UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Algèbre

Thème : Morphisme de modules de Hopf relatifs, produit semi-direct et dualité

Présenté par : Christophe Lopez NANGO

Sous la direction de : Dr Thomas GUEDENON

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Oumar SALL	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Thomas GUEDENON	Maître de conférences	Directeur	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur titulaire	Examinateur	UASZ
Mansour SANE	Maître assistant	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2016−2017

MORPHISME DE MODULES DE HOPF RELATIFS, PRODUIT SEMI-DIRECT ET DUALITÉ

Christophe Lopez NANGO

09 décembre 2017

Table des matières

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude à l'**ÉTERNEL DIEU** de grâce, Lui sans qui je ne peux rien faire, pour toute la force, le courage et la persévérance qu'Il m'a donné d'accomplir ce modeste travail.

Que la louange et la gloire Lui reviennent.

La première personne que je tiens à remercier est mon Directeur de mémoire **Thomas GUEDENON**, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les professeurs qui m'ont enseigné en particulier ceux du département de Mathématiques, qui par leurs compétences m'ont soutenu dans la poursuite de mes études.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury **Oumar SALL**, **Marie Salomon SAMBOU** et **Mansour SANE**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon projet en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements s'étendent aussi à **Pape Modou SARR, Ibou GOUDIABY, Amadou BALDE, Joseph MBAYE, El Hadji SOW et Khadidiatou DIATTA,** mes camarades de promotion de Master 2 à l'Université Assane Seck de Ziguinchor.

Mes chaleureux et cordiaux remerciements vont à mon Pasteur et père **Zacharie ETOUNDI**, à ma maman **Angèle** et à mon cousin **Jean Paul DIATTA**, pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

Je ne tarirai pas de reconnaissances à l'endroit de ma bien aimée épouse **Joséphine A. N. NANGO**, pour toute son affection, sa complicité et ses précieux encouragements.

Je n'oublie bien évidemment pas d'adresser une pensée spéciale de gratitude à tous mes merveilleux et aimables frères et sœurs de la Communauté Missionnaire Chrétienne Internationale (**CMCI**) et à tous les membres du Groupe Biblique Universitaire de l'UASZ (**GBU**) pour leurs prières, leurs conseils et encouragements.

Qu'il me soit enfin permis de remercier toute la famille **NANGO**, la famille **DIATTA** à Kandialang, **Mr. Alassane CISSE**, **Mr. Paul GOMIS**, **Mme Judith MBATCHOU** et mon oncle **Benjamin MONTHEIRO** pour leur amour et leur soutien constant et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ

Soient H une algèbre de Hopf projective d'antipode bijective S_H sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$ et A une algèbre de $H-$comodule à droite.
Notre mémoire porte sur l'extension du résultat de H.J. Schneider sur les anneaux d'endomorphisme des modules de Hopf relatifs *[9, Théorème 3.2]* au cas des algèbres de Hopf projectives d'antipode bijective et la connexion entre cette extension et plusieurs théorèmes de dualité d'algèbres de Hopf.
Ce qui a été mis au point ici est que le théorème de H.J. Schneider peut être pratiquement trouvé dans tous les théorèmes de dualité d'algèbres de Hopf.
Il a été montré dans [4] que deux résultats de Ulbrich (qui se combinent pour donner les théorèmes de dualité pour les algèbres de Hopf de dimension finie), sont des cas particuliers du théorème de H.J. Schneider. Dans cette étude, une nouvelle version du théorème de Schneider pour une algèbre de Hopf de dimension infinie a été donnée.

INTRODUCTION

Soient $\mathbb{K}$ anneau commutatif et H une algèbre de Hopf projective (comme $\mathbb{K}-$module) d'antipode S_H sur $\mathbb{K}$.
Nous présentons dans ce mémoire de Master un résultat de C. Menini et S. Raianu sur les modules de Hopf relatifs paru dans *J. Algebra 219, 547-570 (1999).* Ce résultat est une extension du théorème de H.J. Schneider sur les anneaux d'endomorphismes de modules de Hopf relatifs aux algèbres de Hopf projectives d'antipode bijective. De ce résultat découlent plusieurs théorèmes de dualité sur les algèbres de Hopf.

Nous utilisons partout la notation de Sweedler-Heyneman avec sommation et parenthèses omises. Toutes les applications sont supposées $\mathbb{K}-$linéaires et la notation $\otimes$ signifie $\otimes_{\mathbb{K}}$.

Notre étude est composée de trois parties.
Nous rappelons dans la première partie les notions de base de coalgèbre, d'algèbre de Hopf et d'algèbre de $H-$module. Nous avons introduit dans cette partie la notion du produit semi-direct (smash product) et celle des catégories de $A\#H-$modules et de $(A, H)-$modules, où A est une algèbre de $H-$module. Nous parlons dans notre deuxième partie de comodule, de module de Hopf et de module de Hopf relatif. Dans cette partie nous donnons le théorème fondamental des modules de Hopf (Théorème 2.2.2). Nous évoquons aussi dans cette deuxième partie la catégorie des modules de Hopf relatifs et un résultat sur les bimodules de Hopf (Lemme 2.3.3), qui nous est très utile dans la troisième partie. La troisième partie est la section principale de ce travail de mémoire. Dans cette partie, nous étudions d'abord quelques résultats sur les morphismes de modules de Hopf relatifs, sur le produit semi-direct généralisé et nous introduisons le grand produit semi-direct. Ces résultats sont utilisés dans l'étude de l'extension complète du théorème de Schneider. Cette extension est la suivante ;

Théorème 3.2.1 *[7, Théorème 2.1].*
Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S ; A une algèbre de $H-$comodule à droite. Soient $M \in \mathcal{M}_A^H$ et $N \in \mathcal{M}_A$. Alors ;

i) $Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N)) \simeq Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H)$; isomorphisme de H^*-modules à droite.

ii) L'isomorphisme de *i)* induit un morphisme d'algèbres injectif

$$\#(H, END_A(M)) \hookrightarrow End_A^H(M \otimes H).$$

De ce théorème est tiré une nouvelle dualité : Corollaire 3.2.1, impliquant les anneaux d'endomorphismes des modules de Hopf relatifs et le produit semi-direct.

Corollaire 3.2.1 *[7, Corollaire 2.1].*
Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S, A une algèbre de $H-$comodule à droite. Soient $M \in \mathcal{M}_A^H$, où M est un $A-$module de type fini.

i) Alors on a les isomorphismes d'algèbres

$$\#(H, End_A(M)) \simeq End_A^H(M \otimes H)$$

et

$$\#(H, End_A(M))\#H \simeq END_A(M \otimes H).$$

ii) Si de plus $M \in {}_H\mathcal{M}_A^H$, on a l'isomorphisme d'algèbres

$$\#(H, End_A(M)\#H) \simeq End_A^H(M \otimes H).$$

Une autre application de ce résultat est le Corollaire 3.2.2, décrivant le cas où on a une extension $H-$galoisienne.

Corollaire 3.2.2 *[7, Corollaire 2.2].*
Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective, A une algèbre de $H-$comodule à droite et $B = A^{coH}$ telle que A/B soit une extension $H-$galoisienne. Soient $M \in {}_H\mathcal{M}_A^H$ et $N \in \mathcal{M}_A$.

i) On a

$$Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M,N)) \simeq Hom_B(M,N),$$
$$f \longmapsto [m \longmapsto f(m_1)(m_0)],$$

isomorphisme de H^*-modules à droite. Les actions de H^* sur $Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M,N))$ et sur $Hom_B(M,N)$ sont respectivement données par

$$(f.h^*)(h) = h^*(h_2)f(h_1) \quad et \quad (f.h^*)(m) = h^*(m_1)f(m_0).$$

ii) L'isomorphisme dans *i)* induit un morphisme d'algèbres injectif

$$\#(H, END_A(M)) \hookrightarrow End_B(M).$$

iii) On a un isomorphisme d'algèbres

$$\#(H, A) \simeq End_B(A).$$

Chapitre 1

COALGÈBRE, ALGÈBRE DE HOPF ET ALGÈBRE DE H-MODULE

1.1 COALGÈBRE

1.1.1 Algèbre

Définition 1.1.1 *Soit A un ensemble. On dit que A est une $\mathbb{K}-$algèbre (associative unitaire) s'il existe :*

- *deux lois internes :*
$$\begin{array}{rl} ''+'' : & A \times A \longrightarrow A \\ & (a; a') \longmapsto a + a',\ \forall a, a' \in A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} ''\times'' : & A \times A \longrightarrow A \\ & (a; a') \longmapsto a \times a' = aa' \end{array}$$
- *et une loi externe :*
$$\begin{array}{rl} ''.'' : & \mathbb{K} \times A \longrightarrow A \\ & (\lambda; a) \longmapsto \lambda.a = \lambda a,\ \forall a \in A \text{ et } \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

telles que :

i) $(A, +, .)$ *est un $\mathbb{K}-$module,*

ii) $(A, +, \times)$ *est un anneau,*

iii) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \quad \forall a, b \in A, \lambda \in \mathbb{K}.$

On a la définition équivalente suivante qui nous permettra de comprendre la définition d'une coalgèbre.

Définition 1.1.2 *Soit A un $\mathbb{K}-$module. On considère $A \otimes_{\mathbb{K}} A = A \otimes A$ le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$.*
Une $\mathbb{K}-$algèbre associative unitaire A est un triplet du type (A, m_A, μ_A) où A est un $\mathbb{K}-$module et $\begin{array}{rl} m_A : & A \otimes A \longrightarrow A \\ & a \otimes a' \longmapsto aa', \forall a, a' \in A \end{array}$ *et* $\begin{array}{rl} \mu_A : & \mathbb{K} \longrightarrow A \\ & \lambda \longmapsto \lambda 1_A, \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$ *sont des applications $\mathbb{K}-$linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m_A"] \arrow[d, "m_A \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m_A"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m_A"] & \\ \mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "\mu_A \otimes id_A"] \arrow[dr, "id_A"'] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "id_A \otimes \mu_A"'] \arrow[dl, "id_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire,

- $m_A \circ (m_A \otimes id_A) = m_A \circ (id_A \otimes m_A)$ *: c'est l'associativité*

- *et $m_A \circ (id_A \otimes \mu_A) = id_A = m_A \circ (\mu_A \otimes id_A)$.*

L'application m_A est appelée le produit ou la multiplication, l'application μ_A est l'application unité et $\mu_A(1_{\mathbb{K}})$ est l'élément unité de A.

1.1.2 Coalgèbre

Une coalgèbre est la notion duale d'algèbre. On la définit en renversant les flèches dans la définition d'algèbre.

Définition 1.1.3 *Une co-algèbre (ou coalgèbre) C est un triplet $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$; où C est un $\mathbb{K}-$module, $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon_C : C \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications $\mathbb{K}-$linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$
\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "id_C \otimes \Delta_C"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\Delta_C \otimes id_C"] & C \arrow[l, "\Delta_C"] \arrow[u, "\Delta_C"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon_C \otimes id_C"'] \arrow[dr, "id_C \otimes \varepsilon_C"] & \\
\mathbb{K} \otimes C & & C \otimes \mathbb{K}; \\
 & C \arrow[ul, "id_C"] \arrow[ur, "id_C"'] \arrow[uu, "\Delta_C"] &
\end{tikzcd}
$$

ce qui se traduit par :

- *$(\Delta_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = (id_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C$, c'est la co-associativité.*
- *$(id_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C = (\varepsilon_C \otimes id_C) \circ \Delta_C$, c'est la co-unité.*

L'application Δ_C est appelée la co-multiplication ou le co-produit de C et l'application ε_C est appelée la co-unité de C.

1.1.3 Notation de Sweedler-Heyneman

Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre.
Un élément de $C \otimes C$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i$. Pour uniformité d'écriture et par convention, on utilise la notation de Sweedler-Heyneman : Soit $c \in C$, on note

$$\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_1 \otimes c_2 = c_{(1)} \otimes c_{(2)} = c_1 \otimes c_2.$$

Les notations de Sweedler-Heyneman (ou Sweedler) sont très utiles pour faire les calculs dans les coalgèbres.
Dans la suite de tout ce travail, nous utiliserons la notation $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.
Avec cette notation, l'axiome de la co-associativité se traduit par :

$$\Delta_C(c_1) \otimes c_2 = c_1 \otimes \Delta_C(c_2);$$

c'est-à-dire,

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3, \quad \forall c \in C.$$

L'axiome de la co-unité se traduit par :

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2), \quad \forall c \in C.$$

Ainsi pour montrer qu'un $\mathbb{K}-$module C est une $\mathbb{K}-$coalgèbre il suffit de montrer qu'il existe deux applications $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon_C : C \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que : $\forall c \in C$, avec $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$, on a :

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}$$

et

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2).$$

1.1.4 Opposée d'une algèbre et Co-opposée d'une coalgèbre

Définition 1.1.4 *Soient M et N deux $\mathbb{K}-$modules. L'application*

$$\begin{aligned} \tau_{M\otimes N} : \quad & M \otimes N \longrightarrow N \otimes M \\ & m \otimes n \longmapsto n \otimes m, \qquad m \in M, n \in N, \end{aligned}$$

s'appelle application d'échange ou twist map.

- *Soit A une $\mathbb{K}-$algèbre. L'algèbre opposée de A se note A^{op}, elle est égale à A comme $\mathbb{K}-$module et*

  $$\begin{aligned} m_{A^{op}} : \quad & A^{op} \otimes A^{op} \longrightarrow A^{op} \\ & a^o \otimes b^o \longmapsto a^o b^o = (ba)^o, \quad avec \quad a^o, b^o \in A^{op}. \end{aligned}$$

  On a : $m_{A^{op}} = m_A \circ \tau_{A\otimes A}$. Ainsi,

  $$m_{A^{op}}(a^o \otimes b^o) = (m_A \circ \tau_{A\otimes A})(a \otimes b) = m_A(b \otimes a) = ba.$$

- *Soit C une $\mathbb{K}-$coalgèbre. Sa co-opposée notée C^{cop} est le $\mathbb{K}-$module C muni du coproduit*

  $$\Delta_{C^{cop}} : C^{cop} \longrightarrow C^{cop} \otimes C^{cop},$$

  et de la counité $\varepsilon_{C^{cop}} = \varepsilon_C$. On a $\Delta_{C^{cop}} = \tau_{C\otimes C} \circ \Delta_C$.

  En d'autres termes, on a :

  $$\Delta_{C^{cop}}(c) = \tau_{C\otimes C} \circ \Delta_C(c) = \tau_{C\otimes C}(c_1 \otimes c_2) = c_2 \otimes c_1, \quad \forall c \in C.$$

  Munie de ce co-produit, C^{cop} est une $\mathbb{K}-$coalgèbre.

Remarque 1.1.1 *: On dit qu'une coalgèbre C=$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ est cocommutative lorsque $\Delta_C = \Delta_{C^{cop}}$. C'est-à-dire :*

$$\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2 = c_2 \otimes c_1 = \Delta_{C^{cop}}(c), \quad \forall c \in C.$$

1.1.5 Sous-coalgèbre

Définition 1.1.5 *Soit C une $\mathbb{K}-$coalgèbre. Un sous$-\mathbb{K}-$module D de C est une sous-coalgèbre de C si $\Delta_C(D) \subseteq D \otimes D$.*
Ainsi $(D, \Delta_{C_{/D}}, \varepsilon_{C_{/D}})$ est aussi une $\mathbb{K}-$coalgèbre.

1.1.6 Co-idéal

Définition 1.1.6 *Soient C une coalgèbre sur $\mathbb{K}$ et I un sous$-\mathbb{K}-$module de C.On dit que I est un*

- *co-idéal à gauche de C si $\Delta_C(I) \subseteq C \otimes I$,*
- *co-idéal à droite de C si $\Delta_C(I) \subseteq I \otimes C$,*
- *co-idéal de C si $\Delta_C(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C$ et $\varepsilon_C(I) = 0$.*

A partir de maintenant, on dira tout simplement algèbre et coalgèbre au lieu de $\mathbb{K}-$algèbre et $\mathbb{K}-$coalgèbre.

1.1.7 Produit tensoriel de coalgèbres

Définition 1.1.7 *Soient $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $D = (D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ deux coalgèbres.*
On définit deux applications $\mathbb{K}-$linéaires $\Delta_{C\otimes D} : C \otimes D \longrightarrow C \otimes D \otimes C \otimes D$ et $\varepsilon_{C\otimes D} : C \otimes D \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\Delta_{C\otimes D} = (id_C \otimes \tau_{C\otimes D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \quad et \quad \varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D.$$

En d'autres termes, on a :

$$\Delta_{C\otimes D}(c\otimes d) = c_1\otimes d_1\otimes c_2\otimes d_2 \quad et \quad \varepsilon_{C\otimes D}(c\otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d),$$

avec $\Delta_C(c) = c_1\otimes c_2$, $\Delta_D(d) = d_1\otimes d_2$.

Proposition 1.1.1 *Le triplet* $(C\otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$ *ainsi défini est une coalgèbre appelée produit tensoriel des coalgèbres* C *et* D.

1.1.8 Morphisme de coalgèbres

Pour définir les morphismes de coalgèbres, on dualise tout simplement la notion de morphisme d'algèbres. Soient A et B deux algèbres. Un morphisme d'algèbres

$$f : (A; m_A; \mu_A) \longrightarrow (B; m_B : \mu_B)$$

est une application $\mathbb{K}-$linéaire $f : A \longrightarrow B$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B\otimes B \arrow[r, "m_B"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B; \\ \mathbb{K} \arrow[ur, "\mu_B"'] & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$f\circ m_A = \mu_A\circ(f\otimes f) \quad et \quad f\circ\mu_A = \mu_B.$$

En d'autres termes,

$$f(aa') = f(a)f(a') \quad et \quad f(1_A) = 1_B.$$

Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.1.8 *Soient* C *et* D *deux coalgèbres. Une application* $\mathbb{K}-$*linéaire* $f : C \longrightarrow D$ *est un morphisme de coalgèbres si les diagrammes suivants sont commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C\otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D; \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$(f\otimes f)\circ\Delta_C = \Delta_D\circ f \ et\ \varepsilon_D\circ f = \varepsilon_C.$$

Donc f *est un morphisme de coalgèbres si :*

$$f(c)_1\otimes f(c)_2 = f(c_1)\otimes f(c_2) \quad et \quad \varepsilon_D[f(c)] = \varepsilon_C(c) \quad \forall c\in C, \quad avec \quad \Delta_C(c) = c_1\otimes c_2.$$

Lemme 1.1.1 *Soit* $f : C \longrightarrow D$ *un morphisme de coalgèbres. Alors* Imf *est une sous-coalgèbre de* D. *Si* $\mathbb{K}$ *est un corps,* $Kerf$ *est un co-idéal de* C.

Dans une algèbre, un idéal à gauche qui est en même un idéal à droite est un idéal. Dans le cas des coalgèbres, le résultat est complètement différent.

Lemme 1.1.2 *Soit* C *une coalgèbre. Si* I *est un co-idéal à gauche et un co-idéal à droite de* C, *alors* I *est une sous-coalgèbre de* C *sur* $\mathbb{K}$.

1.1.9 Bialgèbre

Lemme 1.1.3 *Soient* (B, m_B, μ_B) *une algèbre et* $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ *une coalgèbre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Δ_B *et* ε_B *sont des morphismes d'algèbres ;*

ii) m_B *et* μ_B *sont des morphismes de coalgèbres ;*

iii)Pour tous $a, b \in B$ *;*

$$\Delta_B(ab) = a_1b_1 \otimes a_2b_2, \quad \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B$$

$$\varepsilon_B(ab) = \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b), \quad \varepsilon_B(1_B) = 1_{\mathbb{K}}.$$

Définition 1.1.9 *Une bi-algèbre (ou bialgèbre)* B *est un quintuplet* $(B, m_B, \mu_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ *tel que* (B, m_B, μ_B) *est une algèbre ;* $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ *est une coalgèbre et l'une des propriétés du Lemme 1.1.3 est satisfaite.*

1.1.10 Sous-bialgèbre et Bi-idéal

Définition 1.1.10 *Soit* B *une bialgèbre.*

i) Un sous−$\mathbb{K}$*−module* D *de* B *est une sous-bialgèbre de* B *s'il est à la fois une sous-algèbre et une sous-coalgèbre de* B*.*

ii) Un sous−$\mathbb{K}$*−module* I *de* B *est un bi-idéal de* B *s'il est à la fois un idéal et un co-idéal de* B*.*

1.1.11 Opposée et Co-opposée d'une bialgèbre

Définition 1.1.11 *Soit* $B = (B, m_B, \mu_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ *une bialgèbre. Alors, on a les bialgèbres suivantes :*

- $B^{op} = (B, m_{op}, \mu_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ *où* $m_{op} = m_A \circ \tau_{B\otimes B}$ *;*
- $B^{cop} = (B, m_B, \mu_B, \Delta^{cop}, \varepsilon_B)$ *où* $\Delta^{cop} = \tau_{B\otimes B} \circ \Delta_B$ *;*
- $B^{op,cop} = (B, m_{op}, \mu_B, \Delta^{cop}, \varepsilon_B)$.

