UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

ÉCOLE DOCTORALE : SCIENCES, TECHNOLOGIES ET INGÉNIERIE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Domaine :	Sciences et Technologies
Mention :	Mathématiques et Applications
Spécialité :	Mathématiques Pures
Option :	Analyse et géométrie complexe

....

Présentée par :
Papa BADIANE

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

Sujet de thèse :
Problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe

....

Sous la direction de **Ahmed ZERIAHI** et de **Marie Salomon SAMBOU**

Soutenue le 24 Novembre 2023

Membres du jury :

M. SECK	Diaraf	Professeur	UCAD (Dakar)	Président
M. SECK	Diaraf	Professeur	UCAD (Dakar)	Rapporteur
M. GAYE	Masseye	Professeur	UCAD (Dakar)	Rapporteur
M. LU	Hoang-Chinh	Professeur	LAREMA-UA (Angers)	Rapporteur
M. SALL	Oumar	Professeur	UASZ (Ziguinchor)	Examinateur
M. GUEDJ	Vincent	Professeur	IMT-UT3 (Toulouse)	Examinateur
M. BOUCKSOM	Sebastien	Professeur	IMJ-PRG (Paris)	Examinateur
M. ZERIAHI	Ahmed	Professeur	IMT-UT3 (Toulouse)	Directeur
M. SAMBOU	Marie Salomon	Professeur	UASZ (Ziguinchor)	Directeur

Thèse effectuée au sein du Laboratoire de Mathématiques et Applications (LMA) de l'unité de Formation et de Recherche (UFR) Sciences et Technologie de l'Université Assane SECK de Ziguinchor (UASZ)
BP : 523-ZIGUINCHOR-SENEGAL

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude du problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe ainsi que celui des valeurs propres de l'opérateur Hessien complexe dans un domaine borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$.

Dans le premier chapitre, on donne les éléments de base dont on aura besoin pour les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, on démontre un nouveau théorème d'existence de solutions pour un cas spécial d'équations de Monge-Ampère complexes dégénérées. Pour cela, on va établir de nouvelles estimées a priori du gradient et du laplacien de telles solutions en utilisant les méthodes et les résultats de L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85] et de B. Guan [Guan98].

Dans le troisième chapitre, en suivant la stratégie de P. L. Lions [Lions86], on prouve d'une part l'existence de la première valeur propre et d'une fonction propre associée pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe sur un domaine bornée strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. On montre que la fonction propre est plurisousharmonique, lisse de Laplacien borné dans Ω et de valeurs au bord nulles. De plus, elle est unique à une constante multiplicative positive près.

D'autre part, on propose une approche variationnelle pluripotentielle du problème et en utilisant le nouveau théorème d'existence, on démontre une formule de type quotient de Rayleigh pour la première valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Dans le quatrième chapitre, on utilise une approche variationnelle pour prouver l'existence de la première valeur propre et d'une fonction propre associée qui est m-sousharmonique d'énergie finie pour les opérateurs Hessiens complexes généralisées sur un domaine borné m-hyperconvexe Ω de $\mathbb{C}^n$ associés à une mesure de Borel positive μ sur Ω. Sous certaines hypothèses supplémentaires sur la mesure de Borel positive μ, on prouve que cette fonction propre est Hölder continue. De plus, on donne des applications sur la solvabilité d'équations Hessiennes complexes dégénérées plus générales avec un second membre qui dépend de la fonction inconnue.

Mots clés :
Fonction plurisousharmonique, Opérateur de Monge-Ampère complexe, Problème de Dirichlet, Problème des valeurs propres, Valeur propre, Fonction propre, Sous-solution, Sursolution, Estimée a priori, Energie fonctionnelle, Fonction m-sousharmonique, Opérateur Hessien, approche variationnelle, Quotient de Rayleigh.

Abstract

In this thesis we study the eigeivalue problem for the complex Monge-Ampère operators and also for the complex Hessian operators in a bounded strongly pseudoconvex domain of $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary.

In chapter one, we give the basic elements that we will need in the sequel.

In chapter two, we prove a new theorem on the existence of solutions for some special complex degenerate Monge-Ampère equations. This requires establishing new a priori estimates for the gradient and the Laplacian of such solutions using methods and results of L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85] and B. Guan [Guan98].

In chapter three, following the strategy used by P. L. Lions in the real case [Lions86], we prove the existence of the first eigenvalue and an associated eigenfunction with Dirichlet condition for the complex Monge-Ampère operator on a bounded strongly pseudoconvex domain Ω in $\mathbb{C}^n$. We show that the eigenfunction is plurisubharmonic, smooth with bounded Laplacian in Ω and boundary values 0. Moreover it is unique up to a positive multiplicative constant.

Finally we provide a Pluripotential variational approach to the problem and using our new existence theorem, we prove a Rayleigh quotient type formula for the first eigenvalue of the complex Monge-Ampère operator.

In chapter four, we use a variational approach, to prove the existence of the first eigenvalue and an associated eigenfunction which is m-subharmonic with finite energy on a bounded m-hyperconvex domain Ω for general complex Hessian operators of order m associated to a positive Borel measure μ on Ω. Under some extra assumption on the measure μ we prove Hölder continuity of the corresponding eigenfunction. Moreover we give applications to the solvability of more general degenerate complex Hessian equations with the right hand side depending on the unknown function.

