affines et celles qui sont projectives. Le présent mémoire intitulé le théorème de Riemann-Roch mérite de faire une brève historique sur Riemann-Roch. Le mathématicien Bernhard Riemann $(1826 - 1866)$ s'intéressait au problème de détermination de tous les diviseurs positifs équivalents à un diviseur D sur une surface compacte. Pour y arriver, il cherchait à calculer la dimension de l'espace vectoriel complexe

$$\mathcal{L}(D) = \{f \mid f \text{ est méromorphe et } \operatorname{div}(f) + D \geq 0\}.$$

Riemann prouva que, pour X compact,

$$\dim \mathcal{L}(D) \geq \deg D + 1 - g.$$

où g est le genre de la surface de X. Son étudiant Gustav Roch $(1839 - 1866)$ compléta le théorème qu'on nomme maintenant théorème de Riemann-Roch

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim \mathcal{L}(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

où K est un diviseur appelé diviseur canonique.
L'objectif de ce travail de mémoire est double d'une part de mettre en place l'ensemble des outils nécessaires pour la compréhension des trois versions du théorème de Riemann-Roch et d'autre part de donner quelques applications.

Ces trois versions s'énoncent respectivement de la manière suivante :

Théorème 3.2.1 (Riemann-Roch 1)
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective irréductible, de degré d et de genre g. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = nd + 1 - g.$$

De plus, pour n grand on a

$$h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = 0$$

et dans ce cas on a :

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = nd + 1 - g.$$

Théorème 3.2.2 (Riemann-Roch 2**)**
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective, lisse et irréductible de genre g et soit D un diviseur sur $\mathcal{C}$. On a la formule

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \deg D + 1 - g.$$

De plus, il existe un entier N tel que si $\deg(D) \geq N$ on a

$$h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = 0$$

et dans ce cas on a :

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \deg D + 1 - g.$$

Théorème 3.2.4 (Riemann-Roch 3**)**
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse et irréductible de genre g. Soit K un diviseur canonique sur $\mathcal{C}$. Alors, pour tout diviseur D sur $\mathcal{C}$

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) - h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

Ce mémoire comprend trois chapitres et est organisé comme suit :

Le premier chapitre introduit les notions de base essentielles pour la compréhension du sujet abordé. Les propositions et théorèmes utilisés pour ces notions considérées comme rappels ne sont pas en générale démontrés. Parmi ces notions de base on privilégie les ensembles algébriques affines, les ensembles algébriques projectifs et les diviseurs. Ce chapitre rassemble des propriétés essentielles qui seront beaucoup utilisées dans les chapitres ultérieurs. Pour les preuves, on peut se référer par exemple à [1] ou à [4] ou à [10].

Dans le deuxième chapitre, on traite, entre autres, des notions de faisceaux, de cohomologie et plus particulièrement la cohomologie de Čech. Dans ce chapitre, on trouve deux résultats très importants à savoir une suite exacte longue de coholomogie et le théorème d'annulation dans le cas projectif.

Le troisième et dernier chapitre qui est le cœur du sujet, est consacré à l'étude du théorème de Riemann-Roch. Dans ce chapitre, on énonce puis on démontre les versions du théorème de Riemann-Roch. On fait aussi des rappels sur les courbes elliptiques, en insistant sur des notions qui interviennent dans les applications.

Chapitre 1

Notions préliminaires

On désignera par k un corps commutatif sauf mention expresse du contraire et n sera considéré un entier strictement positif.

1.1 Ensembles algébriques affines

1.1.1 Espace affine

Définition 1.1.1 On appelle espace affine de dimension n, et on note $\mathbb{A}^n(k)$ ou encore $\mathbb{A}^n$ (s'il n'y a pas risque de confusion sur k), l'ensemble k^n, produit cartésien itéré n fois du corps k.

Les éléments de l'espace affine sont appelés points. Les espaces $\mathbb{A}^1$ et $\mathbb{A}^2$ sont appelés respectivement droite et plan affine. Un point a de $\mathbb{A}^n$ est dit zéro de $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ si $f(a) = 0$.

Définition 1.1.2 Soit S une partie quelconque de $k[X_1, \ldots, X_n]$. On pose :

$$\mathcal{V}(S) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid \forall\, f \in S,\, f(a) = 0\}$$

de sorte que les $a \in \mathcal{V}(S)$ sont les zéros communs à tous les polynômes de S.

On dit que $\mathcal{V}(S)$ est l'ensemble algébrique affine défini par S. On notera souvent dans le cas d'un ensemble fini, $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$ en lieu et place de $\mathcal{V}(\{f_1, \ldots, f_r\})$.

Définition 1.1.3 On appelle hypersurface définie par f, et l'on note $\mathcal{V}(f)$, l'ensemble des zéros de f (où f n'est pas constant et k est algébriquement clos).

Ainsi, on a $\mathcal{V}(f) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0\}$. Le degré de $\mathcal{V}(f)$ est le degré de f.

Cas particuliers d'hypersurfaces : Soit l'hypersurface $\mathcal{V}(f) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0\}$.

- Si $n = 2$, on obtient $\mathcal{V}(f) = \{a \in \mathbb{A}^2 \mid f(a) = 0\}$, une telle hypersurface est appelée courbe affine plane.
  Une courbe affine plane est dite conique, cubique, quartique,... si le degré est respectivement $2, 3, 4, \ldots$

- Si $\deg(f) = 1$, l'hypersurface $\mathcal{V}(f) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0\}$ est appelée hyperplan affine.

Remarques 1.1.1

1. L'application $\mathcal{V}$ est décroissante : si $S_1 \subset S_2$ alors $\mathcal{V}(S_2) \subset \mathcal{V}(S_1)$.
2. Pour tout $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, on montre que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle)$ où $\langle S \rangle$ désigne l'idéal engendré par S. Par suite, l'étude des ensembles algébriques affines se ramène à l'étude des idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Or, ce dernier étant neothérien, donc tout idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de type fini. Ainsi, tout ensemble algébrique affine est défini par un nombre fini d'équations : $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$, où $f_i \in S$.

Propositions 1.1.1

1) Le vide et l'espace tout entier sont des ensembles algébriques affines.
2) Une intersection quelconque d'ensembles algébriques affines en est un.
3) Une réunion finie d'ensembles algébriques affines en est un.

Cette proposition nous permet d'énoncer la définition suivante :

Définition 1.1.4 Les ensembles algébriques affines de $\mathbb{A}^n$ définissent une topologie sur $\mathbb{A}^n$, dite topologie de Zariski, dont ils sont les fermés.

Définition 1.1.5 (Idéal d'un ensemble de points)
Soit V une partie de $\mathbb{A}^n$. On appelle idéal de V dans $\mathbb{A}^n$, l'ensemble noté $\mathfrak{I}(V)$ défini par

$$\mathfrak{I}(V) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \forall\, a \in V,\, f(a) = 0\}.$$

On voit que $\mathfrak{I}(V)$ est l'ensemble des polynômes nuls sur V. On vérifie aisement que $\mathfrak{I}(V)$ est un idéal.
Considérons le morphisme d'anneaux suivant

$$r : k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathcal{F}(V, k), \; f \longmapsto f_{|V}$$

où $\mathcal{F}(V, k)$ désigne l'anneau de toutes les fonctions de V dans k, et $f_{|V}$ représente la restriction de f à V. Le noyau de r est $\mathfrak{I}(V)$ et notons $\Gamma(V)$ [1] l'image de r qui est l'anneau des fonctions polynômiales sur V, isomorphe à $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{I}(V)$.

Définition 1.1.6 On appelle radical d'un idéal I de $k[X_1, \ldots, X_n]$, l'ensemble noté $\sqrt{I}$ défini par

$$\sqrt{I} = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \,|\, \exists\, m \in \mathbb{N}^*,\, f^m \in I\}.$$

Théorème 1.1.1 (le théorème des zéros de Hilbert)
On suppose que k est algébriquement clos. Pour tout idéal propre I de $k[X_1, \ldots, X_n]$, on a

$$\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

1. En fait, on verra sous peu que $\Gamma(V)$ s'appelle l'algèbre des fonctions régulières de V dans k.

1.1.2 Irréductibilité

Définitions 1.1.7 Soit E un espace topologique non vide.
On dit que E est irréductible s'il n'est pas réunion de deux fermés distincts de E.

Autrement dit,

$$E \text{ irréductible } \Leftrightarrow \ [E = F_1 \cup F_2 \ (F_i \text{ fermé de } E) \Rightarrow E = F_1 \text{ ou } E = F_2]$$

Un ensemble algébrique affine est dit irréductible s'il est irréductible pour la topologie de Zariski.

Proposition 1.1.2 Un ensemble algébrique affine est irréductible si et seulement si son idéal est premier.

Théorème 1.1.2 Tout ensemble algébrique affine non vide V se décompose de façon unique (à permutation près) en une réunion finie d'ensembles algébriques affines irréductibles $V_1, \ldots, V_p$, non contenus l'un dans l'autre.

Les $V_1, \ldots, V_p$ sont appelés les composantes irréductibles de V.

Définition 1.1.8 On appelle variété algébrique affine tout ensemble algébrique affine irréductible.

Définition 1.1.9 (ouvert standard)
Soient $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ et $\mathcal{V}(f)$ l'hypersurface définie par f. L'ensemble

$$D(f) = k^n - \mathcal{V}(f) = \{a \in k^n \mid f(a) \neq 0\}$$

est un ouvert de Zariski de k^n, dit ouvert standard.

Les ouverts standards forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire tout ouvert U est réunion finie d'ouverts standards.

1.1.3 Applications régulières

Définitions 1.1.10 Soient $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ des sous-variétés affines. Une application $V \to W$ est dite régulière si c'est la restriction à V d'une application $k^n \to k^m$ dont les composantes sont des fonctions polynômiales.

On appelle fonction régulière sur V toute application régulière de V à valeurs dans k.

Remarque 1.1.2 Soient $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ des sous-variétés affines et $u : V \to W$ une application régulière. L'ensemble des fonctions régulières de V dans k s'identifie à l'algèbre

$$\Gamma(V) = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{I}(V).$$

Définition 1.1.11 (changement de coordonnées affines)
Soit $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n, \ x \longmapsto f(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x))$ une application régulière bijective telle que chaque P_i soit un polynôme de degré 1. Une telle application f est appelée changement de coordonnées affines.

Exemples 1.1.1

▶ Soit $f_1 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2,\ x \longmapsto f_1(x) = (P_1(x),\, P_2(x))$ où $P_1 = a_{01} + a_{11}X + a_{21}Y$ et $P_2 = a_{02} + a_{12}X + a_{22}Y$ vérifiant $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

▶ Soit $f_2 : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3,\ x \longmapsto f_2(x) = (P_1(x),\, P_2(x),\, P_3(x))$ où

$P_1 = a_{01} + a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}Z$	La matrice formée par les coefficients de X, Y
$P_2 = a_{02} + a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}Z$	et Z : $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ est inversible
$P_3 = a_{03} + a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z$	i.e. $\det(\mathcal{M}) \neq 0$.

▶ Soit $f_3 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n,\ x \longmapsto f_3(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x))$ où $P_i = X_i + a_i$ [2].

Définition 1.1.12 Un élément f de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est dit homogène de degré d si, pour tout $\lambda \in k$, on a

$$f(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_1, \ldots, X_n).$$

Définition 1.1.13 (multiplicité d'une courbe affine à l'origine)
Soit $\mathcal{C} = \mathcal{V}(f)$ avec $f = f_m + f_{m+1} + \cdots + f_q$ où les f_i sont des polynômes homogènes de degré i, et $f_m \neq 0$. On appelle multiplicité de $\mathcal{C}$ au point $P = (0,0)$ et l'on note $m_P(\mathcal{C})$ l'entier m. Si $P \notin \mathcal{C}$, on pose $m_P(\mathcal{C}) = 0$.

Remarque 1.1.3 Pour $\mathcal{C} = \mathcal{V}(f)$ avec cette fois $f = \prod_i f_i^{n_i}$ où les f_i sont les facteurs irréductibles de f, alors $m_P(\mathcal{C}) = \sum_i n_i.m_P(\mathcal{C}_i)$ avec $\mathcal{C}_i = \mathcal{V}(f_i)$.

Pour le cas général, nous faisons un changement de coordonnées affines pour calculer la multiplicité de la courbe en un point $P = (a, b)$ quelconque. Concrètement, soit une courbe affine d'équation $g = 0$. Il suffit de ramener le point $P = (a, b)$ à l'origine en construisant une nouvelle fonction h définie comme suit $h = g^f$ avec $f = (P_1, P_2)$ un changement de coordonnées affines tel que $f^{-1}(P) = (0,0)$ et $g^f = g(P_1, P_2)$. Puisque, le changement de coordonnées affines ne change pas la multiplicité et on a $h(0,0) = g(P) = 0$ alors, chercher la multiplicité de g en $P = (a, b)$ revient à trouver la multiplicité de h à l'origine.

1.2 Ensembles algébriques projectifs

Dans cette section, nous introduisons l'anneau des polynômes $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$.

1.2.1 Espace projectif

Considérons la relation $\mathcal{R}$ sur $k^{n+1} - 0$ définie par : pour tous vecteurs non nuls x et y, on a

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in k^* : y = \lambda x.$$

La relation $\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'équivalence sur $k^{n+1} - 0$. Par conséquent, deux vecteurs non nuls sont équivalents s'ils sont colinéaires.

2. Cette application est appelée une translation.

Définition 1.2.1 On appelle espace projectif de dimension n sur k, noté $\mathbb{P}^n(k)$ ou $\mathbb{P}(k^{n+1})$ ou simplement $\mathbb{P}^n$ (s'il n'y a pas ambiguïté sur k), l'ensemble des classes d'équivalence par $\mathcal{R}$.

