UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

École Doctorale Sciences, Technologies et Ingénierie

Année : 2016 N° d'ordre :

THÈSE

pour obtenir le grade de **DOCTEUR**
DE L'UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

Domaine : Sciences et Technologies
Mention : Mathématiques et Applications
Spécialité : Mathématiques appliquées
Option : Probabilité & Statistique

présentée par

Alioune COULIBALY

Couplage du principe de grandes déviations et de l'homogénéisation dans le cas des EDP paraboliques

Soutenue à Ziguinchor, le 16 novembre 2016 devant le jury composé de :

Président de jury	**Marie Salomon SAMBOU**	Professeur (UASZ, Sénégal)
Rapporteurs	**Aboubakary DIAKHABY**	Professeur (UGB, Sénégal)
	Auguste AMAN	Maître de Conférences (UFHBC, Côte d'Ivoire)
	Mamadou Abdoul DIOP	Maître de Conférences (UGB, Sénégal)
Examinateur	**Oumar SALL**	Maître de Conférences (UASZ, Sénégal)
Directeur de thèse	**Alassane DIEDHIOU**	Maître de Conférences (UASZ, Sénégal)

Thèse effectuée au sein du **Laboratoire Mathématiques et Applications**

de l'UFR Sciences et Technologies de l'Université Assane Seck de Ziguinchor

BP 523 - Ziguinchor - Sénégal

Résumé

C'est en cherchant des preuves
que j'ai trouvé des difficultés.
D. Diderot, Pensées philosophiques

Dans cette thèse nous considèrons une famille d'équations aux dérivées partielles (EDP) paraboliques, où l'opérateur est le générateur de la famille des équations différentielles stochastiques (EDS) étudiées par Freidlin et Sowers [24]. Nous nous intéressons au comportement de la solution de l'EDP en combinant le principe de grandes déviations et la théorie de l'homogénéisation. La classe d'EDP étudiée est la famille des équations de réaction-diffusion de type KPP (Kolmogrov-Petrovskii-Piskunov). Les estimations que nous avons obtenues sont l'analogue de celles de la formule de Varadhan (voir Dembo et Zeïtouni [13]). En outre, elles nous ont permis d'identifier (ou d'expliciter) une barrière puis de décrire des ensembles de convergence assez robustes pour la solution de l'EDP.

Mots-clé:

EDP - Homogénéisation - Principe de Grandes Déviations - Équations Hamilton Jacobi - Solutions de Viscosité - Formule de Girsanov - Formule d'Itô - Noyaux de Semigroupes Banachiques - Transformation de Legendre - Lagrangien - Hamiltonien .

Remerciements

Ora, lege, lege, relege, labora et invenies
(Prie, lis, lis , relis, travaille et tu trouveras)

À tout seigneur, tout honneur. Je souhaiterais commencer par présenter mes plus sincères remerciements à Monsieur Alassane DIEDHIOU. C'est avant tout le Directeur de thèse, le collaborateur et le Beau-parent que je souhaiterais remercier chaleureusement ici. Cette thèse ainsi qu'une grande partie des travaux qui le constituent n'auraient certainement pas vus le jour sans son aide précieuse, sa patience, sa volonté de partage et son enthousiasme de chaque instant.

J'aimerais remercier Monsieur A. Diakhaby et Monsieur M. A. Diop d'avoir accepté, tous les deux, le travail de rapporteur. Je me souviens de vos cours il y a plusieurs années de cela à l'UGB. Et je vous dois, entre autres choses, de m'avoir transmis des outils fondamentaux me permettant d'appréhender les directions de recherche.

Un grand merci à Monsieur A. Aman d'avoir également accepté ce travail de rapporteur. Cher Aman vous êtes aussi d'une certaine façon à l'origine de cette thèse : ça a été un grand plaisir de partager avec vous à l'école CIMPA Ziguinchor 2015.

Monsieur S. Sambou et Monsieur O. Sall m'ont fait l'honneur d'être membre de mon jury et c'est une grande joie. Si elles sont malheureusement trop rares lors des séminaires de Samedi, nos discussions (Mr. Sambou) constituent toujours des moments que je tiens pour agréables et enrichissants.

Il me tient à cœur néanmoins de remercier nommément : Clément Manga, Edouard Diouf, Diène Ngom, Timac Ngom, Massaer Paye, Mansour et Ibrahima Sané, Binta et Cheikh Bodian, PER-PATS de l'UFR Sciences et Technologies, mes collègues à LDZ, et tous mes camarades doctorants (au rendez-vous de Samedi).

Il ne serait ni correct ni juste de terminer ces remerciements sans un mot pour les amis proches (en particulier Mounirou Allaya, *ma banque* d'articles scientifiques), la famille et mon épouse Rokyatou Bodian. Même si je ne sais pas toujours l'exprimer, j'ai une reconnaissance immense pour le fait que vous acceptiez mes choix même s'ils ne sont pas toujours évidents à suivre, et que malgré cela vous soyez toujours présents.

Table des matières

Introduction 1

I Préliminaires 6

1 Processus stochastiques 7

1.1 Processus aléatoires 7

1.1.1 Variables aléatoires 7

1.1.2 Espace L^p 7

1.1.3 Processus aléatoires 9

1.2 Intégrale stochastique 12

1.2.1 Intégrale par rapport au M.B 13

1.2.2 Formule de Girsanov - Formule d'Itô 15

1.2.3 EDS - EDSR 16

1.3 Diffusion 19

1.3.1 Propriété de Markov 19

1.3.2 Semi-groupes - Générateurs 20

1.3.3 Mesure invariante 21

2 Approche probabiliste des EDP 23

2.1 Approches analytiques 23

2.1.1 Solvabilité et régularité 24

2.1.2 Existence et unicité 24

2.2 Équation de Poisson 26

2.3 Liens EDP & EDS et liens EDP & EDSR 27

2.3.1 EDP et diffusion 27

2.3.2 EDP et EDSR 31
2.4 Équations de type : KPP et HBJ 33
2.4.1 Les équations de réactions diffusions 33
2.4.2 Les équations Hamilton-Jacobi 34

3 Théorie de l'homogénéisation 35
3.1 Propriétés et complément sur l'équation de Poisson 36
3.1.1 Mesure invariante 36
3.1.2 Trou spectral 39
3.1.3 Théorème ergodique 39
3.1.4 Équation de Poisson 40
3.2 Homogénéisation et EDS 42
3.2.1 Méthodologie 42
3.2.2 Propriétés du coefficient de diffusivité effective 45
3.3 Homogénéisation et EDP 45

4 Principe de grandes déviations 48
4.1 Définition et propriété basique 48
4.2 Boîte à outils pour les grandes déviations 51
4.2.1 Principe de contraction 51
4.2.2 Caractérisation dans le cadre des inégalités de dérivation 51
4.3 Théorie de Freidlin-Wentzell 53
4.3.1 Théorème de Schilder 53
4.3.2 Théorème de Freidlin-Wentzell 54

II Couplage Homogénéisation et Grandes déviations 55

5 Cas où les effets sont équivalents 56
5.1 Introduction 57
5.2 Principe de grandes déviations 60
5.3 Étude de la Convergence 64

6 Cas où le PGD l'emporte sur l'homogénéisation 69

6.1 Introduction 70
6.2 Principe de grandes déviations 72
6.3 Étude de la convergence 79

Conclusions et perspectives **84**

Bibliographie **90**

Introduction

Cette thèse a pour objet l'étude de méthodes combinées d'homogénéisation et de grandes déviations dans le cas des équations aux dérivées partielles (EDP) paraboliques.

Homogénéisation

En mécanique, physique, ou ingénierie des bio-matériaux, la plupart des phénomènes observés sont caractérisés par un grand nombre d'échelles spatiales. La complexité mathématique associée à la description de ces phénomènes croit de façon exponentielle avec le nombre d'échelles. Sous certaines conditions, si la taille des micro-structures rencontrées est sensiblement petite par rapport à la distance caractéristique du domaine d'étude, l'on fait appel à une analyse asymptotique, pour étudier le comportement du matériau (ou du milieu considéré) à l'aide du paramètre infinitésimal δ représentant le ratio entre ces deux longueurs typiques. De manière plus explicite, le niveau macroscopique peut être décrit, avec une bonne approximation par des équations simples où les singularités microscopiques agissent au travers de leurs caractéristiques moyennées. Ce passage du *micro* au *macro*, recherchant un lien entre le comportement macroscopique et les procédures physiques microscopiques, est la méthodologie de l'homogénéisation.
Par une approche mathématique, la théorie est formulée par la donnée d'une famille d'opérateurs différentiels partiels, dépendant du paramètre δ. Ces opérateurs possèdent des coefficients (réguliers) périodiques à oscillation rapide[1]. D'autre part, la périodicité et la régularité des coefficients vont conduire à considérer un processus de diffusion sur une partie compacte, ce qui permettra d'utiliser la compacité notamment en ce qui concerne l'existence d'une mesure invariante pour la diffusion considérée.

Principe de Grandes déviations (PGD)

La théorie des grandes déviations étudie les événements rares ne suivant pas la *loi des grands nombres*. Classiquement cette *loi* nous assure que la moyenne empirique d'une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées et intégrables, converge presque

[1] Au moins une des variables associées aux coefficients est inversement proportionnelle à δ.

sûrement vers la moyenne théorique (l'espérance). Si ces variables aléatoires ont des moments d'ordre deux alors le *théorème centrale limite* affirme qu'une certaine fonction affine de cette moyenne converge en loi vers une variable aléatoire normale. D'après ces théorèmes classiques, la probabilité que les variables aléatoires concernées prennent des valeurs dans des ensembles qui ne contiennent pas l'espérance est faible. Il y a *grandes déviations* en ce sens que la moyenne empirique éviterait, avec une probabilité non nulle, un voisinage fixé de la moyenne. Ainsi il est naturel de s'intéresser :

- à l'évaluation de la vitesse de convergence vers zéro de cet événement ;
- ou à la mesurabilité de cet événement ;
- etc.

Á l'évidence le PGD[2] nous permet de connaître le comportement asymptotique de grands systèmes stochastiques, et l'on rencontre plusieurs variantes dans la littérature. En ce qui nous concerne, dans le cadre étudié par Freidlin et Wentzell, la théorie des «*petites perturbations de systèmes dynamiques*», le terme principal de l'opérateur est perturbé par un petit paramètre ε. Par une approche probabiliste, cet opérateur peut être construit à l'aide d'une équation différentielle ordinaire (EDO) sur-amortie d'une martingale brownienne à un facteur $\sqrt{\varepsilon}$ prés.

Objectif et stratégie

Le but de notre étude est d'établir des théorèmes d'existence de barrière à la solution de certaines EDP paraboliques à coefficients réguliers et périodiques, de décrire les ensembles de convergence de la solution, et d'établir (si possible) la limite de l'équation Hamilton-Jacobi associée aux solutions de viscosité.

Plus précisément nous étudions la famille d'EDP suivante sur $\mathbb{R}^d$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = L_{\varepsilon,\delta} u^{\varepsilon,\delta}(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} c\left(\frac{x}{\delta}, u^{\varepsilon,\delta}(t,x)\right) \cdot u^{\varepsilon,\delta}(t,x) \\ \\ u^{\varepsilon,\delta}(0,x) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d \end{array}\right. \quad ; \quad \varepsilon,\delta > 0. \tag{1}$$

$*$ L'opérateur principal de l'EDP (1) est défini comme suit :

$$\boldsymbol{L_{\varepsilon,\delta}} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^*)_{ij} \left(\frac{x}{\delta}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} B^{\varepsilon,\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad \varepsilon,\delta > 0. \tag{2}$$

[2] Rappelons que le *théorème centrale limite* fournit une majoration indépendamment de la loi des variables aléatoires étudiées; mais c'est là aussi sa limite en ce sens que la taille de l'échantillon doit être suffisamment grande pour que la majoration puisse être valable pour toute loi. En parallèle, le PGD tient compte de la loi des variables aléatoires considérées, la majoration est donc plus fine, mais la contrepartie est justement la connaissance nécessaire de la loi.

Cet opérateur (2) est le générateur de la famille des équations différentielles stochastiques (EDS) étudiées par Freidlin et Sowers [24] :

$$\begin{cases} dX_t^{x,\varepsilon,\delta} = \sqrt{\varepsilon}\sigma\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dW_t + B^{\varepsilon,\delta}\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dt \\ X_0^{x,\varepsilon,\delta} = x \end{cases} ; \quad \varepsilon,\delta > 0. \tag{3}$$

Où $\sigma: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ et $B^{\varepsilon,\delta}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ sont des applications régulières à variables 1-périodique. Le coefficient de diffusion σ est **uniformément elliptique**. Et le coefficient de dérive $B^{\varepsilon,\delta}$ à valeurs vectorielles est défini par :

$$B^{\varepsilon,\delta} = \frac{\varepsilon}{\delta}B_0 + B_1 + B_2^{\varepsilon,\delta}. \tag{4}$$

Les fonctions B_0, B_1 et $B_2^{\varepsilon,\delta}$ sont de classe $C^\infty\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right)$ pour tous $\varepsilon,\delta > 0$, de plus on a :

$$\lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \| B_2^{\varepsilon,\delta} \|_{C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} = 0. \tag{5}$$

$*$ Le coefficient de semi-linéarité c (de la source) de l'EDP (1) est une application de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, 1-périodique en $x \in \mathbb{R}^d$ puis satisfaisant les conditions suivantes :

***H*.1** $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ c(x,1) = 0,$

***H*.2** $c(x,y) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ y \in [0,1),$

***H*.3** $c(x,y) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, y > 1 \cup \mathbb{R}_-^*.$

En outre, l'on désigne son maximum par :

$$c(x) = \max_{y\ge 0} c(x,y) > 0. \tag{6}$$

$*$ La condition initiale de l'EDP (1) g est élément de $C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^+\right)$, l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $[0;+\infty[$. De plus, nous supposons que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} g(x) = \bar{g} < \infty. \tag{7}$$

En outre, nous associons à la condition initiale un domaine défini par $\boldsymbol{G_0} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) > 0\right\}$. Par la continuité de g , il n'est pas difficile de vérifier[3] :

$$\overline{\mathring{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{0}}} = \overline{\boldsymbol{G_0}}. \tag{8}$$

Notre principal objectif c'est de combiner les effets du principe de grandes déviations et de l'homogénéisation dans le cas des EDP paraboliques, par une approche probabiliste.

[3] Grâce à la formule (8) nous parvenons à expliciter la barrière.

Il est clair que le comportement limite de la solution de l'EDP (1) est dépendant des vitesses de convergence entre δ (paramètre d'homogénéisation) et ε (paramètre des grandes déviations). Lorsque le paramètre δ converge plus vite vers zéro alors l'homogénéisation l'emporte sur le principe de grandes déviations. Dans ce cas, on applique les techniques de l'homogénéisation en premier (les coefficients peuvent être homogénéisés), ensuite on établit un principe de grandes déviations. Si les deux paramètres ont des vitesses quasi identiques alors les effets de ces théories sont semblables. Et si ε converge plus rapidement que δ alors le principe de grandes déviations prévaut sur l'homogénéisation. Dans ce cas, dans l'ordre d'établir le PGD, l'on doit geler le coefficient δ et le laisser tendre vers zéro dans le résultat final.

Historique

Cette approche de combinaison d'effets a débuté avec les travaux de P. Baldi [5] en 1991, étendue par la suite par Freidlin et Sowers [24] en 1999, dans le cas des équations différentielles stochastiques (EDS). Une variante de l'EDP (1) a été étudiée par Madja et Souganidis [36] en 1994, où ils décrivent par une approche non probabiliste la solvabilité du «*cell problem*». Par la suite, Diédhiou et Manga [18] en 2008, ont proposé une étude de l'EDP (1) dans le cas où l'homogénéisation l'emporte sur le principe de grandes déviations avec la condition de non dégénérescence. Et récemment Diédhiou [17] en 2013, par une condition d'hypoelliptique de type Hörmander, a étendu leur résultat dans le cas où la matrice de l'opérateur $L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ est dégénérée.

Résultats obtenus

Nous avons étendu l'étude des EDP paraboliques de type (1), dans les cas suivants :

- le cas constant : les deux paramètres convergent quasiment à la même vitesse

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \frac{\delta}{\varepsilon} = \gamma, \quad \gamma > 0$$

  [10] Coulibaly A., Diedhiou A. et Manga C. (2015), *Coupling homogenization and large deviation in a parabolic PDE*, Appl. Math. Sci.

- le cas infini : le principe de grandes déviations l'emporte sur l'homogénéisation

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \frac{\delta}{\varepsilon} = +\infty.$$

  [11] Coulibaly A., Diedhiou A. et Manga C. (2016), *Limit of a parabolic PDE solution depending on two parameters*, Int. J. Appl. Math.

Ce travail est divisé en six chapitres regroupés en deux parties.

Partie I est composée de quatre chapitres :

Chapitre 1 présente les processus stochastiques;

Chapitre 2 décrit les méthodes probabilistes appliquées aux EDP;

Chapitre 3 présente la théorie de l'homogénéisation;

Chapitre 4 décrit le Principe de Grandes Déviations (PGD).

Partie II est composée de deux chapitres :

Chapitre 5 étudie le cas où les effets de ces théories sont semblables;

Chapitre 6 étudie le cas où le PGD l'emporte sur l'homogénéisation.

Partie I

Préliminaires

Chapitre 1

Processus stochastiques

Nous allons rappeler les définitions et les principaux résultats concernant les processus stochastiques à valeurs dans un espace de Banach, les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Hilbert et les processus de diffusion à valeurs dans l'espace de $\mathbb{R}^d$.

1.1 Processus aléatoires

1.1.1 Variables aléatoires

Dans toute la suite, on supposera donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dont la tribu sera toujours supposée complète[1].

Définition 1.1 (**variable aléatoire**).
On appelle variable aléatoire (v.a.) X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une application mesurable de $\mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, munie de sa tribu borélienne.

1.1.2 Espace L^p

1.1.2.1 Espace $L(\Omega)$

On notera $L(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d)$ ou simplement $L(\Omega, \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des classes d'équivalences *presque sûre* des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2 (**convergence en probabilité**).
On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de $L(\Omega, \mathbb{R}^d)$ converge en probabilité vers $X \in L(\Omega, \mathbb{R}^d)$ si pour tout $t > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\|X_n - X\| > t\right) = 0. \tag{1.1}$$

[1] C'est-à-dire si B est négligeable, *i.e* $B \subseteq A$ pour $A \in \mathscr{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $B \in \mathscr{F}$

Et l'on notera

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} X. \tag{1.2}$$

Définition 1.3 (**convergence** *presque sûre*)**.**
On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de $L\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ converge p.s. vers $X \in L\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ s'il existe $A \in \mathscr{F}$, de probabilité 1, tel que $\|X_n(\omega) - X(\omega)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $\omega \in A$. Et l'on note

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} X. \tag{1.3}$$

Remarquons que la convergence *p.s.* entraîne la convergence en *probabilité*.

Définition 1.4 (**convergence en loi**)**.**
On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de $L\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ converge en loi vers $X \in L\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ si pour tout $A \in \mathscr{F}$:

$$\mathbb{P}\left(X_n \in A\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(X \in A\right). \tag{1.4}$$

Et l'on note

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}} X. \tag{1.5}$$

Si l'on désigne par $C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$ l'espace des fonctions continues bornées dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{E}$ l'opérateur *espérance* associé à $\mathbb{P}$, alors la définition est équivalente à :

$$\mathbb{E}\left\{f\left(X_n\right)\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left\{f\left(X\right)\right\}. \tag{1.6}$$

La convergence en *probabilité* implique la convergence en *loi*. Notons, au passage, que la convergence en *loi* est juste la transcription de la convergence faible en termes de v.a.

Il est connu que :

- si $X \in L\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ alors X est *tendu*[2], i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact de $K \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que
$$\mathbb{P}\left(X \in K\right) \geq 1 - \varepsilon; \tag{1.7}$$
- si une suite de $(X_n)_{n\geq 0}$ converge *presque sûrement (p.s.)* vers $Y : \mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ alors $Y \in L\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$.

1.1.2.2 Espace $L^p\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$

On peut définir la classe des v.a. $\mathbb{P}$-intégrables, et l'espérance de telles v.a., en utilisant la théorie de l'intégration au sens de Bochner[3].

[2] La propriété de tension est une propriété qui permet de limiter les phénomènes de perte de masse, elle permet d'extraire une sous-suite convergente.

[3] Une v.a. X est $\mathbb{P}$-intégrable au sens de Bochner si et seulement si la v.a. réelle $\|X\|$ est intégrable au sens usuel.

On notera $L^p\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right), p \geq 1$ l'espace des classes d'équivalence de v.a. à puissance p, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}$-intégrables. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|X\|_p := \|X\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \left(\int_\Omega \|X\|^p \, d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mathbb{E}\left(\|X\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

Les $L^p\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ vont en décroissant : $L^p\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right) \subseteq L^q\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ si $q \geq p$. Aussi il est classique qu'il existe une unique application linéaire $\mathbb{E} : L^1\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ que l'on appelle *espérance*, telle que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) X_i, \quad \text{si} \quad X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} X_i, \tag{1.9}$$

$$\|\mathbb{E}(X)\| \leq \mathbb{E}(\|X\|) \ \text{(l'inégalité de Jensen)}. \tag{1.10}$$

Étant donné X dans $L^1\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$, on peut aussi définir l'*espérance conditionnelle* de X par rapport à $\mathscr{G}$ de la façon suivante[4] :
Si X est une v.a., on pose :

$$\mathbb{E}(X|_{\mathscr{G}}) := \mathbb{E}^{\mathscr{G}}(X), \tag{1.11}$$

où cette dernière est l'*espérance conditionnelle*, en vérifiant que le résultat ne dépend pas de la décomposition de X, puis on contracte la norme de $L^1\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ et on étend la définition par densité.

Alors l'opération $\mathbb{E}(\ |_{\mathscr{G}})$ hérite de beaucoup de propriétés[5], de plus on :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|_{\mathscr{G}})) = \mathbb{E}(X), \tag{1.12}$$

$$\mathbb{E}(X|_{\mathscr{G}}) = X \quad \text{si } X \text{ est } \mathscr{G}\text{-mesurable}. \tag{1.13}$$

1.1.3 Processus aléatoires

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :

- $|.|$ norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^d$,
- $\|.\|$ norme d'une matrice.

Définition 1.5 (**processus stochastique**).
Un processus stochastique X est la donnée d'une famille $\{X_t : 0 \leq t < +\infty\}$, où à t fixé, X_t est une v.a. mesurable à valeurs dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$; à $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ décrit la trajectoire du processus X.

[4] Rappelons que le théorème de Randon-Nikodym n'est plus valable pour des mesures à valeurs dans $\mathscr{X}$: par exemple prendre $\mathscr{X} = L^1([0,1])$.

[5] Elle est linéaire, idempotente et contracte toutes les normes de $L^p\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$.

Deux processus sont dits *indistinguables* lorsque :

$$\mathbb{P}\left(\sup_t |X_t - Y_t| = 0\right) = 1. \tag{1.14}$$

Et c'est en ce sens qu'il faudra comprendre l'unicité.

Lorsque pour tout $\omega \in \Omega$ les trajectoires sont continues, l'on dit que X est continu.

Définition 1.6 (**filtration**).
Une filtration[6] $\{\mathscr{F}_t : \ 0 \leq t < +\infty\}$ *est une famille croissante de sous-tribu de* $\mathscr{F}$ *:*

$$\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t, \quad 0 \leq s \leq t < +\infty. \tag{1.15}$$

Définition 1.7 (**processus adapté**).
Un processus X *est dit adapté à la filtration* $\{\mathscr{F}_t : \ 0 \leq t < +\infty\}$ *si pour tout* t*,* X_t *est* $\mathscr{F}_t$*-mesurable.*

Dans toute la suite on aura toujours affaire à des processus mesurables et adaptés à une filtration que l'on précisera.

Définition 1.8 (**processus prévisible**).
Soit $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ *une filtration. Une suite* $(H_t)_{t \geq 0}$ *est un processus prévisible*[7] *si :* $H_t \subseteq \mathscr{F}_{t-1}$ *pour tout* $t \geq 0$*.*

Soit X un processus stochastique prenant la valeur $x \in \mathbb{R}^d$ à $t = 0$, ce que l'on notera par X^x.

Définition 1.9 (**processus de Feller**).
On dit qu'un processus stochastique X *est de Feller, si pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *:*

$$\forall t > 0, \quad y \longrightarrow x \Longrightarrow X_t^y \xrightarrow{loi} X_t^x, \tag{1.16}$$

$$t \longrightarrow 0 \Longrightarrow X_t^x \xrightarrow{\mathbb{P}} x. \tag{1.17}$$

Théorème 1.10. *Tout processus de Feller* X *admet une modification càdlàg : c'est-à-dire que les trajectoires de* X *sont continues à droites avec limites à gauche.*

[6] On dit alors que $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré.

[7] La notion de prévisibilité se comprend facilement en finance : par exemple un investisseur décide de la manière de placer ses capitaux en fonction de l'information disponible au temps présent, à moins de compromettre un délit d'initié.

1.1.3.1 Martingales

Définition 1.11 (**martingale - sous(sur)martingale**).
Une martingale[8] *par rapport à une filtration* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus stochastique* X_t *intégrable,* $\mathscr{F}_t$*-adapté et vérifiant :*

$$\mathbb{E}\left(X_t|_{\mathscr{F}_s}\right) = X_s, \quad \forall 0 \leq s \leq t < +\infty. \tag{1.18}$$

Si l'on remplace = par $\leq$ *(resp.* $\geq$*) on parle de sur-martingale (resp. sous-martingale).*

Théorème 1.12 (**décomposition de Doob**).
Toute sous-martingale $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *peut être écrite d'une manière unique comme* $X_t = M_t + A_t$*, où* M_t *est une martingale et* A_t *un processus prévisible croissant nul à* $t = 0$*.*

Définition 1.13 (**temps d'arrêt**).
On appelle temps[9] *d'arrêt (relatif à la famille* $\mathscr{F}_t$*) une v.a. à valeurs dans* $[0,+\infty]$*,* τ *qui vérifie :*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \text{pour tout } t. \tag{1.19}$$

Définition 1.14 (**processus arrêté**).
Soit τ *un temps d'arrêt et* X_t *un processus* $\mathscr{F}_t$*-adapté (à la même filtration). On appelle processus arrêté le processus* X^τ *défini par :*

$$X_t^\tau := X_{\tau\wedge t}, \qquad t \geq 0. \tag{1.20}$$

Il suit directement de cette définition que si X est une martingale (sous-martingale) alors le processus arrêté X^τ est une martingale (sous-martingale).