Keywords :
Plurisubharmonic function, Complex Monge-Ampère operator, Dirichlet Problem, Subsolution, Supersolution, Eigenvalue Problem, Eigenfunction, A priori estimate, Energy Functional, Subharmonic function, Complex Hessian operator, Variational approach, Rayleigh quotient.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude et ma reconnaissance envers tous ceux qui m'ont apporté leur soutien de toute nature afin que je puisse poursuivre ma formation dans de bonnes conditions et à réussir de cette thèse de doctorat.

Les premiers remerciements de cette thèse vont à l'endroit de mes directeurs de thèse Ahmed ZERIAHI et Marie Salomon SAMBOU dont l'encadrement et le soutien m'ont été d'une grande aide pour la réalisation de ce travail.

Je voudrais remercier tout particulièrement Ahmed qui m'a dirigé depuis mon mémoire de master 2. Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions et s'est toujours intéressé à l'avancement de mes travaux. Il a consacré beaucoup de temps à m'enseigner les notions de base de la Théorie du Pluripotentiel, à me faire profiter de ses profondes connaissances en analyse et géométrie complexe. Je suis émue par sa patience, sa pédagogie, sa rigueur scientifique et sa vaste culture en mathématique. Il a aussi, par ses qualités humaines exceptionnelles, rendu agréables mes séjours en France et m'a fait découvrir la cuisine toulousaine et marocaine. Cette thèse lui doit beaucoup. Pour cela merci.

Je suis reconnaissant envers Salomon, d'avoir participé à ma formation depuis la licence. Il m'a consacré beaucoup de temps pendant ces années de thèses. Je le remercie aussi pour son sens de l'écoute, sa rigueur, sa disponibilité, ses encouragements et ses qualités humaines hors pair. Merci à vous aussi, sans vous cette thèse n'aurait pas eu lieu.

Je vous remercie tous les deux de m'avoir introduit à un sujet riche et passionnant, au carrefour de plusieurs disciplines. Je suis vraiment ému par l'attention que vous avez portée à mon égard tout au long de ces années de thèse. C'était un réel plaisir pour moi de pouvoir effectuer ce projet sous votre direction.

C'est pour moi un honneur de compter parmi mes rapporteurs de thèse Hoang-Chinh LU, Diaraf SECK et Masseye GAYE. Je vous remercie d'avoir pris du temps pour la lecture scrupuleuse et l'évaluation de ce manuscrit. Vos commentaires et vos remarques précis ont contribué à l'amélioration et à la qualité de cette thèse.

J'exprime ma gratitude envers Vincent GUEDJ, Sebastien BOUCKSOM et Oumar SALL pour le temps qu'ils ont consacré à ce document pour me permettre de le rendre meilleur. Je suis honoré de vous avoir comme examinateurs.

Je remercie l'ensemble des membres du groupe de travail GdT Komplex de l'IMT. Je tiens également à remercier tous mes collègues de l'IMT à savoir : Chung-Ming, Candice, Erfan, Nicanor, Tuan, Antonio, Florian, Jordi, William etc.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers Catherine STASIULIS, Janani CHANDRAN et Marie Laure AUSSET pour tout le travail qu'elles ont abattu pour rendre agréables mes séjours à Toulouse.

J'exprime ma gratitude envers mes amis sénégalais de France. Il s'agit de Malick NIANG, Rakhayatou NDAO, Massamba GUEYE, Daouda PENE, Ahmadou NIANG, Gorgui GACKOU, Ndiassé MBENGUE, Ibra SALL, Fallou GNING, Mouhsinatou THIAW, etc.

Je voudrais exprimer ma gratitude à mes collaborateurs de l'UASZ, à savoir : Sény DIATTA, Winnie Ossete INGOBA, Mamadou Eramane BODIAN, Dieynaba SAMB. Je remercie particulièrement Souhaibou SAMBOU pour sa disponibilité, ses conseils et sa générosité.

Je remercie également mes collègues du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'UASZ à savoir : Moustapha CAMARA, Saliou DIAW, Awa BARRY, Modou NDOUR, Marie FAYE, Fatou DIENG, Abdoulaye DIOUF, Algassimou DIALLO, Mamadou Korca BA, Aliou BA, Johnathan DJELLA, Seth Koumla KANG, El Hadji SOW, Christophe Lopez NANGO, Chérif Mamina COLY, Guillaume Itbadio SADIO, Thierno DIALLO etc.

J'exprime ma gratitude envers Serigne Alioune Badara DIENG et Yaya DIALLO pour leur aide, leur conseil et leur accompagnement pour la réalisation de ce travail.

Je voudrais aussi remercier Alassane TAMBOURA et toute l'équipe de Ziguinchor Institut Polytechnique de nous avoir donné l'opportunité de mener nos travaux de recherches dans leurs locaux.

Je remercie l'ensemble des membres du Dahira Matlabul Fawzayni et du Diazboul Mouride de l'UASZ.