Ainsi, on a

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} - 0)/\mathcal{R}.$$

En d'autres termes, $\mathbb{P}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de k^{n+1}.
Si $P \in \mathbb{P}^n$, tout représentant de P est un vecteur directeur de P. Si un point $P \in \mathbb{P}^n$ a pour vecteur directeur $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in k^{n+1} - 0$, on écrit $P = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$; on dit $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ est un système de coordonnées homogènes de P et ils ne sont définis qu'à multiplication par un scalaire non nul près.
Les espaces $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ sont appelés respectivement droite projective et plan projectif.
Pour tout choix de système de coordonnées homogènes $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ de P, $F(P) = 0$ signifie que $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$. On dit que $P = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$ est un zéro de $F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ si $F(P) = 0$. La relation de colinéarité, montre qu'un point $P = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$ est un zéro de $F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ si et seulement si $F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1}) = 0$ pour tout $\lambda \in k^*$.

Remarque 1.2.1 Si $F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ est homogène, pour tout $\lambda \neq 0$, on a

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \text{ si et seulement si } F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1}) = 0.$$

Définition 1.2.2 Soit S une partie quelconque de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ formée de polynômes homogènes. On pose :

$$\mathcal{V}(S) = \{P = (x_1 : \ldots : x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n \mid \forall\, F \in S, F(P) = 0\}$$

de sorte que les $P \in \mathcal{V}(S)$ sont les zéros communs à tous les polynômes de S.

On dit que $\mathcal{V}(S)$ est l'ensemble algébrique projectif défini par S. Comme dans le cas affine si l'ensemble est fini, on notera $\mathcal{V}(F_1, \ldots, F_r)$ au lieu de $\mathcal{V}(\{F_1, \ldots, F_r\})$.

Définition 1.2.3 On appelle hypersurface définie par un polynôme homogène F, notée $\mathcal{V}(F)$, l'ensemble des zéros de F (où F non constant et k algébriquement clos).

Ainsi, on a $\mathcal{V}(F) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid F(P) = 0\}$. Le degré de $\mathcal{V}(F)$ est le degré de F.

Cas particuliers d'hypersurfaces : Soit l'hypersurface $\mathcal{V}(F) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid F(P) = 0\}$.

- Si $n = 2$, on obtient $\mathcal{V}(F) = \{P \in \mathbb{P}^2 \mid F(P) = 0\}$, une telle hypersurface est appelée courbe projective plane.
  Une courbe projective plane est dite conique, cubique, quartique, ... si le degré est respectivement $2, 3, 4, \ldots$
- Si $\deg(F) = 1$, l'hypersurface $\mathcal{V}(F) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid F(P) = 0\}$ est appelée hyperplan projectif.

Remarques 1.2.2

1. L'application $\mathcal{V}$ est décroissante : si $S_1 \subset S_2$ alors $\mathcal{V}(S_2) \subset \mathcal{V}(S_1)$.

2. Comme $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ est noethérien, tout idéal de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ est de type fini.
3. Soit $S \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. On montre sans peine que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle)$. Ainsi, l'étude des ensembles algébriques projectifs peut se ramener aux S qui sont des idéaux de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Puisque, les idéaux sont de type fini, alors tout ensemble algébrique projectif est défini par un nombre fini d'équations, donc $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(F_1, \ldots, F_r)$, où $F_i \in S$.

Proposition 1.2.1

1) Le vide et l'espace tout entier sont des ensembles algébriques projectifs.
2) Une intersection quelconque d'ensembles algébriques projectifs en est un.
3) Une réunion finie d'ensembles algébriques projectifs en est un.

Ainsi, on peut énoncer la définition suivante :

Définition 1.2.4 Les ensembles algébriques projectifs de $\mathbb{P}^n$ définissent une topologie sur $\mathbb{P}^n$, dite topologie de Zariski, dont ils sont les fermés.

Définition 1.2.5 (Idéal d'un ensemble de points)
Soit V une partie de $\mathbb{P}^n$. On appelle idéal de V dans $\mathbb{P}^n$, l'ensemble noté $\mathfrak{I}(V)$ défini par

$$\mathfrak{I}(V) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}] \text{ homogène} \mid \forall\, P \in V,\, F(P) = 0\}.$$

Il est clair que $\mathfrak{I}(V)$ est l'ensemble des polynômes homogénes nuls sur V. Pour les mêmes raisons que dans le cas affine $\mathfrak{I}(V)$ est un idéal. De plus, l'idéal est homogène, c'est-à-dire engendré par des polynômes homogènes.

1.2.2 Irréductibilité

Définition 1.2.6 Un ensemble algébrique projectif est dit irréductible s'il l'est pour la topologie de Zariski.

Proposition 1.2.2 Un ensemble algébrique projectif est irréductible si et seulement si son idéal est premier.

Théorème 1.2.1 Tout ensemble algébrique projectif non vide V se décompose de façon unique (à permutation près) en une réunion finie d'ensembles algébriques projectifs irréductibles $V_1, \ldots, V_p$, non contenus l'un dans l'autre.

Les $V_1, \ldots, V_p$ sont appelés les composantes irréductibles de V.

Définition 1.2.7 On appelle variété algébrique projective tout ensemble algébrique projectif irréductible.

Définition 1.2.8 Soient V un ensemble algébrique projectif et $F \in \Gamma(V)$ un élément homogène de degré > 0. On appelle ouvert standard de V l'ensemble noté $D(F)$ défini par

$$D(F) = \{P \in V \mid F(P) \neq 0\}.$$

Les ouverts standards V forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski.

Remarque 1.2.3 Soulignons que pour un ensemble algébrique projectif V, les éléments de $\Gamma(V)$ ne définissent pas des fonctions sur V à valeurs dans k même dans le cas le plus simple i.e. les polynômes homogènes. Toutefois, si f et g sont des éléments homogènes de $\Gamma(V)$ de même degré, alors le quotient f/g définit une fonction sur l'ouvert où g ne s'annule pas. Ainsi, seuls les éléments constants de $\Gamma(V)$ qui sont des fonctions sur V à valeurs dans k.

Définition 1.2.9 On dit qu'un ensemble algébrique projectif V est défini sur k, et l'on note V/k, si l'on peut choisir des polynômes homogènes F_i à coefficients dans k tels que $V = \mathcal{V}(F_1, \dots, F_r)$.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie sur k. L'ensemble des points $k-$rationnels de $\mathcal{C}$ noté $\mathcal{C}(k)$ est défini par
$$\mathcal{C}(k) = \mathcal{C} \cap \mathbb{P}^n(k) = \{P = (a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{C} \mid a_i \in k\}.$$
$\mathcal{C}(k)$ est donc l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ à coodonnées dans k.

Soient U et L_∞ les ensembles définis par
$$U = \{(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2 \mid Z \neq 0\} \text{ et } L_\infty = \{(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2 \mid Z = 0\}.$$
On introduit les coordonnées x, y telles que
$$x = \frac{X}{Z} \text{ et } y = \frac{Y}{Z}.$$
L'application définie par
$$\phi : \mathbb{A}^2 \to U,\ (x,y) \mapsto (x:y:1)$$
est une bijection dont la réciproque est
$$\phi^{-1} : U \to \mathbb{A}^2,\ (X:Y:Z) \mapsto (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}).$$
On déduit aussi une bijection avec l'application
$$\psi : \mathbb{P}^1 \to L_\infty,\ (X:Y) \mapsto (X:Y:0).$$
On voit clairement que $\mathbb{P}^2$ est la réunion disjointe
$$\mathbb{P}^2 = U \cup L_\infty$$
du "plan affine" U et de la "droite à l'infini" L_∞.
Un point de L_∞ est appelé point à l'infini que l'on notera P_∞. Ainsi, le plan projectif $\mathbb{P}^2$ peut donc être vu comme le plan affine auquel on adjoint un point à l'infini.
Plus généralement, on peut même voir $\mathbb{P}^n$ comme obtenu à partir de $\mathbb{A}^n$ en adjoignant un "hyperplan à l'infini".

Définition 1.2.10 (Homogénéisation et Déshomogénéisation)

- Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme quelconque de degré d. On a $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ avec f_i homogène de degré i. On pose

$$f^*(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d} X_{n+1}^{d-i} f_i(X_1, \ldots, X_n) = X_{n+1}^d f(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \ldots, \frac{X_n}{X_{n+1}}).$$

- Soit $F \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ un polynôme homogène de degré d. On pose

$$F_*(X_1, \ldots, X_n) = F(X_1, \ldots, X_n, 1).$$

Les processus changeant f en f^* et F en F_* sont respectivement appelés d'homogénéisation par rapport à X_{n+1} et de déshomogénéisation par rapport à X_{n+1}.

Remarque 1.2.4 (multiplicité d'une courbe projective en un point)
Pour déterminer la multiplicité d'une courbe projective $\mathcal{C}$ d'équation $F = 0$ en un point $P = (a, b, c)$ de $\mathcal{C}$, il suffit de déshomogénéiser F puis réduire le nombre de coordonnées de P.

Exemple 1.2.1 On considère dans $\mathbb{P}^2$, les courbes projectives suivantes

$$\mathcal{C}_1 : F = X^2Y^3 + X^2Z^3 + Y^2Z^3 = 0 \text{ et } \mathcal{C}_2 : G = Y^2Z - X(X - Z)^2 = 0$$

Déterminons la multiplicité de $\mathcal{C}_1$ en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et de $\mathcal{C}_2$ en $(1, 0, 1)$.

Pour $\mathcal{C}_1$

- $m_{(1,0,0)}(\mathcal{C}_1) = m_{(0,0)}(F(1,Y,Z)) = m_{(0,0)}(Y^3 + Z^3 + Y^2Z^3) = 3$
- $m_{(0,1,0)}(\mathcal{C}_1) = m_{(0,0)}(F(X,1,Z)) = m_{(0,0)}(X^2 + X^2Z^3 + Z^3) = 2$
- $m_{(0,0,1)}(\mathcal{C}_1) = m_{(0,0)}(F(X,Y,1)) = m_{(0,0)}(X^2Y^2 + X^2 + Y^2) = 2$

Pour $\mathcal{C}_2$

- $$\begin{aligned} m_{(1,0,1)}(\mathcal{C}_2) = m_{(0,1)}(G(1,Y,Z)) &= m_{(0,1)}(Y^2Z - (1 - Z)^2) \\ &= m_{(0,0)}(Y^2(Z + 1) - (1 - (Z + 1))^2) \\ &= m_{(0,0)}(Y^2Z + Y^2 - Z^2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

1.2.3 Applications régulières et Applications rationnelles

Dans ce paragraphe k désigne un corps algébriquement clos.

Définition 1.2.11 On appelle variété quasi-projective, tout ouvert (de Zariski) d'une variété projective.

Remarque 1.2.5 Dire que X est une variété signifie que X est quasi-projective ; en revanche, dire que Y est une sous-variété de X signifie que Y est un fermé de X.

Définitions 1.2.12 Soient X une sous-variété quasi-projective de $\mathbb{P}^n$ et $x \in X$. Une fonction $f : X \to k$ est dite régulière en x, s'il existe des polynômes homogènes F et G de même degré avec $G(x) \neq 0$ et $f = F/G$ dans un voisinage de x dans X.

On dit que f est régulière sur X, si elle l'est en tout point de X.

Définition 1.2.13 Soient X et Y des variétés quasi-projectives. On dit qu'une application $u : X \to Y$ est régulière si elle est continue et si, pour tout ouvert U de Y et toute fonction régulière $f : U \to k$, la composée $f \circ u$ est régulière sur $u^{-1}(U)$.

Définition 1.2.14 Soient X et Y deux variétés. Soit E l'ensemble défini par :

$$E = \{(u, U) \mid u : U \to Y \text{ application régulière et } U \text{ ouvert dense de } X\}.$$

Considérons la relation $\sim$ sur E définie par : pour tous couples (u, U) et (v, V) de E, on a

$$u \sim v \ \text{ si et seulement si } \ u \text{ et } v \text{ coïncident sur } U \cap V.$$

On montre sans difficulté que la relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence sur E.
On appelle application rationnelle de X sur Y, une classe d'équivalence pour cette relation.

On note une telle application par $u : X \dashrightarrow Y$. Une fonction rationnelle sur X est une application rationnelle de X à valeurs dans k.

1.2.4 Anneaux gradués

Définition 1.2.15 Une k-algèbre R est dite graduée si elle s'écrit comme somme directe

$$R = \oplus_{p \in \mathbb{N}} R_p$$

où les R_p sont des sous-espaces vectoriels de R vérifiant la condition $R_p R_q \subset R_{p+q}$.

Les éléments de R_p sont dits homogènes de degré p.

Exemple 1.2.2 Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ un ensemble algèbrique projectif et soit $\mathfrak{I}(X)$ son idéal homogène. L'anneau quotient $\Gamma(X) = k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/\mathfrak{I}(X)$ est un anneau gradué.

Définition 1.2.16 Soit R une k-algèbre graduée. Un R-module M est dit gradué s'il s'écrit comme somme directe

$$M = \oplus_{m \in \mathbb{Z}} M_m$$

où les M_m sont des sous-k-espaces vectoriels de M qui vérifient la condition $R_p M_m \subset M_{p+m}$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

1.3 Diviseurs

Dans cette section, nous travaillerons sur un corps k algébriquement clos sauf mention expresse du contraire, nous utilisons le mot courbe pour désigner courbe plane projective. Avant de parler de diviseurs, commençons d'abord par des notions de courbes lisses, d'anneaux locaux et de dimension d'une variété algébrique.

1.3.1 Courbes lisses, Anneaux locaux et dimension d'une variété algébrique

1.3.1.1 Courbes lisses

Considérons une courbe $\mathcal{C}$ définie par l'équation $F(X_1, X_2, X_3) = 0$ et soit $P \in \mathcal{C}$.

Définitions 1.3.1 Un point P de $\mathcal{C}$ est dit singulier si

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}(P), \frac{\partial F}{\partial X_2}(P), \frac{\partial F}{\partial X_3}(P)\right) = (0, 0, 0).$$

On dit qu'un point P de $\mathcal{C}$ est lisse (ou non singulier ou régulier) si

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_1}(P), \frac{\partial F}{\partial X_2}(P), \frac{\partial F}{\partial X_3}(P)\right) \neq (0, 0, 0).$$

Définition 1.3.2 Une courbe $\mathcal{C}$ est lisse (ou non singulière ou régulière) si elle l'est en chacun de ses points.