1.1.12 Morphisme de bialgèbres

Définition 1.1.12 *Soient* B *et* B' *deux bialgèbres.*
On dit que $f : B \longrightarrow B'$ *est un morphisme de bialgèbres si* f *est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de coalgèbres.*

Lemme 1.1.4 *Soit* $f : B \longrightarrow B'$ *un morphisme de bialgèbres. Alors* $Kerf$ *est un bi-idéal de* B *et* Imf *est une sous-bialgèbre de* B'*.*

1.1.13 Élément de type goupe et élément primitif

Définition 1.1.13 *Soit* C *une bialgèbre.*
On dit qu'un élément non nul x *de* C *est de type groupe si :*

$$\Delta_C(x) = x \otimes x \text{ et } \varepsilon_C(x) = 1_{\mathbb{K}}.$$

On dit qu'un élément x *de* C *est un élément (g,h)-primitif si :*

$$\Delta_C(x) = g \otimes x + x \otimes h \ \ et \ \varepsilon_C(x) = 0$$

où g et h sont des éléments de type-groupe de C.
On dit qu'un élément x d'une bialgèbre B est un élément primitif si :

$$\Delta_B(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x \ \ et \ \varepsilon_B(x) = 0.$$

Si A est une algèbre, on note ${}_A\mathcal{M}$ la catégorie des $A-$modules à gauche : ses objets sont les $A-$modules à gauche et ses morphismes sont les applications $A-$linéaires à gauche. On définit de même la catégorie $\mathcal{M}_A$ des $A-$modules à droite. On définira plus loin la catégorie des $C-$comodules si C est une coalgèbre.

1.2 ALGÈBRE DE HOPF

Soient (A, m_A, μ_A) une algèbre et $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. On note $Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ l'ensemble des applications $\mathbb{K}-$linéaires de C dans A.

1.2.1 Produit de convolution

Définition 1.2.1 *Soient $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. La convolution est définie par :*

$$f \star g = m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C;$$

ce qui se traduit par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "f \otimes g"] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\
C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "f \star g"'] & A
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, avec la notation de Sweedler, pour tout $c \in C$ on a :

$$(f \star g)(c) = f(c_1)g(c_2).$$

Ce produit est appelé produit de convolution.

Proposition 1.2.1 *Soient (A, m_A, μ_A) une algèbre et $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre.*
Alors $(Hom_{\mathbb{K}}(C, A); \star)$ est une algèbre unitaire d'élément unité $\mu_A \circ \varepsilon_C$. En particulier, le dual $C^* = Hom_{\mathbb{K}}(C, \mathbb{K})$ de C est une algèbre d'élément unité $\mu_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon_C = \varepsilon_C$.

Preuve :

- $Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ est un $\mathbb{K}-$module, car C et A sont des $\mathbb{K}-$modules et $\mathbb{K}$ est commutatif.
  Soient $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. A-t-on $f \star g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$?
  On a :
  $$\begin{aligned} (f \star g)(c + c') &= f[(c + c')_1]g[(c + c')_2]; \qquad \forall c, c' \in C \\ &= f(c_1)g(c_2) + f(c'_1)g(c'_2). \end{aligned}$$
  On a aussi :
  $$(f \star g)(c) + (f \star g)(c') = f(c_1)g(c_2) + f(c'_1)g(c'_2) \qquad \forall c, c' \in C$$
  Donc $f \star g$ est additif. *(1)*

De plus, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, c \in C$,

$$\begin{aligned}
(f \star g)(\lambda c) &= f[(\lambda c)_1]g[(\lambda c)_2] \\
&= f(\lambda c_1)g(c_2) \\
&= \lambda f(c_1)g(c_2) \\
&= \lambda[(f \star g)(c)]; \qquad \text{avec } \Delta_C(\lambda c) = \lambda \Delta_C(c) = \lambda c_1 \otimes c_2;
\end{aligned}$$

d'où $f \star g$ préserve la loi externe . *(2)*

(1) et *(2)* $\Rightarrow$ $f \star g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$.

- *Unité :*

  Soit $f \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. A-t-on :

$$(\mu_A \circ \varepsilon_C) \star f = f = f \star (\mu_A \circ \varepsilon_C)?$$

  Soit $c \in C$; $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$. On a :

$$\begin{aligned}
[(\mu_A \circ \varepsilon_C) \star f](c) &= (\mu_A \circ \varepsilon_C)(c_1)f(c_2) \\
&= \mu_A[\varepsilon_C(c_1)]f(c_2) \\
&= \varepsilon_C(c_1)\mu_A(1_{\mathbb{K}})f(c_2) \\
&= \varepsilon_C(c_1)f(c_2) \\
&= f[\varepsilon_C(c_1)c_2] \\
&= f(c) \\
&= f[c_1\varepsilon_C(c_2)] \text{ ; \textit{(propriété de la co-unité)}} \\
&= f(c_1)\varepsilon_C(c_2) \\
&= f(c_1)\varepsilon_C(c_2)\mu_A(1_{\mathbb{K}}) \\
&= f(c_1)\mu_A[1_{\mathbb{K}}\varepsilon_C(c_2)] \\
&= f(c_1)\mu_A[1_{\mathbb{K}}\varepsilon_C(c_2)] \\
&= f(c_1)\mu_A[\varepsilon_C(c_2)] \\
&= f(c_1)(\mu_A \circ \varepsilon_C)(c_2) \\
&= [f \star (\mu_A \circ \varepsilon_C)](c).
\end{aligned}$$

  On a bien $f \star (\mu_A \circ \varepsilon_C) = f = (\mu_A \circ \varepsilon_C) \star f$, $\forall f \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$.

  Donc $\mu_A \circ \varepsilon_C$ est l'unité de $Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ pour la loi $''\star''$.

- *Associativité :*

  Soient $f, g, h \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. A-t-on :

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)?$$

  Soit $c \in C$. On a :

$$\begin{aligned}
[(f \star g) \star h](c) &= (f \star g)(c_1)h(c_2) \\
&= f(c_{11})g(c_{12})h(c_2) \\
&= f(c_1)g(c_2)h(c_3) \qquad \textit{(i)} \\
[f \star (g \star h)](c) & \; f(c_1)(g \star h)(c_2) \\
&= f(c_1)g(c_{21}h(c_{22}) \\
&= f(c_1)g(c_2)h(c_3) \qquad \textit{(ii)}
\end{aligned}$$

  (i) et *(ii)* $\Rightarrow$ $[(f \star g) \star h](c) = [f \star (g \star h)](c)$; $\forall f, g, h \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ et $\forall c \in C$

  Donc $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$, d'où *l'associativité.*

- *Distributivité de la loi $''\star''$ par rapport à l'addition :*

  Soient $f, g, h \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ et $c \in C$. On a :

$$\begin{array}{rl}
[f\star(g+h)](c) & = f(c_1)(g+h)(c_2) \\
 & = f(c_1)[g(c_2)+h(c_2)] \\
 & = f(c_1)g(c_2)+f(c_1)h(c_2) \\
 & = (f\star g)(c)+(f\star h)(c) \\
\text{Donc } f\star(g+h) = & f\star g+f\star h\text{; d'où la } \textit{distributivité} \text{ à gauche.} \\
[(g+h)\star f](c) & = (g+h)(c_1)f(c_2) \\
 & = [g(c_1)+h(c_1)]f(c_2) \\
 & = g(c_1)f(c_2)+h(c_1)f(c_2) \\
 & = (g\star f)(c)+(h\star f)(c) \\
\text{Donc } (g+h)\star f = & g\star f+h\star f\text{; d'où la } \textit{distributivité} \text{ à droite.}
\end{array}$$

- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. A-t-on :

$$\lambda(f\star g) = (\lambda f)\star g = f\star(\lambda g)?$$

Soit $c \in C$.

$$\begin{array}{rl}
[\lambda(f\star g)](c) & = \lambda[(f\star g)(c)] \\
 & = \lambda[f(c_1)g(c_2)] \\
 & = [\lambda f(c_1)]g(c_2) \\
 & = (\lambda f)(c_1)g(c_2) \\
 & = [(\lambda f)\star g](c)\text{; d'où } \lambda(f\star g) = (\lambda f)\star g. \quad \textit{(a)}
\end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{rl}
[\lambda(f\star g)](c) & = \lambda[(f\star g)(c)] \\
 & = \lambda[f(c_1)g(c_2)] \\
 & = f(c_1)[\lambda(g(c_2))] \\
 & = f(c_1)[(\lambda g)(c_2)] \\
 & = f(c_1)(\lambda g)(c_2) \\
 & = [f\star(\lambda g)](c)\text{; d'où } \lambda(f\star g) = f\star(\lambda g). \quad \textit{(b)}
\end{array}$$

(a) et *(b)* $\Rightarrow \lambda(f\star g) = (\lambda f)\star g = f\star(\lambda g); \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

$(Hom_{\mathbb{K}}(C, A); \star)$ est donc une algèbre d'unité $\mu_A \circ \varepsilon_C$.■

Remarque 1.2.1 *Dans la proposition précédente, si $C = A$ est une bialgèbre, alors $(Hom_{\mathbb{K}}(A, A), \star, \mu_A \circ \varepsilon_A) = (End_{\mathbb{K}}(A), \star, \mu_A \circ \varepsilon_A)$ l'ensemble des endomorphismes de A est une algèbre.*

Corollaire 1.2.1 *Soit (A, m_A, μ_A) une algèbre de dimension finie.*
Alors son dual $A^* = Hom_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})$ est une coalgèbre :
le co-produit : $\Delta_{A^*} = m_A^* : A^* \longrightarrow (A \otimes A)^* \approx A^* \otimes A^*$,
on a : $\Delta_{A^*}(f) = f_1 \otimes f_2, \quad \forall f \in A^*$. Donc on a :

$$(\Delta_{A^*}(f))(x \otimes y) = (f_1 \otimes f_2)(x \otimes y) = f_1(x)f_2(y) = f(xy), \quad \forall c \in C$$

et $\varepsilon_{A^*} = \mu_A^* : A^* \longrightarrow \mathbb{K}^* = \mathbb{K}$ est définie par :

$$\varepsilon_{A^*}(f) = f(1_A), \quad \forall f \in A^*.$$

Preuve :

Soit A une algèbre de dimension finie. Donc $A^* \otimes A^* \approx (A \otimes A)^*$. Il reste à de montrer que

$$(\Delta_{A^*} \otimes id_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} = (id_{A^*} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} \quad \textit{et} \quad (\varepsilon_{A^*} \otimes id_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} = (id_{A^*} \otimes \varepsilon_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}.$$

Soient $f \in A^*$ et $x, y, z \in A$.

$$\begin{array}{lll}
\{[(\Delta_{A^*} \otimes id_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}](f)\}(x \otimes y \otimes z) & = [(\Delta_{A^*} \otimes id_{A^*})(f_1 \otimes f_2)](x \otimes y \otimes z) & \\
& = [\Delta_{A^*}(f_1) \otimes f_2](x \otimes y \otimes z) & \\
& = [f_{11} \otimes f_{12} \otimes f_2](x \otimes y \otimes z) & \\
& = (f_1 \otimes f_2)((xy) \otimes z) & \\
& = f((xy)z) & \\
& = f(xyz). & (a) \\
\{[(id_{A^*} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}](f)\}(x \otimes y \otimes z) & = [(id_{A^*} \otimes \Delta_{A^*})(f_1 \otimes f_2)](x \otimes y \otimes z) & \\
& = [f_1 \otimes \Delta_{A^*}(f_2)](x \otimes y \otimes z) & \\
& = [f_1 \otimes f_{21} \otimes f_{22}](x \otimes y \otimes z) & \\
& = [f_1 \otimes f_2](x \otimes (yz)) & \\
& = f(x(yz)) & \\
& = f(xyz). & (b)
\end{array}$$

$$(a) \text{ et } (b) \quad \Rightarrow (\Delta_{A^*} \otimes id_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} = (id_{A^*} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} \qquad (i)$$

Soient $f \in A^*$ et $x \in A$, on a :

$$\begin{array}{lll}
[(\varepsilon_{A^*} \otimes id_{A^*})(\Delta_{A^*}(f))](x) & = [(\varepsilon_{A^*} \otimes id_{A^*})(f_1 \otimes f_2)](x) & \\
& = [\varepsilon_{A^*}(f_1) \otimes f_2](x) & \\
& = f_1(1_A) \otimes f_2(x) & \\
& = f_1(1_A) f_2(x) & \\
& = f(1_A x) & \\
& = f(x) & (c) \\
[(id_{A^*} \otimes \varepsilon_{A^*})(\Delta_{A^*}(f))](x) & = [(id_{A^*} \otimes \varepsilon_{A^*})(f_1 \otimes f_2)](x) & \\
& = [f_1 \otimes \varepsilon_{A^*}(f_2)](x) & \\
& = f_1(x) \otimes f_2(1_A) & \\
& = f(x 1_A) & \\
& = f(x) & (d)
\end{array}$$

$$(c) \text{ et } (d) \quad \Rightarrow (\varepsilon_{A^*} \otimes id_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} = (id_{A^*} \otimes \varepsilon_{A^*}) \circ \Delta_{A^*} \qquad (ii)$$

D'après *(i)* et *(ii)* A^* est une coalgèbre. ■

Lemme 1.2.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit C une $\mathbb{K}-$bialgèbre de dimension finie. Alors $C^* = (C^*, m_{C^*}, \mu_{C^*}, \Delta_{C^*}, \varepsilon_{C^*})$ est une bialgèbre.*

Preuve : C est une bialgèbre de dimension finie. donc :
$(C^*, m_{C^*}, \mu_{C^*})$ est une algèbre et
$(C^*, \Delta_{C^*}, \varepsilon_{C^*})$ est une coalgèbre.
Il reste à montrer que Δ_{C^*} et ε_{C^*} sont des morphismes d'algèbres. Il reste à montrer que

$$\Delta_{C^*}(f \star g) = \Delta_{C^*}(f)\Delta_{C^*}(g), \qquad \Delta_{C^*}(\varepsilon_C) = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_C,$$

$$\varepsilon_{C^*}(f \star g) = \varepsilon_{C^*}(f)\varepsilon_{C^*}(g) \quad et \quad \varepsilon_{C^*}(\varepsilon_C) = 1_{\mathbb{K}} \quad \forall f, g \in C^*.$$

Soient $f, g \in C^*$ et $a, b \in C$.

$$\begin{array}{rl}
[\Delta_{C^*}(f\star g)](a\otimes b) & = [(f\star g)_1\otimes (f\star g)_2](a\otimes b)\\
& = (f\star g)_1(a)\otimes (f\star g)_2(b)\\
& = (f_1\star g_1)(a)\otimes (f_2\star g_2)(b)\\
& = f_1(a_1)g_1(a_2)\otimes f_2(b_1)g_2(b_2)\\
& = f_1(a_1)g_1(a_2)f_2(b_1)g_2(b_2)\\
& = f_1(a_1)f_2(b_1)g_1(a_2)g_2(b_2)\\
& = (f_1\otimes f_2)(a_1\otimes b_1)(g_1\otimes g_2)(a_2\otimes b_2)\\
& = (f_1\otimes f_2)((a\otimes b)_1)(g_1\otimes g_2)((a\otimes b)_2)\\
& = [(f_1\otimes f_2)\star (g_1\otimes g_2)](a\otimes b)\\
& = [\Delta_{C^*}(f)\Delta_{C^*}(g)](a\otimes b).\\
\text{Donc} & \Delta_{C^*}(f\star g) = \Delta_{C^*}(f)\Delta_{C^*}(g).\\
\Delta_{C^*}(\varepsilon_C) & = \varepsilon_C\otimes\varepsilon_C;\text{ car } \varepsilon_C \text{ est un morphisme d'algèbre.}\\
\text{On a aussi :} & \\
\varepsilon_{C^*}(f\star g) & = (f\star g)(1_C)\\
& = f(1_C)g(1_C)\\
& = \varepsilon_{C^*}(f)\varepsilon_{C^*}(g)\\
\text{et} & \\
\varepsilon_{C^*}(\varepsilon_C) & = \varepsilon_C(1_C)\\
& = 1_{\mathbb{K}}.
\end{array}$$

Nous venons de montrer que Δ_{C^*} et ε_{C^*} sont des morphismes d'algèbres. Donc C^* est une bialgèbre.■

Définition 1.2.2 *Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ une bialgèbre. On considère $End_{\mathbb{K}}(H)$ l'ensemble des endomorphismes de H.Son élément unité est $\mu_H\circ\varepsilon_H$.*
On appelle antipode de H l'unique inverse (s'il existe) de id_H noté S_H dans $End_{\mathbb{K}}(H)$. Donc $S_H \in End_{\mathbb{K}}(H)$ et

$$S_H\star id_H = \mu_H\circ\varepsilon_H = id_H\star S_H.$$

On appelle algèbre de Hopf, toute bialgèbre possédant une antipode.
On note alors $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ l'algèbre de Hopf d'antipode S_H.

1.2.2 Formule de l'antipode

Soit H une algèbre de Hopf d'antipode S_H. Donc :

$$S_H\star id_H = \mu_H\circ\varepsilon_H = id_H\star S_H.$$

On a : $\forall h\in H$;

$$(S_H\star id_H)(h) = \mu_H\circ\varepsilon_H(h)$$
$$S_H(h_1)id_H(h_2) = \mu_H(\varepsilon_H(h))$$
$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})$$
$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H.$$

De même :

$$(id_H\star S_H)(h) = (\mu_H\circ\varepsilon_H)(h)$$
$$id_H(h_1)S_H(h_2) = \mu_H(\varepsilon_H(h))$$
$$h_1S_H(h_2) = \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})$$
$$h_1S_H(h_2) = \varepsilon_H(h)1_H;$$

d'où la formule :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

1.2.3 Propriétés de l'antipode

Théorème 1.2.1 *Soit H une algèbre de Hopf d'antipode S_H.*

i) $S_H(gh) = S_H(h)S_H(g), \quad \forall g, h \in H$ *et* $S_H(1_H) = 1_H$.*On dit que* S_H *est un antimorphisme d'algèbres.*

ii) $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H$ *et pour tout* $h \in H$,

$$\Delta_H(S_H(h)) = S_H(h_2) \otimes S_H(h_1).$$

iii) Si H est commutative ou co-commutative alors :

$$S_H^2 = id_H, \text{ c'est-à-dire, } S_H^{-1} = S_H.$$

Preuve :

i) Soient $g, h \in H$. A-t-on : $S_H(gh) = S_H(h)S_H(g)$?

$$\begin{aligned}
S_H(gh) &= S_H[\varepsilon_H((gh)_1)(gh)_2] \\
&= S_H[\varepsilon_H(g_1h_1)(g_2h_2)] \\
&= \varepsilon_H(g_1h_1)S_H(g_2h_2) \\
&= \varepsilon_H(g_1)\varepsilon_H(h_1)S_H(g_2h_2) \\
&= \varepsilon_H(g_1)\varepsilon_H(h_1)1_H S_H(g_2h_2) \\
&= \varepsilon_H(g_1)S_H(h_{11})h_{12}S_H(g_2h_2) \\
&= S_H(h_{11})\varepsilon_H(g_1)1_H h_{12}S_H(g_2h_2) \\
&= S_H(h_{11})S_H(g_{11})g_{12}h_{12}S_H(g_2h_2) \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)g_2h_2S_H(g_3h_3) \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)(gh)_2S_H((gh)_3) \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)\varepsilon_H((gh)_2 1_H \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)\varepsilon_H(g_2)\varepsilon_H(h_2)1_H \\
&= S_H(h_1\varepsilon_H(h_2))S_H(g_1\varepsilon_H(g_2))1_H \\
&= S_H(h)S_H(g).
\end{aligned}$$

$\Delta_H(1_H) \quad = 1_H \otimes 1_H$. Donc :

$S_H(1_H) \quad = 1_H S_H(1_H) = \varepsilon_H(1_H)1_H = 1_H$

ou bien

$S_H(1_H) \quad = S_H(1_H)1_H = 1_H\varepsilon_H(1_H) = 1_H$

d'où $\quad S_H(1_H) = 1_H$.

ii) Soit $h \in H$. A-t-on $(\varepsilon_H \circ S_H)(h) = \varepsilon_H(h)$?

$$\begin{aligned}
\varepsilon_H(S_H(h)) &= \varepsilon_H[S_H(h_1\varepsilon_H(h_2))] \\
&= \varepsilon_H[S_H(h_1)\varepsilon_H(h_2)] \\
&= \varepsilon_H(S_H(h_1))\varepsilon_H(h_2) \\
&= \varepsilon_H(S_H(h_1)h_2) \\
&= \varepsilon_H(\varepsilon_H(h)1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_H(1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)
\end{aligned}$$

Soit $h \in H$. A-t-on $\Delta_H(S_H(h)) = S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)$?

$$
\begin{aligned}
S_H(h_2)\otimes S_H(h_1) &= S_H(h_{12}\varepsilon_H(h_{22}))\otimes S_H(h_1)\\
&= S_H(h_2\varepsilon_H(h_3))\otimes S_H(h_1)\\
&= S_H(h_2)\varepsilon_H(h_3)1_H\otimes S_H(h_1)1_H\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)][\varepsilon_H(h_3)1_H\otimes 1_H]\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)][\varepsilon_H(h_3)\Delta_H(1_H)]\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)]\Delta_H[\varepsilon_H(h_3)1_H]\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)]\Delta_H[h_{31}S_H(h_{32})]\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)]\Delta_H[h_3S_H(h_4)]\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)]\Delta_H(h_3)\Delta_H(S_H(h_4))\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)](h_{31}\otimes h_{32})\Delta_H(S_H(h_4))\\
&= [S_H(h_2)\otimes S_H(h_1)](h_3\otimes h_4)\Delta_H(S_H(h_5))\\
&= [S_H(h_2)h_3]\otimes[S_H(h_1)h_4]\Delta_H(S_H(h_5))\\
&= [S_H(h_{21})h_{22}]\otimes[S_H(h_1)h_3]\Delta_H(S_H(h_4))\\
&= [\varepsilon_H(h_2)1_H]\otimes[S_H(h_1)h_3]\Delta_H(S_H(h_4))\\
&= 1_H\otimes[S_H(h_1)\varepsilon_H(h_2)h_3]\Delta_H(S_H(h_4))\\
&= 1_H\otimes[S_H(h_1)\varepsilon_H(h_{21})h_{22}]\Delta_H(S_H(h_3))\\
&= (1_H\otimes S_H(h_1)h_2)\Delta_H(S_H(_3))\\
&= (1_H\otimes S_H(h_{11})h_{12})\Delta_H(S_H(_2))\\
&= (1_H\otimes\varepsilon_H(h_1)1_H)\Delta_H(S_H(h_2))\\
&= (1_H\otimes 1_H)\Delta_H[\varepsilon_H(h_1)S_H(h_2)]\\
&= (1_H\otimes 1_H)\Delta_H[S_H(\varepsilon_H(h_1)h_2)]\\
&= \Delta_H(1_H)\Delta_H(S_H(h))\\
&= \Delta_H(1_HS_H(h))\\
&= \Delta(S_H(h)).
\end{aligned}
$$