Je ne peux pas écrire de remerciements sans citer mes amis : Mouhammed DIAGNE, Mory NDIAYE, Abdou FALL, Ibrahima THIAM, Cheikh Aliou SECK, Adja Awa Kane BADIANE, Maïmouna DEME, Serigne Massamba DIENG, Mouhamed NIANG, Khady Gueye DIAGNE, Aminata THIAM, Serigne Mbacké DIENE, Khadim FALL, Thierno NDIM, Cheikh DIOUF, Mbacké MARONE, Mame Cheikh Ibrahima Fall DIAGNE, Cheikh Omar DIALLO, Fallou SALL, Sokhna Mariama MBACKE, Kollé DIOP, Yada DIOP, Diama GADIAGA, Mame Diarra DIOP, Assane GUEYE, Ndongo FALL, Modou MBAYE, Sokhna Mame Diarra Bousso GNING, Maïmouna GAYE, Abdou Seck DIOUM, Ramatoulaye DIAGNE, Ndiéme NDIAYE, Moussa Ndiaye SOCK, Fallou DIAGNE, Mor DIENG, Bara DIONG, Mouhammed Racine NDIAYE, Mouhamed MBAYE, Khadim SECK, Issa TOGOLA etc.

Je voudrais aussi remercier toute ma famille, mes parents, mes frères et sœurs pour leur patience, leur soutien et leur compréhension durant toute ma formation. Je remercie également la famille DIOP depuis Keur Samba KANE pour leur accueil et leur soutien. Mes remerciements vont aussi à l'endroit de El Hadji Malick NGOM et toute sa famille.

Je ne saurais terminer sans exprimer un remerciement particulier à Monsieur Daouda Niang DIATTA qui en plus d'être la personne qui a su développer ma passion pour les Mathématiques, a beaucoup participé à la réalisation de cette thèse de par ses conseils, son aide et son soutien.

Dédicace

Je tiens à dédier ce travail :

À mes grands parents

À ma petite soeur Pénda NDIAYE

À Cheikh Balla Thioro MBACKÉ

À Mame Cheikh Ibrahima FALL

Table des matières

Introduction

Motivation

Dans cette thèse on étudie le problème des valeurs propres des opérateurs de type Monge-Ampère complexe et plus généralement celui des opérateurs de type Hessien complexe sur dans un domaine (ensemble ouvert, non-vide et connexe) borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$.

Les équations de Monge-Ampère complexes jouent un rôle fondamental aussi bien en analyse complexe qu'en géométrie kählerienne.

Il est bien connu que pour un domaine borné D à bord suffisamment régulier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ avec N au moins égale à 2, l'opérateur de Laplace, en tant qu'opérateur non borné de l'espace $L^2(D)$ des fonctions de carrés intégrables à valeurs au bord nulles admet une infinité dénombrable de valeurs propres positives tendant vers l'infini. De plus les sous-espaces propres correspondants donnent une décomposition orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2(D)$.

Il y a un autre opérateur qui joue un rôle important en analyse convexe, c'est l'opérateur de Monge-Ampère réel. Cet opérateur associe à une fonction convexe, le déterminant de sa matrice Hessienne (réelle) lorsque la fonction est lisse. Il peut être étendu au cas des fonctions convexes mais la Hessienne étant alors une matrice à coefficients mesures positives. Le déterminant est une mesure qui doit être définie au sens d'Alexandroff.

Dans ce cas l'opérateur est non linéaire mais le problème des valeurs propres pour cet opérateur a été formulé et résolu par P. L. Lions en 1985 [Lions86]. La réponse contraste singulièrement avec l'opérateur de Laplace.

Dans le cas particulier où la dimension est $N = 2$, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni d'une structure complexe et peut être identifié à $\mathbb{C}$. Dans ce cas l'opérateur est intimement lié à l'opérateur de Cauchy-Riemann, ce qui se traduit par un lien étroit entre la théorie du potentiel logarithmique et la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Le sujet proposé dans cette thèse s'incrit d'une part dans l'étude des problèmes des équations de Monge-Ampère dans le cadre complexe.

L'opérateur qui entre en jeu est l'opérateur de Monge-Ampère complexe qui à une fonction plurisousharmonique (l'équivalent complexe des fonctions convexes) associe le déterminant de sa matrice Hessienne complexe lorsque celle-ci est lisse. Dans le cas général, la définition est bien plus compliquée car les fonctions plurisousharmoniques ne sont pas en général continues et peuvent avoir des singularités. Néanmoins E. Bedford et B. A. Taylor ont résolu ce problème dans deux articles fondateurs en 1976 et 1982 [BT76, BT82]. Ce qui a donné naissance à une nouvelle théorie, appelée Théorie du Pluripotentiel.

Dans ce cas le problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe a été considéré par N. D. Koutev et I. P. Ramadanov dans [KR89, KR90] mais leur étude ne contient pas le cas traité dans cette thèse.