1.3.1.2 Anneaux locaux

Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie sur un corps de nombres k, et irréductible de sorte que l'anneau de polynômes $k[\mathcal{C}]$ est intégre.

Définition 1.3.3 On appelle corps des fractions de l'anneau $k[\mathcal{C}]$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$; il est noté $k(\mathcal{C})$.

En d'autres termes, on a

$$k(\mathcal{C}) = \{f \mid \exists\, g, h \in k[\mathcal{C}] \text{ homogènes de même degré, } f = g/h\}.$$

Définition 1.3.4 Soient $f \in k(\mathcal{C})$ et $P \in \mathcal{C}$. On dit que f est régulière (ou est définie) au point P s'il existe $g, h \in k[\mathcal{C}]$ avec $h(P) \neq 0$ telle que $f = g/h$.

Définition 1.3.5 Soit $P \in \mathcal{C}$. On appelle anneau local de $\mathcal{C}$ en P et l'on note $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ l'ensemble des fonctions régulières en P.

En d'autres termes,

$$\mathcal{O}_P(\mathcal{C}) = \{f \in k(\mathcal{C}) \mid f = g/h \text{ avec } h(P) \neq 0\}.$$

L'ensemble des points de $\mathcal{C}$ où la fonction rationnelle f n'est pas définie est appelé l'ensemble des pôles de f. Si f est régulière et s'annule en P, on dit que P est un zéro de f. Notons $\mathcal{M}_P(\mathcal{C})$ l'ensemble des fonctions régulières en P et qui s'annulent en P.
Explicitement,

$$\mathcal{M}_P(\mathcal{C}) = \{f \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C}) \mid f(P) = 0\}$$

qui est un idéal maximal.
Les éléments inversibles de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ sont ceux qui n'appartiennent pas à $\mathcal{M}_P(\mathcal{C})$, on les appelle les unités de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ et ils forment un groupe multiplicatif.
Si $\mathcal{C}$ est définie par l'équation affine $f(x, y) = 0$, alors $\mathcal{M}_P(\mathcal{C})$ pour $P = (a, b)$ est engendré par $x - a$ et $y - b$ i.e. $\mathcal{M}_P(\mathcal{C}) = < x - a, y - b >$.

Définition 1.3.6 On dit que $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ est un anneau de valuation discrète s'il existe $t \in \mathcal{M}_P(\mathcal{C})$, $t \neq 0$, tel que tout élément non nul $f \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ s'écrive de manière unique $f = u.t^m$, u unité de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, $m \in \mathbb{N}$.

L'entier m est appelé la valuation (ou l'ordre) de f, notée $\mathrm{ord}_P(f)$; il ne dépend pas du choix du paramétre t appelé uniformisante de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$.
Plus généralement, si $f \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, $f \neq 0$ on peut l'écrire sous la forme $u.t^m$, avec cette fois $m \in \mathbb{Z}$ et on pose $\mathrm{ord}_P(f) = m$.

Proposition 1.3.1 Si $\mathcal{C}$ est lisse en P, alors $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ est un anneau de valuation discrète et le corps

$$\mathcal{O}_P(\mathcal{C})/\mathcal{M}_P(\mathcal{C})$$

est appelé corps résiduel.

La connaissance de la fonction $\mathrm{ord}_P : f \longmapsto \mathrm{ord}_P(f)$ détermine l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$:

$$\mathcal{O}_P(\mathcal{C}) = \{f \in k(\mathcal{C}) \,|\, \mathrm{ord}_P(f) \geq 0\}$$

et $\mathcal{M}_P(\mathcal{C})$:

$$\mathcal{M}_P(\mathcal{C}) = \{f \in k(\mathcal{C}) \,|\, \mathrm{ord}_P(f) > 0\}.$$

Lorsqu'une courbe est lisse, alors pour tout point P de $\mathcal{C}$, l'anneau $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ est un anneau de valuation discrète.

Propriétés 1.3.1 Soit $\mathcal{C}$ une courbe lisse en P. Soient f et g deux éléments non nuls de $k(\mathcal{C})$. On a :

1. $\mathrm{ord}_P(f) = \infty$ si et seulement si $f = 0$
2. $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$
3. $\mathrm{ord}_P\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathrm{ord}_P(f) - \mathrm{ord}_P(g)$
4. $\mathrm{ord}_P(f+g) \geq \min(\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g))$
5. Si P est un pôle de f, alors $\mathrm{ord}_P(f) = -\mathrm{ord}_P\left(\dfrac{1}{f}\right)$

Exemple 1.3.1 Considérons une courbe $\mathcal{C}$ irréductible et lisse définie sur $\mathbb{Q}$ d'équation affine :

$$y^2 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Soit $P_i = (i, 0)$ où $i \in \{1, 2, 3\}$. On a $\mathcal{M}_{P_i}(\mathcal{C})$ est donné par $< x - i, y >$ et pour tout $j \neq i$, les éléments $x - j$ sont inversibles dans l'anneau local $\mathcal{O}_{P_i}(\mathcal{C})$ avec $j \in \{1, 2, 3\}$. On a pour $j \neq i$, $(x - i) = u.y^2$. Alors, l'uniformisante de $\mathcal{O}_{P_i}(\mathcal{C})$ est y. Ainsi, on a $\mathrm{ord}_{P_i}(y) = 1$ et donc $\mathrm{ord}_{P_i}(x - i) = 2$.

1.3.1.3 Dimension d'une variété algébrique

Définition 1.3.7 Soit X un espace topologique. La dimension de X est le maximum des entiers m pour lesquels il existe des parties irréductibles fermées $X_0, \ldots, X_m$ de X vérifiant $X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_m$.

La dimension de X est donc un entier positif, ou $+\infty$, et si X est vide, alors $\dim X = -\infty$.

Remarque 1.3.1 Si X est réunion de fermés $X_1, \dots, X_l$, on a $\dim X = \max \dim X_i$. On voit donc que la dimension d'un ensemble algébrique est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles.

Proposition 1.3.2 Tout ensemble algébrique est de dimension finie.

Un ensemble algébrique est de dimension 0 si et seulement si il consiste en un nombre fini de points.

1.3.2 Diviseurs

Soit X une variété. Rappelons les diviseurs de Weil et les diviseurs de Cartier.

Définition 1.3.8 (Diviseur de Weil)
On appelle diviseur de Weil D sur X une somme formelle finie à coefficients entiers d'hypersurfaces irréductibles de X de codimension 1.

Ainsi, un diviseur de Weil D sur X s'écrit $D = \sum_i m_i Y_i$ où les m_i sont des entiers presque tous nuls et les Y_i représentent des hypersurfaces irréductibles de X de codimention 1.

Définition 1.3.9 (Diviseur de Cartier)
Un diviseur de Cartier D sur X est la donnée d'un recouvrement (U_i) de X par des ouverts, et chaque U_i d'une fonction rationnelle f_i, avec la condition de compatibilité : sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, la fonction $f_{ij} = f_i/f_j$ est une fonction à valeurs dans k^* (i.e. sans zéro ni pôle).

Voici une proposition importante qui nous permet d'identifier les deux diviseurs et ainsi, nous pouvons les écrire de façon simple :

Proposition 1.3.3 Sur une variété lisse les notions de diviseur de Weil et de diviseur de Cartier coïncident.

On déduit de cette proposition qu'un diviseur sur une courbe lisse et irréductible est simplement une somme formelle finie de points affectés par des coefficients entiers.

Définition 1.3.10 Soit $\mathcal{C}$ une courbe lisse et irréductible. Un diviseur D sur $\mathcal{C}$ est une somme formelle de points appartenant à $\mathcal{C}$:

$$D = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P$$

où les n_P sont des entiers presque tous nuls.

Le degré d'un diviseur est la somme de ses coefficients :

$$\deg(\sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P) = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P.$$

Le support de $\sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P$ est l'ensemble des points $P \in \mathcal{C}$ tels que $n_P \neq 0$.

Un diviseur $D = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P$ sur $\mathcal{C}$ est effectif (ou positif) et on note $D \geq 0$ si $n_P \geqslant 0$ pour tout $P \in \mathcal{C}$.
L'ensemble des diviseurs sur $\mathcal{C}$ est un groupe commutatif noté $\text{Div}(\mathcal{C})$, où la loi de groupe est l'addition formelle de points :

$$\text{si } D = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P \text{ et } D' = \sum_{P \in \mathcal{C}} n'_P P \text{ alors } (D + D') = \sum_{P \in \mathcal{C}} (n_P + n'_P) P.$$

Manifestement, $\deg(D + D') = \deg(D) + \deg(D')$.
Ainsi, on peut définir la relation d'ordre partiel "$\geqslant$" sur les diviseurs par :

$$D \geqslant D' \text{ si et seulement si } D - D' \geqslant 0.$$

Remarque 1.3.2 Tout diviseur D peut s'écrire sous la forme

$$D = D_1 - D_2$$

où les D_i sont effectifs et de supports disjoints. En effet, soit $D = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P$, posons

$$D_1 = \sum_{n_P \geq 0} n_P P \text{ et } D_2 = - \sum_{n_P < 0} n_P P.$$

Alors $D = D_1 - D_2$.

Définition 1.3.11 (Diviseurs principaux)
Soient $\mathcal{C}$ une courbe lisse et irréductible et f une fonction non nulle de $k(\mathcal{C})$. On associe à f le diviseur noté $\text{div}(f)$ [3] défini par

$$\text{div}(f) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \text{ord}_P(f) P.$$

Un tel diviseur est appelé diviseur principal.
Comme dans la remarque 1.3.2 nous pouvons écrire $\text{div}(f)$ sous la forme de différence de deux diviseurs positifs :

$$\text{div}(f) = \text{div}(f)_0 - \text{div}(f)_\infty$$

avec $\text{div}(f)_0 = \sum_{\text{ord}_P(f) \geq 0} \text{ord}_P(f) P$ qui est appelé le diviseur de zéros de f, et $\text{div}(f)_\infty = - \sum_{\text{ord}_P(f) < 0} \text{ord}_P(f) P$ est le diviseur de pôles de f.

Proposition 1.3.4 Pour tout $f \in k(\mathcal{C})$ avec $f \neq 0$, $\text{div}(f)$ est un diviseur de degré zéro.

En d'autres mots, une fonction rationnelle non nulle a le même nombre de zéros que de pôles s'ils sont comptés avec leurs multiplicités.

3. Puisque, f a un nombre fini de zéros et de pôles, alors $\text{div}(f)$ est un diviseur bien défini.

Propriétés 1.3.2 Soient f et g deux éléments non nuls de $k(\mathcal{C})$. On a :

1. $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$
2. $\operatorname{div}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\operatorname{div}(f)$
3. $\operatorname{div}(f) = 0$ si et seulement si $f \in k^*$
4. $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(g)$ si et seulement si $\exists\ \lambda \in k^*\ :\ f = \lambda g$

Exemple 1.3.2 Considérons une courbe $\mathcal{C}$ irréductible et lisse définie sur $\mathbb{Q}$ d'équation affine :

$$y^2 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Soit $P_i = (i, 0)$ où $i \in \{1, 2, 3\}$. On sait déjà que $\operatorname{ord}_{P_i}(x-i) = 2$. De plus, on vérifie sans difficulté que $\mathcal{C}$ admet un unique point à l'infini que l'on note P_∞. Ainsi, on a :

- ▶ $\operatorname{div}(x-i) = 2P_i - 2P_\infty \quad \forall\ i \in \{1, 2, 3\}$
- ▶ $\operatorname{div}(y) = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_\infty$

Définition 1.3.12 Deux diviseurs sont linéairement équivalents si leur différence est un diviseur principal.

On note $\equiv$ la relation d'équivalence linéaire entre diviseurs : soient D et D' deux éléments de $\operatorname{Div}(\mathcal{C})$, on a

$$D \equiv D' \text{ si et seulement si il existe } f \in k(\mathcal{C}) \text{ non nulle } : \ D - D' = \operatorname{div}(f).$$

Définition 1.3.13 Soit D un diviseur sur $\mathcal{C}$. On appelle systéme linéaire complet d'un diviseur D noté $|D|$ l'ensemble de tous les diviseurs effectifs linéairement équivalents à D.

Définition 1.3.14 (Les espaces vectoriéls $\mathcal{L}(D)$)
Soient $\mathcal{C}$ une courbe lisse et D un diviseur sur $\mathcal{C}$. On associe à D l'ensemble des fonctions

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in k(\mathcal{C}) \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

$\mathcal{L}(D)$ est un $k-$espace vectoriél de dimension finie et on note $l(D)$ sa dimension.

Proposition 1.3.5 Soient $\mathcal{C}$ une courbe lisse et D un diviseur sur $\mathcal{C}$.

1) Si $\deg D < 0$, alors
$$\mathcal{L}(D) = 0 \text{ et } l(D) = 0.$$

2) Si $D < D'$, alors
$$\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D').$$

3) Si D' est un diviseur sur $\mathcal{C}$ linéairement équivalent à D, alors

$$\mathcal{L}(D) \sim \mathcal{L}(D') \text{ et } l(D) = l(D').$$

1.3.3 Diviseurs canoniques

Introduisons brièvement les formes différentielles régulières. Considérons une variété algébrique X de dimension n.

1.3.3.1 Formes différentielles

Définition 1.3.15 Une $p-$forme différentielle ω régulière sur X est une forme qui dans un voisinage de chaque point $x \in X$ s'écrit

$$\omega = \sum_{|I|=p} f_I dg_I$$

où $I = (i_1, \ldots, i_p)$ est un multi-indice d'entiers avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, $f_I = f_{i_1 \ldots i_p}$, $g_I = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_p}\}$; f_I et g_I sont des fonctions régulières en x et $dg_I = dg_{i_1} \wedge \ldots \wedge dg_{i_p}$.

Une $n-$forme différentielle ω régulière sur X s'écrit $\omega = f dg_{i_1} \wedge \ldots \wedge dg_{i_n}$.

