

# UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



## UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

### MÉMOIRE DE MASTER

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
MENTION : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS  
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
OPTION : STATISTIQUE

### THÈME :

Estimation du paramètre de forme  $\beta$  dans la distribution de Kumaraswamy à l'aide de la méthode du Maximum de Vraisemblance et de la méthode de Bayes

Présenter par : OMAR PANÉ

Sous la direction de : Pr. EMMANUEL NICOLAS CABRAL

Soutenu publiquement le 09 mars 2024 devant le jury composé de :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Clément MANGA	Professeur Assimilé	Président	UASZ
Alassane DIEDHIOU	Professeur Titulaire	Examineur	UASZ
Mor NDONGO	Maître de Conférences Titulaire	Examineur	UASZ
Emmanuel N. CABRAL	Professeur Assimilé	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2022/2023

---

# Remerciements

---

♡ Grâce à Dieu ♡

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers toutes les personnes qui ont contribué à l'achèvement de ce mémoire de master. Ce travail représente bien plus qu'une simple réalisation académique pour moi ; il incarne une expérience enrichissante et formatrice dont je suis profondément reconnaissant.*

*Tout d'abord, je souhaite exprimer ma sincère gratitude envers mon encadreur, le Professeur Emmanuel Nicolas Cabral, pour son soutien absolu, ses conseils avisés et son expertise précieuse qui ont été d'une importance capitale tout au long de l'élaboration de ce mémoire.*

*Mes sincères remerciements s'adressent également au président du jury, le Professeur Clément Manga, ainsi qu'aux membres du jury, le Professeur Alassane Diédhiou et le Professeur Mor Ndongo, pour avoir généreusement consacré leur temps et leur expertise à l'évaluation minutieuse de ce travail.*

*Je suis infiniment reconnaissant envers ma famille, en particulier mon cher père, Omar, et ma douce mère, Yacine Cissé, ainsi que mes frères bien-aimés Tidiane et Momath, pour leur soutien et leur encouragement constant tout au long de cette aventure académique.*

*Un merci spécial aux anciens (Bamba Seck, Fatou Dieng et ma marraine Dieynaba Samb) qui m'ont précédé dans ce parcours et qui m'ont prodigué leurs précieux conseils et leur expérience.*

*Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude à mes chers camarades de promotion pour leur amitié, leur soutien mutuel et les précieux moments que nous avons partagés tout au long de notre parcours académique. La collaboration de Wassa Touré, Elhadji Baye Camara, Abdourahmane Koné, Adama Pouye, Siaka Diémé, Seydina Mouhamed Mbaye, Salif Diallo et Mariama Diop a rendu cette expérience d'autant plus enrichissante et mémorable.*

*Sincèrement,*

♡..... Omar Pané ♡

---

# Dédicaces

---

♡ **Grâce à Dieu** ♡

**À mes chers parents**, Omar et Yacine Cissé, je dédie ce mémoire avec une reconnaissance infinie pour votre amour inconditionnel. Votre présence et votre soutien ont été mes plus grands atouts dans cette aventure académique.

**À mes frères bien-aimés**, Tidiane et Momath, votre soutien et vos encouragements ont été une source de motivation inestimable. C'est avec gratitude que je vous dédie ce travail.

**À mes amis d'enfance**, Elhadji Ndiaye, Amath Touré, Mamouth Ndao et Sounkorou Touré, je vous adresse ma plus sincère reconnaissance. Votre amitié précieuse a été un réconfort constant dans les moments de doute.

**À mes amis et camarades de promotion**, avec qui j'ai partagé tant de défis et de réussites au cours de cette aventure, spécialement à Souleymane Thiam, Assane Cissé Bitéye, Cheikh Omar Diouf, Idirissa Diouf, Ibrahima Diallo, Diarra Touré, Daouda Ndiaye, Elhadji Omar Dramé, Abdou Diop, Djibril Danso et Médoune Pané, je vous dédie ce mémoire. Votre camaraderie et votre collaboration ont enrichi cette expérience d'apprentissage.

**À mes tuteurs et mentors**, dont les conseils éclairés et le soutien ont été indispensables à mon développement académique. Je suis particulièrement reconnaissant envers Abdoulaye Wane, Elhadji Baba Bitéye, Khady Thiam, Mbaye Bitéye, Ndéye Fatou Bitéye, ainsi qu'à toute la famille Bitéye ici à Ziguinchor, pour leur précieuse contribution. Votre soutien inestimable a joué un rôle essentiel dans mon parcours, et je vous en suis profondément reconnaissant.

**À tous mes amis de l'amicale des étudiants ressortissants de la commune de Wack Ngouna à Ziguinchor**, plus particulièrement à Ibou Faye et Babacar Mbaye, je vous exprime également ma gratitude.

Enfin, je souhaite dédier ce mémoire **à mes chers voisins et amis**, Khady Sané, Marie Térèse Tindeng, Elhadji Fall, Lamine Sané, Sana Badji et Martin Diatta, dont la bienveillance et le soutien ont rendu mon environnement de travail plus agréable.

♡..... **Omar Pané** ♡

---

# Portrait de Poondi Kumaraswamy : Parcours & Contributions

---



Poondi Kumaraswamy, également connu sous le nom de Ponnambalam Kumaraswamy (4 octobre 1930 - 9 mars 1988), était un hydrologue indien de renom. Malgré une formation formelle limitée en génie civil au College of Engineering de Guindy, Université de Madras, il a été élu membre de l'Académie indienne des sciences en 1972. Avant son décès à l'âge de 57 ans, Kumaraswamy a obtenu deux distinctions majeures en recherche en Inde : la bourse Homi Bhabha de 1967 à 1969, axée sur la modélisation des eaux souterraines, et la bourse Jawaharlal Nehru de 1975 à 1977.

Kumaraswamy est également reconnu comme le créateur de la distribution de probabilité à double borne, largement utilisée dans les domaines de l'ingénierie électrique, civile, mécanique et financière. En 1974, il a été honoré de la médaille d'or des géohydrologues indiens pour sa contribution à la première théorie pratique des puits de roche dure.

En tant qu'ingénieur de conception et de construction, il a participé à des projets majeurs tels que la chaufferie de Tiruchirappalli et le projet du port de Tuticorin. Il a également joué un rôle crucial dans la conception hydraulique de nombreux barrages, canaux et autres structures hydrauliques dans le sud de l'Inde.

---

# Résumé

---

Dans cette étude, notre attention s'est portée sur l'estimation du paramètre de forme  $\beta$  dans le modèle de Kumaraswamy à deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , en recourant à la méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) et à la méthode bayésienne. Une comparaison entre les deux méthodes est effectuée en se basant sur l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) issue de chaque estimateur.

Dans la méthode de Bayes, deux fonctions de perte sont utilisées, à savoir la fonction de perte quadratique (SELF) et la Fonction de Perte de Précaution (PLF). Le Risque Postérieur (RP), calculé à partir de ces fonctions de perte, est ensuite comparé.

Cette analyse comparative est appliquée spécifiquement aux données hydrologiques, en mettant l'accent sur les réserves d'eau du réservoir Shasta.

En conclusion, nous évaluerons l'efficacité des deux méthodes par le biais de simulations réalisées avec le logiciel R.

---

# Abstract

---

In this study, we focus on estimating the shape parameter  $\beta$  in Kumaraswamy's two-parameter model  $\alpha$  and  $\beta$ , using the Maximum Likelihood (MV) method and the Bayesian method. A comparison between the two methods is made on the basis of the Mean Squared Error (EQM) derived from each estimator.

In the Bayes method, two loss functions are used : the Square Error Loss Function (SELF) and the Precautionary Loss Function (PLF). The posterior risk (RP), calculated from these loss functions, is then compared.

This comparative analysis is applied specifically to hydrological data, focusing on the water reserves of Shasta Reservoir.

In conclusion, we will evaluate the effectiveness of both methods through simulations performed with R software.

---

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels d'outils mathématiques</b>	<b>4</b>
1.1 Notions de probabilités et statistiques . . . . .	4
1.1.1 Variable aléatoire . . . . .	4
1.1.2 Caractéristiques d'une variable aléatoire . . . . .	4
1.1.3 Échantillon aléatoire . . . . .	6
1.1.4 Caractéristiques d'un échantillon aléatoire . . . . .	6
1.1.5 Modèles Statistiques . . . . .	8
1.2 Quelques distributions de probabilités utiles . . . . .	8
1.2.1 Distribution gamma . . . . .	8
1.2.2 Distribution bêta . . . . .	9
1.3 Méthodes d'estimation des paramètres . . . . .	10
1.3.1 Caractéristiques d'un estimateur . . . . .	10
1.3.2 Méthode des moments . . . . .	11
1.3.3 La méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	12
1.3.4 L'approche bayésienne . . . . .	13
1.4 Méthodes numériques pour la résolution d'équations non linéaires . . . . .	17
1.4.1 Méthode du point fixe . . . . .	18
1.4.2 La méthode de Newton-Raphson . . . . .	18
<b>2 Estimation dans le modèle de Kumaraswamy</b>	<b>19</b>
2.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance (MV) . . . . .	19
2.1.1 Fonction de vraisemblance . . . . .	19
2.1.2 La Log-vraisemblance . . . . .	20
2.1.3 Équations de vraisemblance . . . . .	20
2.2 Estimation bayésienne . . . . .	23
2.2.1 Loi a priori gamma . . . . .	23
2.2.2 Distribution a posteriori en utilisant la loi a priori gamma . . . . .	26
2.2.3 Estimateur bayésien du paramètre de forme $\beta$ sous la fonction de perte quadratique (SELF) . . . . .	28
2.2.4 Estimateur bayésien du paramètre de forme $\beta$ sous la fonction de perte de précaution (PLF) . . . . .	30

---

<b>3 Simulations numériques et Application</b>	<b>31</b>
3.1 Fonctions densité de kumaraswamy . . . . .	31
3.2 Simulations des données . . . . .	32
3.2.1 Résultats . . . . .	32
3.2.2 Interprétation des résultats . . . . .	38
3.3 Application sur des données réelles . . . . .	39
3.3.1 Description des données utilisées . . . . .	39
3.3.2 Étude descriptive des données de capacité du réservoir Shasta . . . . .	39
3.3.3 Application numérique . . . . .	40
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>44</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>
<b>Annexe</b>	<b>47</b>

---

# Table des figures

---

3.1	Variation de la PDF de Kumaraswamy . . . . .	31
3.2	PDF des données de capacité du réservoir Shasta . . . . .	40
3.3	CDF des données de capacité du réservoir Shasta . . . . .	40
3.4	PDF de Kumaraswamy du 1 <sup>er</sup> modèle . . . . .	42
3.5	CDF de Kumaraswamy du 1 <sup>er</sup> modèle . . . . .	42
3.6	PDF de Kumaraswamy du 2 <sup>ème</sup> modèle . . . . .	42
3.7	CDF de Kumaraswamy du 2 <sup>ème</sup> modèle . . . . .	42
3.8	PDF de Kumaraswamy du 3 <sup>ème</sup> modèle . . . . .	43
3.9	CDF de Kumaraswamy du 3 <sup>ème</sup> modèle . . . . .	43

---

# Liste des tableaux

---

1.1	Quelques exemples de lois conjuguées . . . . .	15
3.1	Estimations du paramètre de forme $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 1 <sup>er</sup> cas .	33
3.2	Estimations du paramètre de forme $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 2 <sup>ème</sup> cas	34
3.3	Estimations du paramètre de forme $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 3 <sup>ème</sup> cas	35
3.4	Estimations du paramètre de forme $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 4 <sup>ème</sup> cas	36
3.5	Estimations du paramètre de forme $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 5 <sup>ème</sup> cas	37
3.6	Conclusion de la simulation de l'EQM . . . . .	38
3.7	Conclusion de la simulation du RP . . . . .	38
3.8	Données de capacité du réservoir Shasta pour chaque mois de février 1991 à 2010 . . . . .	39
3.9	Statistiques des données de capacité du réservoir Shasta . . . . .	39
3.10	Estimation et RP du paramètre de forme $\beta$ du modèle Kum( $\alpha, \beta$ ) sur la base des données de capacité du réservoir Shasta pour chaque mois de février 1991 à 2010 . . . . .	41
3.11	p-valeurs des trois modèles de Kumaraswamy . . . . .	43

---

# Abréviations & Notations

---

Les différentes abréviations et notations employées tout au long de ce mémoire sont détaillées ci-dessous :

- ☛ v.a : Variable aléatoire
- ☛ i.e : C'est-à-dire
- ☛ i.i.d : Indépendante et identiquement distribuée.
- ☛  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$  : Loi de Kumaraswamy de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$
- ☛  $\pi(\theta)$  : Loi a priori
- ☛  $\pi(\theta|x)$  : Loi a posteriori
- ☛  $\mathcal{N}$  : Loi normale (ou gaussienne)
- ☛  $\mathcal{B}$  : Loi binomiale
- ☛  $\mathcal{P}$  : Loi de Poisson
- ☛ EQM : Erreur quadratique moyenne
- ☛ RP : Risque a posteriori
- ☛  $\mathbb{V}(X)$  : La variance de la variable aléatoire  $X$
- ☛  $\mathbb{E}(X)$  : L'espérance de la variable aléatoire  $X$
- ☛ MV : Maximum de vraisemblance
- ☛ SELF : Fonction de perte quadratique
- ☛ PLF : Fonction de perte de précaution
- ☛ CDF : Fonction de densité cumulative ou fonction de répartition
- ☛ PDF : Fonction de densité de probabilité
- ☛  $B(., .)$  : Fonction bêta
- ☛  $\Gamma(., .)$  : Fonction gamma
- ☛  $\hat{\beta}_{MV}$  : Estimateur du paramètre de forme  $\beta$  par MV
- ☛  $\hat{\beta}_{SELF}$  : Estimateur bayésien du paramètre de forme  $\beta$  sous SELF
- ☛  $\hat{\beta}_{PLF}$  : Estimateur bayésien du paramètre de forme  $\beta$  sous PLF

---

# Introduction

---

Une grande partie des mathématiques appliquées consiste, d'une certaine façon, à faire de la modélisation, i.e à définir un (ou plusieurs) modèle(s), de nature mathématique, permettant de rendre compte, d'une manière suffisamment générale, d'un phénomène donné, qu'il soit physique, biologique, économique, hydrologique ou autre (voir [1]).

L'analyse des processus hydriques dans la nature repose fréquemment sur la modélisation statistique des données hydrologiques. Ces données sont généralement définies par leur distribution de probabilité, permettant ainsi l'évaluation de la probabilité associée à diverses valeurs de débits ou de niveaux d'eau en se basant sur les caractéristiques statistiques des observations recueillies.

Malgré l'utilisation répandue des fonctions de probabilités en hydrologie, notamment la distribution gaussienne, la distribution normale, la distribution log-normale, la distribution bêta, la distribution gamma, et la distribution de Gumbel, des recherches ont démontré que ces distributions classiques, ainsi que les distributions empiriques telles que la distribution de Johnson et la distribution polynomiale-transformée-normale, etc., ne parviennent pas à fournir une représentation précise des v.a hydrologiques telles que les précipitations journalières, le débit quotidien des cours d'eau, etc. (voir [15]).

Pour remédier à cette limitation, l'hydrologue indien Poondi Kumaraswamy (1930-1988) a introduit une nouvelle distribution conçue pour les processus aléatoires à double limite, spécifiquement adaptée aux applications hydrologiques, et elle est aujourd'hui connue sous le nom de distribution de Kumaraswamy.

Cette dernière est une loi de probabilité continue qui s'étend sur l'intervalle  $]0, 1[$ . Elle présente de nombreuses similarités avec la distribution bêta, ce qui lui permet d'adopter diverses formes et d'être adaptée à la modélisation de nombreuses sources d'incertitude et de processus aléatoires.