$iii)$ Soit $h\in H$. A-t-on : $S_H^2=id_H$? c'est-à-dire :
a-t-on

$$S_H^2\star S_H=\mu_H\circ\varepsilon_H=S_H\star S_H^2?$$

<u>1^{er}*cas :*</u> H commutative

$$
\begin{aligned}
(S_H^2\star S_H)(h) &= S_H^2(h_1)S_H(h_2)\\
&= S_H(S_H(h_1))S_H(h_2)\\
&= S_H(h_2S_H(h_1))\\
&= S_H(S_H(h_1)h_2),\ \text{car } H \text{ est commutative.}\\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\\
&= (\mu_H\circ\varepsilon_H)(h)\ \textit{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(S_H\star S_H^2)(h) &= S_H(h_1)S_H^2(h_2)\\
&= S_H(h_1)S_H(S_H(h_2))\\
&= S_H(S_H(h_2)h_1)\\
&= S_H(h_1S_H(h_2))\\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\\
&= (\mu_H\circ\varepsilon_H)(h)\ \textit{(2)}
\end{aligned}
$$

$$\textit{(1)}\text{ et }\textit{(2)}\quad\Rightarrow S_H^2\star S_H=\mu_H\circ\varepsilon_H=S_H\star S_H^2$$

<u>2^{ieme}*cas :*</u> H co-commutative

$$
\begin{aligned}
(S_H^2 \star S_H)(h) &= S_H^2(h_1)S_H(h_2)\\
&= S_H(S_H(h_1))S_H(h_2)\\
&= S_H(h_2S_H(h_1))\\
&= S_H(h_1S_H(h_2))\\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\\
&= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h) \ \mathit{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(S_H \star S_H^2)(h) &= S_H(h_1)S_H^2(h_2)\\
&= S_H(h_1)S_H(S_H(h_2))\\
&= S_H(S_H(h_2)h_1)\\
&= S_H(S_H(h_1)h_2)\\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\\
&= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h) \ \mathit{(2)}
\end{aligned}
$$

$$\mathit{(1)} \text{ et } \mathit{(2)} \quad \Rightarrow S_H^2 \star S_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = S_H \star S_H^2. \ \blacksquare$$

1.2.4 Idéal et sous-algèbre de Hopf

Définition 1.2.3 *Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf.*
1) Un idéal de Hopf est un bi-idéal $I \subset H$ tel que : $S_H(I) \subset I$.
2) Une sous-algèbre de Hopf de H est une sous-bialgèbre $H' \subset H$ telle que : $S_H(H') \subset H'$.

1.2.5 Morphisme d'algèbres de Hopf

Définition 1.2.4 *Soient H et H' deux algèbres de Hopf d'antipodes respectives S_H et $S_{H'}$. Une application $\mathbb{K}-$linéaire $f : H \longrightarrow H'$ est un morphisme d'algèbres de Hopf si f est un morphisme d'algèbres, un morphisme de coalgèbres tel que :*

$$S_{H'} \circ f = f \circ S_H.$$

Lemme 1.2.2 *Soient H et H' des algèbres de Hopf.*
Soit $f : H \longrightarrow H'$ un morphisme d'algèbres de Hopf. Alors :
Imf est une sous-algèbre de Hopf de H'. Si $\mathbb{K}$ est un corps, $Kerf$ est un idéal de Hopf de H.

Proposition 1.2.2 *Soient H et H' des algèbres de Hopf d'antipodes respectives S_H et $S_{H'}$. Le produit tensoriel $H \otimes H'$ est une algèbre de Hopf d'antipode $S_{H\otimes H'} = S_H \otimes S_{H'}$.*

Lemme 1.2.3 *Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode S_H inversible.On a alors :*

$$S_H^{-1}(h_2)h_1 = \varepsilon_H(h)1_H = h_2S_H^{-1}(h_1), \quad \forall h \in H.$$

Preuve : Soit $h \in H$. On a :

$$\begin{aligned}
S_H^{-1}(h_2)h_1 &= S_H^{-1}[S_H(S_H^{-1}(h_2)h_1)]\\
&= S_H^{-1}[S_H(h_1)S_H(S_H^{-1}(h_2))]\\
&= S_H^{-1}[S_H(h_1)h_2]\\
&= S_H^{-1}[\varepsilon_H(h)1_H]\\
&= \varepsilon_H(h)S_H^{-1}(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{De même : } h_2S_H^{-1}(h_1) &= S_H^{-1}[S_H(h_2S_H^{-1}(h_1))]\\
&= S_H^{-1}[S_H(S_H^{-1}(h_1))S_H(h_2)]\\
&= S_H^{-1}[h_1S_H(h_2)]\\
&= S_H^{-1}[\varepsilon_H(h)1_H]\\
&= \varepsilon_H(h)S_H^{-1}(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H.\ \blacksquare
\end{aligned}$$

1.2.6 Dual d'une algèbre de Hopf

Théorème 1.2.2 *Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors son dual $H^* = Hom_{\mathbb{K}}(H, \mathbb{K}) = (H^*, m_{H^*}, \mu_{H^*}, \Delta_{H^*}, \varepsilon_{H^*}, S_{H^*})$ est une algèbre de Hopf d'antipode $S_{H^*} = S_H^*$. Donc*

$$S_{H^*}(f) = f \circ S_H, \quad \forall f \in H^*.$$

Preuve : Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ une bialgèbre de dimension finie. Alors $H^* = (H^*, m_{H^*}, \mu_{H^*}, \Delta_{H^*}, \varepsilon_{H^*})$ est aussi une bialgèbre. Il reste à vérifier la formule de l'antipode S_{H^*}.
Soit $f \in H^*$. A-t-on

$$f_1 \star S_{H^*}(f_2) = \varepsilon_{H^*}(f) \star 1_{H^*} = S_{H^*}(f_1) \star f_2?$$

De façon équivalente, a-t-on
$f_1 \star S_{H^*}(f_2) = \varepsilon_{H^*}(f)\varepsilon_H = S_{H^*}(f_1) \star f_2$? (car $1_{H^*} = \varepsilon_H$).
Soit $h \in H$:

$$\begin{aligned}
[f_1 \star S_{H^*}(f_2)](h) &= f_1(h_1)[S_{H^*}(f_2)](h_2)\\
&= f_1(h_1)[f_2 \circ S_H](h_2)\\
&= f_1(h_1)f_2(S_H(h_2))\\
&= f(h_1S_H(h_2))\\
&= f(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= f(1_H)\varepsilon_H(h)\\
&= \varepsilon_{H^*}(f)\varepsilon_H(h)\\
\text{On a bien : } & f_1 \star S_{H^*}(f_2) = \varepsilon_{H^*}(f) \star \varepsilon_H \qquad (i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{H^*}(f_1) \star f_2](h) &= [S_{H^*}(f_1)](h_1)f_2(h_2)\\
&= [f_1 \circ S_H](h_1)f_2(h_2)\\
&= f_1(S_H(h_1))f_2(h_2)\\
&= f(S_H(h_1)h_2)\\
&= f(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= f(1_H)\varepsilon_H(h)\\
&= \varepsilon_{H^*}(f)\varepsilon_H(h)\\
\text{On a aussi : } & S_{H^*}(f_1) \star f_2 = \varepsilon_{H^*}(f) \star \varepsilon_H \qquad (ii)
\end{aligned}$$

(i) et *(ii)* montrent que la formule de l'antipode est bien vérifiée.
Donc H^* est une algèbre de Hopf.$\blacksquare$

1.2.7 Éléments invariants

Définition 1.2.5 *Soit H une algèbre de Hopf et soit M un $H-$module à gauche. Un élément m de M est dit $H-$invariant si :*

$$h.m = \varepsilon_H(h)m, \quad \forall h \in H.$$

L'ensemble des éléments $H-$invariants de M se note M^H. Donc

$$M^H = \{m \in M / h.m = \varepsilon_H(h)m, \quad \forall h \in H\}.$$

Un $\mathbb{K}-$module M est un $H-$module trivial si :

$$h.m = \varepsilon_H(h)m, \quad \forall m \in M, \forall h \in H.$$

Donc M^H est un $H-$module à gauche trivial. De plus M^H est un sous$-\mathbb{K}-$module de M.

1.2.8 Produit tensoriel de $H-$modules

Définition 1.2.6 *Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ une bialgèbre et soient M et N deux $H-$modules à gauche. On peut munir $M \otimes N$ d'une structure de $H-$module à gauche via l'application :*

$$\begin{aligned} \lambda_{M\otimes N} : \quad & H \otimes M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \\ & h \otimes (m \otimes n) \longmapsto h.(m \otimes n) = h_1 m \otimes h_2 n, \quad \forall h \in H, m \in M, n \in N. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.3 *[11,Proposition 2.5.11, p.41]. Soit H une algèbre de Hopf d'antipode S_H et soient M et N deux $H-$modules à gauche. Alors,*

i) $Hom_{\mathbb{K}}(M, N)$ est un $H-$module à gauche avec l'action définie par :

$$(hf)(m) = h_1.f(S_H(h_2)m); \quad \forall h \in H, m \in M, f \in Hom_{\mathbb{K}}(M, N).$$

En particulier, si $N = \mathbb{K}$ muni de l'action triviale de H, alors $M^* = Hom_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ est un $H-$module à gauche dont l'action est définie par :

$$(hf)(m) = f(S_H(h)m); \quad \forall h \in H, m \in M, f \in M^*.$$

ii) Si l'antipode S_H de H est bijective, alors $Hom_{\mathbb{K}}(M, N)$ est un $H-$module à gauche avec l'action :

$$(hf)(m) = h_2.f(S_H^{-1}(h_1)m); \quad \forall h \in H, m \in M, f \in Hom_{\mathbb{K}}(M, N).$$

En particulier, si $N = \mathbb{K}$ muni de l'action trivial de H, alors $M^* = Hom_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ est un $H-$module à gauche avec l'action :

$$(hf)(m) = f(S_H^{-1}(h)m); \quad \forall h \in H, m \in M, f \in M^*.$$

Preuve : Soient $f \in Hom_{\mathbb{K}}(M, N)$ et $h \in H$.
Montrons d'abord que $hf \in Hom_{\mathbb{K}}(M, N)$ (c'est-à-dire hf est $\mathbb{K}-$linéaire).
Soient $m, m' \in M$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. A-t-on :

$$(hf)(m + \lambda m') = (hf)(m) + \lambda(hf)(m)?$$

$$\begin{aligned} (hf)(m + \lambda m') \quad &= h_1.[f(S_H(h_2)(m + \lambda m')] \\ &= h_1.[f(S_H(h_2)m + S_H(h_2)(\lambda m'))] \\ &= h_1.[f(S_H(h_2)m + \lambda S_H(h_2)m')] \\ &= h_1.[f(S_H(h_2)m) + f(\lambda S_H(h_2)m')] \\ &= h_1.[f(S_H(h_2)m) + \lambda f(S_H(h_2)m')] \\ &= h_1.[f(S_H(h_2)m)] + h_1.[\lambda f(S_H(h_2)m')] \\ &= h_1.[f(S_H(h_2)m)] + \lambda h_1.[f(S_H(h_2)m')] \\ &= (hf)(m) + \lambda(hf)(m) \end{aligned}$$

On a bien $hf \in Hom_{\mathbb{K}}(M, N)$.

i) Soient $h, h' \in H$, $f \in Hom_{\mathbb{K}}(M,N)$ et $m \in M$.

$$\begin{aligned}
[(hh')f](m) &= (hh')_1.[f(S_H((hh')_2)m] \\
&= (h_1h'_1).[f(S_H(h_2h'_2)m)] \\
&= (h_1h'_1).[f(S_H(h'_2)S_H(h_2)m)] \\
&= h_1.(h'_1.[f(S_H(h'_2)S_H(h_2)m)]) \\
&= h_1.[(h'f)(S_H(h_2)m)] \\
&= [h(h'f)](m)
\end{aligned}$$

On a : $[(hh')f] = [h(h'f)]$.

Donc $Hom_{\mathbb{K}}(M,N)$ est un $H-$module à gauche.

Si $N = \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}
[(hh')f](m) &= f(S_H(hh')m) \\
&= f(S_H(h')S_H(h)m) \\
&= (h'f)(S_H(h)m) \\
&= [h(h'f)](m), \text{ d'où le résultat.}
\end{aligned}$$

ii) Pour le cas où l'antipode est bijective, on utilise la même procédure que précédemment.■

Remarque 1.2.2 *L'ensemble des endomorphismes des $H-$modules à gauche $End_{\mathbb{K}}(M)$ est un $H-$module à gauche.*

1.2.9 Opposée et Co-opposée d'une algèbre de Hopf

Soit $(H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode bijective. Alors on a les algèbres de Hopf suivantes :

i) $H^{op} = (H^{op}, m_H \circ \tau_{H\otimes H}, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$,

ii) $H^{cop} = (H^{cop}, m_H, \mu_H, \tau_{H\otimes H} \circ \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$,

iii) $H^{op,cop} = (H^{op,cop}, m_H \circ \tau_{H\otimes H}, \mu_H, \tau_{H\otimes H} \circ \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$,

iv) $H^{cop,op} = (H^{cop,op}, m_H \circ \tau_{H\otimes H}, \mu_H, \tau_{H\otimes H} \circ \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$.

1.3 ALGÈBRE DE H-MODULE

1.3.1 Algèbre de H-module

Définition 1.3.1 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre. On dit que A est une algèbre de $H-$module à gauche si A est un $H-$module à gauche tel que*

$$h.(ab) = (h_1.a)(h_2.b) \quad et \quad h.1_A = \varepsilon_H(h)1_A, \quad \forall h \in H \quad et \quad a, b \in A.$$

Lemme 1.3.1 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre de $H-$module.*
$A^H = \{a \in A / h.a = \varepsilon_H(h)a, \forall h \in H\}$,est une sous-algèbre de A appelée sous-algèbre ou sous-anneau des invariants de A.

1.3.2 Produit semi-direct

Définition 1.3.2 *Soit H une algèbre de Hopf et soit A une algèbre de $H-$module à gauche. Le produit de A et H noté $A\#H$ est le $\mathbb{K}-$module $A \otimes H$ muni du produit*

$$(a \otimes h)(a' \otimes h') = a(h_1.a') \otimes (h_2h').$$

$A\#H$ est une algèbre associative unitaire (d'unité $1_A\#1_H$) appelée le produit semi-direct de A et H.
Dans $A\#H$, au lieu de $a \otimes h$, on peut écrire $a\#h$ ou ah.
On identifie A et H à des sous-algèbres de $A\#H$ via les applications :

$$\begin{array}{llll} \lambda_A : & A \longrightarrow A \otimes H & \text{et } \lambda_H : & H \longrightarrow A \otimes H \\ & a \longmapsto a \otimes 1_H & & h \longmapsto 1_A \otimes h. \end{array}$$

1.3.3 $A\#H-$modules et $(A, H)-$modules

Définition 1.3.3 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre de $H-$module à gauche. On dit qu'un $\mathbb{K}-$module M est un $(A, H)-$module à gauche si :*
M est un $A-$module à gauche, un $H-$module à gauche et,
pour tous $h \in H; a \in A$ et $m \in M$, on a la compatibilité de l'action de H avec la structure de $A-$module :

$$h.(am) = (h_1.a)(h_2.m).$$

Définition 1.3.4 *On note ${}_{(A,H)}\mathcal{M}$ la catégorie des $(A, H)-$modules à gauche. Les objets sont les $(A, H)-$modules à gauche et les morphismes sont les applications à la fois $A-$linéaires et $H-$linéaires.*

Lemme 1.3.2 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre de $H-$module à gauche.*
1) *Un $\mathbb{K}-$module M est un $A\#H-$module à gauche si et seulement si M est un $(A, H)-$module à gauche.*
2) ${}_{A\#H}\mathcal{M} = {}_{(A,H)}\mathcal{M}$.

Preuve :
1) Soit M un $\mathbb{K}-$module à gauche.
$i)$ Supposons que $M \in {}_{A\#H}\mathcal{M}$. Donc,
- M est un $A-$module à gauche : $am = (a \otimes 1_H)m$, car A est une sous-algèbre de $A\#h$;
- M est un $H-$module à gauche : $hm = (1_A \otimes h)m$, car H est une sous-algèbre de $A\#h$. Nous avons identifié a à $a \otimes 1_H$ et h à $1_A \otimes h$.
- On a aussi,

$$h(am) = (ha)m = [(1_A \otimes h)(a \otimes 1_H)]m = [1_A(h_1.a)](h_2 1_H)m = (h_1.a)(h_2 m).$$

La compatibilité est vérifiée; d'où $M \in {}_{(A,H)}\mathcal{M}$.
$ii)$ Supposons que $M \in {}_{(A,H)}\mathcal{M}$, c'est-à-dire M est
- un $A-$module à gauche;
- un $H-$module à gauche et
- $h(am) = (h_1.a)(h_2 m)$, $\forall a \in A, h \in H$ et $m \in M$. On munit M d'une structure de $A\#H-$module , en posant

$$(a\#h)m = a(hm).$$

Donc $M \in {}_{A\#H}\mathcal{M}$.
2) Soient M et N deux $A\#H-$modules à gauche. Il est facile de montrer qu'une application $\mathbb{K}-$linéaire de M vers N est $A\#H-$linéaire si et seulement si elle est à la fois $A-$linéaire et $H-$linéaire.

Chapitre 2

ALGÈBRE DE H-COMODULE

Les notions de comodules et de morphismes de comodules sont des notions duales de modules et de morphismes de modules. Afin de mieux comprendre ces deux notions, nous allons définir les modules et les morphismes de modules par des diagrammes.

2.1 MODULE

2.1.1 Module sur une algèbre

Définition 2.1.1 *Soit A une algèbre. Un $\mathbb{K}-$module M est un $A-$module à gauche s'il existe une application $\mathbb{K}-$linéaire :*

$$\begin{aligned} \lambda_M : \quad & A \otimes M \longrightarrow M \\ & a \otimes m \longmapsto a.m = am, \quad \forall a \in A, m \in M \end{aligned}$$

telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \lambda_M"] \arrow[d, "m_A \otimes id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda_M"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\lambda_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes M \arrow[rr, "\mu_A \otimes id_M"] \arrow[dr, "\approx"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\lambda_A"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

La commutativité du rectangle équivaut à :

$$(ab)m = a(bm), \quad \forall a, b \in A, m \in M.$$

Celle du triangle équivaut à :

$$1_A m = m.$$

On dit alors que A agit à gauche sur M. L'application λ_M est l'action sur M.

2.1.2 Morphisme de $A-$module

Soit A une algèbre et soient M et N deux $A-$modules à gauche. Un morphisme de $A-$modules $f : M \longrightarrow N$ est une application $\mathbb{K}-$linéaire qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ A \otimes M \arrow[u, "\lambda_M"] \arrow[r, "id_A \otimes f"'] & A \otimes N, \arrow[u, "\lambda_N"'] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$f \circ \lambda_M = \lambda_N \circ (id_A \otimes f).$$

Donc $\forall a \in A; m \in M$, on a :

$$(f \circ \lambda_M)(a \otimes m) = (\lambda_N \circ (id_A \otimes f))(a \otimes m),$$

c'est-à-dire,

$$f(a.m) = a.f(m).$$

Définition 2.1.2 *Soit M un $A-$module à gauche (ou à droite). On note ${}_A\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{M}_A$) la catégorie des $A-$modules à gauche (ou à droite). Les objets sont des $A-$modules à gauche (ou à droite) et les morphismes sont des morphismes de $A-$modules à gauche (ou à droite).*

2.2 COMODULE

La notion de comodule est celle duale de module.

Définition 2.2.1 *Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. Un $\mathbb{K}-$module à gauche M est un $C-$co-module (ou $C-$comodule) à droite s'il existe une application $\mathbb{K}-$linéaire*

$$\varphi_M : M \longrightarrow M \otimes C,$$

qui rend commutatif les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta_C"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\varphi_M \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[dr, "\cong"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \varepsilon_C"] \\ & M \otimes \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Ce qui équivaut à :
- $(id_C \otimes \Delta_C) \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes id_C) \circ \varphi_M$ *;*
- $(id_M \otimes \varepsilon_M) \circ \varphi_M = id_M$*.*

L'application φ_M est appelée la $C-$coaction ou la coaction de C sur M.

2.2.1 Notation de Sweedler pour les comodules

Soit $M = (M, \varphi_M)$ un $C-$comodule à droite. Pour $m \in M$, on note :

$$\varphi_M(m) = \Sigma m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \Sigma m_0 \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1.$$

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons la notation $\varphi_M(m) = m_0 \otimes m_1$.

