

# UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



## UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

### MÉMOIRE DE MASTER

**DOMAINE** : SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
**MENTION** : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS  
**SPÉCIALITÉ** : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
**OPTION** : BIOMATHÉMATIQUE

### THÈME :

## Synthèse d'observateurs : Applications à quelques modèles biologiques

Présenté par : FATOUMATA BINTA BA

Sous la direction de : Pr. DIÈNE NGOM

Soutenu publiquement le 20 juillet 2024 devant le jury composé de :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
M. Mouhamadou Samsidy GOUDIABY	Professeur Assimilé	Président	UASZ
M. Timack NGOM	Maitre de Conférences Titulaire	Examineur	UASZ
M. Abdoul Aziz FALL	Maitre de Conférences Titulaire	Examineur	UADB
M. Diène NGOM	Professeur Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2022/2023

---

# Dédicaces

---

*À mes parents,*

*À mon tendre époux,*

*À mes enfants*

*À mes frères et sœur,*

*À mes amis(es)*

*À tous ceux qui m'aiment et que j'aime*

---

---

---

# Remerciements

---

Je rends tout d'abord grâce à Dieu, le Tout-Puissant, pour la santé et la longévité qu'il m'a accordées, me permettant ainsi d'accomplir ce travail avec dévotion et persévérance. Chers membres de ma famille, chers amis, et précieux soutiens, C'est avec une profonde gratitude que je prends un moment pour exprimer mes sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au succès de ce travail. Ce parcours académique n'aurait pas été le même sans votre soutien inestimable.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon encadreur Professeur Diène NGOM, qui malgré ses préoccupations a trouvé du temps pour mon encadrement. Sa guidance experte, ses conseils avisés et son dévouement ont joué un rôle crucial dans la réussite de ce travail de recherche. Votre mentorat m'a été d'une valeur inestimable, et je vous suis très reconnaissante du sujet si passionnant que vous avez mis à ma disposition et de l'opportunité d'avoir travaillé sous votre direction.

Au Professeur Mouhamadou Samsidy GOUDIABY pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de présider mon jury.

J'exprime ma reconnaissance la plus sincère au Docteur Timack NGOM et au Docteur Abdoul Aziz FALL d'avoir accepté de participer au jury en tant qu'examinateur. Je remercie l'ensemble des membres du corps professoral ainsi que de l'administration du département de Mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor qui ont contribué à ma formation.

À mon époux bien-aimé, Amadou Sékou DIALLO, je veux témoigner ma gratitude pour votre soutien indéfectible tout au long de ce parcours. Votre compréhension, encouragement constant et votre amour ont été mes sources de motivation, me donnant la force nécessaire pour surmonter les défis et persévérer dans la réalisation de ce mémoire. En particulier, je tiens à souligner la façon dont vous avez créé les conditions propices à ma réussite académique. Votre soutien et votre engagement ont été un pilier essentiel.

À Docteur Abdoulaye DIOUF pour son aide, ses conseils ; j'avoue que ses compétences et ses discussions enrichissantes ont été un atout indéniable à la réussite de ce travail.

Ma reconnaissance s'étend également à ma famille, mes parents : mon père ma source

---

de motivation, cet homme qui s'est battu et qui continue de se battre pour la réussite de ses enfants, ma mère, ma référence, mes frères et ma sœur, pour leur soutien inconditionnel. Votre encouragement constant, vos sacrifices et votre amour ont été ma source d'énergie tout au long de ce Parcours académique. Recevez à travers ce travail, toute ma gratitude et mes profonds sentiments. Que Dieu, le tout puissant, soit à vos côtés et vous accorde une meilleure santé (amen)

À mes amis fidèles, particulièrement à mes camarades de promotion de l'UASZ à savoir Mariama DIOP, Cheikh FALL, Cheikh FAYE, Tallatou DIALLO, Salif DIALLO, Siaka DIÉMÉ, Adama POUYE... dont la fréquentation et les échanges ont été des piliers essentiels dans les moments difficiles, je vous adresse mes plus sincères remerciements. Votre amitié a été une source de réconfort et de motivation.

Je suis reconnaissante envers mes compagnons de classe, Amadou Diouldé BA, Mamadou Aliou DIALLO, Mamadou Korca BA, Boubacar BALDÉ, Oumar BALDÈ, Lamine DAFFÉ, Lirwanou DIALLO, Aissata DEMBÉLÉ et Alpha Yéro SABALY, avec qui j'ai partagé des moments inoubliables au lycée Alpha Molo Baldé de Kolda. Leurs amitiés et leur camaraderie ont enrichi mon expérience scolaire et ont été une source de joie et de soutien tout au long de notre parcours. Je profite de l'occasion pour faire part de ma reconnaissance à mes professeurs du collège au lycée particulièrement à M. Mamadou Moussa BALDÉ, M. Alpha DIOUF, M. Pape Idrissa Ndiaye, M. Mouhamad NDAO, M. BA et M. MBALLO qui ont été les premiers à m'orienter vers ce domaine.

À mes enfants, Abdourahime DIALLO et Fatoumata Coumba DIALLO, vous êtes ma plus grande motivation. Je vous dédie ce travail en espérant qu'il puisse vous inspirer dans vos réalisations futures.

Mes remerciements vont également à l'endroit de ma belle-famille, en particulier à ma seule et unique belle sœur Mariama MAREA, à mes beaux frères Mamoudou et Djibril, à mes nièces Khadiza et Halimatou, qui constituent ma source de divertissement à la maison. Merci à vous !

Je remercie également mes amis d'enfance : Marie Guinée, Ndeye Rama BADJI, Ousaye BALDÉ, Alassane BALDÉ, Ramata Diouhé DIALLO, Dalanda DIALLO et Hawa DIALLO ; Nos moments d'enfance me manquent énormément  
J'exprime ma gratitude à tous ceux qui m'ont apporté leur soutien le long de mon parcours académique."

À vous tous, j'exprime ma profonde gratitude.

---

---

# Table des matières

---

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>1 OUTILS MATHÉMATIQUES</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Stabilité des systèmes d'équations différentielles ordinaires . . . . .	6
1.3 Observateurs des systèmes dynamiques continus . . . . .	9
1.3.1 Notion d'observabilité d'un système dynamique . . . . .	9
1.3.2 Notion d'observateur . . . . .	13
1.4 Conclusion . . . . .	24
<b>2 SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS DE MODÈLES BIOLOGIQUES</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Synthèse d'observateur pour un modèle de pêche . . . . .	25
2.2.1 Observabilité du modèle de pêche . . . . .	26
2.2.2 Conception d'un observateur de type Kalman . . . . .	30
2.2.3 Simulations numériques . . . . .	31
2.3 Conception d'observateur pour le modèle Droop . . . . .	36
2.3.1 Observabilité du modèle Droop . . . . .	38
2.3.2 Conception d'observateur à gain élevé . . . . .	38
2.3.3 Simulations numériques . . . . .	40
2.4 Conclusion . . . . .	40
<b>Conclusion Générale</b>	<b>41</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>42</b>

---

---

---

# Liste des Figures

---

1.1	Ensemble système-observateur . . . . .	14
1.2	Schéma structural de l'observateur de Luenberger . . . . .	15
2.1	Représentation de $X_0$ et de son estimateur $\hat{X}_0$ (Cas où $\phi$ est non prolongé) . . . . .	32
2.2	Représentation de $X_1$ et de son estimateur $\hat{X}_1$ (Cas où $\phi$ est non prolongé) . . . . .	32
2.3	Représentation de $X_2$ et de son estimateur $\hat{X}_2$ (Cas où $\phi$ est non prolongé) . . . . .	32
2.4	Représentation de $X_0$ et de son estimateur $\hat{X}_0$ (Cas où $\phi$ est prolongé) . . . . .	33
2.5	Représentation de $X_1$ et de son estimateur $\hat{X}_1$ (Cas où $\phi$ est prolongé) . . . . .	34
2.6	Représentation de $X_2$ et de son estimateur $\hat{X}_2$ (Cas où $\phi$ est prolongé) . . . . .	34
2.7	Représentation des états $X_i$ et de leurs estimations $\hat{X}_i(i=0,1,2)$ . . . . .	40

---

---

---

# Résumé

---

La synthèse d'observateur est une approche fondamentale en ingénierie de contrôle qui vise à estimer les états internes d'un système à partir des informations mesurées. Dans ce mémoire, il est question de faire l'état de l'art sur les observateurs des modèles d'équations différentielles ordinaires et une application de la synthèse d'observateurs portant sur deux modèles continus dont l'un décrit l'évolution dynamique d'une population de poissons et l'autre la croissance d'une population de cellules phytoplanctoniques.

L'objectif principal de cette étude est de développer des observateurs adaptés à ces modèles biologiques spécifiques. Après la conception des observateurs pour les deux modèles, des simulations numériques sont faites pour tester la convergence de l'observateur.

**Mots-clés** : synthèse d'observateurs, équations différentielles ordinaires, cellules phytoplanctoniques, modèles de pêche.

---

---

---

# Abstract

---

Observer synthesis is a fundamental approach in control engineering which aims to estimate the internal states of a system from measured information. In this dissertation, we present the state of the art in observer synthesis for ordinary differential equation models and an application of observer synthesis to two continuous models, one describing the dynamic evolution of a fish population and the other the growth of a population of phytoplankton cells.

The main objective of this study is to develop observers adapted to these specific biological models. After designing observers for both models, numerical simulations are carried out to test observer convergence.

**Keywords** : observer synthesis, ordinary differential equations, phytoplankton Cells, fishing Models, Aquatic Ecosystems.

---

---

# Introduction Générale

---

La modélisation mathématique est d'un grand apport pour comprendre, analyser et prédire le comportement de phénomènes complexes dans divers domaines.

Elle a été appliquée à une large gamme de domaines, notamment la physique, la chimie, la biologie, l'économie, l'ingénierie, la météorologie, la médecine, et bien d'autres. Elle a joué un rôle essentiel dans la compréhension et la résolution de problèmes dans ces disciplines. Le *XXe* siècle, a vu le développement de nouvelles théories mathématiques, telle que la théorie des systèmes dynamiques. Ces outils mathématiques ont permis des modélisations plus précises et plus complexes. Le but de la modélisation mathématique est de simplifier la complexité inhérente à un système du monde réel en le représentant sous forme de concepts mathématiques, d'équations, et de relations. Cela permet de formuler des hypothèses, de faire des prédictions et de prendre des décisions éclairées. Généralement, un modèle mathématique se compose de trois éléments principaux :

- **Variables** : Ce sont les quantités ou les caractéristiques du système que l'on souhaite étudier, telles que le temps, la position etc.

- **Équations** : Ce sont les relations mathématiques qui décrivent comment les variables évoluent dans le temps ou en fonction de certains paramètres. Les équations sont souvent basées sur des lois physiques ou des relations empiriques.

- **Paramètres** : Ce sont des constantes ou des coefficients dans les équations qui permettent d'ajuster le modèle en fonction des caractéristiques spécifiques du système.

Il existe différents types de modèles mathématiques, notamment :

- ◀ **Modèles déterministes** : Ils décrivent le comportement d'un système de manière définie, sans considérer l'incertitude.

- ◀ **Modèles stochastiques** : Ils intègrent l'incertitude et la variabilité, en utilisant des concepts de probabilité.

- ◀ **Modèles continus** : Ils sont basés sur des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles et sont utilisés pour modéliser des phénomènes qui évoluent en continu.

- ◀ **Modèles discrets** : Ils sont basés sur des ensembles finis de valeurs ou d'états distincts, et ils sont utilisés pour représenter des systèmes où le temps et/ou les états sont discrétisés. Ces modèles sont utilisés pour étudier et simuler des systèmes où le changement se produit par sauts discrets d'un état à un autre, plutôt que de manière continue.

La modélisation mathématique est un outil essentiel pour aborder les problèmes biologiques. Par exemple, en écologie l'un des thèmes dominants est la dynamique des popu-

---

lations. Sur ce, des chercheurs comme **Thomas Malthus**, **Pierre-François Verhulst**, **Alfred Lotka** et **Vito-Volterra** ont travaillé sur la modélisation des problèmes relevant de la dynamique des populations. En effet, le premier traitement théorique de la dynamique des populations a été présenté par **Thomas Malthus** en **1798** [44], "Essai sur le principe de population". **Pierre-François Verhulst** a créé en **1838** un modèle mathématique d'équation logistique [4]. L'avancée majeure suivante dans la dynamique des populations a été présentée par **Alfred Lotka** en **1925** et **Vito-Volterra** en **1926**. Ils ont présenté pour la première fois les équations différentielles de type proie-prédateur (modèle d'interaction trophique) [52]. Depuis lors, des systèmes proie-prédateur plus complexes mais plus réalistes ont été utilisés par les biologistes et les mathématiciens [1, 45, 48, 6]. En outre, d'autres modèles dans d'autres domaines( en épidémiologie, dans le domaine de la pêche etc) ont été développés dans la littérature [37, 36, 35, 28, 24].