D'autre part cette thèse s'intéresse aussi à l'étude du problème des valeurs propres pour des opérateurs de type Hessien complexe associés à une fonction de classe C^2 avec donnée au bord de type Dirichlet. L'opérateur Hessien complexe est la fonction symétrique élémentaire de degré $1 \leq m \leq n$ des valeurs propres de sa Hessienne complexe. Le cas $m = 1$ correspond à l'opérateur de Laplace. Le cas $m = n$ correspond à l'opérateur de Monge-Ampère complexe que l'on vient d'introduire ci-dessus. Lorsque que la fonction inconnue est seulement bornée, une théorie du potentiel analogue à celle de Bedford-Taylor [BT76] a été développée par Błocki [Bl05] et C. H. Lu [Lu12] dans le cadre locale mais aussi dans le cadre globale par C. H. Lu [Lu12].

Pour le cas des opérateurs Hessiens réels, l'existence de la première valeur propre a été prouvée par X. J. Wang (voir [Wang94]) en utlisant une approche parabolique.

Cette thèse comporte trois parties :

• La première partie porte sur les équations de Monge-Ampère complexes sur les domaines strictement pseudoconvexes à bord lisse de $\mathbb{C}^n$.

• La deuxième partie concerne les applications aux problèmes des valeurs propres des opérateurs de Monge-Ampère complexes dans des domaines strictement pseudoconvexes à bord lisse de $\mathbb{C}^n$ avec donnée au bord de type Dirichlet.

• Dans la troisième partie on développe une approche variationnelle pour le problème des valeurs propres des opérateurs de type Hessien complexe généralisé avec donnée au bord de type Dirichlet.

Dans ce qui suit nous allons donner un résumé des principaux résultats que nous avons obtenus avec quelques idées de preuve.

Problème de Dirichlet pour les équations de Monge-Ampère complexes

Dans cette partie, nous allons prouver un nouveau théorème d'existence d'une solution pour un cas spécial d'équations de Monge-Ampère complexes dégénérées que nous utiliserons pour démontrer les résultats principaux sur le problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné à bord lisse et $\psi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction lisse sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ et $\psi \geq 0$.

On considère le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe :

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \psi(\cdot, u)\beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où β est la forme de Kähler standard sur $\mathbb{C}^n$ et $u \in \mathcal{P}(\Omega) := PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ est la fonction inconnue.

Ici, nous utilisons les opérateurs différentiels standards $d = \partial + \bar{\partial}$ et $d^c := (i/2)(\bar{\partial} - \partial)$ de sorte que $dd^c = i\partial\bar{\partial}$ et $PSH(\Omega)$ désigne la classe des fonctions plurisousharmoniques sur Ω.

Le problème (0.0.1) a été résolu par L. Caffarelli, J.J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85] lorsque $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, sous l'hypothèse $\frac{\partial \psi}{\partial u} \geq 0$ et certaines conditions sur la façon dont ψ dégénère près du bord $\partial\Omega$. Plus tard ce résultat a été étendu par B. Guan [Guan98] et B. Guan et Q. Li [GL10] à une situation plus générale dans le cas non dégénéré sur un domaine général (domaine borné à bord lisse), en supposant l'existence d'une sous-solution strictement plurisousharmonique.

Cependant ces résultats ne s'appliquent pas dans le cas du problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe que nous considérons. Alors, en utilisant les idées de [CKNS85], nous allons prouver un nouveau théorème d'existence pour de telles équations sous l'hypothèse de l'existence d'une sous-solution et d'une sursolution par application de la méthode du point fixe.

On dit que $\underline{u} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est une sous-solution de (0.0.1) si elle satisfait

$$\begin{cases} (dd^c\underline{u})^n \geq \psi(z,\underline{u})\beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ \underline{u} = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.0.2}$$

De plus une sous-solution $\underline{u}$ est dite *sous-solution stricte* si

$$(dd^c\underline{u})^n \geq (\psi(z,\underline{u}) + \epsilon_0)\beta^n \text{ dans } \Omega, \tag{0.0.3}$$

où $\epsilon_0 > 0$.

On dit aussi que $\bar{u} \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ une sursolution de (0.0.1), si elle satisfait

$$\begin{cases} (dd^c\bar{u})^n \leq \psi(z,\bar{u})\beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

L'inégalité différentielle (0.0.4) est entendue ici au sens des courants sur Ω.

Le résultat principal de cette partie est le suivant.

Théorème 0.0.1. *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse, $0 \leq \psi^{\frac{1}{n}} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ et $\frac{\partial\psi}{\partial u} \leq 0$ dans $\Omega \times]-\infty, 0]$.*

Supposons les conditions suivantes :

(1) si $\psi > 0$ dans $\bar{\Omega} \times]-\infty, 0]$, le problème de Dirichlet (0.0.1) admet une sous-solution $\underline{u} \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$;

(2) si $\psi \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times]-\infty, 0]$ et $\psi > 0$ dans $\Omega \times]-\infty, 0[$, le problème de Dirichlet (0.0.1) admet une sous-solution stricte $\underline{u} \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$;

(3) le problème de Dirichlet (0.0.1) admet une sursolution $\bar{u} \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $\underline{u} \leq \bar{u} < 0$ sur Ω.

Alors le problème de Dirichlet (0.0.1) admet une solution $u \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ sur $\bar{\Omega}$.