Dans sa forme générale, la fonction de densité de probabilité (PDF) de cette distribution, telle qu'introduite par Kumaraswamy dans son article de 1980, peut être exprimée de la manière suivante (voir par exemple [19]) :

$$f_Z(z) = \frac{1}{z_{max} - z_{min}} \alpha \beta \left( \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}} \right)^{\alpha-1} \left[ 1 - \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}} \right]^{\beta-1} \quad (1)$$

où  $Z$  est une v.a à n'importe quelle donnée hydrologique. Cette variable est caractérisée par des paramètres de frontières, à savoir  $z_{min}$  et  $z_{max}$ , ainsi que des paramètres de forme,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

Nous désignerons cette formule générale de la distribution par  $\text{Kum}(\alpha, \beta, z_{min}, z_{max})$ .

En procédant à la transformation  $X = \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}}$  et en faisant usage du théorème de changement de variable, nous parvenons à obtenir la forme standard de la PDF de Kumaraswamy :

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1. \quad (2)$$

Nous utiliserons la notation  $\text{Kum}(\alpha, \beta, 0, 1)$  ou simplement  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$  pour faire référence à cette distribution.

La fonction de distribution cumulative (CDF) de la v.a  $X \sim \text{Kum}(\alpha, \beta)$  est calculée de la manière suivante :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t; \alpha, \beta) dt = 1 - (1 - x^\alpha)^\beta, \quad 0 < x < 1. \quad (3)$$

À partir de l'équation précédente, il est évident que la fonction quantile  $F^{-1}$  est également exprimée de manière analytique :

$$F_X^{-1}(u) = [1 - (1 - u)^{\frac{1}{\beta}}]^\frac{1}{\alpha}, \quad 0 < u < 1. \quad (4)$$

En particulier, l'expression de la médiane dans le cadre de la distribution de Kumaraswamy peut s'écrire comme suit :

$$md(X) = (1 - 0.5^{\frac{1}{\beta}})^\frac{1}{\alpha}. \quad (5)$$

Lorsque la v.a  $X \sim \text{Kum}(\alpha, \beta)$  est distribuée, ses moments par rapport à l'origine, ou moments non centrés peuvent être formulés de la manière suivante :

$$\mu'_k = \beta B(1 + \frac{k}{\alpha}, \beta). \quad (6)$$

Ainsi, l'espérance et la variance de  $X$  sont :

$$\mathbb{E}[X] = \mu'_1 = \beta B(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta); \quad (7)$$

$$\mathbb{V}(X) = \mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = \beta B(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta) - \left[ \beta B(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta) \right]^2. \quad (8)$$

En raison de sa simplicité, caractérisée par la forme élémentaire de sa PDF (2) et de sa CDF (3), la distribution de Kumaraswamy se révèle nettement plus appropriée que la distribution bêta pour des activités intensives en calcul, notamment dans le domaine de l'estimation de modèles par des méthodes basées sur la simulation (voir [19]).

À cet égard, diverses méthodes d'estimation peuvent être mises en œuvre pour évaluer les paramètres du modèle  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$ . Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode des moindres carrés, la méthode des moments, la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode de Bayes, chacune comportant ses avantages et ses limites.

Le choix de la méthode d'estimation dépendra des spécificités de l'étude et des caractéristiques statistiques de l'échantillon.

Dans ce mémoire, notre objectif est d'aborder la problématique de l'estimation du paramètre de forme  $\beta$  au sein de la distribution de Kumaraswamy, en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode de Bayes.

La structure de ce document repose sur trois chapitres distincts :

- Le premier chapitre se focalisera sur la récapitulation des concepts fondamentaux de la modélisation statistique paramétrique que nous considérons comme essentiels pour la suite de notre travail.
- Dans le deuxième chapitre, nous nous pencherons sur l'examen de l'estimateur du maximum de vraisemblance et des estimateurs bayésiens sous différentes fonctions de perte, notamment la fonction de perte quadratique (SELF) et la fonction de perte de précaution (PLF).
- Enfin, le troisième et dernier chapitre, clôturera notre étude en proposant une analyse comparative des performances de ces estimateurs, en mettant en lumière leur précision, leur efficacité et leur robustesse.

# RAPPELS D'OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous couvrons des concepts fondamentaux qui ont été utilisés dans notre étude. Pour commencer, nous présentons une synthèse succincte des concepts liés aux probabilités et aux statistiques. Ensuite, nous évoquons certaines distributions de probabilités pertinentes dans le contexte de l'estimation du modèle Kum( $\alpha, \beta$ ). Par la suite, nous explorons diverses approches d'estimation et pour conclure, nous examinons quelques méthodes numériques qui se révèlent être des ressources inestimables pour le processus d'estimation.

## 1.1 Notions de probabilités et statistiques

### 1.1.1 Variable aléatoire

**Définition 1.1.1.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X(\Omega), \mathcal{E})$  un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire (v.a) toute application mesurable, notée  $X$ , de  $\Omega$  vers  $X(\Omega)$  :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{E}.$$

Selon  $X(\Omega)$ , on peut distinguer deux types de v.a :

- ① **v.a discrète** : si  $X(\Omega)$  est un ensemble fini ou dénombrable.
- ② **v.a continue** : si  $X(\Omega)$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non dénombrable.

### 1.1.2 Caractéristiques d'une variable aléatoire

#### Fonction de répartition

La fonction de répartition ou fonction de densité cumulative (CDF) est un outils permettant de caractériser de façon unifiée les lois des v.a réelles.

**Définition 1.1.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X$  une v.a réelle définie sur cet espace. On appelle CDF de  $X$  la fonction :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longrightarrow F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

**Proposition 1.1.3.** La CDF  $F_X$  ainsi définie vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
3.  $F_X$  est croissante (donc avec limite à gauche) et continue à droite ;
4. si  $X$  est continue alors  $F_X$  est continue ;
5. si  $X$  est discrète alors  $F_X$  est en escalier (constante par morceaux).

### Densité de probabilité

**Définition 1.1.4.** Soit  $X$  une v.a à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de CDF  $F_X$ . S'il existe une fonction numérique  $f$  d'une variable réelle, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

on dit que  $f$  est la fonction densité de probabilité (PDF) de  $X$  et on la note  $f_X$ . On dit également que  $X$  est une v.a à densité, ou de distribution absolument continue.

**Propriété 1.1.5.** Soit  $X$  une v.a réelle et  $f_X$  sa PDF, alors :

1.  $f_X \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  ;
2.  $f_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en nombre fini de points ;
3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ .

### Espérance mathématique

**Définition 1.1.6.** On définit l'espérance mathématique (ou simplement la moyenne) d'une fonction  $g(X)$  d'une v.a  $X$  par

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x_i \in X(\Omega)} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

**Propriété 1.1.7.**

1.  $\mathbb{E}[c] = c$  pour toute constante réelle  $c$ .
2.  $\mathbb{E}[c_1 g(X) + c_0] = c_1 \mathbb{E}[g(X)] + c_0$  pour toutes constantes réelles  $c_1$  et  $c_0$ .

**Définition 1.1.8.** La moyenne d'une v.a  $X$  est donnée par

$$\mu_X \equiv \mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

## Variance et l'écart-type

$\mathbb{V}[X]$  représente la variance de  $X$  telle que :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

### Propriété 1.1.9.

1.  $\mathbb{V}[c] = 0$  pour toute constante réelle  $c$ .
2.  $\mathbb{V}[c_1g(X) + c_0] = c_1^2\mathbb{V}[g(X)]$  pour toutes constantes réelles  $c_1$  et  $c_0$ .

L'écart-type  $\sigma_X$ , soit la racine carrée de la variance, est une mesure de la v.a et peut être vu comme une mesure de risque (ou erreur).

## Moments

**Définition 1.1.10.** Le moment d'ordre  $k$  (ou  $k^e$  moment) d'une v.a  $X$  par rapport à un point  $a$  est défini par

$$\mathbb{E}[(X - a)^k] = \begin{cases} \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - a)^k \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^k f_X(x) dx & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

On distingue des cas particuliers de moments :

- Les moments par rapport à l'origine, ou moments non centrés, de  $X$  sont :

$$\mathbb{E}[X^k] \equiv \mu'_k = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^k \mathbb{P}(X = x_i) \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

On a  $\mu'_0 = 1$  et  $\mu'_1 = \mu_X = \mathbb{E}[X]$ .

- Les moments par rapport à la moyenne, ou moments centrés, de  $X$  sont :

$$\mathbb{E}[(X - \mu_X)^k] \equiv \mu_k = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - \mu_X)^k \mathbb{P}(X = x_i) \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^k f_X(x) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

On a  $\mu_0 = 1$ ,  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 = \sigma_X^2$ .

### 1.1.3 Échantillon aléatoire

Un échantillon aléatoire d'effectif  $n \geq 1$  d'une v.a  $X$  est un ensemble  $X_1, \dots, X_n$  de v.a indépendantes et dont la distribution est identique à celle de  $X$ .

### 1.1.4 Caractéristiques d'un échantillon aléatoire

#### Statistique de l'échantillon

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon, on appelle statistique toute v.a  $T_n = h(X_1, \dots, X_n)$ , fonction de  $X_1, \dots, X_n$ .

### Moyenne empirique

Par définition la moyenne empirique d'un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  est la statistique suivante :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Puisque les variables de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  ont la même loi que  $X$ , alors

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X] \quad \forall i.$$

**Propriété 1.1.11.** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une loi parente  $X$  alors :

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \mathbb{V}[X].$$

### Variance empirique

On appelle variance empirique de l'échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  la statistique suivante :

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

**Propriété 1.1.12.** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon aléatoire d'une loi parente  $X$  alors :

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{(n-1)}{n} \mathbb{V}[X].$$

Il est à noter que la variance empirique corrigée de l'échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  est définie par :

$$S_n'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2.$$

### Fonction de répartition empirique

On considère un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  d'une v.a  $X$ . On note  $F_X$  la CDF de  $X$ , i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x).$$

**Définition 1.1.13.** La fonction de répartition empirique associée à cet échantillon est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longrightarrow F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}}. \end{aligned}$$

## 1.1.5 Modèles Statistiques

### Définitions

**Définition 1.1.14.** On appelle modèle statistique (m.s) tout triplet  $(E, \mathcal{E}, \mathbf{P})$  où  $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable et  $\mathbf{P}$  est une famille de lois de probabilité sur  $(E, \mathcal{E})$ .

Lorsqu'on considère une v.a  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathcal{A})$  où  $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$  est un espace mesurable quelconque, alors l'ensemble  $\mathfrak{X}$  est appelé espace des observations ou des réalisations. Définir un m.s revient à considérer une famille  $\mathbf{P}$  de lois de probabilité sur  $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$  et à supposer que la vraie loi de  $X$  (représentée par les données observées) est dans cette famille.

**Définition 1.1.15.** On appelle m.s induit par une v.a  $X$  la donnée du triplet  $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  où :

- $\mathfrak{X}$  est l'espace des observations,
- $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ ,
- $\mathbf{P}$  est une famille de lois de probabilité sur  $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ .

### Remarque 1.1.16.

- ❶ Si la famille  $\mathbf{P}$  est indexée par un paramètre  $\theta \in \Theta$  ; i.e,  $\mathbf{P} = \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ , on dit que le modèle est paramétré, noté  $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta})$ .  $\Theta$  est l'espace des paramètres.
- ❷ Si le paramètre  $\theta$  est dans un espace de dimension finie, par exemple  $\theta \in \mathbb{R}^d, d \geq 1$ , alors le modèle est dit paramétrique. Dans le cas contraire, le modèle est non-paramétrique.

## 1.2 Quelques distributions de probabilités utiles

Dans cette section, nous présentons certaines distributions de probabilités spéciales (voir [6] ou [23]), ces distributions jouent un rôle très important dans l'estimation du modèle Kum( $\alpha, \beta$ ).

### 1.2.1 Distribution gamma

La loi gamma est très utilisée dans l'approche bayésienne, elle est la conjuguée naturelle de la loi exponentielle. Dans notre étude, elle sera utilisée comme loi préalable conjuguée du paramètre en question. Nous décrivons la fonction gamma avant de présenter la distribution de probabilité gamma. La fonction gamma désignée par  $\Gamma(\cdot)$ , est définie comme suit :

$$\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Elle satisfait aux relations suivantes :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$
2.  $\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$
3. En particulier,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

**Définition 1.2.1.** On dit qu'une v.a.  $X$  suit la loi gamma de paramètres  $\alpha > 0$  et  $\beta^{-1} > 0$  si sa densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On note  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ .

**Proposition 1.2.2.** Soit  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ . On a :

$$\mathbb{E}[X] = \alpha\beta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = \alpha\beta^2.$$

En outre, sa fonction génératrice des moments est donnée par :

$$L_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}, \quad \text{si } t < \frac{1}{\beta}.$$

**Remarque 1.2.3.** La CDF de cette loi n'a pas de forme explicite agréable et nécessite l'utilisation de tables gamma ou d'un logiciel de calculs.

## 1.2.2 Distribution bêta

C'est une loi très générale dont la distribution peut présenter des formes symétriques ou asymétriques très diverses. Cette loi est fréquemment utilisée dans la démarche bayésienne.

**Définition 1.2.4.** On dit qu'une v.a.  $X$  suit la loi bêta de paramètres  $\alpha, \beta > 0$  si sa densité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbb{1}_{0 < x < 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où  $B(., .)$  désigne la fonction bêta :

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

On note alors  $X \sim B(\alpha, \beta)$ .

**Proposition 1.2.5.** Soit  $X \sim B(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

On a :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

**Proposition 1.2.6.** Soient  $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$  et  $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$  deux v.a. indépendantes.

Alors,

1.  $X/(X + Y) \sim B(\alpha, \beta)$  ;
2.  $X/(X + Y)$  et  $X + Y$  sont indépendantes.

## 1.3 Méthodes d'estimation des paramètres

On considère un m.s paramétré  $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta \in \Theta})$  induit par une v.a  $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$ . On suppose que l'espace des paramètres  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ .

L'objectif de l'estimation paramétrique est de trouver, à partir des observations de la variable  $X$ , une valeur "raisonnable" pour le paramètre  $\theta$  ou pour toute autre fonction du paramètre  $\theta$  (se référer à [5]).

Naturellement, l'estimation du ou des paramètres inconnus doit être aussi précise que possible. Les trois grands types d'estimation paramétrique sont :

- **l'estimation ponctuelle** : on estime directement par un ou des réels le ou les paramètres inconnus,
- **l'estimation par intervalles de confiance** : on détermine des intervalles de réels, les moins étendus possible, qui ont de fortes chances de contenir un paramètre inconnu,
- **les tests statistiques** : démarches qui consistent à accepter ou non une hypothèse mettant en jeu un ou plusieurs paramètres inconnus, avec un faible risque de se tromper.

Dans ce travail, nous nous intéressons quasiment à des estimations ponctuelles.

Avant de présenter ces méthodes d'estimation, nous allons donner au préalable quelques définitions et propriétés liées à l'estimation statistique.

**Définition 1.3.1.** Soit  $X$  une v.a de loi dépendant d'un paramètre  $\theta$  et  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon extrait de  $X$ . On appelle estimateur du paramètre  $\theta$  toute statistique  $T_n$  à valeurs dans l'espace des paramètres  $\Theta$ , i.e  $T_n : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$  est une application mesurable et indépendante de  $\theta$ .

### 1.3.1 Caractéristiques d'un estimateur

Le choix d'un estimateur va reposer sur ses qualités. Le premier défaut possible concerne la possibilité de comporter un biais.