Théorème 1.15 (**inégalité de Doob**).
Soit τ *un temps d'arrêt et* X_t *une sous-martingale (à la même filtration). Alors pour tout* $\lambda > 0$ *:*

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} X_t \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(X_\tau \mathbb{1}_{\{\sup_{0\leq t\leq\tau} X_t \geq \lambda\}}\right). \tag{1.21}$$

1.1.3.2 Mouvement brownien

L'exemple fondamental de martingale continue est le mouvement brownien (M.B).

Définition 1.16 (**M.B de dimension** d).
Un mouvement brownien d*-dimensionnel,* $\left\{B_t, \mathscr{F}_t \; ; \; 0 \leq t < +\infty\right\}$ *est la donnée d'un processus mesurable B à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *et d'une filtration* $\mathscr{F}_t$ *tels que B soit continue* $\mathscr{F}_t$*-adapté et vérifie :*

[8] Une martingale est une généralisation aléatoire d'une fonction constante.

[9] Un temps d'arrêt a deux propriétés importantes : il est aléatoire puisqu'il ne dépend pas du déroulement antérieur et il ne peut pas dépendre du futur puisque le processus peut être gelé (l'on dit aussi on le tue) à tout moment.

- $B_0 = 0$ *presque sûrement;*
- *pour* $s \leq t$*, l'accroissement* $B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathscr{F}_s$*;*
- *pour* $s \leq t$*, l'accroissement* $B_t - B_s$ *suit une loi normale centrée, de matrice de covariance* $\sqrt{t-s}\boldsymbol{I}_d$*, où* $\boldsymbol{I}_d$ *est la matrice identité d'ordre* $\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{d}$*.*

On rencontre plusieurs constructions[10] du M.B dans la littérature. Remarquons qu'au passage, si B est un M.B alors B est une martingale de carré intégrable. De plus, $B_t^2 - t$ est aussi une martingale et ceci traduit le fait que le M.B est à variation quadratique finie.

Remarque 1.17 (**quelques propriétés importantes**)**.**

Auto-similarité : si B_t *est un M.B alors pour tout* $c > 0$ *:* $\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ *est aussi un M.B.*

Principe de réflexion : pour tout $\alpha > 0$ *on a :* $\mathbb{P}\left\{\sup_{s\leq t} B_s \geq \alpha\right\} = 2\mathbb{P}\left\{B_t \geq \alpha\right\}$.

Théorème 1.18 (**régularité**)**.**

- *Le M.B est à variation infinie sur tout intervalle.*
- *Le M.B n'est dérivable en aucun point.*
- *Les trajectoires du M.B sont localement Hölder-continues d'ordre* $\alpha < 1/2$*.*

1.2 Intégrale stochastique

Dans cette partie nous donnons un sens à des équations de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X) + g(X)\frac{dB_t}{dt}. \tag{1.22}$$

Le problème est que les trajectoires du M.B ne sont pas différentiables ni même à variation finie. Pour comprendre cette écriture, nous interprétons une solution de (1.22), en parallèle des équations différentielles ordinaires, comme une solution de l'équation intégrale:

$$X_t - X_0 = \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s. \tag{1.23}$$

[10] Citons :

- Kolmogrov(1933 et 1956) : utilisant la notion de «consistence» et un critère de continuité;
- Wiener(1923), Levy(1948) et Ciesielski(1961) : utilisant la théorie des espaces de Hilbert, et le caractère Gaussien du M.B;
- Donsker(1951) : utilisant la notion de convergence faible sur l'ensemble d'une mesure.

Et c'est à la seconde intégrable de (1.23) qu'il s'agit de donner un sens mathématique[11].

1.2.1 Intégrale par rapport au M.B

La construction est due à K. Itô (1942-1944) dans le cas du M.B. et a été généralisée au cas d'une martingale de carré intégrable par Kunita et Watanabe (1967).
On suppose donné un M.B de dimension d, et l'on définit deux classes de processus :

- $\mathbb{H}^2 := \left\{ H = (H_t)_{t\geq 0} : \text{ processus adapté tel que , } \forall t,\ \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s ds \right) < +\infty \right\};$
- $\mathscr{M}_c^2$ l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du M.B) de carré intégrable, continues et nulles en zéro.

Définition 1.19 (**processus simple**).
Soit T une constante positive fixée. Un processus $\{e_t\}_{t\in[0,T]}$ est dit simple (élémentaire) s'il existe une partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ de $[0,T]$ telle que :

$$e_t = \sum_{k=1}^{N} e_{k-1} \mathbb{1}_{\{t_{k-1},t_k\}}(t). \tag{1.24}$$

Pour un tel processus nous définissons l'intégrale stochastique par :

$$\int_0^t e_s dB_s := \sum_{k=1}^{N} e_{t_{k-1}} \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \right) + e_{t_N} \left(B_t - B_{t_N} \right). \tag{1.25}$$

Théorème 1.20 (**intégrale d'Itô**).
Il existe une unique application linéaire, notée I de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathscr{M}_c^2$ telle que pour tout $H \in \mathbb{H}^2$ et tout t,

$$\mathbb{E}\left(I(H_t)^2 \right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds \right). \tag{1.26}$$

Et l'on note

$$I(H_t) = \int_0^t H_s dB_s. \tag{1.27}$$

Pour comprendre où le M.B intervient dans l'intégrale, il faut se donner un processus H de la forme :

$$H_t = \Phi_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{p} \Phi_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i]}, \tag{1.28}$$

[11] Autre approche :

- Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrants (utilisant l'intégration par partie dans le cas différentiable);
- Lyons a introduit une construction basée sur la théorie des *rough paths* voir par exemple [35].

où $0 = t_1 < \ldots < t_p < +\infty$, Φ_0 borné et $\mathscr{F}_0$-mesurable et pour tout $i := 1, \ldots, p$ les Φ_i bornés et prévisibles. Par suite il faut poser

$$I(H_t) := \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \left(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}\right). \tag{1.29}$$

Il est aisé de démontrer que l'intégrale stochastique I vérifie toutes les propriétés classiques sur les processus élémentaires. Ensuite, on montre la densité des processus de la forme (1.29) dans $\mathbb{H}^2$. Puis l'on prolonge l'intégrale stochastique I définie sur les processus élémentaires à la classe $\mathbb{H}^2$. Notons au passage que l'on peut relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur $\mathbb{H}^2$ en introduisant:

$$\tilde{\mathbb{H}}^2 := \left\{ H = (H_t)_{t \geq 0} : \text{ processus adapté tel que },\ \forall t,\ \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s ds\right) < +\infty,\ \mathbb{P} - p.s. \right\}. \tag{1.30}$$

On peut encore prolonger I sur cet ensemble, mais on n'a plus une martingale, mais seulement une martingale locale.
L'unicité signifie que si I et I' sont deux prolongements vérifiant les mêmes propriétés, alors I et I' sont indistinguables.

Remarque 1.21 **(propriété de l'intégrale).**
Pour tout $H \in \mathbb{H}^2$ et $T \in \mathbb{R}_+$

- *$I(H)$ est à variation quadratique finie et cette variation sur $[0, T]$ est égale à $\int_0^T H_s^2 ds$;*
- *et l'on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t H_s dB_s \right|^2 \right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right). \tag{1.31}$$

Théorème 1.22 **(martingale brownienne).**
Soit $\left\{B_t, \mathscr{F}_t;\ 0 \leq t < +\infty\right\}$ un M.B. Soit $\{M_t;\ 0 \leq t < +\infty\}$ une martingale brownienne (i.e. par rapport à la filtration du M.B), de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$. Alors, il existe un processus $H \in \mathbb{H}^2$ tel que : pour tout $t \geq 0$,

$$M_t = \int_0^t H_s dB_s. \tag{1.32}$$

De plus, si $\tilde{H}$ est un autre représentant de M presque sûrement :

$$\int_0^{+\infty} \left\| \tilde{H}_t - H_t \right\|^2 dt = 0. \tag{1.33}$$

D'une certaine manière, toute martingale de carré intégrable est une intégrale stochastique par rapport à un M.B (Karatzas-Shreve [30]).

1.2.2 Formule de Girsanov - Formule d'Itô

1.2.2.1 Formule de Girsanov

La formule de Girsanov joue un rôle fondamental en Probabilité et Statistique. Elle est mieux connue dans les situations où l'on considère des lois de probabilités sur des paramètres (et non sur des trajectoires) comme la fonction de *changement de mesure* utilisant le rapport de vraisemblance.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, \mathscr{F}_t)$ un espace probabilisé filtré sur lequel un M.B de dimension d, B_t, est défini avec $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$. Supposons que la filtration $\mathscr{F}_t$ est complète et définissons un processus $H_t = \left(H_t^1, \ldots, H_t^d\right)$, mesurable et adapté par rapport à $\mathscr{F}_t$, à valeurs vectorielles, satisfaisant :

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T \left(H_s^i\right)^2 ds < \infty\right\} = 1, \quad i := 1, \ldots, d \quad T \in \mathbb{R}_+. \tag{1.34}$$

Posons :

$$D_t := \exp\left\{\sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^i dB_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t \|H_s\|^2 ds\right\}. \tag{1.35}$$

La formule de Girsanov nous permet d'introduire une nouvelle mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ de densité D_T par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{F}_T$. Autrement dit,

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} := D_T. \tag{1.36}$$

Théorème 1.23 (**Girsanov(1960) Martin et Cameron(1944)**).
Supposons[12] *que* D_t *(1.35) est une martingale. Définissons* $\hat{B}_t$ *par :*

$$\hat{B}_t^i = B_t^i - \int_0^t H_s^i ds, \quad i := 1, \ldots, d \quad 0 \le t < +\infty. \tag{1.37}$$

Alors, le processus $\left\{\hat{B}_t, \mathscr{F}_t,\ 0 \le t \le T\right\}$ *est un M.B de dimension* d *sur* $\left(\Omega, \mathscr{F}_t, \hat{\mathbb{P}}\right)$.

1.2.2.2 Formule d'Itô

La formule d'Itô (ou formule de changement de variables) est un outil particulièrement important dans l'étude des processus stochastiques.

Définition 1.24 (**processus d'Itô ou semi-martingale**).
Un processus X, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *est appelé semi-martingale s'il se décompose de la*

[12] Notons que si $\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \|H_s\|^2 ds\right\}\right) < +\infty$ alors D est une martingale. Ce critère est connu sous le nom de *condition de Novikov*.

manière suivante: pour tout t et presque sûrement:

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s. \tag{1.38}$$

Avec X_0 *et* K_s *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*,* H_s *à valeurs dans* $\mathbb{R}^{d\times d'}$ *et élément de* $\mathbb{H}^2$*, et*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t |K_s|\, ds\right) < +\infty, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{1.39}$$

Cette décomposition, si elle existe, est unique.

Théorème 1.25 (formule d'Itô).
Soit f *une fonction définie sur* $[0\,,+\infty[\, \times \mathbb{R}^d$ *, à valeurs réelles, une fois continûment dérivable en temps et deux fois en espace (i.e. toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues)*[13]*. Soit* X *une semi-martingale :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s. \tag{1.40}$$

Alors $\left\{f(t, X_t);\ 0 \leq t < +\infty\right\}$ *est encore une semi-martingale et admet la décomposition sui-vante :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s)\, K_s ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s)\, H_s dB_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t Tr\left[H_s^* D^2 f(s, X_s)\, H_s\right] ds, \end{aligned} \tag{1.41}$$

où ∇f *désigne le gradient de* f *par rapport aux variables d'espace et* $D^2 f$ *désigne la matrice hessienne de* f*.*

1.2.3 EDS - EDSR

On se place toujours sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, et l'on se donne un M.B d-dimensionnel B avec sa filtration.

1.2.3.1 Équations Différentielles Stochastiques (EDS)

Soit T un réel strictement positif. On considère deux fonctions $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$, mesurables. On se donne également une variable aléatoire ξ, de carré intégrable et indépendante du M.B. On cherche à résoudre l'EDS :

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + g(t, X_t)\, dB_t, \quad X_0 = \xi. \tag{1.42}$$

[13] Sans l'hypothèse de régularité sur f, ceci est faux. Sans celle-ci, on tombe dans une autre classe de processus, dit de Dirichlet.

En fait, cette équation doit être interprétée au sens d'une équation intégrale, à savoir :

$$X_t = \xi + \int_0^t f(r, X_r)\, dr + \int_0^t g(r, X_r)\, dB_r, \quad 0 \le t \le T. \tag{1.43}$$

Définition 1.26 (**solution (forte)**).
Une solution de l'EDS (1.42), X, est un processus continu tel que :

- *X est mesurable et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$;*
- $\mathbb{P}-p.s. \int_0^t \left\{ \left| f(r, X_r) \right| + \left\| g(r, X_r) \right\|^2 \right\} < +\infty;$
- *$\mathbb{P}-p.s.$ on a* $X_t = \xi + \int_0^t f(r, X_r)\, dr + \int_0^t g(r, X_r)\, dB_r, \quad 0 \le t \le T;$

où la filtration est celle complétée définie pour tout t par $\mathcal{F}_t := \sigma\Big\{(\xi, B_s) : \ s \le t\Big\}$.

Le théorème suivant est dû à K. Itô.

Théorème 1.27 (**existence et unicité**).
On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0, T]$, x, y dans $\mathbb{R}^d$:

1. *condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :*
$$\left| f(t,x) - f(t,y) \right| + \left\| g(t,x) - g(t,y) \right\| \le K \left| x - y \right|; \tag{1.44}$$
2. *croissance linéaire :*
$$\left| f(t,x) \right| + \left\| g(t,x) \right\| \le K(1 + |x|); \tag{1.45}$$
3. $$\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right) < +\infty. \tag{1.46}$$

Alors, l'EDS (1.42) possède une unique solution. De plus, cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} |X_t|^2 \right) < +\infty. \tag{1.47}$$

On peut montrer des résultats d'existence et d'unicité avec des conditions plus faibles sur les coefficients b, σ (voir Stroock et Varadhan [55]).

1.2.3.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

Considérons sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\ge 0}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire ξ supposé $\mathcal{F}_T$-mesurable. L'on veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dY_t}{dt} = 0, \ 0 \le t \le T, \quad \text{avec} \quad Y_T = \xi. \tag{1.48}$$

en imposant que Y soit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Le candidat naturel $Y_t = \xi$ n'est pas adapté. La meilleure approximation (dans $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^d)$) adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}\left(\xi|_{\mathcal{F}_t}\right)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un MB, le théorème de représentation des martingales permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que:

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi|_{\mathcal{F}_t}\right) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s. \tag{1.49}$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$Y_t = \xi + \int_t^T Z_s dB_s. \tag{1.50}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Donnons-nous une application aléatoire f définie sur $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d'}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telle que pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d'}$, le processus $\left(f(t,y,z)\right)_{0\leq t\leq T}$ soit adapté. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_t$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On veut résoudre l'EDSR suivante:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr + \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.51}$$

Définition 1.28 (**solution d'une EDSR**).
Une solution de l'EDSR (1.51) est un couple de processus $(Y_t, Z_t)_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :

1. *Y et Z sont mesurables et adaptés à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d\times d'}$;*
2. *$\mathbb{P}-p.s. \int_0^T \left\{\left|f(r,Y_r,Z_r)\right| + \|Z_r\|^2\right\} dr < +\infty;$*
3. *$\mathbb{P}-p.s$ on a : $Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\, dr + \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$*

On avance l'hypothèse suivante : il existe une constante K telle $\mathbb{P}-p.s$:

- condition de Lipschitz en (y,z) :

$$\left|f(t,y,z) - f(t,y',z')\right| \leq K\left(\left|y-y'\right| + \left\|z-z'\right\|\right); \tag{1.52}$$

- condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left\{|\xi|^2 + \int_0^T \left|f(r,0,0)\right| dr\right\} < +\infty. \tag{1.53}$$

Le théorème suivant est dû à Pardoux et Peng (1990).

Théorème 1.29 (**existence et unicité**).
Sous l'hypothèse précédente, l'EDSR (1.51) possède une unique solution (Y, Z) *telle que :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right) < +\infty. \tag{1.54}$$

De plus, Y est continu et l'on a :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} |Y_t|^2\right) < +\infty. \tag{1.55}$$

1.3 Diffusion

1.3.1 Propriété de Markov

Définition 1.30 (**diffusion**).
Une diffusion d'Itô homogène dans le temps est un processus stochastique $(X_t)_{t \ge 0}$ *satisfaisant une EDS de la forme*

$$dX_t = f(X_t)\, dt + g(X_t)\, dB_t, \quad X_s = x, \quad 0 < s \le t, \tag{1.56}$$

où B_t *est un M.B standard de dimension* d*, et le coefficient de dérive* $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *et le coefficient de diffusion* $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d'}$ *sont tels que l'EDS (1.56) admette une unique solution en tout temps.*

Remarque 1.31.
Si l'on note par $X_t^{s,x}$ *la solution de (1.56), alors* $\left\{X_{s+h}^{s,x}\right\}$ *et* $\left\{X_h^{0,x}\right\}$ *ont même loi.*

Désignons par $\mathbb{P}^x$ la mesure de probabilité sur la tribu engendrée par toutes les variables aléatoires $X_t^{0,x}$, $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, et notons par $\mathbb{E}^x$ l'opérateur d'espérance associé.

Théorème 1.32 (**propriété de Markov**[14]).
Pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$*, on a :*

$$\mathbb{E}^x\left(\varphi(X_{t+h}) | _{\mathscr{F}_t}\right)(\omega) = \mathbb{E}^{X_t(\omega)}\left(\varphi(X_h)\right), \tag{1.57}$$

le membre de droite désignant la fonction $\mathbb{E}^y\left(\varphi(X_h)\right)$ *évaluée en* $y = X_t(\omega)$*.*

La propriété de Markov se généralise à des temps d'arrêt.

Théorème 1.33 (**propriété de Markov (forte)**).
Pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *et tout temps d'arrêt* τ *fini presque sûrement, on a :*

$$\mathbb{E}^x\left(\varphi(X_{\tau+h}) | _{\mathscr{F}_\tau}\right)(\omega) = \mathbb{E}^{X_\tau(\omega)}\left(\varphi(X_h)\right). \tag{1.58}$$

[14]Autrement dit, l'état X_t en un temps donné t détermine univoquement le comportement à tous les temps futurs.

1.3.2 Semi-groupes - Générateurs

Définition 1.34 (**semi-groupe de Markov**).
A toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$*, on associe pour tout* $t \geq 0$ *la fonction* $\boldsymbol{P}_t\varphi$ *définie par :*

$$\left(\boldsymbol{P}_t\varphi\right)(x) = \mathbb{E}^x\left(\varphi(X_t)\right). \tag{1.59}$$

L'opérateur linéaire $\boldsymbol{P}_t$ *est appelé le semi-groupe de Markov associé à la diffusion.*

Notons que si φ désigne l'indicatrice d'un borélien $A \in \mathbb{R}^d$, alors

$$(\boldsymbol{P}_t\mathbb{1}_A)(x) = \mathbb{P}^x\left\{X_t \in A\right\}. \tag{1.60}$$

Remarque 1.35 (**propriété de semi-groupe**[15]).
Pour tous $t, h > 0$*, on a :*

$$\boldsymbol{P}_{t+h} = \boldsymbol{P}_t \circ \boldsymbol{P}_h. \tag{1.61}$$

De plus, on vérifie facilement les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{P}_t$ préserve les fonctions constantes;
- $\boldsymbol{P}_t$ préserve les fonctions non-négatives;
- $\boldsymbol{P}_t$ est contractante par rapport à la norme L^∞ .

Le semi-groupe de Markov[16] est donc un opérateur linéaire positif, borné par rapport à la norme $\boldsymbol{L}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$. En fait, il est de norme opérateur 1.

En général, on associe une densité de transition (*resp.* une probabilité de transition), si elle existe, au semi-groupe (voir Stroock [53]).

Définition 1.36 (**densité de transition**).
On dit que la diffusion $(X_t)_{t\geq 0}$ *admet la densité de transition* $p(t,x,y)$*, si*

$$\left(\boldsymbol{P}_t\varphi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y)\varphi(x)dx. \tag{1.62}$$

pour toute fonction mesurable bornée $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

La propriété de semi-groupe implique que le comportement de $\boldsymbol{P}_t$ sur tout intervalle $[0,\varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, détermine son comportement pour tout $t > 0$. Il est donc naturel de considérer la dérivée de $\boldsymbol{P}_t$ en $t = 0$.

[15] Ceci est l'équivalent de l'équation de *Chapman-Kolmogorov* vérifiée par la fonction de transition de probabilité, voir [53].

[16] On parle de semi-groupe de Feller, lorsque c'est une famille de transition régulière sur l'ensemble des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini. Ce que l'on supposera à chaque fois que l'on parlera de semi-groupe.

Définition 1.37 (**générateur d'une diffusion**).
Le générateur infinitésimal L d'une diffusion d'Itô est défini par son action sur une fonction test φ via

$$L\varphi(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\boldsymbol{P}_t\varphi\right)(x) - \varphi(x)}{t}. \tag{1.63}$$

Le domaine de L est par définition l'ensemble des fonctions φ pour lesquelles la limite (1.63) existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Formellement la relation (1.63) peut s'écrire

$$L := \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_t}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{1.64}$$

Par la propriété de Markov, cette relation se généralise ($\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{I}$ est l'identité) en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_t = \lim_{h\to 0^+} \frac{\boldsymbol{P}_{t+h} - \boldsymbol{P}_t}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\boldsymbol{P}_h - \boldsymbol{I}}{h}\boldsymbol{P}_t = L\boldsymbol{P}_t. \tag{1.65}$$

Et l'on peut donc écrire formellement

$$\boldsymbol{P}_t := \exp(tL). \tag{1.66}$$

Nous préciserons ce point dans le chapitre suivant.

Remarque 1.38.
Par la formule d'Itô, on peut facilement prouver que le générateur de la diffusion (1.56), tenant compte du fait que l'espérance de l'intégrale d'Itô s'annule, est de la forme :

$$L := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \left(gg^*\right)_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.67}$$

où g^* désigne le transposé de la matrice g.

Définition 1.39 (**ellipticité**).
L'opérateur L est dit elliptique, si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe $k > 0$ (dépendant de x) tel que

$$\sum_{i,j=1}^{d} (gg^*)_{ij}(x) y_i y_j \geq k \sum_{i=1}^{d} y_i^2, \ \ \forall y \in \mathbb{R}^d. \tag{1.68}$$

L'on dira que l'opérateur L est uniformément elliptique si k est indépendant de x.

Lorsque la matrice $\boldsymbol{a} := \left(gg^*\right)$ est inversible, l'on remarque que l'opérateur L est *elliptique*.

1.3.3 Mesure invariante

Considérons le semi-groupe $\boldsymbol{P}_t$ associé à la diffusion X_t.

Définition 1.40 (mesure invariante).
μ est une mesure invariante (ou stationnaire) pour le semi-groupe $\boldsymbol{P}_t$ si pour toute fonction φ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(\boldsymbol{P}_t\varphi\big)(x)\, d\big(\mu(x)\big) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, d\big(\mu(x)\big). \tag{1.69}$$

Ce que l'on peut écrire formellement par l'équation du point fixe :

$$\mu \boldsymbol{P}_t = \mu. \tag{1.70}$$

L'action en tout temps des transitions dans $\boldsymbol{P}_t$ laisse donc invariante μ au travers de l'intégrale sur les fonctions à plusieurs variables réelles.

Le résultat suivant est du Veretennikov [57].

Théorème 1.41 (Veretennikov).
Sous les conditions suivantes

- *il existe α, β et Λ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$:*

$$0 < \alpha \leq \left\langle gg^*(x)\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \leq \beta \qquad et \qquad Tr\big[gg^*(x)\big] \leq \Lambda d; \tag{1.71}$$

- *il existe $\eta > -1$, $r > 0$ et $M > 0$ (si $\eta = -1$ on impose que $2r > 3\beta - \alpha + \Lambda d$) tels que pour tout $\|x\| > M$:*

$$\left\langle f(x), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \leq -r\|x\|^{\eta}. \tag{1.72}$$

Le processus X_t (1.56) possède une unique mesure de probabilité invariante μ.
Si de plus l'on désigne $\mu^x(t)$ la loi de X_t lorsque $X_0 = x$ puis $\|.\|_{var}$ la norme de la variation totale. Alors pour $2k+2 < m$, m assez petit dans le cas $\eta = -1$, il existe un C tel que

$$\big\|\mu^x(t) - \mu(t)\big\|_{var} \leq C\big(1 + \|x\|^m\big)(1+t)^{-(k+1)}, \;\; x \in \mathbb{R}^d, t > 0. \tag{1.73}$$

Chapitre 2

Approche probabiliste des EDP

Dans ce chapitre nous présentons quelques approches analytiques aux EDP[1] . Puis, nous parlerons de l'équation de Poisson qui sert, en général, dans la constructions des correcteurs en théorie de l'homogénéisation. À ce propos, comme nous utilisons une approche probabiliste, nous rappelons les liens entre diffusion et EDP et les liens entre EDSR et EDP. Enfin nous parlerons des équations de réaction-diffusion de type KPP et des équations Hamilton-Jacobi, deux classes que nous étudierons dans la deuxième partie du document.

2.1 Approches analytiques

Pour étudier une EDP il est judicieux de se poser quelques questions basiques, par exemple:

- l'équation admet-elle des solutions ?
- ou la solution (lorsqu'elle existe) hérite-t-elle des mêmes propriétés que la source ?
- ou la solution est-elle unique ?

La première question s'intéresse à la solvabilité, la seconde à certaines régularités de la solution (l'hypoellipticité de l'opérateur différentielle) et la troisième à un concept fondamental en mathématiques.

[1] Les EDP (ou encore équations aux dérivées partielles) sont des relations entre les taux de variation de certaines quantités (mesures) en fonction de différents paramètres (temps, position, vitesse,...). Les EDP se retrouvent dans tous les phénomènes de la physique, et concernent tous les états de la matière: gaz, fluides, solides; ainsi que toutes les théories classique, relativiste, quantique, etc.
On les retrouve aussi derrière de nombreux problèmes géométriques; on parle alors d'EDP géométriques. Elles permettent de déformer des objets géométriques selon des lois bien déterminées: les géométries conformes, le transport optimal ou les problèmes de frontière libre.

2.1.1 Solvabilité et régularité

Définition 2.1 (**solvabilité**).
Un opérateur L est dit localement solvable en x_0 *s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* x_0 *tel que pour tout* $u \in C_c^\infty(\mathcal{V})$, *l'équation* $Lu(x) = 0$ *admet une solution (soit au sens des distributions).*

Le théorème suivant montre le lien entre la solvabilité et l'ellipticité d'un opérateur du second ordre [32].