Définition 1.3.16 Une $p-$forme différentielle rationnelle sur X est la donnée d'une $p-$forme différentielle régulière ω sur un ouvert de X, modulo la relation d'équivalence $\simeq$ définie comme suit :

$$(\omega, U) \simeq (\omega', U') \text{ si et seulement si } \omega = \omega' \text{ sur } U \cap U'.$$

1.3.3.2 Diviseur canonique

Considérons à présent X une variété projective lisse de dimension n.

Définition 1.3.17 Un diviseur canonique sur X est un diviseur d'une $n-$forme différentielle rationnelle sur X.

Un tel diviseur est noté K_X ou simplement K s'il n'y a pas risque de confusion sur X.

Proposition 1.3.6 Si ω et ω' sont deux n-formes différentielles rationnelles sur X, alors

$$K \equiv K'.$$

Autrement dit, il existe une fonction rationnelle non nulle f telle que $\omega = f\omega'$.

Cette proposition montre que les diviseurs des formes différentielles rationnelles non nulles forment une seule classe de diviseurs, appelée classe canonique. Par conséquent, sur X, tous les diviseurs canoniques ont le même degré. Etudions maintenant le cas d'une courbe.

Définition 1.3.18 Soit $\mathcal{C}$ une courbe irréductible définie sur k. L'espace des formes différentielles sur $\mathcal{C}$, noté $\Omega_{\mathcal{C}}(k)$, est le $k(\mathcal{C})-$ espace vectoriel engendré par les symboles de la forme dx pour $x \in k(\mathcal{C})$, vérifiant les relations usuelles :

(i) $d(x+y) = dx + dy$ pour tous x, $y \in k(\mathcal{C})$

(ii) $d(xy) = xdy + ydx$ pour tous x, $y \in k(\mathcal{C})$

(iii) $d\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in k$

Proposition 1.3.7 Soit $\mathcal{C}$ une courbe irréductible définie sur k.

1) L'espace vectoriel $\Omega_{\mathcal{C}}(k)$ est de dimension 1 sur $k(\mathcal{C})$.

2) Si t est une uniformisante en un point lisse de $\mathcal{C}$, alors dt est une base de $\Omega_{\mathcal{C}}(k)$.

Propositions 1.3.8 Soit $\mathcal{C}$ une courbe lisse et irréductible définie sur k. Soient $P \in \mathcal{C}$ et $t \in k(\mathcal{C})$ une uniformisante en P.

1) Pour tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}(k)$, il existe une unique fonction $f \in k(\mathcal{C})$ qui ne dépend que de ω et t, telle que $\omega = fdt$.
   On note f par ω/dt.
2) Soit $f \in k(\mathcal{C})$ une fonction régulière en P. Alors $\dfrac{df}{dt}$ est aussi une fonction régulière en P.
3) Soit $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}(k)$ avec $\omega \neq 0$. La quantité $\mathrm{ord}_P(\omega/dt)$ dépend seulement de ω et P, elle est indépendante du choix de l'uniformisante t.
   Cette valeur s'appelle l'ordre en P de ω et on la note $\mathrm{ord}_P(\omega)$.
4) Soient $f, g \in k(\mathcal{C})$ avec $g(P) = 0$ et soit $p = \mathrm{car}(k)$. Alors
$$\mathrm{ord}_P(fdg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g) - 1, \text{ si } p = 0 \text{ ou si } p \nmid \mathrm{ord}_P(g).$$
5) Soit $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}(k)$ avec $\omega \neq 0$. Alors
$$\mathrm{ord}_P(\omega) = 0 \text{ sauf un nombre fini de } P \in \mathcal{C}.$$

Cette proposition nous permet d'énoncer la définition suivante :

Définition 1.3.19 Soit $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}(k)$ avec $\omega \neq 0$. On associe à ω le diviseur noté $\mathrm{div}(\omega)$ défini par
$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(\omega) P.$$

Un tel diviseur est appelé diviseur canonique. On le note souvent K au lieu de $\mathrm{div}(\omega)$. La différentielle $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}(k)$ est régulière (ou holomorphe) si
$$\mathrm{ord}_P(\omega) \geq 0, \ \forall \, P \in \mathcal{C}.$$

Remarque 1.3.3 Soit $\mathcal{C}$ une courbe lisse et irréductible définie sur k. Soit $K = \mathrm{div}(\omega)$ un diviseur canonique sur $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(K)$. On a $\mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega) \geq 0$ i.e. $\mathrm{div}(f\omega) \geq 0$, donc $f\omega$ est holomorphe. Reciproquement, si la différentielle $f\omega$ est holomorphe alors $f \in \mathcal{L}(K)$. Puisque, chaque différentielle sur $\mathcal{C}$ a la forme $f\omega$ pour un certain $f \in k(\mathcal{C})^*$, alors on déduit que
$$\mathcal{L}(K) \simeq \{\omega \in \Omega_{\mathcal{C}}(k) \,|\, \omega \text{ est holomorphe}\}.$$

Exemple 1.3.3

▶ Considérons une courbe $\mathcal{C}$ irréductible et lisse définie sur $\mathbb{Q}$ d'équation affine :
$$y^2 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

On garde les mêmes notations que l'exemple 1.3.2 et soit la $1-$forme différentielle
$$\omega = \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{3x^2 - 12x + 11}.$$

On cherche à déterminer $\operatorname{div}(\omega)$. Cherchons d'abord $\operatorname{div}(dx)$, nous avons

$$dx = \frac{2ydy}{3x^2 - 12x + 11}.$$

La différentielle dx a trois zéros P_1, P_2, et P_3 et un pôle P_∞ et on a $dx = -x^2 d(1/x)$. Alors, on obtient

$$\operatorname{div}(dx) = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_\infty.$$

Ainsi, nous voyons donc que

$$\operatorname{div}(dx/y) = 0 \text{ i.e. } \operatorname{div}(\omega) = 0.$$

- Considérons la droite projective $\mathbb{P}^1$. Soit la $1-$forme différentielle $\omega = dx$ où x est une fonction coordonnée sur $\mathbb{P}^1$. Vérifions que

$$\operatorname{div}(\omega) = -2P_\infty.$$

En effet, on a pour tout $\alpha \in k$, la fonction $x - \alpha$ est une uniformisante en α, alors

$$\operatorname{ord}_\alpha(dx) = \operatorname{ord}_\alpha(d(x - \alpha)) = 0.$$

Or $P_\infty \in \mathbb{P}^1$ et $dx = -x^2 d(1/x)$, on détermine $\operatorname{ord}_{P_\infty}(dx)$ en faisant un changement de variable $t = 1/x$, puis on prend la fonction t comme l'uniformisante en P_∞, ce qui donne

$$\operatorname{ord}_{P_\infty}(dx) = \operatorname{ord}_{P_\infty}(-dt/t^2) = -2.$$

On a donc bien

$$\operatorname{div}(\omega) = -2P_\infty.$$

Remarquons que ω n'est pas régulière. De plus, pour toute autre $(\omega' \neq 0) \in \Omega_{\mathbb{P}^1}(k)$, nous avons

$$\deg(\operatorname{div}(\omega')) = \deg(\operatorname{div}(\omega)) = -2.$$

Donc, ω' n'est pas régulière non plus. Par conséquent, il n'y a pas de différentielle régulière sur $\mathbb{P}^1$.

Chapitre 2

Faisceaux et Cohomologie

Soient X un espace topologique et k un corps commutatif.

2.1 Préfaisceaux et Faisceaux

2.1.1 Préfaisceaux

Définition 2.1.1 On appelle préfaisceau d'ensembles sur X noté $\mathcal{F}$, la donnée pour tout ouvert U de X d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$; et pour tout couple (V, U) d'ouverts de X avec $V \subset U$ d'un morphisme $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ vérifiant :

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ et $\rho_{UU} = 1_{\mathcal{F}(U)}$,
2. si $W \subset V \subset U$ sont trois ouverts de X, $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$.

Le morphisme $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ est appelé restriction. Un élément $s \in \mathcal{F}(U)$ s'appelle une section de $\mathcal{F}$ sur U. On notera parfois $\Gamma(U, \mathcal{F})$ à la place de $\mathcal{F}(U)$. Si $U = X$, les éléments de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ sont appelés les sections globales de $\mathcal{F}$.

Exemple 2.1.1
Considérons l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ défini par : $\mathcal{F}(U) =$ l'ensemble des fonctions continues sur U ; si $V \subset U$ sont deux ouverts de X, $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$, $s \longmapsto s_{|V}$, où $s_{|V}$ est la restriction de s à V. Alors, $\mathcal{F}$ ainsi construit est appelé préfaisceau des fonctions continues.

Définition 2.1.2 On dira qu'un préfaisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ est un préfaisceau de groupes (respectivement de groupes abéliens) si :

- pour tout ouvert U de X, $\mathcal{F}(U)$ est un groupe (respectivement un groupe abélien),
- pour tout couple (V, U) d'ouverts de X avec $V \subset U$, ρ_{VU} est un homomorphisme de groupes.

On définit de la même manière un préfaisceau d'anneaux, d'algèbres sur un corps, de $A-$modules etc.

2.1.2 Faisceaux

Définition 2.1.3 Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est séparé si pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de U, l'application

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i), \;\; s \longmapsto (s_{|U_i})$$

est injective.

En d'autres termes : si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ et si $s_{|U_i} = t_{|U_i}$ $\forall\, i \in I$ alors $s = t$.

Définition 2.1.4 Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau d'ensembles sur X. On dit que $\mathcal{F}$ possède la propriété de recollement si pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de U, pour toute famille $\{s_i\}_{i\in I}$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ qui vérifie les relations

$$s_{i\,|U_i\cap U_j} = s_{j\,|U_i\cap U_j}, \;\forall\, i, j \in I.$$

Alors, il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que $s_{|U_i} = s_i \;\; \forall\, i \in I$.

Définition 2.1.5 On appelle faisceau sur X tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X qui est séparé et qui possède la propriété de recollement.

Exemples 2.1.2

- ▶ Le préfaisceau de toutes les fonctions est un faisceau.
- ▶ Le préfaisceau des fonctions continues d'un espace topologique est un faisceau.
- ▶ Le préfaisceau des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété différentiable est un faisceau.
- ▶ Le préfaisceau des fonctions holomorphes sur une variété complexe est un faisceau.
- ▶ Le préfaisceau des fonctions holomorphes partout non nulles sur une variété complexe est un faisceau.

Définition 2.1.6 Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur X. Un homomorphisme de faisceaux $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée, pour tout ouvert U, d'un homomorphisme d'ensembles $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, tel que pour tout couple (V, U) d'ouverts de X avec $V \subset U$ le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\rho_{VU}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{VU}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f(V)"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Les flèches verticales ρ_{VU} et ρ'_{VU} désignent les homomorphismes de restriction. La commutativité du diagramme donne, pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$

$$\begin{aligned}(\rho'_{VU} \circ f(U))(s) = (f(V) \circ \rho_{VU})(s) &\Rightarrow \rho'_{VU}(f(U)(s)) = f(V)(\rho_{VU}(s)) \\ &\Rightarrow f(U)(s)_{|V} = f(V)(s_{|V})\end{aligned}$$

Définition 2.1.7 On appelle espace annelé, un couple $(X, \mathcal{A})$ formé d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur X, i.e. les conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout ouvert U de X, $\mathcal{A}(U)$ est un anneau,
- pour tout couple (V, U) d'ouverts de X avec $V \subset U$, l'application $\rho_{VU} : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ est un homomorphisme d'anneaux.

Le faisceau $\mathcal{A}$ est appelé faisceau structural de X et on le note $\mathcal{O}_X$.

Notes : Désormais, nous travaillerons sur un corps k algébriquement clos. De plus, le faisceau structural de tout espace annelé sera supposé un faisceau de fonctions à valeurs dans k, qui est un faisceau de $k-$algèbre qui contient les fonctions constantes.

Définition 2.1.8 Soit X une variété algébrique et soit Y un fermé de X. On définit sur Y un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y$ en posant pour tout ouvert V de Y

$$\mathcal{O}_Y(V) = \{f : V \to k \mid \forall\, x \in V, \exists\, U \subset X \text{ ouvert, avec } x \in U \\ \text{et } g \in \mathcal{O}_X(U) \text{ tel que } g_{|V\cap U} = f_{|V\cap U}\}.$$

2.2 Faisceaux de modules

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé.

Définition 2.2.1 Un $\mathcal{O}_X-$module est un faisceau $\mathcal{F}$ sur X tel que, pour tout ouvert U de X, $\mathcal{F}(U)$ soit un $\mathcal{O}_X(U)-$module et les applications de restriction soient linéaires.

Pour tout couple (V, U) d'ouverts de X avec $V \subset U$, si l'on note $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ et $r_{VU} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ les restrictions. La linéarité des applications de restriction est à comprendre dans le sens suivant : on impose que ρ_{VU} soit $\mathcal{O}_X(U)-$linéaire i.e. $\forall\, a\, \mathcal{O}_X(U), \forall\, f \in \mathcal{F}(U)$, on a $\rho_{VU}(af) = r_{VU}(a).\rho_{VU}(f)$.

Exemples 2.2.1

- ▶ Le faisceau nul est un $\mathcal{O}_X-$module.
- ▶ Une somme directe finie de $\mathcal{O}_X-$modules en est un.

Définitions 2.2.2 Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X-$modules. Un homomorphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste en la donnée pour chaque ouvert U d'une application $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ $\mathcal{O}_X(U)-$linéaire compatible, en un sens évident aux restrictions.

On peut alors définir le faisceau noyau de f noté $\mathcal{K}erf$ par la formule

$$(\mathcal{K}erf)(U) = \ker(f(U)).$$

Et on dit que f est injectif si $f(U)$ est injectif pour tout U, ou encore si $\mathcal{K}erf = 0$.

Définitions 2.2.3 Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_X-$modules. On définit le faisceau image de f que l'on note $\mathcal{I}mf$ comme suit : pour tout ouvert U de X on a

$$(\mathcal{I}mf)(U) = \{s \in \mathcal{G}(U) \mid \forall\, x \in U, \exists\, V \text{ ouvert, avec} \\ x \in V \subset U \text{ tel que } s_{|V} \in \operatorname{Im}(f(V))\}.$$

On dit que f est surjectif si on a $\mathcal{I}mf = \mathcal{G}$.