#### Biais d'un estimateur

Le biais de  $T_n$  se définit par  $biais(\theta) = \mathbb{E}[T_n] - \theta$ . Lorsque  $biais(\theta) = 0$ , i.e si  $\mathbb{E}[T_n] = \theta$ , on dit que l'estimateur est sans biais (ou non biaisé)

#### Estimateur convergent

Un estimateur  $T_n$ , de  $\theta$  est consistant (ou convergent) si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|T_n - \theta| > \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

#### Estimateur asymptotiquement sans biais

Un estimateur  $T_n$  est asymptotiquement sans biais pour  $\theta$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[T_n] = \theta$ .

**Propriété 1.3.2.** Si un estimateur est sans biais et que sa variance tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, alors cet estimateur est convergent.

### Erreur (ou écart) quadratique moyen

Si  $T_n$  est un estimateur de  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous mesurons la précision de  $T_n$  par l'erreur quadratique moyen, notée EQM :

$$EQM(T_n) = \mathbb{E}[(T_n - \theta)^2] = \text{biais}(\theta)^2 + \mathbb{V}(T_n).$$

**Remarque 1.3.3.** Si  $T_n$  est un estimateur sans biais, i.e si  $\text{biais}(\theta) = 0$ , alors :

$$EQM(T_n) = \mathbb{V}(T_n).$$

**Propriété 1.3.4.** Entre deux estimateurs de  $\theta$ , nous choisissons celui dont l'EQM est le plus faible.

### Estimateur préférable

On dit qu'un estimateur  $T_n^1$  est préférable à un estimateur  $T_n^2$  si pour tout  $\theta \in \Theta$  :

$$EQM(T_n^1) \leq EQM(T_n^2), \text{ l'inégalité étant stricte pour au moins une valeur de } \theta.$$

### Estimateur admissible

Un estimateur  $T_n$  est dit admissible, lorsqu'il n'existe pas d'estimateur qui lui soit préférable.

## 1.3.2 Méthode des moments

La méthode des moments a en premier lieu été discutée par Karl Pearson en 1894. Elle a été généralisée par Lars Peter Hansen en 1982, méthode généralisée des moments ou GMM (voir [4]).

Bien que cette méthode ne soit pas toujours satisfaisante, nous l'introduisons dès maintenant en raison de son côté intuitif. Elle nous servira ainsi, dans le chapitre suivant, à illustrer les propriétés générales des estimateurs.

L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc.

Soit l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d, d'une v.a  $X$  et la loi de probabilité de  $X$  dépend d'un paramètre  $\theta$ .

### Principe de la méthode

Supposons qu'il existe une fonction  $h$  bijective et continue de  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  vers  $h(\Theta) \subset \mathbb{R}^d$  une fonction mesurable  $\varphi$  de  $\mathbb{E}$  vers  $\mathbb{R}^d$  telle que  $\mathbb{E}_\theta[\varphi(X)]$  existe et toutes les deux telles que l'on ait :

$$h(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\varphi(X)], \quad \forall \theta \in \Theta.$$

La méthode des moments (voir [7]) consiste alors à estimer  $\theta$  par

$$\hat{\theta}_n = h^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i) \right).$$

### 1.3.3 La méthode du maximum de vraisemblance

Nous allons à présent présenter une méthode cruciale pour obtenir des estimateurs de paramètres, introduite par le généticien et statisticien Sir Ronald A. Fisher vers 1922 (voir [21]) : la méthode du maximum de vraisemblance (MV) (se référer par exemple à [5], [9], [2] ou [16]). Bien que la méthode des moments soit intuitive et facile à appliquer, elle ne fournit généralement pas d'estimateurs "optimaux".

La méthode du MV est particulièrement attrayante d'un point de vue intuitif, car elle vise à déterminer les valeurs des véritables paramètres qui ont le plus probablement donné lieu aux données que nous avons observées.

Pour la plupart des situations pratiques, les performances des estimateurs obtenus par cette méthode sont optimales lorsque les données sont abondantes. Il s'agit ainsi d'une des approches les plus polyvalentes pour ajuster des modèles statistiques paramétriques aux données.

Nous définissons tout d'abord le concept de fonction de vraisemblance.

**Définition 1.3.5.** On appelle fonction de vraisemblance de  $\theta$  pour une réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  d'un  $n$ -échantillon issu d'une v.a  $X$ , la fonction de  $\theta$  :

$$L_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta).$$

La fonction de vraisemblance n'est intéressante que si  $\theta$  et  $x_i$  vérifient  $f_X(x_i; \theta) \neq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Définition 1.3.6.** On appelle estimateur du MV de  $\theta$  pour  $(x_1, \dots, x_n)$  un réel  $\hat{\theta}_{MV}$  qui maximise la fonction de vraisemblance  $L_n(x_1, \dots, x_n; \theta)$  en  $\theta$ , i.e pour tout  $\theta$ ,

$$L_n(x_1, \dots, x_n; \theta) \leq L_n(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_{MV}).$$

Une expression alternative est :

$$\hat{\theta}_{MV} \in \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(x_1, \dots, x_n; \theta),$$

où  $\arg \max$  désigne l'argument du maximum qui est l'ensemble des points en lesquels une expression atteint sa valeur maximale.

**Remarque 1.3.7.**  $\hat{\theta}_{MV}$  est un estimateur ponctuel de  $\theta$  puis qu'il dépend de  $x_1, \dots, x_n$ . Un tel estimateur n'existe pas toujours et peut ne pas être unique.

**Définition 1.3.8.** On appelle fonction de log-vraisemblance pour  $(x_1, \dots, x_n)$  la fonction de  $\theta$  définie par :

$$\mathcal{L}_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \ln(L_n(x_1, \dots, x_n; \theta)).$$

Elle n'a de sens que si  $\theta$  vérifie :  $L_n(x_1, \dots, x_n; \theta) > 0$ .

La fonction logarithme népérien étant croissante l'estimateur  $\hat{\theta}_{MV}$  de  $\theta$  vérifie :

$$\hat{\theta}_{MV} \in \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \arg \max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}_n(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

**Définition 1.3.9.** On appelle équation de vraisemblance l'équation en  $\theta$  :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = 0.$$

**Remarque 1.3.10.** On peut avoir  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ .

Dans ce cas, on peut dériver  $\mathcal{L}_n(x_1, \dots, x_n; \theta)$  par rapport aux  $m$  paramètres, poser que  $\frac{\partial}{\partial \theta_m} \mathcal{L}_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$  et essayer de résoudre le système d'équations obtenu.

Il est fréquent que le système des équations de vraisemblance n'ait pas de solution explicite. Dans ce cas, on le résoud par des méthodes numériques, notamment l'algorithme du point fixe, de Newton-Raphson et l'algorithme de Gauss-Newton.

### 1.3.4 L'approche bayésienne

Nous abordons ici l'approche bayésienne (décrite par exemple dans [8], [10], [12], [14] ou [22]) qui relève d'une philosophie particulière de la statistique. D'une façon générale on qualifie ainsi toute approche qui confère à tout paramètre inconnu un statut de v.a en stipulant pour celui-ci une distribution sur  $\Theta$  appelée loi a priori. Cette loi peut résulter de la connaissance que l'on peut avoir acquise antérieurement sur le phénomène ou être un simple artifice permettant de mener à bien les calculs. En général on tendra à utiliser une loi a priori à laquelle le résultat final sera relativement peu sensible. L'espace paramétrique étant généralement continu définissons cette loi par une densité, notée  $\pi(\theta)$ .

Dans ce cadre,  $f_X(x; \theta)$  doit être considérée maintenant comme une densité (ou fonction de probabilité) conditionnelle pour la v.a.  $X$  étudiée, étant donné une valeur fixée du paramètre  $\theta$  (il serait donc approprié de l'écrire  $f(x|\theta)$ ). En suivant la formule de Bayes qui permet de passer de la loi de probabilité d'un événement A sachant B à la probabilité de B sachant A selon :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)},$$

on définit la loi a posteriori de  $\theta$ , i.e après avoir pris connaissance des réalisations  $(x_1, \dots, x_n)$  de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ . Ci-après le vecteur des réalisations sera noté  $x$  et l'échantillon sera noté  $X$ . Par transcription de la formule de Bayes, la densité a posteriori est :

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{f(x)},$$

$f(x|\theta)$  désignant la loi de l'observation ou vraisemblance et  $f(x)$  la loi marginale ou prédictive :

$$f(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

La loi a posteriori  $\pi(\theta|x)$  est la loi utilisée pour inférer sur le(s) paramètre(s) d'intérêt.

## L'estimateur de Bayes

• **Le cas unidimensionnel** On suppose dans cette section que le paramètre  $\theta$  est réel. Rappelons que  $\pi(\theta|x)$  s'interprète comme un résumé de l'information disponible sur  $\theta$ , une fois  $x$  observé. D'un point de vue bayésien, l'idéal serait que le statisticien, communique a son interlocuteur (le médecin, l'économiste, l'ingénieur, etc) la loi a posteriori, de façon a ne pas perdre d'information. Quand on souhaite cependant disposer d'une estimation pour  $\theta$ , on retient le plus souvent la moyenne de la loi a posteriori.

**Définition 1.3.11.** On appelle estimation bayésienne du paramètre  $\theta$  la moyenne de la loi a posteriori. Cette moyenne est notée  $\mathbb{E}[\theta|X]$ . Formellement, on a :

$$\mathbb{E}[\theta|X] = \int_{\theta \in \Theta} \theta \pi(\theta|x) d\theta = \frac{\int_{\Theta} \theta f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta}.$$

L'estimateur de Bayes de  $\theta$  est noté  $\hat{\theta}_B$ . Il est donc défini par :  $\hat{\theta}_B = \mathbb{E}[\theta|X]$

• **Le cas multidimensionnel** Dans un contexte multidimensionnel où  $\theta = (\theta_j; j = 1, \dots, J)$ , la moyenne a posteriori  $\mathbb{E}[\theta|X]$  est égale au vecteur  $(\mathbb{E}[\theta_j|X]; j = 1, \dots, J)$  avec

$$\mathbb{E}[\theta_j|X] = \int_{\theta_j \in \Theta} \theta_j \pi(\theta_j|x) d\theta_j$$

et  $\pi(\theta_j|x)$  est obtenu en intégrant  $\pi(\theta|x)$  sur toutes les composantes de  $\theta$  autres que  $\theta_j$ . Le plus souvent, les estimateurs de Bayes des  $\theta_j$  ne peuvent pas être calculés de façon explicite et il faut faire appel aux méthodes de simulation de Monte Carlo.

## Le risque de Bayes

La recherche d'estimateurs de Bayes peut se faire dans le cadre de la théorie de la décision. La démarche consiste alors à se fixer une règle de préférence entre estimateurs et à chercher un estimateur optimal au sens de cette règle de préférence. Rappelons qu'en statistique classique la règle de préférence repose (le plus souvent) sur l'erreur quadratique moyenne, noté EQM (voir la [section 1.3](#)) :

$$EQM(\hat{\theta}) = [\text{biais}(\hat{\theta}_B)]^2 + \mathbb{V}(\hat{\theta}_B).$$

L'approche bayésienne fait reposer la règle de préférence sur le risque de Bayes. La densité a priori  $\pi(\theta)$  étant fixée, le risque de Bayes de  $\hat{\theta}$  est noté  $RB(\hat{\theta})$ . Il est défini comme suit :

$$RB(\hat{\theta}) = \mathbb{E} [EQM(\hat{\theta})] = \int_{\Theta} EQM(\hat{\theta}) \pi(\theta) d\theta.$$

On dira que  $\hat{\theta}_1$  est meilleur que  $\hat{\theta}_2$  au sens du risque de Bayes, si

$$RB(\hat{\theta}_1) < RB(\hat{\theta}_2).$$

À noter que, contrairement à la règle de préférence basée sur l'erreur quadratique moyenne il est toujours possible de comparer deux estimateurs de  $\theta$  au sens du risque de Bayes. La densité a priori  $\pi(\theta)$  étant fixée, on montre que l'estimateur de Bayes est l'estimateur optimal au sens du risque de Bayes.

### Propriétés de l'estimateur de Bayes

- P1. L'estimateur de Bayes est admissible.  
 P2. L'estimateur de Bayes est biaisé.

Sous certaines hypothèses de régularité le plus souvent satisfaites en pratique, on a les deux propriétés :

- P3. L'estimateur de Bayes est convergent en probabilité (quand la taille de l'échantillon  $n \rightarrow +\infty$ ).  
 P4. La loi a posteriori peut être asymptotiquement (i.e pour de grandes valeurs de  $n$ ) approximée par une loi normale  $\mathcal{N}(\mathbb{E}[\theta|x], \mathbb{V}[\theta|x])$ .

### Lois conjuguées

Une des difficultés de l'approche bayésienne est le calcul de la loi a posteriori. Ce calcul est facilité lorsque la loi a priori et la loi a posteriori ont la même forme. Dans ce cas, on parle de loi a priori conjuguée.

**Définition 1.3.12.** Une famille  $\mathcal{F}$  de lois sur  $\Theta$  est dite conjuguée si, pour tout  $\pi(\theta)$  appartenant à cette famille, la loi  $\pi(\theta|x)$  appartient également à celle-ci.

Dans ce cas, le praticien induit directement la forme de son estimateur dès qu'il a choisi sa loi a priori.

L'avantage des familles conjuguées est avant tout de simplifier les calculs. Avant le développement des outils de calcul numérique, ces familles étaient pratiquement les seules qui permettaient de faire aboutir des calculs. Un autre intérêt est que la mise à jour de la loi se fait à travers les paramètres de la loi et donc l'interprétation est souvent bien plus facile.

$f(x \theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta x)$
$\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	$\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$	$\mathcal{N}(\frac{\sigma^2\mu + \tau^2x}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2})$
$\mathcal{P}(\theta)$	$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\Gamma(\alpha + x, \beta + 1)$
$\Gamma(\nu, \theta)$	$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\Gamma(\alpha + \nu, \beta + x)$
$\mathcal{B}(n, \theta)$	$B(\alpha, \beta)$	$B(\alpha + x, \beta + n - x)$
$\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{\theta})$	$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{(\mu-x)^2}{2})$

Tableau 1.1 – Quelques exemples de lois conjuguées

Une loi conjuguée peut être déterminée en considérant la forme de la vraisemblance  $f(x|\theta)$  et en prenant une loi a priori de la même forme que cette dernière vue comme une fonction du paramètre. Les lois a priori conjuguées obtenues par ce procédé sont dites naturelles.

## Fonctions de perte

• **Fonction de perte quadratique (SELF)** La SELF (se référer à [11]) est proposée par Legendree (1805) et Bühlmann Straub (1996) pour développer la théorie des moindres carrés. Cette fonction de perte est de nature symétrique, i.e qu'elle donne une pondération égale à la fois pour une sur-estimation et pour une sous-estimation. Elle est définie par :

$$L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2, \quad (1.1)$$

où  $\hat{\theta}$  est un estimateur de  $\theta$ .

**Proposition 1.3.13.** *Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, l'estimateur de Bayes  $\hat{\theta}_B$  de  $\theta$  associé à la loi a priori  $\pi(\theta)$  est la moyenne a posteriori de  $\theta$  :*

$$\hat{\theta}_B = \mathbb{E}[\theta|X]. \quad (1.2)$$

*Démonstration.* Par définition, l'estimateur de Bayes minimise le risque a posteriori (RP), i.e

$$RP(\hat{\theta}_B) = \mathbb{E}[L(\theta, \hat{\theta})|X].$$

Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, on a :

$$\begin{aligned} RP(\hat{\theta}_B) &= \mathbb{E}[(\theta - \hat{\theta})^2|X] \\ &= \mathbb{E}[(\theta^2 - 2\theta\hat{\theta} + \hat{\theta}^2)|X] \\ &= \mathbb{E}[\theta^2|X] - 2\hat{\theta}\mathbb{E}[\theta|X] + (\hat{\theta})^2. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré en  $\hat{\theta}$ . Il sera minimum en  $\mathbb{E}[\theta|X]$ .  $\square$

• **Fonction de perte de précaution (PLF)** La PLF (voir [18]) est une fonction de perte asymétrique, introduite pour la première fois par Norstorm en 1996, dont l'expression mathématique est la suivante :

$$L(\theta, \hat{\theta}) = \frac{(\hat{\theta} - \theta)^2}{\hat{\theta}}, \quad (1.3)$$

avec  $\hat{\theta}$  est un estimateur de  $\theta$ .