Avec la notation de Sweedler, la commutativité des diagrammes précédents équivaut à :

$$m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$$

et

$$m_0 \varepsilon_C(m_1) = m.$$

2.2.2 Sous-Comodule

Définition 2.2.2 *Soient C une algèbre et M un $C-$comodule à droite.*
Un sous$-\mathbb{K}-$module N de M est un sous$-C-$comodule à droite de M si

$$\varphi_M(N) \subseteq N \otimes C.$$

2.2.3 Morphisme de comodules

Pour définir un morphisme de comodules, on dualise tout simplement la notion de morphisme de modules.

Définition 2.2.3 *Soit C une coalgèbre et soient M et N deux $C-$comodules à droite.*
Une application $\mathbb{K}-$linéaire $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de $C-$comodules ou une application $C-$colinéaire si le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[d, "\varphi_N"] \\
M \otimes N \arrow[r, "f\otimes id_C"'] & N \otimes C,
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire : $\varphi_N \circ f = (f \otimes id_C) \circ \varphi_M$. Donc $\forall m \in M$ on a :

$$(\varphi_N \circ f)(m) = [(f \otimes id_C) \circ \varphi_M](m)$$

$$(f(m))_0 \otimes (f(m))_1 = f(m_0) \otimes (m_1)$$

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

Ainsi, f est $C-$colinéaire si et seulement si

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

La catégorie dont les objets sont des $C-$comodules à droite et les morphismes des applications $C-$colinéaires à droite est notée $\mathcal{M}^C$.
Soient M et N deux objets de $\mathcal{M}^C$. On note $Hom^C(M, N)$, le $\mathbb{K}-$module des applications $C-$colinéaires à droite de M vers N.

Remarque 2.2.1 *On peut aussi définir un $C-$comodule à gauche M avec la coaction à gauche définie par :*

$$\varphi_M(m) = m_{-1} \otimes m_0 \in C \otimes M.$$

La catégorie dont les objets sont des $C-$comodules à gauche et les morphismes des applications $C-$colinéaires à gauche est notée ${}^C\mathcal{M}$.

2.2.4 Éléments coinvariants

Définition 2.2.4 *Soit C une coalgèbre contenant un élément de type groupe x. Soit M un $C-$comodule à droite.*
Un élément $m \in M$ est dit $(C, x)-$coinvariant si $\varphi_M(m) = m \otimes x$.
L'ensemble des éléments $(C, x)-$coinvariants de M se note $M^{coC,x}$; c'est-à-dire,

$$M^{coC,x} = \{m \in M / \varphi_M(m) = m \otimes x\}.$$

$M^{coC,x}$ est un sous$-\mathbb{K}-$module de M appelé sous-module des coinvariants de M.

Définition 2.2.5 *Soit H une algèbre de Hopf et soit M un $H-$comodule à droite.*
Un élément m de M est dit $H-$coinvariant si $\varphi_M(m) = m \otimes 1_H$.
L'ensemble $M^{coH} = \{m \in M/\varphi_M(m) = m \otimes 1_H\}$ est l'ensemble des éléments $H-$coinvariants de M. C'est aussi un sous$-\mathbb{K}-$module de M.

Un $\mathbb{K}-$module M est un $H-$comodule trivial si M est un $H-$comodule et tous ses éléments sont $H-$coinvariants.

2.2.5 Produit tensoriel de comodules

Proposition 2.2.1 *Soit $C = (C, m_C, \mu_C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une bialgèbre.*
Soient $M = (M, \varphi_M)$ et $N = (N, \varphi_N)$ deux $C-$comodules à droite.L'application $\mathbb{K}-$linéaire

$$\varphi_{M\otimes N} := (id_M \otimes id_N \otimes m_C) \circ (id_M \otimes \tau_{C\otimes M} \otimes id_C) \circ (\varphi_M \otimes \varphi_N) : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes C,$$

munit $M \otimes N$ d'une structure de $C-$comodule à droite. C'est la coaction diagonale.
Le comodule $M \otimes N = (M \otimes N, \varphi_{M\otimes N})$ est appelé produit tensoriel des comodules M et N.
Dans la notation de Sweedler , on a :

$$\varphi_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1.$$

Preuve A-t-on :

$$(id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \varphi_{M\otimes N} = (\varphi_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \varphi_{M\otimes N}$$

et

$$(id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \varphi_{M\otimes N} = id_{M\otimes N}?$$

Soit $m \otimes n \in M \otimes N$.

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \varphi_{M\otimes N}](m \otimes n) &= [id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes (m_1 n_1)_1 \otimes (m_1 n_1)_2 \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_{11} n_{11} \otimes m_{12} n_{12} \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2. \quad (i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\varphi_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \varphi_{M\otimes N}](m \otimes n) &= [\varphi_{M\otimes N} \otimes id_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_{00} \otimes n_{00} \otimes m_{01} n_{01} \otimes m_1 n_1 \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2. \quad (ii)
\end{aligned}$$

$$(i) \text{ et } (ii) \Leftrightarrow \quad (id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \varphi_{M\otimes N} = (\varphi_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \varphi_{M\otimes N}$$

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \varphi_{M\otimes N}](m \otimes n) &= [id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes \varepsilon_C(m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \varepsilon_C(m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \varepsilon_C(m_1) \varepsilon_C(n_1) \\
&= m_0 \varepsilon_C(m_1) \otimes n_0 \varepsilon_C(n_1) \\
&= m \otimes n \\
&= id_{M\otimes N}(m \otimes n)\,; \\
\text{d'où} \quad (id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \varphi_{M\otimes N} &= id_{M\otimes N}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Théorème 2.2.1 *Soient C une coalgèbre et M un $C-$comodule à droite. Alors M est un C^*-module à gauche avec l'action définie par :*

$$f.m = f(m_1)m_0, \quad \forall f \in C^*, m \in M.$$

Preuve : Soient $f, g \in C^*$ et $m \in M$.
A-t-on : $(f * g).m = f.(g.m)$ et $\varepsilon_C.m = m$?

$$\begin{aligned}(f*g).m &= (f*g)(m_1)m_0\\ &= f(m_{11})g(m_{12})m_0\\ &= f(m_1)g(m_2)m_0\\ f.(g.m) &= f.(g(m_1)m_0)\\ &= f(m_{01})g(m_1)m_{00}\\ &= f(m_1)g(m_2)m_0\end{aligned}$$

$$\varepsilon_C.m = \varepsilon_C(m_1)m_0 = m_0\varepsilon_C(m_1) = m.$$

Donc M est bien un C^*-module à gauche.■

2.2.6 Module de Hopf

Définition 2.2.6 *Soit H une algèbre de Hopf. Un $\mathbb{K}-$module M est un module de Hopf à droite s'il est simultanément :*

- *un $H-$module à droite ;*
- *un $H-$comodule à droite ;*

tel que :

$$\varphi_M(mh) = m_0h_1 \otimes m_1h_2, \quad \forall m \in M, h \in H.$$

C'est-à-dire :

$$(mh)_0 \otimes (mh)_1 = m_0h_1 \otimes m_1h_2.$$

On note $\mathcal{M}_H^H$ la catégorie des modules de Hopf à droite. Les objets sont les modules de Hopf à droite et les morphismes sont les morphismes de modules de Hopf ; c'est-à-dire les morphismes qui sont simultanément des morphismes de $H-$modules à droite et des morphismes de $H-$comodules à droite.
On définit de façon analogue :

- *${}_H\mathcal{M}^H$ la catégorie des modules de Hopf à gauche à droite ;*
- *${}^H\mathcal{M}_H$ la catégorie des modules de Hopf à droite à gauche ;*
- *et ${}_H^H\mathcal{M}$ la catégorie des modules de Hopf à gauche.*

Lemme 2.2.1 *Soit H une algèbre de Hopf.*
1) *H est un module de Hopf avec l'action définie par la multiplication et la coaction par le coproduit.*
2) *Soit M un module de Hopf. Alors, $M^{coH} \otimes H$ est un module de Hopf à droite avec l'action :*

$$(m \otimes h)h' = m \otimes (hh'), \quad m \in M, \quad h, h' \in H$$

et la coaction :

$$\varphi_{M^{coH}\otimes H}(m \otimes h) = m \otimes h_1 \otimes h_2.$$

Preuve : Soit H une algèbre de Hopf.
1) Montrons que H est un module de Hopf à droite.
- On sait que $H \in \mathcal{M}_H$.
- Soit $h \in H$

$$[(id_H \otimes \Delta_H) \circ \varphi_H](h) = [id_H \otimes \Delta_H](h_1 \otimes h_2) = h_1 \otimes h_{21} \otimes h_{22} = h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$$

$$[(\varphi_H \otimes id_H) \circ \varphi_H](h) = [\varphi_H \otimes id_H](h_1 \otimes h_2) = h_{12} \otimes h_{12} \otimes h_2 = h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$$

et

$$[(id_H \otimes \varepsilon_H) \circ \varphi_H](h) = [id_H \otimes \varepsilon_H](h_1 \otimes h_2) = h_1 \otimes \varepsilon_H(h_2) = h_1\varepsilon_H(h_2) = h.$$

$(id_H \otimes \Delta_H) \circ \varphi_H = (id_H \otimes \varepsilon_H) \circ \varphi_H$ et $(id_H \otimes \varepsilon_H) \circ \varphi_H = id_H$. Donc $H \in \mathcal{M}^H$.

- Compatibilité : Soient $h, h' \in H$.

$$\varphi_H(hh') = (hh')_1 \otimes (hh')_2 = h_1h'_1 \otimes h_2h'_2,$$

d'où la compatibilité.
En conclusion, $H \in \mathcal{M}_H^H$.

2) Soit M un $H-$module de Hopf à droite. Montrons que $M^{coH} \otimes H$ est un $H-$module de Hopf à droite.

- Soient $m \otimes h \in M^{coH} \otimes H$ et $h', h'' \in H$

$$(m \otimes h)(h'h'') = m \otimes (h(h'h'')) = m \otimes ((hh')h'') = (m \otimes hh')h'' = ((m \otimes h)h')h''$$

$$(m \otimes h)1_H = m \otimes (h1_H) = m \otimes h.$$

Donc $M^{coH} \otimes H \in \mathcal{M}_H$.

- Soit $m \otimes h \in M^{coH} \otimes H$.

$$\begin{aligned}
[(id_{M^{coH} \otimes H} \otimes \Delta_H) \circ \varphi_{M^{coH} \otimes H}](m \otimes h) &= [id_{M^{coH} \otimes H} \otimes \Delta_H](m \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= m \otimes h_1 \otimes h_{21} \otimes h_{22} \\
&= m \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes h_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\varphi_{M^{coH} \otimes H} \otimes id_H) \circ \varphi_{M^{coH} \otimes H}](m \otimes h) &= [\varphi_{M^{coH} \otimes H} \otimes id_H](m \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= m \otimes h_{11} \otimes h_{12} \otimes h_2 \\
&= m \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes h_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(id_{M^{coH} \otimes H} \otimes \varepsilon_H) \circ \varphi_{M^{coH} \otimes H}](m \otimes h)] &= [id_{M^{coH} \otimes H} \otimes \varepsilon_H](m \otimes h_1 \otimes h_2) \\
&= m \otimes h_1 \otimes \varepsilon_H(h_2) \\
&= m \otimes h_1\varepsilon_H(h_2) \\
&= m \otimes h \\
&= id_{M^{coH} \otimes H}(m \otimes h)
\end{aligned}$$

$$(id_{M^{coH} \otimes H} \otimes \Delta_H) \circ \varphi_{M^{coH} \otimes H} = (\varphi_{M^{coH} \otimes H} \otimes id_H) \circ \varphi_{M^{coH} \otimes H}$$

$$(id_{M^{coH} \otimes H} \otimes \varepsilon_H) \circ \varphi_{M^{coH} \otimes H} = id_{M^{coH} \otimes H}.$$

Donc $M^{coH} \otimes H \in \mathcal{M}^H$.

- Compatibilité : Soient $m \otimes H \in M^{coH} \otimes H$ et $h' \in H$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{M^{coH} \otimes H}((m \otimes h).h') &= [(m \otimes h).h']_0 \otimes [(m \otimes h).h']_1 \\
&= [(m \otimes (hh')]_0 \otimes [(m \otimes (h.h')]_1 \\
&= m \otimes (hh')_1 \otimes (hh')_2 \\
&= m \otimes h_1h'_1 \otimes h_2h'_2 \\
&= (m \otimes h_1)h'_1 \otimes h_2h'_2 \\
&= (m \otimes h)_0h'_1 \otimes (m \otimes h)_1h'_2, \quad \text{d'où la compatibilité.}
\end{aligned}$$

On voit bien que $M^{coH} \otimes H$ est un $H-$module de Hopf à droite.■

Théorème 2.2.2 ***(Théorème fondamental des modules de Hopf)***
Soient $\mathbb{K}$ un corps et H une algèbre de Hopf d'antipode S_H. Soit M un $H-$module de Hopf à droite ; l'application

$$\begin{aligned}
\chi : \quad & M^{coH} \otimes H \longrightarrow M \\
& m \otimes h \longmapsto mh
\end{aligned}$$

est un isomorphisme de modules de Hopf à droite.

Preuve :

i) Montrons que χ est $H-$linéaire.

Soient $m \in M^{coH}$ et $h, h' \in H$.

$$\begin{aligned}\chi((m\otimes h)h') &= \chi(m\otimes(hh'))\\ &= m(hh')\\ &= (mh)h'\\ &= \chi(m\otimes h)h'.\end{aligned}$$ Donc χ est $H-$linéaire.

ii) Montrons que χ est $H-$colinéaire.

Soient $m \in M^{coH}$ et $h \in H$. A-t-on :

$$\chi(m\otimes h)_0 \otimes \chi(m\otimes h)_1 = \chi((m\otimes h)_0)\otimes(m\otimes h)_1?$$

$$\begin{aligned}\chi(m\otimes h)_0 \otimes \chi(m\otimes h)_1 &= (mh)_0\otimes(mh)_1\\ &= m_0h_1\otimes m_1h_2\\ &= mh_1\otimes 1_Hh_2\\ &= mh_1\otimes h_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi((m\otimes h)_0)\otimes(m\otimes h)_1 &= \chi(m_0\otimes h_1)\otimes(m_1\otimes h_2)\\ &= \chi(m\otimes h_1)\otimes h_2\\ &= mh_1\otimes h_2\end{aligned}$$

$\chi(m\otimes h)_0 \otimes \chi(m\otimes h)_1 = \chi((m\otimes h)_0)\otimes(m\otimes h)_1$; donc χ est $H-$colinéaire.

iii) Montrons que χ est bijective.

Soit l'application :

$$\begin{aligned}\psi :\quad M &\longrightarrow M^{coH}\otimes H\\ m &\longmapsto m_0S_H(m_1)\otimes m_2\end{aligned}$$

- Vérifions que $m_0S_H(m_1) \in M^{coH}$.

$$\begin{aligned}\varphi_M(m_0S_H(m_1)) &= (m_0S_H(m_1))_0\otimes(m_0S_H(m_1))_1\\ &= m_{00}S_H(m_1)_1\otimes m_{01}S_H(m_1)_2\\ &= m_{00}S_H(m_{12})\otimes m_{01}S_H(m_{11})\\ &= m_0S_H(m_2)\otimes m_{11}S_H(m_{12})\\ &= m_0S_H(m_2)\otimes\varepsilon_H(m_1)1_H\\ &= m_0S_H(\varepsilon_H(m_1)m_2)\otimes 1_H\\ &= m_0S_H(\varepsilon_H(m_{11})m_{12})\otimes 1_H\\ &= m_0S_H(m_1)\otimes 1_H.\end{aligned}$$

$$\varphi_M(m_0S_H(m_1)) = m_0S_H(m_1)\otimes 1_H;$$

donc $m_0S_H(m_1) \in M^{coH}$. Ainsi $m_0S_H(m_1)\otimes m_2 \in M^{coH}\otimes H$.

- A-t-on : $\chi\circ\psi = id_M$ et $\psi\circ\chi = id_{_{M^{coH}\otimes H}}$?

$$\begin{aligned}(\chi\circ\psi)(m) &= \alpha(m_0S_H(m_1)\otimes m_2)\\ &= m_0S_H(m_1)m_2\\ &= m_0S_H(m_{11})m_{12}\\ &= m_0\varepsilon_H(m_1)1_H\\ &= m1_H = m = id_M(m)\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(\psi\circ\chi)(m\otimes h) &= \psi(mh)\\
&= (mh)_0 S_H((mh)_1)\otimes (mh)_2\\
&= mh_1 S_H(h_2)\otimes h_3\\
&= mh_{11} S_H(h_{12})\otimes h_2\\
&= m\varepsilon_H(h_1)1_H\otimes h_2\\
&= m1_H\otimes \varepsilon_H(h_1)h_2\\
&= m\otimes h\\
&= id_{_{M^{coH}\otimes H}}(m\otimes h).
\end{aligned}
$$

Donc χ est bijective, d'inverse ψ.

χ est $H-$linéaire, $H-$colinéaire et bijective ; donc c'est un isomorphisme de modules de Hopf à droite.■

2.3 MODULE DE HOPF RELATIF

2.3.1 Algèbre de $H-$comodule

Définition 2.3.1 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre.*
On dit que A est une algèbre de $H-$comodule à droite si A est un $H-$comodule à droite tel que :

$$\varphi_A(ab) = a_0b_0\otimes a_1b_1;\quad \forall a,b\in A;$$

c'est-à-dire :

$$(ab)_0\otimes(ab)_1 = a_0b_0\otimes a_1b_1 \quad et \quad \varphi_A(1_A) = 1_A\otimes 1_H.$$

Définition 2.3.2 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre de $H-$comodule à droite. Un $\mathbb{K}-$module M est un $(A,H)-$module de Hopf relatif à droite, si M est :*

- *un $A-$module à droite,*
- *un $H-$comodule à droite*
  tel que :

$$\varphi_M(am) = m_0a_0\otimes m_1a_1,\quad \forall a\in A, m\in M;$$

c'est-à-dire :

$$(ma)_0\otimes(ma)_1 = m_0a_0\otimes m_1a_1.$$

On note $\mathcal{M}_A^H$ la catégorie des $(A,H)-$modules de Hopf relatifs à droite. Les objets sont les $(A,H)-$modules de Hopf relatifs à droite et les morphismes sont les morphismes de $(A,H)-$modules de Hopf relatifs à droite, c'est-à-dire les applications qui sont simultanément $A-$linéaires et $H-$colinéaires à droite.

On définit de façon analogue les catégories ${}_A^H\mathcal{M}$, ${}^H\mathcal{M}_A$ et ${}_A\mathcal{M}^H$.

Définition 2.3.3 *Soient M et N deux $(A,H)-$modules de Hopf relatifs à droite. On note $Hom_A^H(M,N)$, le $\mathbb{K}-$module des $\mathbb{K}-$homomorphismes (ou $\mathbb{K}-$morphismes) $f: M\longrightarrow N$ qui sont simultanément des applications $A-$linéaires et $H-$colinéaires ; en d'autres termes,*

$$Hom_A^H(M,N) = \{f\in Hom_A(M,N)\cap Hom^H(M,N)/M,N\in\mathcal{M}_A^H\}.$$

On pose $End_A^H(M) = Hom_A^H(M,M)$. On a donc,

$$End_A^H(M) = \{f\in End_A(M)\cap End^H(M)/M\in\mathcal{M}_A^H\}.$$

Remarque 2.3.1 *Soit M un $\mathbb{K}-$module à droite. Le $\mathbb{K}-$module $End_{\mathbb{K}}(M)$ muni de l'addition usuelle, de la multiplication par un scalaire et de la composition des applications est une algèbre.*

Lemme 2.3.1 *Si $M \in \mathcal{M}_A^H$, alors $End_A^H(M)$ est une sous-algèbre de $End_{\mathbb{K}}(M)$.*

Preuve :

- Il est clair que $End_A^H(M)$ est un sous$-\mathbb{K}-$module de $End_{\mathbb{K}}(M)$.
- Soient $f, g \in End_A^H(M)$. A-t-on $f \circ g \in End_A^H(M)$?
  Soient $m \in M$ et $a \in A$.
  $$(f \circ g)(ma) = f[g(ma)] = f(g(m)a) = f(g(m))a = [(f \circ g)(m)]a.$$
  Donc $f \circ g$ est $A-$linéaire.

  A-t-on $((f \circ g)(m))_0 \otimes ((f \circ g)(m))_1 = (f \circ g)(m_0) \otimes m_1$?
  $$\begin{aligned}[(f \circ g)(m)]_0 \otimes [(f \circ g)(m)]_1 &= [f(g(m))]_0 \otimes [f(g(m))]_1 \\ &= f(g(m)_0) \otimes g(m)_1 && \text{car } f \text{ est } H-\text{colinéaire} \\ &= f(g(m_0)) \otimes m_1 && \text{car } g \text{ est } H-\text{colinéaire} \\ &= (f \circ g)(m_0) \otimes m_1\end{aligned}$$
  Donc $f \circ g$ est $H-$colinéaire.
- Soit l'application $\quad id_M : M \longrightarrow M, \quad m \longmapsto m.$
  $id_M \in End_A^H(M)$ et c'est l'élément neutre pour la composition.