Une fois qu'un problème biologique est écrit sous forme de modèle, l'analyse et la prédiction nécessitent une connaissance entière de tous les états du système. Cependant, sur un plan pratique, divers facteurs physique, technique ou économique rendent particulièrement difficile voire impossible la mesure de la totalité des variables d'état du système. Le problème peut être résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire appelé observateur d'état. Un observateur ou reconstruction d'états est un système dynamique supplémentaire qui permet d'estimer la valeur d'un état non mesuré d'un système en se basant sur les entrées de commande et les sorties mesurées. Dans le domaine de l'automatique, l'observateur joue un rôle fondamental dans la création de lois de commande, la surveillance des processus pour détecter d'éventuelles défaillances et la supervision des procédés en vue d'engager des actions appropriées. En réalité, le défi de concevoir des observateurs a été posé afin d'obtenir des valeurs d'états qui ne sont pas directement accessibles. La mise en place d'un observateur nécessite l'existence d'un modèle mathématique capable de décrire le comportement du processus, c'est-à-dire de détailler les relations entre les différentes variables du système. Grâce à un tel modèle, les trajectoires des variables non mesurées peuvent être estimées au moyen d'un observateur. Dans le cas des systèmes linéaires, le problème de la synthèse d'observateurs est bien maîtrisé. Les solutions apportées telles que l'observateur de Luenberger [42] ou le filtre de Kalman [33] permettent de répondre à toutes les situations. Cependant, le problème d'estimation d'état des systèmes non linéaires reste sans solution dans un grand nombre de cas et cela, malgré les nombreuses méthodes proposées dans ce sens (voir par exemple dans [18, 19, 56, 34, 43] ).

Dans ce mémoire, il s'agira de faire l'état de l'art sur la théorie des observateurs et de ses applications à quelques modèles biologiques. Ces modèles représentent des systèmes biologiques complexes, tels que des interactions écologiques. La synthèse d'observateur dans ce contexte revêt une importance particulière car elle permet d'obtenir des estimations précises des variables internes (états du système) de ces systèmes biologiques. Ces estimations contribuent ainsi à une meilleure compréhension et à une manipulation plus efficace de ces écosystèmes aquatiques.

Ainsi notre plan de travail s'établit comme suit :

En plus de **l'introduction**, **le premier chapitre** constitue un chapitre de rappel sur les notions de stabilités et d'observateurs des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

---

En effet, nous avons essayé de donner en premier lieu des définitions et théorèmes sur la théorie de la stabilité des équations différentielles ordinaires qui nous seront utiles par la suite et en second, lieu nous avons fait une revue de la littérature sur la synthèse d'observateurs d'équations différentielles ordinaires.

Dans le **second chapitre**, nous cherchons à appliquer la théorie des observateurs à deux modèles biologiques. En effet, nous avons présenté deux modèles non linéaires où nous avons construit pour chacun un observateur et nous avons testé leur convergence en faisant des simulations numériques. Le premier décrit l'évolution dynamique d'une population de poissons soumise à la pêche [57] ; pour le premier modèle, nous construisons un observateur qui utilise comme sortie mesurable la donnée des captures sur la population de poissons. Le second est celui proposé par Droop [8] qui décrit la croissance de cellules phytoplanktoniques soumises à des limitations en nutriments dans un réacteur continu (chemostat). L'observateur construit pour ce modèle utilise comme sortie mesurable, la biomasse ; autrement dit le nombre de cellules présent dans le réacteur.

Et enfin, nous présentons une **conclusion** dans laquelle, nous faisons la synthèse de notre travail de mémoire.

---

# OUTILS MATHÉMATIQUES

---

## 1.1 Introduction

Plus précisément, nous nous intéressons aux rappels de quelques notions sur la stabilité des systèmes d'équations différentielles ordinaires et à faire une revue de la littérature sur les observateurs.

**NB :** Les démonstrations de certains théorèmes cités dans ce chapitre sont omis ; cependant, des références seront citées pour ceux-là qui souhaiteront consulter les preuves de ces théorèmes.

## 1.2 Stabilité des systèmes d'équations différentielles ordinaires

De manière générale, dans les sciences appliquées ou expérimentales, il est souvent nécessaire de décrire les phénomènes naturels, sociaux (...) par des équations mathématiques (modèles mathématiques). En effet, la donnée d'un modèle mathématique peut servir en simulation (dans le but de comprendre et de prédire le comportement d'un système, de remplacer une expérimentation sur un site donné ...). Les processus physiques, chimiques, biologiques, épidémiologiques, de pêche (..) sont représentés par des modèles mathématiques non linéaires.

**Définition 1.2.1.** *Les systèmes d'équations différentielles ordinaires sont des systèmes de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ .

- Le système (1.1) est dit **autonome** quand la fonction  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , c'est -à-dire que :
-

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

et **non-autonome** sinon.

• Le système (1.1) est dit **linéaire** si  $f(x, t) = A(t)x$ , avec  $A(t)$  une matrice de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , et **non linéaire** dans le cas contraire.

• Une solution de (1.1) sur un intervalle  $[0, T]$  est désignée par  $p(t_0 + t, t_0, x_0)$ ,  $t_0 \geq 0$  :  $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , et satisfaisant à :

- (i)  $p(t_0, t_0, x_0) = x_0$ ,
- (ii)  $\frac{dp(t_0 + t, t_0, x_0)}{dt} = f(p(t_0 + t, t_0, x_0), t), \forall t \in [0, T]$ .

Une solution de (1.2) sur l'intervalle  $[t_0, T]$  est notée par  $p(t, x_0)$ , avec  $x(t_0) = x_0$ .

**Théorème 1.2.1** (Existence et unicité de solution locale de Cauchy-Lipschitz). [38] *Supposons que la fonction  $f$  est continue par rapport à  $t$  et satisfait la condition de Lipschitz :*

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1],$$

alors il existe  $\delta > 0$  tel que l'équation (1.1) ait une unique solution sur  $[t_0, t_0 + \delta]$ .

**Théorème 1.2.2** (Existence et unicité de solution globale de Cauchy-Lipschitz). [38] *Supposons que la fonction  $f$  est continue par rapport à  $t$  et satisfait la condition de Lipschitz :*

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors l'équation admet une unique solution sur  $[t_0, t_1]$ .

Les preuves des Théorèmes (1.2.1) et (1.2.2) sont présentées dans ([38] pages 657 – 659).

### Stabilité des Points d'équilibres

La notion de point d'équilibre est très importante dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Dans beaucoup de domaines d'application comme en biologie, en économie, en physique et en ingénierie mathématique, on s'intéresse souvent au comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations différentielles régissant le fonctionnement d'un système par rapport à son équilibre.

Supposons que l'état  $x^* \in \Omega$  est un point d'équilibre du système (1.1), c'est-à-dire que  $f(x^*, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ .

**Définition 1.2.2** (Stabilité). *On dit que le point  $x^*$  est un point d'équilibre stable du système (1.1) si :*

$$\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x_0, \|x_0 - x^*\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \forall t \|p(t + t_0, t_0, x_0) - x^*\| < \epsilon.$$

Si  $\delta$  peut être choisi indépendamment de  $t_0$ , alors le point d'équilibre  $x^*$  est dit uniformément stable. Un point d'équilibre qui n'est pas stable est dit instable.

**Définition 1.2.3** (Attractivité). On dit que le point d'équilibre  $x^*$  est un point attractif pour le système (1.1) s'il existe un réel strictement positif  $\gamma(t_0) > 0$  tel que

$$\|x_0 - x^*\| < \gamma(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t + t_0, t_0, x_0) - x^*\| = 0.$$

Si  $\gamma$  peut être choisi indépendamment de  $t_0$ , alors le point d'équilibre est dit uniformément attractif. Le domaine d'attractivité  $D(x^*)$  du point d'équilibre  $x^*$  est défini par :

$$D(x^*) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t, 0, x) - x^*\| = 0 \right\}.$$

Si  $D(x^*) = \Omega$ , on dit que  $x^*$  est globalement attractif.

**Remarque 1.2.3.** Un équilibre  $x^*$  peut être attractif sans être stable.

**Définition 1.2.4.** Le point d'équilibre  $x^*$  est dit asymptotiquement stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable) s'il est à la fois stable (respectivement uniformément stable) et attractif (respectivement uniformément attractif).

Le point d'équilibre sera dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives  $c, \alpha$  et  $r$  telles que

$$\forall x_0, \|x_0 - x^*\| < r \Rightarrow \forall t \geq t_0, \|p(t + t_0, t_0, x_0) - x^*\| \leq c \|x_0\| e^{-\alpha t} \quad (a).$$

Le point d'équilibre est dit globalement exponentiellement stable si l'inégalité (a) est satisfaite pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

La stabilité exponentielle implique la stabilité uniforme. Dans le cas des systèmes linéaires, les deux notions sont équivalentes.

**Définition 1.2.5.** Le point  $x^*$  est dit point d'équilibre isolé, s'il existe un voisinage  $U$  de  $x^*$  tel que :

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x^*\} \quad [26].$$

Nous avons aussi les deux définitions suivantes [16]

**Définition 1.2.6.** Un point  $x$  est appelé point oméga limite dans  $\Omega$  s'il existe une suite  $(x_n)_{n \geq n_0}$  d'éléments de  $\Omega$  tels que  $x_n$  tend vers  $x$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. L'ensemble des points oméga limite est appelé ensemble oméga limite.

**Définition 1.2.7.** Un ensemble  $A$  est positivement invariant pour le système (1.1) si :

$$O(x_0) \subset A$$

pour tout  $x_0 \in A$ , où  $O(x_0) = \{x(n, 0, x_0) / n \in \mathbb{Z}^+\}$ .

**Définition 1.2.8.** Soit  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , un point d'équilibre du système (1.1).

Une fonction  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $W$  est un voisinage de  $x^* \in \mathbb{R}^n$  dans  $U$ ) est appelée une fonction de Lyapunov de  $x^*$  dans  $W$  si :

1.  $V \in C^1(W, \mathbb{R})$ ,
2.  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \in W \setminus \{x^*\}$ ,
3.  $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x) \leq 0 \forall x \in W$ .

Si  $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in W$ , on dit que  $V$  est une fonction de **Lyapunov stricte** de  $x^*$  dans  $W$ .

**Théorème 1.2.4** (de Luapunov). Si  $x^*$  admet une fonction de Lyapunov dans  $W$ , alors  $x^*$  est stable dans  $W$ .

De plus si  $x^*$  admet une fonction de Lyapunov stricte dans  $W$  alors  $x^*$  est asymptotiquement stable sur  $W$ .

## 1.3 Observateurs des systèmes dynamiques continus

### 1.3.1 Notion d'observabilité d'un système dynamique

#### a) Cas des systèmes linéaires

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  sont respectivement le vecteur d'état, vecteur d'entrée et le vecteur de sortie.  $A, B$  et  $C$  sont respectivement des matrices  $n \times n$ ,  $n \times p$  et  $q \times n$  constantes.

L'observabilité est une notion très importante dans le domaine des mathématiques appliquées. En effet, elle lie les états d'un système donné et la sortie mesurable correspondante. De façon générale, l'observabilité d'un système stipule qu'on soit en mesure de reconstruire les états de ce système à un instant  $t_0$ , connaissant sa sortie mesurable à un instant  $t_1 \geq t_0$  [46].

Pour le système linéaire invariant en temps (1.3), on a :

$$y(x_1, u(\cdot), t) = Ce^{tA}x_1 + C \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Où  $y(x_1, u(\cdot), t)$  est la sortie obtenue avec la condition initiale  $x_1$ .

D'où,

$$y(x_1, u(\cdot), t) - y(x_2, u(\cdot), t) = Ce^{tA}(x_1 - x_2).$$

**Définition 1.3.1.** Soient  $x_1$  et  $x_2$  tel que  $x_1 \neq x_2$ . On dit qu'ils sont indistinguables si :

$$y(x_1, u(\cdot), t) = y(x_2, u(\cdot), t)$$

Ainsi,  $x_1$  et  $x_2$  sont indistinguables si et seulement si  $Ce^{tA}(x_1 - x_2) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Par analyticité de  $t \mapsto Ce^{tA}x$ , cela revient à dire que toutes les dérivées d'ordre  $k$  de  $t \mapsto Ce^{tA}(x_1 - x_2)$  s'annulent en  $t = 0$ , c'est-à-dire que :

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} Ce^{tA}(x_1 - x_2) \right|_{t=0} = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots$$

qui peut s'écrire :  $CA^k(x_1 - x_2) = 0$ , pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, ceci est équivalent à :

$$C(x_1 - x_2) = CA(x_1 - x_2) = \dots = CA^{n-1}(x_1 - x_2) = 0.$$

Par conséquent,  $x_1$  et  $x_2$  sont indistinguables si et seulement si [31] :

$$x_1 - x_2 \in \ker C \cap \ker CA \cap \ker CA^2 \cap \dots \cap \ker CA^{n-1}. \quad (1.4)$$

**Définition 1.3.2.**  $x_0$  dans  $\Omega$  est dit observable pour le système (1.3) si pour tout  $x$  dans  $\Omega$ ,  $x$  et  $x_0$  sont indistinguables implique que  $x = x_0$ .

De manière générale, on écrit souvent que le système (1.3) est observable en  $x_0$  pour dire que  $x_0$  est observable pour le système (1.3).

**Définition 1.3.3.**  $x_0$  dans  $\Omega$  est localement faiblement observable pour le système (1.3) s'il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que pour tout  $x$  dans  $W$  tel que  $x$  et  $x_0$  sont indistinguables alors  $x = x_0$ .

**Définition 1.3.4.**  $x_0$  dans  $\Omega$  est localement fortement observable pour le système (1.3) s'il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que pour tout  $x_1$  et  $x_2$  dans  $W$  tel que  $x_1$  et  $x_2$  sont indistinguables alors  $x_1 = x_2$ .