Théorème 2.2.
Tout opérateur elliptique du second ordre à coefficients de classe $\mathbf{C}^\infty$ *est localement solvable en tout point.*

Mais, ce n'est pas parce qu'un opérateur L est elliptique que l'opérateur parabolique $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$ est solvable (admet une solution fondamentale). Historiquement, c'est tout d'abord à partir des résultats sur les EDP qu'on a su construire des diffusions : il est classique[2] que, lorsque la matrice associée à l'opérateur L est uniformément définie positive, et lorsque les coefficients de L sont bornés et höldériens, l'équation parabolique $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$ admet une solution fondamentale qui engendre les probabilités de transition d'une diffusion (voir par exemple Stroock [53]).

Rappelons que les solutions obtenues en utilisant une condition d'ellipticité sont (en général) assez régulières (voir par exemple le livre de Stroock [53], Chapitre 3).

2.1.2 Existence et unicité

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + Lv(t,x) + h(x, v(t,x)) = 0, & 0 \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}^d \\ v(0,x) = k(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2.1}$$

[2] Remarquons que, lorsque L est dégénérée, une telle démarche ne plus être envisagée, puisque l'équation parabolique $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$ n'admet pas, en général, de solutions fondamentales. Toutefois, les questions à l'existence d'une solution fondamentale sont résolues par la représentation des *sommes des carrés* (vecteurs) de Hörmander:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + X_0,$$

où les X_i sont des champs de vecteurs lisses dont l'algèbre de Lie engendre l'espace tangent en tout point. Cela signifie que le rang des X_i et de leurs crochets itérés est plein en tout point, autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \dim \mathrm{Lie}(X_1, X_2, \ldots, X_m)(x) = d.$$

Où L, le générateur de la diffusion (1.56), est défini par :

$$L := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(gg^*\right)_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.2}$$

La fonction $-h$ est appelée la *source* et g est la condition initiale. On suppose que la matrice diffusion gg^* associée L est uniformément elliptique, *i.e.* il existe deux constantes $\lambda, \Lambda > 0$ telles que :

$$p.p.\ x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda|\xi|^2 \leq \left\langle \xi, gg^*(x)\xi \right\rangle \leq \Lambda |\xi|^2. \tag{2.3}$$

On renforce cette inégalité en demandant que l'application gg^* soit bornée (lorsque gg^* est symétrique, la condition (2.3) suffit à dire que gg^* est bornée).

Définition 2.3 (**solution faible**).
Une solution $u \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ de l'EDP (2.1) est dite faible si pour tout $v \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \nabla u, gg^* \nabla v \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^d} \langle h, v \rangle. \tag{2.4}$$

Où $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ est l'espace de Sobolev $W_0^{1,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

On dit qu'une telle solution est faible, car on ne demande pas à la fonction d'avoir deux dérivées. Ceci s'oppose à la notion de solution forte et de solution classique.

Théorème 2.4 (**Lax-Milgram**).
Soit Φ une forme bilinéaire continue et coercive (elliptique) sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$. Alors pour toute forme linéaire F continue sur $\mathbf{H}$, il existe un élément unique $u \in \mathbf{H}$ tel que:

$$\Phi(u, v) = F(v), \quad \forall v \in \mathbf{H}. \tag{2.5}$$

Le théorème de Lax-Milgram de la théorie des espaces de Hilbert permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution faible sous l'hypothèse (2.3), pourvu que le second membre de (2.4) définisse une forme linéaire continue sur $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. En effet, en considérant la forme bilinéaire $\Phi(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, a \nabla v \rangle$. Les hypothèses faites sur la matrice de diffusion assurent que Φ est continue et coercitive sur $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, *i.e.* :

$$\Phi(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \qquad \text{(coercivité)}, \tag{2.6}$$

$$\Phi(u, v) \leq \beta \|u\| \|v\| \qquad \text{(continuité)}. \tag{2.7}$$

Nous reviendrons sur la démonstration probabiliste de l'existence et l'unicité de la solution l'EDP (2.1) à la section entre EDP et EDSR. Rappelons simplement que, dans un premier temps, il faut montrer un principe du maximum faible : si F est positive, alors u l'est aussi. Et dans un second temps, il faut majorer la norme $\mathbf{L}^\infty$ d'une solution éventuelle en fonction d'une norme de la source; une telle inégalité est appelée *estimation a priori*, car on ne suppose pas que la solution existe pour prouver cette estimation. Ici on sait que cette solution existe mais, de manière générale, obtenir de telles inégalités est une étape importante dans la preuve d'existence.

2.2 Équation de Poisson

L'objectif dans cette partie est de résoudre, pour u une fonction périodique, l'équation suivante :

$$Lu + f = 0. \tag{2.8}$$

Il n'est pas clair que cette équation admette toujours des solutions et même si une (des) solution(s) existe(nt) leur régularité en est une autre question. En effet, si u est une fonction régulière satisfaisant : $Lu = h$ pour h donné, l'on voit en intégrant par rapport à la mesure de Lebesgue sur une partie compacte (cas dans $\mathbb{R}$)

$$\int_{[0,1]} Lu(x)dx = \int_{[0,1]} h(x)dx = 0. \tag{2.9}$$

Il est alors nécessaire que $\int_{[0,1]} h(x)dx = 0$. À l'aide du principe du maximum et de l'alternative de Fredholm, l'on pourrait montrer que c'est une condition nécessaire et suffisante.

Existence et unicité :

Sous les conditions (1.71) et (1.72) et les suivantes :

- $$\left|f(x)\right| \leq C\left(1 + \|x\|^q\right), \tag{2.10}$$

  q assez petit pour $\alpha = -1$, alors f est μ-intégrable;

- $$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx) = 0. \tag{2.11}$$

Pardoux et Veretennikov [47] ont montré que la solution de (2.8) dans $\mathbb{R}^d$ est donné par

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}^x f(X_t)\, dt. \tag{2.12}$$

De plus, cette intégrale (2.12) est convergente et est l'unique solution de (2.8) appartenant à l'espace de Sobolev $\bigcap_{p\geq 1} W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Aussi cette solution vérifie certaines propriétés

Théorème 2.5 (**Pardoux et Veretennikov 2001**).
Sous les hypothèses (2.10) et (2.11)

1. *si en outre, pour certains* $n < 0$ *et* $C > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$*, on a :* $|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)^{n+\eta-1}$

$$\textit{alors la solution } u \textit{ est bornée et } \quad \|\nabla u(x)\| \leq C'(1 + \|x\|)^{(n+\eta-1)^+}; \tag{2.13}$$

2. *si en outre, pour certains* $n, C > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$*, on a :* $|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)^{n+\eta-1}$ *où dans le cas* $\eta = -1$ *et* $n > 4$, $2r > \Lambda d + (n-2)\beta$*, alors*

$$\|u(x)\| \leq C'\left(1 + \|x\|^n\right), \tag{2.14}$$

$$\|\nabla u(x)\| \leq C'\left(1 + \|x\|^{(n+\eta-1)^+} + \|x\|^n\right). \tag{2.15}$$

2.3 Liens EDP & EDS et liens EDP & EDSR

2.3.1 EDP et diffusion

Les liens entre EDP et processus de diffusion ont été bien développés par Kolmogrov dans les années 1930. En effet, l'on peut constater que certaines solutions d'EDP linéaires du second ordre peuvent être écrites comme l'espérance d'une fonction d'un processus de diffusion. Nous commencerons par la formule de Dynkin qui est la première classe de liens entre diffusion et EDP.

Proposition 2.6 (**formule de Dynkin**).
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ *une diffusion de générateur* L, $x \in \mathbb{R}^d$, τ *un temps d'arrêt tel que* $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$*, et* $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction deux fois continûment différentiable à support compact. Alors*

$$\mathbb{E}^x\left(\varphi(X_\tau)\right) = \varphi(x) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau L\varphi(X_s)\,ds\right). \tag{2.16}$$

Preuve : Considérons la diffusion (1.56).
Sans perte de généralité, supposons que $d = d' = 1$. Par la formule d'Itô (puis on passe l'espérance) :

$$\mathbb{E}^x\left(\varphi(X_\tau)\right) = \varphi(x) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau L\varphi(X_s)\,ds\right) + \mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau g(X_s)\varphi'(X_s)\,dB_s\right).$$

Il suffit donc de montrer que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. Or pour toute fonction h bornée par K et tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{E}^x\left(\int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\,dB_s\right) = \mathbb{E}^x\left(\int_0^N \mathbb{1}_{\{s<\tau\}} h(X_s)\,dB_s\right) = 0,$$

en vertu de la $\mathscr{F}_s$ -mesurabilité de $\mathbb{1}_{\{s<\tau\}}$ et $h(X_s)$. De plus,

$$\mathbb{E}^x\left(\left[\int_0^\tau h(X_s)\,dB_s - \int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\,dB_s\right]^2\right) = \mathbb{E}^x\left(\int_{\tau\wedge N}^\tau h^2(X_s)\,ds\right)$$
$$\leq K^2\mathbb{E}^x\Big(\tau - \tau\wedge N\Big),$$

qui tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, en vertu de l'hypothèse $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$, par convergence dominée. On peut donc écrire :

$$\mathbb{E}^x\left(\int_0^\tau h(X_s)\,dB_s\right) = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}^x\left(\int_0^{\tau\wedge N} h(X_s)\,dB_s\right) = 0.$$

□

La formule de Dynkin est très puisée pour des problèmes à valeurs au bord elliptique de la forme $Lu = \theta$.

La seconde classe de liens entre EDS et EDP est constituée par les équations de Kolmogorov, qui sont des problèmes aux valeurs initiales.
On remarque qu'en dérivant par rapport à t la formule de Dynkin, dans le cas particulier $\tau = t$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{P}_t\varphi\right)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}^x\left(\varphi(X_t)\right) = \mathbb{E}^x\left(L\varphi(X_t)\right) = \left(\boldsymbol{P}_tL\varphi\right)(x), \tag{2.17}$$

que l'on peut abréger sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_t := \boldsymbol{P}_tL. \tag{2.18}$$

Or nous avons vu avec la formule (1.65) que l'on pouvait aussi écrire formellement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_t := L\boldsymbol{P}_t.$$

Par conséquent, les opérateurs L et $\boldsymbol{P}_t$ commutent, du moins formellement. Le théorème suivant rend ce point rigoureux.

Théorème 2.7 (**équation de Kolmogorov rétrogrades**).
Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact

1. *la fonction*

$$u(t,x) = \left(\boldsymbol{P}_t\varphi\right)(x) = \mathbb{E}^x\left(\varphi(X_t)\right). \tag{2.19}$$

satisfait le problème aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Lu(t,x) & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2.20}$$

2. *Si $w(t,x)$ est une fonction bornée, continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en x, satisfaisant le problème (2.20), alors $w(t,x) = \left(\boldsymbol{P}_t\varphi\right)(x)$.*

La linéarité de l'équation de Kolmogorov rétrograde[3] implique qu'il suffit de la résoudre pour une famille complète de conditions initiales φ, pour connaître la solution pour toute condition initiale.
Un cas important est celui où l'on connaît toutes les fonctions propres et valeurs propres de L. Dans ce cas, la solution générale se décompose sur les fonctions propres, avec des coefficients dépendant exponentiellement du temps.
Un autre cas important revient à décomposer formellement la condition initiale sur une «base» de distributions de Dirac. En pratique, cela revient à utiliser la notion de *densité de transition.*

Par linéarité, la densité de transition, si elle existe et est lisse, satisfait l'équation de Kolmogorov rétrograde (ici le générateur L agissant sur la variable x), avec la condition initiale $p(0,x,y) = \delta(x-y)$.
L'adjoint du générateur L est par définition l'opérateur linéaire L^* tel que :

$$\left\langle L\phi, \psi \right\rangle_{L^2} = \left\langle \phi, L^*\psi \right\rangle_{L^2}, \tag{2.21}$$

pour tout choix de fonctions $\phi, \psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois continûment différentiables, avec ϕ à support compact, où $\langle ., . \rangle_{\boldsymbol{L}^2}$ désigne le produit scalaire usuel de $\boldsymbol{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.
En intégrant $\left\langle L\phi, \psi \right\rangle_{\boldsymbol{L}^2}$ deux fois par parties, on obtient (où L est le générateur de 1.56) :

$$L^* := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \left(gg^*\right)_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{d} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.22}$$

Théorème 2.8 (équation de Kolmogorov progressive).
Si X_t possède une densité de transition lisse $p(t,x,y)$, alors celle-ci satisfait l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,x,y) = L^* p(t,x,y), \tag{2.23}$$

où L^* agit sur la variable y.

Supposons que la loi X_0 admette une densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors

[3] Dans le cas du mouvement brownien, dont le générateur est le Laplacien à un facteur 1/2 près, l'équation de Kolmogorov rétrograde est l'équation de la chaleur.

X_t aura une densité donnée par :

$$\rho(t,y) := \left(\boldsymbol{S}_t \rho\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y)\rho(y)dy. \tag{2.24}$$

En appliquant l'équation de Kolmogorov progressive (2.23), on obtient l'équation de *Fokker–Planck* (voir [34])

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,y) = L^*\rho(t,y), \tag{2.25}$$

que l'on peut aussi écrire formellement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{S}_t = L^*\boldsymbol{S}_t. \tag{2.26}$$

Le générateur adjoint L^* est donc le générateur du semi-groupe adjoint $\boldsymbol{S}_t$.

Remarque 2.9. *Si $\rho(y)$ est la densité d'une mesure de probabilité satisfaisant $L^*\rho = 0$, alors ρ est une mesure stationnaire de la diffusion. En d'autres termes, si la loi de X_0 admet la densité ρ , alors X_t admettra la densité ρ pour tout $t > 0$.*

Jusqu'ici nous avons rencontré des problèmes à valeurs au bord elliptiques de la forme $Lu = \theta$ et des équations d'évolution paraboliques de la forme $\partial_t u = Lu$. Le formule de Feynman–Kac montre qu'on peut également lier des propriétés d'une diffusion à celles d'équations paraboliques où le générateur contient un terme linéaire en u.

Théorème 2.10 (**formule de Feynman-kac**).
Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable à support compact, et soit $q : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée inférieurement.

1. *la fonction*

$$v(t,x) = \mathbb{E}^x\left(\varphi(X_t)\, e^{-\int_0^t q(X_s)\, ds}\right), \tag{2.27}$$

satisfait le problème aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) = Lv(t,x) - q(x)v(t,x) & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ v(0,x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}^d; \end{cases} \tag{2.28}$$

2. *si $w(t,x)$ est une fonction continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en x, bornée pour x dans un compact, satisfaisant le problème (2.28), alors $w(t,x)$ est égale au membre de droite de (2.27).*

En combinaison avec la formule de Dynkin, la formule de Feynman–Kac peut être généralisée à des temps d'arrêt.

Remarque 2.11. *On dispose plusieurs variantes de la formule de Feynman-Kac dans la littérature. Notons qu'on peut remplacer le processus de diffusion par un processus de diffusion-branchement, ou un super-processus, qui est un processus à valeurs mesure (voir par exemples les travaux de Dynkin [20], Le Gall [26]).*

2.3.2 EDP et EDSR

Dans ce qui suit, l'on veut associer à la diffusion (1.56) un couple (Y_t, Z_t) solution de l'EDSR :

$$\begin{cases} Y_t = k(X_T) + \int_t^T h(X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s \\ \mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} |Y_s|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 \right) < +\infty, \end{cases} \tag{2.29}$$

où $k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications données.

Remarquons que nous avons adapté le problème de sorte à faire dépendre la source h de Z. Puis, faisons les hypothèses suivantes sur le coefficient h et la condition initiale k : h et k sont continues et pour certains $K, \mu, p > 0$

$$|k(x)| \le K\left(1 + |x|^p\right), \tag{2.30}$$

$$\left|h(x, y, z)\right| \le K\left(1 + |y| + \|z\|\right), \tag{2.31}$$

$$\left\langle y - y', h(x, y, z) - h(x, y', z')\right\rangle \le \mu \left|y - y'\right|^2. \tag{2.32}$$

On suppose par ailleurs que les coefficients f et g de l'EDS (1.56) associée à la diffusion X_t sont localement lipschitziens et à croissance au plus linéaire à l'infini. Alors, il est classique, Pardoux et Peng [44], que l'EDSR (2.29) possède une unique solution.

Théorème 2.12. *Sous les conditions (2.30), (2.31) et (2.32) l'EDSR (2.29) admet une unique solution.*

Preuve : voir Pardoux [42] □

Nous allons maintenant préciser le lien entre l'EDSR (2.29) et l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) + Lu(t, x) + h(x, u(t, x)) = 0, & 0 \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(T, x) = k(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.33}$$

où $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}$ et L l'opérateur de type (1.67)

On suppose par exemple que g et f sont globalement lipschitziens. On note $\{X_s^{t,x} :\ s \ge t\}$ la solution partant de x à l'instant t, et $\{(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}) :\ t \le s \le T\}$ la solution de l'équation rétrograde :

$$Y_s^{t,x} = k\left(X_T^{t,x}\right) + \int_s^T h\left(X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}\right) dr - \int_s^T Z_r^{t,x} dB_r. \tag{2.34}$$

Supposons que la solution u de (2.33) soit de classe $C^{1,2}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\right)$, alors par la formule d'Itô

$$u(t,x) = u\left(T, X_T^{t,x}\right) - \int_s^T \left(\frac{\partial u}{\partial r} + Lu\right)\left(r, X_r^{t,x}\right) dr - \left(M_T - M_s\right), \tag{2.35}$$

où M est une martingale locale. Ensuite il est facile de voir que $Y_t^{t,x} = u(t,x)$, si l'on suppose que les applications f et g sont bornées, en effet :

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x \left\{ k\left(X_T^{t,x}\right) + \int_t^T h\left(X_s^{t,x}, u\left(s, X_s^{t,x}\right)\right) ds \bigg|_{\mathscr{F}_t} \right\}, \tag{2.36}$$

où $\mathscr{F}_t$ désigne la filtration naturelle du processus X.

Donc (2.34) admet au moins une solution $Y_t^{t,x} = u(t,x)$. L'unicité suivant la classe des processus satisfaisant $\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |Y_s|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2\right) < +\infty$, découle de l'hypothèse de lipschitz.

Par la suite, si les fonctions h et k sont continues et lipschitziennes, l'on remarque que la solution de l'EDSR (2.29) est une solution de viscosité[4] de l'EDP (2.33).

Définition 2.13 (**sous-solution de viscosité**).
$u \in C\left([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$ est une sous-solution de viscosité de l'EDP (2.33) si et seulement si pour toute fonction $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ vérifiant $\phi(t,x) \ge u(t,x)$ au voisinage d'un point (t_0, x_0) et $\phi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + L\phi(t,x) + h\left(x, \phi(t,x)\right) \le 0. \tag{2.37}$$

Définition 2.14 (**sur-solution de viscosité**).
$u \in C\left([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$ est une sur-solution de viscosité de l'EDP (2.33) si et seulement si pour toute fonction $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ vérifiant $\phi(t,x) \le u(t,x)$ au voisinage d'un point (t_0, x_0) et $\phi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + L\phi(t,x) + h\left(x, \phi(t,x)\right) \ge 0. \tag{2.38}$$

Une solution de viscosité est à la fois une sous et une sur-solution.

Théorème 2.15 (**Pardoux-Peng**).

[4] Une solution de viscosité est une solution de type très faible, introduite par Lions et Crandall dans les années 1980 dans le but d'atteindre l'unicité.

L'unique solution de viscosité de l'EDP (2.33) est :

$$u(t,x) = Y_t^{t,x}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.39}$$

Remarque 2.16. *Si l'on pose $v(t,x) = u(T-t,x)$, alors on a une formule probabiliste pour le système d'EDP paraboliques progressives*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + Lv(t,x) + h(x, v(t,x)) = 0, & 0 \le t \le T, \ x \in \mathbb{R}^d \\ v(0,x) = k(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.40}$$

en terme de la solution de l'EDSR :

$$\bar{Y}_t^{t,x} = k\left(X_t^{0,x}\right) + \int_t^T h\left(X_r^{0,x}, \bar{Y}_r^{t,x}\right) dr - \int_t^T \bar{Z}_r^{t,x} dB_r. \tag{2.41}$$

au sens où

$$v(t,x) := \bar{Y}_0^{t,x}. \tag{2.42}$$

2.4 Équations de type : KPP et HBJ

2.4.1 Les équations de réactions diffusions

L'équation renormalisée de Kolmogrov-Petrovskii-Piskunov (KPP) est sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) = L_\varepsilon u^\varepsilon(t,x) + \frac{1}{\varepsilon} c(x) u^\varepsilon(t,x)\big(1 - u^\varepsilon(t,x)\big) & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u^\varepsilon(0,x) = k(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.43}$$

où L_ε est un opérateur elliptique (dépendant du paramètre $\varepsilon > 0$), $0 < \alpha \le c(x) \le \beta$ et k positive et bornée.

Par la méthode des grandes déviations, Freidlin [23] a montré que la limite de la solution de (2.43) est une fonction $u^0(t,x)$ qui ne peut prendre que deux valeurs (zéro ou un). Plus précisément, il existe une valeur critique t_x finie à partir de laquelle :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_x, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.44}$$

Puis ce résultat a été confirmé par Barles et Souganidis [6], par une approche analytique, avec les solutions de viscosité, où ils établissent une vitesse de convergence vers zéro sur une fonctionnelle non positive V, en étudiant la limite[5] de $\varepsilon \log u^\varepsilon$ quand ε tend vers zéro. Enfin, Pradeilles [49], avec les EDSR et la théorie des équations Hamilton-Jacobi, a généralisé ce résultat.

[5] La vitesse de convergence vers «un» s'étudie en calculant la limite de $\varepsilon \log\big(1 - u^\varepsilon(t,x)\big)$.

2.4.2 Les équations Hamilton-Jacobi

À un hamiltonien H du premier ordre de classe $\mathbf{C}^2$ (voir Bachelet et al. [3]) :

$$H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & H(x,y), \end{array} \tag{2.45}$$

sont naturellement associés un système hamiltonien (newtonien) d'équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = \dfrac{\partial}{\partial y} H\left(x_t, y_t\right) \\ \dot{y}_t = -\dfrac{\partial}{\partial x} H\left(x_t, y_t\right), \end{cases} \tag{2.46}$$

et une équation Hamilton-Jacobi qui a pour inconnue une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - H(x, \nabla u) = 0. \tag{2.47}$$

Si l'on désigne par $\left(x_t, y_t\right)$ la solution du système hamiltonien (2.46) avec la condition initiale $\left(x_0, y_0\right)$ alors on peut définir le flot hamiltonien pris au temps t, par l'application:

$$\phi_t \ : \ \left(x_0, y_0\right) \longmapsto \phi_t\left(x_t, y_t\right). \tag{2.48}$$

On s'arrange pour que le flot hamiltonien associé au système hamiltonien (2.46) soit complet. Pour cela, il suffit de supposer que la quantité $\left\| \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x,y) \right\|$ soit bornée. Par la suite, on s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) - H(x, \nabla u) = 0 & 0 < t, \ x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2.49}$$

En général, même pour des données initiales lisses, l'existence de solutions classiques n'est pas établie pour des temps grands. Il faut alors se contenter de solutions faibles : *solutions variationnelles*[6] ou *solutions de viscosité* (la définition reste quasiment la même). Dans la suite, nous considérons les solutions faibles au sens des solutions de viscosité.

[6] Grâce au travail de Marc Chaperon (voir par exemple [9]), on sait décrire de manière maniable la *solution variationnelle*, par une construction géométrique, à l'aide d'une famille *génératrice*. Sans rentrer dans les détails, si l'on suppose que le hamiltonien est une forme quadratique non dégénérée en y et lorsque y est grand, on peut montrer que la famille *génératrice* est proche d'une forme quadratique non dégénérée. Sur ce, on peut définir un représentant de la solution, grâce au *minmax* : cette construction associe à toute application f proche d'une courbe y_t à l'infini, une de ses valeurs critiques, notée $\gamma(f)$, et ce continûment par rapport à la fonction f pour la norme uniforme, de sorte que

$$\left|\gamma(f) - \gamma(g)\right| \leq \|f - g\|_\infty.$$

pour toutes les applications f et g dont la différence est uniformément bornée.

Chapitre 3

Théorie de l'homogénéisation

Le but de la théorie de l'homogénéisation[1] est d'obtenir une approximation homogène (simple) d'un milieu décrit par des propriétés microscopiques supposées très hétérogènes.

Par exemple, pour chaque $\varepsilon > 0$, on considère l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u^{\varepsilon}(t,x) = L_{\varepsilon} u^{\varepsilon}(t,x) + \dfrac{1}{\varepsilon} h\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) u^{\varepsilon}(t,x) \\ u^{\varepsilon}(0,x) = k(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.1}$$

On suppose que $h \in C^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+\right)$ mesurable, borné et périodique, et $k \in C\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+\right)$ au plus à croissance polynômiale à l'infini. De plus, l'opérateur L_{ε} est construit à l'aide de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon} f\left(\dfrac{X_t^{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) dt + g\left(\dfrac{X_t^{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) dB_t \\ X_0^{\varepsilon} = \dfrac{x}{\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d'}$ sont des applications mesurables et bornées, périodiques de période 1 dans chaque direction. En outre, on suppose qu'elles sont classe $\boldsymbol{C}^{\infty}$. Et de plus,

$$gg^*(x) \geq \alpha \boldsymbol{I}_d > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.3}$$

L'objectif principal de ce chapitre c'est de montrer, en premier, que le processus X_t^{ε} défini en (3.2), converge en loi vers un mouvement Brownien non standard de matrice de covariance A, puis de préciser les propriétés de A, coefficient homogénéisé, appelé coefficient de diffusivité effective. Ensuite, montrer que la solution de l'EDP (3.1) converge (au sens des viscosités) vers la solution de l'EDP parabolique à coefficients homogénéisés (où

[1] Les champs d'application sont variés : étude des sous-sols (diffusion du pétrole en milieu poreux), propriétés des matériaux composites, matériaux céramiques, matériaux supraconducteurs supra-filamentaires, étude de polymères, etc.

l'opérateur est de terme principal A).