**Lemme 1.3.14.** *Soient  $\hat{\theta}$  un estimateur de  $\theta$  et  $\pi(\theta)$  une distribution préalable de  $\theta$ . Alors sous l'hypothèse de la PLF (1.3), l'estimateur bayésien de  $\pi(\theta)$  est donné par :*

$$\hat{\theta}_B = [\mathbb{E}[\theta^2|X]]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.4)$$

à condition que  $\mathbb{E}[\theta^2|X]$  existe, et qu'il soit fini.

*Démonstration.* Sous la PLF (1.3), le risque bayésien de l'estimateur  $\hat{\theta}$  est :

$$\begin{aligned}
 RP(\hat{\theta}_B) &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[L(\theta, \hat{\theta})|X] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ L(\theta, \hat{\theta})|X \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \frac{(\hat{\theta} - \theta)^2}{\hat{\theta}} |X \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \left( \hat{\theta} - 2\theta + \frac{\theta^2}{\hat{\theta}} \right) |X \right] \\
 &= \hat{\theta} - 2\mathbb{E}[\theta|X] + \frac{1}{\hat{\theta}}\mathbb{E}[\theta^2|X].
 \end{aligned}$$

La dérivée de premier ordre de  $RP(\hat{\theta}_B)$  est :

$$\begin{aligned}
 RP'(\hat{\theta}_B) &= 1 - \frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[\theta^2|X], \\
 \text{alors } RP''(\hat{\theta}_B) &= \frac{2}{\hat{\theta}^3}\mathbb{E}[\theta^2|X] \geq 0 \quad (\text{toujours vrai}).
 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de  $RP'(\hat{\theta}_B) = 0$ , i.e  $\hat{\theta}_B = [\mathbb{E}(\theta^2|X)]^{\frac{1}{2}}$  est le point minimum de  $RP(\hat{\theta}_B)$ . Par conséquent, l'estimateur bayésien de  $\theta$  sous la PLF (1.3) est

$$\hat{\theta}_B = [\mathbb{E}(\theta^2|X)]^{\frac{1}{2}}.$$

□

## 1.4 Méthodes numériques pour la résolution d'équations non linéaires

Le but principal de cette section est d'aborder l'approximation des racines d'une fonction réelle d'une variable réelle, ce qui revient à résoudre de manière approximative le problème suivant : soit une équation non linéaire d'une seule variable définie par

$$f(\alpha) = 0.$$

La valeur de la variable  $\alpha$  qui vérifie cette égalité est appelée solution (ou racine) de l'équation, elle est notée  $\alpha^{(0)}$ . Dans de nombreux cas, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques car la solution ne peut pas être obtenue analytiquement. Ainsi, résoudre cette équation revient à définir une séquence de valeurs (solutions intermédiaires  $\alpha^{(0;k)}$ ) convergent vers la solution désirée lorsque  $k$  tend vers l'infini. On ne parle pas de solution exacte car elle n'existe souvent pas, cependant, l'objectif est de trouver une solution qui soit une approximation de la solution exacte avec une certaine précision.

Il existe plusieurs techniques pour résoudre des équations non linéaires, ces méthodes se différencient par leurs principes et leurs taux de convergence.

Dans cette section, nous introduisons les méthodes du point fixe et de Newton-Raphson.

### 1.4.1 Méthode du point fixe

La méthode (voir [20] ou [13]) repose sur la possibilité de transformer le problème  $f(\alpha) = 0$  en un problème équivalent  $\alpha - \phi(\alpha) = 0$ , où  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction auxiliaire choisie telle que  $\phi(\varphi) = \varphi$  lorsque  $f(\varphi) = 0$ . Ainsi, trouver les zéros de  $f$  revient à déterminer les points fixes de  $\phi$ , ce qui est réalisé via l'algorithme itératif suivant : à partir de  $\alpha^{(0)}$ , on définit

$$\alpha^{(k+1)} = \phi(\alpha^{(k)}), \quad k \geq 0, \quad \text{où } \alpha^{(k)} \text{ représente la } k\text{-ième itération.} \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est appelée itération de point fixe et  $\phi$  est la fonction d'itération associée. Elle est parfois nommée itération de Picard ou itération fonctionnelle pour la résolution de  $f(\alpha) = 0$ .

Le résultat suivant fournit des conditions suffisantes pour que la méthode de point fixe converge vers la racine  $\alpha$ .

**Théorème 1.4.1 (Convergence des itérations de point fixe).** *Soit  $\alpha^{(0)}$  donné et considérons la suite  $\alpha^{(k+1)} = \phi(\alpha^{(k)})$ , pour  $k \geq 0$ . Si*

1.  $\forall \alpha \in [a, b], \phi(\alpha) \in [a, b]$ ,
2.  $\phi \in C^1([a, b])$ ,
3.  $\exists K < 1 : |\phi'(\alpha)| \leq K \quad \forall \alpha \in [a, b]$ ,

*alors  $\phi$  possède un unique point fixe  $\alpha$  dans  $[a, b]$  et la suite  $\{\alpha^{(k)}\}$  converge vers  $\alpha$  pour tout choix de  $\alpha^{(0)} \in [a, b]$ .*

### 1.4.2 La méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est largement employée en statistique comme l'une des méthodes d'optimisation les plus courantes. Elle est utilisée pour trouver les racines d'une fonction de manière numérique. Cette méthode repose sur un algorithme itératif défini par l'équation suivante :

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \frac{f(\alpha^{(0)})}{f'(\alpha^{(0)})}.$$

La relation de récurrence est alors donnée par :

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \frac{f(\alpha^{(k)})}{f'(\alpha^{(k)})}.$$

Pour plus de détails, on peut se référer à [24] ou [13].

**Remarque 1.4.2.** *Un critère d'arrêt souvent utilisé consiste à choisir une tolérance  $\epsilon$  avant l'exécution de l'algorithme, et à arrêter celui-ci lorsque la différence entre deux itérations successives est inférieure ou égale à cette tolérance, i.e lorsque  $|\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}| \leq \epsilon$ .*

# ESTIMATION DANS LE MODÈLE DE KUMARASWAMY

Dans ce chapitre, nous examinerons les méthodes d'estimation dans le cadre du modèle de Kumaraswamy, en mettant spécifiquement l'accent sur deux approches fondamentales : la méthode du maximum de vraisemblance (MV) et la méthode bayésienne.

## 2.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance (MV)

Soient  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n$  observations d'un échantillon de taille  $n$  provenant d'une v.a  $X$  suivant la loi de Kumaraswamy avec les paramètres  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  i.e  $X \sim Kum(\alpha, \beta)$ .

**Rappel 2.1.1.** La densité de probabilité de cette variable, notée  $f_X(x; \alpha, \beta)$ , est définie pour tout  $x \in ]0, 1[$  par l'expression suivante :

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^\alpha)^{\beta-1}.$$

### 2.1.1 Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance est définie pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et pour toute observation  $(x_1, \dots, x_n) \in ]0, 1[^n$  par :

$$\begin{aligned} L(x; \alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \alpha, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha\beta x_i^{\alpha-1}(1-x_i^\alpha)^{\beta-1} \\ &= (\alpha\beta)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}(1-x_i^\alpha)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

### 2.1.2 La Log-vraisemblance

La log-vraisemblance, notée  $\mathcal{L}(x; \alpha, \beta)$ , peut être calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x; \alpha, \beta) &= \ln L(x; \alpha, \beta) \\ &= \ln(\alpha\beta)^n + \ln \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} (1 - x_i^\alpha)^{\beta-1} \\ &= n \ln \alpha + n \ln \beta + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha). \end{aligned} \quad (2.1)$$

### 2.1.3 Équations de vraisemblance

Les estimateurs  $\hat{\alpha}_{MV}$  et  $\hat{\beta}_{MV}$  peuvent être déterminés en maximisant l'équation précédente (2.1) par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les dérivées partielles sont :

$$\begin{cases} U_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \\ U_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \beta} \end{cases} \quad \text{on a :}$$

$$\begin{aligned} U_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ n \ln \alpha + n \ln \beta + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha) \right] \\ &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_\beta &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ n \ln \alpha + n \ln \beta + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha) \right] \\ &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha). \end{aligned}$$

En annulant les dérivées partielles, on parvient à formuler les équations de vraisemblance :

$$U_\alpha = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha} = 0 \quad (2.2)$$

$$U_\beta = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha) = 0. \quad (2.3)$$

De plus, la matrice hessienne est la suivante :

$$H(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial^2 \alpha} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial^2 \beta} \end{bmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial^2 \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha} \right] \\
&= -\frac{n}{\alpha^2} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2 (1 - x_i^\alpha) - x_i^\alpha \ln x_i (-x_i^\alpha \ln x_i)}{(1 - x_i^\alpha)^2} \\
&= -\frac{n}{\alpha^2} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2 - (x_i^\alpha \ln x_i)^2 + (x_i^\alpha \ln x_i)^2}{(1 - x_i^\alpha)^2} \\
&= -\frac{n}{\alpha^2} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2}{(1 - x_i^\alpha)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial^2 \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \beta} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha) \right] \\
&= -\frac{n}{\beta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \beta} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha) \right] \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{1 - x_i^\alpha} \quad \text{et}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(x; \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha} \right] \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{1 - x_i^\alpha}.
\end{aligned}$$

Par la suite, nous allons démontrer que la matrice hessienne est définie négative.

Pour ce faire, il suffit de vérifier les deux conditions suivantes :

•Vérifions que  $\det(H(\alpha, \beta)) > 0$ .

On a :

$$\det(H(\alpha, \beta)) = \frac{n^2}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{n(\beta - 1)}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2}{(1 - x_i^\alpha)^2} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{1 - x_i^\alpha} \right)^2 > 0; \forall \in \mathbb{N}, \alpha, \beta > 1.$$

•Vérifions que  $\frac{\partial^2 L(\alpha, \beta)}{\partial^2 \alpha} + \frac{\partial^2 L(\alpha, \beta)}{\partial^2 \beta} < 0$ .

On a :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x | \alpha, \beta)}{\partial^2 \alpha} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x | \alpha, \beta)}{\partial^2 \beta} = -\frac{n}{\beta^2} - \frac{n}{\alpha^2} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha (\ln x_i)^2}{(1 - x_i^\alpha)^2} < 0; \forall \in \mathbb{N}, \alpha, \beta > 1.$$

Étant donné que la matrice hessienne  $H(\alpha, \beta)$  est définie négative, alors la log-vraisemblance atteint son maximum.

Par ailleurs, selon l'équation (2.3), nous avons :

$$\hat{\beta}(\alpha) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)}. \quad (2.4)$$

L'équation (2.2) démontre clairement que le calcul exact de  $\hat{\alpha}_{MV}$  n'est pas réalisable. Ainsi, nous sommes en mesure d'exprimer  $\hat{\beta}_{MV}$  uniquement en fonction de  $\hat{\alpha}_{MV}$ .

Afin de contourner cette difficulté, une approche consiste à substituer l'expression de  $\hat{\beta}(\alpha)$  dans l'équation (2.2), permettant ainsi d'obtenir une équation non linéaire avec comme inconnu  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} U_\alpha &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \left( -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha} \\ &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Par conséquent, pour obtenir l'estimateur du MV de  $\alpha$ , représenté par  $\hat{\alpha}_{MV}$ , il suffit de maximiser l'équation (2.5) par rapport à  $\alpha$ . Pour la résolution, on peut se référer à des méthodes numériques générales telles que la méthode du point fixe, qui est décrite, dans le chapitre 1 (section 1.4), et qui permet de trouver les racines d'une équation non linéaire.

Dans notre situation, la fonction  $f$  en question correspond effectivement à  $U_\alpha$ .

Ainsi, nous obtenons :

$$f(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha}.$$

Posons  $f(\alpha) = 0$ , on a :

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i + \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln(x_i)}{1 - x_i^\alpha} = -\frac{n}{\alpha}.$$

En multipliant de part et d'autre par  $-\frac{\alpha}{n}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\alpha}{n} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{x_i^\alpha - 1} = 1 \\ \Leftrightarrow & \alpha \left[ -\frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\alpha}{n} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{x_i^\alpha - 1} \right] = 1 \\ \Leftrightarrow & \alpha = \left[ -\frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\alpha}{n} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{x_i^\alpha - 1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Alors,  $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \phi(\alpha) = 0$  avec :

$$\phi(\alpha) = \left[ -\frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\alpha}{n} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \ln x_i}{x_i^\alpha - 1} \right]^{-1}. \quad (2.6)$$

Partant de cette équation, nous appliquons l'itération de point fixe (voir Annexe : code R 1) afin d'obtenir la valeur estimée de  $\hat{\alpha}_{MV}$ .

Une fois cette valeur obtenue, nous pouvons déduire l'estimation du MV de  $\beta$ , notée  $\hat{\beta}_{MV}$ , à partir de l'équation (2.4), en utilisant la relation  $\hat{\beta}_{MV} = \hat{\beta}(\hat{\alpha}_{MV})$ .

## 2.2 Estimation bayésienne

### 2.2.1 Loi a priori gamma

Dans le cadre de l'analyse bayésienne, il est nécessaire de définir une distribution a priori pour le paramètre  $\beta$ , c'est pourquoi nous utilisons une distribution gamma à cet effet.

Supposons que  $\beta$  soit une v.a dont la PDF préalable est la suivante :

$$\pi(\beta) = \frac{\beta^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)b^\delta} e^{-\frac{\beta}{b}}, \quad b > 0, \delta > 0. \quad (2.7)$$

Il est à noter que  $\beta$  est une distribution gamma caractérisée par les paramètres  $\delta$  et  $b$ . Ces valeurs peuvent être déterminées en utilisant la méthode des moments.

#### Valeurs estimées des paramètres $\delta$ et $b$

Par le biais de la méthode des moments, nous allons donner un estimateur du paramètre bidimensionnel  $(\delta, b)$  du modèle gamma, basé sur l'observation d'un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  provenant d'une v.a  $X$  de Kumaraswamy.

Pour la résolution, le processus commence par le calcul de l'espérance mathématique de la variable  $\beta$ . Ensuite, la variance est déterminée et enfin, la méthode des moments est appliquée pour l'estimation.