Définition 2.2.4 Une suite de $\mathcal{O}_X-$modules $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ est dite exacte si φ injectif, ψ surjectif et $\mathcal{K}er(\psi) = \mathcal{I}m(\varphi)$.

Définition 2.2.5 Soit $\varphi : Y \to X$ une application continue et soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Y. On définit l'image directe du faisceau $\mathcal{F}$ par l'application φ que l'on note $\varphi_*\mathcal{F}$, comme étant le faisceau sur X défini par

$$\varphi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$$

pour tout ouvert U de X.

Exemple 2.2.2 (Suite exacte fondamentale)
Soient X une variété algébrique, Y un fermé de X et $j : Y \to X$ l'injection canonique. Notons $\mathcal{F}_Y$ le faisceau de toutes les fonctions sur Y, à valeurs dans un corps k et considérons son image directe $j_*\mathcal{F}_Y$. On a un morphisme de $\mathcal{O}_X-$modules $r : \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{F}_Y$ qui, à $s \in \mathcal{O}_X(U)$, associé sa restriction $s_{|U\cap Y} \in j_*\mathcal{F}_Y(U) = \mathcal{F}_Y(U \cap Y)$. Alors, en utilisant la définition du faisceau structural de Y, on déduit que le faisceau $j_*\mathcal{O}_Y$ n'est autre que le faisceau image de r i.e. $\mathcal{I}m\, r = j_*\mathcal{O}_Y$.
Dans la suite, on identifiera $\mathcal{O}_Y$ et $j_*\mathcal{O}_Y$, ce qui nous permet de considérer $\mathcal{O}_Y$ comme un $\mathcal{O}_X-$module. Notons $\mathcal{J}_Y$ le noyau de r. Ainsi, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X-$modules

$$0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

2.2.1 Faisceaux de modules sur une variété algébrique affine

Définition 2.2.6 (Faisceau structural d'un ensemble algébrique affine)
Soit V un ensemble algébrique affine. Le faisceau structural de V, noté $\mathcal{O}_V$ est défini comme suit : pour tout $f \in \Gamma(V)$, f non nulle, on pose

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f.$$

Explicitement,

$$\Gamma(V)_f = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid g \in \Gamma(V) \text{ et } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ceci définit un faisceau d'anneaux sur V est appelé faisceau des fonctions régulières.

Définition 2.2.7 Soient V une variété algébrique affine et $A = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$. Soit M un $A-$module. On définit un $\mathcal{O}_V-$module $\widetilde{M}$ sur les ouverts standards de V comme suit : si $f \in A$, f non nulle, on pose

$$\Gamma(D(f), \widetilde{M}) = M_f = M \otimes_A A_f.$$

Remarque 2.2.1 $\widetilde{A} = \mathcal{O}_V$.
En effet on a

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(D(f)) = \Gamma(D(f), \widetilde{A}) &= A_f \\ &= \Gamma(V)_f = \Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) \\ &= \mathcal{O}_V(D(f)).\end{aligned}$$

Exemple 2.2.3
Soient W un fermé de V et I l'idéal de A défini par $I = \mathfrak{I}(W)$. Alors on a la suite exacte

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

qui conduit à une suite exacte de faisceaux en tensoriant par A_f [1]

$$0 \to I \otimes_A A_f \to A \otimes_A A_f \to A/I \otimes_A A_f \to 0$$

laquelle n'est rien d'autre que la suite exacte fondamentale

$$0 \to \mathcal{J}_W \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_W \to 0.$$

Définition 2.2.8 Un $\mathcal{O}_V-$module isomorphe à un $\mathcal{O}_V-$module du type $\widetilde{M}$ est dit quasi-cohérent. Si M est de type fini sur A, on dit que $\widetilde{M}$ est cohérent.

2.2.2 Faisceaux de modules sur une variété algébrique projective

Définition 2.2.9 (Faisceau structural d'un ensemble algébrique projectif)
Soit X un ensemble algébrique projectif. On définit un faisceau de fonctions sur X, à valeurs dans k, en posant, pour $f \in \Gamma(X)$ homogène de degré > 0

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = \Gamma(X)_{(f)}.$$

Explicitement,

$$\Gamma(X)_{(f)} = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid g \in \Gamma(X) \text{ homogène et } m \in \mathbb{N} \text{ avec } \deg(g) = m\deg(f) \right\} \cup \{0\}.$$

Définition 2.2.10 Soit X une variété algébrique projective munie d'un plongement [2] dans $\mathbb{P}^n$. On pose $R = \Gamma(X)$. Soit M un $R-$module gradué. On définit un $\mathcal{O}_X-$module $\widetilde{M}$ sur les ouverts standards de X comme suit : si $f \in R$ est homogène de degré > 0, on pose

$$\Gamma(D(f), \widetilde{M}) = M_{(f)} = M \otimes_R R_{(f)}.$$

Remarque 2.2.2 $\widetilde{R} = \mathcal{O}_X$.

Définition 2.2.11 Soient R un anneau gradué et $M = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m$ un $R-$module gradué. Le module $M(d)$ est le module gradué égal à M mais avec la graduation décalée :

$$M(d)_m = M_{d+m}.$$

Définition 2.2.12 Soient X une variété algébrique projective plongée dans $\mathbb{P}^n$ et $R = \Gamma(X)$. Le faisceau $\mathcal{O}_X(d)$ est le faisceau associé au module décalé $R(d)$:

$$\mathcal{O}_X(d) = \widetilde{R(d)}.$$

Explicitement, pour tout $f \in R$ homogène non nul de degré > 0

$$\mathcal{O}_X(d)(D(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} \mid d = \deg(g) - m\deg(f) \text{ où } g \in R \text{ homogène et } m \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X-$module, on définit $\mathcal{F}(d)$ comme suit $\mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$.

Propriété 2.2.1 On a $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(m+n)$.

1. Autrement dit, le $A-$module A_f est plat.
2. Un plongement est une immersion fermé i.e. un homomorphisme qui est à la fois une immersion et un homéomorphisme sur son image.

2.3 Cohomologie de Čech

2.3.1 Cohomologie de Čech relative à un recouvrement

Définition 2.3.1 Un complexe de groupes abéliens (ou de modules, de $\mathcal{O}_X-$modules) est une suite $A^\bullet$ définie de la mamiére suivante :

$$A^\bullet : \cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^i} A^i \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+2}} A^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

de groupes abéliens (ou de modules, ou de $\mathcal{O}_X-$modules) A^i, indexée par les éléments de $\mathbb{N}$ avec des homomorphismes d^i vérifiant $d^{i+1} \circ d^i = 0$ pour tout i.

On définit les groupes de cohomologie du complexe $A^\bullet$ par

$$\mathrm{H}^i(A^\bullet) = (\ker d^{i+1})/(\mathrm{Im}\, d^i).$$

Un élément de A^i est appelé cochaîne, un élément de $\ker d^{i+1}$ est appelé cocycle, un élément de $\mathrm{Im}\, d^i$ est appelé cobord et les d^i sont appelées différentielles.
Soulignons que la suite n'est pas exacte, on a seulement $\mathrm{Im}\, d^i \subset \ker d^{i+1}$, de plus nous n'avons pas l'égalité.

Définition 2.3.2 Soient $A^\bullet$ et $B^\bullet$ deux complexes, de différentielles respectives d^i et δ^i. Un homomorphisme de complexes de $A^\bullet$ dans $B^\bullet$ est la donnée, pour chaque i, d'un homomorphisme $f^i : A^i \to B^i$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "f^i"'] & A^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\ B^i \arrow[r, "\delta^{i+1}"] & B^{i+1} \end{tikzcd}$$

On le note $f : A^\bullet \to B^\bullet$. Une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$

est la donnée de deux morphismes de complexes f, g avec, pour tout i, la suite exacte

$$0 \longrightarrow A^i \xrightarrow{f^i} B^i \xrightarrow{g^i} C^i \longrightarrow 0.$$

Proposition 2.3.1 Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X. Alors la suite

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi(X)} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi(X)} \Gamma(X, \mathcal{H})$$

est exacte.

Preuve :

◇ Comme φ est injective, alors $\varphi(X)$ l'est aussi car on a $\ker(\varphi(X)) = (\mathcal{K}er\varphi)(X)$.

◇ Par définition de faisceau image, on a $\mathrm{Im}(\varphi(X)) \subset (\mathcal{I}m\,\varphi)(X)$, or $(\mathcal{I}m\,\varphi)(X) = (\mathcal{K}er\,\psi)(X)$ et $(\mathcal{K}er\,\psi)(X) = \ker(\psi(X))$, donc $\mathrm{Im}(\varphi(X)) \subset \ker(\psi(X))$.

◇ Soit $g \in \ker(\psi(X)) = (\mathcal{I}m\, \varphi)(X)$. On veut montrer qu'il existe une section $f \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ telle que $g = \varphi(X)(f)$. Il existe un recouvrement d'ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de X et des sections f_i de $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ telles que $g_{|U_i} = \varphi(U_i)(f_i)$. Sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$, nous avons

$$g_{|U_{ij}} = \varphi(U_{ij})(f_{i|U_{ij}}) = \varphi(U_{ij})(f_{j|U_{ij}})$$

Par suite, $\varphi(U_{ij})((f_i - f_j)_{|U_{ij}}) = 0$ ce qui implique que $(f_i - f_j)_{|U_{ij}} \in \ker(\varphi(U_{ij}))$. Dès lors, $f_{i|U_{ij}} = f_{j|U_{ij}}$, par la propriété de recollement, il existe $f \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ telle que $f_{|U_i} = f_i$. De $g_{|U_i} = \varphi(U_i)(f_i)$, on a $g_{|U_i} = \varphi(X)(f)_{|U_i}\ \forall\, i \in I$ et donc $g = \varphi(X)(f)$.

❑

Le morphisme $\psi(X)$ n'est pas en général surjectif. Nous introduisons la cohomologie de Čech, dont l'intéret est de remédier au défaut de l'inexactitude de Γ.

Définition 2.3.3 Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \{0,..,n\}}$ un recouvrement ouvert fini de X.

On note les intersections $\begin{cases} U_{ij} & = U_i \cap U_j \\ U_{ijk} & = U_i \cap U_j \cap U_k \\ & \vdots \\ & \vdots \\ U_{i_0 \dots i_p} & = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}. \end{cases}$

On définit alors un complexe de groupes abéliens $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ comme suit

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : 0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^2} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

$$\text{avec } C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p}) & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ \quad 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

et $\delta^{p+1} : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $s \longmapsto (\delta^{p+1}s)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1} | U_{i_0 \cdots i_{p+1}}}$

où le symbole $\hat{i}_k$ signifie que l'on enlève i_k.

Un élément de $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ s'appelle une cochaîne et les homomorphismes δ^p sont appelés les opérateurs de cobords (ou différentielles).

Exemple 2.3.1
On a : $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \displaystyle\prod_i \mathcal{F}(U_i)$, $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \displaystyle\prod_{i<j} \mathcal{F}(U_{ij})$ et $C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \displaystyle\prod_{i<j<k} \mathcal{F}(U_{ijk})$

- ► $p = 0$, $s \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $s = (s_i)$ avec $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$

$$\delta^1 : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ s \mapsto (\delta^1 s)_{ij} = (s_j - s_i)_{|U_{ij}}$$

- ► $p = 1$, $t \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $t = (t_{ij})$ avec $t_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$

$$\delta^2 : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ t \mapsto (\delta^2 t)_{ijk} = (t_{jk} - t_{ik} + t_{ij})_{|U_{ijk}}$$

Vérifions que $\delta^2 \circ \delta^1 = 0$. Soit $s \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
(\delta^2 \circ \delta^1)(s) = \delta^2(\delta^1 s) &= \big((\delta^1 s)_{jk} - (\delta^1 s)_{ik} + (\delta^1 s)_{ij}\big)_{|U_{ijk}} \\
&= \Big((s_k - s_j)_{|U_{jk}} - (s_k - s_i)_{|U_{ik}} + (s_j - s_i)_{|U_{ij}}\Big)_{|U_{ijk}} \\
&= (s_k - s_j - s_k + s_i + s_j - s_i)_{|U_{ijk}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.2 On a $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ pour tout $p \geq 0$.

Preuve : Soient $s \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et posons $t = \delta^p s$. On a :

$$\begin{aligned}
(\delta^{p+1} t)_{i_0 \cdots i_{p+1}} &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k t_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_{p+1} | U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \sum_{l=0, l \neq k}^{p+1} (-1)^{a(l,k)} s_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots \hat{i}_l \cdots i_{p+1} | U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} \\
&\qquad \text{avec } (-1)^{a(l,k)} = \begin{cases} (-1)^l & \text{si} \quad l < k \\ (-1)^{l+1} & \text{si} \quad l > k \end{cases} \\
&= \sum_{l<k} (-1)^{l+k} s_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots \hat{i}_l \cdots i_{p+1} | U_{i_0 \cdots i_{p+1}}} - \sum_{l>k} (-1)^{l+k} s_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots \hat{i}_l \cdots i_{p+1} | U_{i_0 \cdots i_{p+1}}}
\end{aligned}$$

Nous pouvons voir qu'il y'a autant de l qui sont plus petits que k que de l qui sont plus grands que k. De plus, chaque terme $s_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots \hat{i}_l \cdots i_{p+1}}$ apparaît deux fois et avec des signes opposés dans la somme. Par conséquent, la somme totale vaut zéro i.e. on a $\delta^{p+1} t = 0$. Ainsi, nous avons $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ pour tout $p \geq 0$.

❑

On note

$$Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(\delta^{p+1}) = \{s \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid \delta^{p+1} s = 0\}$$

le groupe des $p-$cocycles à valeurs dans $\mathcal{F}$ et

$$B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Im}(\delta^p) = \{\delta^p s \mid s \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}$$

le groupe des $p-$cobords à valeurs dans $\mathcal{F}$.