3.1 Propriétés et complément sur l'équation de Poisson

Définissons tout d'abord, $\tilde{X}_t^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} X_{\varepsilon^2 t}^\varepsilon$, un revêtement du processus X_t^ε à valeurs[2] dans $\mathbb{T}^d$

$$\begin{cases} d\tilde{X}_t^\varepsilon = f\left(\tilde{X}_t^\varepsilon\right) dt + g\left(\tilde{X}_t^\varepsilon\right) d\tilde{B}_t \\ \tilde{X}_0^\varepsilon = \dfrac{x}{\varepsilon}, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\tilde{B}_t = \frac{1}{\varepsilon} B_{\varepsilon^2 t}$ est un mouvement Brownien.
Remarquons que le générateur du processus $\tilde{X}_t^\varepsilon$ est l'opérateur

$$\tilde{L}_\varepsilon := \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=1}^d \left(gg^*\right)_{ij}(x) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \textstyle\sum_{i=1}^d f_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

$$:= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=1}^d \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(gg^*\right)_{ij}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right) + \textstyle\sum_{i=1}^d \left(f_i - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{j=1}^d \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right)(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.6}$$

Comme il y a unicité en loi pour les solutions des EDS, indépendamment du brownien considéré, on oubliera par la suite la dépendance en ε du brownien. Ce qui va suivre concerne l'étude des propriétés ergodiques du processus $\tilde{X}$. Les sections suivantes sont dues à Pardoux ([27],[43]).

3.1.1 Mesure invariante

Lemme 3.1 (Pardoux).
$\forall \varepsilon \geq 0$, le processus de diffusion $\left\{\tilde{X}_t^\varepsilon,\ t \geq 0\right\}$ à valeurs dans $\mathbb{T}^d$, possède une unique probabilité invariante μ_ε.

Preuve :
∗ *Existence*:
L'existence résulte de ce que $\left\{\tilde{X}\right\}$ est un processus de Feller homogène à valeurs dans un compact. Si ν désigne la loi de $\tilde{X}_0^\varepsilon$, notons pour $t > 0$, A un sous-ensemble borélien de $\mathbb{T}^d$,

$$\mu_t = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_\nu\left(\tilde{X}_s^\varepsilon \in A\right) ds.$$

Comme $\{\mu_t; t > 0\}$ est une famille de probabilités sur un ensemble compact $\mathbb{T}^d$, il existe

[2] Notons que le fait que $\frac{x}{\varepsilon} \longrightarrow +\infty$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ est absolument sans importance, du fait que le processus $\tilde{X}$ est à valeurs dans un compact.

une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante vers ∞ et une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{T}^d$ telles que

$$\mu_{t_n} \longrightarrow \mu, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Soit $\phi \in C\left(\mathbb{T}^d\right)$, l'application $x \longmapsto \mathbb{E}^x\left[\phi\left(\tilde{X}_t^\varepsilon\right)\right]$ est continue. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\nu\left[\phi\left(\tilde{X}_t^\varepsilon\right)\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_{t_n}}\left[\phi\left(\tilde{X}_t^\varepsilon\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \mathbb{E}_\nu\left\{\phi\left(\tilde{X}_{t+s}^\varepsilon\right)\right\} ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_t^{t+t_n} \mathbb{E}_\nu\left\{\phi\left(\tilde{X}_s^\varepsilon\right)\right\} ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \mathbb{E}_\nu\left\{\phi\left(\tilde{X}_s^\varepsilon\right)\right\} ds \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\mu(dx),
\end{aligned}$$

donc μ est une mesure invariante (on verra qu'elle possède une densité).
$*$ *Unicité*:
Supposons qu'il existe deux telles densités différentes p_ε et q_ε, et considérons l'application:

$$z \longmapsto \inf_{x\in\mathbb{T}^d}\left(p_\varepsilon(x) - z q_\varepsilon(x)\right).$$

Cette application est continue et décroissante. D'après la proposition (3.5) ci-dessous, elle est strictement positive en $z = 0$ et strictement négative en $z = 1$, donc il existe $0 < z_0 < 1$ tel que

$$\inf_{x\in\mathbb{T}^d}\left(p_\varepsilon(x) - z_0 q_\varepsilon(x)\right) = 0.$$

Posons $r(x) = \dfrac{p(x) - z_0 q(x)}{\displaystyle\int \left(p(x) - z_0 q(x)\right) dx}$, alors r est la densité d'une probabilité invariante (comme combinaison linéaire de probabilités invariantes). Cette densité ne vérifie pas le résultat de (3.5) d'où la contradiction. □

Le résultat suivant nous montre que cette mesure possède une densité,

Proposition 3.2 (**Pardoux**).
Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la mesure invariante μ_ε de $\tilde{X}^\varepsilon$ a une densité $p_\varepsilon(x)$ telle que $p_\varepsilon \in \boldsymbol{H}^1\left(\mathbb{T}^d\right)$. En outre, $p_\varepsilon \longrightarrow p_0$ dans $\boldsymbol{L}^2\left(\mathbb{T}^d\right)$ quand $\varepsilon \to 0$.

La preuve de cette proposition s'appuie entre autre sur une inégalité de Nash.

Proposition 3.3 (**inégalité de Nash**).

Il existe une constante $c > 0$ *telle que, pour tout* $\phi \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}^d)$, *si* $\overline{\phi} = \phi - \int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)dx$,

$$\left\|\overline{\phi}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d)}^{2+\frac{4}{d}} \leq c \left\|\overline{\phi}\right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d)}^{\frac{4}{d}} \|\nabla\phi\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)}^2. \tag{3.7}$$

On déduit immédiatement de l'inégalité de Nash, puisque p_ε est une densité de probabilité et que $\left\|\overline{\phi}\right\|_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{T}^d)} \leq 2\|\phi\|_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{T}^d)}$, le résultat suivant

Corollaire 3.4 (**Pardoux**). *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tout* $\varepsilon \geq 0$

$$\|p_\varepsilon\|_2^{2+\frac{4}{2}} \leq c\|\nabla p_\varepsilon\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)}^2. \tag{3.8}$$

On va maintenant établir la stricte positivité de la densité.

Proposition 3.5 (**Pardoux**).
Il existe une constante $c > 0$ *telle que*

$$\frac{1}{c} \leq p_\varepsilon(x) \leq c, \quad x \in \mathbb{T}^d, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{3.9}$$

Preuve :
Ce résultat peut être vu comme une conséquence de l'inégalité d'Aronson [39], dans le cas de $\mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{Mt^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{M|y-x|^2}{t}\right) \leq \rho_\varepsilon(t,y,x) \leq \frac{M}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{M|y-x|^2}{t}\right),$$

en remarquant que pour tout $t > 0$,

$$p_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(y)\rho_\varepsilon(t,y,x)dy,$$

où $\rho_\varepsilon(t,y,x)$ désigne la densité de probabilité de transition.

La densité du processus sur le tore étant supérieure à celle du processus sur $\mathbb{R}^d$, on a bien le résultat. □

On admettra le résultat très classique

Theorem 3.6 (**Pardoux**).
Supposons que les coefficients f, g *sont de classe* $\boldsymbol{C}^\infty$, *et en outre* g *satisfait la condition (3.3). Alors la mesure invariante* μ *possède une densité* $p \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}^d)$.

Remarque 3.7. *On pouvait aussi montrer l'existence et l'unicité de la mesure invariante, en utilisant le principe du maximum faible et l'alternative de Fredhoml aux opérateurs* $\boldsymbol{T}_\lambda$ *définis par :* $\forall \lambda > 0$

$$(\boldsymbol{T}_\lambda\varphi)(x) = \int_0^t e^{\lambda t}\mathbb{E}^x\left\{\varphi\left(\tilde{X}_t\right)\right\}dt. \tag{3.10}$$

3.1.2 Trou spectral

Proposition 3.8 (**Pardoux**).
Il existe une constante $\rho > 0$ *telle que pour tout* $\varepsilon \geq 0$, *si* $\phi \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d; \mu_\varepsilon)$ *et satisfait la condition* $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\mu_\varepsilon(dx) = 0$, *on a*

$$\left\| \mathbb{E}^x \left[\phi\left(\tilde{X}_t^\varepsilon\right) \right] \right\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d;\mu_\varepsilon)} \leq \|\phi\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d;\mu_\varepsilon)} e^{-\rho t}.$$

Preuve :
On démontre ce résultat en utilisant l'inégalité de Poincaré, et la propositions (3.5) . □

Alors, on a

Corollaire 3.9 (**Pardoux**).
Il existe $C > 0$ *tel que si* $\phi \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}^d)$ *et satisfait* $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x) p_\varepsilon(x) dx = 0$, $t \geq 0$

$$\left| \mathbb{E}^x \left(\tilde{X}_t^\varepsilon |_{\tilde{X}_s^\varepsilon} \right) \right| \leq C \|\phi\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}^d)} e^{-\rho(t-s)}.$$

Et le suivant,

Corollaire 3.10 (**Pardoux**).
Il existe $C > 0$ *tel que si* $\phi \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{T}^d)$ *et satisfait* $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x) p_\varepsilon(x) dx = 0$, $0 \leq s \leq t$

$$\left| \mathbb{E}^x \left(\tilde{X}_t^\varepsilon |_{\tilde{X}_s^\varepsilon = x} \right) \right| \leq C \|\phi\|_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{T}^d)} e^{-\rho(t-s)}.$$

3.1.3 Théorème ergodique

Ici on désigne par X_t^ε la solution de l'EDS (3.2), et l'on note $p = p_0$.

Proposition 3.11 (**Pardoux**). *Soit* $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$. *Alors,* $\forall t > 0$,

$$\int_0^t \varphi\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds \longrightarrow t \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x) p(x) dz, \text{ en probabilité quand } \varepsilon \to 0.$$

Preuve :
Posons $\overline{\phi}_\varepsilon(x) := \phi(x) - \int_{\mathbb{T}^d} \phi(x) p_\varepsilon(x) dx$. On sait déjà que $\int_{\mathbb{T}^d} \phi(x) p_\varepsilon(x) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^d} \phi(x) p(x) dx$ quand $\varepsilon \to 0$. Il reste à montrer que

$$\int_0^t \overline{\phi}_\varepsilon\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds \longrightarrow 0.$$

Avec $\frac{1}{\varepsilon} X_s^\varepsilon := \tilde{X}_{\frac{s}{\varepsilon^2}}^\varepsilon$, on a

$$\int_0^t \overline{\phi}_\varepsilon\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds = \varepsilon^2 \int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}} \overline{\phi}_\varepsilon\left(\tilde{X}_r^\varepsilon\right) dr.$$

Il résulte de la propriété de Markov de $\tilde{X}^\varepsilon$ et du corollaire (3.9) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \overline{\phi}_\varepsilon(\tilde{X}_r^\varepsilon)\,dr\right)^2\right] &= 2\mathbb{E}\int_0^t\int_0^s \overline{\phi}_\varepsilon(\tilde{X}_s^\varepsilon)\overline{\phi}_\varepsilon(\tilde{X}_r^\varepsilon)\,dr\,ds \\ &\le 2\left\|\overline{\phi}_\varepsilon\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}^d)}\int_0^t\int_0^s e^{-\rho(s-r)}\,ds\,dr \\ &= 2\left\|\overline{\phi}_\varepsilon\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}^d)}\rho^{-2}\left(-1+\rho t+e^{-\rho t}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \overline{\phi}_\varepsilon(\tilde{X}_r^\varepsilon)\,dr\right)^2\right] \le C\left\|\overline{\phi}_\varepsilon\right\|^2_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}^d)}\rho^{-2}\left(-\varepsilon^4+\rho\varepsilon^2 t+e^{-\frac{\rho t}{\varepsilon^2}}\right)\longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon\to 0.$$

□

3.1.4 Équation de Poisson

Le résultat de trou spectral exposé au paragraphe (3.1.2) va nous permettre également de donner la solution de l'équation de Poisson sur $\mathbb{T}^d$ associé à l'opérateur L (la limite celui définit en 3.6). À nouveau, considérons $p = p_0$, $\mu = \mu_0$ et $\tilde{X} = \tilde{X}_0$.

Le problème est le suivant : soit $\phi \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}^d)$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{T}^d}\phi(x)p(x)\,dx = 0. \tag{3.11}$$

On cherche[3] $\hat{\phi}$ solution de l'EDP :

$$L\hat{\phi}(x)+\phi(x) = 0, \quad x\in\mathbb{T}^d. \tag{3.12}$$

La condition (3.11) est cruciale pour que (3.12) ait une solution. Cette solution n'est unique qu'à une constante additive près. On va fixer cette constante en cherchant une solution $\hat{\phi}$ telle que

$$\int_{\mathbb{T}^d}\hat{\phi}(x)\mu(dx) = 0. \tag{3.13}$$

Théorème 3.12 (**Pardoux**).
Soit $\phi \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}^d)$ qui vérifie (3.11). Alors l'équation (3.12) a une unique solution $\hat{\phi} \in \boldsymbol{W}^{2,n}(\mathbb{T}^d)$ pour tout $n \ge 1$, qui vérifie (3.13). Cette solution est donnée par la formule probabiliste :

$$\hat{\phi}(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}^x\left[\phi(\tilde{X}_t)\right]dt. \tag{3.14}$$

[3] Ce qui veut dire qu'on cherche une solution périodique à cette même équation posée sur le cube unité de $\mathbb{R}^d$.

Preuve : Considérons l'EDP parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - Lu(t,x) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{T}^d \\ u(0,x) = \phi(x), & x\in\mathbb{T}^d. \end{cases} \tag{3.15}$$

Nous remarquons que (3.15) a une solution unique dans $C\left(\mathbb{R}_+;\boldsymbol{L}^2\left(\mathbb{T}^d\right)\right)\bigcap\boldsymbol{L}^2\left(\mathbb{R}_+;\boldsymbol{H}^1\left(\mathbb{T}^d\right)\right)$, qui est donnée par la formule probabiliste

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left[\phi\left(\tilde{X}_t\right)\right].$$

Il résulte du corollaire (3.9) que $u(t,.)\longrightarrow 0$ dans $\boldsymbol{L}^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$ à vitesse exponentielle. Posons

$$v(t,x) = \int_0^t u(s,x)ds.$$

Il résulte de ce qui précède que $v(t,.)\in\boldsymbol{H}^1\left(\mathbb{T}^d\right)$ pour tout $t\geq 0$, et que $\|v(t,.)\|_\infty\leq C$, donc aussi $\|v(t,.)\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}^d)}\leq C$. En outre

$$u(t,x) = Lv(t,x) + \phi(x).$$

Donc

$$\Big\langle u(t,x), v(t,x)\Big\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\mu)} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\Big\langle\left(gg^*\right)(x)\nabla v(t,x), \nabla v(t,x)\Big\rangle\mu(dx) = \Big\langle\phi(x), v(t,x)\Big\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\mu)},$$

et on a immédiatement que $v(t,x)$ est bornée. Donc, le long d'une sous-suite $t_n\longrightarrow\infty$,

$$v\left(t_n,x\right)\longrightarrow\hat{v}(x)\quad\text{dans}\quad\boldsymbol{H}^1\left(\mathbb{T}^d\right),$$

et $\hat{v}$ satisfait

$$\hat{v}\in\boldsymbol{H}^1\left(\mathbb{T}^d\right),\quad L\hat{v}+\phi(x)=0\quad\text{et}\quad\int_{\mathbb{T}^d}\hat{v}(x)\mu(dx)=0.$$

Enfin

$$\hat{v}(x) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t\mathbb{E}^x\left[\phi\left(\tilde{X}_s\right)\right]ds = \int_0^\infty\mathbb{E}^x\left[\phi\left(\tilde{X}_s\right)\right]ds.$$

L'unicité résulte de ce que si $\hat{v}(x) = \displaystyle\int_0^t\mathbb{E}^x\left[\phi\left(\tilde{X}_s\right)\right]ds$, $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^d}\hat{v}(x)\mu(dx)=0$ et $L\hat{v}(x)=0$, alors $\nabla\hat{v}=0$ *p.p.*, d'où par l'inégalité de Poincaré et la proposition (3.8), $\hat{v}=0$.
La régularité $\hat{v}\in\bigcap_{n>1}\boldsymbol{W}^{2,n}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est établie par exemple dans Gilbarg et Trudinger [28]. □

3.2 Homogénéisation et EDS

Pour simplifier, l'on fixe $x=0$. L'on veut montrer la convergence de X_t^ε en (3.2) :

$$X_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t f\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right)ds + \int_0^t g\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right)dB_s. \tag{3.16}$$

L'on remarque que les fluctuations du terme $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t f\left(\frac{X_s}{\varepsilon}\right)ds$ ne sont pas contrôlables. Sur ce, l'on exploite le fait que le coefficient f vérifie la *condition de centrage* et l'on montre que la contribution de ces fluctuations se résument à une intégrale brownienne. Pour cela, nous utilisons des fonctions appelées *correcteurs*, qui sont solutions de l'équation de Poisson. Introduisons X_t^ε la solution de l'EDS (3.2) et le *correcteur* $\hat{f}$ solution de l'équation :

$$L\hat{f} + f = 0. \tag{3.17}$$

où L est le générateur infinitésimal de l'EDS (3.4).

3.2.1 Méthodologie

Supposons que :

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\mu(dx) = 0, \quad \text{(condition de centrage)}. \tag{3.18}$$

Par la formule d'Itô appliquée à $\hat{f}\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, on a

$$\varepsilon\left[\hat{f}\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \hat{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t L\hat{f}\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right)ds + \int_0^t \nabla\hat{f} g\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right)dB_s. \tag{3.19}$$

En sommant (3.16) et (3.19), l'on obtient en parallèle de (3.17)

$$X_t^\varepsilon + \varepsilon\left[\hat{f}\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \hat{f}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] = \int_0^t \left(I+\nabla\hat{f}\right) g\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right)dB_s. \tag{3.20}$$

Théorème 3.13 (convergence brownienne).
Le processus de diffusion X_t^ε, solution de l'EDS (3.2) converge en loi, au sens des processus à valeurs dans $C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)$, vers un Brownien centré et de matrice de covariance A (appelée coefficient de diffusivité effective), définie par

$$A = \int_{\mathbb{T}^d}\left[I+\nabla\hat{f}(z)\right]\left(gg^*\right)(z)\left[I+\nabla\hat{f}(z)\right]^*\mu(dz).$$

Ce résultat résulte de la proposition (3.14) ci-dessous. Définissons

$$A^{\frac{1}{2}} = \int_{\mathbb{T}^d}\left[I+\nabla\hat{f}(z)\right]g(z)\mu(dz). \tag{3.21}$$

Proposition 3.14 (Pardoux). *On a :*

$$\int_0^t \left(I+\nabla\hat{f}\right) g\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) d\tilde{B}_s \longrightarrow A^{\frac{1}{2}} B_t, \tag{3.22}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ *au sens de la convergence en loi dans l'espace* $C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)$.

Preuve :

∗ Nous allons tout d'abord montrer que les lois sur $C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)$ des processus

$$M_t^\varepsilon = \int_0^t \left(I+\nabla\hat{f}\right) g\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) d\tilde{B}_s,$$

(sous $\tilde{\mathbb{P}}$) forment une famille tendue de probabilités sur $C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)$. Définissons pour cela le module de continuité de M_t^ε :

$$\omega_\varepsilon(\delta) = \sup_{\substack{0\le s,r\le t\\ |s-r|\le\delta}} \left|M_s^\varepsilon - M_r^\varepsilon\right|, \quad \forall\delta>0$$

et montrons ensuite que $\forall\eta>0,\ \exists\delta>0,\ \forall\varepsilon>0,$

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\omega_\varepsilon(\delta)>\eta\right) \le \eta.$$

Soit $\eta>0$ et$0<\delta<1.$ Pour $0\le i\le\frac{t}{\delta}$ on pose

$$F_i^\varepsilon = \left\{\sup_{i\delta\le s\le(1+i)\delta\wedge t} \left|M_s^\varepsilon - M_{i\delta}^\varepsilon\right| > \frac{\eta}{3}\right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}\left(\omega_\varepsilon(\delta)>\eta\right) \le& \sum_{0\le i\le\frac{t}{\delta}} \tilde{\mathbb{P}}\left(F_i^\varepsilon\right)\\ \le& \frac{t}{\delta}\sup_{0\le i\le\frac{t}{\delta}} \tilde{\mathbb{P}}\left(F_i^\varepsilon\right).\end{aligned}$$

En posant $\rho_s^\varepsilon = \left(I+\nabla\hat{f}\right) gg^*\left(I+\nabla\hat{f}\right)^*\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right)$. En utilisant les inégalités de Markov et Davis-Burkholder-Gundy pour $p>2$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}\left(F_i^\varepsilon\right) \le& \kappa\eta^{-p}\tilde{\mathbb{E}}\left\{\left(\int_{i\delta}^{(i+1)\delta\wedge t} \left|\rho_s^\varepsilon\right|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right\}\\ \le& \kappa'\eta^{-p}\delta^{\frac{p}{2}},\end{aligned}$$

et en combinant les deux dernières inégalités on obtient

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\omega_\varepsilon(\delta)>\eta\right) \le \kappa'\eta^{-p}\delta^{\frac{p}{2}-1},$$

et on obtient le résultat désiré en choisissant $\delta = \left(\frac{\eta^{p+1}}{\kappa}\right)^{\frac{2}{p-2}} \wedge 1$. Montrons que la famille est bien tendue. Soit $\eta > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, on a

$$\tilde{\mathbb{P}}\left\{\omega_{\varepsilon}(\delta_n) > \eta 2^{-n}\right\} \leq \eta 2^{-n}.$$

Par suite, on pose

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{\delta_n>0} \left\{\phi \in C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right):\ \omega_{\varepsilon}(\delta_n) > 2^{-n}\eta \text{ et } \phi(0) = 0\right\}.$$

Le fait que $\forall \phi \in K,\ \phi(0) = 0$ et l'équicontinuité assure que K est borné dans $C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)$ et le théorème d'Ascoli permet de conclure que K est compact. De plus

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}\left\{K\right\} &\geq \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\phi \in C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right):\ \omega_{\varepsilon}(\delta_n) > 2^{-n}\eta\right\}\right) \\
&\geq 1 - \tilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\omega_{\varepsilon}(\delta_n) > 2^{-n}\eta\right\}\right) \\
&\geq 1 - \sum_{n\geq 1} \tilde{\mathbb{P}}\left(\left\{\omega_{\varepsilon}(\delta_n) > 2^{-n}\eta\right\}\right) \\
&\geq 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{\eta}{2^{-n}} = 1 - \eta.
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que la famille est tendue.

$*$ Il ne reste alors plus qu'à montrer que le processus $\left\{A^{\frac{1}{2}} B_t,\ t > 0\right\}$ est l'unique valeur d'adhérence de cette famille quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Soit $\{M_t,\ t \geq 0\}$ une valeur d'adhérence de cette famille quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ c'est-à-dire qu'il existe une suite (ε_n) qui converge vers 0 telle que $\forall t > 0$ et $\forall \Phi : C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a

$$\tilde{\mathbb{E}}\left\{\Phi\left(M_t^{\varepsilon_n}\right)\right\} \longrightarrow \mathbb{E}\left\{\Phi(M_t)\right\}, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

L'uniforme intégrabilité des variables $\sup_{0\leq s\leq t} \left|M_s^{\varepsilon}\right|^2$ (les coefficients sont bornés) assure que $\left(M_s^{\varepsilon}\right)_{0\leq s\leq t}$ est un processus tel que $\sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}\left\{\left|M_s^{\varepsilon}\right|^2\right\} < \infty$. D'autre part, si l'on fixe $0 \leq s < r \leq t$ et si l'on se donne une fonction Ψ_s continue et bornée sur $C\left([0,s],\mathbb{R}^d\right)$, on remarque que :

$$\tilde{\mathbb{E}}\left\{\left(M_r^{\varepsilon} - M_s^{\varepsilon}\right)\Psi_s\left(M_s^{\varepsilon}\right)\right\} = 0,$$

donc en passant à la limite pour $\varepsilon_n \longrightarrow 0$:

$$\mathbb{E}\left\{(M_r - M_s)\Psi_s(M_s)\right\} = 0,$$

ce qui assure du fait de l'orthogonalité des accroissements que M est une martingale (continue). En procédant de même, on a :

$$\tilde{\mathbb{E}}\Big\{\Big([M_r^\varepsilon]^2-[M_s^\varepsilon]^2\Big)\Psi_s\big(M_s^\varepsilon\big)\Big\}=\tilde{\mathbb{E}}\Big\{\Psi_s\big(M_s^\varepsilon\big)\int_s^r\rho_v^\varepsilon dv\Big\}.$$

D'où l'on tire

$$\mathbb{E}\Big\{\big([M_r]^2-[M_s]^2\big)\Psi_s(M_s)\Big\}=\Psi_s(M_s)\,A(r-s).$$

et on en déduit alors que le processus croissant associé à M est $\Big\{As,\ 0\le s\le t\Big\}$.
Posons $N=A^{\frac{1}{2}}M$. Nous avons montré que N est une martingale continue telle que $\Big\{[N_s]^2-Is,\ 0\le s\le t\Big\}$ soit une martingale. Le théorème de Lévy assure alors que N est un mouvement brownien standard d-dimensionnel. □

3.2.2 Propriétés du coefficient de diffusivité effective

Dans le cas elliptique[4] où la matrice gg^* est définie strictement positive, il est classique depuis les travaux de Norris [38], que le coefficient de diffusivité effective est symétrique et défini strictement positif.

3.3 Homogénéisation et EDP

Cette partie concerne l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence à coefficients périodiques. Et l'on s'intéresse à la limite de la solution de l'EDP (3.1).

On suppose que :

$$\int_{\mathbb{T}^d}h(x)\mu(dx)=0, \tag{3.23}$$

$$\int_{\mathbb{T}^d}f(x)\mu(dx)=0. \tag{3.24}$$

On définit le processus :

$$Y_t^\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h\Big(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)ds. \tag{3.25}$$

Alors la solution de (3.1) est donnée par la formule de Feynman-Kac par

$$u^\varepsilon(t,x)=\mathbb{E}\big\{k\big(X_t^\varepsilon\big)\exp\big(Y_t^\varepsilon\big)\big\}. \tag{3.26}$$

[4] Notons, au passage, que ceci n'est plus vrai si la matrice de diffusion est dégénérée. Dans ce cas, il faut se référer aux travaux de Pardoux et Haierer [29] sur une autre version, avec des conditions moins restrictives, où ils caractérisent la non-dégénérescence de la matrice homogénéisée en utilisant la notion de «*loops*». Dans [29], on trouve l'un des premiers résultats donnant une condition *nécessaire* et *suffisante* pour la non-dégénérescence de la matrice homogénéisée.