## ► Calcul de l'espérance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\delta,b}[\beta] &= \int_0^{+\infty} \beta \pi(\beta) d\beta \\
&= \int_0^{+\infty} \beta \frac{\beta^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) b^\delta} e^{-\frac{\beta}{b}} d\beta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\delta}{b^\delta} e^{-\frac{\beta}{b}} d\beta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\beta}{b}\right)^\delta e^{-\frac{\beta}{b}} d\beta.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $u = \frac{\beta}{b}$  et en notant que  $\Gamma(\delta + 1) = \delta\Gamma(\delta)$ , il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\delta,b}[\beta] &= \frac{b}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} u^\delta e^{-u} du \\
&= \frac{b}{\Gamma(\delta)} \Gamma(\delta + 1) \\
&= \frac{b}{\Gamma(\delta)} \delta \Gamma(\delta) \\
&= b\delta.
\end{aligned}$$

► Calcul de la variance De la même manière<sup>1</sup>, on montre que l'on a :

$$\mathbb{E}_{\delta,b}[\beta^2] = b^2\delta(\delta + 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{\delta,b}[\beta] &= \mathbb{E}_{\delta,b}[\beta^2] - \mathbb{E}_{\delta,b}^2[\beta] \\
&= b^2\delta(\delta + 1) - (b\delta)^2 \\
&= b^2\delta^2 + b^2\delta - b^2\delta^2 \\
&= b^2\delta.
\end{aligned}$$

► Méthode des moments Les calculs précédents nous ont donné

$$\mathbb{E}_{\delta,b}[\beta] = \delta b \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_{\delta,b}[\beta^2] = b^2\delta(\delta + 1).$$

Ainsi, on peut écrire

$$h(\delta, b) = \mathbb{E}_{\delta,b}[\varphi(X)]$$

avec

$$h(\delta, b) = (\delta b, b^2\delta(\delta + 1)) \quad \text{et} \quad \varphi(X) = (X, X^2).$$

1. Noter que  $\Gamma(\delta + 2) = (\delta + 1)\delta\Gamma(\delta)$ .

Des estimateurs de  $\delta$  et  $b$  par la méthode des moments sont alors :

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}, \hat{b}) &= h^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right) \\ &= h^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right). \end{aligned}$$

• Déterminons l'expression de  $h^{-1}$ , la réciproque de  $h$ .

$$\begin{aligned} \text{Soit } h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\delta, b) &\longmapsto (\delta b, b^2 \delta (\delta + 1)). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} u = \delta b \\ v = b^2 \delta (\delta + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = \delta^2 b^2 \\ v = b^2 \delta (\delta + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{u^2}{v - u^2} \\ b = \frac{v - u^2}{u} \end{cases}$$

, on a alors

$$(\delta, b) = h^{-1}(u, v) = \left( \frac{u^2}{v - u^2}, \frac{v - u^2}{u} \right).$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{cases} \hat{\delta} = \frac{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ \hat{b} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)} \end{cases},$$

ou simplement

$$\begin{cases} \hat{\delta} = \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} - \bar{X}^2} \\ \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} - \bar{X}^2}{\bar{X}}. \end{cases} \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Distribution a posteriori en utilisant la loi a priori gamma

En fusionnant la loi a priori (2.7) avec la fonction de vraisemblance de la distribution de Kumaraswamy, la distribution a posteriori du paramètre  $\beta$  à partir des données  $(x_1, \dots, x_n)$  prend la forme

$$\pi(\beta | X) = \frac{L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta)}{\int_0^{+\infty} L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta)d\beta},$$

où  $L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta)$  est appelée loi jointe et  $\int_0^{+\infty} L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta)d\beta$ , loi marginale ou prédictive.

#### Calcul de loi jointe

$$\begin{aligned} L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta) &= (\alpha\beta)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}(1-x_i^\alpha)^{\beta-1} \frac{\beta^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)b^\delta} e^{-\frac{\beta}{b}} \\ &= \alpha^n \beta^{n+\delta-1} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}(1-x_i^\alpha)^{\beta-1} \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} e^{-\frac{\beta}{b}} \\ &= \alpha^n \beta^{n+\delta-1} \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} e^{-\frac{\beta}{b}} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}(1-x_i^\alpha)^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Posons  $A = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}(1-x_i^\alpha)^{\beta-1}$ .

**Remarque 2.2.1.** *L'expression de A demeure strictement positive du fait que les  $x_i$  sont prises dans  $]0, 1[$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Alors, on peut écrire :*

$$\begin{aligned} A &= \exp\left(\ln \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}(1-x_i^\alpha)^{\beta-1}\right) \\ &= \exp\left(\ln \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} + \ln \prod_{i=1}^n (1-x_i^\alpha)^{\beta-1}\right) \\ &= \exp\left((\alpha-1) \ln \prod_{i=1}^n x_i + (\beta-1) \ln \prod_{i=1}^n (1-x_i^\alpha)\right) \\ &= \exp\left((\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right) \\ &= \exp\left((\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + \beta \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha) - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right) \\ &= \exp\left((\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right) \exp\left(\beta \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right). \end{aligned}$$

En substituant l'expression de  $A$  dans (2.9), il vient :

$$\begin{aligned}
L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta) &= \alpha^n \beta^{n+\delta-1} \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp\left(\frac{-\beta}{b}\right) \exp\left((\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right) \\
&\times \exp\left(\beta \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right) \\
&= \alpha^n \beta^{n+\delta-1} \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp\left((\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right) \\
&\times \exp\left(-\beta \left[\frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right]\right).
\end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, nous posons

$$G = (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)$$

et

$$H = \frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha).$$

Par conséquent, la loi jointe est exprimée comme suit :

$$L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta) = \alpha^n \beta^{n+\delta-1} \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \exp(-\beta H). \quad (2.10)$$

### Calcul de la loi marginale

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta) d\beta &= \alpha^n \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \int_0^{+\infty} \beta^{n+\delta-1} \exp(-\beta H) d\beta \\
&= \alpha^n \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \int_0^{+\infty} \frac{H^{n+\delta}}{H^{n+\delta}} \beta^{n+\delta-1} \exp(-\beta H) d\beta \\
&= \alpha^n \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \int_0^{+\infty} \frac{H^{n+\delta-1}}{H^{n+\delta}} \beta^{n+\delta-1} \exp(-\beta H) H d\beta \\
&= \alpha^n \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \frac{1}{H^{n+\delta}} \int_0^{+\infty} (\beta H)^{n+\delta-1} \exp(-\beta H) H d\beta.
\end{aligned}$$

Soit  $t = \beta H \Rightarrow dt = H d\beta$  donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} L(x; \alpha, \beta)\pi(\beta) d\beta &= \alpha^n \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \frac{1}{H^{n+\delta}} \int_0^{+\infty} (t)^{n+\delta-1} \exp(-t) dt \\
&= \alpha^n \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \frac{\Gamma(n+\delta)}{H^{n+\delta}}.
\end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.10) et (2.11), la distribution a posteriori est :

$$\begin{aligned}\pi(\beta | X) &= \frac{\alpha^n \beta^{n+\delta-1} \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \exp(-\beta H)}{\alpha^n \frac{1}{\Gamma(\delta)b^\delta} \exp(G) \frac{\Gamma(n+\delta)}{H^{n+\delta}}} \\ &= \frac{\beta^{n+\delta-1} \exp(-\beta H)}{\frac{\Gamma(n+\delta)}{H^{n+\delta}}}.\end{aligned}$$

En remplaçant  $H$  par son expression, on obtient :

$$\pi(\beta | X) = \frac{\beta^{n+\delta-1} \exp\left(-\beta \left[\frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)\right]\right)}{\Gamma(n + \delta) \left(\frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)\right)^{n+\delta}}. \quad (2.12)$$

### 2.2.3 Estimateur bayésien du paramètre de forme $\beta$ sous la fonction de perte quadratique (SELF)

Sous l'application de la SELF comme critère, l'estimateur bayésien du paramètre  $\beta$  ( $\hat{\beta}_{SELF}$ ) correspond à la moyenne a posteriori :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{SELF} &= \mathbb{E}[\beta|X] \\ &= \int_0^{+\infty} \beta P(\beta|X) d\beta \\ &= \int_0^{+\infty} \beta \frac{\beta^{n+\delta-1} \exp(-\beta H)}{\frac{\Gamma(n+\delta)}{H^{n+\delta}}} d\beta \\ &= \int_0^{+\infty} \beta^{\delta+n} \exp(-\beta H) \frac{H^{\delta+n}}{\Gamma(\delta+n)} d\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+n)} \int_0^{+\infty} \beta^{\delta+n} H^{\delta+n} \exp(-\beta H) d\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+n)} \int_0^{+\infty} (\beta H)^{\delta+n} \exp(-\beta H) d\beta \\ &= \frac{1}{H\Gamma(\delta+n)} \int_0^{+\infty} (\beta H)^{\delta+n} \exp(-\beta H) H d\beta \\ &= \frac{1}{H\Gamma(\delta+n)} \int_0^{+\infty} (t)^{\delta+n} \exp(-t) dt \\ &= \frac{1}{H\Gamma(\delta+n)} \Gamma(\delta+n+1) \\ &= \frac{1}{H\Gamma(\delta+n)} (\delta+n)\Gamma(\delta+n) \\ &= \frac{\delta+n}{H}.\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\hat{\beta}_{SELF} = \frac{\delta+n}{\frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1 - x_i^\alpha)}. \quad (2.13)$$

Le RP correspondant est défini par :

$$RP(\hat{\beta}_{SELF}) = \mathbb{E}[\beta^2|X] - 2\hat{\beta}_{SELF}\mathbb{E}[\beta|X] + \hat{\beta}_{SELF}. \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs, } \mathbb{E}(\beta^2|X) &= \int_0^{+\infty} \beta^2 P(\beta|X) d\beta \\ &= \int_0^{+\infty} \beta^2 \frac{\beta^{n+\delta-1} \exp(-\beta H)}{\frac{\Gamma(n+\delta)}{H^{n+\delta}}} d\beta \\ &= \int_0^{+\infty} \beta^{\delta+n+1} \exp(-\beta H) \frac{H^{\delta+n}}{\Gamma(\delta+n)} d\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+n)H^2} \int_0^{+\infty} \beta^{\delta+n+1} H^{\delta+n+1} \exp(-\beta H) H d\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+n)H^2} \int_0^{+\infty} (\beta H)^{\delta+n+1} \exp(-\beta H) H d\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+n)H^2} \int_0^{+\infty} (t)^{\delta+n+1} \exp(-t) t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+n)H^2} \Gamma(\delta+n+2) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta+n)H^2} (\delta+n)(\delta+n-1)\Gamma(\delta+n) \\ &= \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2}, \end{aligned}$$

par suite, on a :

$$\begin{aligned} RP(\hat{\beta}_{SELF}) &= \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2} - 2\left(\frac{\delta+n}{H}\right)\left(\frac{\delta+n}{H}\right) + \left(\frac{\delta+n}{H}\right)^2 \\ &= \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2} - 2\left(\frac{\delta+n}{H}\right)^2 + \left(\frac{\delta+n}{H}\right)^2 \\ &= \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2} - \left(\frac{\delta+n}{H}\right)^2 \\ &= \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2} - \frac{(\delta+n)^2}{H^2} \\ &= \frac{(\delta+1)[(\delta+n+1) - (\delta+n)]}{H^2} \\ &= \frac{\delta+n}{H^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut exprimer le RP de  $\hat{\beta}_{SELF}$  comme suit :

$$RP(\hat{\beta}_{SELF}) = \frac{\delta+n}{\left(\frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)\right)^2}.$$

### 2.2.4 Estimateur bayésien du paramètre de forme $\beta$ sous la fonction de perte de précaution (PLF)

L'estimateur bayésien de  $\beta$  selon la PLF est formulé comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{PLF} &= [\mathbb{E}(\beta^2|X)]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{H}.\end{aligned}$$

En remplaçant  $H$  par son expression, on a :

$$\hat{\beta}_{PLF} = \frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{\frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)}. \quad (2.15)$$

Le RP correspondant est :

$$\begin{aligned}RP(\hat{\beta}_{PLF}) &= \frac{1}{\hat{\beta}_{PLF}} [\mathbb{E}(\beta^2|X)] - 2[\mathbb{E}(\beta|X)] + \hat{\beta}_{PLF} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{H}} \left[ \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2} \right] - 2 \left[ \frac{\delta+n}{H} \right] + \frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{H} \\ &= \frac{H}{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}} \left[ \frac{(\delta+n)(\delta+n+1)}{H^2} \right] - 2 \left[ \frac{\delta+n}{H} \right] \\ &+ \frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{H} \\ &= \frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{H} - 2 \left[ \frac{\delta+n}{H} \right] + \frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{H} \\ &= 2 \left[ \frac{\sqrt{(\delta+n)(\delta+n+1)}}{H} \right] - 2 \left[ \frac{\delta+n}{H} \right] \\ &= 2 \left[ \frac{[(\delta+n)(\delta+n+1)]^{\frac{1}{2}} - (\delta+n)}{H} \right].\end{aligned}$$

Par conséquent, l'estimation du RP de l'estimateur bayésien du paramètre  $\beta$  sous la PLF s'exprime de la manière suivante :

$$RP(\hat{\beta}_{PLF}) = 2 \left[ \frac{[(\delta+n)(\delta+n+1)]^{\frac{1}{2}} - (\delta+n)}{\frac{1}{b} - \sum_{i=1}^n \ln(1-x_i^\alpha)} \right]. \quad (2.16)$$

# SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET APPLICATION

Dans ce chapitre, nous débuterons par une étude descriptive de la PDF du modèle  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$ . Ensuite, nous procéderons à une analyse comparative de la performance des différents estimateurs examinés dans le chapitre précédent, en nous appuyant sur les résultats numériques de leur EQM et de leur RP. Cette analyse numérique sera réalisée à l'aide du logiciel R.

## 3.1 Fonctions densité de kumaraswamy

Dans cette section, nous analysons la variation de la PDF du modèle  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$  en fonction des valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . L'objectif est de représenter graphiquement leur influence sur le comportement de cette fonction.

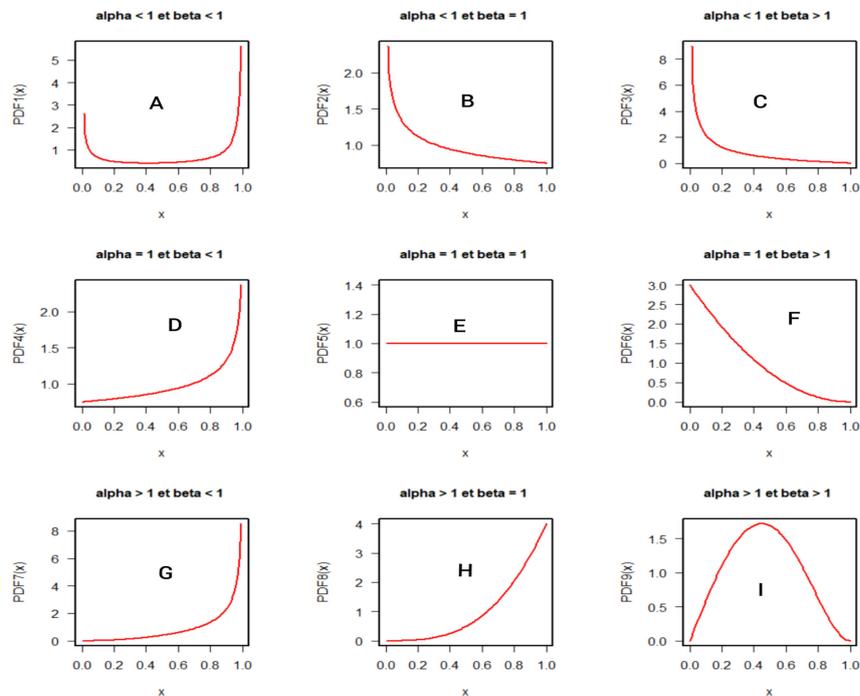


FIGURE 3.1 – Variation de la PDF de Kumaraswamy

## 3.2 Simulations des données

Cette section vise à comparer les estimateurs du paramètre de forme  $\beta$  issus des méthodes du MV et de Bayes.

L'objectif est de déterminer la meilleure méthode d'estimation pour le modèle  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$ . Pour ce faire, la comparaison se déroulera en deux étapes :

- **Première étape** : Nous confronterons l'estimateur obtenu par la méthode du MV aux estimateurs bayésiens sous SELF et PLF, en utilisant l'EQM. Plus la valeur de l'EQM est faible, meilleure est l'estimation.