De $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$, on voit que $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est un sous-groupe de $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Définition 2.3.4 On appelle le $p-$ième groupe de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ relativement à $\mathcal{U}$ que l'on note $\mathrm{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ le groupe quotient

$$\mathrm{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

Proposition 2.3.3 Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. On a :

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Preuve :

◇ Le groupe $\mathrm{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est le noyau de la première différentielle i.e. $\mathrm{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \ker \delta^1$ avec

$$\delta^1 : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}),\ s \mapsto (\delta^1 s)_{ij} = (s_j - s_i)_{|U_{ij}}.$$

Soit $s \in \mathrm{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$. On a $s \in \ker \delta^1$, donc $s_i = s_j$ sur U_{ij}. Comme $\mathcal{F}$ est un faisceau les s_i se recollent en une section globale $s \in \Gamma(X,\mathcal{F})$.

◇ Considérons l'application $\phi : \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \ker \delta^1,\ s \mapsto (s_{|U_i})$. L' application ϕ est bien définie et est bijective.

❑

Il est clair que ces groupes de cohomologie dépendent du recouvrement $\mathcal{U}$. On définit la cohomologie de Čech de l'espace X comme la limite inductive [3] des groupes $\mathrm{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ sur tous les recouvrements ordonnés par la relation de raffinement :

$$\mathrm{H}^p(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \mathrm{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Proposition 2.3.4 Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X. Alors, l'application suivante

$$\Delta^1 : \mathrm{H}^0(X,\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F})$$ [4]

est bien définie.

Preuve :

On sait déjà que $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{H}) = \Gamma(X,\mathcal{H})$. Soit $h \in \mathrm{H}^0(X,\mathcal{H})$. Puisque, ψ est surjective, il existe donc un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X et des cochaînes $(g_i) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{G})$ telles que

$$\psi(U_i)(g_i) = h_{|U_i} \text{ pour chaque } i \in I.$$

Par conséquent, sur $U_i \cap U_j$, on a : $g_j - g_i \in \ker(\psi(U_{ij}))$. Donc, il existe une section $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ telle que

$$\varphi(U_{ij})(f_{ij}) = g_j - g_i.$$

Sur $U_i \cap U_j \cap U_k$, on a : $\varphi(U_{ijk})(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$ ce qui entraîne que $f_{ij} + f_{jk} - f_{ik} = 0$, i.e.

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Ainsi, on pose $\Delta^1(h)_{|U_{ij}} = \overline{(f_{ij})}$, où $\overline{(f_{ij})}$ représente la classe de (f_{ij}), il s'en suit que Δ^1 est bien définie malgré les nombreux choix qu'on a pu faire.

❑

3. Pour plus de détails concernant cette limite inductive on renvoit le lecteur à [2] ou à [12].
4. Cette application est appelée une flèche de liaison (ou de connexion).

Théorème 2.3.1 Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement d'ouvert fini de X. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens. Alors il existe une suite exacte longue de groupes de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}) &\xrightarrow{\varphi^0} \mathrm{H}^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^0} \mathrm{H}^0(X,\mathcal{H}) \\ \xrightarrow{\Delta^1} \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F}) &\xrightarrow{\varphi^1} \mathrm{H}^1(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^1} \mathrm{H}^1(X,\mathcal{H}) \to \\ &\vdots \\ \xrightarrow{\Delta^p} \mathrm{H}^p(X,\mathcal{F}) &\xrightarrow{\varphi^p} \mathrm{H}^p(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^p} \mathrm{H}^p(X,\mathcal{H}) \cdots \end{aligned}$$

Preuve : (Voir [5], Chapitre 3, section 2)

❑

Théorème 2.3.2 Soient V une variété affine, $A = \Gamma(V)$, M un $A-$module et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ le faisceau quasi-cohérent associé. Alors, on a

$$\mathrm{H}^p(V,\mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad p > 0.$$

Preuve :
Soit un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de V avec $U_i = D(f_i)$ ouvert standard, $f_i \in A$ et $f_i \neq 0$. Afin de simplifier nos calculs on suppose que M est sans torsion i.e. si $a \in A$ et $m \in M$ avec $am = 0$, on a $a = 0$ ou $m = 0$.

◇ Pour $p = 1$:
Soit $\alpha = (\alpha_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$. On veut montrer que α est un élément de $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ c'est-à-dire $\alpha_{ij} = \gamma_j - \gamma_i$. On a $\delta^2\alpha = 0$, ceci entraîne que

$$\alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = 0 \qquad ①$$

sur U_{ijk} avec $i < j < k$. Pour que la relation ① soit vraie pour tous i, j, k, on pose $\alpha_{ii} = 0$ pour tout i et $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ pour tout $i > j$. Avec cette condition on vérifie que la relation ① est valable pour tous les triplets (i, j, k). Comme $\alpha_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \widetilde{M}) = M_{f_if_j}$, on peut écrire $\alpha_{ij} = \dfrac{\beta_{ij}}{(f_if_j)^m}$ avec $\beta_{ij} \in M$ en prenant le même exposant m par finitude. Alors, la relation ① s'écrit

$$\frac{\beta_{jk}}{(f_jf_k)^m} - \frac{\beta_{ik}}{(f_if_k)^m} + \frac{\beta_{ij}}{(f_if_j)^m} = 0$$

sur U_{ijk} dans $M_{f_if_jf_k}$. Dès lors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(f_if_jf_k)^N(f_i^m\beta_{jk} - f_j^m\beta_{ik} + f_k^m\beta_{ij}) = 0$$

dans M. Comme M est sans torsion on a

$$f_i^m\beta_{jk} - f_j^m\beta_{ik} + f_k^m\beta_{ij} = 0$$

dans M. Alors on peut écrire $f_k^m \alpha_{ij}$ sous la forme

$$f_k^m \alpha_{ij} = f_k^m \frac{\beta_{ij}}{(f_i f_j)^m} = \frac{\beta_{kj}}{f_j^m} - \frac{\beta_{ki}}{f_i^m}.$$

Le fait que les $D(f_k) = D(f_k^m)$ recouvrent V signifie qu'on a une partition de l'unité i.e. il existe $a_k \in A$ tels que l'on ait $1 = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k^m$. La fonction $a_k \beta_{kj}$ est définie sur U_{kj} comme l'est β_{kj} qui s'entend en une section de $\mathcal{F}$ sur U_j en lui donnant la valeur zéro hors de U_{kj}. Par conséquent, on pose pour tout j :

$$\gamma_j = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\beta_{kj}}{f_j^m}.$$

Ainsi sur $U_i \cap U_j$ on a :

$$\begin{aligned}
\gamma_j - \gamma_i &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\beta_{kj}}{f_j^m} - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\beta_{ki}}{f_i^m} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (\frac{\beta_{kj}}{f_j^m} - \frac{\beta_{ki}}{f_i^m}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k f_k^m \alpha_{ij} \\
&= \alpha_{ij}
\end{aligned}$$

Donc, α est un cobord i.e. α est bien dans $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, ce qui donne $\mathrm{H}^1(V, \mathcal{F}) = 0$.

◇ Pour $p \geq 1$:
Soit $\alpha = (\alpha_{i_0 \ldots i_p}) \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. On écrit alors

$$\alpha_{i_0 \ldots i_p} = \frac{\beta_{i_0 \ldots i_p}}{(f_{i_0} \cdots f_{i_p})^m}.$$

On a $\delta^{p+1}\alpha = 0$ d'où $\sum_{t=0}^{p+1} (-1)^t \alpha_{i_0 \cdots \hat{i}_t \cdots i_{p+1}} = 0$ i.e. $\sum_{t=0}^{p+1} (-1)^t \frac{\beta_{i_0 \cdots \hat{i}_t \cdots i_{p+1}}}{(f_{i_0} \cdots f_{i_{p+1}})^m} f_{i_t}^m = 0$. Il existe alors un entier N tel que $\sum_{t=0}^{p+1} (-1)^t (f_{i_0} \cdots f_{i_{p+1}})^N \beta_{i_0 \cdots \hat{i}_t \cdots i_{p+1}} f_{i_t}^m = 0$. Comme M est sans torsion on a $\sum_{t=0}^{p+1} (-1)^t \beta_{i_0 \cdots \hat{i}_t \cdots i_{p+1}} f_{i_t}^m = 0$ et donc on obtient

$$f_k^m \beta_{i_0 \cdots i_p} = \sum_{t=0}^{p} (-1)^t \beta_{k i_0 \cdots \hat{i}_t \cdots i_p} f_{i_t}^m.$$

On fait une partition de l'unité $1 = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k^m$ et on pose

$$\gamma_{i_0 \ldots i_{p-1}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\beta_{k i_0 \ldots i_{p-1}}}{(f_{i_0} \cdots f_{i_{p-1}})^m}.$$

On a :

$$\begin{aligned}(\delta^p\gamma)_{i_0\cdots i_p} &= \sum_{t=0}^{p}(-1)^t\gamma_{i_0\cdots\hat{i}_t\cdots i_p} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{t=0}^{p}(-1)^t \frac{\beta_{ki_0\cdots\hat{i}_t\cdots i_p}}{(f_{i_0}\cdots f_{i_p})^m} f_{i_t}^m \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f_k^m \frac{\beta_{i_0\cdots i_p}}{(f_{i_0}\cdots f_{i_p})^m} = \frac{\beta_{i_0\cdots i_p}}{(f_{i_0}\cdots f_{i_p})^m} = \alpha_{i_0\ldots i_p}\end{aligned}$$

❏

Théorème 2.3.3 Soit X une variété algébrique projective de dimension n et soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. On a pour tout $p > n$

$$\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Preuve : (Voir [5], Chapitre 3, section 2)

❏

Théorème 2.3.4 (Serre)
Soit X une variété algébrique projective et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors

- Pour tout $p \geq 0$, $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F})$ est un $k-$espace vectoriel de dimension finie.
- Il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour $p > 0$ on ait

$$\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F}(n)) = 0.$$

On notera $h^p(X, \mathcal{F})$ ou simplement $h^p\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F})$.

Preuve : (Voir [8], Chapitre 7, section 5)

❏

2.3.2 Caractéristique de l'Euler-Poincaré

Définition 2.3.5 (Caractéristique d'Euler-Poincaré)
Soient X une variété projective et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. On appelle caractéristique d'Euler-Poincaré de X à valeurs dans $\mathcal{F}$, l'entier noté $\chi(X, \mathcal{F})$ (ou simplement $\chi\mathcal{F}$) définit comme suit

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p h^p(X, \mathcal{F}).$$

Précisons que la somme est finie puisque les $h^p(X, \mathcal{F})$ sont finis pour tout entier p et nuls pour $p > \dim X$.

Lemme 2.3.1 Soit une suite exacte de $k-$espaces vectoriels de dimension finie

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0.$$

Alors on a $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim_k A_i = 0$.

Preuve :
On raisonne par récurrence sur n et on utilise la relation entre les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire.

- ◇ Le lemme est trivial pour $n \leq 1$.
- ◇ Pour $n = 2$, on a $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{\varphi} A_1 \xrightarrow{\psi} A_2 \longrightarrow 0$ une suite exacte. Comme ψ est un morphisme surjectif, on a : $\mathrm{Im}\,(\psi) = A_2 = A_1/\ker(\psi)$, or $\ker(\psi) = \mathrm{Im}\,(\varphi)$, donc $A_2 = A_1/\mathrm{Im}\,(\varphi)$. Le morphisme φ étant injectif, on a $\dim_k A_0 = \dim_k \mathrm{Im}\,(\varphi)$. Ainsi, nous obtenons
$$\dim_k A_0 - \dim_k A_1 + \dim_k A_2 = 0$$
donc vrai pour $n = 2$.
- ◇ Admettons ce résultat au rang n et montrons que c'est vrai au rang $n+1$. On a $0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_n \xrightarrow{\psi} A_{n+1} \longrightarrow 0$ une suite exacte. En posant $A'_n = \ker(\psi)$, on construit deux suites exactes :
$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A'_n \longrightarrow 0 \quad \text{et}$$
$$0 \longrightarrow A'_n \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n+1} \longrightarrow 0.$$
En appliquant l'hypothèse de récurrence sur la première suite exacte, on obtient
$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \dim_k A_i + (-1)^n \dim_k A'_n = 0$$
et nous venons de prouver que (le cas $n = 2$)
$$\dim_k A'_n - \dim_k A_n + \dim_k A_{n+1} = 0.$$
En combinant ces deux résultats, nous avons
$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \dim_k A_i = 0.$$

❑

Proposition 2.3.5 Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de faisceaux cohérents sur une variété projective de X, avec les homomorphismes φ et ψ $k-$linéaires. Alors on a
$$\chi(X, \mathcal{G}) = \chi(X, \mathcal{F}) + \chi(X, \mathcal{H}).$$

Preuve :
On applique le lemme 2.3.1 sur la suite exacte longue générée par la suite courte exacte de faisceaux.

❑

Lemme 2.3.2 Soit X une variété algébrique projective. On a
$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X) = k.$$
C'est-à-dire, les seules fonctions globales sont les constantes et donc $h^0\mathcal{O}_X = 1$.

Pour faire la preuve de ce lemme, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.3 Soient $A \subset B$ des anneaux intègres avec B entier sur A[5]. Alors

$$A \text{ est un corps si et seulement si } B \text{ est un corps.}$$

Preuve du lemme 2.3.2 :
L'anneau $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X)$ est intègre. En effet, soient f et g deux éléments de R tels que $fg = 0$. Ceci entraîne que pour tout ouvert affine $U \subset X$, on a $(fg)_{|U} = 0$. Puisque, l'ouvert U est irréductible, alors $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est intègre, ainsi on a, par exemple, $f_{|U} = 0$. Comme U est dense dans X, $f = 0$ sur X.
Par le théorème 2.3.4 de Serre, R est de dimension finie sur k, d'où R est entier sur k donc R est un corps. Il en résulte que R est algébrique sur k mais ce dernier étant algébriquement clos, donc $R = k$.