Définissons également

$$\hat{h}(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}^x \left[h(\tilde{X}_t) \right] dt, \tag{3.27}$$

$$\hat{f}(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}^x \left[f(\tilde{X}_t) \right] dt, \tag{3.28}$$

les solutions au sens faible des équations de Poisson :

$$L\hat{h}(x) + h(x) = 0, \tag{3.29}$$

$$L\hat{f}(x) + f(x) = 0. \tag{3.30}$$

Posons par la suite :

$$C = \int_{\mathbb{T}^d} \left[I + \nabla \hat{f}(z) \right] \left(g g^* \right)(z) \nabla \hat{h}(z) \mu(dz), \tag{3.31}$$

$$D = \int_{\mathbb{T}^d} \nabla \hat{h}(z) \left(g g^* \right)(z) \nabla \hat{h}(z) \mu(dz), \tag{3.32}$$

$$A = \int_{\mathbb{T}^d} \left[I + \nabla \hat{f}(z) \right] \left(g g^* \right)(z) \left[I + \nabla \hat{f}(z) \right]^* \mu(dz). \tag{3.33}$$

Maintenant, introduisons :

$$\hat{X}_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon + \varepsilon \left[\hat{f}\left(\tfrac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \hat{f}\left(\tfrac{x}{\varepsilon} \right) \right], \tag{3.34}$$

$$\hat{Y}_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon + \varepsilon \left[\hat{h}\left(\tfrac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \hat{h}\left(\tfrac{x}{\varepsilon} \right) \right], \tag{3.35}$$

$$\hat{u}^\varepsilon(t,x) = \mathbb{E}\left\{ k\left(\hat{X}_t^\varepsilon \right) \exp\left(\hat{Y}_t^\varepsilon \right) \right\}. \tag{3.36}$$

Remarque que $u^\varepsilon(t,x)$ et $\hat{u}^\varepsilon(t,x)$ ont la même limite.

Nous définissons une nouvelle mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{ \int_0^t g\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) \nabla \hat{h}\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla \hat{h}^*\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) g g^*\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) \nabla \hat{h}\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds \right\}. \tag{3.37}$$

Par la formule de Girsanov :

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t g\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) \nabla \hat{h}\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds. \tag{3.38}$$

est un M.B d-dimensionnel.

Ainsi, il est classique que

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left\{ k\left(x + Ct + A^{\frac{1}{2}} B_t \right) e^{Dt} \right\}. \tag{3.39}$$

est la solution (au sens de viscosité) de l'EDP parabolique à coefficients homogénéisés suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j}\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} C_i \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} + D w(t,x) \\ w(0,x) = k(x) \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.40}$$

Notons que :

Proposition 3.15 (**Pardoux**). *Les convergences en loi suivantes ont lieu sous $\tilde{\mathbb{P}}$, pour tout $t > 0$*

$$\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^t (I+\nabla\hat{f})\, gg^*\nabla\hat{h}\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dr - Cs\right| \longrightarrow 0, \tag{3.41}$$

$$\int_0^t (I+\nabla\hat{f})\, gg^*\,(I+\nabla\hat{f})^*\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds \longrightarrow At, \tag{3.42}$$

$$\int_0^t \nabla\hat{h} gg^*\nabla\hat{h}\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds \longrightarrow Dt. \tag{3.43}$$

Théorème 3.16 (**Pardoux**). *Pour tout $t > 0, x \in \mathbb{R}^d$, on*

$$u^\varepsilon(t,x) \longrightarrow u(t,x), \quad \textit{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Preuve :
Par (3.35) l'on déduit que

$$\hat{Y}_t^\varepsilon = \int_0^t \nabla\hat{h} g\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_s.$$

Par la formule de Girsanov (3.38), on peut réécrire (3.34) comme suit

$$\hat{X}_t^\varepsilon = x + \int_0^t (I+\nabla\hat{f})\, gg^*\nabla\hat{h}\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t (I+\nabla\hat{f})\, g\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_s.$$

Pour finir la démonstration nous nous appuyons sur les propositions (3.14) et(3.15). □

Chapitre 4

Principe de grandes déviations

Ce chapitre fournit une rapide panorama de la théorie des grandes déviations.[1] Les principaux outils et méthodes utilisés dans nos travaux y sont présentés. Nous donnons d'abord quelques définitions et propriété basique du principe de grandes déviations, ensuite nous décrivons les outils qui nous permettent de caractériser le principe PGD. Puis, nous nous intéressons au comportement d'un processus vu comme la perturbation brownienne d'une équation différentielle ordinaire.

4.1 Définition et propriété basique

Si on considère une famille de mesures $\left(\mu_\varepsilon\right)_{\varepsilon\geq 0}$ sur une tribu donnée qui converge vers une mesure μ_0, le PGD permet de quantifier la nature de la convergence. Dans la suite, nous allons nous référer à une suite de v.a., tout en sachant que c'est la suite de mesures associées à ces v.a. qui convergent.
Soit $(X_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ une famille de v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathscr{Y}$ un espace polonais métrique[2] muni de sa tribu Borélienne.

Définition 4.1 (**PGD**).
On dit que la famille $(X_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ *satisfait un principe de grandes déviations (PGD) avec une (bonne) fonction taux* $I : \mathscr{Y} \longrightarrow [0, +\infty]$ *si :*

- *pour tout* $m \geq 0$, $\Phi_m \overset{def}{=} \left\{x \in \mathscr{Y} : I(x) \leq m\right\}$ *est un compact;*

[1] La théorie des grandes déviations représente un raffinement des lois limites en probabilité. Elle permet de donner une évaluation (de meilleure qualité que celle obtenue par le *théorème central limite*) de la probabilité des fluctuations rares. Explicitement, elle s'intéresse aux événements rares et au calcul asymptotique de leur probabilité dans une échelle exponentielle.

[2] Cet espace est le support des espaces de mesures de probabilités μ_ε.

- *pour tout fermé F de $\mathscr{Y}$, on a :*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in F) \leq -\inf_{x\in F} I(x); \tag{4.1}$$

- *pour tout ouvert O de $\mathscr{Y}$, on a :*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in O) \geq -\inf_{x\in O} I(x). \tag{4.2}$$

Si l'on désigne par d la distance sur $\mathscr{Y}$, alors le PGD est satisfait si :

- *pour tout $m \geq 0$, $\Phi_m \stackrel{def}{=} \left\{x \in \mathscr{Y} : I(x) \leq m\right\}$ est un compact;*
- *pour tout $x^* \in \mathscr{Y}$, pour tout $\eta > 0$:*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left\{d\left(X_\varepsilon, x^*\right) > \eta\right\} \geq -I(x^*); \tag{4.3}$$

- *pour tout $m \geq 0$, pour tout $\eta > 0$:*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left\{d(X_\varepsilon, \Phi_m) \geq \eta\right\} \leq -m. \tag{4.4}$$

Remarque 4.2.

- *En tant que limite, la fonction de taux est unique dès lors que X_ε satisfait un PGD.*
- *Lorsqu'on remplace les fermés par des compacts, on parle de PGD faible.*
- *Lorsque la fonction taux n'est pas bonne l'on dit que cette fonctionnelle est assez petite. C'est le cas si $\Phi_m \stackrel{def}{=} \left\{x \in \mathscr{Y} : I(x) \leq m\right\}$ n'est pas un compact ($m > 0$).*
- *Le PGD est équivalent à la proposition suivante:*

$$-\inf_{x\in \mathring{A}} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(X_\varepsilon \in A) \leq -\inf_{x\in \overline{A}} I(x), \tag{4.5}$$

  où $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ désignent respectivement l'adhérence et l'intérieur de A.

- *Bien entendu, ce qui définit la notion d'ouvert ou de fermé dans un espace est fondamental; il est donc à craindre qu'en changeant d'espace topologique, on change la nature du PGD qu'on peut obtenir.*

En théorie des convergences faibles, l'on avait vu la notion de tension (1.7). Son analogue en théorie des grandes déviations est le concept : *tension exponentielle.*

Définition 4.3 (**tension exponentielle**).
Une famille $(X_\varepsilon)_{\varepsilon\geq 0}$ *de v.a. à valeurs dans* $\mathscr{Y}$*, est dite exponentiellement tendue si pour tout* $a>0$*, il existe un compact* $K\subset\mathscr{Y}$ *(dépendant de* a*) tel que*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\mathbb{P}\left(X_\varepsilon\in K^c\right)\leq -a, \tag{4.6}$$

où K^c *désigne le complémentaire de* K *dans* $\mathscr{Y}$*.*

Une des conséquences de ce résultat est que si une famille X de v.a. est exponentiellement tendue alors le PGD est satisfait lorsque le PGD faible est vérifié.

La caractérisation suivante du PGD, connue sous la formule de Varadhan-Bryc dans la littérature, est la propriété fondamentale de notre travail (Dembo et Zeïtouni [14]).

Théorème 4.4 (**propriété fondamentale**).
Soit (X_ε) *une famille de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*.*

Formule de Varadhan : *Supposons que* (X_ε) *satisfait le PGD avec une fonction taux* $I:\mathbb{R}^d\longrightarrow[0,+\infty]$*, et soit* $\phi:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction continue. Si de plus, l'une des conditions suivantes :*

- $$\lim_{\lambda\to+\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\phi(X_\varepsilon)\geq\lambda\}}e^{\frac{\phi(X_\varepsilon)}{\varepsilon}}\right]=-\infty; \tag{4.7}$$
- *pour certain* $\beta>1$
$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{\beta\phi(X_\varepsilon)}{\varepsilon}}\right]<\infty. \tag{4.8}$$

Alors,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{\phi(X_\varepsilon)}{\varepsilon}}\right]=\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\left\{\phi(x)-I(x)\right\}. \tag{4.9}$$

Formule de Bryc : *Supposons que la famille* (X_ε) *soit exponentiellement tendue et que pour tout* $\phi\in C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$*, l'espace des fonctions continues et bornées de* $\mathbb{R}^d$*, la limite suivante existe*
$$\Lambda(\phi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{\phi(X_\varepsilon)}{\varepsilon}}\right]. \tag{4.10}$$
Alors, la famille (X_ε) *satisfait le PGD avec une fonction taux* I *définie par:*

$$I(x)=\sup_{\phi\in C_b(\mathbb{R}^d)}\left\{\phi(x)-\Lambda(\phi)\right\}. \tag{4.11}$$

De plus, pour tout $\phi\in C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$\Lambda(\phi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left\{\phi(x)-I(x)\right\}. \tag{4.12}$$

4.2 Boîte à outils pour les grandes déviations

Dans cette partie nous donnons les outils les plus utilisés pour obtenir le PGD. Nous noterons, au passage, que certain de ces outils préservent le PGD, avec une possible modification de la fonction taux (voir Dembo et al.[13] ou Feng et al.[22]).

4.2.1 Principe de contraction

Le *principe de contraction* est sans doute l'outil le plus utilisé, dans la littérature, pour caractériser le PGD pour une construction trajectorielle. Seulement, en *théorie de petites perturbations des systèmes dynamiques*, ce principe présente un défaut rédhibitoire[3]; en effet, il repose sur un argument : le «*lemme de Gronwall*», qui n'est valable que pour un horizon fini.

Théorème 4.5 (**Principe de contraction**).
Soient $\mathscr{Y}$ et $\mathscr{Y}'$ deux espaces métriques séparables et f une application continue de $\mathscr{Y}$ vers $\mathscr{Y}'$. Considérons la fonction taux I de $\mathscr{Y}$ à valeurs dans $[0;+\infty]$

- *Pour tout y de $\mathscr{Y}$, définissons*

$$I'(y) = \inf_{x\in\mathscr{Y}} \{I(x) : y = f(x)\} \qquad et \qquad I'(y) = +\infty \quad si \quad \emptyset. \tag{4.13}$$

  Alors, $I^{'}$ est une fonction taux sur $\mathscr{Y}'$

- *Si une famille de v.a. (X_ε) satisfait le PDG avec une fonction taux I sur $\mathscr{Y}$, alors la famille de v.a. $Y_\varepsilon = f(X_\varepsilon)$ satisfait aussi le PGD avec I' sur $\mathscr{Y}'$.*

4.2.2 Caractérisation dans le cadre des inégalités de dérivation

Dans cette section nous allons explorer une caractérisations du PGD dans le cadre le plus général des inégalités de dérivation. Nous commencerons par un résultat dans le cas le plus simple de $\mathbb{R}$, puis nous donnerons une extension de ce dernier dans le cas de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 4.6.
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose

$$\Lambda(t) = \log \mathbb{E}\left(e^{tX}\right). \tag{4.14}$$

[3] Si l'on s'intéresse au comportement de la mesure invariante, ce principe ne s'applique plus. Les alternatives sont soit un critère de tension ([51]), soit une description trajectorielle ([25]).

et on définit la fonctionnelle[4] *suivante, pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\Lambda^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} [tx - \Lambda(t)]. \tag{4.15}$$

Alors,

$$\begin{cases} si\ a \geq \mathbb{E}(X): & \mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-\Lambda^*(a)} \\ si\ a \leq \mathbb{E}(X): & \mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-\Lambda^*(a)} \end{cases} \tag{4.16}$$

Preuve : Le théorème de convergence dominée montre que Λ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\Lambda'(0) = \mathbb{E}(X)$. De plus, Λ est convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left(\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)\right\} \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(e^{\alpha t}\right)\mathbb{E}\left(e^{\beta t}\right)},$$

donne : $\Lambda\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\Lambda(x)+\Lambda(y)\right]$. Il en résulte que la fonction Λ^* est positive et s'annule en $x = \mathbb{E}(X)$, de plus :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq \mathbb{E}(X): & \Lambda^*(x) = \sup_{t\geq 0}\{tx - \Lambda(t)\} \\ \text{si } x \leq \mathbb{E}(X): & \Lambda^*(x) = \sup_{t\leq 0}\{tx - \Lambda(t)\}. \end{cases}$$

Alors si $a \geq \mathbb{E}(X)$, on a pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(tX \geq ta) \leq e^{-ta}\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = e^{-\Lambda^*(x)}.$$

Le raisonnement est le même si $a \leq \mathbb{E}(X)$. □

Rappelons que Cramér est le premier à utiliser cette approche pour établir le PGD pour une famille de variables aléatoires indépendantes. Ensuite ce résultat a été confirmé par Gartnër-Ellis dans $\mathbb{R}^d$, puis généralisé par Baldi dans des espaces plus généraux (voir Dembo et al.[13] ou Stroock et al.[25]).

Théorème 4.7 (**Gartnër-Ellis**).
Supposons $T > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$ *soient fixés. Soit* $\left\{X_t^{x,\varepsilon} : \varepsilon > 0, t \in [0,T]\right\}$ *une famille de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, issue de* x*. Supposons de plus :*

- *la fonction* $g_{T,x}$*, ci-dessus, soit bien définie de* $\mathbb{R}^d$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

$$g_{T,x}(\theta) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left\{e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\langle\theta, X_T^{x,\varepsilon}\rangle\right)}\right\}; \tag{4.17}$$

- *le vecteur nul de* $\mathbb{R}^d$ *soit dans l'intérieur de* $\left\{\theta \in \mathbb{R}^d : g_{T,x}(\theta) < \infty\right\}$*;*

[4] On l'appelle dans la littérature le transformé de Legendre-Fenchel, ou de Young, ou de Cramér. Notons, au passage, que l'on travaille avec le logarithme de la génératrice des moments, parce l'on sait que la fonction caractéristique peut être différentiable à l'origine sans que la v.a. associée n'admette de moments.

- *l'ensemble* $A := \left\{\theta \in \mathbb{R}^d : \ \left|g_{T,x}(\theta)\right| < \infty\right\}$*, de frontière* ∂A*, soit d'intérieur* $\overset{\circ}{A}$ *non vide, que* $\nabla g_{T,x}(\theta)$ *soit défini pour tout* $\theta \in \overset{\circ}{A}$ *et que* $\lim_{\substack{\theta \to \partial A \\ \theta \in \overset{\circ}{A}}} \left|g_{T,x}(\theta)\right| = \infty$.

Alors la famille $\{X_t^{x,\varepsilon} : \ \varepsilon > 0, t \in [0,T]\}$ *satisfait un principe de grandes déviations avec une fonction taux définie par :*

$$I_{T,x} = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^d} \left\{ \langle \theta, z \rangle - g_{T,x}(\theta) \right\}, \qquad z \in \mathbb{R}^d. \tag{4.18}$$

Notons qu'il existe d'autres outils permettant de caractériser le principe de Grandes Déviations. Citons : la méthode de *changement de mesure* employée par Donsker et Varadhan pour obtenir la borne inférieure dans le cadre markovien; ou les techniques utilisant la convergence des noyaux banachiques et la théorie de semi-groupe (un livre de référence est celui de Feng et Kurtz [22]).

4.3 Théorie de Freidlin-Wentzell

La théorie de Freidlin-Wentzel étudie les petites perturbations de systèmes dynamiques.

4.3.1 Théorème de Schilder

Le théorème suivant sera utile aussi bien aux probabilistes intéressés par les conséquences trajectorielles de processus qu'aux statisticiens[5] qui s'intéressent aux poids des petites boules donnés par la mesure de Wiener.

Si l'on considère $\mathscr{Y} = C_x\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ comme l'espace des trajectoires de fonctions continues $\varphi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, satisfaisant : $\varphi(0) = x$ muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|\varphi\|_{C_x([0,T],\mathbb{R}^d)} = \sup_{0 \le t \le T} |\varphi(t)|. \tag{4.19}$$

Soit B_t un M.B standard de dimension d défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Considérons la diffusion suivante :

$$X_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} B_t, \qquad \varepsilon \ge 0, \ \ t \in [0,T]. \tag{4.20}$$

On peut alors se demander comment estimer certains événements rares, c'est-à-dire pour $\eta > 0$ and $\tau > 0$, la quantité :

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{0 \le t \le \tau} \left|X_t^\varepsilon\right| \ge \eta \right\}. \tag{4.21}$$

[5] Ce genre de résultats peut avoir des répercussions aussi bien en optimisation aléatoire qu'en statistiques bayésiennes lorsqu'on étudie des *a priori* trajectoriel, pour des estimations de densité ou des problèmes de régression (voir [33], [56]).

On désigne par $\mathscr{H}_1$ l'espace des fonctions absolument continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont les dérivées premières sont de carré intégrable, muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{\mathscr{H}_1} = \left(\int_0^T \left|\dot{\varphi}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.22}$$

Dans l'ordre de donner des estimations précises, Schilder en 1966, avait établi le suivant (voir, Freidlin et al. [25] ou Dembo et al. [13])

Théorème 4.8 (**Schilder**).
La famille de diffusion $\left(X_t^\varepsilon\right)$ (4.20) satisfait un principe PGD avec une fonction taux

$$I(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{\mathscr{H}_1} & si\ \phi \in \mathscr{H}_1\ avec\ \phi(0) = 0 \\ +\infty & sinon. \end{cases} \tag{4.23}$$

Ce résultat a été généralisé par Freidlin et Wentzell (voir [13] ou[25]).

4.3.2 Théorème de Freidlin-Wentzell

On se donne sur $\mathbb{R}^d$ un champs de matrice $g(x)$ d'ordre $d \times d'$ et des champs de vecteur $f(x), f_\varepsilon(x)$ de sorte que f_ε converge uniformément vers f quand $\varepsilon \to 0$. Puis, l'on considère l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = f_\varepsilon\left(X_t^\varepsilon\right)dt + \sqrt{\varepsilon}g\left(X_t^\varepsilon\right)dB_t \\ X_0^\varepsilon = x \end{cases} \qquad \varepsilon \in (0,1), t \in [0,T]. \tag{4.24}$$

Avec B_t un M.B standard de dimension d défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que f, f_ε, g sont lipschitziens et bornés par κ. De plus, l'on désigne (toujours) par $a = gg^*$ la matrice carrée inversible d'ordre d.

Théorème 4.9 (**Freidlin-Wentzell**).
La famille de diffusion $\left(X_t^\varepsilon\right)$ (4.24) satisfait un PGD avec une bonne fonction taux $S_{0,T}$ définie par :

$$S_{0,T}(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{\phi}(s) - f(\phi(s))\right|^2_{a^{-1}(\phi(s))} dt & si\ \phi \in \mathscr{H}_1\ avec\ \phi(0) = x \\ +\infty & sinon. \end{cases} \tag{4.25}$$

Où $|\theta|_{a^{-1}} = \langle \theta, a^{-1}\theta \rangle$.

Partie II

Couplage Homogénéisation et Grandes déviations

Chapitre 5

Cas où les effets sont équivalents

Dans ce chapitre nous supposons que les paramètres ont quasiment la même vitesse de convergence. Dans ce cas, les effets associés aux paramètres (homogénéisation et grandes déviations) sont quasi-identiques. Ici comme la limite du rapport des coefficients est égale à une constante positive, à la différence du cas de Diehiou et Manga [18] quelques coefficients dépendant de cette constante vont apparaître entre les lignes. Ce chapitre reprend en détail le travail fait en collaboration avec Diedhiou, Manga et moi [10].

Le résultat fondamental (le lemme de Varadhan) a été obtenu grâce aux travaux de Baxendale et Stroock [7].

5.1 Introduction

Nous considérons le système d'EDP (1) perturbé par deux paramètres strictement positifs. Nous étudions le comportement de la solution de l'EDP au regard du rapport relatif δ/ε entre le paramètre de l'homogénéisation (δ) et celui des grandes déviations (ε), tous tendant vers zéro. Nous établissons un principe de grandes déviations puis nous identifions une barrière qui nous permettra d'analyser la solution de l'EDP.

Comme les deux paramètres δ et ε convergent tous vers zéro, nous introduisons, sans perte de généralités, un nouveau paramètre δ_ε défini par $\delta_\varepsilon = \delta$. Et l'on suppose que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} = \gamma > 0. \tag{5.1}$$

Il en résulte que les deux perturbations disparaissent quasiment à la même vitesse. Dans cette situation l'on peut directement appliquer les calculs de [25] (voir aussi le Régime 2 [24]).

Notre objectif est de retrouver une variante de la formule de Varadhan puis d'identifier une barrière. Les outils majeurs qui nous permettent de retrouver cette formule sont dans le Corollaire 1.12 de Baxendale and Stroock [7]. Sous nos hypothèses, il est difficile de donner une limite explicite de la solution $u^{\varepsilon,\delta}(t,x)$ comme dans les papiers [18] ou [17]. Toutefois nous donnons les limites supérieure et inférieure de $\varepsilon \log u^{\varepsilon,\delta}(t,x)$, qui nous permettrons de déduire par calculs directs le même résultat que dans Diedhiou et Manga [18].

Considérons la famille de variables aléatoires $\left\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \ t \geq 0\right\}$ (3) satisfaisant l'EDS :

$$X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} = x + \int_0^t B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) dW_s. \tag{5.2}$$

Et supposons que la matrice associée au coefficient de diffusion est uniformément elliptique.

Tout d'abord, introduisons quelques notations pour rappeler le corollaire de Baxendale et Stroock [7]. Soient $X_0, X_1, \cdots, X_d$ des champs de vecteurs de classe C^∞ définis sur $\mathscr{M}$ une variété riemannienne compact de dimension d. Soient $Y_0, Y_1, \cdots, Y_d$ des éléments de l'espace $C^\infty\left(\mathscr{M};\mathbb{R}^d\right)$ et β un mouvement Brownien de dimension d. Nous noterons par $\circ d\beta$ et $d\beta$ la différentiation au sens de Stratonovich et d'Itô respectivement. Prenons $x \in \mathscr{M}$

et considérons le couple (x_t, y_t) solution des équations intégrales stochastiques suivantes :

$$x_t = x + \sum_1^d \int_0^t X_k(x_s) \circ d\beta_k(s) + \int_0^t X_0(x_s)\, ds, \tag{5.3}$$

$$y_t = \sum_1^d \int_0^t Y_k(x_s) \circ d\beta_k(s) + \int_0^t Y_0(x_s)\, ds. \tag{5.4}$$

Remarquons qu'une équivalence au sens d'Itô de l'expression de y_t est donnée par :

$$y_t = \sum_1^d \int_0^t Y_k(x_s)\, d\beta_k(s) + \int_0^t Q(x_s)\, ds, \tag{5.5}$$

$$\text{où} \quad Q(x) = Y_0(x) + \tfrac{1}{2} \sum_1^d X_k(Y_k(.))(x), \tag{5.6}$$

et que x_t est une diffusion sur $\mathscr{M}$ dont l'opérateur infinitésimal est défini par :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d X_k^2 + X_0. \tag{5.7}$$

Définissons :

- Pour $x \in \mathscr{M}$, $\hat{a}(x) = \sum_{k=1}^d Y_k^2$ et $a(x,\eta) = \langle \eta, \hat{a}(x)\eta \rangle$, $\eta \in \mathbb{R}^d$.
- Pour $(x,\eta) \in \mathscr{M} \times \mathbb{R}^d$, $\sigma_k(x,\eta) = \langle Y_k(x), \eta \rangle$, $0 \le k \le d$ et

$$Q(x,\eta) = \sigma_0(x,\eta) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left(X_k \sigma_k(.,\eta) \right)(x). \tag{5.8}$$

- Pour $\eta \in \mathbb{R}^d$, $L_\eta = L + \sum_{k=1}^d \sigma_k(.,\eta) X_k$ et J_η élément de $\mathscr{P}(\mathscr{M})$, l'espace des mesures de probabilités sur $\mathscr{M}$, tel que

$$J_\eta(\mu) = \sup \left\{ -\int_{\mathscr{M}} \frac{L_\eta u}{1+u} d\mu \ : \ u \in C^\infty(\mathscr{M}) \text{ and } u \ge 0 \right\}, \tag{5.9}$$

  si μ est une mesure de probabilité et $J_\eta(\mu) = \infty$ sinon.

- $\hat{\mathbb{P}}_x$ la loi des variables aléatoires (x_t, y_t) prenant la valeur $(x,0)$ au temps $t = 0$ et appartenant à l'espace $C\big([0,T]; \mathscr{M} \times \mathbb{R}^d\big)$.