**Remarque 1.3.1.** Si un point  $x_0$  dans  $\Omega$  est observable alors il est localement faiblement observable. Par contre l'observabilité en  $x_0$  n'implique pas forcément que  $x_0$  soit localement fortement observable.

**Définition 1.3.5.** Le système (1.3) est observable dans  $\Omega$  s'il est observable en tout point  $x$  de  $\Omega$ .

**Définition 1.3.6.** Le système (1.3) est localement faiblement observable (respectivement localement fortement observable) dans  $\Omega$  s'il est localement faiblement observable (respectivement localement fortement observable) en tout point  $x$  de  $\Omega$ .

Considérons toujours le système dynamique (1.3) bien connu. Puisque la relation (1.4) n'est pas en fonction de la matrice  $B$ , donc elle (la matrice  $B$ ) n'intervient pas dans le critère d'observabilité. Ramenons donc l'étude de l'observabilité du système à l'étude de la paire  $(A, C)$ . On peut définir plusieurs critères d'observabilité.

**Théorème 1.3.2.** *Soit la matrice d'observabilité définie par :*

$$\mathbf{O}_{(C,A)} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix},$$

et son rang est défini par :  $\text{rang}(\mathbf{O}_{(C,A)}) = k_0$ . La paire  $(A, C)$  est observable est équivalente à chacune des propriétés suivantes :

— Le critère de Kalman est maximal

$$\text{rang}(\mathbf{O}_{(C,A)}) = n,$$

— Critère de **Hautus** : le système est observable si pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$  la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix}$$

est de rang  $n$  [2].

## b) Cas des systèmes non linéaires

Considérons le système non linéaire avec une seule sortie, c'est-à-dire  $q = 1$  et  $y(t) = h(x(t)) \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t), u(t)) = X^u(x(t)), \\ y(t) = h(x(t)), \\ x(t) \in M, u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.5)$$

Afin de dériver une condition d'observabilité pour (1.5), nous devons rappeler qu'un système lisse ( $C^\infty$ )  $X$  défini sur  $M$  opère sur  $C^\infty(M)$ , l'ensemble des fonctions  $C^\infty$ ,  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , par différenciation de Lie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \Phi &\longmapsto X \cdot \Phi \end{aligned} \quad (1.6)$$

avec

$$X \cdot \Phi(x) = \left. \frac{d}{dt} (\Phi(X_t(x))) \right|_{t=0}.$$

Dans le système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ , notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire et  $\nabla\Phi$  le gradient de  $\Phi$  dans ces coordonnées. Si

$$X(x) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right) (x) = \begin{pmatrix} X_1(x_1, \dots, x_n) \\ X_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ X_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

Alors

$$X \cdot \Phi(x) = \langle \nabla\Phi(x), X(x) \rangle = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x).$$

La fonction  $X \cdot \Phi$  est appelée dérivée de Lie de  $\Phi$  le long du champ de vecteurs  $X$ . Elle est également notée  $L_X\Phi$ . Pour un entier positif donné  $k > 0$ , la dérivée de Lie d'ordre  $k$  de  $\Phi$  le long de  $X$  est définie par induction comme suit

$$X^k \cdot \Phi = X \cdot (X^{k-1} \cdot \Phi).$$

**Exemple 1.3.1.**  $\dot{x} = X(x) = Ax, y = h(x) = Cx$ . Ici, on a

$$X_t(x_0) = e^{tA}x_0.$$

D'où  $X \cdot h(x_0) = \left. \frac{d}{dt} (Ce^{tA}x_0) \right|_{t=0} = CAx_0$  et il est facile de voir que

$$X^k \cdot h(x_0) = CA^k x_0.$$

**L'espace d'observation** de (1.5)  $\mathcal{O}$  est l'espace linéaire (sur  $\mathbb{R}$ ) des fonctions sur  $M$  contenant la fonction d'observation  $h$  et qui est fermé à la différenciation de Lie par tous les éléments de  $\mathcal{X} = \{X^u, u \in U\}$ . ( $\mathcal{X}$  est simplement l'ensemble des champs de vecteurs correspondant aux contrôles constants). On peut prouver que  $\mathcal{O}$  peut être défini comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de toutes dérivées de Lie répétées des fonctions de la forme

$$X^{u_k} \dots X^{u_2} X^{u_1} \cdot h,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{O} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ (X^{u_l})^{k_l} \dots (X^{u_2})^{k_2} (X^{u_1})^{k_1} \cdot h : l \geq 0, \quad u_1, \dots, u_l \in U, k_i = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Pour les systèmes analytiques, l'observabilité est équivalente au fait que l'espace d'observabilité  $\mathcal{O}$  sépare les points de  $M$ .

**Remarque 1.3.3.** L'espace d'observation  $\mathcal{O}$  contient la fonction de sortie et toutes les dérivées de la fonction de sortie le long des trajectoires du système. En particulier, pour un système sans entrée :

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), y(t) = h(x(t)),$$

$\mathcal{O}$  est construit en prenant  $y = h(x)$  avec toutes les dérivées temporelles répétées  $\dot{y} = X.h(x), \ddot{y} = X^2.h(x)$  etc. Pour le système linéaire (1.3), l'espace d'observation est généré par les fonctions :

$$Cx, CAx, \dots, CA^{n-1}x.$$

**Remarque 1.3.4.** Nous avons vu que l'observabilité des systèmes linéaires ne dépend pas de l'entrée. Ceci n'est pas plus vrai pour les systèmes non linéaires comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

Ici  $x = (x_1, x_2) \in M = \mathbb{R}^2, u \in U = \{0, 1\}$ . Il s'agit d'un système non linéaire très simple : c'est un système bilinéaire. Ce système est observable, car avec l'entrée  $u(t) \equiv 1$ , on obtient un système linéaire observable  $\dot{x} = Ax, y = Cx$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $C = (1 \ 0)$ .

Il est facile de voir que la condition de rang de Kalman pour l'observabilité est satisfaite. On peut également remarquer qu'il est possible de reconstruire l'état  $(x_1(t), x_2(t))$  à partir de  $y(t) = x_1(t)$  et  $\dot{y}(t) = x_1(t) + x_2(t)$ . Par conséquent, l'entrée  $u(t) \equiv 1$  distingue chaque paire d'états initiaux distincts  $x^0$  et  $\tilde{x}^0$ , ce qui prouve que le système (1.5) est observable. Cependant, ce système n'est pas uniformément observable à l'entrée car l'entrée  $u(t) \equiv 0$  ne distingue pas les états  $x^0$  et  $\tilde{x}^0$  satisfaisant :  $x_1^0 = \tilde{x}_1^0$  et  $x_2^0 \neq \tilde{x}_2^0$  [31].

Il faut noter que dans le domaine des systèmes non linéaires, il existe diverses approches pour définir le concept d'observabilité. Une définition largement adoptée, en relation avec le concept d'indistinguabilité des états, a été établie dans le travail de référence [61]. Par ailleurs, des résultats significatifs ont été obtenus dans le contexte de systèmes affines en commande, comme le démontre la recherche de [53]. Si vous désirez approfondir vos connaissances sur les différentes définitions de l'observabilité dans les systèmes non linéaires, plusieurs références bibliographiques sont disponibles notamment [61], [1], et [29].

### 1.3.2 Notion d'observateur

De manière générale voici le schéma explicitant la construction d'un observateur :

Avec  $X$  désignant l'état (non mesuré) du système,  $U$  l'entrée,  $Y$  la sortie et  $\hat{X}$  représentant l'estimation de l'état faite par l'observateur.

#### a) Observateur des systèmes linéaires

Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, dont les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bons résultats. Luenberger a proposé une méthode de synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires déterministes [42] tandis que Kalman a mis au point une méthode de synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires stochastiques [33]. Dans les caractéristiques communes à ces approches, nous pouvons remarquer que ces algorithmes sont récursifs (à chaque nouvelle mesure, ils calculent la nouvelle valeur

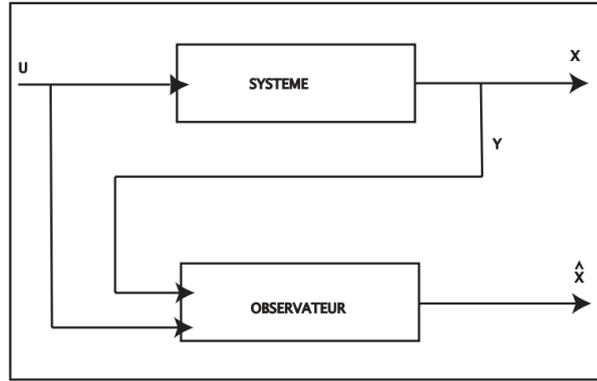


FIGURE 1.1 – Ensemble système-observateur

des variables d'état en fonction de l'estimation précédente), que la stabilité et la convergence sont garanties (il y a normalement un rapprochement de la valeur exacte à chaque pas de calcul) [58]

Dans la suite de cette partie, on considère le système linéaire défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + Lw(t), \\ y = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

où :  $x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état.

$u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée.

$y \in \mathbb{R}^q$  le vecteur de sortie.

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont des dimensions appropriées.

$w(t) \in \mathbb{R}^r$  et  $v(t) \in \mathbb{R}^p$  sont deux bruits blancs gaussiens d'espérance nulle, de covariances respectives  $Q$  et  $R$ . Ces bruits sont supposés non corrélés.

Les conditions initiales sont définies par  $x(0) = x_0$ .

### a.1) Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles [31]. On se place dans le cas déterministe, où les bruits  $w$  et  $v$  sont nuls, Luenberger propose l'observateur suivant pour le système (1.8) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (1.9)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  a pour expression :

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$$

En utilisant une technique de placement de pôles, il suffit alors de choisir le gain  $K$  de l'observateur de telle sorte que les valeurs propres de la matrice  $A - KC$  soient dans le

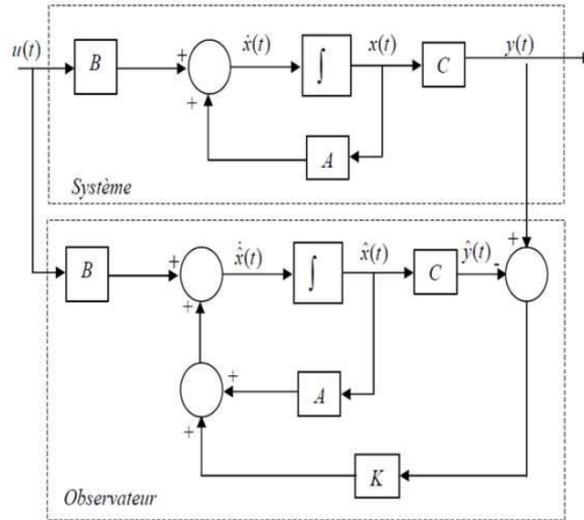


FIGURE 1.2 – Schéma structural de l'observateur de Luenberger

demi plan complexe gauche.

Pour ce type d'observateur, une grande liberté est laissée au choix des valeurs propres, mais en pratique on choisit une dynamique d'erreur plus rapide que celle du processus. Le système (1.8) est supposé observable, donc la paire  $(A, C)$  est observable et cela équivaut à dire que la paire  $(A^T, C^T)$  ( $T = \text{transposée}$ ) est contrôlable. Pour une paire de matrices contrôlables, nous pouvons appliquer la technique de déplacement des pôles qui dit que pour tout polynôme réel d'ordre  $n$   $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ , il existe une matrice réelle  $F$  telle que la matrice  $(A^T + C^T F)$  a  $p(\lambda)$  comme polynôme caractéristique. En d'autres termes, pour tout ensemble  $\mathcal{S} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $n$  nombres complexes satisfaisant  $z \in \mathcal{S} \Rightarrow \bar{z} \in \mathcal{S}$ , il est possible de trouver une matrice  $F$  telle que le spectre de  $A^T + C^T F$  soit  $\sigma(A^T + C^T F) = \mathcal{S}$ .

Comme le spectre d'une matrice réelle  $M$  et celui de sa transposée  $M^T$  sont égaux, on a

$$\sigma(A^T + C^T F) = \sigma\left((A^T + C^T F)^T\right) = \sigma(A + F^T C).$$

En particulier, il existe une matrice  $F$  telle que toutes les valeurs propres de  $(A + F^T C)$  soient avec une partie réelle négative. Par conséquent, si nous prenons  $K = -F^T$  alors l'erreur d'estimation satisfait

$$\|e(t)\| \leq ce^{-\alpha t} \text{ ou } c > 0, \alpha > 0, \text{ et } \alpha = \max_{\lambda \in \sigma(A - KC)} |Re(\lambda)|.$$

Il s'ensuit que l'observateur de Luenberger (1.8) est un observateur exponentiel pour le système (1.7). De plus, le taux de convergence peut être choisi arbitrairement.