❑

5. B entier sur A signifie pour tout élément de B, il existe un polynôme unitaire à coefficients dans A dont l'élément est un zéro.

Chapitre 3

Théorème de Riemann-Roch

On désignara par k un corps algébriquement clos.

3.1 Schéma fini

Définition 3.1.1 (Schéma fini)
Un schéma fini $(Z, \mathcal{O}_Z)$ est un espace annelé où Z est un ensemble fini discret et, pour chaque point (ouvert) $P \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_Z(P)$ est une $k-$algèbre locale de dimension finie comme $k-$espace vectoriel.

Cette dimension que l'on note $\mu_P(Z)$ est appelée la multiplicité de Z en P.

Exemple 3.1.1 Soient $F, G \in k[X, Y]$ deux polynômes sans facteur commun et Z l'ensemble fini $\mathcal{V}(F, G)$. Notons $I = (F, G)$ l'idéal engendré par F et G. On munit Z d'une structure d'espace annelé en définissant $\mathcal{O}_Z$ comme suit : pour tout ouvert U de Z, on pose

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Z) = \prod_{P \in U} \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F, G).$$

Alors $(Z, \mathcal{O}_Z)$ est un schéma fini. L'anneau local $\mathcal{O}_P(Z)$ de Z en P est donné par

$$\mathcal{O}_P(Z) = \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F, G)$$

et on a :

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \prod_{P \in Z} \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F, G).$$

Définition 3.1.2 Avec les notations de 3.1.1, on définit la multiplicité d'intersection de F et G en P que l'on note $\mu_P(F, G)$ comme la multiplicité du schéma fini $Z = \mathcal{V}(F, G)$ en P i.e.

$$\mu_P(F, G) = \dim_k \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F, G).$$

Remarque 3.1.1 On a : $\dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \sum_{P \in \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G)} \mu_P(F, G)$.

Théorème 3.1.1 (Bézout)
Soient $F, G \in k[X, Y, T]$ deux polynômes homogènes sans facteur commun, de degrés respectifs s et t. On a

$$\sum_{P \in \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G)} \mu_P(F, G) = st.$$

Preuve : (Voir [8], Chapitre 6, section 2)

❑

Définition 3.1.3 Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective irréductible. On appelle degré de $\mathcal{C}$ le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ (comptés avec leurs multiplicités) avec un hyperplan H ne contenant pas $\mathcal{C}$.

Définition 3.1.4 Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective irréductible. On appelle genre de $\mathcal{C}$ le nombre entier positif ou nul g défini par la formule

$$g = \dim_k \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) = h^1 \mathcal{O}_{\mathcal{C}}.$$

3.2 Les versions du théorème de Riemann-Roch

3.2.1 Version 1

Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective et irréductible. On pose $S = k[X, Y, T]$ et $A = \Gamma(\mathcal{C}) = S/\mathfrak{I}(\mathcal{C})$.

Proposition 3.2.1 Soit H un hyperplan ne contenant pas $\mathcal{C}$. On note h l'équation de H et $\overline{h}$ l'image de h dans A (i.e. $\overline{h}$ est la restriction de h à $\mathcal{C}$). La multiplication par $\overline{h}$ dans A induit alors la suite exacte de $S-$modules gradués

$$0 \longrightarrow A(-1) \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow A/(\overline{h}) \longrightarrow 0.$$

Preuve :
La seule chose à vérifier est l'injectivité de φ. L'homomorphisme φ est défini comme suit

$$\varphi : A(-1) \longrightarrow A, \quad f \longmapsto f.\overline{h}$$

Puisque A est intègre, on voit alors il suffit de montrer que $\overline{h}$ est non nulle dans A. Comme H ne contient pas $\mathcal{C}$, alors $h \notin \mathfrak{I}(\mathcal{C})$, il s'en suit que $\overline{h}$ est non nulle dans A. On conclut que φ est injectif.

❑

Théorème 3.2.1 (Riemann-Roch 1)
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective irréductible, de degré d et de genre g. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = nd + 1 - g.$$

De plus, pour n grand on a

$$h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = 0$$

et dans ce cas on a :

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = nd + 1 - g.$$

Preuve :

◇ Soit H un hyperplan ne contenant pas $\mathcal{C}$. Notons h l'équation de H et $\overline{h}$ l'image de h dans A. Posons $Z = \mathcal{C} \cap H$. Puisque H ne contient pas $\mathcal{C}$, alors cette intersection est finie. Ainsi, on munit Z d'une structure de schéma fini en définissant $\mathcal{O}_Z$ comme le faisceau associé à la $k-$algèbre graduée $A/(\overline{h})$ i.e. $\mathcal{O}_Z = \widetilde{A/(\overline{h})}$.
On sait que la suite

$$0 \longrightarrow A(-1) \longrightarrow A \longrightarrow A/(\overline{h}) \longrightarrow 0$$

est exacte.
Par passage aux faisceaux, on a :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

En tensorisant par $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n)$ on a :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(n) \longrightarrow 0$$

En prenant les caractéristiques d'Euler-Poincaré dans cette dernière suite, on a :

$$\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = \chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n-1) + \chi\mathcal{O}_Z(n) \qquad ①$$

Le théorème de Bézout donne la relation suivante $\mathcal{O}_Z(n) = \mathcal{O}_Z$. Ainsi, le terme $\chi\mathcal{O}_Z(n)$ se réduit à $h^0\mathcal{O}_Z$ car $\dim Z = 0$, or on a $h^0\mathcal{O}_Z = \dim_k \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = d$.
Par conséquent ① devient

$$\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = \chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n-1) + d$$

Par récurrence sur n on obtient

$$\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = nd + \chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}.$$

Par définition on a $\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n)$ et $\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}} = h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}} - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}} = 1 - g$; donc

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = nd + 1 - g.$$

◇ Par le théorème 2.3.4 de Serre, il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n)) = 0.$$

Dès lors, pour n grand on a $h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = 0$, par suite

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) = nd + 1 - g.$$

❑

3.2.2 Version 2

3.2.2.1 Le faisceau inversible associé à un diviseur

Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse et irréductible. Nous allons associer à tout diviseur D sur $\mathcal{C}$ un faisceau sur $\mathcal{C}$ noté $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$. Pour cela, considérons $D = \sum n_P P$ un diviseur positif. Nous pouvons associer à ce diviseur un sous-schéma fermé fini de $\mathcal{C}$, que l'on note encore D, dont le support est formé des points P tels que $n_P > 0$ de telle sorte qu'en chaque point la multiplicité de D comme schéma fini soit exactement n_P : il suffit de prendre comme anneau local de D en P l'anneau $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})/(t^{n_P})$ où t est une uniformisante de $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$. Ainsi, on a : $n_P = \mu_P(D)$. Réciproquement, pour un sous-schéma fini Z sur $\mathcal{C}$ donné, on définit le diviseur $\sum \mu_P(Z)P$. Dès lors, on a

$$\chi\mathcal{O}_D = h^0\mathcal{O}_D = \sum_P \mu_P(D) = \sum_P n_P = \deg D$$

Pour tout diviseur D positif sur $\mathcal{C}$, on construit alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{J}_D$ est l'idéal des fonctions régulières qui s'annulent sur D avec les multiplicités prescrites. On sait que $\mathcal{J}_D$ est un faisceau (cf. chapitre 2. l'exemple 2.2.3), ce faisceau est noté $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-D)$ et ses sections sont définies de la manière suivante : pour un ouvert U de $\mathcal{C}$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-D)) = \{f \in k(\mathcal{C}) \,|\, \forall\, P \in U, \mathrm{ord}_P(f) \geq n_P\}.$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$, définies sur U et qui s'annulent en chaque point P avec la multiplicité n_P au moins.

On définit de la même manière le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$ pour un diviseur quelconque $D = \sum n_P P$ sur $\mathcal{C}$: pour un ouvert U de $\mathcal{C}$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = \{f \in k(\mathcal{C}) \,|\, \forall\, P \in U, \mathrm{ord}_P(f) \geq -n_P\}.$$

Les sections globales du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$ peuvent être définies comme suit

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = \{f \in k(\mathcal{C}) \ \,|\, \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}.$$

Remarque 3.2.1

1) Si $D = 0$, on a $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.
   En effet, soit U un ouvert de $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(0)) &= \{f \in k(\mathcal{C}) \,|\, \forall\, P \in U, \mathrm{ord}_P(f) \geq 0\} \\ &= \cap_{P\in U}\mathcal{O}_P(U) \\ &= \Gamma(U) \\ &= \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})\end{aligned}$$

2) Soient D et D' deux éléments de $\mathrm{Div}(\mathcal{C})$. On a

- $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D+D') = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D')$,
- si $D \equiv D'$, alors $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D')$.

3) Supposons que $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^r$. Soit H un hyperplan d'équation h ne contenant pas $\mathcal{C}$. Soit $D = \mathcal{C} \cap H$ le sous-schéma fini intersection de $\mathcal{C}$ et H. On peut considérer D comme un diviseur positif sur $\mathcal{C}$. Alors, les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(1)$ sont isomorphes.
   Pour le voir, considérons un ouvert U de $\mathcal{C}$ et soit $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(1)(U)$. Donc, $f = F/G$ avec $F, G \in \Gamma(\mathcal{C})$ homogènes telle que $\deg(F) = \deg(G) + 1$ et $G \neq 0$ sur U. La fonction f n'est pas rationnelle. On lui associe la section $f/h = (F/G)/h$ qui est une fonction rationnelle dont les pôles sont des points $\mathcal{C} \cap H$ qui sont dans U avec les multiplicités voulues : qui est donc une section de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$.

   Plus généralement, on montre de la même manière la relation $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(nD)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Lemme 3.2.1

1) Soit D un diviseur positif (que l'on peut considérer comme un sous-schéma fini de $\mathcal{C}$). Alors la suite
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$
   est exacte.
2) Soit D un diviseur quelconque, que l'on suppose pouvoir s'écrire sous la forme $D = D_1 + D_2$, avec $D_1 \geq 0$. Alors la suite
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0$$
   est exacte.

Preuve :

1) Il suffit de se référer à la partie 3.2.2.1.
2) Il suffit d'appliquer 1) du lemme 3.2.1 en remplaçant D par D_1 ; puis tensoriser par $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$.

❏

Théorème 3.2.2 (Riemann-Roch 2)
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective, lisse et irréductible de genre g et soit D un diviseur sur $\mathcal{C}$. On a la formule
$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \deg D + 1 - g.$$
De plus, il existe un entier N tel que si $\deg(D) \geq N$ on a
$$h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = 0$$
et dans ce cas on a :
$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \deg D + 1 - g.$$

Preuve :

◇ Décomposons D sous la forme $D = D_1 - D_2$ avec $D_i \geq 0$. Par le point 2) du lemme 3.2.1 on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0$$

ainsi on obtient

$$\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-D_2) + \chi\mathcal{O}_{D_1} \qquad (*)$$

puis en appliquant D_2 toujours dans ce même lemme mais cette fois en 1) on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_{D_2} \longrightarrow 0$$

ce qui entraîne

$$\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}} = \chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(-D_2) + \chi\mathcal{O}_{D_2}. \qquad (**)$$

Par suite $(*)$ et $(**)$ donnent

$$\chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \chi\mathcal{O}_{\mathcal{C}} + \chi\mathcal{O}_{D_1} - \chi\mathcal{O}_{D_2}.$$

C'est-à-dire

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = 1 - g + \deg(D_1) - \deg(D_2) = \deg(D) + 1 - g.$$

◇ Considérons un plongement $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ et H un hyperplan ne contenant pas $\mathcal{C}$. Posons $Z = \mathcal{C} \cap H$ et considérons un diviseur $D_0 = \sum \mu_P(Z)P$. D'après le théorème de Serre et par le point 3) du remarque 3.2.1, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(nD_0)) = \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n)) = 0.$$

Vu ce qui précède, nous avons

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D - n_0D_0) \geq \deg(D - n_0D_0) + 1 - g.$$

Posons $N' = n_0 \deg(D_0) + g$. Supposons que $\deg(D) \geq N'$.

Si cette condition est remplie, on a $h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D - n_0D_0) > 0$, soit $f \in \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D - n_0D_0))$ non nulle. On a $\mathrm{div}(f) + D - n_0D_0 \geq 0$. Posons $D_3 = \mathrm{div}(f) + D - n_0D_0 \geq 0$. Ainsi nous avons $D = D_3 + (n_0D_0 - \mathrm{div}(f))$. En vertu du point 2) du lemme 3.2.1 on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n_0D_0 - \mathrm{div}(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_3} \longrightarrow 0$$

D'après le théorème 2.3.1, cette suite exacte génère une suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n_0D_0 - \mathrm{div}(f))) &\longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{D_3}) \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n_0D_0 - \mathrm{div}(f))) &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{D_3}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme les diviseurs n_0D_0 et $n_0D_0 - \mathrm{div}(f)$ sont équivalents, on déduit par 2) de la remarque 3.2.1 que les faisceaux associés sont isomorphes, donc

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n_0D_0 - \mathrm{div}(f))) = \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n_0D_0)) = 0.$$

Puisque D_3 est fini alors $\mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{D_3}) = 0$. Il s'en suit que $\mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = 0$ d'où

$$h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = 0.$$

En définitive on prend $N = N'$, donc

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \deg D + 1 - g.$$

❑

3.2.3 Version 3

Théorème 3.2.3 (Dualité de Serre)
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse et irréductible. Soit K un diviseur canonique sur $\mathcal{C}$. Alors pour tout diviseur D sur $\mathcal{C}$ l'application suivante

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D))^*$$

est un isomorphisme où $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D))^*$ représente le dual de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D))$.