De plus, supposons que

$$\Lambda(\eta) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_x} \left\{ \exp(\eta, y_t) \right\}, \tag{5.10}$$

existe uniformément pour $x \in \mathscr{M}$ et que cette limite est indépendante de x. En outre, on a

$$\Lambda(\eta) = \sup_{\mu \in \mathscr{P}(\mathscr{M})} \left\{ \int_{\mathscr{M}} \left(Q(x,\eta) + 1/2 \sum_{k=1}^d a(x,\eta) \right) \mu(dx) - J_\eta(\mu) \right\}, \tag{5.11}$$

ou, de manière équivalente

$$\Lambda(\eta) = \inf_{\phi\in C^{\infty}(\mathcal{M})} \sup_{\mu\in\mathscr{P}(\mathcal{M})} \Big\{ \int_{\mathcal{M}} \big(Q(x,\eta) - L\phi(x)\big)\,\mu(dx) + 1/2 \sum_{k=1}^{d} \int_{\mathcal{M}} \big(X_k\phi(x) - \sigma_k(x,\eta)\big)^2 \mu(dx) \Big\}. \tag{5.12}$$

Le résultat suivant est du à Baxendale et Stroock [7]

Théorème 5.1. *(**Baxendale and Stroock**)*
Alors nous avons

$$\Lambda(\eta) \geq \overline{Q}(\eta) + \alpha(\eta), \tag{5.13}$$

$$\Lambda(\eta) \leq \overline{Q}(\eta) + \beta(\eta), \tag{5.14}$$

avec

$$\overline{Q}(\eta) = \int_{\mathcal{M}} Q(x,\eta)\, m_{_L}(dx), \tag{5.15}$$

$$\alpha(\eta) = \inf_{\phi\in C^{\infty}(\mathcal{M})} \Big\{ 1/2 \sum_{k=1}^{d} \int_{\mathcal{M}} \big(X_k\phi(x) - \sigma_k(x,\eta)\big)^2 \Big\}\, m_{_L}(dx), \tag{5.16}$$

$$\beta(\eta) = \sup_{J_\eta(\mu)<\infty} \Big\{ 1/2 \sum_{k=1}^{d} \int_{\mathcal{M}} \big(X_k\psi(.,\eta)(x) - \sigma_k(x,\eta)\big)^2 \Big\}\, \mu(dx), \tag{5.17}$$

où $m_{_L}$ désigne l'unique mesure invariante de l'opérateur L et $\psi(.,\eta)$ l'unique $u \in C^{\infty}(\mathcal{M})$ qui satisfait l'équation :

$$Lu = Q(.,\eta) - \overline{Q}(\eta) \qquad et \qquad \int_{\mathcal{M}} u\, dm_{_L} = 0. \tag{5.18}$$

En fin, si l'on pose

$$I(y) = \sup_{\eta} \{\langle \eta, y\rangle - \Lambda(\eta)\}, \tag{5.19}$$

une autre expression équivalente de $I(y)$, sous certaines conditions d'existence, est

$$I(y) = \sup_{\phi} \inf_{\mu} \sup_{\eta} \left\{ \frac{\left[\langle \eta, y\rangle - \int_{\mathcal{M}} \big(Q(x,\eta) - L\phi(x)\big)\,\mu(dx)\right]^2}{2\sum_{k=1}^{d} \int_{\mathcal{M}} \big(X_k\phi(x) - \sigma_k(x,\eta)\big)^2 \mu(dx)} \right\}. \tag{5.20}$$

Alors pour tout sous-ensemble Γ sur $\mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$, l'on a :

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \inf_{x\in\mathcal{M}} \hat{\mathbb{P}}_x \Big\{ \frac{y_t}{t} \in \Gamma \Big\} \geq - \inf_{y\in\mathring{\Gamma}} I(y), \tag{5.21}$$

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in\mathcal{M}} \hat{\mathbb{P}}_x \Big\{ \frac{y_t}{t} \in \Gamma \Big\} \leq - \inf_{y\in\overline{\Gamma}} I(y). \tag{5.22}$$

Et pour tout $\Phi \in C\left(\mathbb{R}^d\right)$ *satisfaisant* $\lim_{|y|\to\infty} \dfrac{\Phi(y)}{\|y\|^2} = 0$, *l'on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in\mathcal{M}} \left| \frac{1}{t} \log \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_x} \left\{ e^{t\Phi(y_t/t)} \right\} - \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \left\{ \Phi(y) - I(y) \right\} \right| = 0. \tag{5.23}$$

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la première section nous établissons le principe de grandes déviations; dans la seconde section nous étudions le comportement de la solution de l'EDP.

5.2 Principe de grandes déviations

Définissons, pour tout $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $g^{\varepsilon}_{T,x}$ par :

$$\boldsymbol{g^{\varepsilon}_{T,x}(\theta)} = \varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \right\rangle \right) \right] \quad \varepsilon > 0,\ \theta \in \mathbb{R}^d. \tag{5.24}$$

Pour transporter les résultats dans le tore $\mathbb{T}^d$, l'on définit des champs de vecteurs $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \ldots, \hat{\sigma}_d$ et $\hat{\sigma}_0^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ sur $\mathbb{T}^d$ comme suit,

$$\hat{\sigma}_k \varphi := \left\langle \sigma_k, \nabla\varphi \right\rangle, \quad k = 1, \ldots, d; \tag{5.25}$$

$$\hat{\sigma}_0^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} := L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\varphi - \frac{1}{2} \textstyle\sum_{k=1}^d \hat{\sigma}_k^2. \tag{5.26}$$

Introduisons le tiré-en-arrière $\hat{X}_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} := \frac{1}{\delta_\varepsilon} X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 t}$ défini par la projection naturelle de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{T}^d$, qui est solution au sens de Stratonovich de l'EDS

$$\begin{cases} d\hat{X}_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \hat{\sigma}_k \left(\hat{X}_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \right) \circ dW_t^k + \hat{\sigma}_0^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \left(\hat{X}_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \right) dt \\ \hat{X}_0^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \dfrac{x}{\delta_\varepsilon}. \end{cases} \tag{5.27}$$

Selon (5.1) son générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \hat{\sigma}_k^2 + \hat{\sigma}_0^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ converge vers l'opérateur :

$$\boldsymbol{L_\gamma} := \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left[aD^2\varphi \right] + \left\langle B_0, \nabla\varphi \right\rangle + \gamma \left\langle B_1, \nabla\varphi \right\rangle = L_0\varphi + \gamma \left\langle B_1, \nabla\varphi \right\rangle. \tag{5.28}$$

Nous désignons par m_γ l'unique mesure invariante associée à L_γ et nous introduisons une modification de $X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ définie, à partir d'une fonction bornée φ indéfiniment différentiable et de différentielles assez régulières, par :

$$\tilde{X}_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} := X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} - \delta_\varepsilon^2 \left[\varphi\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon} \right) - \varphi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon} \right) \right], \tag{5.29}$$

En appliquant la formule d'Itô à $\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \varphi\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \left[\varphi\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) - \varphi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right] &= \int_0^t L_\gamma \varphi\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds + \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \langle \sigma, \nabla\varphi\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) dW_s \\ &+ \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \int_0^t \left\langle B_2^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \nabla\varphi\right\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} - \gamma\right) \int_0^t \langle B_1, \nabla\varphi\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Définissons également une nouvelle mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ par :

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} := \exp\left(-\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \langle \sigma, \nabla\varphi\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) dW_s - \frac{\delta_\varepsilon^2}{2\varepsilon} \int_0^t \|\sigma\nabla\varphi\|^2 \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right). \tag{5.31}$$

Nous remplaçons par $\tilde{X}^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ défini en (5.29) la variable aléatoire $X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$, alors il est connu que $g^\varepsilon_{T,x}(\theta)$ converge vers (voir Freidlin and Sowers [24]) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g_{T,x}(\theta)} := \langle x, \theta\rangle + T \times \inf_{\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)\}} \sup_{\{\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^d)\}} \int_{\mathbb{T}^d} \Bigg(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left(\langle \sigma_k(z), \theta\rangle - \hat{\sigma}_k \varphi(z)\right)^2 + \langle B_1(z), \theta\rangle \\ - \left\langle B_1(z), \nabla\varphi(z)\right\rangle + \frac{1}{\gamma}\left(\langle B_0, \theta\rangle - L_0\varphi(z)\right)\Bigg) \mu(dz).\end{aligned} \tag{5.32}$$

Maintenant nous posons

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{J}}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{(\theta)} := \inf_{\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)\}} \sup_{\{\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^d)\}} \int_{\mathbb{T}^d} \Bigg(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left(\langle \sigma_k(z), \theta\rangle - \hat{\sigma}_k \varphi(z)\right)^2 + \langle B_1(z), \theta\rangle \\ - \left\langle B_1(z), \nabla\varphi(z)\right\rangle + \frac{1}{\gamma}\left(\langle B_0, \theta\rangle - L_0\varphi(z)\right)\Bigg) \mu(dz).\end{aligned} \tag{5.33}$$

Et nous définissons le transformé de Legendre-Fenchel de $\overline{\mathscr{J}}_2(\theta)$ par

$$\mathscr{J}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{(\theta)} := \sup_{\theta' \in \mathbb{R}^d} \left\{\left\langle \theta, \theta'\right\rangle - \overline{\mathscr{J}}_2(\theta')\right\}. \tag{5.34}$$

Posons à nouveau

$$\boldsymbol{I^2_{x,t}(z)} := t \mathscr{J}_2\left(\frac{z-x}{t}\right), \quad z \in \mathbb{R}^d. \tag{5.35}$$

Alors par Freidlin et Sowers [24]

Théorème 5.2 (**Freidlin and Sowers**).
Fixons $T > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $0 < t \leq T$, la famille de variables aléatoires $\left\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon},\ \varepsilon > 0\right\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ satisfait un principe de grandes déviations avec une fonction taux $I^2_{x,t}(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^d$. De plus, ce PDG est uniforme pour tout $0 < t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

Par la suite, posons

$$S^2_{0,T}(\varphi) = \begin{cases} \int_0^T \mathscr{J}_2\left(\dot{\varphi}(s)\right) ds & \text{si } \varphi \text{ différentiable et } \phi(0) = x, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.36}$$

Le résultat suivant établit le PDG au sens des trajectoires [24]

Théorème 5.3 (**Freidlin and Sowers**).
Alors pour tout sous-ensemble borélien $\mathbf{A} \subset \mathscr{B}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$*, nous avons*

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in \mathbf{A}\right\} \geq -\inf_{\varphi \in \mathring{\mathbf{A}}} S^2_{0,T}(\varphi), \tag{5.37}$$

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in \mathbf{A}\right\} \leq -\inf_{\varphi \in \overline{\mathbf{A}}} S^2_{0,T}(\varphi). \tag{5.38}$$

Maintenant, définissons la constante $\overline{\boldsymbol{C}}$ suivante :

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \int_{\mathbb{T}^d} c(z) m_\gamma(dz). \tag{5.39}$$

Nous pouvons établir l'analogue de la formule de Varadhan [13],

Théorème 5.4 (**résultat fondamental**).
Soit c *un élément de* $C^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$ *et* $\mathbf{D}$ *un sous-ensemble borélien de* $C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)$*. Introduisons les constantes suivantes :*

$$\alpha(\gamma) := \frac{\gamma^2}{2} \inf_{\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)} \left\{\int_{\mathbb{T}^d} \left\|\sigma(z)\nabla\varphi(z)\right\|^2 m_\gamma(dz)\right\}, \tag{5.40}$$

$$\beta(\gamma) := \frac{\gamma^2}{2} \inf_{\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)} \sup_{\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{T}^d)} \left\{\int_{\mathbb{T}^d} \left\|\sigma(z)\nabla\varphi(z)\right\|^2 \mu(dz)\right\}. \tag{5.41}$$

Alors

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{D}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right\}\right] \geq t\overline{C} - \inf_{\phi \in \mathring{\mathbf{D}}} S^2_{0,t}(\phi) + t\alpha(\gamma), \tag{5.42}$$

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{D}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right\}\right] \leq t\overline{C} - \inf_{\phi \in \overline{\mathbf{D}}} S^2_{0,t}(\phi) + t\beta(\gamma). \tag{5.43}$$

Preuve : Comme les paramètres δ_ε et ε convergent à la même vitesse, dans cette situation le paramètre γ affectera certains coefficients entre les lignes (ce qui engendra des biais à l'analyse de l'EDP). Par la suite, nous rappelons que les fonctions $\sigma, B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, c$ sont assez régulières et sont périodiques de période 1 suivant leur première variable, de plus elles sont bornées et de différentielles bornées dans le tore $\mathbb{T}^d$. Alors il existe des constantes :

$$k_0 \leq \hat{c} \leq k_1, \quad \text{et} \quad k_2 \leq \langle \nabla \hat{c}, B_1 \rangle \leq k_3. \tag{5.44}$$

où $\hat{c}$ désigne la solution de l'équation de Poisson :

$$L_\gamma \hat{c} + c = \int_{\mathbb{T}^d} c(z) m_\gamma(dz). \tag{5.45}$$

Posons $\overline{X}_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} := \frac{1}{\delta_\varepsilon} X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$, nous avons par l'application de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \left[\hat{c}\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) - \hat{c}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right] &= \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} - \gamma\right)\int_0^t \langle B_1, \nabla \hat{c}\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds + \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \langle \sigma, \nabla \hat{c}\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) dW_s \\ &+ \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^t \left\langle B_2^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \nabla \hat{c}\right\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds - \int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds + t\int_{\mathbb{T}^d} c(z) m_\gamma(dz).\end{aligned}$$

Comme $B_2^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ est négligeable, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{D}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right\}\right] \approx \int_{\mathbf{D}} \Bigg\{ &\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} - \gamma\right)\int_0^t \langle B_1, \nabla \hat{c}\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right) \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\delta_\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\int_0^t \|\sigma \nabla \hat{c}\|^2 \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right) \\ &\times \exp\left(-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \left[\hat{c}\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) - \hat{c}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]\right)\Bigg\} d\check{\mathbb{P}} \\ &\times \exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\int_{\mathbb{T}^d} c(z) m_\gamma(dz)\right),\end{aligned}$$

avec

$$\frac{d\check{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} := \exp\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \langle \sigma, \nabla \hat{c}\rangle \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) dW_s - \frac{\delta_\varepsilon^2}{2\varepsilon^3}\int_0^t \|\sigma \nabla \hat{c}\|^2 \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right),$$

borne sup : en utilisant les estimations de (5.44), nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{D}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right\}\right] &\leq \exp\left\{-k_0\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 + k_3 \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} - \gamma\right) t + \frac{\delta_\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\frac{\beta(\gamma)}{\gamma^2} t\right\} \times \check{\mathbb{P}}\left(X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in \mathbf{D}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\int_{\mathbb{T}^d} c(z) m_\gamma(dz)\right).\end{aligned}$$

Remarquons que $X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ est la solution de l'EDS :

$$X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} - x = \int_0^t f^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) d\check{W}_s,$$

où

$$f^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} := B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\langle \sigma, \nabla \hat{c}\rangle, \quad \text{et} \quad \check{W}_t := W_t - \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \sigma \nabla \hat{c}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds.$$

Clairement, sous la mesure de probabilité $\check{\mathbb{P}}$ la fonction taux est $S_{0,t}^2$. Alors

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{D}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right\}\right] \leq t\overline{C} - \inf_{\phi \in \overline{\mathbf{D}}} S_{0,t}^2(\phi) + t\beta(\gamma);$$

borne inf : pour l'autre inégalité, tenant compte de (5.44), on peut constater que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{D}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}\right] &\geq \exp\left\{-k_1\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2+k_2\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}-\gamma\right)t\right\}\\
&\times\int_{\mathbf{D}}\exp\left(\frac{\delta_\varepsilon^2}{2\varepsilon^3}\int_0^t\|\sigma\nabla\hat{c}\|^2 c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right)d\check{\mathbb{P}}\\
&\times\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\int_{\mathbb{T}^d}c(z)m_\gamma(dz)\right)\\
&\geq \exp\left\{-k_1\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2+k_2\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}-\gamma\right)t+\frac{\delta_\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\frac{\alpha(\gamma)}{\gamma^2}t\right\}\times\check{\mathbb{P}}\left(X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\in\mathbf{D}\right)\\
&\times\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\int_{\mathbb{T}^d}c(z)m_\gamma(dz)\right).
\end{aligned}$$

Et nous terminons cette preuve, en notant que :

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{D}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}\right]\geq\ t\overline{C}-\inf_{\phi\in\mathring{\mathbf{D}}}S_{0,t}^2(\phi)+t\alpha(\gamma).$$

□

5.3 Étude de la Convergence

Dans l'ordre d'analyser la solution $u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ nous utilisons un représentant probabiliste construit à l'aide de la formule Feynman-kac,

$$\boldsymbol{u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)}=\mathbb{E}\left[g\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon},Y_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds}\right].\tag{5.46}$$

Où $Y^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ est la solution progressive et mesurable associée aux EDSR définies par Pardoux et Peng [44] :

$$\begin{cases} Y_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}=g\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t f\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon},Y_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)dr-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_s^t Z_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}dW_r \\ \mathbb{E}\left\{\int_s^t\left|Z_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right|^2dr\right\}<\infty\end{cases},0\leq s\leq t.\tag{5.47}$$

Où le générateur f est défini par : $f(x,y)=c(x,y).y,\ x\in\mathbb{R}^d$ et $y\in\mathbb{R}$.

Comme $Y_0^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}=u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)$ et que $0<Y_0^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}<1\vee\bar{g}$. alors nous introduisons

$$\boldsymbol{v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)}=\varepsilon\log u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x),$$

en parallèle des travaux de Pradeilles [49], l'on observe que les $v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)$ sont solutions de viscosité du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\partial t}(t,x) &=& L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x) + \dfrac{1}{2}\left\|\nabla v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)\sigma\left(\dfrac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right\|^2 + c\left(\dfrac{x}{\delta_\varepsilon}, u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)\right) \\ v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(0,x) &=& \varepsilon \log\big(g(x)\big), \qquad x \in G_0 \\ \lim\limits_{t\to 0} v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x) &=& -\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^d \backslash G_0. \end{array}\right. \tag{5.48}$$

Comme le paramètre γ apparaitra dans certains coefficients quand ε tend vers zéro, nous renonçons[1] à l'étude du système (5.48). Ici, nous utilisons une approche de calculs directs à la Freidlin [25].

Remarque 5.5.
Si $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \log u^{\varepsilon,\delta}(t,x) < 0$, *alors pour tout* ε *assez petit, il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$u^{\varepsilon,\delta}(t,x) < \exp\left(-\frac{C}{\varepsilon}\right),$$

et comme $u^{\varepsilon,\delta}(t,x) = Y_0^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$, *l'on a :* $Y_0^{\epsilon,\delta,x} \geq \mathbb{E}\Big(g(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\Big)$, *de plus*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in G_0\right\} < 0.$$

Désignons par Σ_t l'ensemble des temps d'arrêt, et Θ_t le sous-ensemble de Σ_t tel qu'il existe $\mathscr{O}$ vérifiant pour tout $\varphi \in C\Big([0,\infty[, \mathbb{R}^d\Big)$

$$\tau(\varphi) = \inf\Big\{s \leq t : (t-s, \varphi_s) \in [0,\infty[\times C\Big([0,\infty[, \mathbb{R}^d\Big)\Big\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = t$.
τ est bien défini et appartient Σ_t, et $\mathscr{O}$ est l'ouvert associé à τ.

Posons $\mathscr{E} = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d ;\ \overline{\lim\limits_{\epsilon\downarrow 0}}\ \epsilon \log u^{\epsilon,\delta}(t,x) < 0\Big\}$.

Proposition 5.6.
Nous avons $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} u^{\varepsilon,\delta}(t,x) = 0$, *uniformément dans tout sous-ensemble compact* $\mathscr{K}$ *de* $\mathscr{E}$.

Preuve :
Nous savons que $\overline{\lim\limits_{\epsilon\downarrow 0}}\ \epsilon \log u^{\epsilon,\delta}(t,x)$ est continue, puisque $u^{\epsilon,\delta}(t,x)$ l'est. Soit $\mathscr{K}$ un sous-ensemble compact de $\mathscr{E}$ par la remarque ci-dessus, il existe une constante $C > 0$, telle que $\forall (t,x) \in \mathscr{K}$,

$$\overline{\lim_{\epsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \log u^{\epsilon,\delta}(t,x) < -C.$$

[1] En fait, il faut une certaine dextérité en mathématiques pour établir la convergence de ce système. Et au cas échéant, l'on retrouvera les mêmes difficultés rencontrées à l'identification de la fonction taux.

Il s'en suit qu'il existe $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ tel que

$$\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_{\mathcal{K}},\ \forall (t,x)\in\mathcal{K},\ u^{\varepsilon,\delta}(t,x)<\exp\left(-\frac{C}{\varepsilon}\right).$$

□

Posons

$$\boldsymbol{V}_1(t,x)=\inf_{\tau\in\Theta_t}\sup_{\varphi}\left\{\left(\overline{C}+\alpha(\gamma)\right)\tau-S_{0\tau}(\varphi),\ \varphi_0=x,\ \varphi_t\in G_0,\ \varphi\in C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{V}_2(t,x)=\inf_{\tau\in\Theta_t}\sup_{\varphi}\left\{\left(\overline{C}+\beta(\gamma)\right)\tau-S_{0\tau}(\varphi),\ \varphi_0=x,\varphi_t\in G_0,\ \varphi\in C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)\right\}.$$

nous pouvons constater que

$$V_1(t,x)\le V_2(t,x)\le 0.$$

Proposition 5.7. *Alors nous avons*

$$V_1(t,x)\le\underline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log u^{\varepsilon,\delta}(t,x)\le\overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log u^{\varepsilon,\delta}(t,x)\le V_2(t,x).$$

Preuve : On a,

$$\begin{aligned}
Y_0^{x,\varepsilon,\delta}&=\mathbb{E}\left[Y_\tau^{x,\varepsilon,\delta}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta},Y_r^{x,\varepsilon,\delta}\right)dr\right)\right]\\
&\le\mathbb{E}\left[Y_\tau^{x,\varepsilon,\delta}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dr\right)\right]\\
&\le\left(1\vee\overline{g}\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau<t\}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dr\right)\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_t^{\varepsilon,\delta}\in G_0\}}\mathbb{1}_{\{\tau=t\}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dr\right)\right]\\
&\le\left(1\vee\overline{g}\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_t^{\varepsilon,\delta}\in G_0\}\cup\{\tau=t\}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dr\right)\right]
\end{aligned}$$

Selon le théorème (5.4), nous pouvons observer que

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log u^{\varepsilon,\delta}(t,x)\le\inf_{\tau\in\Theta_t}\left\{\left(\overline{C}+\beta(\gamma)\right)\tau-\inf_{\varphi}S_{0\tau}(\varphi),\varphi_0=x,\varphi_t\in G_0,\varphi\in C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)\right\}.$$

Pour l'autre inégalité, nous définissons

$$\tau(\varphi)=\inf_{\varphi}\left\{0\le s\le t:\underline{\lim}_{\epsilon\downarrow 0}u^{\epsilon,x,\delta}(t-s,\varphi_s)>-\alpha\right\},\ \alpha>0,$$

alors l'on a $\tau(\varphi)<t$. Choisissons φ telle que

$$\left(\overline{C}+\beta(\gamma)\right)\tau-\inf_{\varphi}S_{0\tau}(\varphi)>V_1(t,x)-\alpha.$$

Soit $\beta \in]0, t-\tau(\varphi)[$ tel que pour tout $s \in [\tau(\varphi), \tau(\varphi)+\beta]$,

$$-\frac{5\alpha}{4} \leq \varliminf_{\epsilon\downarrow 0} u^{\varepsilon,\delta}(t,x) \leq -\frac{3\alpha}{4}.$$

τ étant semi-continue supérieure, alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\left\|\psi-\varphi\right\|_\beta \equiv \sup_{s\in[0,t]} |\psi_t - \varphi_s| < \eta \Longrightarrow \tau(\psi) < \tau(\varphi)+\beta.$$

Posons à nouveau $u^*(t,x) = \underline{\lim}\varepsilon \log u^{\varepsilon,\delta}(t,x)$. et choisissons $\eta > 0$ tel que

$$\left\|\psi-\varphi\right\|_\beta \leq \eta \Rightarrow \forall s \in [0,\tau(\varphi)+\beta],\ \left|u^*(t-s,\psi_s) - u^*(t-s,\varphi_s)\right| \leq \frac{\alpha}{4},$$

alors l'on a

$$\begin{aligned}
Y_0^{x,\varepsilon,\delta} =& \mathbb{E}\left[Y_{\tau(\varphi)+\beta}^{x,\varepsilon,\delta} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau(\varphi)+\beta} c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}, Y_r^{x,\varepsilon,\delta}\right)dr\right)\right]\\
=& \mathbb{E}\left[Y_{\tau(\varphi)+\beta}^{x,\varepsilon,\delta} \mathbb{1}_{\left\{\|X-\varphi\|_\beta<\eta\right\}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau(\varphi)+\beta} c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}, Y_r^{x,\varepsilon,\delta}\right)dr\right)\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[Y_{\tau(\varphi)+\beta}^{x,\varepsilon,\delta} \mathbb{1}_{\left\{\|X-\varphi\|_\beta\geq\eta\right\}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau(\varphi)+\beta} c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}, Y_r^{x,\varepsilon,\delta}\right)dr\right)\right]\\
\geq& \mathbb{E}\left[Y_{\tau(\varphi)+\beta}^{x,\varepsilon,\delta} \mathbb{1}_{\left\{\|X-\varphi\|_\beta<\eta\right\}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau(\varphi)+\beta} c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}, Y_r^{x,\varepsilon,\delta}\right)dr\right)\right].
\end{aligned}$$

Choisissons $\eta > 0$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, alors la proposition (5.7) reste vraie, et par le fait que la fonction c est continue, on obtient

$$Y_0^{\epsilon,x,\delta} \geq \mathbb{E}\left[Y_{\tau(\varphi)+\beta}^{x,\varepsilon,\delta} \mathbb{1}_{\left\{\|X-\varphi\|_\beta<\eta\right\}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau(\varphi)+\beta} c\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dr - 2\alpha - \eta\right)\right].$$

Ainsi, nous déduisons

$$u^*(t,x) \geq \sup_{\psi}\left\{\left(\overline{C}+\alpha(\gamma)\right)\left(\tau(\varphi)+\beta\right) - S_{0\tau(\varphi)+\beta}(\psi),\ \psi = x,\ \left\|X-\varphi\right\|_\beta < \eta\right\} - 2\alpha,$$

d'où

$$\forall \alpha,\beta > 0,\ u^*(t,x) \geq \left(\overline{C}+\alpha(\gamma)\right)\left(\tau(\varphi)+\beta\right) - \inf_{\psi} S_{0\tau(\varphi)+\beta}(\psi) - 2\alpha \geq V_1(t,x) - 3\alpha,$$

De plus nous avons

$$u^*(t,x) \geq V_1(t,x).$$

□

Ainsi, nous avons :

Remarque 5.8. *Nous avons*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u^{\varepsilon,\delta}(t,x) = 1,$$

dans tout sous-ensemble compact de $\Big\{(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d : V_1(t,x) = 0\Big\}$, *et*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u^{\varepsilon,\delta}(t,x) = 0,$$

dans tout sous-ensemble compact de $\Big\{(t,x) \in [0,+\infty] \times \mathbb{R}^d : V_2(t,x) < 0\Big\}$.

Chapitre 6

Cas où le PGD l'emporte sur l'homogénéisation

Dans ce chapitre nous supposons que le paramètre des grandes déviations converge plus vite que le paramètre de l'homogénéisation. Dans l'ordre d'établir le principe de grandes déviations, nous allons fixer le paramètre δ dans un premier temps. Et après avoir utilisé les techniques de grandes déviations, modulo une petite variation de ε, nous laissons tendre δ vers zéro dans un second temps. Ce chapitre reprend en détail nos derniers résultats [11].