**Exemple 1.3.2.** *Considérons un système de type Leslie pour la dynamique d'une popula-*

tion structurée en trois étapes

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \mu_3 \\ \beta_1 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Les entrées de la matrice  $A$  de Leslie sont supposées être indépendantes de l'environnement et nous supposons que nous n'observons que la dernière étape, c'est-à-dire que la sortie du système est  $y(t) = x_3(t)$ . Ici,  $C = (0 \ 0 \ 1)$ . Le transfert de l'étape  $i - 1$  vers l'étape  $i$  étant positif, c'est-à-dire  $\beta_1 > 0$  et  $\beta_2 > 0$ , la condition de rang d'observabilité de Kalman est remplie. Par conséquent, le système suivant est un observateur exponentiel (ou capteur logiciel) pour le système de Leslie ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \mu_3 \\ \beta_1 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + (y(t) - \hat{x}_3(t)) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice de gain  $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)^T$ , peut être sélectionnée afin de forcer les valeurs propres de  $A - KC$  à prendre les valeurs souhaitées. Par exemple, si l'on veut que  $\sigma(A - KC) = \{-3, -2, -1\}$ , alors les coefficients de la matrice  $K$  sont

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{-6 + 11\alpha_1 - 6\alpha_1^2 + \alpha_1^3 - \beta_1\beta_2\mu_3}{\beta_1\beta_2}, \\ k_2 = -\frac{-11 + 6\alpha_1 - \alpha_1^2 + 6\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2}{\beta_2}, \\ k_3 = 6 - \alpha_1 - \alpha_2 - \mu_3. \end{cases} \quad (1.10)$$

L'erreur d'estimation correspondante satisfait pour toutes les conditions initiales  $x(0)$  et  $\hat{x}(0)$  (rappelons que  $x(0)$  est inconnu mais  $\hat{x}(0)$  peut être choisi par l'utilisateur) et pour tout temps positif  $t$

$$\|e(t)\| \leq c\|x(0) - \hat{x}(0)\|e^{-3t}.$$

Il faut noter qu'en présence des bruits  $w$  et  $v$ , la dynamique de l'erreur est :

$$\dot{e} = (A - KC)e(t) + Lw(t) - Kv(t).$$

Cette erreur est donc sensible aux bruits par l'intermédiaire des deux fonctions de transfert

$$(sI - A + KC)^{-1} L$$

et

$$(sI + A - KC)^{-1} K.$$

L'étude du gain fréquentiel permet de quantifier l'influence des bruits sur l'erreur d'observation.

### a.2) Filtre de Kalman

La théorie de l'observation de Kalman nécessite la résolution d'une équation de Riccati [10]. Kalman utilise les propriétés statistiques des bruits  $w$  et  $v$  et propose la structure d'observateur suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad . \quad (1.11)$$

En minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P = E[e(t)e(t)^T]$ , on obtient l'expression du gain de l'observateur :

$$K = PC^T R^{-1}.$$

$P$  est solution de l'équation de Riccati :

$$AP + PAPC^T R^{-1}CP + LQL^T = 0. \quad (1.12)$$

Sous certaines conditions, on peut montrer que la matrice  $P$  tend vers une limite et que le filtre est stable, ce qui permet éventuellement de conserver pour  $K$  sa valeur en régime permanent.

Dans le cas des systèmes linéaires variant avec le temps (systèmes non autonomes), le placement de pôle ne servirait pas, car la matrice varie dans le temps. Une solution au problème d'observabilité pour de tels systèmes linéaires variant avec le temps est donnée par l'observateur de type Kalman étendu. Cette approche consiste en une extension du filtre de Kalman pour les systèmes dynamiques déterministes. Considérons le système linéaire non autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + Bu(t), \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$ .

**Théorème 1.3.5.** *Si le système (1.13) est complètement uniformément observable et si les matrices  $A(t)$  et  $B(t)$  sont bornées, alors le système :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u(t) + PC^T(t)R(t)^{-1}(y - C(t)\hat{x}), \\ \dot{P}(t) = A(t)P + PA^T(t) - PC^T(t)R(t)^{-1}C(t)P + Q(t), \end{cases} \quad (1.14)$$

*est un observateur exponentiel global pour le système (1.13), avec  $P(t_0) = P_0$  une matrice semi-définie positive. Les matrices  $R(t)$  et  $Q(t)$  sont des matrices respectivement définies et semi-définies positives et sont choisies de façon appropriée [26].*

Cependant, les bons résultats obtenus sur les systèmes linéaires ne modélisent qu'une partie très limitée des systèmes existants du milieu pratique industriel. De ce fait, des extensions à des domaines non-linéaires ont été nécessaires, et les travaux de recherche se sont focalisés sur cet aspect.

---

## b) Observateur des systèmes non linéaires

Le fait que beaucoup de systèmes industriels soient non linéaires ou non stationnaires a poussé les chercheurs à orienter leurs recherches vers les observateurs non linéaires. En effet, leur travail est présenté sous forme d'algorithmes qui sont généralement classés en quatre catégories. La première se base sur le filtre de Kalman étendu qui a connu un grand succès qui s'explique par sa simplicité d'implémentation sans tenir compte de la complexité des systèmes non linéaires. L'inconvénient majeur de ce type d'observateur est la difficulté de résoudre l'équation dynamique de Ricatti dont il fait appel, ce qui explique sa stabilité non prouvée ; d'où sa convergence n'est pas prouvée [50] ce qui rend cette méthode inexploitable. La deuxième approche consiste à linéariser la dynamique des erreurs afin de mettre ce système sous une forme où les non linéarités dépendent uniquement des entrées et des sorties mesurables [9, 25, 30, 34, 40, 39, 49, 54, 59, 60]. Cependant, la nécessité de réaliser des transformations d'état complexe limite l'application de cette approche à une classe restreinte de systèmes non linéaires. La troisième approche se base sur l'exploitation des techniques des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) en combinaison avec les équations de Luapynov ou de Ricatti [12, 55]. Plus précisément, le gain de l'observateur est obtenu en résolvant un problème des inégalités matricielles et par suite l'observateur existe si ce système des LMI(s) admet une solution [17, 51]. Comme il est mentionné dans [3], la faisabilité d'un tel problème des LMI(s) est considérée généralement non connue a priori. La quatrième approche est basée sur la conception des observateurs pour une classe canonique observable des systèmes non linéaires. Les premières contributions ont été simultanément dévoilées dans deux publications, à savoir [13] et [21]. Dans [21], les auteurs ont établi une condition nécessaire et suffisante permettant de définir la classe des systèmes affines non linéaires à entrée unique et à sortie unique tout en restant observables pour toutes les entrées possibles. Ils ont démontré que cette catégorie de systèmes peut être transformée de manière difféomorphe en une forme canonique, qui se compose d'une dynamique linéaire fixe associée à une dynamique non linéaire de forme triangulaire. En exploitant cette structure, les auteurs ont élaboré un observateur à grand gain, synthétisé sous l'hypothèse de Lipschitz sur la dynamique non linéaire. Le gain de cet observateur a été déterminé en résolvant explicitement une équation algébrique de Lyapunov. D'autres approches, qui ne se rangent pas dans ces quatre catégories, sont également répertoriées dans les travaux de Fliess et Jaulin [20], tels que mentionnés dans la littérature [47]. Ainsi, pour mieux comprendre, nous allons essayer d'expliquer en détails les trois exemples d'approches.

### b.1) Filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu, voir dans [45], est l'une des techniques d'estimations les plus populaires et les plus largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard aux modèles non linéaires linéarisés par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent pas être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires. En effet, le filtre de Kalman étendu (EKF) est une extension directe du filtre de Kalman standard en remplaçant les matrices d'état et de sortie  $A$ ,  $C$  du système (1.13)

---

par les jacobiens des non-linéarités du système en question.  
Considérons le système non linéaire suivant : [26]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + v(t), \\ y = h(x, u) + w(t). \end{cases} \quad (1.15)$$

L' **EKF** s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + PH(\hat{x}, u)R^{-1}(y - h(\hat{x}, u)), \\ \dot{P} = F(\hat{x}, u)P + PF(\hat{x}, u)^T + Q - PH(\hat{x}, u)^T R^{-1}H(\hat{x}, u)P, \end{cases} \quad (1.16)$$

où

$$F(\hat{x}, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u);$$

$$H(\hat{x}, u) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}, u).$$

## b.2) Méthode de transformation non linéaire

Cette technique consiste à transformer, à l'aide d'un changement de coordonnées, un système non linéaire en un système linéaire modulo une injection de sortie. Une fois qu'un tel changement de coordonnées est obtenu, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger ( par l'injection de sortie ) suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système non linéaire original en utilisant le changement de coordonnées inverse.

L'un des premiers travaux réalisés dans ce domaine est proposé dans [39], où le système autonome de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ y = h(x), \end{cases} \quad (1.17)$$

est transformé par un changement de coordonnées non linéaires  $z = \Phi(x)$ , en un système linéaire sous la forme canonique observable suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_c z + \lambda(y), \\ y = C_c z, \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $A_c$  et  $C_c$  sont sous la forme duale de Brunovsky, c'est-à-dire :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0_{n-1}^T].$$

L'observateur de Luenberger correspondant à (1.18) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y) + K(y - C_c \hat{z}), \quad (1.19)$$

dont la dynamique de l'erreur  $\varepsilon = z - \hat{z}$  est linéaire et s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A_c - KC_c) \varepsilon.$$

Le calcul du gain  $K$  se fait par un placement de pôles [61].

### b.3) Gain élevé

L'observateur à gain élevé a été introduit pour la première fois dans les années 1970 comme une technique novatrice de conception de systèmes de contrôle. Il se caractérise par l'utilisation de gains significativement élevés dans la rétroaction, permettant une estimation rapide et précise des états internes d'un système dynamique.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x), \\ y = h(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

Dans la pratique, on considère un espace physique  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  dans lequel, le problème d'observation est posé ; généralement  $\Omega$  est un compact positivement invariant de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons ensuite la fonction  $\phi$  (assez régulière) définie par

$$\begin{aligned} \phi & : \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(\mathbb{R}^n) \\ \zeta & \mapsto \begin{pmatrix} h(\zeta) \\ L_f h(\zeta) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\zeta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit l'hypothèse suivant :

**Hypothèse 1.** *La fonction  $\phi$  est un difféomorphisme de  $\Omega$  dans  $\phi(\Omega)$*

Supposons que le système (1.20) soit uniformément observable. Puisque  $\phi$  est un difféomorphisme, le système (1.20) peut s'écrire dans  $\Omega$  sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(z_1) \\ g_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ g(z) \end{pmatrix} u \\ = F(z) + G(z)u \\ y = z_1 = Cz \text{ avec } C = (1, 0, \dots, 0) \end{cases}, \quad (1.21)$$

où

$$F(z) = Az + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix}, \quad G(z) = \begin{pmatrix} g_1(z_1) \\ g_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ g(z) \end{pmatrix};$$

avec  $A$  la matrice anti-décalage

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Hypothèse 2.** Les  $g_i$  sont des fonctions  $C^\infty$ , globalement Lipschitziennes et définies par :

$$g_i \quad : \quad \mathbb{R}^i \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad g_i(z_1, z_2, \dots, z_i).$$

**Hypothèse 3.** La fonction  $\varphi$  peut être prolongée de  $\Omega$  à  $\mathbb{R}^n$  en une fonction  $C^\infty$  et globalement Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

Ainsi nous avons le théorème suivant :

**Théorème 1.3.6.** Supposons que le système (1.21) soit uniformément observable et satisfait aux hypothèses (2) et (3), alors [26] :

$$\dot{\hat{z}} = F(\hat{z}) + G(\hat{z}) - S_\theta^{-1}C^T(C(\hat{z}) - y), \quad (1.22)$$

est un observateur pour le système (1.21) autrement dit pour  $\theta$  trop grand on a

$$\|\hat{z}(t) - z(t)\| \leq K_\theta \exp\left(\frac{-\theta t}{3}\right) \|\hat{z}_0 - z_0\|$$

avec  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  et la matrice  $S_\theta(t)$  est obtenue à partir de la résolution de l'équation  $\dot{S}_\theta(t) = 0$  avec

$$\dot{S}_\theta(t) = -\theta S_\theta(t)\theta - A^T S_\theta(t) - \theta S_\theta(t)A + C^T C,$$

ses composantes sont données par :

$$S_{\theta(i,j)} = \frac{1}{\theta^{i+j-1}} S_{1(i,j)} \text{ avec } S_{1(i,j)} = \frac{(-1)^{i+j}(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}.$$

**Preuve :** preuve du théorème (1.3.6) voir [26] [page 16-17].

□

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\Sigma \begin{cases} dx/dt = f(x) + g(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Désignons par  $L_f h$  la dérivée de Lie de  $h$  le long de  $f$ .

Soient les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 4.**  $\Sigma$  est fortement observable pour toute entrée comme défini dans [23] et [21].

**Hypothèse 5.**

$$\Phi(x) = (h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)),$$

est un difféomorphisme et  $\Phi, \Phi^{-1}$  sont globalement Lipschitz.