- **Deuxième étape** : Nous nous pencherons sur l'étude comparative des estimateurs bayésiens, en se basant sur le RP. Une estimation de meilleure qualité sera associée à une valeur de risque plus faible.

Au cours de ces deux étapes, nous simulerons selon le modèle  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$ , des observations  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de taille  $n = (25, 50, 100, 200)$ , en utilisant fixant le paramètre  $\alpha$  de ce modèle.

Nous examinerons cinq cas distincts :

- 1<sup>er</sup> cas :  $\alpha = 0.25$  ;
- 2<sup>ème</sup> cas :  $\alpha = 0.5$  ;
- 3<sup>ème</sup> cas :  $\alpha = 0.75$  ;
- 4<sup>ème</sup> cas :  $\alpha = 1$  ;
- 5<sup>ème</sup> cas :  $\alpha = 4$ .

Précisons que, pour la simulation de l'EQM, nous générerons  $N = 1000$  échantillons.

### 3.2.1 Résultats

Les résultats sont présentés sous forme de tableaux, chacun représentant un cas particulier et affichant des informations telles que la taille de l'échantillon, les estimations du paramètre  $\beta$  sous sa forme, ainsi que les erreurs quadratiques moyennes (EQM) et les risques a posteriori (RP) correspondants.

► Choix de la méthode d'estimation appropriée basé sur l'EQM et le RP pour  $\alpha = 0.25$ .

Taille n		Méthode		1 <sup>er</sup> cas : $\alpha = 0.25$				
				$\beta = 0.2$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\beta = 1$	$\beta = 3$
n=25	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2689128	0.5446575	0.8272467	1.408406	4.500822	
		EQM	0.004748981	0.02092578	0.05164106	0.16679514	2.252468	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2834535	0.5373146	0.7831501	1.208549	0.8728286	
		EQM	0.006964483	0.01885530	0.03354395	0.04349281	4.524858	
		RP	0.002921987	0.01110055	0.02375221	0.0572156	0.0300921	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2885617	0.54746	0.7981706	1.231993	0.8898999	
EQM		0.007843177	0.02174446	0.03927157	0.05382080	4.452522		
		RP	0.01021647	0.02029085	0.03004098	0.04688761	0.03414263	
n=50	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.3104368	0.6403345	0.981302	1.686998	5.490284	
		EQM	0.01219630	0.05776068	0.1453912	0.4719656	6.201516	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.3182441	0.6299252	0.9404356	1.530313	1.912717	
		EQM	0.01398167	0.05286559	0.1158964	0.2812322	1.182185	
		RP	0.001924385	0.007747776	0.0174324	0.04647562	0.07291674	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3212533	0.6360452	0.9496586	1.545424	1.931684	
EQM		0.01470237	0.05571734	0.1222611	0.2974870	1.141300		
		RP	0.00601843	0.01224006	0.01844606	0.03022081	0.037934	
n=100	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2648485	0.53255	0.8021686	1.345535	4.109198	
		EQM	0.004205332	0.01756952	0.04087215	0.11939448	1.23032024	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2686727	0.530303	0.7896496	1.298656	2.873293	
		EQM	0.004715946	0.01697887	0.03596697	0.08919526	0.01605458	
		RP	0.0007039393	0.002775993	0.006186245	0.01679724	0.08243702	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2699796	0.5329139	0.793557	1.305107	2.887603	
EQM		0.004897144	0.01766611	0.03746432	0.09309022	0.01263306		
		RP	0.002613706	0.005221875	0.00781483	0.01290228	0.02861951	
n=200	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2489026	0.4947547	0.7387528	1.223026	3.606694	
		EQM	0.002391465	0.008978457	0.01925234	0.04974046	0.36807719	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2507309	0.4940478	0.7339609	1.204814	3.225153	
		EQM	0.002573625	0.008844981	0.01794552	0.04194887	0.05069385	
		RP	0.0003104749	0.001212906	0.002683149	0.007243235	0.05197782	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2513493	0.4940478	0.7357865	1.207816	3.233201	
EQM		0.002636749	0.009077088	0.01843797	0.04318767	0.05438275		
		RP	0.001236754	0.002451996	0.003651171	0.006004429	0.01609631	

Tableau 3.1 – Estimations du paramètre de forme  $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 1<sup>er</sup> cas

► Choix de la méthode d'estimation appropriée basé sur l'EQM et le RP pour  $\alpha = 0.5$ .

Taille n		Méthode		2 <sup>ème</sup> cas : $\alpha = 0.5$				
				$\beta = 0.2$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\beta = 1$	$\beta = 3$
n=25	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2689128	0.5446575	0.8272467	1.408406	4.500822	
		EQM	0.004748981	0.02092578	0.05164106	0.16679514	2.252468	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2989674	0.5444971	0.7833542	1.209926	1.758897	
		EQM	0.009794550	0.02087940	0.03361878	0.04406883	1.540336	
		RP	0.002999277	0.01085481	0.02306353	0.05611294	0.1205523	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3039421	0.5543752	0.7979395	1.232896	1.792839	
EQM		0.010803958	0.02383170	0.03918004	0.05424069	1.457238		
		RP	0.009949345	0.01975628	0.02917046	0.04594108	0.06788358	
n=50	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.3104368	0.6403345	0.981302	1.686998	5.490284	
		EQM	0.01219630	0.05776068	0.1453912	0.4719656	6.20151581	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.3270687	0.6333429	0.9360822	1.506631	2.808461	
		EQM	0.01614644	0.05444893	0.1129512	0.2566748	0.03668705	
		RP	0.001946654	0.007650971	0.01696486	0.04447256	0.156112	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3300312	0.6393546	0.9451004	1.521318	2.836118	
EQM		0.01690810	0.05729061	0.1190943	0.2717726	0.02685720		
		RP	0.005924986	0.01202324	0.01803638	0.02937471	0.05531395	
n=100	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2648485	0.53255	0.8021686	1.345535	4.109198	
		EQM	0.004205332	0.01756952	0.04087215	0.11939447	1.23032024	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2716784	0.5325009	0.7896678	1.290037	3.187773	
		EQM	0.005137795	0.01755649	0.03597387	0.08412119	0.03525863	
		RP	0.0007084486	0.002770276	0.006133415	0.01646773	0.1011279	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2729791	0.5350958	0.7935418	1.296403	3.203595	
EQM		0.005325955	0.01825087	0.03745844	0.08785502	0.04145108		
		RP	0.002601446	0.005189742	0.007748077	0.0127339	0.03164514	
n=200	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2489026	0.4947547	0.7387528	1.223026	3.606694	
		EQM	0.002391465	0.008978457	0.01925234	0.04974046	0.36807719	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2522273	0.4951051	0.734101	1.20162	3.26532	
		EQM	0.002727692	0.009044982	0.01798307	0.04065073	0.07039488	
		RP	0.0003116049	0.00121187	0.002673228	0.007183179	0.05319645	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2528443	0.4963275	0.7359195	1.204606	3.273456	
EQM		0.002792516	0.009278978	0.01847410	0.04186342	0.07477811		
		RP	0.001233904	0.002444684	0.003636995	0.005970495	0.01627107	

Tableau 3.2 – Estimations du paramètre de forme  $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 2<sup>ème</sup> cas

► Choix de la méthode d'estimation appropriée basé sur l'EQM et le RP pour  $\alpha = 0.75$ .

Taille n		Méthode		3 <sup>ème</sup> cas : $\alpha = 0.75$				
				$\beta = 0.2$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\beta = 1$	$\beta = 3$
n=25	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2689128	0.5446575	0.8272467	1.408406	4.500822	
		EQM	0.004748981	0.02092578	0.05164106	0.1667951	2.2524680	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.318732	0.553483	0.7831913	1.192798	1.963111	
		EQM	0.014097289	0.02355703	0.03355904	0.0371712	1.0751397	
		RP	0.003089757	0.01066979	0.02222615	0.05308799	0.1474863	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3235427	0.5630393	0.7972545	1.214848	2.000322	
EQM		0.015262787	0.02658181	0.03890934	0.0461597	0.9993554		
RP		0.009621295	0.01911255	0.02812643	0.04409949	0.07442353		
n=50	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.3104368	0.6403345	0.981302	1.686998	5.490284	
		EQM	0.01219630	0.05776068	0.1453912	0.4719656	6.201515816	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.3375507	0.6374929	0.9323734	1.481518	2.913164	
		EQM	0.01892020	0.05640286	0.1104720	0.2318595	0.007540477	
		RP	0.001972201	0.007540606	0.0164807	0.04232142	0.166212	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3404595	0.6433799	0.9411699	1.495733	2.941553	
EQM		0.01972888	0.05923380	0.1163969	0.2457511	0.003415995		
RP		0.005817613	0.01177417	0.01759308	0.02842987	0.05677882		
n=100	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2648485	0.53255	0.8021686	1.345535	4.109198	
		EQM	0.004205332	0.01756952	0.04087215	0.11939447	1.23032024	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2751106	0.5348009	0.7900947	1.283628	3.197329	
		EQM	0.005641595	0.01817129	0.03613600	0.08044482	0.03893886	
		RP	0.0007135075	0.002763403	0.006084651	0.01618515	0.1012307	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2764043	0.5373783	0.793936	1.289917	3.213121	
EQM		0.005837614	0.01887279	0.03761116	0.08405188	0.04542049		
RP		0.002587446	0.005154741	0.007682491	0.0125781	0.03158303		
n=200	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2489026	0.4947547	0.7387528	1.223026	3.606694	
		EQM	0.002391464	0.008978457	0.01925234	0.04974046	0.36807719	
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2538702	0.4962754	0.7344262	1.199017	3.250717	
		EQM	0.002902004	0.009268949	0.01807039	0.03960777	0.06285898	
		RP	0.0003128481	0.001210804	0.002663667	0.007127034	0.05259991	
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2544857	0.4974938	0.7362374	1.201985	3.258797	
EQM		0.002968687	0.009505036	0.01856062	0.04079809	0.06697610		
RP		0.001230823	0.002436792	0.003622402	0.005936715	0.01616093		

Tableau 3.3 – Estimations du paramètre de forme  $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 3<sup>ème</sup> cas

► Choix de la méthode d'estimation appropriée basé sur l'EQM et le RP pour  $\alpha = 1$ .

Taille n		4 <sup>ème</sup> cas : $\alpha = 1$					
		Méthode	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\beta = 1$	$\beta = 3$
n=25	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2689128	0.5446575	0.8272467	1.408406	4.500822
		EQM	0.004748981	0.02092578	0.05164106	0.16679513	2.252468
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.3420692	0.5644759	0.7837035	1.171355	1.973327
		EQM	0.020183666	0.02705233	0.03374698	0.02936248	1.054057
		RP	0.003183701	0.01046058	0.0213033	0.04956176	0.1457338
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3466916	0.5736669	0.7971791	1.192323	2.009914
EQM		0.021518423	0.03016018	0.03887959	0.03698810	0.980270	
	RP	0.009244722	0.01838184	0.02695114	0.04193614	0.07317345	
n=50	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.3104368	0.6403345	0.981302	1.686998	5.490284
		EQM	0.01219630	0.05776068	0.1453912	0.4719656	6.20151581
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.3494981	0.6425324	0.9288701	1.455221	2.861672
		EQM	0.02234967	0.05882197	0.1081556	0.2072258	0.01913475
		RP	0.001999706	0.007420218	0.01596221	0.04007198	0.1582862
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3523473	0.6482809	0.937423	1.468924	2.889195
EQM		0.02320969	0.06164340	0.1138543	0.2198902	0.01227764	
	RP	0.005698424	0.01149697	0.01710579	0.02740766	0.05504779	
n=100	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2648485	0.53255	0.8021686	1.345535	4.109198
		EQM	0.004205332	0.01756952	0.04087215	0.11939447	1.23032024
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2790325	0.5373809	0.7905951	1.277301	3.160095
		EQM	0.006246135	0.01887352	0.03632649	0.07689558	0.02563033
		RP	0.0007192304	0.002755486	0.006031344	0.01589583	0.0982976
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2803183	0.5399386	0.7944004	1.283508	3.17561
EQM		0.006451033	0.01958282	0.03779151	0.08037671	0.03083874	
	RP	0.002571661	0.005115448	0.00761055	0.0124147	0.03102973	
n=200	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2489026	0.4947547	0.7387528	1.223026	3.606694
		EQM	0.002391465	0.008978457	0.01925234	0.04974046	0.36807719
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2557162	0.4976028	0.7348515	1.196446	3.224505
		EQM	0.003104297	0.009526302	0.01818491	0.03859107	0.05040234
		RP	0.0003142445	0.001209697	0.002653466	0.007068429	0.05160959
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2563299	0.4988168	0.7366547	1.199396	3.232497
EQM		0.003173060	0.009764764	0.01867450	0.03975892	0.05405507	
	RP	0.001227407	0.002428087	0.003606463	0.005900579	0.01598562	

Tableau 3.4 – Estimations du paramètre de forme  $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 4<sup>ème</sup> cas

► Choix de la méthode d'estimation appropriée basé sur l'EQM et le RP pour  $\alpha = 4$ .

Taille n		5 <sup>ème</sup> cas : $\alpha = 4$					
		Méthode	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\beta = 1$	$\beta = 3$
n=25	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2689128	0.5446575	0.8272467	1.408406	4.500822
		EQM	0.004748981	0.02092578	0.05164106	$1.67 \times 10^{-1}$	2.252468
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.6579915	0.7396875	0.8377025	0.9930074	1.245435
		EQM	0.209756180	0.11538761	0.05650248	$4.89 \times 10^{-5}$	3.078498
		RP	0.002966537	0.006892988	0.01106814	0.0187208	0.03535187
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.6602419	0.7443323	0.8442829	1.002389	1.259548
EQM		0.211822561	0.11856475	0.05967414	$5.71 \times 10^{-6}$	3.029174	
RP		0.004500776	0.009289617	0.0131608	0.01876398	0.02822524	
n=50	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.3104368	0.6403345	0.981302	1.686998	5.490284
		EQM	0.0121963	0.05776068	0.14539120	0.47196561	6.201516
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.5438075	0.7388714	0.9141589	1.185928	1.70338
		EQM	0.1182036	0.11483386	0.09869579	0.03456940	1.681224
		RP	0.002114915	0.00555736	0.009673086	0.01810238	0.0415563
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.5457486	0.7426226	0.9194343	1.193536	1.715534
EQM		0.1195421	0.11739027	0.10203830	0.03745628	1.649852	
RP		0.003882159	0.007502373	0.01055096	0.01521551	0.02430965	
n=100	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2648485	0.53255	0.8021686	1.345535	4.109198
		EQM	0.004205332	0.01756952	0.04087215	0.11939447	1.230320
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.3587728	0.5916376	0.8079715	1.188005	2.32807
		EQM	0.025208788	0.03672498	0.04325215	0.03534587	0.451490
		RP	0.0008149595	0.002601502	0.00513118	0.01161885	0.04680431
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.3599067	0.5938321	0.8111406	1.192885	2.3381
EQM		0.025570160	0.03757089	0.04458037	0.03720463	0.438111	
RP		0.002267936	0.004388981	0.006338264	0.009760092	0.02006112	
n=200	MV	$\hat{\beta}_{MV}$	0.2489026	0.4947547	0.7387528	1.223026	3.606694
		EQM	0.002391464	0.008978457	0.01925234	0.04974046	0.36807719
	SELF	$\hat{\beta}_{SELF}$	0.2953191	0.5270724	0.7481127	1.159	2.706583
		EQM	0.009085731	0.016147386	0.02193737	0.02528088	0.08609337
		RP	0.000342215	0.001191409	0.002474711	0.006090472	0.03408725
	PLF	$\hat{\beta}_{PLF}$	0.2958979	0.5282014	0.7497648	1.161624	2.712873
EQM		0.009196413	0.016435591	0.02242951	0.02612236	0.08244187	
RP		0.001157663	0.00225801	0.00330429	0.005248996	0.01257958	

Tableau 3.5 – Estimations du paramètre de forme  $\beta$ , de l'EQM et du RP dans le 5<sup>ème</sup> cas

### 3.2.2 Interprétation des résultats

Les résultats indiquent que les estimations de  $\beta$  tendent à s'améliorer avec une augmentation de la taille de l'échantillon. Par ailleurs, on observe une amélioration de la précision dans le choix de la méthode basée sur l'EQM et le RP à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Cependant, cette tendance peut varier en fonction de la valeur de  $\beta$ , comme c'est le cas pour  $\beta = 3$ . Il convient également de souligner que la taille de l'échantillon est considérée comme grande à partir de  $n = 50$ .