Les principaux outils utilisés sont la formule de Girsanov et les bornes des noyaux banachiques de Norris Stroock [39].

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la situation où ε converge plus rapidement que δ. Dans ce cas les techniques du principe de grandes déviations prévalent sur celles de la théorie de l'homogénéisation. Ici, nous adoptons les mêmes outils utilisés par Freidlin et Sowers (Regime 3) pour établir le PGD. Nous utilisons une analyse trajectorielle directe plutôt qu'une caractérisation dans le cadre des inégalités de dérivation au moyen du logarithme de la génératrice des moments.

Soit a une $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$-matrice inversible et $\theta \in \mathbb{R}^d$, introduisons la norme $\|.\|_{a^{-1}}$ définie comme suit,

$$\|\theta\|_{a^{-1}} = \sqrt{\langle \theta, a^{-1}\theta \rangle}. \tag{6.1}$$

Soit Q la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^d$,

$$Q(v) = \langle v, av \rangle , \tag{6.2}$$

et soit Q^* la forme conjuguée qui lui est associée définie par : (voir Priouret [50])

$$Q^*(v) = \sup\left\{2\langle t, v\rangle - Q(t) : t \in \mathbb{R}^d\right\}. \tag{6.3}$$

Il est bien connu que si a est inversible alors,

$$Q^*(v) = \left\langle v, a^{-1} v \right\rangle. \tag{6.4}$$

Notre hypothèse majeure pour $\delta = \delta_\varepsilon$, est la suivante

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty. \tag{6.5}$$

alors ε converge vers zéro suffisamment plus vite comparé à δ_ε. Nous fixons[1] δ_ε en premier et nous compilons les calculs pour une petite variation du coefficient ε puis nous laissons tendre δ_ε vers zéro dans le résultat final.

Pour obtenir la *borne inférieure* nous utilisons la formule de Girsanov en créant une nouvelle mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ dans le but de lui transférer le PGD satisfait par les processus de diffusion sous la mesure initiale $\mathbb{P}$. Pour la *borne supérieure* nous faisons appel aux estimateurs des noyaux banachiques de Norris et Stroock [39].

[1] Évidemment, une variation de ε engendre des excitations sur δ_ε. Mais nous considérons ces excitations insignifiantes au regard de notre hypothèse majeure. L'introduction de δ_ε est juste une convention dans une optique de simplification.

Nous introduisons quelque notation que nous utilisons pour faire appel aux noyaux banachiques. Soit $\mathscr{L}$ un opérateur différentiel du second degré sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour la symétrie maximale des opérateurs adjoints dans $\boldsymbol{L}^2$ (de carré intégrable) nous notons $\mathscr{L}$ sous la forme :

$$\mathscr{L} := \langle \nabla, \hat{a}(x)\nabla\rangle + \langle \hat{a}b(x), \nabla\rangle - \left\langle \nabla, \hat{a}\bar{b}(x)\right\rangle + \hat{c}(x). \tag{6.6}$$

Les coefficients $\hat{a}, b, \bar{b}, \hat{c}$ de $\mathscr{L}$ sont des applications mesurables sur $\mathbb{R}^d$, $\hat{a}$ est à valeurs dans l'ensemble $d \times d$-matrices symétriques et définies strictement positives, b et $\bar{b}$ dans $\mathbb{R}^d$ et $\hat{c}$ dans $\mathbb{R}$. Nous nous intéressons aux semi-groupes $\boldsymbol{P}_{t,u}$ pour $t < u$, associés à $\mathscr{L}$ et leurs noyaux de transition $p(t-u, x, y)$, appelés noyaux de chaleur associés à $\mathscr{L}$. Alors, au moins formellement, nous avons

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathscr{L}\right)\boldsymbol{P}_{t,u} = 0, \\ \lim\limits_{t\to u} \boldsymbol{P}_{t,u} = \boldsymbol{I} \text{ (identité)}, \\ \left(\boldsymbol{P}_{t,u}\varphi\right)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} p(t-u,x,y)\varphi(y)dy \text{ (pour } \varphi \text{ est une fonction test).} \end{cases} \tag{6.7}$$

Notre objectif est de trouver la borne supérieure de $p(t-u, x, y)$ suivant la stricte uniforme positivité de $\hat{a}$ et la régularité des autres coefficients : pour simplifier nous supposons qu'il existe des constantes $\lambda \le 1$ et $\Lambda \ge 0$ telles que, uniformément sur $\mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{I}_d \le \hat{a} \le \lambda \boldsymbol{I}_d, \quad \text{et} \quad \|b\|_{\hat{a}} + \left\|\bar{b}\right\|_{\hat{a}} + |c| \le \Lambda. \tag{6.8}$$

où les bornes de $\hat{a}$ sont atteintes dans le sens de la symétrie, et où $\|b\|_{\hat{a}} := \langle b, \hat{a}b\rangle$.
La borne supérieure que nous avons obtenu, a été exprimée en terme d'énergie fonctionnelle. Pour $t < u$ et pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, nous définissons cette énergie par :

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \inf_{\phi\in\mathscr{A}(t,u,x,y)} \frac{1}{4}\int_t^u \left\|\dot{\phi}_s - \hat{a}\left(b-\bar{b}\right)(\phi_s)\right\|^2_{\hat{a}^{-1}(\phi)} ds, \tag{6.9}$$

où

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \left\{\phi \in C\left([t,u]; \mathbb{R}^d\right) : \ \phi_t = x, \ \phi_u = y \text{ and } \int_t^u \left\|\dot{\phi}_s\right\|^2 ds < \infty\right\}. \tag{6.10}$$

Le résultat suivant est du à Norris et Stroock [39]

Théorème 6.1 (Norris et Stroock).
Supposons que les fonctions $\hat{a}$ et $b - \bar{b}$ sont uniformément continues. Alors pour tout $\alpha \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ satisfaisant $\frac{\alpha^2}{2\alpha-1} > \lambda^2$, il existe une constante $C_{\alpha,\lambda,d} > 0$ telle que pour tous

$t, u \in \mathbb{R}$ avec $t < u$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, l'on a

$$p(t-u,x,y) \leq \left(\frac{C_{\alpha,\lambda,d}\left[1+\Lambda(u-t)+\mathscr{E}(t-u,x,y)\right]^{\frac{1}{2\alpha-1}}}{u-t} \right)^{\frac{d}{2}} \times \exp\left\{ -\mathscr{E}(t-u,x,y)+(u-t)\sup_{z\in\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}\left\|b-\bar{b}\right\|_{\hat{a}}^2+\hat{c}\right)(z) \right\}. \tag{6.11}$$

Ce chapitre est organisé comme suit, dans la première section nous établissons un PGD et dans la seconde nous étudions le comportement de la solution de l'EDP (1).

6.2 Principe de grandes déviations

En conséquence de (6.5) l'on remarque $\mathbf{lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \boldsymbol{B}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \boldsymbol{B_1}$. Par suite, pour $\varGamma > 0$ et $\phi \in C\big([0,\varGamma];\mathbb{R}^d\big)$, introduisons $V_\varGamma$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0\,,\infty)$ par (voir [25]) :

$$\boldsymbol{V_\varGamma(y,z)} = \inf_{\substack{\phi\in C([0,\varGamma];\ \mathbb{R}^d)\\ \phi(0)=y,\ \phi(\varGamma)=z}} \int_0^\varGamma \nu\left(\dot{\phi}\,(s), B_1(\phi(s))\right) ds, \tag{6.12}$$

où

$$\boldsymbol{\nu\left(\dot{\phi}, B_1(\phi)\right)} = \frac{1}{2}\left\langle \dot{\phi} - B_1(\phi), a^{-1}(\phi)\left[\dot{\phi} - B_1(\phi)\right]\right\rangle = \frac{1}{2}\left\|\dot{\phi} - B_1(\phi)\right\|_{a^{-1}(\phi)}^2. \tag{6.13}$$

Soit $\mathscr{J}_3 : \mathbb{R}^d \to [0\,,\infty)$, l'application définie par Freidlin et al. [24] comme suit,

$$\boldsymbol{\mathscr{J}_3(z)} = \lim_{\varGamma\to+\infty}\frac{1}{\varGamma}V_\varGamma\,(0,\varGamma z), \quad z\in\mathbb{R}^d. \tag{6.14}$$

Par Freidlin et al. [24] nous savons que la famille de variables aléatoires $\left\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} :\ \varepsilon > 0\right\}$ (3) satisfait un PGD avec une fonction taux $I_{T,x}^3$ définie par :

$$\boldsymbol{I_{T,x}^3(z)} = T\mathscr{J}_3\left(\frac{z-x}{T}\right), \quad z\in\mathbb{R}^d. \tag{6.15}$$

Comme la proposition 4.6 dans [24] travaille dans le sens d'une approche de limite projective (voir Dembo et al. [13]) alors nous adoptons la même démarche pour établir le lemme de Varadhan. Donc, sans perte de généralités, l'on prend $T = 1$.

Introduisons la fonction $\overline{\boldsymbol{C}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\overline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{(z)} := c(z) - \frac{1}{2}\|B_1(z)\|_{a^{-1}(z)}^2, \qquad z\in\mathbb{R}^d. \tag{6.16}$$

Nous pouvons maintenant établir le PGD dans l'espace des trajectoires.

Proposition 6.2 (borne inférieure).

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$ *et soit* c *un élément de* $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$. *Alors pour tout ouvert* $G \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\left(X_1^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) e^{\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right\}} \right] \geq \sup_{z \in G} \left\{ \overline{C}(z) - I_{1,x}^3(z) \right\}. \tag{6.17}$$

Preuve :
Nous utilisons la formule de Girsanov pour établir ce résultat. Soit ϕ une fonction sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\|\phi(x)\| + \|\nabla\phi(x)\|^2 + \|D^2\phi(x)\| \leq M < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{6.18}$$

Par l'application de la formule d'Itô à $\varepsilon^2\phi$ l'on a :

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^2\left[\phi\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right] \\ & = \int_0^t -\left[\frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon}\left\langle \nabla\phi, B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle + \frac{\varepsilon^3}{2\delta_\varepsilon^2}\mathrm{Tr}\left(aD^2\phi\right)\right]\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds - \frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}\int_0^t \nabla\phi\sigma\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) dW_s. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Faisons un changement de mesure de probabilité en introduisant $\hat{\mathbb{P}}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ comme suit,

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} := \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 \nabla\phi\sigma\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) dW_s - \frac{\varepsilon^5}{2\delta_\varepsilon^2}\int_0^1 \|\nabla\phi\|_a^2\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds \right\}. \tag{6.20}$$

Puis posons,

$$Y_t^\varepsilon = \int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds \quad \text{et} \quad \hat{Y}_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon - \varepsilon^2\left[\phi\left(\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]. \tag{6.21}$$

Selon (6.21) il n'est pas difficile de voir que Y_t^ε et $\hat{Y}_t^\varepsilon$ sont indistinguables. Par suite, nous remplaçons Y^ε par $\hat{Y}^\varepsilon$ et par la forme quadratique conjuguée Q^* définie en (6.3) nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G e^{\frac{1}{\varepsilon}\hat{Y}_1^\varepsilon}\right] &= \hat{\mathbb{E}}\left[\mathbb{1}_G \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \left[c - \frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon}\langle \nabla\phi, B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\rangle - \frac{\varepsilon^3}{2\delta_\varepsilon^2}\left\{\mathrm{Tr}(aD^2\phi) - \varepsilon^2\|\nabla\phi\|_a^2\right\}\right]\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right)\right] \\ &\geq \hat{\mathbb{E}}\left[\mathbb{1}_G \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \left[c - \frac{1}{2}Q^*\left(B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right]\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right)\right. \\ &\qquad \left. \times \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\delta_\varepsilon^2}\int_0^1 \left[(\varepsilon^2 - \varepsilon)\sup\left\{\|\nabla\phi\|_a^2\right\} + \mathrm{Tr}(aD^2\phi)\right]\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds\right)\right] \\ &\geq \hat{\mathbb{E}}\left[\mathbb{1}_G \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \left[c - \frac{1}{2}\|B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\|_{a^{-1}}^2\right]\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds - \frac{\varepsilon^2}{2\delta_\varepsilon^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1) M'\right)\right], \end{aligned}$$

$M' = M \times \alpha$ où α désigne la constante d'ellipticité.

Par ce constat, nous déduisons

$$\begin{aligned}\varepsilon \log \mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_G \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\hat{Y}_1\right)\right\} \geq \int_0^1 \hat{\mathbb{E}}\left[c - \frac{1}{2}\|B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\|^2_{a^{-1}}\right]\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds - \frac{\varepsilon^3}{2\delta_\varepsilon^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1) M' \\ + \varepsilon \log \hat{\mathbb{P}}\left\{X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in G\right\}.\end{aligned} \tag{6.22}$$

Fixons $z \in \mathbb{R}^d$ et $\varpi > 0$ et soit $\varepsilon' > 0$ assez petit de telle sorte que G contient le sous-ensemble

$$\left\{z' \in \mathbb{R}^d \ : \ \left\|z' - z\right\| \leq \varpi \delta_{\varepsilon'}\right\}.$$

Choisissons une fonction $\varphi \in C\left([0,1], \mathbb{R}^d\right)$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = z$. En plus, prenons ε tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ alors nous observons

$$\left\{X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in G\right\} \supseteq \left\{\left\|X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} - z\right\| \leq \varpi \delta_\varepsilon\right\} \equiv \left\{\left\|\check{X}^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\|_{C([0,1],\mathbb{R}^d)} \leq \varpi \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}, \tag{6.23}$$

où

$$\check{X}_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} - \varphi(t)\right), \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{6.24}$$

Remarquons que

$$\left\{\left\|\check{X}^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\|_{C([0,1],\mathbb{R}^d)} \leq \varpi \frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} \equiv \left\{\sup_{0 \leq t \leq 1}\left\|\frac{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon} - \frac{\varphi(t)}{\delta_\varepsilon}\right\| \leq \varpi\right\}. \tag{6.25}$$

Et dans cet ensemble, en utilisant la semi-continuité inférieure de c, l'on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds &\geq \inf_{\left\{\|\psi\|_{C([0,1],\mathbb{R}^d)} \leq \varpi\right\}} \int_0^1 c\left(\frac{\varphi(s)}{\delta_\varepsilon} + \psi(s)\right) ds \\ &\geq \int_0^1 c\left(\frac{\varphi(s)}{\delta_\varepsilon}\right) ds - \varpi,\end{aligned} \tag{6.26}$$

et par analogie (pour le détail, voir [24])

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\|B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\|^2_{a^{-1}}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds &\leq \sup_{\left\{\|\psi\|_{C([0,1],\mathbb{R}^d)} \leq \varpi\right\}} \int_0^1 \left\|B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\|^2_{a^{-1}}\left(\frac{\varphi(s)}{\delta_\varepsilon} + \psi(s)\right) ds \\ &\leq (1 + \kappa\varpi) \int_0^1 \|B_1\|^2_{a^{-1}}\left(\frac{\varphi(s)}{\delta_\varepsilon}\right) ds + \Phi(\varepsilon, \varpi),\end{aligned} \tag{6.27}$$

avec

$$\Phi(\varepsilon, \varpi) = \kappa'(1 + \kappa\varpi) \times \sup_{\substack{y, y' \in \mathbb{R}^d \\ \left\|y - y'\right\| \leq \varpi}} \left(\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\left\|B_0(y)\right\| + \left\|B_1(y) - B_1(y')\right\|\right)^2. \tag{6.28}$$

Avec (6.22) nous utilisons les inégalités (6.26) et (6.27)

$$\begin{aligned}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G e^{\frac{1}{\varepsilon}\hat{Y}_1^\varepsilon}\right] \geq \delta_\varepsilon \int_0^{\frac{1}{\delta_\varepsilon}} & \left[c - \frac{1}{2}(1+\kappa\varpi)\|B_1\|^2_{a^{-1}}\right](\psi(s))ds \\ & - \frac{1}{2}\Phi(\varepsilon,\varpi) - \varpi - \frac{\varepsilon^3}{2\delta_\varepsilon^2}(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)M' \\ & + \varepsilon\log\hat{\mathbb{P}}\left(X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in G\right).\end{aligned} \tag{6.29}$$

Observons que $\mathbb{P}$ et $\hat{\mathbb{P}}$ ont la même fonction taux car la dynamique de (3) peut être réécrite comme suit,

$$X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} - x = \int_0^t f^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)d\hat{W}_s,$$

où

$$f^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} := B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\langle\sigma,\nabla\hat{c}\rangle, \quad \text{et} \quad \hat{W}_t := W_t - \frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon}\int_0^t \sigma\nabla\hat{c}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds.$$

Par (6.29) on peut déduire que (laisser en premier $\varpi \to 0$ puis laisser $\varepsilon \to 0$)

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_G\left(X_1^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)e^{\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}}\right] \geq \sup_{z\in G}\left\{\overline{C}(z) - I^3_{1,x}(z)\right\}.$$

□

Soit $\left\{P^\varepsilon_{t,s}:\ t<s\right\}$ le semi-groupe sur $\boldsymbol{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, l'espace de Banach des applications mesurables et bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, défini par l'adjoint de $L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$. Avec nos hypothèses sur la matrice a, il existe un noyau de chaleur $p^\varepsilon(s-t,z,y)$ tel que

$$\left(\boldsymbol{P^\varepsilon_{t,s}}\phi\right)(z) = \int_{\mathbb{R}^d} p^\varepsilon(s-t,z,y)\phi(y)dy, \quad t<s,\ z\in\mathbb{R}^d,\ \phi\in\boldsymbol{B}\left(\mathbb{R}^d\right). \tag{6.30}$$

Dans l'ordre de définir le noyau de Feynman-Kac, nous introduisons $P_t^{\varepsilon,\Theta}$ le transformé de $P^\varepsilon_{t,s}$ conjugué à un potentiel $\Theta \in C_b^1\left(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d,\mathbb{R}\right)$, l'ensemble des fonctions différentiables et bornées sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les différentielles sont bornées et continues sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\Theta_s = \Theta(s,.)$ et considérons le semi-groupe

$$\boldsymbol{P^{\varepsilon,\Theta}_{t,s}} = e^{-\Theta_t}P^\varepsilon_{t,s}e^{\Theta_s}. \tag{6.31}$$

Alors le noyau de Feynman-Kac correspondant à $P^{\varepsilon,\Theta}_{t,s}$ est défini par

$$\boldsymbol{p^\Theta(s-t,z,y)} = e^{-\Theta_t(z)}p^\varepsilon(s-t,z,y)e^{\Theta_s(y)}. \tag{6.32}$$

Comme dans [24] nous observons que (pour plus de détails, voir le corollaire 10.3.22 [54])

$$\mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_A\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right)}\right\}=\int_{z\in A/\delta_\varepsilon}\underbrace{p^{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 c}}_{\text{ceci est } p^\Theta}\left(\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2 t,z,\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)dz. \tag{6.33}$$

Avant de continuer, donnons quelque notation en tenant compte des coefficients de Norris et al. [39] et quelques calculs à retrouver dans Freidlin et al. [24].

$$a^\Theta(z):=\frac{1}{2}a(z), \tag{6.34}$$

$$b^\Theta(z):=\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)a^{-1}(z)B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(z)-\nabla\Theta(z), \tag{6.35}$$

$$\hat{b}^\Theta(z):=-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)a^{-1}(z)B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(z)+a^{-1}(z)\left(\text{div a}\right)^*(z)+\nabla\Theta(z), \tag{6.36}$$

$$c^\Theta(z):=-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\text{div}B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)(z)+\Theta(z)+\|\nabla\Theta(z)\|^2_{a^\Theta}+\left\langle a^\Theta(z)\left(b^\Theta-\hat{b}^\Theta\right)(z),\nabla\Theta(z)\right\rangle. \tag{6.37}$$

Maintenant, comme dans (6.9), nous donnons la fonctionnelle d'énergie $\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}(s-t,z,y)$ pour $t<s$:

$$\boldsymbol{\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}(s-t,z,y)}:=\inf_{\substack{\phi\in C\left([0,t],\mathbb{R}^d\right)\\ \phi(t)=z\\ \phi(0)=y}}\frac{1}{4}\int_t^s\left\|\dot{\phi}(r)-\left(a^\Theta\left[b^\Theta-\hat{b}^\Theta\right]\right)(\phi(r))\right\|^2_{(a^\Theta)^{-1}(\phi(r))}dr.$$

Proposition 6.3 (borne supérieure).
Fixons $x\in\mathbb{R}^d$ *et soit* c *un élément de* $C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+\right)$. *Alors pour tout sous-ensemble fermé* $F\subseteq\mathbb{R}^d$

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_F\left(X_1^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)e^{\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}}\right]\le\sup_{z\in F}\left\{\overline{C}(z)-I^3_{1,x}(z)\right\}$$

Preuve :
Par les estimations de Stroock Norris [39] il est connu qu'il existe des constantes K,K_1,K_2 positives telles que :

$$
\begin{aligned}
p^{\Theta}(-t,z,y) \leq & K\left(\frac{1-t\sup_{z\in\mathbb{R}^d}\left\{\|b^{\Theta}\|^2_{a^{\Theta}}+\|\hat{b}^{\Theta}\|^2_{a^{\Theta}}+|c^{\Theta}|\right\}(z)+\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}(t,z,y)}{-t}\right)^{\frac{d}{2}} \\
& \times e^{\left\{-\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}(t,z,y)-t\sup_{z\in\mathbb{R}^d}\left(\Theta+\|\nabla\Theta\|^2_{a^{\Theta}}+\langle a^{\Theta}(b^{\Theta}-\hat{b}^{\Theta}),\nabla\Theta\rangle\right)(z)\right\}} \\
& \times e^{\left\{-t\sup_{z\in\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{4}\|b^{\Theta}+\hat{b}^{\Theta}\|^2_{a^{\Theta}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)(\mathrm{div}B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon})\right)(z)\right\}} \qquad \text{for all } t<0; \text{ for all } y,z\in\mathbb{R}^d \qquad (6.38) \\
\leq & K_1\left(\frac{1-t\left[\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}+1\right)+\sup_{z\in\mathbb{R}^d}\left|\Theta+\|\nabla\Theta\|^2_{a^{\Theta}}+\langle a^{\Theta}(b^{\Theta}-\hat{b}^{\Theta}),\nabla\Theta\rangle\right|(z)\right]+\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}(t,z,y)}{-t}\right)^{\frac{d}{2}} \\
& \times e^{\left\{-\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}(t,z,y)-t\sup_{z\in\mathbb{R}^d}\left(\Theta+\|\nabla\Theta\|^2_{a^{\Theta}}+\langle a^{\Theta}(b^{\Theta}-\hat{b}^{\Theta}),\nabla\Theta\rangle\right)(z)\right\}} \times e^{\left\{-K_2\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}+1\right)t\right\}}.
\end{aligned}
$$

Avec (6.33) puis par un changement d'échelle, l'on a

$$
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_F\left(X_1^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}\right] = \delta_\varepsilon^{-d}\int_F p^{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 c}\left(\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2, \frac{z}{\delta_\varepsilon}, \frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)dz. \qquad (6.39)
$$

Nous allons procédé comme dans Freidlin et al.[24] (régime 3) et nous remarquons, ici, que le noyau de Feynman-Kac p^{Θ} n'est pas une densité contrairement au noyau de chaleur p. Toutefois nous allons observé que les calculs associés aux estimateurs de Norris et Stroock dans (6.38) sont indépendants de $\nabla\Theta$ qui lui même est borné.

En effet,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}\left(-\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2, \frac{z}{\delta_\varepsilon}, \frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) &= \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2}\left\|\dot{\phi}(s)-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}+a\nabla\Theta-\frac{1}{2}(\mathrm{div}a)^*\right)(\phi(s))\right\|^2_{a^{-1}(\phi(s))}ds \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\int_0^{\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2}\left\|\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\dot{\phi}(s)-\left(B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\left(a\nabla\Theta-\frac{1}{2}(\mathrm{div}a)^*\right)\right)(\phi(s))\right\|^2_{a^{-1}(\phi(s))}ds \qquad (6.40) \\
&= \frac{1}{2}\delta_\varepsilon\int_0^{\frac{1}{\delta_\varepsilon}}\left\|\dot{\psi}(s)-B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(\psi(s))-\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\left\{a\nabla\Theta-\frac{1}{2}(\mathrm{div}a)^*\right\}(\psi(s))\right\|^2_{a^{-1}(\psi(s))}ds.
\end{aligned}
$$

Par suite, on a

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\mathscr{E}^{\varepsilon,\Theta}\left(-\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2, \frac{z}{\delta_\varepsilon}, \frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) = I^3_{1,x}(z). \qquad (6.41)
$$

Par la régularité de $\nabla\Theta$ et a, il existe une constante K_1' telle que :

$$\begin{aligned}\left(\Theta+\|\nabla\Theta\|^2_{a^\Theta}+\langle a^\Theta(z)(b^\Theta-\hat{b}^\Theta),\nabla\Theta\rangle\right)(z) &= \left(\Theta+\frac{1}{2}\|\nabla\Theta\|^2_a-\left\langle\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}+a\nabla\Theta-\frac{1}{2}(\mathrm{div}\,a)^*\right),\nabla\Theta\right\rangle\right)(z)\\ &\le \left(\Theta+\frac{1}{2}\|\nabla\Theta\|^2_a-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},\nabla\Theta\rangle\right)(z)+K_1'\\ &\le \left(\Theta+\frac{1}{2}\inf_{\nabla\Theta\in\mathbb{R}^d}\left(\|\nabla\Theta\|^2_a-2\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},\nabla\Theta\rangle\right)\right)(z)+K_1'\\ &\le \left(\Theta-\frac{1}{2}\sup_{\nabla\Theta\in\mathbb{R}^d}\left(2\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},\nabla\Theta\rangle-\|\nabla\Theta\|^2_a\right)\right)(z)+K_1'\\ &\le \left(\Theta-\frac{1}{2}Q^*\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right)(z)+K_1'\\ &\le \left(\Theta-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left\|B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\|^2_{a^{-1}}\right)(z)+K_1'.\end{aligned}\tag{6.42}$$

L'on replace dans (6.38) t et $\Theta(z)$ respectivement par $-\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2$ et $\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 c(z)$ alors nous avons

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_F\left(X_1^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)e^{\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}}\right]\le\sup_{z\in F}\left\{\overline{C}(z)-I^3_{1,x}(z)\right\}.$$

□

Définissons,

$$S^3_{0,T}(\phi)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\mathscr{J}_3\left(\dot{\phi}(s)\right)ds & \text{si } \phi \text{ différentiable et } \phi(0)=x\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Le résultat suivant établit le PGD dans l'espace des trajectoires

Théorème 6.4 (résultat fondamental).
Soit $\boldsymbol{D}$ un sous ensemble borélien de $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ et c un élément de $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+)$. Alors,

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\boldsymbol{D}}\left(X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)e^{\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}}\right]\ge\sup_{\phi\in\mathring{\boldsymbol{D}}}\left\{\int_0^T\overline{C}(\phi(s))ds-S^3_{0,T}(\phi)\right\},$$

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\boldsymbol{D}}\left(X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)e^{\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}}\right]\le\sup_{\phi\in\overline{\boldsymbol{D}}}\left\{\int_0^T\overline{C}(\phi(s))ds-S^3_{0,T}(\phi)\right\}.$$

6.3 Étude de la convergence

La formule de Feynman-Kac implique que la solution de l'EDP (1) obéit à l'équation

$$\boldsymbol{u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)} = \mathbb{E}\left[g\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}, Y_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds} \right], \tag{6.43}$$

où $Y^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ est la solution progressive mesurable associée aux EDSR introduites par Pardoux et al. [44] :

$$\begin{cases} Y_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} = g\left(X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t f\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}, Y_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) dr - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_s^t Z_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} dW_r \\ \mathbb{E}\left\{\int_s^t \left|Z_r^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right|^2 dr\right\} < \infty \end{cases} ,0 \le s \le t. \tag{6.44}$$

Où le générateur f est défini par : $f(x,y) = c(x,y).y,\ x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}$.