Cette dernière hypothèse signifie qu'on peut reconstruire formellement l'état du système de dérive sur la base des " $n - 1$ " dérivées de la sortie en effectuant le changement de coordonnées non linéaire  $\Phi$ ,  $\Sigma$  peut être réécrit, selon [23] et [21], comme :

$$\Sigma' \begin{cases} dx/dt = A(x) + a(x) + b(x)u \\ y = x_1 = Cx \end{cases}, \quad (1.24)$$

où  $A_{i,j} = \delta_{i,j+1}$  est une matrice  $n \times n$  et  $a, b$  ont la structure triangulaire inférieure suivante, caractérisant l'observabilité pour toute entrée.

$$a(x) = (a_1(x_1), a_2(x_1, x_2), \dots, a_n(x_1, \dots, x_n)),'$$

et

$$b(x) = (b_1(x_1), b_2(x_1, x_2), \dots, b_n(x_1, \dots, x_n)),'$$

supposons également

**Hypothèse 6.**  $a$  et  $b$  sont globalement Lipschitz.

**Hypothèse 7.**  $u \in U$ , un ensemble compact.

**Théorème 1.3.7.** Sous la base des hypothèses ci-dessus, le système (1.25) suivant est un observateur exponentiel pour  $\Sigma$ .

$$\begin{cases} d\hat{x}/dt = A\hat{x} + a(\hat{x}) + b(\hat{x})u - (\theta k_1, \theta^2 k_2, \dots, \theta^n k_n)' (C\hat{x} - y), \\ \text{avec } K = (k_1, k_2, \dots, k_n)' \text{ choisit tel que } A - KC \text{ soit stable,} \end{cases} \quad (1.25)$$

est un observateur exponentiel

**Preuve** La preuve est une extension de [21]. Précisément, en dénotant  $\varepsilon$  pour l'erreur d'estimation  $\hat{x} - x$  on a  $\exists \Gamma \geq 0$  de sorte que :

$\forall t \geq T, \forall i \in 1, 2, \dots, n,$

$$|\varepsilon_i(t)| \leq B\theta^{i-1} e^{-(\lambda\theta - 2BP(1/\theta))(t-T)/2} L(1/\theta)^{1/2}$$

Où  $P$  et  $L$  sont polynomiaux et  $B, \lambda$  des constantes avec  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon_i$  l'erreur  $P$  dépend des bornes sur le vecteur d'entrée  $u$  et les champs vectoriels  $f, g$  et  $h, L$  dépend de l'erreur initial et  $B$  ne dépend que de la dimension du problème. Puisque pour  $\theta$  suffisamment grand,  $\theta$  est plus grand que  $2BP(1/\theta)$ , on observe clairement la convergence exponentielle de l'observateur.  $\square$

Remarquons que dans les systèmes de coordonnées originaux, cet observateur se réécrit :

$$d\hat{x}/dt = f(\hat{x}) = g(\hat{x})u - \phi^{*-1}(\hat{x})(\theta k_1, \theta^2 k_2, \dots, \theta^n k_n)'(C\hat{x} - y),$$

où  $\phi^*(x)$  est la matrice jacobienne de  $\phi$ .

Toute intégration numérique de cet observateur nécessite l'inversion de la matrice jacobien du changement non linéaire de coordonnées de  $\phi$ .

À partir des expressions ci-dessus, on voit clairement le compromis lors du choix de  $\theta$ . Un grand  $\theta$  assure la convergence rapide.

Considérons  $Q$  une matrice  $n \times n$  symétrique définit positive et  $r > 0$ .

Notons :

$$Q_\theta = \theta^2 \Delta^{-1} Q \Delta^{-1}$$

avec

$$\Delta = \text{diag}(1, 1/\theta, \dots, 1/\theta^n), a^* = da/dt \text{ et } b^* = db/dt$$

Considérons le filtre de Kalman étendu suivant :

$$\begin{cases} d\hat{x}/dt = A\hat{x} + a(\hat{x}) + b(\hat{x})u - S^{-1}C^T r^{-1}(C\hat{x} - y), \\ dS/dt = -SQ_\theta S - (A + a^*(\hat{x}) + b^*(\hat{x})u)'S - S(A + a^*(\hat{x}) + b^*(\hat{x})u) + C^T r^{-1}C. \end{cases} \quad (1.26)$$

**Théorème 1.3.8.** *pour  $\theta$  suffisamment grand, le filtre de kalman étendu (1.26) est un observateur exponentiel pour l'état de  $\Sigma$*

**Preuve** la preuve utilise la fonction de Liapunov  $\varepsilon' S \varepsilon$  :

$$\Gamma = a(\hat{x}) + b(\hat{x})u - a(x) - b(x)u - (a^*(\hat{x}) + b^*(\hat{x})u)\varepsilon,$$

$$\delta(t, \theta) = (1/\theta) \Delta(a^*(\hat{x}) + b^*(\hat{x})u)\Delta^{-1},$$

$$z = \Delta\varepsilon \text{ et } \tilde{S} = \theta\Delta^{-1}S\Delta^{-1}$$

On a

$$d(z'\tilde{S}z)/dt = -\theta z'\tilde{S}Q\tilde{S}z + 2z'\tilde{S}\Delta\Gamma z - \theta(Cz)^2/r, \quad (a)$$

$$d\tilde{S}/dt = \theta \left( -\tilde{S}Q\tilde{S} - (A + \delta(t, \theta))' \tilde{S} - \tilde{S}(A + \delta(t, \theta)) + C'r^{-1}C \right) \quad (b)$$

De plus, par la faible structure triangulaire de  $a$  et  $b$  et leur propriété de Lipschitz globale, nous avons :

$$|z'\tilde{S}\Delta\Gamma| \leq B(\tilde{S})P(1/\theta)z'\tilde{S}z, \quad (1.27)$$

où  $P$  est un polynôme et  $B(\tilde{S})$  le nombre conditionnel de  $\tilde{S}$ , c'est-à-dire la racine carrée du rapport entre les valeurs propres extrêmes de  $S$ .

Ainsi,

$$d(z'\tilde{S}z)/dt = -\theta z'\tilde{S}Q\tilde{S}z + 2B(\tilde{S})P(1/\theta)z'\tilde{S}z \quad (1.28)$$

Maintenant, nous trouvons une borne supérieure pour  $B(\tilde{S})$ .

En posant  $\bar{S}(t) = \tilde{S}(t/\theta)$ , on a

$$d\bar{S}/dt = -\bar{S}Q\bar{S} - (A + \delta(t/\theta, \theta)) + C'r^{-1}C$$

Ainsi, selon les résultats classiques sur la bornitude des solutions de l'équation de Riccati,  $\exists \theta_0 > 0, \exists I > 0, \exists \alpha > 0, \exists \beta > 0$  tel que :

$$\forall \theta \geq \theta_0, \forall t \geq I, \alpha I \leq \bar{S}(t) \leq \beta I$$

Ainsi, en notant  $B$  pour  $(\beta/\alpha)^{1/2}$  on a

$$\forall \theta \geq \theta_0, \forall t \geq T, B(\bar{S}(t)) \leq B$$

De plus, il existe  $\lambda > 0$  indépendant de  $\theta$  tel que  $\lambda \bar{S} \leq \tilde{S}Q\bar{S}$ .

Ainsi  $\forall t \geq T$ ,

$$(z'\bar{S}z)(t) \leq e^{-(\lambda\theta - 2BP(1/\theta))(t-T)} (z'\tilde{S}z)(T)$$

par conséquent,

$$\forall t \geq T, \|z(t)\| \leq B e^{-(\lambda\theta - 2BP(1/\theta))(t-T)/2} \|z(T)\|$$

Enfin  $\forall t \geq T, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$|\varepsilon_i(t)| \leq B\theta^{i-1} e^{-(\lambda\theta - 2BP(1/\theta))(t-T)/2} L(1/\theta)^{1/2}$$

où

$$L(1/\theta) = \epsilon'(T)\Delta^2\epsilon(\Gamma)$$

□

## 1.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons récapitulé divers résultats portant sur la stabilité des points d'équilibre ainsi que sur la conception d'observateurs pour les systèmes continus, tels qu'ils sont évoqués dans la littérature spécialisée. Dans le cadre de notre recherche, nous ferons recours à plusieurs de ces éléments relatifs à la stabilité et à la création d'observateurs, tels qu'exposés au sein de ce chapitre.

# SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS DE MODÈLES BIOLOGIQUES

---

## 2.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons construire un observateur et tester la convergence en faisant des simulations pour le système non linéaire qui modélise l'évolution dynamique d'une récolte de population de poissons [27] et le modèle Droop qui décrit la croissance de cellules phytoplanctoniques soumises à des limitations en nutriments dans un réacteur continu (chemostat) [8].

## 2.2 Synthèse d'observateur pour un modèle de pêche

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t), \\ \dot{X}_1(t) = \alpha X_0(t) - (\alpha_1 + q_1 E) X_1(t), \\ \dot{X}_2(t) = \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

$X_i$  : le nombre de poissons à l'étape  $i$  ;

$\alpha$  : coefficient de vieillissement linéaire (en  $t^{-1}$ ) ;

$\alpha_i = m_i + \alpha$  (en  $t^{-1}$ ) ;

$m_i$  : taux de mortalité naturelle (en  $t^{-1}$ ) ;

$p_0$  : paramètre de compétition juvénile (en  $t^{-1} \cdot \text{nombre}^{-1}$ ) ;

$f_i$  : taux de fécondité de la classe (sans dimension) ;

$l_i$  : efficacité de la reproduction de la classe  $i$  (en  $\text{temps}^{-1}$ ) ;

$p_i$  : taux de prédation de la classe  $i$  sur la classe 0 ( $\text{temps}^{-1} \cdot \text{num}^{-1}$ ) ;

$q_i$  : coefficient de capturabilité de la classe  $i$  (en unité d'effort $^{-1}$ ) ;

$E$  : effort de pêche instantané (en unité d'effort  $\times \text{temps}^{-1}$ ).

La pêche d'une population de poissons peut être comparée à tous les moyens qu'un pêcheur met en œuvre. On peut voir l'effort de pêche comme la somme de la puissance de chaque engin de pêche, multipliée par le temps passé ou le nombre d'opérations réalisées, pour

---

toutes les unités. Au système (2.1) correspond la sortie

$$Y(t) = q_2 E X_2(t)$$

où  $Y(t)$  exprime la prise totale que nous considérons comme pouvant être évaluée. Cette interprétation implique que seule la dernière espèce est présumée être sujette à la pêche, conduisant ainsi à  $q_1 = 0$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \dot{X}_1(t) = \alpha X_0(t) - \alpha_1 X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) = \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \\ Y(t) = q_2 E X_2(t) \end{cases} . \quad (2.2)$$

### 2.2.1 Observabilité du modèle de pêche

Soit  $Y(t) = h(X(t)) = q_2 E X_2(t)$  et la fonction  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , définie par :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} h(X) \\ L_f h(X) \\ L_f^2 h(X) \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$$

et

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \alpha X_0(t) - \alpha_1 X_1(t) \\ \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

où  $L$  représente l'opérateur de dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs  $f$ , et  $h$  est la fonction de sortie. L'observabilité du système (2.2) peut être prouvée en montrant que le jacobien de  $\Phi(x)$  est inversible autrement dit que

$$\det \left( \frac{d\Phi}{dx} \right) \neq 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} h(X(t)) &= q_2 E X_2(t), \\ L_f h(X) &= [f, h] = \nabla h \cdot f; \end{aligned}$$

où "[,]" désigne le crochet de Lie et

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_2 E \end{pmatrix}$$

est le gradient de h donc

$$L_f h(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_2 E \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \alpha X_0(t) - \alpha_1 X_1(t) \\ \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= 0.f_1 + 0.f_2 + q_2 E . \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t)$$

$$= q_2 E [\alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t)].$$

Par analogie on a :

$$L_f^2 h(X) = L_f (L_f h(X)),$$

$$L_f^2 h(X) = \nabla L_f h(X) . f,$$

$$L_f^2 h(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha q_2 E \\ -q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \alpha X_0(t) - \alpha_1 X_1(t) \\ \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \end{pmatrix},$$

$$L_f^2 h(X) = \underbrace{0.f_1}_{=0} + \alpha^2 X_0(t) q_2 E - q_2 E \alpha \alpha_1 X_1(t)$$

$$- \alpha q_2 E X_1(t) (\alpha_2 + q_2 E) - q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 X_2(t)$$

$$= \alpha^2 q_2 E X_0(t) - q_2 E \alpha \alpha_1 X_1(t) - \alpha q_2 E X_1(t) (\alpha_2 + q_2 E) + q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 X_2(t).$$

Ainsi,

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} q_2 E X_2(t) \\ q_2 E [\alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t)] \\ \alpha^2 q_2 E X_0(t) - q_2 E \alpha \alpha_1 X_1(t) - \alpha q_2 E X_1(t) (\alpha_2 + q_2 E) + q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 X_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calcul du Jacobien : } \frac{d\Phi}{dx} = \frac{d}{dX} \begin{pmatrix} h(X) \\ L_f h(X) \\ L_f^2 h(X) \end{pmatrix},$$

avec :

$$h(X(t)) = q_2 E X_2(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dX} = (0 \quad 0 \quad q_2 E)$$

$$L_f h(X) = q_2 E [\alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t)] \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_f h}{dX} = (0 \quad \alpha q_2 E \quad -q_2 E (\alpha_2 + q_2 E))$$

$$L_f^2 h(X) = \alpha^2 q_2 E X_0(t) - q_2 E \alpha \alpha_1 X_1(t) - \alpha q_2 E X_1(t) (\alpha_2 + q_2 E) + q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 X_2(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dL_f^2 h}{dX} = (\alpha^2 q_2 E \quad -\alpha \alpha_1 q_2 E - \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) \quad q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2)$$

$$\text{D'où, } \frac{d\Phi}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 E \\ 0 & \alpha q_2 E & -q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) \\ \alpha^2 q_2 E & -\alpha \alpha_1 q_2 E - \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) & q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant  $\det \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)$  en utilisant la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \underbrace{[0 \cdot \alpha q_2 E \cdot q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2]}_{=0} + \underbrace{[0 \cdot (-q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)) \cdot \alpha^2 q_2 E]}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{[q_2 E \cdot 0 \cdot (-\alpha \alpha_1 q_2 E - \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E))]}_{=0} \\ &= -(\underbrace{[0 \cdot 0 \cdot q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2]}_{=0}) + \underbrace{[0 \cdot (-q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)) \cdot (-\alpha \alpha_1 q_2 E - \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E))]}_{=0} \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{[q_2 E \cdot \alpha q_2 E \cdot \alpha^2 q_2 E]}_{=\alpha^3 q_2^3 E^3}.$$