On note $C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ l'espace de toutes les fonctions $v \in C^1(\bar{\Omega})$ dont le laplacien Δv au sens des distributions est une fonction bornée ; c'est-à-dire $\|v\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} < +\infty$, où

$$\|v\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} := \|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\nabla v\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\Delta v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ici et dans la suite, on utilise la notation :

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : \ \|v\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < +\infty\},$$

pour $0 < \alpha < 1$, et la norme α-Hölder est donnée par

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} := \|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \sup\left\{\frac{|v(z) - v(y)|}{|z-y|^\alpha} : \ z, y \in \bar{\Omega},\, z \neq y\right\} < +\infty.$$

On dit que v est Hölder continue. On entend par $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour $k \geq 1$ et $0 < \alpha < 1$, la classe des fonctions k-fois continûment différentiables et dont les dérivées partielles d'ordre k sont Hölder continues.

D'après la théorie de Calderon-Zygmund, toute fonction $v \in C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ satisfait $v \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$. Ainsi d'après la théorie des espaces de Sobolev (lemme de Morrey), la fonction $v \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$ (voir [GT98]).

Idée de la preuve :

La solution du problème de Dirichlet (0.0.1) est un point fixe pour l'inverse de l'opérateur de Monge-Ampère. Nous allons utiliser une méthode itérative pour trouver un point fixe. Nous devons ensuite établir des estimées a priori pour contrôler le processus d'itération. Pour cela nous allons procéder en deux étapes.

Étape 1 :

Lorsque $\psi > 0$ dans $\bar{\Omega} \times] - \infty, 0]$, en utilisant le Théorème 1.4.1, on construit par récurrence une suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans $PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $u_0 := \underline{u}$ et que pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $u_{j+1} := T(u_j)$ soit l'unique solution du problème de Dirichlet suivant

$$\left\{\begin{array}{lll} (dd^c u_{j+1})^n = \psi(\cdot, u_j)\beta^n & \text{dans} & \Omega, \\ u_{j+1} = 0 & \text{dans} & \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{0.0.5}$$

Ensuite on montre que la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante et vérifie $\underline{u} \leq u_j \leq u_{j+1} \leq \bar{u}$. Donc la suite (u_j) converge presque partout vers une fonction $u \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ dans Ω.

En utilisant la Proposition 2.2.1, on a montre que $(\|\nabla u_j\|_{C^0(\bar{\Omega})})$ est uniformément bornée et d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, $u_j \to u$ uniformément dans $\bar{\Omega}$. Donc $u \in PSH(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ et de plus on voit qu'en passant à la limite dans (0.0.1), u est une solution faible de (0.0.5).

Alors en utilisant la Proposition 2.2.3, on montre qu'il existe une constante uniforme $C > 0$ telle que pour tout j,

$$\|u_j\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C.$$

Donc en passant à la limite dans cette inégalité, on a $\|u\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C$. Donc $u \in C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$.

Étape 2

Ici, on suppose que $\psi \geq 0$ sur $\bar{\Omega} \times] - \infty, 0]$, $\psi > 0$ dans $\Omega \times] - \infty, 0[$ et $\underline{u}$ une sous-solution stricte du problème de Dirichlet (0.0.1) c'est-à-dire qu'elle satisfait l'inégalité (0.0.3) pour $\epsilon_0 > 0$. Pour $0 < \varepsilon \leq 1$ fixé, posons $\psi_\varepsilon := \psi + \varepsilon^n$. Considérons alors le problème de Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{lll} (dd^c u)^n = \psi_\varepsilon(\cdot, u)\, \beta^n & \text{dans} & \Omega \\ u = 0 & \text{dans} & \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{0.0.6}$$

Puisque $\psi_\varepsilon \geq \varepsilon^n > 0$, on va appliquer la première étape pour résoudre le problème (0.0.6). Pour cela, on construit une sous-solution $\underline{u}_\varepsilon$ et une sursolution $\bar{u}_\varepsilon$ du problème (0.0.6) avec $\underline{u}_\varepsilon \leq \bar{u}_\varepsilon$ dans Ω.

Alors en utilisant la pseudoconvexité stricte du domaine Ω et la première étape, on montre que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $u_\varepsilon \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ solution du problème (0.0.6). On applique ensuite le même raisonnement qu'à la première étape pour montrer qu'il existe une constante uniforme $C > 0$ indépendante de $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C,$$

et que u_ε converge uniformément vers $u \in C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$.

Pour montrer que $u \in C^\infty(\Omega)$, on utilise l'argument complexe de la théorie locale d'Evans-Krylov développée dans [WZ22, DZZ11] et la théorie de Schauder développée dans [GT98] (voir section 2.3 pour plus de détails).

Problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe

Dans cette partie, on étudie le problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord lisse $\partial\Omega$ et $0 < f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Notre objectif est de résoudre le problème des valeurs propres avec condition au bord de type Dirichlet pour un opérateur de Monge-Ampère complexe.

Le problème consiste à trouver un couple (λ, u), avec $\lambda > 0$ et $u \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = (-\lambda u)^n f^n \beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 1, \end{cases} \tag{0.0.7}$$

où $\beta := dd^c|z|^2$ est la forme de Kähler standard sur $\mathbb{C}^n$.