  $f \circ g \in End_A^H(M), \quad \forall f, g \in End_A^H(M)$ et $id_M \in End_A^H(M)$, donc $End_A^H(M)$ est un sous-anneau de $End_{\mathbb{K}}(M)$
- De plus, soient $f, g \in End_A^H(M)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  $$\begin{aligned}[\lambda(f \circ g)](m) &= \lambda[(f \circ g)(m)] \\ &= \lambda[f(g(m))] \\ &= (\lambda f)(g(m)) = [(\lambda f) \circ g](m) \\ [\lambda(f \circ g)](m) &= \lambda[(f \circ g)(m)], \forall m \in M \\ &= \lambda[f(g(m))] \\ &= f(\lambda g(m)) = [f \circ (\lambda g)](m), \forall m \in M\end{aligned}$$
  $$\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$$

Ainsi, $End_A^H(M)$ est une sous-algèbre de $End_{\mathbb{K}}(M)$.■

Lemme 2.3.2 *Soit A une algèbre de $H-$comodule à droite.*
A^{coH} est une sous-algèbre de A appelée la sous-algèbre (ou le sous-anneau) des coinvariants de A.

Si $M, N \in \mathcal{M}_A^H$ et si f est un morphisme de $(A, H)-$modules de Hopf relatifs à droite de M vers N, alors la restriction de f à M^{coH} est une application $A^{coH}-$linéaire de M^{coH} vers N^{coH}. Cette restriction se note parfois f^{coH}, c'est-à-dire $f^{coH} = f_{/_{M^{coH}}}$.

Définition 2.3.4 *Soit H une algèbre de Hopf. Une extension A/B est une $H-$extension si A est une algèbre de $H-$comodule à droite et B est la sous-algèbre des coinvariants de A. Une extension A/B est dite $H-$galoisienne, si A/B est une $H-$extension telle que l'application de Galois :*
$$can : A \otimes_B A \longrightarrow A \otimes H, \quad a \otimes_B b \longmapsto ab_0 \otimes b_1,$$
soit bijective.

2.3.2 Module de Hopf bilatère

Définition 2.3.5 *Soient A et B deux $\mathbb{K}-$modules.*
Un $(A,B)-$module bilatère (ou $(A,B)-$bimodule) M est un $\mathbb{K}-$module muni d'une structure de $A-$module à gauche et d'une structure de $B-$module à droite tel que les actions de A et B sur M commutent ; c'est-à-dire :

$$(am)b = a(mb); \quad \forall a \in A, b \in B \quad et \quad m \in M.$$

Définition 2.3.6 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre de $H-$comodule à droite. Un $(A,H)-$module de Hopf bilatère (ou $(A,H)-$bimodule de Hopf) est un $A-$module à droite M qui est en même temps un $H-$module à gauche et un $H-$comodule à droite tel que :*

- *M est un $(H,A)-$module bilatère ;*
- *M est un $(A,H)-$module de Hopf relatif à droite et*
- *M est un $H-$module de Hopf à gauche à droite.*

On note ${}_H\mathcal{M}_A^H$ la catégorie dont les objets sont les $(A,H)-$modules de Hopf bilatères. Les morphismes de cette catégorie sont les applications simultanément $H-$linéaires à gauche, $A-$linéaires à droite et $H-$colinéaires à droite.

Exemple 2.3.1 *Soit $M \in \mathcal{M}_A^H$. On munit le produit $H \otimes M$ des structures naturelles de $H-$module à gauche, de $A-$module à droite et de la structure de $H-$comodule à droite définie par :*

$$h \otimes m \longmapsto h_1 \otimes m_0 \otimes h_2 m_1.$$

Alors, $H \otimes M$ est un $(A,H)-$module de Hopf bilatère. En particulier, $U = H \otimes A$ est un $(A,H)-$module de Hopf bilatère.

Lemme 2.3.3 *1) Si $M \in \mathcal{M}_A^H$ alors :*

$$M \otimes H \simeq H \otimes M,$$

isomorphisme de $(A,H)-$modules de Hopf bilatères donné par :

$$\begin{array}{rl} \alpha : & M \otimes H \longrightarrow H \otimes M \\ & m \otimes h \longmapsto hS_H^{-1}(m_1) \otimes m_0 \end{array} \qquad et\ \lambda : \begin{array}{l} H \otimes M \longrightarrow M \otimes H \\ h \otimes m \longmapsto m_0 \otimes hm_1. \end{array}$$

En particulier, $U = H \otimes A \simeq A \otimes H \in {}_H\mathcal{M}_A^H$.

2) Soit $N \in \mathcal{M}_A$. Alors $N \otimes H \in {}_H\mathcal{M}_A^H$; avec les actions :

$$(n \otimes h)a = na_0 \otimes ha_1; \quad h'(n \otimes h) = n \otimes h'h$$

et la coaction :

$$\varphi(n \otimes h) = (n \otimes h)_0 \otimes (n \otimes h)_1 = n \otimes h_1 \otimes h_2.$$

Preuve :

1) On veut montrer que $M \otimes H \simeq H \otimes M$ avec $M \in \mathcal{M}_A^H$.

- Montrons que l'application :

$$\begin{array}{rl} \alpha : & M \otimes H \longrightarrow H \otimes M \\ & m \otimes h \longmapsto hS_H^{-1}(m_1) \otimes m_0 \end{array}$$

est $A-$linéaire à droite, $H-$linéaire à gauche, $H-$colinéaire à droite . Soient $a \in A$; $h, h' \in H$ et $m \in M$.

$$
\begin{aligned}
\alpha(h'(m\otimes h)a) &= \alpha((m\otimes(h'h))a)\\
&= \alpha(ma_0\otimes(h'h)a_1)\\
&= ((h'h)a_1)S_H^{-1}((ma_0)_1)\otimes(ma_0)_0\\
&= ((h'h)a_1)S_H^{-1}(m_1a_{01})\otimes m_0a_{00}\\
&= ((h'h)a_1)S_H^{-1}(a_{01})S_H^{-1}(m_1)\otimes m_0a_{00}\\
&= (h'h)a_1S_H^{-1}(a_{01})S_H^{-1}(m_1)\otimes m_0a_{00}\\
&= (h'h)a_2S_H^{-1}(a_1)S_H^{-1}(m_1)\otimes m_0a_0\\
&= (h'h)a_{12}S_H^{-1}(a_{11})S_H^{-1}(m_1)\otimes m_0a_0\\
&= (h'h)\varepsilon_H(a_1)1_HS_H^{-1}(m_1)\otimes m_0a_0\\
&= (h'h)S_H^{-1}(m_1)\otimes m_0a_0\varepsilon_H(a_1)\\
&= (h'h)S_H^{-1}(m_1)\otimes m_0a\\
&= h'(hS_H^{-1}(m_1)\otimes m_0)a\\
&= h'\alpha(m\otimes h)a
\end{aligned}
$$

$\alpha(h'(m\otimes h)a)=h'\alpha(m\otimes h)a$, donc l'application α est $A-$linéaire à droite et $H-$linéaire à gauche.

$$
\begin{aligned}
\alpha(m\otimes h)_0\otimes\alpha(m\otimes h)_1 &= (hS_H^{-1}(m_1)\otimes m_0)_0\otimes(hS_H^{-1}(m_1)\otimes m_0)_1\\
&= (hS_H^{-1}(m_1))_1\otimes m_{00}\otimes(hS_H^{-1}(m_1))_2m_{01}\\
&= h_1S_H^{-1}(m_1)_1\otimes m_{00}\otimes h_2S_H^{-1}(m_1)_2m_{01}\\
&= h_1S_H^{-1}(m_{12})\otimes m_{00}\otimes h_2S_H^{-1}(m_{11})m_{01}\\
&= h_1S_H^{-1}(m_3)\otimes m_0\otimes h_2S_H^{-1}(m_2)m_1\\
&= h_1S_H^{-1}(m_2)\otimes m_0\otimes h_2S_H^{-1}(m_{12})m_{11}\\
&= h_1S_H^{-1}(m_2)\otimes m_0\otimes h_2\varepsilon_H(m_1)1_H\\
&= h_1S_H^{-1}(\varepsilon_H(m_1)m_2)\otimes m_0\otimes h_21_H\\
&= h_1S_H^{-1}(\varepsilon_H(m_{11})m_{12})\otimes m_0\otimes h_2\\
&= h_1S_H^{-1}(m_1)\otimes m_0\otimes h_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha((m\otimes h)_0)\otimes(m\otimes h)_1 &= \alpha(m\otimes h_1)\otimes h_2\\
&= h_1S^{-1}(m_1)\otimes m_0\otimes h_2.
\end{aligned}
$$

$\alpha(m\otimes h)_0\otimes\alpha(m\otimes h)_1 = \alpha((m\otimes h)_0)\otimes(m\otimes h)_1,$
donc l'application α est $H-$colinéaire.

- Montrons que les applications $\alpha : M\otimes H\longrightarrow H\otimes M$ et $\lambda : H\otimes M\longrightarrow M\otimes H$ sont inverses l'une de l'autre.

$$
\begin{aligned}
(\alpha\circ\lambda)(h\otimes m) &= \alpha(m_0\otimes hm_1)\\
&= (hm_1)S_H^{-1}(m_{01})\otimes m_{00}\\
&= hm_{12}S_H^{-1}(m_{11})\otimes m_0\\
&= h\varepsilon_H(m_1)1_H\otimes m_0\\
&= h1_H\otimes m_0\varepsilon_H(m_1)\\
&= h\otimes m\\
&= id_{H\otimes M}(h\otimes m)
\end{aligned}
\quad\text{et}\quad
\begin{aligned}
(\lambda\circ\alpha)(m\otimes h) &= \lambda(hS_H^{-1}(m_1)\otimes m_0)\\
&= m_{00}\otimes hS_H^{-1}(m_1)m_{01}\\
&= m_0\otimes hS_H^{-1}(m_{12})m_{11}\\
&= m_0\otimes h\varepsilon_H(m_1)1_H\\
&= m_0\varepsilon_H(m_1)\otimes h1_H\\
&= m\otimes h\\
&= id_{M\otimes H}(m\otimes h)
\end{aligned}
$$

$\alpha\circ\lambda=id_{H\otimes M}$ et $\lambda\circ\alpha=id_{M\otimes H}$; donc α et λ sont inverses l'une de l'autre.
En conclusion, on a $M\otimes H\simeq H\otimes M$ pour tout $M\in\mathcal{M}_A^H$.

2) On veut montrer que $N\otimes H\in{}_H\mathcal{M}_A^H$.
i) Soient $n\in N$, $\quad h,h',h''\in H$ et $a,b\in A$

$$\begin{aligned}(h'h'')(n\otimes h) &= n\otimes (h'h'')h\\ &= n\otimes h'(h''h)\\ &= h'(n\otimes (h''h))\\ &= h'(h''(n\otimes h)),\end{aligned}$$

d'où $N\otimes H\in {}_H\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}(n\otimes h)(ab) &= n(ab)_0\otimes h(ab)_1\\ &= n(a_0b_0)\otimes h(a_1b_1)\\ &= (na_0)b_0\otimes (ha_1)b_1\\ &= (na_0\otimes ha_1)b\\ &= ((n\otimes h)a)b,\end{aligned}$$

d'où $N\otimes H\in \mathcal{M}_A$.

$$\begin{aligned}(h'(n\otimes h))a &= (n\otimes h'h)a\\ &= na_0\otimes (h'h)a_1\\ &= na_0\otimes h'(ha_1)\\ &= h'(na_0\otimes ha_1)\\ &= h'((n\otimes h)a).\end{aligned}$$

Donc $N\otimes H$ est un $(H,A)-$bimodule (c'est-à-dire, $N\otimes H\in {}_H\mathcal{M}_A$).

ii) $N\otimes H\in \mathcal{M}_A^H$?

On a déjà vu que $N\otimes H\in \mathcal{M}_A$. Il reste à montrer que $N\otimes H\in \mathcal{M}^H$ et la compatibilité.

$$\begin{aligned}(n\otimes h)_0\otimes \Delta_{N\otimes H}((n\otimes h)_1) &= n\otimes h_1\otimes \Delta_H(h_2)\\ &= n\otimes h_1\otimes h_{21}\otimes h_{22}\\ &= n\otimes h_1\otimes h_2\otimes h_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((n\otimes h)_0)\otimes (n\otimes h)_1 &= \varphi(n\otimes h_1)\otimes h_2\\ &= n\otimes h_{11}\otimes h_{12}\otimes h_2\\ &= n\otimes h_1\otimes h_2\otimes h_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n\otimes h)_0\varepsilon((n\otimes h)_1) &= n\otimes h_1\varepsilon_H(h_2)\\ &= n\otimes h\\ &= id_{N\otimes H}(n\otimes h).\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$(n\otimes h)_0\otimes \Delta_{N\otimes H}((n\otimes h)_1)=\varphi((n\otimes h)_0)\otimes (n\otimes h)_1$$

et

$$(n\otimes h)_0\varepsilon((n\otimes h)_1)=id_{N\otimes H}(n\otimes h).$$

Donc $N\otimes H\in \mathcal{M}^H$.

$$\begin{aligned}\varphi((n\otimes h)a) &= \varphi(na_0\otimes ha_1)\\ &= na_0\otimes (ha_1)_1\otimes (ha_1)_2\\ &= na_0\otimes h_1a_{11}\otimes h_2a_{12}\\ &= na_0\otimes h_1a_1\otimes h_2a_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n\otimes h)_0a_0\otimes (n\otimes h)_1a_1 &= (n\otimes h_1)a_0\otimes h_2a_1\\ &= na_{00}\otimes h_1a_{01}\otimes h_2a_1\\ &= na_0\otimes h_1a_1\otimes h_2a_2\end{aligned}$$

$$\varphi((n\otimes h)a) = (n\otimes h)_0a_0\otimes (n\otimes h)_1a_1, \text{ d'où la compatibilité.}$$

On a donc $N\otimes H\in \mathcal{M}_A^H$.

iii) On doit enfin montrer que $N\otimes H\in {}_H\mathcal{M}^H$.

On a déjà montré que $N \otimes H \in {}_H\mathcal{M}$ et $N \otimes H \in \mathcal{M}^H$. Il reste à vérifier la compatibilité.

$$\begin{aligned}
\varphi(h'(n \otimes h) &= \varphi(n \otimes h'h) \\
&= n \otimes (h'h)_1 \otimes (h'h)_2 \\
&= n \otimes h'_1 h_1 \otimes h'_2 h_2 \\
h'_1(n \otimes h)_0 \otimes h'_2(n \otimes h)_1 &= h'_1(n \otimes h_1) \otimes h'_2 h_2 \\
&= n \otimes h'_1 h_1 \otimes h'_2 h_2
\end{aligned}$$

$$\varphi(h'(n \otimes h) = h'_1(n \otimes h)_0 \otimes h'_2(n \otimes h)_1$$; ce qui prouve la compatibilité.

Ainsi, $N \otimes H \in {}_H\mathcal{M}^H$.

Par suite *i),ii)* et *iii)* $\Leftrightarrow N \otimes H \in {}_H\mathcal{M}_A^H$. ■

Chapitre 3

L'EXTENSION DU THÉORÈME DE SCHNEIDER ET SES CONSÉQUENCES

3.1 QUELQUES RÉSULTATS SUR LES MORPHISMES DE MODULES DE HOPF RELATIFS

Sauf mention expresse du contraire, dans cette partie, H est une algèbre de Hopf projective sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$, A est une algèbre de $H-$comodule à droite et toutes les applications sont $\mathbb{K}-$linéaires.

3.1.1 Anneau d'endomorphismes de modules de Hopf relatifs

Proposition 3.1.1 *On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps, H une algèbre de Hopf de dimension finie et $B = A^{coH}$. Si $M \in \mathcal{M}_A^H$ et $N \in \mathcal{M}_A$ alors,*

i) M est un $(H^* - B)-$bimodule.

ii) $Hom_B(M, N)$ est un H^*-module à droite avec l'action définie par :

$$(f.h^*)(m) = f(h^*.m) = h^*(m_1)f(m_0), \quad f \in Hom_B(M, N), \quad h^* \in H^* \quad et \quad m \in M.$$

Preuve

i) M est un H^*-module à gauche, avec l'action définie par :
$h^*.m = m_0 h^*(m_1), \forall m \in M, h^* \in H^*$. En effet,

$$\begin{aligned}(h^*g^*).m &= m_0(h^*g^*)(m_1)\\ &= m_0 h^*(m_{11})g^*(m_{12})\\ &= m_{00}h^*(m_{01})g^*(m_1)\\ &= (h^*.m_0)g^*(m_1)\\ &= h^*.(m_0 g^*(m_1))\\ &= h^*.(g^*.m)\end{aligned}$$

M est un $B-$module à droite, car M est un $A-$module à droite et B est une sous-algèbre de A.
De plus : $\forall b \in B, h^* \in H^*$ et $m \in M$;

$$h^*.(mb) = h^*((mb)_1)(mb)_0 = h^*(m_1 1_H)m_0 b = h^*(m_1)m_0 b = (h^*.m)b;$$

d'où M est un $(H^*, B)-$bimodule.

ii) Soient $f \in Hom_B(M, N)\,; \quad g^*, h^* \in H^*$ et $m \in M, b \in B$.

$$(f.h^*)(mb) = h^*((mb)_1)f((mb)_0) = h^*(m_1)f(m_0 b) = h^*(m_1)f(m_0)b = (f.h^*)(m)b.$$

Ainsi, $f.h^*$ est $B-$linéaire à droite, donc $f.h^* \in Hom_B(M,N)$.

$$\begin{array}{ll} [f.(h^*g^*)](m) & = f[(h^* * g^*).m] \\ & = (h^*g^*)(m_1)f(m_0) \\ & = h^*(m_{11})g^*(m_{12})f(m_0) \\ & = h^*(m_1)g^*(m_2)f(m_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} [(f.h^*).g^*](m) & = (f.h^*)(g^*.m) \\ & = g^*(m_1)((f.h^*)(m_0)) \\ & = g^*(m_1)f(h^*.m_0) \\ & = g^*(m_1)h^*(m_{01})f(m_{00}) \\ & = g^*(m_2)h^*(m_1)f(m_0) \\ & = h^*(m_1)g^*(m_2)f(m_0)\,;\ \text{car } \mathbb{K} \text{ commutatif.} \\ f.(h^*g^*) = (f.h^*).g^* & \Rightarrow Hom_B(M,N) \text{ est un } H^*-\text{module à droite.} \end{array}$$

Proposition 3.1.2 *i) Si M est un $(H,A)-$bimodule ($M \in {}_H\mathcal{M}_A$), alors $End_A(M)$ est une algèbre de $H-$module à gauche avec l'action à gauche définie par :*

$$(h.f)(m) = h_1 f(S_H(h_2)m).$$

ii) $End_A^H(M)$ est une sous-algèbre de $End_A(M)$ et aussi un $H-$comodule à droite.

Preuve

i) On sait que $End_A(M)$ est un sous-groupe additif de $End_{\mathbb{K}}(M)$ qui est un $H-$module à gauche avec l'action donnée ci-dessus. Soient $h \in H$; $f, g \in End_A(M)$; $h \in H$ et $m \in M$.

- A-t-on $h.f \in End_A(M)$?

$$\begin{array}{ll} (h.f)(ma) & = h_1 f(S_H(h_2)(ma)) \\ & = h_1 f((S_H(h_2)m)a) \\ & = [h_1 f(S_H(h_2)m)]a \\ & = [(h.f)(m)]a\,;\ \text{on a } h.f \in End_A(M). \end{array}$$

Donc $End_A(M)$ est un sous$-H-$module de $End_{\mathbb{K}}(M)$.

- A-t-on $h.(f \circ g) = (h_1.f) \circ (h_2.g)$ et $h.id_M = \varepsilon_H(h)id_M$?

$$\begin{array}{ll} [(h_1.f) \circ (h_2.g)](m) & = (h_1.f)[h_{21}g(S_H(h_{22})m))] \\ & = h_{11}f[S_H(h_{12})h_{21}g(S_H(h_{22})m))] \\ & = h_1 f[S_H(h_{21})h_{22}g(S_H(h_3)m))] \\ & = h_1 f[\varepsilon_H(h_2)1_H g(S_H(h_3)m))] \\ & = h_1 f[1_H g(S_H(\varepsilon_H(h_2)h_3)m))] \\ & = h_1 f[g(S_H(\varepsilon_H(h_{21})h_{22})m))] \\ & = h_1 f[g(S_H(h_2)m))] \\ & = h_1[(f \circ g)(S_H(h_2)m)] \\ & = [h.(f \circ g)](m) \\ \text{et} & \\ (h.id_M)(m) & = h_1(id_M(S_H(h_2)m)) \\ & = h_1(S_H(h_2)m) \\ & = h_1 S_H(h_2)m = \varepsilon_H(h)1_H m = \varepsilon_H(h)m = \varepsilon_H(h)id_M(m). \end{array}$$

Donc $End_A(M)$ est une algèbre de $H-$module à gauche.

ii) Montrons que $End_A^H(M)$ est une sous-algèbre de $End_A(M)$ et un $H-$comodule à droite.

- $End_A^H(M)$ est une sous-algèbre de $End_A(M)$.
  En effet, $End_A^H(M)$ est un sous$-\mathbb{K}-$module de $End_A(M)$. De plus $f \circ g \in End_A^H(M)$ si $f, g \in End_A^H(M)$ et $id_M \in End_A^H(M)$.