Ainsi nous avons

$$\text{Det} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right) = -\alpha^3 q_2^3 E^3 \neq 0 \text{ si } E \neq 0.$$

Dans ce cas  $\Phi$  est un difféomorphisme et (2.1) est uniformément observable [21]. Alors dans un nouvel espace de coordonnées  $\mathbb{R}^3$ , défini par la transformation  $\Phi(\mathbb{R}^3)$  notre configuration peut être exprimée dans la forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + \psi(Z) \\ Y = CZ \end{cases}; \quad (2.3)$$

$$\text{où : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = (1 \quad , 0 \quad , 0) \text{ et } \psi(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_f^3(\Phi^{-1}(Z)) \end{pmatrix}.$$

Nous désignons par  $\varphi$  et  $\varphi_1$  les fonctions définies par :

$$\varphi_1(Z) = L_f^3 h(\Phi^{-1}(Z))$$

$$\begin{aligned} &= (-\alpha_0 \alpha q_2 E - \alpha^2 q_2 E \alpha_1 - \alpha^2 q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)) X_0 \\ &+ (\alpha q_2 E f_1 l_1 + \alpha \alpha_1^2 q_2 E + \alpha \alpha_1 q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) + \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2) X_1 \\ &+ (\alpha q_2 E f_2 l_2 - \alpha_1 q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)) X_2 \\ &- \alpha q_2 p_0 E X_0^2 - \alpha q_2 p_1 X_0 X_1 - \alpha q_2 p_2 X_0 X_2. \\ &= \varphi(X). \end{aligned}$$

Il a été prouvé dans [57] qu'il existe un ensemble compact positivement invariant pour le système (2.2). Cet ensemble est de la forme  $D = [a_0, b_0] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , où le nombre  $a_i$  peut être choisi aussi petit que nécessaire et les nombres  $b_i$  sont fonction des paramètres  $f_i$ ,  $l_i$  et  $p_i$ . Plus précisément :

$$\begin{aligned} b_i &= (1 + \nu_i) \pi_i \mu; \\ \text{avec } 0 &= \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < 1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mu = \min_{f_i l_i p_i \neq 0} \frac{f_i l_i}{p_i}, \quad (2.5)$$

où  $\pi$  est la projection sur le domaine  $D$  définie comme suit :

$$\pi(X) = \bar{X},$$

où

$$X \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \bar{X} \in D$$

tel que :

$$\text{Dist}(X, D) = \|X - \bar{X}\|,$$

c'est-à-dire que :

$$\bar{X} \text{ satisfait } \|X - \bar{X}\| = \min_{Y \in D} \|Y - X\|;$$

Avec :

$$\pi_i = \frac{\alpha^i}{\prod_{j=1}^i (\alpha_j + q_j E)}, \quad (2.6)$$

La fonction  $\varphi$  est lisse sur l'ensemble compact  $D$ , d'où il est globalement Lipschitz sur  $D$ . Il peut donc être étendu par  $\tilde{\varphi}$  une fonction de Lipschitz sur  $\mathbb{R}^3$  qui satisfait  $\tilde{\varphi}(X) = \varphi(X)$  pour tout  $X \in D$ . De la même manière, nous définissons  $\tilde{\psi}$  le prolongement lipschitzien de la fonction vectorielle  $\psi$

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varphi}_1(Z) \end{pmatrix};$$

où  $\tilde{\varphi}_1$  est le prolongement de  $\varphi_1$  dans  $\mathbb{R}^3$  i.e

$$\tilde{\varphi}_1(Z) = \varphi_1(Z) = L_f^3 h(\Phi^{-1}(Z)) \text{ pour tout } Z \in D.$$

Nous allons maintenant travailler avec le système suivant (2.7) défini dans l'espace entier  $\mathbb{R}^3$  dont sa restriction au domaine  $D$  est le système (2.3) :

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + \tilde{\psi}(Z), \\ Y = CZ, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{où : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = (1 \quad , 0 \quad , 0) \text{ et } \tilde{\psi}(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varphi}_1(Z) \end{pmatrix}.$$

## 2.2.2 Conception d'un observateur de type Kalman

En considérant les hypothèses suivantes :

$H_1$  :  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $D^\circ$  à  $\Phi(D^\circ)$ . ( $D^\circ$  est l'intérieur de  $D$ ),

$H_2$  :  $\varphi$  peut être étendu de  $D$  à  $\mathbb{R}^3$  par une fonction globalement Lipschitz sur  $\mathbb{R}^3$ , pour  $\theta$  suffisamment grand, le système différentiel suivant (2.8) est un observateur exponentiel pour le système (2.7) voir théorème (1.3.7), (1.3.8)

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_0 = \tilde{f}(\hat{X}) - \frac{1}{r} \left[ \frac{d\Phi}{dX} \right]_{X=\hat{X}}^{-1} \times S^{-1} C^t (h(\hat{X}) - Y), \\ \dot{\hat{S}}_2 = -SQ_\theta S - A^{*t}(\hat{X})S - SA^{*(\hat{X})} + \frac{1}{r} C^T C, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec  $r > 0$ ,  $Q_\theta$  est définie à partir de  $Q$  une matrice symétrique définie positive, en prenant :

$$Q_\theta = \Delta_\theta Q \Delta_\theta \quad (\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \theta^3)).$$

La matrice  $A^*$  peut être calculée analytiquement à partir du difféomorphisme  $\Phi$  :

$$A^*(\hat{X}) = A + \left[ \frac{d\psi}{dZ} \right]_{Z=\Phi(\hat{X})}$$

Voir [15] pour les preuves. Pour notre système, on a :

$$\tilde{\varphi}(X) = \varphi(\Phi(X))$$

donc

$$\frac{d\varphi}{dX} = \left( \frac{d\tilde{\varphi}}{dX} \right) \left( \frac{d\Phi}{dX} \right)^{-1}.$$

Nous calculons maintenant  $A^*$  comme suit :

$$A^*(X) = A + \left( \frac{d\tilde{\varphi}}{dX} \right) \left( \frac{d\Phi}{dX} \right)^{-1},$$

$$\text{avec } \frac{d\tilde{\varphi}}{dX} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\beta_{31} = -\alpha_0 \alpha q_2 E - \alpha^2 \alpha_1 q_2 E - \alpha^2 q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) - 2\alpha q_2 p_0 E X_0 - \alpha q_2 p_1 E X_1 - \alpha q_2 p_2 E X_2,$$

$$\beta_{32} = \alpha q_2 E f_1 l_1 + \alpha q_2 E (\alpha_1 + q_1 E)^2 + \alpha \alpha_1 q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) + \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 - \alpha q_2 p_1 E X_0,$$

$$\beta_{33} = \alpha q_2 E f_2 l_2 + \alpha_1 q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) - \alpha q_2 p_2 E X_0.$$

Finalement on a

$$A^*(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix},$$

avec

$$\gamma_{31} = \beta_{31} \left( \frac{\alpha_1 q_2 E + \alpha_1 \alpha_2}{\alpha^2 q_2 E} \right) + \beta_{32} \left( \frac{\alpha_2 + q_2 E}{\alpha q_2 E} \right) + \frac{\beta_{33}}{q_2 E},$$

$$\gamma_{32} = \beta_{31} \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + q_2 E}{\alpha^2 q_2 E} \right) + \frac{\beta_{32}}{\alpha q_2 E},$$

$$\gamma_{33} = \frac{\beta_{31}}{\alpha^2 q_2 E}.$$

### 2.2.3 Simulations numériques

Dans cette section, nous exposons certains résultats de simulation mettant en évidence l'efficacité de l'observateur développé pour le système (2.2). Nous présentons les performances à l'aide des paramètres de pêche suivants :

$$\alpha_0 = 1, 3; \quad \alpha_1 = 0, 9; \quad \alpha_2 = 0, 85; \quad p_0 = 0, 2; \quad p_1 = 0, 1; \quad p_2 = 0, 1$$

$$q_1 = 0; \quad q_2 = 0, 15; \quad f_1 = 0, 5; \quad f_2 = 0, 5; \quad l_1 = 5; \quad l_2 = 10; \quad E = 1; \quad \alpha = 0, 8.$$

$\theta = 5$ ,  $X(0) = [25; 20; 15]$  et  $\hat{X}(0) = [30; 2; 15]$ . La matrice symétrique  $Q$  définie positive a été choisie  $Q = 3.10^{-5}I$ , avec  $I = \text{diag}(1, 1, 1)$  et  $r = 6, 84$ . Nous étendons le champ de vecteurs  $f$  qui définit le système (2.2) par continuité afin de le rendre globalement lipschitzien sur  $\mathbb{R}^3$  de la manière suivante : Nous notons  $\tilde{f}$  le prolongement de  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$  et la fonction  $\pi$  toujours la projection sur le domaine  $D$  et nous construisons  $\tilde{f} = f \circ \pi$ . La fonction prolongée  $\tilde{f}$  a le même coefficient de lipschitz que  $f$ . En utilisant les mêmes valeurs de paramètres que ci-dessus, nous observons que l'état  $X$  ne converge pas vers l'estimation  $\hat{X}(t)$ ;

Cela est illustré par les figures suivantes obtenues à l'aide du logiciel python :

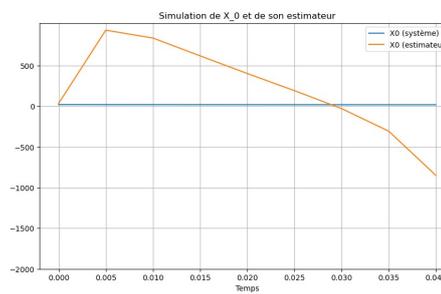


FIGURE 2.1 – Représentation de  $X_0$  et de son estimateur  $\hat{X}_0$  (Cas où  $\phi$  est non prolongé)

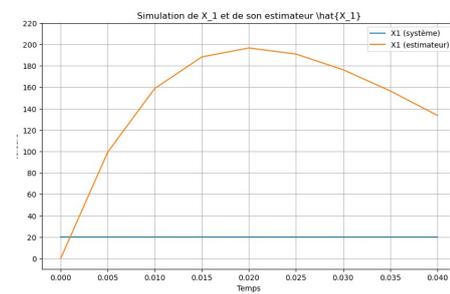


FIGURE 2.2 – Représentation de  $X_1$  et de son estimateur  $\hat{X}_1$  (Cas où  $\phi$  est non prolongé)

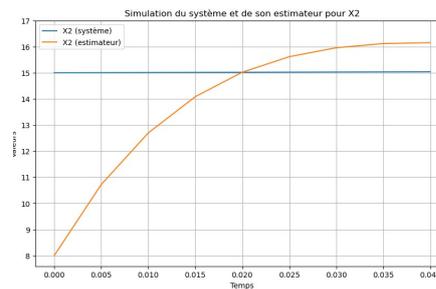


FIGURE 2.3 – Représentation de  $X_2$  et de son estimateur  $\hat{X}_2$  (Cas où  $\phi$  est non prolongé)

Lors de la conception d'un observateur pour estimer l'état interne d'un système dynamique

à partir de mesures externes, il est crucial de garantir que l'observateur converge vers l'état réel du système malgré les perturbations et les erreurs de mesure. Ainsi, pour contourner ce problème de non convergence, nous avons fait d'autres simulations avec les mêmes données mais cette fois-ci en utilisant la prolongation Lipschitz de la fonction  $\varphi$  à l'ensemble de  $\mathbb{R}^3$ , et nous avons obtenu les résultats suivants à l'aide du Logiciel SCILAB :

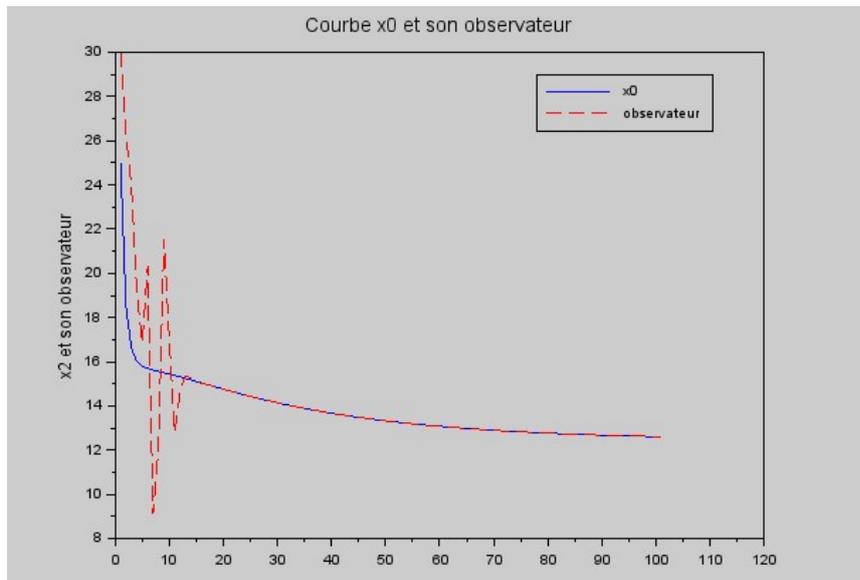


FIGURE 2.4 – Représentation de  $X_0$  et de son estimateur  $\hat{X}_0$  (Cas où  $\phi$  est prolongé)