P. L. Lions a résolu le problème d'existence de la première valeur propre avec condition au bord de type Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère réel sur un domaine borné fortement convexe à bord lisse dans $\mathbb{R}^N$ (voir [Lions86]). Il a affirmé qu'en utilisant les résultats de L. Caffarelli, J.J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85], tous ses résultats s'étendent sans changement au cas de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Nous n'avons pas été en mesure d'appliquer directement les résultats de [CKNS85] comme Lions l'affirmait pour résoudre le problème dans le cas complexe. En effet nous avons à faire à des équations de Monge-Ampère complexes avec un second membre du type $\psi_\varepsilon(z, u) := (\varepsilon - \lambda u)^n f(z)^n$ avec $\varepsilon > 0$. Puisque ces fonctions sont décroissantes en u et $\psi_\varepsilon(z, 0) \equiv \varepsilon f(z)^n$ est complètement dégénérée sur le bord lorsque $\varepsilon \to 0^+$, les résultats d'existence de [CKNS85] et [Guan98] ne s'appliquent pas directement dans ce cas.

Pour contourner ce problème, nous allons utiliser le nouveau théorème d'existence pour les équations de Monge-Ampère complexes dégénérées (voir Théorème 0.0.1 ci-dessus) basé sur le théorème fondamental de [CKNS85] et des nouvelles estimatées a priori du laplacien pour l'opérateur inverse de Monge-Ampère que nous allons établir au chapitre 2.

Voici le premier résultat principal de cette partie.

Théorème 0.0.2. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse et $0 < f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ une fonction positive lisse dans $\bar{\Omega}$.*

Alors il existe un nombre réel $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, f) > 0$ *et une fonction* $u_1 \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ *avec* $\|u_1\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 1$ *tels que le couple* (λ_1, u_1) *soit l'unique solution du problème des valeurs propres* (0.0.7).

Le nombre λ_1 sera appelé la première valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère complexe par rapport à la forme volume $d\nu_f := f^n \beta^n$ et u_1 sera appelé sa fonction propre normalisée.

On ne sait pas si la fonction propre u_1 du Théorème 0.0.2 satisfait $u_1 \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ comme dans le cas réel.

Idée de la preuve : Tout d'abord nous allons approcher l'EDP (0.0.7) par une EDP non dégénérée du même type en perturbant convenablement le second membre. Ensuite nous allons appliquer les estimées a priori uniformes de la première partie pour cette dernière et enfin, après normalisation, passer à la limite pour obtenir une solution de notre problème de départ. Pour y parvenir, nous allons suivre la stratégie de P. L. Lions [Lions86] et procéder en plusieurs étapes.

Nous allons considérer le problème perturbé

$$(0.0.8) \qquad \begin{cases} (dd^c u)^n = (1 - \lambda u)^n f^n \beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ u \equiv 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre.

Ensuite, on introduit la borne supérieure suivante :

$$(0.0.9) \qquad \mu_1 := \sup\{\lambda \geq 0 : \ \exists u \in \mathcal{P}_0(\Omega), \text{ solution de } (0.0.8)\},$$

où

$$(0.0.10) \qquad \mathcal{P}_0(\Omega) := \{u \in PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})\,;\, u_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

On utilise le théorème d'existence de [CKNS85] (voir Théorème 1.4.1), pour montrer qu'il existe $u_0 \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ solution du problème (0.0.8) pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire $(dd^c u_0)^n = f^n \beta^n$. Donc μ_1 est bien défini et $0 \leq \mu_1 \leq +\infty$.

• Dans la première étape, on montre en utilisant la formule d'algèbre linéaire de B. Gaveau [Gav77] (voir chapitre 3, formule (1.5.1)) que $\mu_1 \leq \lambda_1 < +\infty$, où λ_1 est aussi défini au niveau du chapitre 3.

• Pour la deuxième étape, on montre que $\|u_0\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \mu_1$, c'est-à-dire que $0 < \mu_1 \leq \lambda_1$.

• Dans la troisième étape, on montre en procédant de la même manière qu'à l'étape 2, que pour tout $0 < \lambda < \mu_1$, que le problème (0.0.8) admet une solution $u_\lambda \in \mathcal{P}_0(\Omega)$.

• En quatrième étape, on montre que $\|u_\lambda\|_{C^0(\bar{\Omega})} \to +\infty$ lorsque $\lambda \to \mu_1$. Pour y arriver, on procède par l'absurde. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \mu_1[$ qui converge vers μ_1, on a $\|u_\lambda\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq M < +\infty$. On montre ensuite que le problème (0.0.8) admet une sous-solution stricte $\underline{u}$ et une sursolution $\bar{u}$. Ainsi en appliquant les estimées a priori uniformes du chapitre 2 et la théorie d'Evans-Krylov, on aboutit à une contradiction.

• Dans la cinquième étape, on utilise la famille normalisée définie pour $\lambda < \mu_1$ par la formule

$v_\lambda := \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_{C^0(\bar\Omega)}}$ qui est solution du problème

$$\text{(0.0.11)} \qquad \begin{cases} (dd^c v_\lambda)^n = (\|u_\lambda\|^{-1}_{C^0(\bar\Omega)} - \lambda v_\lambda)^n f^n \beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ v_\lambda = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ \|v_\lambda\|_{C^0(\bar\Omega)} = 1. \end{cases}$$

Dans cet étape, on établit d'abord les estimées a priori uniformes des $\|\nabla v_\lambda\|_{C^0(\bar\Omega)}$ et on montre que lorsque $\lambda \to \mu_1$, (v_λ) converge uniformément vers $\varphi_1 \in PSH(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar\Omega)$ solution faible du problème (0.0.7) avec $\lambda = \mu_1$.