Comme

$$Y_0^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} = u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x) \quad \text{et} \quad 0 < Y_0^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} < 1 \vee \bar{g}.$$

L'on introduit $\boldsymbol{v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)} = \varepsilon \log u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)$. Par Pradeilles [49], on a les $v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)$ sont solutions de viscosité de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\partial t}(t,x) = L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x) + \dfrac{1}{2}\left\|\nabla v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)\sigma\left(\dfrac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right\|^2 + c\left(\dfrac{x}{\delta_\varepsilon}, u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x)\right) \\ v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(0,x) = \varepsilon \log\big(g(x)\big), \qquad x \in G_0 \\ \lim\limits_{t\downarrow 0} v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x) = -\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^d \backslash G_0. \end{cases} \tag{6.45}$$

Dans ce qui suit, nous allons étudier la convergence de ce système. Avant, définissons une distance sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, pour $(t,x),(s,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ par :

$$\boldsymbol{d\{(t,x),(s,y)\}} = \max\{|t-s|, \|x-y\|\}.$$

Et posons,

$$\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{(t,x)} = \limsup_{\eta\to 0}\left\{v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(s,y) :\ (s,y) \in \mathscr{B}\big((t,x),\eta\big)\right\},$$

$$\underline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{(t,x)} = \liminf_{\eta\to 0}\left\{v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(s,y) :\ (s,y) \in \mathscr{B}\big((t,x),\eta\big)\right\}.$$

Pour $x,\theta \in \mathbb{R}^d$, désignons par $\boldsymbol{H}(x,\theta)$ l'Hamiltonien associé au Lagrangien $\boldsymbol{L(x,\theta)}$ suivant:

$$\boldsymbol{L(x,\theta)} := \frac{1}{2}\Big\langle \theta, \boldsymbol{a}(x)\theta \Big\rangle + \Big\langle \boldsymbol{B_1}(x), \theta \Big\rangle + \overline{\boldsymbol{C}}(x).$$

L'on remarque que :

- $\boldsymbol{L}\left(x,\nabla\psi\right)$ est la limite quand $\varepsilon \to 0$ de l'opérateur suivant :

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(x,\nabla\psi\right) = \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(.,z)}\left[L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}c\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]e^{\frac{1}{\varepsilon}\psi(.,z)}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d;$$

- la fonction propre correspond à $\boldsymbol{L}(x,\nabla\psi)$ associée à la valeur propre $\boldsymbol{H}(x,\nabla\psi)$ peut être choisie strictement positive.

Théorème 6.5. *$\overline{v}$ et $\underline{v}$ sont sur et sous-solution de viscosité du système :*

$$\begin{cases} \max\left(w, \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) - H(x,\nabla w)\right) = 0 & x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ w(0,x) \ = 0, \qquad x \in G_0 \\ \lim\limits_{t\to 0} w(t,x) \ = \ -\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^d \setminus G_0. \end{cases} \tag{6.46}$$

Preuve : Nous adoptons les mêmes techniques utilisées dans (Pradeilles [49]).

$*$ Nous considérons en premier $\overline{v}$. Soit $\Phi \geq \overline{v}$ une fonction régulière telle que $\Phi(t_0,x_0) = \overline{v}(t_0,x_0)$, et (t_0,x_0) un strict minimum local de $\Phi - \overline{v}$.

Soit $\psi > 0$ la fonction propre correspondante à la plus grande valeur propre de $H(x,\nabla\Phi(t_0,x_0))$. Maintenant considérons la fonction-test suivante :

$$\Phi^\varepsilon(t_\varepsilon,x_\varepsilon) = \Phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon) - \varepsilon\ln\left(\psi\left(\frac{x_\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\right)\right), \tag{6.47}$$

dont la limite est

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Phi^\varepsilon(t_\varepsilon,x_\varepsilon) = \overline{v}(t_0,x_0). \tag{6.48}$$

Il existe une suite $(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$ qui minimise localement $\Phi^\varepsilon - v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ et qui converge vers (t_0,x_0).

Par (6.47), on observe

$$\frac{\partial\Phi^\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}, \tag{6.49}$$

$$D\Phi^\varepsilon(t,x) = D\Phi(t,x) - \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\frac{D\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}{\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}, \tag{6.50}$$

$$D^2\Phi^\varepsilon(t,x) = D^2\Phi(t,x) - \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2\frac{D^2\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}{\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)} + \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2\frac{D\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)D\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}{\psi^2\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}. \tag{6.51}$$

Avec le système (6.45), l'on tire

$$\frac{\partial\Phi^\varepsilon}{\partial t}(t_\varepsilon,x_\varepsilon) \ = \ L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\Phi^\varepsilon(t_\varepsilon,x_\varepsilon) + \frac{1}{2}\left\|\nabla\Phi^\varepsilon(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\sigma\left(\frac{x_\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\right)\right\|^2 + c\left(\frac{x_\varepsilon}{\delta_\varepsilon}, u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right). \tag{6.52}$$

Puis par (6.50) et (6.51), nous avons

$$L_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\Phi^\varepsilon(t,x) = B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)D\Phi(t,x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\right)^2 \frac{\mathrm{Tr}\left[a\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)D^2\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]}{\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)} + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{Tr}\left[a\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)D^2\Phi(t,x)\right]$$
$$\underbrace{+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\right)^2 \frac{\left\langle D\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right), a\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)D\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right\rangle}{\psi^2\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)} - \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\frac{\left\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right), D\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right\rangle}{\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}}_{\text{Ces termes servent à appeler la forme quadratique } Q^*}. \tag{6.53}$$

Et l'on constate que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\nabla\Phi^\varepsilon(t,x)\sigma\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right\|^2 &= \frac{1}{2}\left\|\sigma\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\left[D\Phi(t,x) - \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\frac{D\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}{\psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)}\right]\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\|\sigma\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)D\Phi(t,x)\right\|^2 + o(1).\end{aligned} \tag{6.54}$$

Posons $y_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\delta_\varepsilon}$ et $\theta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\frac{D\psi(y_\varepsilon)}{\psi(y_\varepsilon)}$, insérons (6.53) et (6.54) dans (6.52) alors nous avons,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_\varepsilon,x_\varepsilon) &\le \frac{\frac{1}{2}\left\|\sigma(y_\varepsilon)D\Phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right\|^2\psi(y_\varepsilon) + \left\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(y_\varepsilon), D\Phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right\rangle\psi(y_\varepsilon)}{\psi(y_\varepsilon)} \\ &\quad+ \frac{c(y_\varepsilon)\psi(y_\varepsilon) + \left\{\frac{1}{2}\left\langle a(y_\varepsilon)\theta_\varepsilon,\theta_\varepsilon\right\rangle - \left\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(y_\varepsilon),\theta_\varepsilon\right\rangle\right\}\psi(y_\varepsilon)}{\psi(y_\varepsilon)} + o(1) \\ &\le \frac{\frac{1}{2}\left\|\sigma(y_\varepsilon)D\Phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right\|^2\psi(y_\varepsilon) + \left\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(y_\varepsilon), D\Phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right\rangle\psi(y_\varepsilon)}{\psi(y_\varepsilon)} \\ &\quad+ \frac{c(y_\varepsilon)\psi(y_\varepsilon) - \frac{1}{2}\sup_{\theta_\varepsilon\in\mathbb{R}^d}\left\{2\left\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(y_\varepsilon),\theta_\varepsilon\right\rangle - \left\langle a(y_\varepsilon)\theta_\varepsilon,\theta_\varepsilon\right\rangle\right\}\psi(y_\varepsilon)}{\psi(y_\varepsilon)} + o(1) \\ &\le \frac{\frac{1}{2}\left\|\sigma(y_\varepsilon)D\Phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right\|^2\psi(y_\varepsilon) + \left\langle B^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(y_\varepsilon), D\Phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right\rangle\psi(y_\varepsilon) + \overline{C}(y_\varepsilon)\psi(y_\varepsilon)}{\psi(y_\varepsilon)} + o(1).\end{aligned} \tag{6.55}$$

Alors si $(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$ converge vers (t_0,x_0), , l'on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t_0,x_0) &\le \frac{L(x,D\Phi(t_0,x_0))\psi(y_0)}{\psi(y_0)} \\ &\le H(x,D\Phi(t_0,x_0)).\end{aligned}$$

$*$ Considérons cette fois-ci $\underline{v}$. Soit $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^d$ tel que $\underline{v}(t_0,x_0)<0$. Soit $\Phi\le\underline{v}$ une fonction assez régulière telle que $\Phi(t_0, x_0) = \underline{v}(t_0, x_0)$, et (t_0, x_0) un maximum local de $\Phi - \underline{v}$. En prenant la même fonction-test Φ^ε définie ci-dessus. Alors, il existe une suite $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ qui maximise localement $\Phi^\varepsilon - v^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ et qui converge vers (t_0, x_0). Par analogie, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0, x_0) \geq H(x, D\Phi(t_0, x_0)).$$

□

Introduisons quelque notation

$$\boldsymbol{\rho^2(t,x,y)} := \inf\left\{S^3_{0,t}(\varphi) : \ \varphi(0) = x \text{ and } \varphi(t) = y\right\}, \tag{6.56}$$

$$\boldsymbol{\rho^2(t,x,G_0)} := \inf_{y \in G_0} \rho^2(t,x,y), \tag{6.57}$$

$$\boldsymbol{R_{0,t}(\varphi)} := \int_0^t \overline{C}(\varphi(s))\,ds - S^3_{0,t}(\varphi), \tag{6.58}$$

$$\boldsymbol{V^*(t,x)} := \inf_{\tau \in \Theta_t} \sup_\varphi \left\{R_{0,\tau}(\varphi), \ \varphi(0) = x, \ \varphi(t) \in G_0, \ \varphi \in C\big([0,t], \mathbb{R}^d\big)\right\}, \tag{6.59}$$

où Θ_t est l'ensemble des temps d'arrêt qui sont plus petit que t définis à l'aide d'un ouvert $\mathscr{O}$ contenu dans $[0,t] \times \mathbb{R}^d$, i.e.

$$\boldsymbol{\tau(\varphi)} := \min\left\{s \in [0,t] : \ \big(t - s, \varphi(s)\big) \in \mathscr{O}\right\}. \tag{6.60}$$

Sur ce, on peut énoncer un résultat d'unicité (voir Pradeilles [49])

Théorème 6.6 (**Pradeilles**).
Soit u et v des sous et sur-solution de viscosité de (6.46). Supposons, de plus, que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^d$

$$-\rho^2(t,x,G_0) \leq v(t,x) \leq u(t,x) \leq \min\left\{\overline{C}t - \rho^2(t,x,G_0); 0\right\}. \tag{6.61}$$

Alors

$$v \geq u.$$

Par la suite, nous avons

Théorème 6.7. *Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x) = V^*(t,x).$$

Soient $\mathscr{M}$ et $\mathscr{E}$ des partitions de $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^d$, telles que :

$$\mathscr{M} = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^d \ : \ V^*(t,x) = 0\right\},$$

$$\mathscr{E} = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^d \ : \ V^*(t,x) < 0\right\}.$$

Remarque 6.8. *Nous avons*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(t,x) = \begin{cases} 0 \text{ uniformly from any compact } \mathscr{K} \text{ of } \mathscr{E}, \\ 1 \text{ uniformly from any compact } \mathscr{K}' \text{ of } \mathring{\mathscr{M}}. \end{cases}$$

Conclusions et perspectives

Conclusion

À l'origine le but premier de cette étude doctorale était d'ordre théorique : étendre l'analyse du couplage du principe de grandes déviations et de la théorie de l'homogénéisation, par une approche probabiliste, dans le cas des EDP paraboliques. En particulier nous avons confirmer certains résultats dans la littérature mathématique obtenus avec le PGD ou la théorie de l'homogénéisation dans le cas des EDP. Somme toute, nous avons réduit l'erreur des approximations qui étaient obtenues. Nous avons choisi le couplage comme approche stratégique de cette thèse car nous visons des améliorations de ce genre, notamment la recherche d'une barrière sur la précision des calculs faits.

Sur le plan théorique, nous nous sommes intéressés à la classes des équations de réactions diffusion de type KPP. Cette classe fait l'objet de plusieurs études dans la littérature : Freidlin dans le cas des grandes déviations (voir par exemple [23]), Barles et Souganidis [6] dans le cas d'une approche analytique, Pradeilles [49] avec les équations différentielles stochastiques rétrogrades et les solutions de viscosité, etc. Ce choix peut se justifier, par le fait que la plus part des phénomènes sont décrits par les systèmes de réaction-diffusion (modèles mathématiques en biologie, en mécanique des fluides ou solides,...)

Sur le plan méthodologique, notre démarche a été bien orientée par la comparaison entre la vitesses de convergence du paramètres de grandes déviations et celle du paramètre d'homogénéisation. Bien qu'on puisse penser que la nouvelle variable introduite δ_ε, du fait de la dépendance entre les paramètres, est sujette à interprétation (la variable d'indice est muette).

Comme proposition à l'observation générale de cette thèse, tenant compte des travaux de Diedhiou et Manga [18] d'une part, et de Diedhiou [17] d'autre part, nous pouvons affirmer que le couplage présente certains avantages.

En comparaison avec l'homogénéisation, les résultats obtenus avec le couplages sont plus *explicites* et on peut s'épargner de *centrer* le terme de la source de l'EDP qui présente un facteur explosif. En parallèle avec le principe (PGD), l'approximation de la barrière obtenue avec le couplage est d'autant plus *précise.* Et l'on constate que les ensembles de convergence sont plus fins que ceux proposés dans la littérature mathématique, modulo les équations de réaction-diffusion.

Certains résultats de cette thèse permettent de formuler aussi une proposition voulant qu'il puisse exister un défaut rédhibitoire, notamment dans le chapitre (5).

En effet, il est à signaler que le couplage présent un défaut cas : lorsque les vitesses de convergence sont quasi identiques. Dans ce cas, l'on ne peut ni donner une formule explicite de la barrière (voir théorème 5.4), ni établir l'unicité de la solution associée au système limite de l'équation Hamilton-Jacobi. En plus, les ensembles de convergences calculés sont *biaisés.* Ceci n'est pas une surprise au vu des travaux de Freidlin et Sowers [24], où dans le Regime 2 la formulation de la *fonction taux* n'était pas explicite.

Perspectives

En mathématique, c'est comme dans un roman policier ou un épisode de Columbo : le raisonnement par lequel le détective confond l'assassin est au moins aussi important que la solution du mystère elle-même.
Cédric Villani : *Théorème Vivant*

C'est lorsqu'il se veut - et comme c'est le cas dans notre problème - un résultat plus juste, plus général, que la résolution prend tout son sens.

Primo, la clef de notre résolution repose essentiellement sur l'ellipticité du coefficient de diffusion. L'efficacité de cette hypothèse garantit, par exemple, l'inversibilité de la matrice homogénéisée. Mais il est clair que, lorsque la matrice de diffusion est dégénérée, il faut une certaine dextérité en mathématique pour retrouver certains résultats.
Dans ce cas, on pourra consulter les travaux de Pardoux et Veretennikov [48], Khasminskii [31] ou Ethier et Kurtz [21], pour l'existence et l'unicité de mesure invariante. Également, rappelons que Pardoux et Hairer [29] ont donné une condition *nécessaire* et *suffisante* pour que la matrice homogénéisée soit inversible (voir aussi le travail de Pardoux et Sow [46] dans le semi-linéaire).

Secundo, la périodicité joue aussi un rôle fondamental dans notre démarche, notamment dans la résolution de l'équation de Poisson. Alors il serait encore plus intéressant de regarder, par exemple, le problème sous l'angle où les coefficients seraient aléatoirement stationnaires (ou sans imposer la périodicité et l'ergodicité comme dans Bahlali et al [4]).

En fin, signalons que l'on pouvait considérer un problème :

- avec des conditions au bord de type Dirichlet ou de type Neumann ;
- avec un opérateur linéaire du second ordre qui serait différent d'une ligne à l'autre du système d'EDP (voir Pardoux, Pradeilles et Rao [45]);
- avec un opérateur construit à l'aide d'une diffusion réfléchie (voir Pardoux et Ouknine [41], Aman et N'zi [2], ou les articles de Diakhaby et Ouknine [15] [16]);
- avec un opérateur perturbé par un bruit aléatoire, plus précisément une EDP stochastique (voir Aman, Elouaflin et Diop [1]);
- en imposant, cette fois-ci, que la limite du rapport $\frac{\delta}{\varepsilon}$ est indéfinie. Par exemple[2], les suites $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ et $\delta_n := \frac{\sin n}{n}$ convergent toutes vers zéro quand n tend vers l'infini; mais la limite $\frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ n'existe pas.

[2] Un cas pénible qui m'a été posé par le Professeur Marie Salomon Sambou.

Bibliographie

[1] A. Aman and A. Elouaflin and M.A. Diop *Representation theorem for SPDEs via backward doubly SDEs.* Electron. Commun. Probab, 18:1–15, 2013.

[2] A. Aman and M. Nzi *Homogenization of reflected semilinear PDE with nonlinear Neumann boundary condition.* 2009.
`arXiv : 0712.2986v3 [math.PR] 15 Jan 2009`

[3] G. Bachelet and J.P. Françoise and C. Piquet *Géométrie différentielle avec 80 figures.* Collection Mathématiques a l'université, 2011.
`www.editions-ellipses.fr`

[4] P. Bahlali and M.A. Diop and A. Elouaflin and A. Said *Probabilistic approach to homogenization of a non-divergence form semilinear PDE with non-periodic coefficients.* Bull. Sci. Math., 2013.
`http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2013.07.001`

[5] P. Baldi. *Large deviation for processes with homogenization and applications.* Anna. Probab., 19:509–524, 1991.

[6] G. Barles and P.E. Souganidis. *A remark on the asymptotic behavior of the solution of the KPP equations.* C.R. acad. sci Paris, 319:679–684, 1994.

[7] P.H. Baxendale and D.W. Stroock. *Large deviations and stochastic flows of diffeomorphisms.* Prob. Theo. Rel, 80:169–215, 1988.

[8] M. Bramanti. *An invitation to hypoelliptic operators and Hörmander's vector field.* Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht, London, 2014.

[9] M. Chaperon. *Familles génératrices.* École d'été de Samos, 1990.

[10] A. Coulibaly and A. Diedhiou and C. Manga *Coupling Homogenization and Large Deviations Principle in a Parabolic PDE.* App. Math. Sci., 9:2019–2030, 2015.
`http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.5169`

[11] A. Coulibaly and A. Diedhiou and C. Manga *Limit of a parabolic PDE solution depending on two parameters.* Int. Journal of App. Math.,vol (29) issue 3:349–364, 2016.
`http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v29i3.6`

[12] M.G. Crandall and P.L. Lions. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations.* Trans. Amer. Math. Soc, 277:1–42, 1983.

[13] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviation Techniques and Applications.* Jones and Bartlet, Boston, 1993.

[14] J.D. Deuschel and D.W. Stroock. *A function space large deviation principle for certain stochastic integral.* Prob. Th. Rel. Fields, 83:279–307, 1974.

[15] A. Diakhaby and Y. Ouknine. *Reflected BSDE and Locally Periodic Homogenization of Semilinear PDEs with Nonlinear Neumann Boundary Condition.* Stochastic Analysis and Applications, 28:, 254-273, 2010.

[16] A. Diakhaby and Y. Ouknine. *Generalized BSDEs, weak convergence, and homogenization of semilinear PDEs with the Wentzell type boundary condition.* Stochastic Analysis and Applications, 34:, 496-509, 2016.

[17] A. Diedhiou. *Limit of the solution of a PDE in the degenerate case.* App. Math., 4:338–342, 2013.

[18] A. Diedhiou and C. Manga. *Application of homogenization and large deviation to a parabolic semi-linear equation.* Math. Anal. App., 342:146–160, 2008.

[19] A. Diedhiou and E. Pardoux. *Homogenization of periodic semilinear hypoelliptic PDES.* Anal. fac. scien. de Toulouse math., 16(2):253–283, 2007.

[20] E.B. Dynkin. *Superprocessus and partial differential equations.* Annals of probab., 21: 1185–1262, 1993.

[21] S. Ethier et T. Kurtz. *Markov processes, characterisation and convergence* . Wiley, New York, 1986.

[22] J. Feng et T. Kurtz. *Large deviations for stochastic processes.* Mathematical Surveys and Monographs 113, American Mathematical Society, 2006.

[23] Mark Freidlin. *Coupled reaction-diffusion equations.* The annals of probob., 19(1):29–57, 1991.

[24] M.I. Freidlin and R.B. Sowers. *A comparison of homogenization and large deviation, with applications to wave-fronts propagation.* Stoch. Proc. App., 82:23–52, 1999.

[25] M.I. Freidlin and A.D. Wentzel. *Random perturbations of dynamical systems.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[26] J.F. Le Gall. *A probabilistic Poisson representation for positive solutions of* $\Delta u = u^2$. Comm. pure and appl. math., 50:69–103, 1997.

[27] G. Gaudron and E. Pardoux. *EDSR, convergence en loi et homogénéisation d'EDP paraboliques semi-linéaires.* Ann. de l'Inst. Henri Poincare (B) Prob. and Stat., 37:1–42, 2001.

[28] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equation of second order.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften – **224**, Springer, 1977.

[29] M. Hairer and E. Pardoux. *Homogenization of periodic linear degenerate PDEs.* Journal of functional analysis, 255:2462–2484, 2008.

[30] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, New York, 1988.

[31] R. Khasminskii. *Stochastic stability of differential equations.* Second Edition, Stoc. Mod. and App. Porb., Springer, 2012.

[32] S.G. Krantz. *Partial differential equation and complex analysis.* Studies in Advanced Mathematics. CRC press, Boca Raton, 1992.

[33] J. Kuelbs, W. Li, and W. Linde. *The gaussian measure of shifted balls.* Probability Theory and Related Fields, 1994.

[34] B. Lapeyre, E. Pardoux, and R. Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion.* Mathématique et applications, 29:Springer, 1997.

[35] T. Lyons. *Differential equations driven bu rough signals.* Rev. Mat. Iberoamericana, 14, 1998.

[36] A. Madja and P. Souganidis. *Large scale fronts dynamics for turbulent reaction-diffusion equations with separeted velocity scales.* Nonlinearity, 7:1–30, 1994.

[37] P. Del Moral and T. Zajic. *A note on Laplace-Varadhan's integral lemma.* CNRS-UMR C55830, Univ. P. Sabatier, 31062 Toulouse, France, delmoral@cict.fr, 2002.

[38] J.R. Norris. *Long time behaviour of heat flow : global estimates and exact asymptotics.* Arch. rat. mech. anal., 140:75–87, 1997.

[39] J.R. Norris and D.W. Stroock. *Estimates on the fundamental solution to heat flows with uniformly elliptic coefficients.* Proc. lon. math. soc., 62:373–402, 1991.

[40] D. Nuarlart. *The Malliavin calculus and related topics.* Springer–Verlag, Berlin,1991.

[41] Y. Ouknine and E. Pardoux. *Homogenization of PDEs with Non Linear Boundary Condition.* Progress in Probability, Vol. 52, 229–242, 2006.

[42] E. Pardoux . *Quelques méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles.* ESAIM. Proceedings, Vol. 6, 91–109, 1998

[43] E. Pardoux . *Homogenization of Linear and Semilinear Second Order Parabolic PDEs with Periodic Coefficients: A Probabilistic Approach.* Journal of Functional Analysis, Vol. 167, 498–520, 1999

[44] E. Pardoux and S. Peng. *BSDE and quasilinear parabolic partial differential equations.* Lecture notes in control. and inform. sci., 176:200–217, 1992.

[45] E. Pardoux, F. Pradeilles, and Z. Rao. *Probabilistic interpretation of a semi-linear parabolic partial differential equations.* Ann. inst. Henri Poincaré, 33(4):169–215, 1997.

[46] E. Pardoux and B. Sow. *Homogenization of a periodic semilinear elliptic degenerate PDE.* 2013.
`arXiv : 1305.1211v1 [math.PR] 6 May 2013`

[47] E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov. *On the poisson equation and diffusion approximation I.* The annals of probab., 29(3):1061–1085, 2001.

[48] E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov. *On the poisson equation and diffusion approximation III.* The annals of probab., 33(3):1111–1133, 2005.

[49] F. Pradeilles. *Wavefront propagation for reaction-diffusion systems for bacward SDES.* The annals of probab., 26(4):1575–1613, 1999.

[50] P. Priouret. *Remarques sur les petites perturbations de systémes dynamiques.* Séminaire de Probabilité Strasbourg, 16:184–200, 1982.

[51] A. Puhalskii. *Large Deviations and Idempotent Probability.* CRC Press, 2001.

[52] D.W. Stroock. *An introduction to the theory of large deviation.* Springer-Verlag, New York Inc., 1984.

[53] D.W. Stroock. *An introduction to partial differential equations for probabilists.* Cambridge university press, New York, 2008.

[54] D.W. Stroock. *Probability theory : an analytic view.* Cambrigde University Press Second edition published, 2011.

[55] D.W. Stroock and S.R. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes.* Springer, 1979.

[56] A. Vaart and H. Zanten. *Rates of contraction of posterior distributions based on gaussian process priors.* The Annals of Statistics, 2008.

[57] A. Yu. Veretennikov. *On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations.* Stoch. proc. appl., 70:115–127, 1997.