- Soients $f \in End_A^H(M)$ et $m \in M$.

$$\begin{aligned}
[(id_M \otimes \Delta_H) \circ \varphi](f)(m) &= (id_M \otimes \Delta_H)(f(m)_0 \otimes f(m)_1) \\
&= (id_M \otimes \Delta_H)(f(m_0) \otimes m_1) \\
&= f(m_0) \otimes m_{11} \otimes m_{12} \\
&= f(m_0) \otimes m_1 \otimes m_2 \\
[(\varphi \otimes id_H) \circ \varphi](f)(m) &= (\varphi \otimes id_H)(f(m)_0 \otimes f(m)_1) \\
&= (\varphi \otimes id_H)(f(m_0) \otimes m_1) \\
&= \varphi(f)(m_0) \otimes m_1 \\
&= f(m_0)_0 \otimes f(m_1)_1 \otimes m_1 \\
&= f(m_{00}) \otimes m_{11} \otimes m_1 \\
&= f(m_0) \otimes m_1 \otimes m_2 \\
\text{et} & \\
[(id_M \otimes \varepsilon_H) \circ \varphi](f)(m) &= (id_M \otimes \varepsilon_H)(f(m)_0 \otimes f(m)_1) \\
&= (id_M \otimes \varepsilon_H)(f(m_0) \otimes m_1) \\
&= f(m_0) \otimes \varepsilon_H(m_1) \\
&= f(m_0)\varepsilon_H(m_1) \\
&= f(m_0\varepsilon_H(m_1)) \\
&= f(m).
\end{aligned}$$

  Ainsi, on a

$$[(id_M \otimes \Delta_H) \circ \varphi](f) = [(\varphi \otimes id_H) \circ \varphi](f) \quad et \quad [(id_M \otimes \varepsilon_H) \circ \varphi](f) = f.$$

  Donc $End_A^H(M)$ est un $H-$comodule à droite. ■

Lemme 3.1.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Si $M \in \mathcal{M}_A^H$, alors $End_A(M)$ est une algèbre de H^*-module à gauche avec l'action à gauche définie par :*

$$(h^*.f)(m) = h^*(f(m_0)_1 S_H(m_1))f(m_0)_0.$$

Preuve :

On sait déjà que $End_A(M)$ est une algèbre Soient $h^*, g^* \in H^*$; $f, l \in End_A(M)$; $a \in A$ et $m \in M$.

- A-t-on $h^*.f \in End_A(M)$?

$$\begin{aligned}
(h^*.f)(ma) &= h^*[f((ma)_0)_1 S_H((ma)_1)]f((ma)_0)_0 \\
&= h^*[f(m_0a_0)_1 S_H(m_1a_1)]f(m_0a_0)_0 \\
&= h^*[f(m_0)_1 a_{01} S_H(a_1) S_H(m_1)]f(m_0)_0 a_{00} \\
&= h^*[f(m_0)_1 a_{11} S_H(a_{12}) S_H(m_1)]f(m_0)_0 a_0 \\
&= h^*[f(m_0)_1 \varepsilon(a_1) 1_H S_H(m_1)]f(m_0)_0 a_0 \\
&= h^*[f(m_0)_1 1_H S_H(m_1)]f(m_0)_0 a_0 \varepsilon(a_1) \\
&= h^*[f(m_0)_1 S_H(m_1)]f(m_0)_0 a \\
&= (h^*.f)(m)a;
\end{aligned}$$

  donc $h^*.f \in End_A(M)$.

- A-t-on $(g^*h^*).f = g^*.(h^*.f)$?

$$\begin{aligned}
[(g^*h^*).f](m) &= (g^*h^*)[f(m_0)_1 S_H(m_1)]f(m_0)_0 \\
&= g^*[(f(m_0)_1 S_H(m_1))_1]h^*[(f(m_0)_1 S_H(m_1))_2]f(m_0)_0 \\
&= g^*[f(m_0)_{11} S_H(m_1)_1]h^*[f(m_0)_{12} S_H(m_1)_2]f(m_0)_0 \\
&= g^*[f(m_0)_1 S_H(m_{12})]h^*[f(m_0)_2 S_H(m_{11})]f(m_0)_0 \\
&= g^*[f(m_0)_1 S_H(m_2)]h^*[f(m_0)_2 S_H(m_1)]f(m_0)_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[g^*.(h^*.f)](m) &= g^*[(h^*.f)(m_0)_1 S_H(m_1)](h^*.f)(m_0)_0 \\
&= g^*[\{h^*[f(m_{00})_1 S_H(m_{01})]f(m_{00})_0\}_1 S_H(m_1)] \\
&\quad \times \{h^*[f(m_{00})_1 S_H(m_{01})]f(m_{00})_0\}_0 \\
&= g^*[h^*[f(m_0)_1 S_H(m_1)]_1 f(m_0)_{01} S_H(m_2)] \\
&\quad \times h^*[f(m_0)_1 S_H(m_1)]_0 f(m_0)_{00} \\
&= g^*[1_{\mathbb{K}} f(m_0)_{01} S_H(m_2)]h^*[f(m_0)_1 S_H(m_1)]f(m_0)_{00} \\
&= g^*[f(m_0)_1 S_H(m_2)]h^*[f(m_0)_2 S_H(m_1)]f(m_0)_0
\end{aligned}$$

$(g^*h^*).f = g^*.(h^*.f)$; $End_A(M)$ est bien un H^*-module à gauche.

- Compatibilité : on a ; $\Delta(h^*) = h_1^* \otimes h_2^*$; $\forall h^* \in H^*$.

$$\begin{aligned}
[(h_1^*.f)\circ(h_2^*.l)](m) &= (h_1^*.f)[h_2^*[l(m_0)_1 S_H(m_1)]l(m_0)_0] \\
&= h_2^*[l(m_0)_1 S_H(m_1)](h_1^*.f)(l(m_0)_0) \\
&= h_2^*[l(m_0)_1 S_H(m_1)]h_1^*[f(l(m_0)_{00})_1 S_H(l(m_0)_{01})]f(l(m_0)_{00})_0 \\
&= h_1^*[f(l(m_0)_{00})_1 S_H(l(m_0)_{01})]h_2^*[l(m_0)_1 S_H(m_1)]f(l(m_0)_{00})_0 \\
&= h^*[f(l(m_0)_{00})_1 S_H(l(m_0)_{01})l(m_0)_1 S_H(m_1)]f(l(m_0)_{00})_0 \\
&= h^*[f(l(m_0)_0)_1 S_H(l(m_0)_1)l(m_0)_2 S_H(m_1)]f(l(m_0)_0)_0 \\
&= h^*[f(l(m_0)_0)_1 S_H(l(m_0)_{11})l(m_0)_{12} S_H(m_1)]f(l(m_0)_0)_0 \\
&= h^*[f(l(m_0)_0)_1 \varepsilon_H(l(m_0)_1) S_H(m_1)]f(l(m_0)_0)_0 \\
&= h^*[f(l(m_0))_1 S_H(m_1)]f(l(m_0)_0)_0 \\
&= h^*[(f\circ l)(m_0)_1 S_H(m_1)](f\circ l)(m_0)_0 \\
&= [h^*(f\circ l)](m)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(h^*.id_M)(m) &= h^*[id_M(m_0)_1 S_H(m_1)]id_M(m_0)_0 \\
&= h^*(m_{01} S_H(m_1))m_{00} \\
&= h^*(m_{11} S_H(m_{12}))m_0 \\
&= h^*(\varepsilon(m_1)1_H)m_0 \\
&= h^*(1_H)m_0\varepsilon(m_1) \\
&= \varepsilon_{H^*}(h^*)m \\
&= \varepsilon_{H^*}(h^*)id_M(m) ;
\end{aligned}$$

avec $id_M = 1_{End_A(M)}$ pour la loi de composition des applications ; d'où la compatibilité.

Donc $End_A(M)$ est une algèbre de H^*-module à gauche. ■

Remarque 3.1.1 *On peut former le produit semi-direct à gauche $End_A(M)\#H^*$ de $End_A(M)$ et H^*. Sa multiplication est*

$$(f\#h^*)(g\#u^*) = f(h_1^*.g)\#h_2^*u^*, \quad f,g \in End_A(M) \quad et \quad h^*,u^* \in H^*.$$

Théorème 3.1.1 *(Théorème de Schneider, [9, Théorème 3.2])*
Soient $\mathbb{K}$ un corps, H une algèbre de Hopf de dimension finie, et A une algèbre de $H-$comodule à droite qui est une extension $H-$galoisienne de $B = A^{coH}$. Alors il existe un isomorphisme d'algèbres

$$End_A(M)\#H^* \simeq End_B(M) \quad pour \quad tout \quad M \in \mathcal{M}_A^H.$$

Preuve : Soit Φ l'application définie par :
$\Phi \quad : End_A(M)\#H^* \longrightarrow End_B(M)\,; \quad f \otimes h^* \longmapsto f.h^*$

- Soient $f \in End_B(M)$ et $h^* \in H^*$.
$$\begin{aligned}\Phi(f \otimes h^*)(mb) &= (f.h^*)(mb)\\ &= h^*((mb)_1)f((mb)_0)\\ &= h^*(m_1)f(m_0b)\\ &= h^*(m_1)f(m_0)b\\ &= (f.h^*)(m)b\\ &= \Phi(f\otimes h^*)(m)b\,;\ \text{donc } \Phi(f\otimes h^*) \in End_B(M)\end{aligned}$$

- Soient $f, g \in End_A(M)\,;\ h^*, u^* \in H^*$ et $m \in M$.

$$\begin{aligned}\Phi[(f\otimes h^*)(g\otimes u^*)](m) &= \Phi[f\circ(h_1^*.g)\otimes(h_2^*u^*)](m)\\ &= [f\circ(h_1^*.g).(h_2^*u^*)](m)\\ &= (h_2^*u^*)(m_1)(f\circ(h_1^*.g))(m_0)\\ &= h_2^*(m_{11})u^*(m_{12})f[h_1^*(g(m_{00})_1S_H(m_{01}))g(m_{00})_0]\\ &= h_2^*(m_{11})u^*(m_{12})h_1^*(g(m_{00})_1S_H(m_{01}))f(g(m_{00})_0)\\ &= h_2^*(m_2)u^*(m_3)h_1^*(g(m_0)_1S_H(m_1))f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(m_3)h_1^*(g(m_0)_1S_H(m_1))h_2^*(m_2)f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(m_3)h^*(g(m_0)_1S_H(m_1)m_2)f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(m_2)h^*(g(m_0)_1S_H(m_{11})m_{12})f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(m_2)h^*(g(m_0)_1\varepsilon_H(m_1)1_H)f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(\varepsilon_H(m_1)m_2)h^*(g(m_0)_1 1_H)f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(\varepsilon_H(m_{11})m_{12})h^*(g(m_0)_1)f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(m_1)h^*(g(m_0)_1)f(g(m_0)_0)\\ &= h^*(g(m_0)_1)u^*(m_1)f(g(m_0)_0)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}[\Phi(f\otimes h^*)\Phi(g\otimes u^*)](m) &= [(f.h^*)(g.u^*)](m)\\ &= (f.h^*)(u^*(m_1)g(m_0))\\ &= u^*(m_1)(f.h^*)(g(m_0))\\ &= u^*(m_1)h^*(g(m_0)_1)f(g(m_0)_0)\\ &= u^*(m_1)h^*(g(m_0)_1)f(g(m_0)_0)\\ &= h^*(g(m_0)_1)u^*(m_1)f(g(m_0)_0)\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}[\Phi(id_M\otimes\varepsilon_H)](m) &= (id_M.\varepsilon_H)(m)\\ &= \varepsilon_H(m_1)id_M(m_0)\\ &= \varepsilon_H(m_1)m_0\\ &= m_0\varepsilon_H(m_1)\\ &= m = id_M(m)\end{aligned}$$
$\Phi[(f\otimes h^*)(g\otimes u^*) = \Phi(f\otimes h^*)\Phi(g\otimes u^*)$ et $\Phi(id_M\otimes\varepsilon_H) = id_M = 1_{End_A(M)}$. Donc Φ est un morphisme d'algèbres.

Comme A/B est une extension galoisienne, il existe d'après *[10, 3.4]* et *[9, Théorème 3.2]* une application bien définie
$$\Psi : End_B(M) \longrightarrow End_A(M)\#H^*$$
qui est l'inverse de Φ. Donc Φ est bijective, d'où $End_A(M)\#H^* \simeq End_B(M)$.■

Proposition 3.1.3 *[5, Proposition 3.7]. On suppose que l'antipode S_H est bijective et l'extension A/B (où $B = A^{coH}$) est telle que l'application*
$$\phi_M : A\otimes_B M^{coH} \longrightarrow M, \quad a\otimes_B x \longmapsto ax,$$

soit un isomorphisme et $M, N \in \mathcal{M}_A^H$. *Alors l'application*

$$\phi : Hom_A(M,N) \otimes H^* \longrightarrow Hom_B(M,N)$$

telle que $\phi(f \otimes h^*) = f.h^*$ *est injective.*

Définition 3.1.1 *Soient* $M, N \in \mathcal{M}^H$ *et* $f \in Hom(M,N) = Hom_{\mathbb{K}}(M,N)$.
On considère l'application $\varphi(f) \in Hom(M, N \otimes H)$ *définie par :*

$$\varphi(f)(m) = f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_1 S_H(m_1), \quad m \in M.$$

On sait que $Hom(M,N) \otimes H \subset Hom(M, N \otimes H)$, *car* H *est un* $\mathbb{K}-$*module projectif. Si* $\varphi(f) \in Hom(M,N) \otimes H$, *on dit que* f *est un élément rationnel. On pose*

$$HOM(M,N) = \{f \in Hom(M,N)/\varphi(f) \in Hom(M,N) \otimes H\}.$$

Si $\mathbb{K}$ *est un corps et si* H *est de dimension finie, alors tous les éléments de* $Hom(M,N)$ *sont rationnels.* $HOM(M,N)$ *est un* $H-$*comodule et c'est le plus grand* H*-comodule contenu dans* $Hom(M,N)$ *appelé partie rationnelle de* $Hom(M,N)$.
Ainsi, si $\varphi(f) \in Hom(M,N) \otimes H$ *alors,* $\varphi(f) = f_0 \otimes f_1$ *où*

$$\varphi(f)(m) = f_0(m) \otimes f_1 = f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_1 S_H(m_1).$$

Si $M, N \in \mathcal{M}_A^H$, $HOM_A(M,N)$ *est l'ensemble des éléments rationnels de* $Hom_A(M,N)$, *c'est-à-dire,*

$$HOM_A(M,N) = HOM(M,N) \cap Hom_A(M,N).$$

On définit de la même manière $HOM_B(M,N)$, *où* $B = A^{coH}$.
On remarque que $HOM_A(M,N)$ *et* $HOM_B(M,N)$ *sont des* H^*-*modules à gauche avec l'action définie par :*

$$(h^*.f)(m) = h^*[f(m_0)_1 S_H(m_1)]f(m_0)_0 = h^*(f_1)f_0(m).$$

Lemme 3.1.2 *[12, Lemme 2.2]. Soit* $M \in \mathcal{M}_A^H$. *Alors* $HOM_A(M,M) = END_A(M)$ *est une algèbre de* $H-$*comodule à droite avec la structure de* $H-$*comodule définie ci-dessus. De la même manière,* $END_B(M)$ *est aussi une algèbre de* $H-$*comodule à droite.*

Preuve :

- $END_A(M)$ est un sous-espace vectoriel de $End_A(M)$ et $End_A(M)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre. On sait que si f et g sont des éléments rationnels de $END_{\mathbb{K}}(M)$ alors, $f \circ g$ est aussi rationnel. De plus si f et g sont $A-$linéaires alors $f \circ g$ est $A-$linéaire. On en déduit alors que $END_A(M)$ est une sous-algèbre de $End_A(M)$.
- $END_A(M)$ est un sous$-\mathbb{K}-$module de $END_{\mathbb{K}}(M)$ (qui est un $H-$comodule à droite, voir *[2, Section 1, p.3]*). De plus, soient $f \in END_A(M)$, $a \in A$ et $m \in M$.

$$\begin{aligned}
f_0(ma) \otimes f_1 &= f((ma)_0)_0 \otimes f((ma)_0)_1 S_H((ma)_1) \\
&= f(m_0a_0)_0 \otimes f(m_0a_0)_1 S_H(m_1a_1) \\
&= f(m_0)_0 a_{00} \otimes f(m_0)_1 a_{01} S_H(a_1) S_H(m_1) \\
&= f(m_0)_0 a_0 \otimes f(m_0)_1 a_{11} S_H(a_{12}) S_H(m_1) \\
&= f(m_0)_0 a_0 \otimes f(m_0)_1 \varepsilon_H(a_1) 1_H S_H(m_1) \\
&= f(m_0)_0 a_0 \varepsilon_H(a_1) \otimes f(m_0)_1 1_H S_H(m_1) \\
&= f(m_0)_0 a \otimes f(m_0)_1 S_H(m_1) \\
&= f_0(m)a \otimes f_1; \quad \text{d'où } f_0 \in END_A(M).
\end{aligned}$$

Donc $END_A(M)$ est un $H-$comodule à droite.

- Compatibilité
  Soient $f, g \in END_A(M)$ et $m \in M$. La définition de $\varphi(f) = f_0 \otimes f_1$ implique que :

$$f(m_0) \otimes S_H(m_1) = f_0(m)_0 \otimes S_H(f_0(m)_1)f_1.$$

  En effet :

$$\begin{aligned} f_0(m)_0 \otimes S_H(f_0(m)_1)f_1 &= f(m_0)_{00} \otimes S_H(f(m_0)_{01})f(m_0)_1 S_H(m_1) \\ &= f(m_0)_0 \otimes S_H(f(m_0)_{11})f(m_0)_{12} S_H(m_1) \\ &= f(m_0)_0 \otimes \varepsilon_H(f(m_0)_1)1_H S_H(m_1) \\ &= f(m_0)_0 \varepsilon_H(f(m_0)_1) \otimes 1_H S_H(m_1) \\ &= f(m_0) \otimes S_H(m_1). \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} [\varphi(f \circ g)](m) &= [(f \circ g)(m_0)]_0 \otimes [(f \circ g)(m_0)]_1 S_H(m_1) \\ &= [f(g(m_0))]_0 \otimes [f(g(m_0))]_1 S_H(m_1) \\ &= f[g_0(m)_0]_0 \otimes f[g_0(m)_0]_1 S_H[g_0(m)_1]g_1 \\ &= f[g_0(m_0)]_0 \otimes f_1 g_1 \\ &= (f_0 \circ g_0)(m) \otimes f_1 g_1. \\ \text{Donc,} \quad & \varphi(f \circ g) = f_0 \circ g_0 \otimes f_1 g_1 \\ & \text{et} \\ \varphi(id_M)(m) &= id_{M_0}(m) \otimes id_{M_1} \\ &= id_M(m_0)_0 \otimes id_M(m_0)_1 S_H(m_1) \\ &= m_{00} \otimes m_{01} S_H(m_1) \\ &= m_0 \otimes m_{11} S_H(m_{12}) \\ &= m_0 \otimes \varepsilon_H(m_1)1_H \\ &= m_0 \varepsilon_H(m_1) \otimes 1_H \\ &= m \otimes 1_H = id_M(m) \otimes 1_H; \end{aligned}$$

  d'où la compatibilité.
  On a alors montré que $END_A(M)$ est une algèbre de $H-$comodule à droite. Il en est de même pour $END_B(M)$. ■

Remarque 3.1.2 1) *[2, Lemme 1.1]. Si $M, N \in \mathcal{M}_A^H$, $Hom_A^H(M, N) = HOM_A(M, N)^{coH}$. En particulier, $End_A^H(M) = END_A(M)^{coH}$.*

2) *Si $M \in \mathcal{M}_A^H$, $END_A(M)$ est un $H-$module de Hopf avec la structure de $H-$module définie par*

$$(h.f)(m) = h_1 f(S_H(h_2)m).$$

3.1.2 Produit semi-direct généralisé

Définition 3.1.2 *Soient A une algèbre de $H-$comodule à droite et B une algèbre de $H-$module à droite. Le produit semi-direct à droite généralisé de A et B noté $A\#B$ est le $\mathbb{K}-$module $A \otimes B$ muni de la multiplication*

$$(a\#b)(a'\#b') = aa'_0\sharp(b.a_1)b', \quad a, a' \in A \quad et \quad b, b' \in B :$$

c'est une algèbre d'élément unité $1_A \otimes 1_B$.

Si $B = H$ muni de sa structure de comodule donnée par Δ_H, on retrouve le produit semi-direct à droite usuel.

Remarque 3.1.3 *On rappelle que H^* est une algèbre de $H-$module à droite avec l'action :*

$$(h^* \leftharpoonup h)(h') = h^*(hh'), \quad \forall h^* \in H^*; h \in H.$$

D'après le Lemme 3.1.2 et la Remarque 3.1.3, on peut former sur H le produit semi-direct à droite généralisé $END_A(M)\#H^*$ de $END_A(M)$ et H^*. C'est le $\mathbb{K}-$module $END_A(M)\otimes H^*$ muni de la multiplication :

$$(f\#h^*)(g\#u^*) = (f\circ g_0)\#(h^* \leftharpoonup g_1)u^*, \quad f,g\in END_A(M) \quad et \quad h^*,u^*\in H^*.$$

Proposition 3.1.4 *[5, Proposition 3.8]. On suppose que l'antipode S_H est bijective et l'extension A/B (où $B=A^{coH}$) est telle que l'application*

$$\phi_M : A\otimes_B M^{coH} \longrightarrow M, \quad a\otimes_B x \longmapsto ax,$$

soit un isomorphisme et $M,N\in\mathcal{M}_A^H$.
Alors l'application $\phi : END_A(M)\#H^* \longrightarrow End_B(M)$ telle que

$$\phi(f\otimes h^*) = f.h^*,$$

est un morphisme d'algèbres injectif.