Ensuite, pour montrer que $\varphi_1 \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar 1}(\bar\Omega)$, on va construire une surbarrière uniforme pour tous les v_λ et appliquer les résultats du Théorème 0.0.1. Enfin, on utilise la théorie d'Evans-Krylov complexe et la théorie de Schauder pour montrer que $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ et que le couple (μ_1, φ_1) est solution du problème (0.0.7) avec $\mu_1 \le \lambda_1$.

• Pour la sixième étape de la preuve, on montre que $\lambda_1 = \mu_1$ en utilisant le Lemme 1.5.3.

• La septième étape de la preuve est consacrée à l'unicité du couple (μ_1, φ_1). Dans cette partie de la preuve, on utilise le Lemme 1.5.3, la Proposition 1.5.2 et le Lemme de Hopf [Eva10, Lemme 6.4.2, p. 347] pour montrer que si (μ, φ) est une autre solution de (0.0.7) alors $\mu_1 = \mu$ et $\varphi_1 = \theta\varphi$, où $\theta > 0$ est une constante.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on développe une approche variationnelle générale pour le problème de l'existence de la première valeur propre pour des opérateurs de Monge-Ampère plus généraux. L'idée de cette méthode est de considérer la fonctionnelle dont l'équation de Monge-Ampère complexe (0.0.7) est l'équation d'Euler-Lagrange. On montre ensuite que cette fonctionnelle est coercive et semi-continue inférieurement, ce qui nous permet de la minimiser sur un ensemble compact convenable de fonctions plurisousharmoniques d'énergies bornées. On montre ensuite que ce point minimum est la solution cherchée.

De façon plus précise, suivant Cegrell [Ceg98], on définit d'abord la classe $\mathcal{E}^0(\Omega)$ des fonctions plurisousharmoniques bornées ϕ sur Ω avec une valeur au bord nulle telles que $\int_\Omega (dd^c\phi)^n < +\infty$. Ensuite, on définit $\mathcal{E}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques u dans Ω telles qu'il existe une suite décroissante $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans la classe $\mathcal{E}^0(\Omega)$ vérifiant $u = \lim_j u_j$ dans Ω et $\sup_j \int_\Omega (-u_j)(dd^c u_j)^n < +\infty$.

On montre que l'opérateur de Monge-Ampère complexe s'étend à la classe $\mathcal{E}^1(\Omega)$ et on définit sa fonctionnelle d'énergie sur $\mathcal{E}^1(\Omega)$ comme suit : pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$,

$$\text{(0.0.12)} \qquad E(\phi) := \frac{1}{n+1} \int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^n,$$

qui d'après [BBGZ13] est semi-continue inférieurement et que son opposé est la primitive de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Ensuite pour $dV_g := g\beta^n$ une forme volume positive sur $\bar\Omega$ où $0 \le g \in L^p(\Omega)$, $p > 1$ est une fonction densité, on définit pour $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, la fonctionnelle

$$\text{(0.0.13)} \qquad I_g(\phi) := \frac{1}{n+1} \int_\Omega (-\phi)^{n+1} dV_g.$$

On montre que la fonctionnelle I_g est bien définie, continue pour la topologie L^1_{loc} sur les sous-ensembles de niveau d'énergie bornée de $\mathcal{E}^1(\Omega)$.

On voit que l'équation de Monge-Ampère complexe (0.0.7) est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle définie pour $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, par la formule

$$F_g(\phi) := E(\phi) - \eta_1^n I_g(\phi).$$

En minimisant la fonctionnelle F_g comme expliqué ci-dessus, on démontre le résultat suivant.

Théorème 0.0.3. *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine hyperconvexe et $dV_g := g\beta^n$ une forme volume positive sur $\bar{\Omega}$ de densité $0 \leq g \in L^p(\Omega)$, $p > 1$ tel que $\int_\Omega dV_g > 0$. On définit le nombre réel*

$$\eta_1^n := \inf \left\{ \frac{E(\phi)}{I_g(\phi)}; \phi \in \mathcal{E}^1(\Omega), w \neq 0 \right\}. \tag{0.0.14}$$

Il existe une fonction $w \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ telle que

$$\eta_1^n = \frac{E(w)}{I_g(w)}. \tag{0.0.15}$$

De plus (η_1, w) est une solution (faible) du problème des valeurs propres

$$\begin{cases} (dd^c w)^n = (-\eta_1 w)^n g\beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ w < 0. \end{cases} \tag{0.0.16}$$

En utilisant le Théorème 0.0.3 et notre nouveau théorème d'existence (Théorème 0.0.1), nous allons prouver une formule de type quotient de Rayleigh pour la première valeur propre. C'est le deuxième résultat principal de ce chapitre.