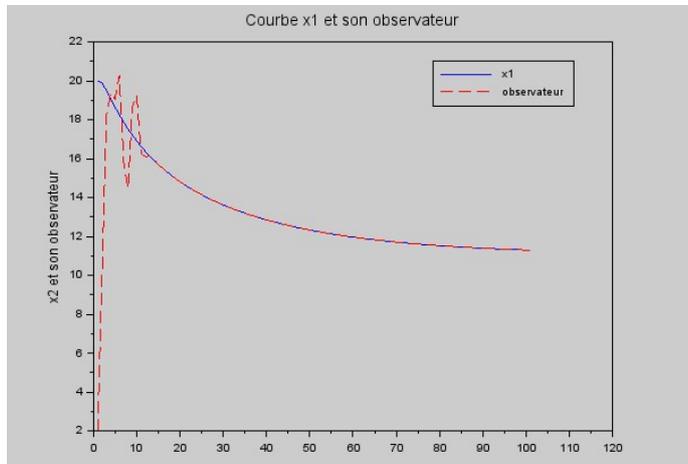


FIGURE 2.5 – Représentation de  $X_1$   
et de son estimateur  $\hat{X}_1$   
(Cas où  $\phi$  est prolongé)

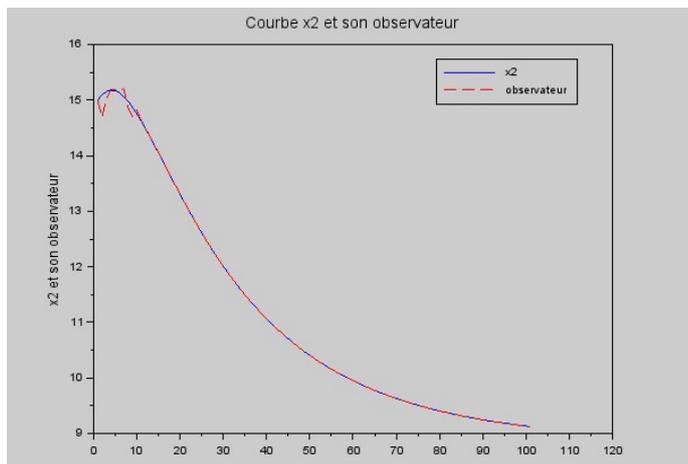


FIGURE 2.6 – Représentation de  $X_2$  et de son estimateur  $\hat{X}_2$   
(Cas où  $\phi$  est prolongé)

Ainsi, nous notons bien une convergence des états estimés vers les états réels. D'où la convergence de l'observateur vers son système.



## 2.3 Conception d'observateur pour le modèle Droop

En parlant des cellules de phytoplancton dans un réacteur continu, on utilise généralement le modèle Droop [8] pour décrire leur comportement. Selon ce modèle, la croissance des cellules est influencée par la concentration d'un nutriment essentiel, noté  $S$ . La biomasse résultante présente une concentration notée  $N$ , tandis que  $Q$  représente le quota cellulaire, indiquant la quantité de nutriments assimilée par unité de biomasse. Le taux de dilution  $D$ , correspond au flux du milieu de renouvellement par rapport au volume du réacteur, et  $D$  sert d'entrée pour le système. Les autres symboles utilisés sont des constantes biologiques ou physiologiques définies dans la référence [11]

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = D[S_i - S(t)] - \rho_m \frac{S(t)N(t)}{K_\rho + S(t)} \\ \dot{N}(t) = \mu_m \left(1 - \frac{K_Q}{Q(t)}\right) N(t) - DN(t) \\ \dot{Q}(t) = \rho_m \frac{S(t)}{K_\rho + S(t)} - \mu_m (Q(t) - K_Q) \end{cases} . \quad (2.9)$$

La biomasse  $N$  exprimée en concentration cellulaire ou en volume cellulaire total peut être mesurée « en ligne ». Le substrat  $S$  est généralement en dessous de la limite de détection des instruments d'analyse. Le quota de cellules  $Q$  ne peut être estimé que par échantillonnage manuel et des mesures coûteuses.

Il faut noter que ce modèle est rangé dans une classe de systèmes nommée  $UMSL_2H$ . En effet, nous allons donner quelques définitions pour avoir une idée sur cette classe de systèmes. Pour ce faire considérons, le système différentiel  $(\Sigma)$  défini sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \\ x(0) = x_0, u \in \mathcal{U} \end{cases} ; \quad (2.10)$$

où  $F$  est une fonction lisse  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h$  la fonction d'observation est également supposée lisse  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

**Définition 2.3.1.** (*Système de Hessenberg inférieur*) :

Nous disons que  $(\Sigma)$  est un système de Hessenberg inférieur (LH) si pour tout  $(x, u) \in \Omega \times U$ , et pour tout indice  $(i, j)$  tel que  $j > (i + 1)$  nous avons :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, u) = 0.$$

**Définition 2.3.2.** (*Système de Hessenberg inférieur strictement lié*) :

Un système  $(\Sigma)$  est un système de Hessenberg inférieur strictement lié ( $SL_2H$ ) s'il est LH et si pour tout  $(x, u) \in \Omega \times U$  et pour tout indice  $i$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_{i+1}}(x, u) \neq 0.$$

**Définition 2.3.3.** (Système  $UMSL_2H$ ) :

Un système  $SL_2H$  ( $\Sigma$ ) est appelé Upper Measured ( $UMSL_2H$ ) si pour tout  $x \in \Omega$  on a  $h(x) = h(x_1)$  avec  $(dh/dx_1)(x_1) \neq 0$ .

**a) Simplifications et recherche du domaine d'étude pertinent**

**a.1) Changement de variable.**

Nous adaptons la variable classique du modèle Droop avec les changements suivants :

$$\bullet x_1 = (\rho_m N / S_i); x_2 = (Q / K_Q); x_3 = (S / S_i);$$

$$\bullet a_1 = (K_\rho / S_i); a_2 = \mu_m; a_3 = (\rho_m / K_Q).$$

Nous notons  $D = D_0 + u$  et le système devient alors :

$$\left( \Sigma'_D \right) \begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ y = h(x_1) \end{cases}, \quad (2.11)$$

avec

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_2 \left( 1 - \frac{1}{x_2} \right) x_1 - D_0 x_1 \\ a_3 \frac{x_3}{a_1 + x_3} - a_2 (x_2 - 1) \\ D_0 (1 - x_3) - \frac{x_1 x_3}{a_1 + x_3} \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix} \text{ et } h(x_1) = x_1.$$

**Proposition 1** Pour un taux de dilution constant  $D$  vérifié

$$0 < D < \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3 + a_1 a_2} \quad (2.12)$$

le modèle possède un équilibre unique, globalement stable dans

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1, 1 \leq x_2, 0 \leq x_3\}$$

**Preuve :** Voir [41] et [7] pour trouver une justification de cette proposition.

**a.2) Domaine d'étude compact positivement invariant .**

Nous choisissons un petit  $\alpha (0 < \alpha < 1)$  et un très petit  $\epsilon (0 < \epsilon < 1 - \alpha)$  tel que le contrôle  $u$  satisfasse pour tout temps positif

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}$$

Avec

$$u_{min} > -D_0$$

$$u_{max} = \min \left( \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3 + a_1 a_2 + \epsilon}, \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} \frac{1 - \alpha - \epsilon}{a_1 + 1 - \alpha - \epsilon} \right) - D_0 \quad (2.13)$$

Nous choisissons également une valeur  $\lambda > 1$  qui permettra d'ajuster la limite supérieure des conditions initiales pour  $x_1$  et  $x_3$

**Proposition 2** Pour les entrées mesurables  $u(\cdot)$  vérifiant  $u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}$ , si nous choisissons  $x(0)$  tel que

$$x(0) \in K_0 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \epsilon a_3 \alpha^{-(D_0 + u_{max}/D_0 + u_{min})} \leq x_1 \leq \lambda \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3}, 1 \leq x_2 \leq 1 + \frac{a_3}{a_2}, 0 \leq x_3 \leq \lambda \right\},$$

alors  $\forall t > 0$  nous avons

$$x(t, x(0)) \in K = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \epsilon \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} \leq x_1 \leq 2\lambda a_3, 1 \leq x_2 \leq 1 + \frac{a_3}{a_2}, 0 \leq x_3 \leq 2\lambda \right\}.$$

Pour la preuve de cette proposition voir [8].

### 2.3.1 Observabilité du modèle Droop

Puisque le système (2.11) est un  $(UMSL_2H)$  donc il est observable d'après le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** *Les systèmes  $UMSL_2H$  sont uniformément observables en entrée.*

c'est une conséquence du théorème 3.2 dans [22] ; donc nous pouvons facilement construire un observateur pour ce modèle.

### 2.3.2 Conception d'observateur à gain élevé

Pour  $\theta$  suffisamment grand, le système différentiel (2.14) est un observateur exponentiel pour (2.11) ( se référer aux théorèmes (1.3.7), (1.3.8) )

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + ug(\hat{x}) - \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}}^{-1} S_\theta^{-1t} C(h(\hat{x}) - y), \quad (2.14)$$

avec  $S_\theta$ , la solution de l'équation  $\theta S_\theta + {}^t A S_\theta + S_\theta A = {}^t C C$  où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = [1, 0, 0]$$

et d'après le théorème (1.3.6),

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \theta^{-1} & -\theta^{-2} & \theta^{-3} \\ -\theta^{-2} & 2\theta^{-3} & -3\theta^{-4} \\ \theta^{-3} & -3\theta^{-4} & 6\theta^{-5} \end{pmatrix},$$

On a :

$$\Phi : x \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ a_2 \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) x_1 - D_0 x_1 \\ x_1 \left( (D_0 - a_2)^2 + \frac{2a_2 D_0 - 3a_2^2}{x_2} + \frac{2a_2^2}{x_2^2} + \frac{a_2 a_3 x_3}{(a_1 + x_3)x_2^2} \right) \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) - D_0 & \frac{a_2 x_1}{x_2^2} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \frac{a_1 a_2 a_3 x_1}{x_2^2 (a_1 + x_3)^2} \end{pmatrix};$$

$$\text{avec } \alpha_{31} = (D_0 - a_2)^2 + \frac{2a_2 D_0 - 3a_2^2}{x_2} + \frac{2a_2^2}{x_2^2} + \frac{a_2 a_3}{x_2^2} \frac{x_3}{a_1 + x_3}$$

$$\text{et } \alpha_{32} = -x_1 \left( \frac{2a_2 D_0 - 3a_2^2}{x_2^2} + \frac{4a_2^2}{x_2^3} + \frac{2a_2 a_3 x_3}{(a_1 + x_3)x_2^3} \right);$$

et l'inverse de  $\frac{d\Phi}{dx}$  est :

$$\left[ \frac{d\Phi}{dx} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{x_2}{x_1} \left(1 - \left(1 - \frac{D_0}{a_2}\right) x_2\right) & \frac{x_2^2}{a_2 x_1} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \frac{(a_1 + x_3)^2 x_2^2}{a_1 a_2 a_3 x_1} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } \beta_{31} = \frac{(a_1 + x_3)^2}{a_1 a_3 x_1} (2a_2 - 4x_2(a_2 - D_0)) + x_2^2 \left( 2a_2 - 3D_0 + \frac{D_0^2}{a_2} + \frac{a_3 x_3}{a_1 + x_3} \left(1 - 2x_2 \left(1 - \frac{D_0}{a_2}\right)\right) \right),$$

$$\text{et } \beta_{32} = \frac{(a_1 + x_3)^2 x_2}{a_1 a_2 a_3 x_1} \left( (2D_0 - 3a_2)x_2 + 4a_2 + 2a_3 \frac{x_3}{a_1 + x_3} \right).$$

### 2.3.3 Simulations numériques

Nous exposons dans cette section quelques résultats de simulation dévoilant la performance de l'observateur développé pour le système (2.11). Nous nous référons aux paramètres de pêche suivants :  $a_1 = 0.02$ ,  $a_2 = 3.64$ ,  $a_3 = 7.21$ ,  $D_0 = 1.76$  ;

Les conditions initiales sont  $x(0) = {}^t(2.23, 2.37, 0.02)$  et  $\hat{x}(0) = {}^t(2.21, 2.64, 0.1)$ .

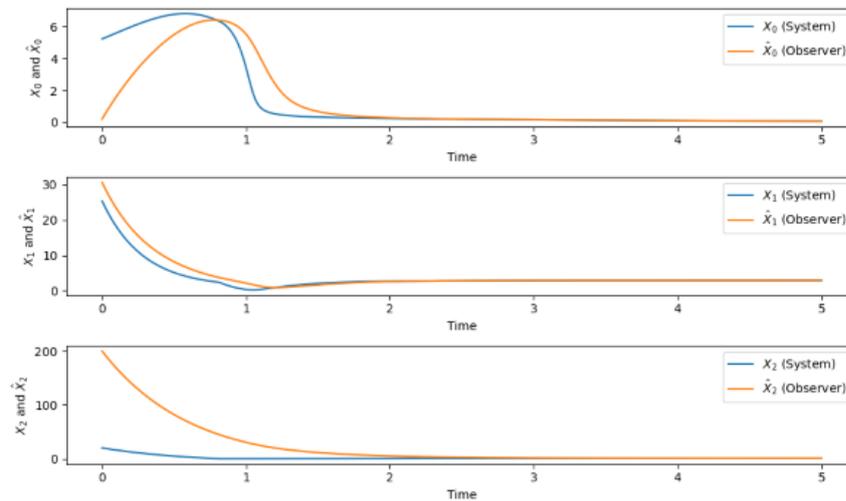


FIGURE 2.7 – Représentation des états  $X_i$  et de leurs estimations  $\hat{X}_i$  ( $i=0,1,2$ )

Ainsi, on voit une convergence sans condition des états estimés vers les états réels.