Preuve : D'après la Proposition 3.1.3, l'application ϕ est injective. Il reste à montrer que c'est un morphisme d'algèbres avec ce produit. Soient $f,g\in END_A(M)$; $h^*,u^*\in H^*$ et $m\in M$.

$$\begin{aligned}
\phi[(f\otimes h^*)(g\otimes u^*)](m) &= \phi[f\circ g_0\otimes (h^*\leftharpoonup g_1)u^*](m)\\
&= [f\circ g_0.(h^*\leftharpoonup g_1)u^*](m)\\
&= [(h^*\leftharpoonup g_1)u^*](m_1)f\circ g_0(m_0)\\
&= (h^*\leftharpoonup g_1)(m_{11})u^*(m_{12})f(g_0(m_0))\\
&= (h^*\leftharpoonup g_1)(m_1)u^*(m_2)f(g_0(m_0))\\
&= h^*(g_1m_1)u^*(m_2)f(g_0(m_0))\\
&= h^*(g(m_{00})_1S_H(m_{01})m_1)u^*(m_2)f(g(m_{00})_0)\\
&= h^*(g(m_0)_1S_H(m_{11})m_{12})u^*(m_2)f(g(m_0)_0)\\
&= h^*(g(m_0)_1\varepsilon_H(m_1)1_H)u^*(m_2)f(g(m_0)_0)\\
&= h^*(g(m_0)_11_H)u^*(\varepsilon_H(m_1)m_2)f(g(m_0)_0)\\
&= h^*(g(m_0)_1)u^*(\varepsilon_H(m_{11})m_{12})f(g(m_0)_0)\\
&= h^*(g(m_0)_1)u^*(m_1)f(g(m_0)_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\phi(f\otimes h^*)\phi(g\otimes u^*)](m) &= [(f.h^*)(g.u^*)](m)\\
&= (f.h^*)(u^*(m_1)g(m_0))\\
&= u^*(m_1)(f.h^*)(g(m_0))\\
&= u^*(m_1)h^*(g(m_0)_1)f(g(m_0)_0)\\
&= h^*(g(m_0)_1)u^*(m_1)f(g(m_0)_0)
\end{aligned}$$

On a bien $\phi[(f\otimes h^*)(g\otimes u^*)] = \phi(f\otimes h^*)\phi(g\otimes u^*)$ donc ϕ est un morphisme d'algèbres injectif.■

Théorème 3.1.2 *(voir [12]). Soient A une algèbre de $H-$comodule à droite et $M\in {}_H\mathcal{M}_A^H$.*
Alors :

1) *[12, Théorème 2.4]. L'application $\phi : End_A^H(M)\#H \longrightarrow END_A(M)$ définie par*

$$\phi(f\otimes h) = f.h,$$

est un isomorphisme d'algèbres de $H-$comodules à droite.

2) *[12, Théorème 1.3]. Si H est de dimension finie et $U=H\otimes A\simeq A\otimes H\in {}_H\mathcal{M}_A^H$; alors les algèbres $A\#H^*$ et $End_A^H(U)$ sont isomorphes.*

Preuve :

1) L'application $\phi : End_A^H(M)\#H \longrightarrow END_A(M)$ est telle que $\forall f \in End_A^H(M), h \in H$ et $m \in M$; on ait

$$\phi(f \otimes h)(m) = (f.h)(m) = f(hm).$$

D'après le théorème fondamental des modules de Hopf et la Remarque 3.1.2, l'application ϕ est un isomorphisme de modules de Hopf et en particulier, c'est un isomorphisme de $H-$comodules à droite. Il reste à montrer que c'est un morphisme d'algèbres.

Soient $f, g \in End_A^H(M)$, $\quad h, h' \in H$ et $m \in M$.

$$\begin{aligned}
[\phi(f \otimes h) \circ \phi(g \otimes h')](m) &= [(f.h) \circ (g.h')](m) \\
&= (f.h)[(g.h')(m)] \\
&= (f.h)(g(h'm)) \\
&= f(h \rightharpoonup g(h'm))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\phi[(f \otimes h)(g \otimes h')](m) &= \phi[f(h_1 \rightharpoonup g) \otimes h_2h'](m) \\
&= [f(h_1 \rightharpoonup g).h_2h'](m) \\
&= f(h_1 \rightharpoonup g)((h_2h')m) \\
&= f[(h_1 \rightharpoonup g)(h_2(h'm))] \\
&= f[h_{11} \rightharpoonup g[S_H(h_{12})h_2(h'm)]] \\
&= f[h_1 \rightharpoonup g[S_H(h_2)h_3(h'm)]] \\
&= f[h_1 \rightharpoonup g[S_H(h_{21})h_{22}(h'm)]] \\
&= f[h_1 \rightharpoonup g[\varepsilon_H(h_2)1_H(h'm)]] \\
&= f[h_1\varepsilon_H(h_2) \rightharpoonup g[1_H(h'm)]] \\
&= f[h \rightharpoonup g[1_H(h'm)]] \\
&= f(h \rightharpoonup g(h'm))
\end{aligned}$$

$$\phi(f \otimes h) \circ \phi(g \otimes h') = \phi[(f \otimes h)(g \otimes h')];$$

donc l'application ϕ est un morphisme d'algèbres.

2) *cf [12, Théorème 1.3, (11)].* ■

Il a été prouvé dans *[5, Corollaire 2.5]* que l'assertion 1) (dans le cas où H est de dimension finie) et l'assertion 2) du Théorème 3.1.2 sont des cas particuliers du Théorème 3.1.1 (théorème de Schneider).

3.2 L'EXTENSION DU THÉORÈME DE SCHNEIDER ET SES CONSÉQUENCES

3.2.1 Le "grand" produit semi-direct

Définition 3.2.1 *Soit A une algèbre de $H-$comodule à droite.*
On note $\#(H, A)$, le produit semi-direct appelé le "grand" produit semi-direct, qui est le $\mathbb{K}-$module $Hom_{\mathbb{K}}(H, A)$ muni de la multiplication :

$$(f.g)(h) = f(g(h_2)_1h_1)g(h_2)_0, \quad f, g \in \#(H, A) \quad et \quad h \in H.$$

Proposition 3.2.1 *1) Muni de la multiplication définie ci-dessus, $\#(H, A)$ est une algèbre associative unitaire d'unité $\mu_H \circ \varepsilon_H = \varepsilon_H$.*
2) A est une sous-algèbre de $\#(H, A)$.

3) $H^* = Hom(H, \mathbb{K})$ muni de la convolution, est une sous-algèbre de $\#(H, A)$. De plus, on a un isomorphisme d'algèbres $A\#H^* \simeq \#(H, A)$ via

$$(a\#h^*)(h) = h^*(h)a.$$

Preuve :

1) Montrons que $\#(H, A)$ est un anneau.

i) Soient $f \in \#(H, A)$ et $h \in H$. On a :

$$\begin{aligned}(f.\varepsilon_H)(h) &= f[\varepsilon_H(h_2)_1 h_1]\varepsilon_H(h_2)_0 \\ &= f[\varepsilon_H(h_2)h_1]\varepsilon_H(h_2) \\ &= f[\varepsilon_H(h_{12})h_{11}]\varepsilon_H(h_2) \\ &= f(h_1)\varepsilon_H(h_2) \\ &= f(h_1\varepsilon_H(h_2)) \\ &= f(h)\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}(\varepsilon_H.f)(h) &= \varepsilon_H[f(h_2)_1 h_1]f(h_2)_0 \\ &= \varepsilon_H[f(h_2)_1]\varepsilon_H(h_1)f(h_2)_0 \\ &= f(h_2)_0\varepsilon_H[f(h_2)_1]\varepsilon_H(h_1) \\ &= f(h_2)\varepsilon_H(h_1) \\ &= f(\varepsilon_H(h_1)h_2 \\ &= f(h)\end{aligned}$$

$f.\varepsilon_H = f = \varepsilon_H.f$. Donc ε_H est bien l'unité de $\#(H, A)$ pour ce produit.

ii) L'associativité : soient $f, g, l \in \#(H, A)$ et $h \in H$

$$\begin{aligned}[(f.g).l](h) &= (f.g)[l(h_2)_1 h_1]l(h_2)_0 \\ &= f[g\{(l(h_2)_1 h_1)_2\}_1\{l(h_2)_1 h_1\}_1]g\{(l(h_2)_1 h_1)_2\}_0 l(h_2)_0 \\ &= f[g\{l(h_2)_{12}h_{12}\}_1 l(h_2)_{11}h_{11}]g\{l(h_2)_{12}h_{12}\}_0 l(h_2)_0 \\ &= f[g\{l(h_3)_{12}h_2\}_1 l(h_3)_{11}h_1]g\{l(h_3)_{12}h_2\}_0 l(h_3)_0 \\ &= f[g\{l(h_3)_2 h_2\}_1 l(h_3)_1 h_1]g\{l(h_3)_2 h_2\}_0 l(h_3)_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f.(g.l)](h) &= f[(g.l)(h_2)_1 h_1](g.l)(h_2)_0 \\ &= f[\{g[l(h_{22})_1 h_{21}]_1 l(h_{22})_0\}_1 h_1]\{g[l(h_{22})_1 h_{21}]l(h_{22})_0\}_0 \\ &= f[g[l(h_{22})_1 h_{21}]_{11}l(h_{22})_{01}h_1]g[l(h_{22})_1 h_{21}]_0 l(h_{22})_{00} \\ &= f[g[l(h_3)_1 h_2]_1 l(h_3)_{01}h_1]g[l(h_3)_1 h_2]_0 l(h_3)_{00} \\ &= f[g\{l(h_3)_2 h_2\}_1 l(h_3)_1 h_1]g\{l(h_3)_2 h_2\}_0 l(h_3)_0\end{aligned}$$

$(f.g).l = f.(g.l,)$ d'où l'associativité.

iii) La distributivité de ce produit par rapport à l'addition.
Soient $f, g, l \in \#(H, A)$ et $h \in H$.

$$\begin{aligned}[(g+l).f](h) &= (g+l)[f(h_2)_1 h_1]f(h_2)_0 \\ &= (g[f(h_2)_1 h_1] + l[f(h_2)_1 h_1])f(h_2)_0 \\ &= g[f(h_2)_1 h_1]f(h_2)_0 + l[f(h_2)_1 h_1]f(h_2)_0 \\ &= (g.f)(h) + (l.f)(h), \text{ d'où la distributivité à droite.}\end{aligned}$$

$i), ii)$ et $iii) \Leftrightarrow \#(H, A)$ est un anneau. Il est facile de vérifier que

$$\lambda(f.g) = (\lambda f).g = f.(\lambda g).$$

2) Il est évident que A est une sous-algèbre de $\#(H, A)$ via l'application

$$a \longmapsto [h \longmapsto \varepsilon_H(h)a].$$

3) On montre d'abord que H^* est une sous-algèbre de $\#(H, A)$ puis $A\#H^* \simeq \sharp(H, A)$. Il est clair que H^* est un sous$-\mathbb{K}-$module de $Hom_{\mathbb{K}}(H, A) = \#(H, A)$ comme $\mathbb{K}-$module.

- Soient $h^*, g^* \in H^*$ et $h \in H$.

$$\begin{aligned}(h^*.g^*)(h) &= h^*(g^*(h_2)_1 h_1)g^*(h_2)_0 \\ &= h^*(1_{\mathbb{K}}h_1)g^*(h_2) \text{ car } g^*(h_2) \in \mathbb{K} \text{ et } \forall\lambda \in \mathbb{K}, \lambda_0 \otimes \lambda_1 = \lambda \otimes 1_{\mathbb{K}} \simeq \lambda \\ &= h^*(h_1)g^*(h_2)\,; \text{ ce qui n'est que la convolution.}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(h^*.\varepsilon_H)(h) &= h^*(\varepsilon_H(h_2)_1 h_1)\varepsilon_H(h_2)_0 \\ &= h^*(h_1)\varepsilon_H(h_2) = h^*(h_1\varepsilon_H(h_2)) = h^*(h).\end{aligned}$$

De même, $(\varepsilon_H.h^*)(h) = h^*(h).$

Donc H^* est une sous-algèbre de $\#(H, A)$.

- Soit l'application $\gamma : A\#H^* \longrightarrow \#(H, A)$ telle que :

$$\gamma(a\#h^*)(h) = h^*(h)a.$$

Il est bien connu que l'application γ ainsi définie, est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espaces vectoriels si H est de dimension finie : $Hom_{\mathbb{K}}(H, A) = A \otimes H^*$ comme $\mathbb{K}-$module et par définition, $A\#H^* = A \otimes H^*$ comme $\mathbb{K}-$module. Il reste alors à montrer que γ est un morphisme d'algèbres.

$$\begin{aligned}
\gamma[(a\#h^*)(b\#g^*)](h) &= \gamma[ab_0\#(h^* \leftharpoonup b_1)g^*](h) \\
&= ((h^* \leftharpoonup b_1)g^*)(h)ab_0 \\
&= (h^* \leftharpoonup b_1)(h_1)g^*(h_2)ab_0 \\
&= h^*(b_1h_1)g^*(h_2)ab_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\gamma(a\#h^*).\gamma(b\#g^*)](h) &= \gamma(a\#h^*)[\gamma(b\#g^*)(h_2)_1h_1]\gamma(b\#g^*)(h_2)_0 \\
&= \gamma(a\#h^*)[(g^*(h_2)b)_1h_1](g^*(h_2)b)_0 \\
&= \gamma(a\#h^*)[g^*(h_2)_1b_1h_1]g^*(h_2)_0b_0 \\
&= \gamma(a\#h^*)(1_{\mathbb{K}}b_1h_1)g^*(h_2)b_0 \\
&= h^*(b_1h_1)ag^*(h_2)b_0 \\
&= h^*(b_1h_1)g^*(h_2)ab_0
\end{aligned}$$

$\gamma[(a\#h^*)(b\#g^*) = \gamma(a\#h^*).\gamma(b\#g^*)$; $\forall a, b \in A$ et $h^*, g^* \in H^*$. Donc γ est un morphisme d'algèbres ; d'où $A\#H^* \simeq \#(H, A)$. ■

3.2.2 L'extension du théorème de Schneider

Lemme 3.2.1 *Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S_H et A une algèbre de $H-$comodule à droite. Soient $M \in \mathcal{M}_A^H$ et $N \in \mathcal{M}_A$. Alors $Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N))$ et $Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H)$ sont des H^*-modules à droite avec les actions respectivement définies par :*

$$(f.h^*)(h) = f(h^*.h) = h^*(h_1)f(h_2), \quad f \in Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N)), \quad h^* \in H^* \quad \textit{et} \quad h \in H$$

et

$$(u.h^*)(m\otimes h) = h^*(m_1S_H(h_1))u(m_0\otimes h_2), \quad u \in Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H), m \in M, h^* \in H^* \quad h \in H.$$

Preuve :

- Soient $f \in Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N))$, $h^*, g^* \in H^*$ et $h \in H$.

$$(f.h^*)(\lambda h) = h^*((\lambda h)_2)f((\lambda h)_1) = h^*(h_2)f(\lambda h_1) = \lambda h^*(h_1)f(h_2) = \lambda(f.h^*)(h); \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

$f.h^*$ est $\mathbb{K}-$linéaire.

$$\begin{aligned}
[f.(h^*g^*)](h) &= (h^*g^*)(h_2)f(h_1) \\
&= h^*(h_{21})g^*(h_{22})f(h_1) \\
&= h^*(h_{12})g^*(h_2)f(h_{11}) \\
&= g^*(h_2)h^*(h_{12})f(h_{11}) \\
&= g^*(h_2)(f.h^*)(h_1) \\
&= [(f.h^*).g^*](h)
\end{aligned}$$

$f.(h^*g^*) = (f.h^*).g^* \quad \Rightarrow Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N))$ est un H^*-module à droite.

- Soient $u \in Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H)$; $m \in M$, $h^*, g^* \in H^*$ et $h \in H$.

$$\begin{array}{rl} (u.h^*)((m \otimes h)a) & = (u.h^*)(ma_0 \otimes ha_1) \\ & = h^*((ma_0)_1 S_H((ha_1)_1)u((ma_0)_0 \otimes (ha_1)_2) \\ & = h^*(m_1 a_{01} S_H(h_1 a_{11}))u(m_0 a_{00} \otimes h_2 a_{12}) \\ & = h^*(m_1 a_{11} S_H(h_1 a_{12}))u(m_0 a_0 \otimes h_2 a_2) \\ & = h^*(m_1 a_{11} S_H(a_{12}) S_H(h_1))u(m_0 a_0 \otimes h_2 a_2) \\ & = h^*(m_1 \varepsilon(a_1) 1_H S_H(h_1))u(m_0 a_0 \otimes h_2 a_2) \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_0 a_0 \otimes h_2 \varepsilon(a_1) a_2) \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_0 a_0 \otimes h_2 a_1) \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u((m_0 \otimes h_2)a) \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2)a \\ & = (u.h^*)(m \otimes h)a. \end{array}$$

Donc $u.h^*$ est $A-$linéaire à droite.

$$\begin{array}{rl} [(u.h^*)(m \otimes h)]_0 \otimes [(u.h^*)(m \otimes h)]_1 & = [h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2)]_0 \\ & \quad \otimes [h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2)]_1 \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))_0 u(m_0 \otimes h_2)_0 \\ & \quad \otimes h^*(m_1 S_H(h_1))_1 u(m_0 \otimes h_2)_1 \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2)_0 \otimes u(m_0 \otimes h_2)_1 \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_{00} \otimes h_{21}) \otimes (m_{01} \otimes h_{22}) \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_{00} \otimes h_{21}) \otimes (m_{01} \otimes h_{22}) \\ & = h^*(m_2 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2) \otimes (m_1 \otimes h_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (u.h^*)((m \otimes h)_0) \otimes (m \otimes h)_1 & = (u.h^*)(m_0 \otimes h_1) \otimes (m_1 \otimes h_2) \\ & = h^*(m_{01} S_H(h_{11}))u(m_{00} \otimes h_{12}) \otimes (m_1 \otimes h_2) \\ & = h^*(m_1 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2) \otimes (m_2 \otimes h_3) \\ & = h^*(m_2 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2) \otimes (m_1 \otimes h_3) \end{array}$$

$[(u.h^*)(m \otimes h)]_0 \otimes [(u.h^*)(m \otimes h)]_1 = (u.h^*)((m \otimes h)_0) \otimes (m \otimes h)_1$. Donc $(u.h^*)$ est $H-$colinéaire à droite.
$u.h^*$ est $A-$linéaire et $H-$colinéaire à droite donc ;

$$u.h^* \in Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H).$$

$$\begin{array}{rl} [u.(h^* g^*)](m \otimes h) & = (h^* g^*)(m_1 S_H(h_1))u(m_0 \otimes h_2) \\ & = h^*((m_1 S_H(h_1))_1) g^*((m_1 S_H(h_1))_2) u(m_0 \otimes h_2) \\ & = h^*(m_{11} S_H(h_{12})) g^*(m_{12} S_H(h_{11})) u(m_0 \otimes h_2) \\ & = g^*(m_{12} S_H(h_{11})) h^*(m_{11} S_H(h_{12})) u(m_0 \otimes h_2) \\ & = g^*(m_1 S_H(h_1)) h^*(m_{01} S_H(h_{21})) u(m_{00} \otimes h_{22}) \\ & = g^*(m_1 S_H(h_1))(u.h^*)(m_0 \otimes h_2) \\ & = [(u.h^*).g](m \otimes h) \\ u.(h^* g^*) = & (u.h^*).g ; \end{array}$$

donc $Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H)$ est un H^*-module à droite.■

Le théorème suivant est le résultat principal dans notre étude.

Théorème 3.2.1 *[7, Théorème 2.1].*
Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S_H ; A une algèbre de $H-$comodule à droite. Soient $M \in \mathcal{M}_A^H$ et $N \in \mathcal{M}_A$. Alors ;

i) $Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N)) \simeq Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H)$; isomorphisme de H^*-modules à droite.

ii) L'isomorphisme de i) induit un morphisme d'algèbres injectif

$$\#(H, END_A(M)) \hookrightarrow End_A^H(M \otimes H).$$

Preuve :

$i)$ Soient β et α les applications respectivement définies par :

$$\beta : Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M,N)) \longrightarrow Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H)$$

telle que :

$$\beta(f)(m\otimes h) = f(m_1 S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2$$

et

$$\alpha : Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H) \longrightarrow Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M,N))$$

telle que :

$$\alpha(u)(h)(m) = (id_N\otimes\varepsilon)u(m_0\otimes S_H^{-1}(h)m_1)$$

où $(id_N\otimes\varepsilon_H)((n_i\otimes h_i)a) = n_i\varepsilon_H(h_i)a = (id_N\otimes\varepsilon_H)(n_i\otimes h_i)a$; $\forall n_i\in N, h_i\in H$, et $a\in A$ où $i=\{1;2;3...;n\}$.