Les tableaux 3.6 et 3.7 offrent une vue d'ensemble des résultats obtenus.

$\alpha$	$\beta$	meilleure méthode
0.25	0.2	MV
	0.4	SELF
	0.6	SELF
	1	SELF
	3	PLF
0.5	0.2	MV
	0.4	MV & SELF
	0.6	SELF
	1	SELF
	3	PLF
0.75	0.2	MV
	0.4	MV
	0.6	SELF
	1	SELF
	3	PLF
1	0.2	MV
	0.4	MV
	0.6	SELF
	1	SELF
	3	PLF
4	0.2	MV
	0.4	MV
	0.6	MV
	1	SELF
	3	PLF

Tableau 3.6 – Conclusion de la simulation de l'EQM

$\alpha$	$\beta$	meilleure méthode
0.25	0.2	SELF
	0.4	SELF
	0.6	SELF
	1	PLF
	3	PLF
0.5	0.2	SELF
	0.4	SELF
	0.6	SELF
	1	PLF
	3	PLF
0.75	0.2	SELF
	0.4	SELF
	0.6	SELF
	1	PLF
	3	PLF
1	0.2	SELF
	0.4	SELF
	0.6	SELF
	1	PLF
	3	PLF
4	0.2	SELF
	0.4	SELF
	0.6	SELF
	1	PLF
	3	PLF

Tableau 3.7 – Conclusion de la simulation du RP

### 3.3 Application sur des données réelles

#### 3.3.1 Description des données utilisées

Dans cette section, nous envisageons de trouver l'estimation du paramètre de forme  $\beta$  du modèle  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$  à l'aide des méthodes du MV et bayésienne basées sur les données de capacité du réservoir Shasta (voir la référence [3]). Le réservoir se trouve en Californie, aux États-Unis, avec des dimensions de 602 pieds de hauteur (183 m), 3460 pieds de longueur (1050 m) et une capacité totale de 4,552 millions d'acres-pieds (5,615 millions de mètres cubes). Le tableau 3.8 présente les 20 observations de la capacité du réservoir avant et après transformation pour chaque mois de février de 1991 à 2010.

Cependant, il est important de noter que, pour notre étude, nous nous concentrerons uniquement sur les données hydrologiques du réservoir suite à leur transformation.

Année	Capacité	Capacité transformée	Année	Capacité	Capacité transformée
1991	1542838	0.338936	2001	3495969	0.768007
1992	1966077	0.431915	2002	3839544	0.843485
1993	3459209	0.759932	2003	3584283	0.787408
1994	3298496	0.724626	2004	3868600	0.849868
1995	3448519	0.757583	2005	3168056	0.69597
1996	3694201	0.811556	2006	3834224	0.842316
1997	3574861	0.785339	2007	3772193	0.828689
1998	3567220	0.78366	2008	2641041	0.580194
1999	3712733	0.815627	2009	1960458	0.430681
2000	3857423	0.847413	2010	3380147	0.742563

Tableau 3.8 – Données de capacité du réservoir Shasta pour chaque mois de février 1991 à 2010

#### 3.3.2 Étude descriptive des données de capacité du réservoir Shasta

Le résumé statistique des données hydrologiques du réservoir après transformation est présenté comme suit :

Minimum	Maximum	Moyenne	Variance
0.338936	0.849868	0.7212884	0.02333452

Tableau 3.9 – Statistiques des données de capacité du réservoir Shasta

### Analyse graphique des données de capacité du réservoir Shasta

Les graphiques illustrant la PDF et la CDF des données sont présentés respectivement dans les figures 3.2 et 3.3.

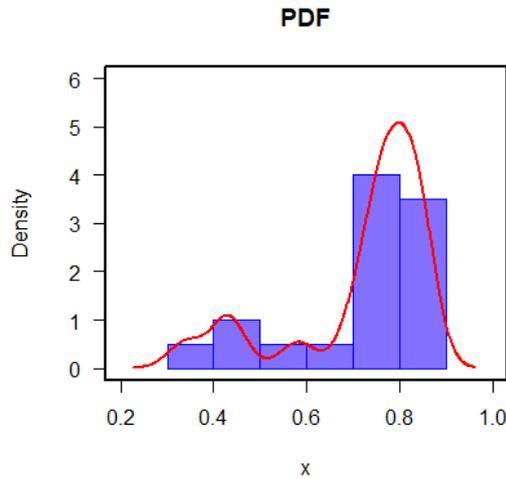


FIGURE 3.2 – PDF des données de capacité du réservoir Shasta

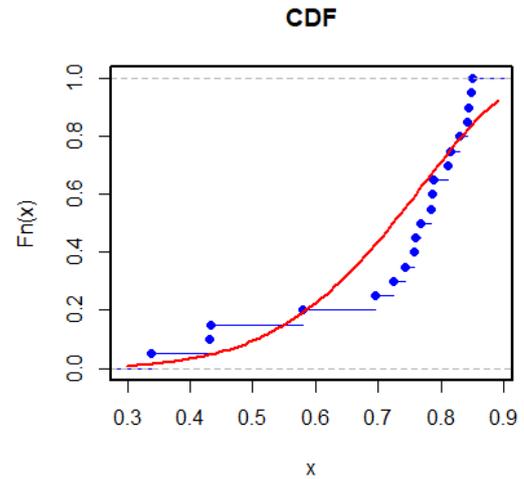


FIGURE 3.3 – CDF des données de capacité du réservoir Shasta

Selon le graphique 3.2 et la variation du PDF de Kumaraswamy dans la figure 3.1, on observe que la configuration de l'histogramme des données de capacité du réservoir Shasta correspond à un type I, qui peut être caractérisé par la distribution de Kumaraswamy avec des paramètres  $\alpha > 1$  et  $\beta > 1$ .

#### 3.3.3 Application numérique

Étant donné la possibilité d'ajuster les données de capacité du réservoir Shasta selon le modèle de Kumaraswamy, avec des paramètres  $\alpha > 1$  et  $\beta > 1$ , nous allons poursuivre la recherche sur l'estimation en utilisant des valeurs spécifiques pour  $\alpha$  telles que 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9, 9.5, 10, 10.5.

Les résultats obtenus seront résumés et présentés dans le tableau suivant.

$\alpha$	$\hat{\beta}_{MV}$	$\hat{\beta}_{SELF}$	$\hat{\beta}_{PLF}$	RP( $\hat{\beta}_{SELF}$ )	RP( $\hat{\beta}_{PLF}$ )
1.5	0.9415001	0.8082698	0.817514	0.01502909	0.01848842
2	1.1769	0.8776047	0.8876419	0.01771813	0.02007439
2.5	1.432154	0.9347648	0.9454557	0.02010132	0.02138187
3	1.711433	0.9829336	0.9941755	0.02222636	0.02248369
3.5	2.01846	1.024097	1.03581	0.02412693	0.02342527
4	2.356926	1.059618	1.071737	0.02582967	0.02423778
4.5	2.730679	1.090492	1.102964	0.02735678	0.02494399
<b>5</b>	<b>3.143831</b>	<b>1.117475</b>	<b>1.130256</b>	<b>0.02872736</b>	<b>0.02556121</b>
5.5	3.600819	1.141161	1.154212	0.02995804	0.02610299
6	4.106466	1.162024	1.175314	0.03106348	0.02658022
6.5	4.66602	1.180455	1.193956	0.03205669	0.02700181
7	5.285211	1.196775	1.210463	0.03294921	0.02737512
7.5	5.970293	1.211256	1.225109	0.03375137	0.02770634
8	6.728105	1.224126	1.238126	0.03447243	0.02800074
8.5	7.566119	1.235582	1.249713	0.03512067	0.02826278
9	8.492509	1.245792	1.260041	0.03570353	0.02849634
9.5	9.516213	1.254904	1.269256	0.03622769	0.02870475
10	10.64701	1.263043	1.277488	0.03669914	0.02889093
10.5	11.89559	1.27032	1.284849	0.03712327	0.02905739

Tableau 3.10 – Estimation et RP du paramètre de forme  $\beta$  du modèle  $\text{Kum}(\alpha, \beta)$  sur la base des données de capacité du réservoir Shasta pour chaque mois de février 1991 à 2010

En se référant aux résultats du tableau 3.10, il est observé que l'estimation de  $\beta$  par la méthode de Bayes dépasse la valeur de un dès que  $\alpha$  atteint 3.5 ou plus.

Cependant, si on détermine  $\alpha$  par la méthode du MV (comme décrit dans Annexe code R 2), on obtient  $\hat{\alpha}_{MV} = 6.347577$ , une valeur sensiblement égale à 6.5.

**Remarque 3.3.1.** *En raison de la comparaison du seul paramètre  $\beta$ , la détermination de  $\alpha$  doit être effectuée indépendamment de la valeur obtenue par d'autres méthodes.*

*Par conséquent, pour établir une valeur pour  $\alpha$ , nous choisissons le critère  $\alpha = \frac{6.5+3.5}{2} = 5$ , ce qui nous conduit aux trois modèles suivants.*

►1<sup>er</sup> modèle Kum( $\alpha, \beta$ ) avec  $\alpha = 5$  et  $\hat{\beta}_{MV} = 3.143831$

▷ PDF :  $f_X(x) = 15.719155x^4(1 - x^5)^{2.143831}$ ,  $0 < x < 1$

▷ CDF :  $F_X(x) = 1 - (1 - x^5)^{3.143831}$ ,  $0 < x < 1$

Les graphiques illustrant la PDF et la CDF sont présentés respectivement dans les figures 3.4 et 3.5.

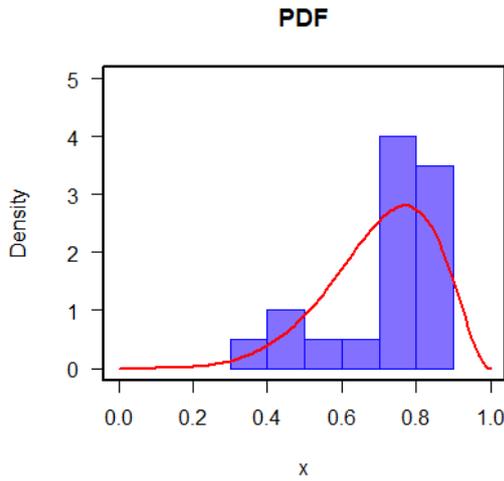


FIGURE 3.4 – PDF de Kumaraswamy du 1<sup>er</sup> modèle

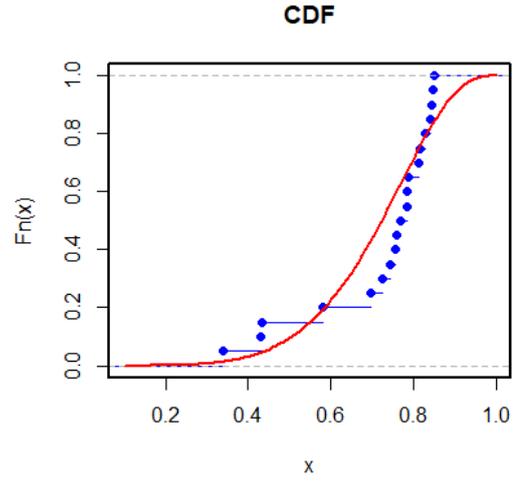


FIGURE 3.5 – CDF de Kumaraswamy du 1<sup>er</sup> modèle

►2<sup>ème</sup> modèle Kum( $\alpha, \beta$ ) avec  $\alpha = 5$  et  $\hat{\beta}_{SELF} = 1.117475$

▷ PDF :  $f_X(x) = 5.587375x^4(1 - x^5)^{0.117475}$ ,  $0 < x < 1$

▷ CDF :  $F_X(x) = 1 - (1 - x^5)^{1.117475}$ ,  $0 < x < 1$

Les graphiques illustrant la PDF et la CDF sont présentés respectivement dans les figures 3.6 et 3.7.

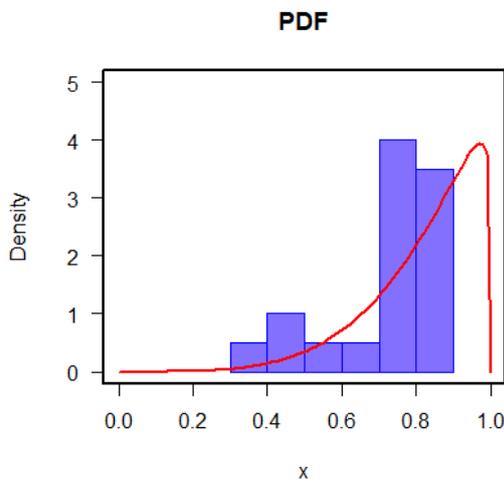


FIGURE 3.6 – PDF de Kumaraswamy du 2<sup>ème</sup> modèle

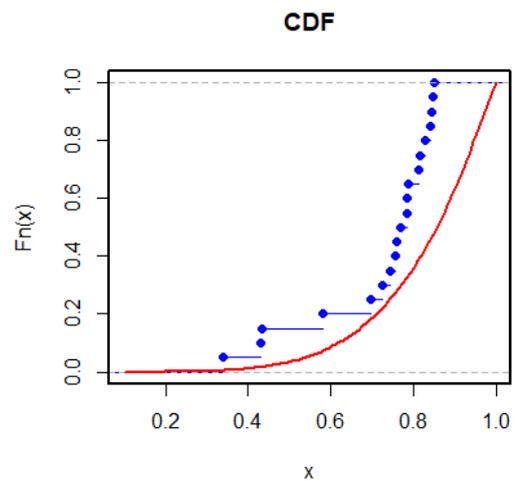


FIGURE 3.7 – CDF de Kumaraswamy du 2<sup>ème</sup> modèle

► 3<sup>ème</sup> modèle Kum( $\alpha, \beta$ ) avec  $\alpha = 5$  et  $\hat{\beta}_{PLF} = 1.130256$

▷ PDF :  $f_X(x) = 5.65128x^4(1 - x^5)^{0.130256}$ ,  $0 < x < 1$

▷ CDF :  $F_X(x) = 1 - (1 - x^5)^{1.130256}$ ,  $0 < x < 1$

Les graphiques illustrant la PDF et la CDF sont présentés respectivement dans les figures 3.8 et 3.9.