## 2.4 Conclusion

De ces faits, nous pouvons conclure que la conception d'un observateur et sa convergence vers son système sont des processus spécifiques à chaque système dynamique en raison de la diversité des structures, des comportements et des contraintes qui caractérisent ces systèmes. Chaque système présente des défis uniques qui influencent la manière dont un observateur est conçu et comment il converge vers l'état réel du système.

---

# Conclusion Générale

---

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'état de l'art sur la théorie des observateurs et de ses applications à quelques modèles biologiques. Premièrement, nous avons fait un rappel sur quelques outils mathématiques tels que la stabilité des systèmes dynamiques, la notion d'observabilité et la méthode de synthèse de quelques observateurs classiques, favorisant ainsi une imprégnation et une familiarisation des concepts liés à la théorie de contrôle notamment à l'observation d'état.

Dans le second chapitre, nous avons considéré deux modèles pris respectivement dans [27] et [8] l'un décrit l'évolution dynamique d'une population de poissons soumise à la pêche et l'autre décrit la croissance de cellules phytoplanctoniques soumises à des limitations en nutriments dans un réacteur continu (chemostat). Pour chacun de ces modèles, nous avons construit un observateur et nous avons testé la convergence de l'observateur.

En effet, cette approche nous a permis de comprendre que la conception d'un observateur et sa convergence vers son système sont des processus hautement personnalisés qui exigent une compréhension approfondie des caractéristiques individuelles de chaque système dynamique. L'élaboration de ces observateurs offre des avantages significatifs, tels que la capacité d'estimer avec précision des variables internes telles que la densité de population, le taux de reproduction des poissons, ou le taux de capture dans des conditions expérimentales et environnementales variées. Cette précision dans l'estimation des états internes ouvre des perspectives pour une meilleure prise de décision en matière de gestion des ressources halieutiques, la mise en œuvre de stratégies de pêche plus efficaces, et potentiellement la découverte de nouvelles informations sur le fonctionnement des écosystèmes aquatiques. En résumé, l'application de la synthèse d'observateur à ces modèles biologiques représente une avancée significative, offrant des outils pratiques pour étudier et manipuler des systèmes biologiques complexes, et ouvrant la porte à des développements futurs passionnants dans le domaine de la gestion des ressources halieutiques et de l'écologie aquatique.

---

---

# Bibliographie

---

- [1] Abid, W., Yafia, R., Aziz-Alaoui, M. A., Bouhafa, H., Abichou, A. (2015). Diffusion driven instability and Hopf bifurcation in spatial predator-prey model on a circular domain. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 260, p. 292-313.
  - [2] Albertini, F., D'Alessandro, D. (2002). Observability and forward-backward observability of discrete-time nonlinear systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 15, p. 275-290.
  - [3] Arcak, M., Kokotović, P. (2001). Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, vol. 37, no 12, p. 1923-1930.
  - [4] Bacaër, N. (2008). Verhulst et l'équation logistique en dynamique des populations. p. 24-26
  - [5] Barbot, J. P. Observateur pour le diagnostic. ECS-EA-3649-ENSEA.
  - [6] Beran, E., Grigoriadis, K. M. (1997, June). Computational issues in alternating projection algorithms for fixed-order control design. *In Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)* (Vol. 1, pp. 81-85). IEEE.
  - [7] Bernard, O. et Gouzé, JL (1995). Comportement transitoire des modèles de boucles biologiques avec application au modèle Droop. *Biosciences mathématiques* , vol. 127, n° 1, p. 19-43.
  - [8] Bernard, O., Sallet, G., Sciandra, A. (1998). Nonlinear observers for a class of biological systems : application to validation of a phytoplanktonic growth model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no 8, p. 1056-1065.
  - [9] Bestle, D., Zeitz, M. (1983). Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *International Journal of control*, vol. 38, no 2, p. 419-431.
  - [10] Bouchareb, H. (2021). Observateur non linéaire mode glissant (Doctoral dissertation).
  - [11] Burmaster, DE (1979). La culture continue instable de *Monochrysis lutheri* Droop limitée en phosphate : analyse expérimentale et théorique. *Journal de biologie et d'écologie marines expérimentales*, vol. 39, n° 2, p. 167-186.
  - [12] Choi, HH et Ro, KS (2005). Méthode de conception d'observateurs en mode glissant basée sur LMI. *Actes de l'IEE-Théorie et applications du contrôle* , vol. 152, n° 1, p. 113-115.
  - [13] Ciccarella, G., Dalla Mora, M. et Germani, A. (1993). Un observateur de type Luenberger pour les systèmes non linéaires. *Journal international de contrôle* ,vol. 57, n° 3, p. 537-556.
-

- 
- [14] Damya, C., Karima, A. (2018). Synthèse d'observateurs impulsifs pour les systèmes linéaires continus (Doctoral dissertation, Université Mouloud Mammeri).
- [15] Deza, F., Busvelle, E., Gauthier, JP et Rakotopara, D. (1992). Estimation de gain élevé pour les systèmes non linéaires. *Systèmes et lettres de contrôle*, vol. 18, n° 4, p. 295-299.
- [16] Elaydi, SN et Elaydi, SN (1996). Systèmes d'équations aux différences. *Une introduction aux équations de différence*, p. 113-162.
- [17] Fan, X., Arcak, M. (2003). Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. *Systems, Control Letters*, vol. 50, no 4, p. 319-330.
- [18] Farza, M., Busawon, K., Hammouri, H. (1998). Simple nonlinear observers for on-line estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, vol. 34, no 3, p. 301-318.
- [19] Farza, M., Hammouri, H., Othman, S., Busawon, K. (1997). Nonlinear observers for parameter estimation in bioprocesses. *Chemical Engineering Science*, vol. 52, no 23, p. 4251-4267.
- [20] Fliess, M., Join, C., Sira-Ramirez, H. (2008). Non-linear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 4, no 1, p. 12-27.
- [21] Gauthier, JP, Hammouri, H. et Othman, S. (1992). Un simple observateur pour les applications de systèmes non linéaires aux bioréacteurs. *Transactions IEEE sur le contrôle automatique*, vol. 37, n° 6, p. 875-880.
- [22] Gauthier, J. P., Kupka, I. A. (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM journal on control and optimization*, vol. 32, no 4, p. 975-994.
- [23] Gauthier, J. P., Bornard, G. (1981). Stabilisation des systèmes non-linéaires. In *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique et l'Analyse des Systèmes* (Vol. 1, pp. 307-324). Editions du CNRS Paris.
- [24] Getz, WM et Haight, RG (1989). *Récolte de population : modèles démographiques des ressources halieutiques, forestières et animales* (Vol. 27). Presse universitaire de Princeton.
- [25] Guay, M. (2002). Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no 10, p. 1730-1735.
- [26] Guiro, A. (2009). *Sur quelques problèmes d'observateurs, Applications à certains modèles d'écosystème aquatique* (Doctoral dissertation, Université de Ouagadougou).
- [27] Guiro, A., Iggidr, A., Ngom, D. et Touré, H. (2008). Un observateur non linéaire pour un modèle de pêche. *Volumes des actes de l'IFAC*, vol. 41, n° 2, p. 676-681.
- [28] HAIGHT, W. M. G. R. G. (1988, April). Discrete Nonlinear Harvesting Models and their Application to Forest Stand Management. In *Mathematical Ecology-Proceedings Of The Autumn Course Research Seminars International Ctr For Theoretical Physics* (p. 424). # N/A.
- [29] Hermann, R. et Krener, A. (1977). Contrôlabilité et observabilité non linéaire. *Transactions IEEE sur le contrôle automatique*, vol. 22, n° 5, p. 728-740.
- [30] Hou, M. et Pugh, AC (1999). Observateur avec dynamique d'erreur linéaire pour les systèmes multi-sorties non linéaires. *Systèmes et lettres de contrôle*, vol. 37, n° 1, p. 1-9.
-

- 
- [31] Iggidr, A. (2004). Contrôlabilité, observabilité et stabilité des modèles mathématiques.
- [32] Jaulin, L. (2009). Estimation robuste de l'état d'appartenance à un ensemble ; application à la robotique sous-marine. *Automatique*. vol. 45, no 1, p. 202-206.
- [33] Kalman, RE et Bucy, RS (1961). Nouveaux résultats en théorie du filtrage linéaire et de la prédiction.
- [34] Kazantzis, N. et Kravaris, C. (1998). Conception d'observateurs non linéaires utilisant le théorème auxiliaire de Lyapunov. *Systèmes et lettres de contrôle* , vol. 34, n° 5, p. 241-247.
- [35] Kermack, WO et McKendrick, AG (1933). Contributions à la théorie mathématique des épidémies. III. — Poursuite des études sur le problème de l'endémicité. *Actes de la Royal Society de Londres. Série A, contenant des articles à caractère mathématique et physique* , vol. 141, n° 843, p. 94-122.
- [36] Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1932). Contributions to the mathematical theory of epidemics. II.—The problem of endemicity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character*, vol. 138, no 834, p. 55-83.
- [37] Kermack, WO et McKendrick, AG (1927). Une contribution à la théorie mathématique des épidémies. *Actes de la société royale de Londres. Série A, contenant des articles à caractère mathématique et physique* , vol. 115, n° 772, p. 700-721.
- [38] Khalil, Hong Kong (2002). Contrôle des systèmes non linéaires . Prentice Hall, New York, New York.
- [39] Krener, A. J., Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, vol. 3, no 1, p. 47-52.
- [40] Krener, A. J., Respondek, W. (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 23, no 2, p. 197-216.
- [41] Lange, K. et Oyarzun, FJ (1992). L'attractivité des équations de Droop. *Biosciences mathématiques*, vol. 111, n° 2, p. 261-278.
- [42] Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 16, no 6, p. 596-602.
- [43] Maggiore, M. et Passino, K. (juin 2000). Contrôle par rétroaction de sortie pour les systèmes non linéaires stabilisables et incomplètement observables : théorie. *Dans les actes de la Conférence américaine de contrôle de 2000. ACC (Catégorie IEEE n° 00CH36334)* (Vol. 5, pp. 3641-3645). IEEE.
- [44] Malthus, T. R. (1852). Malthus : essai sur le principe de population. Guillaumin.
- [45] Micheli, G. A. (1988). Cycles post-transitionnels et modèles proie-prédateur. *Cahiers québécois de démographie*, vol. 17, no 2, p. 153-173.
- [46] Ngom, D. (2008). Observation et régulation de certains modèles discrets d'écosystèmes (Doctoral dissertation, Université Gaston Berger de Saint-Louis).
- [47] Oueder, M. (2012). Synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires (Doctoral dissertation, Université de Caen).
- [48] OUSSAMA, L. (2019). Stabilité et stabilisation des équations de réaction : application à des modèles Proie-Prédateur.
-

- 
- [49] Raghavan, S., Hedrick, J. K. (1994). Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, vol. 59, no 2, p. 515-528.
- [50] Raida, Z. (1995). Steering an adaptive antenna array by the simplified Kalman filter. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no 6, p. 627-629.
- [51] Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 43, no 3, p. 397-401.
- [52] Rosenzweig, M. L. (1971). Paradox of enrichment : destabilization of exploitation ecosystems in ecological time. *Science*, vol. 171, no 3969, p. 385-387.
- [53] Sontag, E. D. (1984). A concept of local observability. *Systems & Control Letters*, vol. 5, no 1, p. 41-47.
- [54] Souleiman, I., Glumineau, A., Schreier, G. (2003). Direct transformation of nonlinear systems into state affine miso form for observer design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no 12, p. 2191-2196.
- [55] Tan, C. P., Edwards, C. (2001). An LMI approach for designing sliding mode observers. *International Journal of Control*, vol. 74, no 16, p. 1559-1568.
- [56] Thoma, M., Morari, M. (2001). *Lecture Notes in Control and Information Sciences 272. LECTURE NOTES IN CONTROL AND INFORMATION SCIENCES*.
- [57] Touzeau(1997)Modèles de contrôle en gestion des pêches, University of Nice-Sophia Antipolis, France
- [58] Valdes-Gonzalez, H. M. (2002). *Contribution à l'estimation d'état à horizon glissant par méthodes ensemblistes : applications à la surveillance et détection des dysfonctionnements sur des bioprocédés* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).
- [59] Xia, X. H., Gao, W. B. (1989). Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 27, no 1, p. 199-216.
- [60] Zeitz, Michel(1987)L'observateur Luenberger étendu pour les systèmes non linéaires.*Lettres sur les systèmes et le contrôle*, vol. 9, no 2, p. 149-156.
- [61] Zerrougui, M. (2011). Observation et commande des systemes singuliers non linéaires (Doctoral dissertation, Université Henri Poincaré-Nancy I).
-