- Montrons que $\beta(f)$ est $A-$linéaire, $H-$colinéaire à droite et que β est H^*-linéaire à droite.

$$\begin{aligned}
\beta(f)((m\otimes h)a) &= \beta(f)(ma_0\otimes ha_1)\\
&= f[(ma_0)_1 S_H((ha_1)_1)]((ma_0)_0)\otimes(ha_1)_2\\
&= f[m_1a_{01}S_H(h_1a_{11})](m_0a_{00})\otimes h_2a_{12}\\
&= f[m_1a_{01}S_H(a_{11})S_H(h_1)](m_0a_{00})\otimes h_2a_{12}\\
&= f[m_1a_{11}S_H(a_{12})S_H(h_1)](m_0a_0)\otimes h_2a_2\\
&= f[m_1\varepsilon_H(a_1)1_H S_H(h_1)](m_0a_0)\otimes h_2a_2\\
&= f[m_1 1_H S_H(h_1)](m_0a_0)\otimes h_2\varepsilon_H(a_1)a_2\\
&= f[m_1S_H(h_1)](m_0)a_0\otimes h_2a_1\\
&= (f[m_1S_H(h_1)](m_0)\otimes h_2)a\\
&= \beta(f)(m\otimes h)a\,;\ \forall a\in A.\ \text{Donc } \beta(f) \text{ est } A-\text{linéaire.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\beta(f)(m\otimes h)]_0\otimes[\beta(f)(m\otimes h)]_1 &= [f(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2]_0\\
&\quad\otimes[f(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2]_1\\
&= f(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_{21}\otimes h_{22}\\
&= f(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2\otimes h_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(f)((m\otimes h)_0)\otimes(m\otimes h)_1 &= \beta(f)(m\otimes h_1)\otimes h_2\\
&= f(m_1S_H(h_{11}))(m_0)\otimes h_{12}\otimes h_2\\
&= f(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2\otimes h_3
\end{aligned}$$

$[\beta(f)(m\otimes h)]_0\otimes[\beta(f)(m\otimes h)]_1 = \beta(f)((m\otimes h)_0)\otimes(m\otimes h)_1$, donc $\beta(f)$ est $H-$colinéaire à droite.

$$\begin{aligned}
\beta(f.h^*)(m\otimes h) &= (f.h^*)(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2\\
&= h^*((m_1S_H(h_1))_2)f((m_1S_H(h_1))_1)(m_0)\otimes h_2\\
&= h^*(m_{12}S_H(h_{11}))f(m_{11}S_H(h_{12}))(m_0)\otimes h_2\\
&= h^*(m_{12}S_H(h_{11}))f(m_{11}S_H(h_{12}))(m_0)\otimes h_2\\
&= h^*(m_1S_H(h_1))f(m_{01}S_H(h_{21}))(m_{00})\otimes h_{22}\\
&= h^*(m_1S_H(h_1))\beta(f)(m_0\otimes h_2)\\
&= \beta(f).h^*(m\otimes h)\,;\ \forall h^*\in H^*,\ \text{d'où } \beta \text{ est } H^*-\text{linéaire à droite.}
\end{aligned}$$

- Montrons que $\alpha(u)(h)$ (avec $u\in Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H)$) est $A-$linéaire à droite.

$$\begin{aligned}
\alpha(u)(h)(ma) &= (id_N\otimes\varepsilon_H)u((ma)_0\otimes S_H^{-1}(h)(ma)_1)\\
&= (id_N\otimes\varepsilon_H)u(m_0a_0\otimes S_H^{-1}(h)m_1a_1)\\
&= (id_N\otimes\varepsilon_H)u((m_0\otimes S_H^{-1}(h)m_1)a)\\
&= (id_N\otimes\varepsilon_H)u(m_0\otimes S_H^{-1}(h)m_1)a\,;\ \text{car } u \text{ est } A-\text{linéaire}\\
&= \alpha(u)(h)(m)a\,;\ \forall a\in A,\ \text{d'où } \alpha(u)(h) \text{ est } A-\text{linéaire.}
\end{aligned}$$

- Montrons enfin que les applications β et α sont inverses l'une de l'autre.

$$\begin{aligned}
(\beta\circ\alpha)(u)(m\otimes h) &= \alpha(u)(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2\\
&= (id_N\otimes\varepsilon_H)[u(m_{00}\otimes S_H^{-1}(m_1S_H(h_1))m_{01})\otimes h_2]\\
&= u(m_{00}\otimes S_H^{-1}(m_1S_H(h_1))m_{01})\otimes\varepsilon_H(h_2)\\
&= u(m_{00}\otimes S_H^{-1}(S_H(h_1))S_H^{-1}(m_1)m_{01})\otimes\varepsilon_H(h_2)\\
&= u(m_0\otimes h_1S_H^{-1}(m_{12})m_{01})\otimes\varepsilon_H(h_2)\\
&= u(m_0\otimes h_1\varepsilon_H(m_1)1_H)\otimes\varepsilon_H(h_2)\\
&= u(m_0\varepsilon_H(m_1)\otimes h_11_H)\varepsilon_H(h_2)\\
&= u(m\otimes h_1\varepsilon_H(h_2))\\
&= u(m\otimes h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha\circ\beta)(f)(h)(m) &= (id_N\otimes\varepsilon_H)\beta(f)(m_0\otimes S_H^{-1}(h)m_1)\\
&= (id_N\otimes\varepsilon_H)[f(m_{01}S_H((S_H^{-1}(h)m_1)_1))(m_{00})\otimes(S_H^{-1}(h)m_1)_2]\\
&= (id_N\otimes\varepsilon_H)[f(m_{01}S_H(S_H^{-1}(h_2)m_{11})(m_{00})\otimes S_H^{-1}(h_1)m_{12}]\\
&= f(m_{01}S_H(m_{11}S_H(S_H^{-1}(h_2)))(m_{00})\otimes\varepsilon_H(S_H^{-1}(h_1)m_{12})\\
&= f(m_{01}S_H(m_{11}h_2)(m_{00})\otimes\varepsilon_H(S_H^{-1}(h_1))\varepsilon_H(m_{12})\\
&= f(m_{11}S_H(m_{12}h_2)(m_0)\otimes\varepsilon_H(h_1)\varepsilon_H(m_2)\\
&= f(\varepsilon_H(m_1)1_H\varepsilon_H(h_1)h_2)(m_0)\otimes\varepsilon_H(m_2)\\
&= f(1_H\varepsilon_H(h_1)h_2)(m_0)\otimes\varepsilon_H(\varepsilon_H(m_1)m_2)\\
&= f(h)(m_0)\otimes\varepsilon_H(m_1)\\
&= f(h)(m_0)\varepsilon_H(m_1)\\
&= f(h)(m_0\varepsilon_H(m_1))\\
&= f(h)(m)
\end{aligned}$$

On a bien $(\beta\circ\alpha) = id_{Hom_A^H(M\otimes H,N\otimes H)}$ et $(\alpha\circ\beta) = id_{Hom_{\mathbb{K}}(H,Hom_A(M,N))}$. Donc β est un morphisme de H^*-modules bijectif d'inverse α.
En conclusion, $Hom_{\mathbb{K}}(H,Hom_A(M,N))\simeq Hom_A^H(M\otimes H,N\otimes H)$, isomorphisme de H^*-modules à droite.

ii) D'après *i*), on a un isomorphisme de H^*-modules

$$\beta : Hom_{\mathbb{K}}(H,Hom_A(M,N))\longrightarrow Hom_A^H(M\otimes H,N\otimes H)$$

On a aussi l'isomorphisme et l'inclusion de $\mathbb{K}-$modules

$$\#(H,END_A(M))\simeq Hom_{\mathbb{K}}(H,END_A(M))\subset Hom_{\mathbb{K}}(H,End_A(M)).$$

Notons β' la restriction de β à $\#(H,END_A(M))$. D'après *i*), β' est injective. Il reste à montrer que β' est un morphisme d'algèbres.

Soient $f,g\in\#(H,END_A(M))$. A-t-on : $\beta'(f.g)=\beta'(f)\circ\beta'(g)$ et $\beta'(\varepsilon_H)=id_{END_A(M\otimes H)}$?

$$\begin{aligned}
\beta'(f.g)(m\otimes h) &= (f.g)(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2\\
&= (f.g)(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2\\
&= f[g((m_1S_H(h_1))_2)_1(m_1S_H(h_1))_1]g((m_1S_H(h_1))_2)_0(m_0)\otimes h_2\\
&= f[g(m_{12}S_H(h_{11}))_1m_{11}S_H(h_{12})]g(m_{12}S_H(h_{11}))_0(m_0)\otimes h_2\\
&= f[g(m_2S_H(h_1))_1m_1S_H(h_2)]g(m_2S_H(h_1))_0(m_0)\otimes h_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta'(f)\circ\beta'(g)(m\otimes h) &= \beta'(f)[g(m_1S_H(h_1))(m_0)\otimes h_2]\\
&= f[(g(m_1S_H(h_1))(m_0))_1S_H(h_{21})](g(m_1S_H(h_1))(m_0))_0\otimes h_{22}\\
&= f[(g(m_1S_H(h_1))(m_{00}\varepsilon_H(m_{01})))_1 1_H S_H(h_2)]\\
&\quad\times(g(m_1S_H(h_1))(m_{00}))_0\otimes h_3\\
&= f[(g(m_1S_H(h_1))(m_{00}))_1\varepsilon_H(m_{01})1_HS_H(h_2)]\\
&\quad\times(g(m_1S_H(h_1))(m_{00}))_0\otimes h_3\\
&= f[(g(m_2S_H(h_1))(m_0))_1\varepsilon_H(m_1)1_HS_H(h_2)]\\
&\quad\times(g(m_2S_H(h_1))(m_0))_0\otimes h_3\\
&= f[(g(m_2S_H(h_1))(m_0))_1S_H(m_{11})m_{12}S_H(h_2)]\\
&\quad\times(g(m_2S_H(h_1))(m_0))_0\otimes h_3\\
&= f[(g(m_3S_H(h_1))(m_0))_1S_H(m_1)m_2S_H(h_2)]\\
&\quad\times(g(m_3S_H(h_1))(m_0))_0\otimes h_3\\
&= f[(g(m_2S_H(h_1))(m_{00}))_1S_H(m_{01})m_1S_H(h_2)]\\
&\quad\times(g(m_2S_H(h_1))(m_{00}))_0\otimes h_3\\
&= f[(g(m_2S_H(h_1)))_1m_1S_H(h_2)](g(m_2S_H(h_1)))_0(m_0)\otimes h_3
\end{aligned}
$$

De plus :

$$
\begin{aligned}
\beta'(\varepsilon_H)(m\otimes h) &= \varepsilon_H(m_1S_H(h_1))m_0\otimes h_2\\
&= \varepsilon_H(m_1)\varepsilon(S_H(h_1))m_0\otimes h_2\\
&= \varepsilon_H(m_1)\varepsilon(h_1)m_0\otimes h_2\\
&= \varepsilon_H(m_1)(m_0)\otimes\varepsilon(h_1)h_2\\
&= m\otimes h = id_{END_A(M\otimes H)}(m\otimes h)
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a $\beta'(f.g)=\beta'(f)\circ\beta'(g)$ et $\beta'(\varepsilon_H)=id_{END_A(M\otimes H)}$; donc $\beta' : \#(H, END_A(M)) \longrightarrow End_A^H(M\otimes H)$ est un morphisme d'algèbres injectif.■

Nous donnons maintenant quelques conséquences du Théorème 3.2.1. Le corollaire suivant est un nouveau théorème de dualité d'algèbre de Hopf de dimension infinie.

Corollaire 3.2.1 *[7, Corollaire 2.1].*
Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S_H et A une algèbre de $H-$comodule à droite. Soit $M\in\mathcal{M}_A^H$, où M est un $A-$module de type fini.

i) Alors on a les isomorphismes d'algèbres

$$\#(H, End_A(M)) \simeq End_A^H(M\otimes H)$$

et

$$\#(H, End_A(M))\#H \simeq END_A(M\otimes H).$$

ii) Si de plus, $M\in {}_H\mathcal{M}_A^H$, on a l'isomorphisme d'algèbres

$$\#(H, End_A(M)\#H) \simeq End_A^H(M\otimes H).$$

Preuve :

i) Puisque M est de type fini, on a $END_A(M)=End_A(M)$. D'après le Théorème 3.2.1, on un isomorphisme de H^*-modules

$$\#(H, END_A(M)) = \#(H, End_A(M)) \simeq End_A^H(M\otimes H).$$

Il est facile de voir que c'est un morphisme d'algèbres. Pour le deuxième isomorphisme, d'après le Lemme 2.3.3, l'assertion 2) ; si $M\in\mathcal{M}_A^H$
alors, on a $M\otimes H\in {}_H\mathcal{M}_A^H$.
D'après le Théorème 3.1.2, on a les isomorphismes d'algèbres

$$End_A^H(M)\#H \simeq END_A(M) \quad et \quad End_A^H(M\otimes H)\#H \simeq END_A(M\otimes H).$$

D'après la première assertion du corollaire on a un isomorphisme d'algèbres

$$\#(H, End_A(M)) \simeq End_A^H(M \otimes H).$$

$$Donc, \quad on \quad a \quad \#(H, End_A(M))\#H \simeq End_A^H(M \otimes H)\#H.$$

$$Par \quad suite, \quad on \quad obtient \quad \#(H, End_A(M))\#H \simeq END_A(M \otimes H).$$

$ii)$ D'après l'assertion $i)$, on a

$$\#(H, End_A(M)) \simeq End_A^H(M \otimes H).$$

D'après l'assertion 1) du Théorème 3.1.2, on a ;

$$End_A^H(M)\#H \simeq END_A(M).$$

Puisque M est de type fini, on a $End_A(M) = END_A(M)$. Donc on a les isomorphismes d'algèbres suivants

$$End_A^H(M)\#H \simeq End_A(M) \quad et \quad \#(H, End_A(M)) \simeq End_A^H(M \otimes H).$$

On en déduit que

$$\#(H, End_A^H(M)\#H) \simeq End_A^H(M \otimes H),$$

isomorphisme d'algèbres.■

Corollaire 3.2.2 *[7, Corollaire 2.2].*
Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective, A une algèbre de $H-$comodule à droite et $B = A^{coH}$ telle que A/B soit une extension $H-$galoisienne. Soient $M \in {}_H\mathcal{M}_A^H$ et $N \in \mathcal{M}_A$. Alors

$i)$ *on a un isomorphisme de H^*-modules à droite*

$$Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N)) \simeq Hom_B(M, N),$$

$$f \longmapsto [m \longmapsto f(m_1)(m_0)].$$

Les actions de H^* sur $Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N))$ et sur $Hom_B(M, N)$ sont respectivement données par

$$(f.h^*)(h) = h^*(h_2)f(h_1) \quad et \quad (f.h^*)(m) = h^*(m_1)f(m_0).$$

$ii)$ *L'isomorphisme dans $i)$ induit un morphisme d'algèbres injectif*

$$\#(H, END_A(M)) \hookrightarrow End_B(M)$$

$iii)$ *On a un isomorphisme d'algèbres*

$$\#(H, A) \simeq End_B(A).$$

Preuve :

$i)$ D'après le Théorème 3.2.1,

$$Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M, N)) \simeq Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H).$$

Soit l'application $\vartheta : Hom_A^H(M \otimes H, N \otimes H) \longrightarrow Hom_B(M, N)$ définie par

$$\vartheta(f)(m) = f(m_1)(m_0).$$

$\vartheta(f)$ est la restriction de tout $f \in Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H)$ à $(M\otimes H)^{coH}$. Or on a

$$(M\otimes H)^{coH} = M\otimes 1_H \simeq M \quad ([8, Lemme \quad 1.3.]),$$

donc elle est bijective. De plus, $\forall f, f' \in Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H)$, $h^* \in H^*$ et $m\in M$, on a :

$$\vartheta(f)(mb) = f((mb)_1)((mb)_0) = f(m_1)(m_0 b) = f(m_1)(m_0)b = \vartheta(f)(m)b; \forall b\in B.$$

$$\vartheta(f+f')(m) = (f+f')(m_1)(m_0) = f(m_1)(m_0) + f'(m_1)(m_0) = \vartheta(f)(m) + \vartheta(f')(m);$$

$$\begin{aligned}\vartheta(f.h^*)(m) &= (f.h^*)(m_1)(m_0)\\ &= h^*(m_{12})f(m_{11})(m_0)\\ &= h^*(m_1)f(m_{01})(m_{00})\\ &= h^*(m_1)\vartheta(f)(m_0)\\ &= \vartheta(f).h^*(m)\end{aligned}$$

$\vartheta : Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H) \longrightarrow Hom_B(M,N)$ est donc un morphisme de H^*-modules à droite bijectif. Il en résulte que
$Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H) \simeq Hom_B(M,N)$, isomorphisme de H^*-modules à droite. On a alors

$$Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M,N)) \simeq Hom_A^H(M\otimes H, N\otimes H) \simeq Hom_B(M,N);$$

d'où

$$Hom_{\mathbb{K}}(H, Hom_A(M,N)) \simeq Hom_B(M,N).$$

ii) En posant $M = N$ alors,

$$Hom_{\mathbb{K}}(H, End_A(M)) \simeq End_B(M)$$

$$\Rightarrow Hom_{\mathbb{K}}(H, END_A(M)) \hookrightarrow End_B(M)$$

morphisme de H^*-modules à droite injectif.
On sait par définition que $Hom_{\mathbb{K}}(H, END_A(M)) = \#(H, END_A(M))$ comme H^*-module à droite. Il reste donc à montrer que

$$\vartheta : \#(H, END_A(M)) \longrightarrow End_B(M)$$

est un morphisme d'algèbres.
Soient $f, g \in \#(H, END_A(M))$ et $m\in M$

$$\begin{aligned}\vartheta(f.g)(m) &= (f.g)(m_1)(m_0)\\ &= f(g(m_{12})_1 m_{11})g(m_{12})_0(m_0)\\ &= f(g(m_2)_1 m_1)g(m_2)_0(m_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\vartheta(f)\circ\vartheta(g)](m) &= \vartheta(f)[g(m_1)(m_0)]\\ &= f[(g(m_1)(m_0))_1](g(m_1)(m_0))_0\\ &= f[g(m_1)_1(m_0)_1]g(m_1)_0(m_0)_0\\ &= f(g(m_1)_1 m_{01})g(m_1)_0(m_{00})\\ &= f(g(m_2)_1 m_1)g(m_2)_0(m_0)\end{aligned}$$

$\vartheta(f.g) = \vartheta(f)\circ\vartheta(g)$ donc ϑ est bien un morphisme d'algèbres d'où

$$\#(H, END_A(M)) \hookrightarrow End_B(M),$$

morphisme d'algèbres injectif.

iii) Si $M = A$, alors on a :

$$\#(H, END_A(A)) \simeq End_B(A),$$

un isomorphisme d'algèbres. De plus $END_A(A) \simeq A$, donc

$$\#(H, A) \simeq End_B(A).\blacksquare$$

Remarque 3.2.1 *En prenant $M = N = A$ dans le Théorème 3.2.1, l'assertion i), et en tenant compte du Lemme 2.3.3 ; nous obtenons l'isomorphisme de $\mathbb{K}-$modules*

$$\chi : End_A^H(H \otimes A) \longrightarrow Hom_{\mathbb{K}}(H, A); \quad \chi(f)(h) = (\varepsilon_H \otimes 1)f(h \otimes 1),$$

donné par K.-H. Ulbrich dans [12,Lemme 1.2]. Ceci est un résultat comme celui [6,Proposition 4.1] : pour voir cela, considérons d'abord $H \otimes A$ comme un objet de ${}_A\mathcal{M}^H$ via

$$a(h \otimes b) = a_1 h \otimes a_0 b \quad et \quad h \otimes b \longmapsto h_1 \otimes b \otimes h_2,$$

pour tous $a, b \in A$ et $h \in H$.
Par conséquent, d'après [6,(3.2), p.66], $H \otimes A$ est un $\#(H, A)-$module à gauche par

$$f.(h \otimes a) = f(h_2)_1 h_1 \otimes f(h_2)_0 a.$$

Maintenant A est une algèbre de $H^{op,cop}-$comodule à droite via

$$a \longmapsto a_0 \otimes S_H^{-1}(a_1),$$

et notons le A'.
Ainsi,

$$\#(H, A) \longrightarrow \#(H^{op,cop}, A'); \quad f \longmapsto fS_H$$

est un isomorphisme d'anneau et sa composition avec l'isomorphisme de Ulbrich

$$\#(H^{op,cop}, A') \longrightarrow Hom_A^H(H \otimes A),$$

est exactement donné par la structure de module à gauche ci-dessus.

CONCLUSION

Le Théorème 3.2.1 qui est le résultat principal dans notre présentation est la version analogue en dimension infinie du théorème de H.-J. Schneider (Théorème 3.1.1). De ce résultat découlent immédiatement la Proposition 3.2.1 et la Proposition 3.1.3, ainsi que plusieurs nouveaux résultats. Certains d'entre eux étendent les résultats de *[9]* sur les modules gradués et les anneaux d'endomorphismes de modules gradués.

Bibliographie

[1] M. Beattie, Galois Extensions for Co-Frobenius Hopf Algebras, J. Algebra **198**, 164-183 (1997).

[2] S. Caenepeel and T. Guédénon, On the cohomology of relative Hopf modules.

[3] S. Caenepeel and T. Guédénon, Projectivity of a relative Hopf module over the subring of coinvariants.

[4] S. Dascalescu, C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, and B. Torrecillas, Duality theorems for graded algebras and coalgebras, J. Algebra **192** (1997), 261-276.

[5] S. Dascalescu, S. Raianu, and F. Van Oystaeyen, Some remarks on a theorem of H.-J. Schneider, Comm. Algebra **24** (1996), 4477-4493.

[6] M. Koppinen, Variations on the smash product with applications to group-graded rings, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), 61-80.

[7] C. Menini and S. Raianu, Morphisms of Relative Hopf Modules, Smash Products, and Duality, J. Algebra **219** (1999), 547-570.

[8] P. Schauenburg, Hopf modules and Yetter-Drinfel'd modules, J. Algebra **169** (1994), 874-890.

[9] H.-J. Schneider, Hopf Galois extensions, crossed products and Clifford Theory, in Advances in Hopf Algebras, edited by J. Bergen and S. Montgomery, Marcel Dekker Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol. **158** (1994), 267-298.

[10] H.-J. Schneider, Representation theory of Hopf Galois extensions, Israel J. Math. **72** (1990), 196-231.

[11] C. Schweigert, Hopf algebras, quantum groups and topological fild theory, Winter term 2014/15, Hamburg University, Department of Mathematics, Section Algebra and Number Theory and Center for Mathematical Physics, p.41.

[12] K.-H. Ulbrich, Smash products and comodules of linear maps, Tsukuba J. Math. **14** (1990), 371-378.