Preuve : (Voir [5], Chapitre 3, section 7)

❑

Théorème 3.2.4 (Riemann-Roch 3)
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse et irréductible de genre g. Soit K un diviseur canonique sur $\mathcal{C}$. Alors, pour tout diviseur D sur $\mathcal{C}$

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) - h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D) = \deg D + 1 - g.$$

Preuve :
D'après le théorème de Riemann-Roch 2 on a

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) - h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = \deg D + 1 - g. \qquad ①$$

Par le théorème de dualité de Serre on a

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D))^*$$

par conséquent, on obtient

$$\dim_k \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = \dim_k \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D))^*$$

or

$$\dim_k \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D))^* = \dim_k \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D))$$

donc

$$\dim_k \mathrm{H}^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)) = \dim_k \mathrm{H}^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D)) \text{ i.e. } h^1\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) = h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D). \qquad ②$$

En combinant ① et ② nous avons

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D) - h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K-D) = \deg D + 1 - g.$$

❑

3.2.3.1 Conséquences du théorème

Conséquence 3.2.1 Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse et irréductible de genre g. Soit K un diviseur canonique sur $\mathcal{C}$. Alors on a

$$h^0\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(K) = g \text{ et } \deg K = 2g-2.$$

Preuve :
Soit D un diviseur sur $\mathcal{C}$. D'après le théorème Riemann-Roch 3 on a

$$h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(D) - h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(K-D) = \deg D + 1 - g.$$

- ◇ En prenant $D = 0$, on obtient $h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(0) - h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(K-0) = \deg(0)+1-g$, or $h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(0) = 1$ et $\deg(0) = 0$, donc $h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(K) = g$.
- ◇ En prenant ensuite $D = K$, on obtient $h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(K) - h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(K-K) = \deg K + 1 - g$, comme $h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(K) = g$ et $h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(0) = 1$, donc $\deg K = 2g-2$.

❑

Conséquence 3.2.2 Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse et irréductible de genre g. Soit D un diviseur sur $\mathcal{C}$. Si $\deg D \geq 2g-1$, alors

$$h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(D) = \deg D + 1 - g.$$

Preuve :
Soit K un diviseur canonique sur $\mathcal{C}$. Il est clair qu'on a $\deg D \geq \deg K + 1$ c'est-à-dire on a $\deg(K-D) \leq -1$. Soit $f \in \Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(K-D))$ non nulle. Par définition, on a $\mathrm{div}(f) + K - D \geq 0$, donc $\deg(\mathrm{div}(f)) + \deg(K-D) \geq 0$, or $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$, d'où $\deg(K-D) \geq 0$, ceci contredit le fait que $\deg(K-D) \leq -1$, par conséquent $\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C}(K-D)) = 0$ i.e. $h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(K-D) = 0$. Par le théorème de Riemann-Roch 3, on conclut que

$$h^0\mathcal{O}_\mathcal{C}(D) = \deg D + 1 - g.$$

❑

3.3 Applications

Dans cette section, on utilisera les notations de la définition 1.3.14 (cf. chapitre. 1) et le théorème de Riemann-Roch 3 s'écrit alors

$$l(D) - l(K-D) = \deg D + 1 - g.$$

Les applications du théorème de Riemann-Roch sont multiples, on donnera ici quelques exemples. Commençons d'abord par rappeler quelques notions sur les courbes elliptiques.

3.3.1 Courbe elliptique

Définition 3.3.1 On appelle équation de Weierstrass (forme projective) sur k une équation plane de la forme

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

avec les $a_i \in k$.

Remarquons que la courbe $\mathbf{E}$ définie par une telle courbe admet un unique point à l'infini, $\mathcal{O} = (0 : 1 : 0)$

$$\mathbf{E} : Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

Pour $Z \neq 0$, on peut écrire $x = \dfrac{X}{Z}$ et $y = \dfrac{Y}{Z}$ et l'équation de Weierstrass devient (forme affine)

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

avec les $a_i \in k$.
L'ensemble des points $k-$rationnels est

$$E(k) = \{(x, y) \in k^2 \mid y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

Théorème 3.3.1 Soit k un corps tel que $\mathrm{car}(k) > 3$. Alors l'équation de E peut se mettre sous la forme

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

avec $a, b \in k$.

Cette forme est appelée l'équation réduite de Weierstrass.

Preuve :
On a : $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ ce qui s'écrit aussi

$$y^2 + 2y\left(\frac{a_1x}{2} + \frac{a_3}{2}\right) = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6. \qquad ①$$

En ajoutant le terme $\left(\dfrac{a_1x}{2} + \dfrac{a_3}{2}\right)^2$ à chaque membre de ①, on obtient

$$y^2 + 2y\left(\frac{a_1x}{2} + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_1x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 + \left(\frac{a_1x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 \qquad ②$$

En remarquant que le premier membre de ② est un identité remarquable et en dévellopant le second membre, on obtient

$$\left(y + \frac{a_1x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 = x^3 + \left(a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right)x^2 + \left(a_4 + \frac{a_1a_3}{2}\right)x + a_6 + \frac{a_3^2}{4} \qquad ③$$

En posant $y_1 = y + \dfrac{a_1x}{2} + \dfrac{a_3}{2}$, $\alpha = a_2 + \dfrac{a_1^2}{4}$, $\beta = a_4 + \dfrac{a_1a_3}{2}$ et $\lambda = a_6 + \dfrac{a_3^2}{4}$

L'équation ③ devient

$$y_1^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \lambda \qquad ④$$

or on a

$$\left(x + \frac{\alpha}{3}\right)^3 = x^3 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x}{3} + \frac{\alpha^3}{27}$$

ainsi nous avons

$$x^3 + \alpha x^2 = \left(x + \frac{\alpha}{3}\right)^3 - \frac{\alpha^2 x}{3} - \frac{\alpha^3}{27}.$$

En remplaçant l'expression $x^3 + \alpha x^2$ dans ④, on obtient

$$y_1^2 = \left(x + \frac{\alpha}{3}\right)^3 - \frac{\alpha^2 x}{3} + \beta x + \lambda - \frac{\alpha^3}{27} \qquad ⑤$$

En posant $\quad x_1 = x + \frac{\alpha}{3}, \quad A = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$ et $\quad B = \lambda - \frac{\alpha}{3}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{3}\right) - \frac{\alpha^3}{27}$

Enfin l'équation ⑤ devient

$$y_1^2 = x_1^3 + Ax_1 + B$$

Les variables étant muettes, on a donc

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

❑

Définition 3.3.2 Une courbe elliptique est la donnée d'un couple $(E, \mathcal{O})$ où
- E est une cubique irréductible lisse de genre 1,
- $\mathcal{O} \in E$.

Théorème 3.3.2 Soit $(E, \mathcal{O})$ une courbe elliptique définie sur k. Alors il existe des fonctions $x, y \in k(E)$ telles que l'application

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{C}, \qquad \varphi = (x : y : 1)$$

soit un isomorphisme de courbes où

$$\mathcal{C} : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

avec les coefficients $a_i \in k$ et satisfaisant $\varphi(\mathcal{O}) = (0 : 1 : 0)$.

Preuve :
Nous traitons seulement ici la partie qui utilise le théorème de Riemann-Roch. L'objectif est alors de construire l'application φ. Pour une preuve complète de ce théorème i.e. prouver que φ est bien un isomorphisme de courbes et $\varphi(\mathcal{O}) = (0 : 1 : 0)$ on renvoit le lecteur à [4] chapitre 3 section 3. Comme le genre de E est égal à 1, on a pour tout diviseur D sur E

$$l(D) = \deg(D) \quad \text{dès que} \quad \deg(D) \geq 1$$

d'après la conséquence 3.2.2.
Considérons alors $D = \mathcal{O}$. On a $l(\mathcal{O}) = 1$. Plus généralement pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $l(n\mathcal{O}) = n$. Rappelons que nous avons

$$\mathcal{L}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{L}(2\mathcal{O}) \subset \mathcal{L}(3\mathcal{O}) \subset \cdots.$$

- On a $\dim_k \mathcal{L}(\mathcal{O}) = 1$. Comme $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ contient k, alors $\mathcal{L}(\mathcal{O}) = k$ car ces espaces ont même dimension. Ainsi, la fonction constante 1 est une base de $\mathcal{L}(\mathcal{O})$.
- On a $\dim_k \mathcal{L}(2\mathcal{O}) = 2$. On peut alors écrire $\mathcal{L}(2\mathcal{O}) =< 1, f >$ où $f \in k(E)$ qui a un pôle d'ordre ≤ 2 en $\mathcal{O}$. C'est même un pôle d'ordre exactement égal à 2 en $\mathcal{O}$ sinon on aurait $f \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ et dans ce cas f ne serait plus linéairement indépendante à la fonction constante 1.

- On a $\dim_k \mathcal{L}(3\mathcal{O}) = 3$. On peut choisir une fonction $g \in k(E)$ telle que $\{1, f, g\}$ soit une base de $\mathcal{L}(3\mathcal{O})$. Notons que la fonction g a nécessairement un pôle d'ordre 3 en $\mathcal{O}$.

En continuant ce raisonnement, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(4\mathcal{O}) &= < 1, f, g, f^2 > , \\
\mathcal{L}(5\mathcal{O}) &= < 1, f, g, f^2, fg > , \\
\mathcal{L}(6\mathcal{O}) &= < 1, f, g, f^2, fg, f^3 > .
\end{aligned}$$

Remarquons que la fonction $g^2 \in \mathcal{L}(6\mathcal{O})$ et $g^2 \notin \mathcal{L}(5\mathcal{O})$. Donc il existe des constantes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 telles qu'on a

$$g^2 = A_1 + A_2 f + A_3 g + A_4 f^2 + A_5 fg + A_6 f^3 \quad \text{avec } A_i \in k \text{ et } A_6 \neq 0. \quad ①$$

En remplaçant g et f respectivement par $A_6^2 g$ et $A_6 f$ dans ①, puis en divisant par A_6^4, on obtient

$$g^2 - \frac{A_5}{A_6} fg - \frac{A_3}{A_6^2} g = f^3 + \frac{A_4}{A_6^2} f^2 + \frac{A_2}{A_6^3} f + \frac{A_1}{A_6^4}.$$

Ainsi on pose

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{C}, \quad \varphi = (f : g : 1).$$

❑

Conséquence 3.3.1 Toute courbe elliptique est définie par une l'équation de Weierstrass.

Définition 3.3.3 Soit k un corps tel que $\mathrm{car}(k) > 3$. Une courbe elliptique définie sur k notée E est une courbe d'équation affine

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

avec $a, b \in k$ tels que $4a^3 + 27b \neq 0$, à laquelle on rajoute le point $\mathcal{O} = (0 : 1 : 0)$.

3.3.2 Exemples d'applications

Exemples 3.3.1

► Soit $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$. Soit K un diviseur canonique sur $\mathcal{C}$. L'exemple 1.3.3 nous dit qu'il n'y a pas de différentielle holomorphe sur $\mathcal{C}$, d'après la remarque 1.3.3 on a $l(K) = 0$. Ainsi, on déduit de la conséquence 3.2.1 que le genre de $\mathcal{C}$ est nul.
Le théorème de Riemann-Roch 3 donne pour tout divisieur D sur $\mathcal{C}$ la relation

$$l(D) - l(-2P_\infty - D) = \deg D + 1.$$

En particulier, si $\deg(D) \geq -1$, alors

$$l(D) = \deg D + 1.$$

► Considérons une courbe $\mathcal{C}$ irréductible et lisse définie sur $\mathbb{Q}$ d'équation affine :

$$y^2 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

On sait déjà que

$$\mathrm{div}(dx/y) = 0 \text{ i.e. } \mathrm{div}(\omega) = 0.$$

Ainsi, la classe canonique sur $\mathcal{C}$ est triviale, on peut prendre $K = 0$ et donc

$$g = l(K) = h^0 \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(0) = 1.$$

On trouve ainsi que le genre de $\mathcal{C}$ est égal à 1, donc dès que $\deg D \geq 1$ on a

$$l(D) = \deg D.$$

- Soit $P \in \mathcal{C}$. On a alors $l((P)) = 1$.
- Comme $P_\infty \in \mathcal{C}$. On a alors $l(2(P_\infty)) = 2$.
  Plus généralement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $l(n(P_\infty)) = n$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons d'abord introduit des outils fondamentaux pour la compréhension du Théorème de Riemann-Roch. On remarque de nombreuses applications de ce théorème comme illustré par quelques exemples donnés dans la dernière partie. Parmi ces applications on peut citer :

- La construction d'un isomorphisme qui nous a permis de comprendre l'équivalence entre les deux formulations d'une courbe elliptique énoncées dans ce mémoire.
- La détermination du genre d'une courbe dans certains cas particuliers nous intéressant. Il faut remarquer que pour ces cas particuliers on s'est intéressé aussi à déterminer la dimension d'un diviseur en considérant d'abord un diviseur canonique puis un diviseur quelconque. Pour un diviseur quelconque, le théorème de Riemann-Roch nous donne une formule très commode à partir d'un certain rang pour le calcul de sa dimension.
- Une attention particulière est accordée aux courbes irréductibles et lisses. C'est dans ce cadre qu'on a donné des exemples plus explicites de courbes pour lesquelles on a appliqué le théorème de Riemann-Roch pour déterminer le genre et la dimension de quelques systémes linéaires.

Bibliographie

[1] W. Fulton. Algebraic Curves, Benjamin, 1969.

[2] Otto. Forster. Lectures on Riemann surfaces . Coll. «Graduate texts in mathematics» 1981.

[3] R. Godement. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris 1973.

[4] Silvermann. JOSEPH H. The arthmetic of elliptic courves 1986.

[5] R. Harshorne. Algebraic Geometry, Graduate texts in Mathematics 52, Springer-Verlag 1977.

[6] Griffiths. P. et Harris. J. Principles of Algebraic Geometry. Wiley Classics Library. John Wiley Sons, Inc 1994.

[7] Marc. Joye. Introduction élémentaire à la théorie des courbes elliptiques, UCL, Crypto Group Technical Report Series, 1995.

[8] D. Perrin. Geométrie algébrique, Une introduction, Savoirs actuels, InterEditions et CNRS Editions 1995.

[9] J. -P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents, Ann. Math. 61,197 – 278.

[10] I. R. Shafarevich. Basic Algebraic Geometry 1.2. Springer-Verlag, 1994.

[11] C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, volume 10 de cours Spécialisés. Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[12] Warner. FRANK Wilson. Foundations of differentiable manifolds and lie groups 1983.