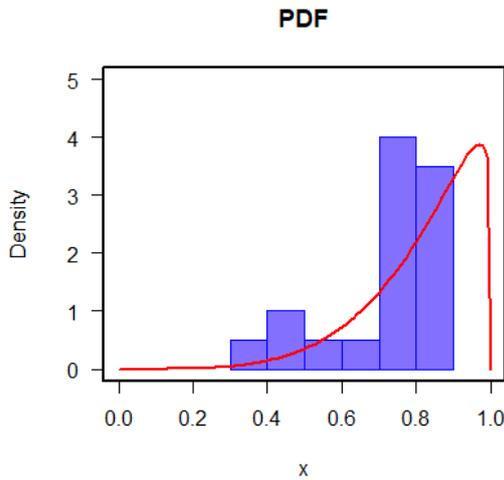


FIGURE 3.8 – PDF de Kumaraswamy du 3<sup>ème</sup> modèle

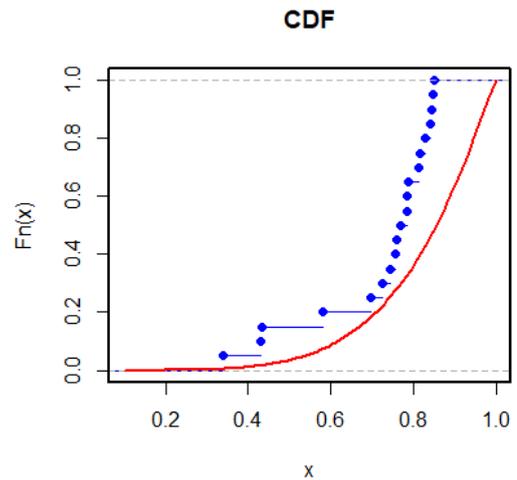


FIGURE 3.9 – CDF de Kumaraswamy du 3<sup>ème</sup> modèle

En observant les différentes figures présentées dans chaque modèle, il est notable que parmi les trois modèles, le 1<sup>er</sup> modèle présente une fonction de densité capable d’ajuster la fonction de distribution empirique des données.

Par ailleurs, en appliquant le test d’adéquation de Kolmogorov-Smirnov, nous parvenons à la même conclusion, affirmant que le 1<sup>er</sup> modèle est le plus approprié pour représenter les données de capacité du réservoir Shasta. Le tableau 3.11 présente les p-values<sup>1</sup> correspondantes à chaque modèle.

Modèle	1 <sup>er</sup> modèle	2 <sup>ème</sup> modèle	3 <sup>ème</sup> modèle
p-value	0.1271	$1.506 \times 10^{-05}$	$1.814 \times 10^{-05}$

Tableau 3.11 – p-valeurs des trois modèles de Kumaraswamy

L’analyse du tableau 3.11 révèle clairement une p-value élevée pour le 1<sup>er</sup> modèle. Par conséquent, nous ne pouvons pas rejeter l’hypothèse nulle ( $H_0$ ). En revanche, pour les autres modèles, les p-valeurs sont significativement faibles, conduisant au rejet de l’hypothèse nulle ( $H_0$ ) au profit de l’hypothèse alternative ( $H_a$ ).

Précisons que :

$H_0$  : Les données de Shasta suivent une distribution de Kumaraswamy.

$H_a$  : Les données de Shasta ne suivent pas la distribution de Kumaraswamy.

1. Correspondant à une valeur observée d’une statistique de test, la p-value (ou p-valeur) est le niveau de signification le plus bas auquel l’hypothèse nulle aurait été rejetée.

---

## Conclusion et perspectives

---

En conclusion, cette étude a examiné deux approches cruciales, à savoir la méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) et la méthode de Bayes, pour estimer le paramètre de forme  $\beta$  dans la distribution de Kumaraswamy.

L'estimation du paramètre de forme  $\beta$  issue de la méthode du MV repose exclusivement sur les données extraites, tandis que celle obtenue par la méthode de Bayes dépend d'une combinaison de données et d'informations sur le paramètre de forme  $\beta$ .

Les résultats obtenus soulignent l'importance de choisir la méthode appropriée en fonction des caractéristiques spécifiques des données et des exigences de l'analyse.

En perspective, nous pourrions élargir cette étude en explorant des méthodes d'estimation alternatives, telles que les méthodes numériques ou les approches basées sur les moments.

Une analyse approfondie des performances entre les méthodes du MV et de Bayes est également envisagée pour mieux comprendre leurs avantages respectifs.

De plus, on pourrait s'orienter vers des modèles bayésiens plus complexes afin d'améliorer la précision des estimations.

---

# Bibliographie

---

- [1] Besse P. (2012-2013). *Introduction à la modélisation statistique*. Disponible sur [https://www.mn.uio.no/math/tjenester/kunnskap/kompendier/num\\_opti\\_likelihoods.pdf](https://www.mn.uio.no/math/tjenester/kunnskap/kompendier/num_opti_likelihoods.pdf)
- [2] Béguin M., Gaudoin O. (2009). *Principes et méthodes statistiques*. Cours Ensimag-2ème Année, INP Grenoble
- [3] California Data Exchange Center (2016). Disponible sur <https://cdec.water.ca.gov/>
- [4] Cantoni E., Huber P., Ronchetti E. (2006). *Maîtriser l'aléatoire : exercices résolus de probabilités et statistique*. Springer-Verlag France, Paris
- [5] Chesneau C. (2018). *Sur l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance*. Université de Caen. Disponible en ligne sur <https://cel.hal.science/cel-01430435/document>
- [6] Craig A.T., Hogg R.V., McKean J.W. (2013). *Introduction to mathematical statistics*. Pearson Education India
- [7] Dauxois J.Y. (2011-2012). *Statistique Inférentielle*. Cours CTU, Master Enseignement des Mathématiques, Université de Franche-Comté. Disponible en ligne sur [https://perso.math.univ-toulouse.fr/jydauxoi/files/2013/11/cours\\_stat\\_inf\\_Master.pdf](https://perso.math.univ-toulouse.fr/jydauxoi/files/2013/11/cours_stat_inf_Master.pdf)
- [8] Dupuis J. (2007). *Statistique bayésienne et algorithmes MCMC*. Cours M1-IMAT, Institut de Mathématiques de Toulouse. Disponible en ligne sur <https://www.math.univ-toulouse.fr/~dupuis/bayesmim08.pdf>
- [9] Dusart P. (2018). *Statistiques inférentielles*. Cours Licence 2-S4 SI-MASS, Université de Limoges. Disponible en ligne sur [https://www.unilim.fr/pages\\_perso/pierre.dusart/Probas/cours\\_stat\\_S4.pdf](https://www.unilim.fr/pages_perso/pierre.dusart/Probas/cours_stat_S4.pdf)
- [10] Gouno E. (2012-2013). *Statistique Bayésienne*. Cours M1-ISD, Université Bretagne Sud. Disponible en ligne sur <http://web.univ-ubs.fr/lmba/gouno/BAYES/COURS/Cours1.pdf>
- [11] Gouno E. (2012-2013). *Statistique Bayésienne*. Cours M1-ISD, Université Bretagne Sud. Disponible en ligne sur <http://web.univ-ubs.fr/lmba/gouno/BAYES/COURS/Cours2.pdf>
- [12] Gouno E. (2012-2013). *Statistique Bayésienne*. Cours M1-ISD, Université Bretagne Sud. Disponible en ligne sur <http://web.univ-ubs.fr/lmba/gouno/BAYES/COURS/Cours3.pdf>

- [13] Jones O., Maillardet R., Robinson A. (2014). *Introduction to scientific programming and simulation using R*, Second Edition, CRC Press, New York
- [14] Khawla B. (2016-2017). *Étude de l'estimateur de Bayes sous différentes fonctions de perte*. Doctorat de l'Université Badji Mokhtar Annaba. Disponible en ligne sur <https://biblio.univ-annaba.dz/wp-content/uploads/2017/10/These-Boudjerda-Khawla.pdf>
- [15] Kumaraswamy P. (1980). A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of hydrology*, vol. 46, pp. 79-88
- [16] Lefebvre M. (2011). *Probabilités, statistique et applications*. Presses internationales Polytechnique, Canada
- [17] Lejeune M. (2010). *Statistique : La théorie et ses applications*, Deuxième édition, Springer-Verlag France, Paris
- [18] Liu Y., Luo L., Zhang F. (2019). A Precautionary Loss-based Bayesian Algorithm for Zero Failure Analysis of Exponential Model. *Journal of Physics : Conference Series*, vol. 1325, no. 1, pp. 012116-012123
- [19] Mitnik P.A. (2013). New properties of the Kumaraswamy distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 42, no. 5, pp. 741-755
- [20] Quarteroni A.M., Sacco R., Saleri F. (2007). *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer-Verlag Italia, Milano
- [21] Ramachandran K.M., Tsokos C.P. (2007). *Mathematical statistics with applications in R*, Second edition, Academic Press is an imprint of Elsevier
- [22] Richou A., Traonmilin Y. (2018). *Introduction aux Statistiques Bayésiennes*. Basées sur les notes de cours de Charles Dossal et de Jérémie Bigot, Institut de Mathématique de Bordeaux. Disponible en ligne sur <https://www.math.u-bordeaux.fr/~arichou/Bayes/StatBayesiennes.pdf>
- [23] Rousselle A. (2023). *Probabilités et Statistiques*. Cours de troisième année Informatique/Électronique, Université de Bourgogne. Disponible en ligne sur <https://arousselle.perso.math.cnrs.fr/CMESIREM.pdf>
- [24] Storvik G. (2011). *Numerical optimization of likelihoods : Additional literature for STK2120*. University of Oslo. Disponible en ligne sur [https://www.mn.uio.no/math/tjenester/kunnskap/kompendier/num\\_opti\\_likelihoods.pdf](https://www.mn.uio.no/math/tjenester/kunnskap/kompendier/num_opti_likelihoods.pdf)

---

# Annexe

---

---

**Code R 1** ESTIMATION DU PARAMÈTRE DE FORME  $\beta$  DU MODÈLE  $KUM(\alpha, \beta)$ , DE L'EQM ET DU RP

---

```
##### simulation de la loi kumaraswamy #####
```

```
library(extraDistr)
s <- rkumar(200,0.5,3)
```

```
##### code point fixe #####
```

```
fixedpoint <- function(ftn, alpha0, tol = 1e-9, max.iter = 100){
xold <- alpha0
xnew <- ftn(xold)
iter <- 1
cat("A l'itération 1 la valeur de alpha est :", xnew, "\n")
# poursuivre l'itération jusqu'à ce que les conditions d'arrêt
# soient remplies
while ((abs(xnew-xold) > tol) && (iter < max.iter)){
xold <- xnew;
xnew <- ftn(xold);
iter <- iter + 1
cat("A l'itération", iter, "la valeur de alpha est:", xnew, "\n")
}
# le résultat dépend de la réussite de l'algorithme
if (abs(xnew-xold) > tol) {
cat("l'algorithme ne converge pas \n")
return(NUL)
} else {
cat("l'algorithme converge\n")
return(xnew)
}
}
```

```
##### définition de la fonction phi(alpha) #####
```

```
ftn1 <- function(alpha){
n <- length(s)
num0 <- sum(log(1-s^alpha))
num1 <- sum(s^alpha*log(s)/(1-s^alpha))
resultat <- (-1/n)*sum(log(s))-(1/n)*((n/num0)+1)*num1
return(1/resultat)
}
```

```
##### Fonction pour calculer beta_EMV #####
```

```
beta_EMV <- function(alpha){
n <- length(s)
num <- sum(log(1-s^alpha))
result <- (-n/num)
return(result)
}
```

```
##### Fonction pour calculer la valeur estimée de delta #####
```

```
calcul_delta <- function(a){
n <- length(a)
mean_a <- mean(a)
numerator <- mean_a^2
denominator <- sum((a^2)/n) - mean_a^2
delta_hat <- numerator / denominator
return(delta_hat)
}
```

```
##### Fonction pour calculer la valeur estimée de b #####
```

```
calcul_b <- function(u){
n <- length(u)
mean_u <- mean(u)
numerator <- sum((u^2)/n) - mean_u^2
denominator <- mean_u
result_calcul <- numerator / denominator
return(result_calcul)
}
```

```
##### Fonction pour calculer beta_SELF #####
```

```
beta_SELF <- function(alpha){
n <- length(s)
b <- calcul_b(s)
delta <- calcul_delta(s)
sum_term <- sum(log(1-s^alpha))
resultat <- (delta+n)/((1/b)-sum_term)
return(resultat)
}
```

```
##### Fonction pour calculer RP_SELF #####
```

```
RP_SELF <- function(alpha){
n <- length(s)
b <- calcul_b(s)
delta <- calcul_delta(s)
sum_term <- sum(log(1 - s^alpha))
result <- (delta + n) / ((1/b - sum_term)^2)
return(result)
}
```

```
##### Fonction pour calculer beta_PLF #####
```

```
beta_PLF <- function(alpha){
n <- length(s)
b <- calcul_b(s)
delta <- calcul_delta(s)
sum_log <- sum(log(1 - s^alpha))
resultat <- sqrt((delta + n) * (delta + n + 1)) / ((1 / b) - sum_log)
return(resultat)
}
```

```
##### Fonction pour calculer RP_PLF #####
```

```
RP_PLF <- function(alpha){
n <- length(s)
b <- calcul_b(s)
delta <- calcul_delta(s)
sum_term <- sum(log(1 - s^alpha))
result <- 2 * ((sqrt((delta + n) * (delta + n + 1))
- (delta + n)) / ((1 / b) - sum_term))
return(result)
}
```

```
##### Appels de fonctions #####
```

```
hat_alpha <- fixedpoint(ftn1,1)
resultat0 <- beta_EMV(hat_alpha)
resultat1 <- beta_SELF(hat_alpha)
resultat2 <- beta_PLF(hat_alpha)
resultat3 <- RP_SELF(hat_alpha)
resultat4 <- RP_PLF(hat_alpha)
```

```
##### Erreur quadratique moyenne #####
```

```
EQM <- function(m,beta_true){
  col1 <- numeric(m)
  col2 <- numeric(m)
  col3 <- numeric(m)
  ma <- matrix(data=0,nrow=m,ncol=3)
  for(i in 1 : m){
    ma[i,] <- c(resultat0, resultat1, resultat2)
  }
  for(i in 1 :m){
    col1[i] <- ma[i,1]
    col2[i] <- ma[i,2]
    col3[i] <- ma[i,3]
  }
  biais1 <- mean(col1) - beta_true
  biais2 <- mean(col2) - beta_true
  biais3 <- mean(col3) - beta_true
  EQM_EMV <- var(col1) + biais1^2
  EQM_SELF <- var(col2) + biais2^2
  EQM_PLF <- var(col3) + biais3^2

  return(c(EQM_EMV,EQM_SELF,EQM_PLF))
}
```

```
##### Affichages des résultats #####
```

```
cat("La valeur estimée de alpha est :", hat_alpha, "\n")
cat("La valeur estimée de beta_EMV est :", resultat0, "\n")
cat("La valeur estimée de beta_SELF est :", resultat1, "\n")
cat("La valeur estimée de beta_PLF est :", resultat2, "\n")
cat("La valeur estimée de RP_SELF est :", resultat3, "\n")
cat("La valeur estimée de RP_PLF est :", resultat4, "\n")
```

```
EQM(1000,3)
```

---

**Code R 2** ESTIMATION DE  $\alpha$  PAR LA MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE
 

---

```
##### les données de capacité du réservoir Shasta #####

D=c(0.338936, 0.431915, 0.759932, 0.724626, 0.757583, 0.811556, 0.785339,
0.78366, 0.815627, 0.847413, 0.768007, 0.843485, 0.787408, 0.849868,
0.69597, 0.842316, 0.828689, 0.580194, 0.430681, 0.742563)

##### Maximisation par optim #####

emv <- fonction(D){
logvraisemblance <- fonction(par,e=D)
{
# retourne l'opposé de la log-vraisemblance
alpha <- par[1]
beta <- par[2]
n <- length(e)
v <- -n*log(alpha)-n*log(beta)-(alpha-1)*sum(log(D))-(beta-1)
*sum(log(1-D^alpha))
}
emv <- optim(c(1,1), logvraisemblance)
emv <- emv$par[1]
return(emv)
}

##### appel de fonction et resultat #####
> emv(D)
[1] 6.347577
```