Théorème 0.0.4. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse et $0 < f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ une fonction positive lisse sur $\bar{\Omega}$. Soit (λ_1, u_1) la solution normalisée du problème des valeurs propres (0.0.7). Alors*

$$\lambda_1^n = \frac{\int_\Omega (-u_1)(dd^c u_1)^n}{\int_\Omega (-u_1)^{n+1} d\nu_f} = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^n}{\int_\Omega (-\phi)^{n+1} d\nu_f}; \phi \in \mathcal{E}^1(\Omega), \phi \neq 0 \right\},$$

où $d\nu_f = f^n \beta^n$.

Ce résultat est une conséquence directe du théorème suivant :

Théorème 0.0.5. *Soit $d\nu_f := f^n\beta^n$ une forme volume positive lisse sur $\bar{\Omega}$ et (λ_1, φ_1) la solution lisse normalisée du problème des valeurs propres (0.0.7) et soit (η_1, w_1) une solution faible du problème (0.0.16) pour $g = f^n$.*

Alors $\lambda_1 = \eta_1$ et $\varphi_1 = \theta w_1$, où θ est une constante strictement positive.

Idée de la preuve : On voit que si (λ_1, φ_1) est la solution du problème des valeurs propres (0.0.7) donnée par le Théorème 0.0.2, on a

$$\int_\Omega (-\varphi_1)(dd^c\varphi_1)^n = \lambda_1^n \int_\Omega (-\varphi_1)^{n+1} f^n \beta^n.$$

D'après la formule (0.0.14), on a $\lambda_1 \geq \eta_1$.

Pour montrer que $\lambda_1 = \eta_1$, on fait un raisonnement par l'absurde en supposant que $\eta_1 < \lambda_1 = \mu_1$.

On montre en utilisant l'étape 3 de la preuve du Théorème 0.0.2, qu'il existe $u_{\eta_1} \in PSH(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ telle que

$$(dd^c u_{\eta_1})^n = (1 - \eta_1 u_{\eta_1})^n f^n \beta^n \text{ dans } \Omega \text{ et } u_{\eta_1} = 0 \text{ dans } \partial\Omega.$$

Ensuite on va comparer w_1 et u_{η_1}. Pour cela on montre que w_1 est borné et on utilise le principe de comparaison pour montrer que $\underline{u} := t u_{\eta_1} \leq w_1$, où $t := \eta_1 M$ et M est la borne de w_1.

On montre que $\underline{u}$ est une sous-solution stricte de (0.0.16) et puisque w_1 en est une sursolution, en appliquant le Théorème 0.0.1, on montre qu'il existe $\varphi \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ solution de (0.0.16) telle que $\underline{u} \leq \varphi \leq w_1$. En normalisant cette fonction φ, on voit que $(\eta_1, \theta\varphi)$ avec $\theta := \|\varphi\|^{-1}$ est une autre solution normalisée de (0.0.7). D'après la propriété d'unicité du Théorème 0.0.2, on a $\eta_1 = \lambda_1$. Cette contradiction montre que $\eta_1 = \lambda_1$.

Pour montrer que $\varphi_1 = \theta w_1$, on démontre que si (λ_1, φ_1) est la solution normalisée de (0.0.7) alors pour tout $u \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ solution faible de

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = (-\lambda_1 u)^n f^n \beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.17}$$

il existe une constante positive $\theta > 0$ telle que $u = \theta\varphi_1$.

Notons qu'une formule de type quotient de Rayleigh pour la valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère réel a été démontrée par K. Tso dans [Tso90] avec une approche différente.

Approche variationnelle au problème des valeurs propres de l'opérateur Hessien complexe

Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné, $\mu \geq 0$ une mesure de Borel positive sur Ω, de masse finie $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ et m un entier tel que $1 \leq m \leq n$.

Le problème des valeurs propres de l'opérateur Hessien complexe associé à μ consiste à trouver un couple (λ, u), où $\lambda > 0$ est une constante et u est une fonction m-sousharmonique bornée sur Ω, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (-\lambda\, u)^m \mu & \text{dans} \quad \Omega, \quad (\dagger) \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \quad (\dagger\dagger) \\ u < 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.0.18}$$

L'équation (†) est interprétée aux sens des courants (ou des mesures de Radon) sur Ω (voir chapitre 1, section 1.7) et l'identité (††) signifie que pour tout $\zeta \in \partial\Omega$, $\lim_{z\to\zeta} u(z) = 0$.

Lorsque $m = 1$ et μ est la mesure de Lebesgue, c'est le problème classique des valeurs propres de l'opérateur de Laplace. Lorsque $m = n$ et μ est une forme volume lisse sur $\bar{\Omega}$, c'est le problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe que nous avons étudié au chapitre 3 de cette thèse.

Nous allons utiliser une approche variationnelle pour résoudre ce problème. Nous définissons deux fonctionnelles sur le cône positif convexe $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ des fonctions m-sousharmoniques d'énergie finie (voir chapitre 1, section 1.8).

La première est la fonctionnelle d'énergie définie sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ par la formule :

$$E_m(\phi) = E_{m,\Omega}(\phi) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m}, \ \ \phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega). \tag{0.0.19}$$

Cette fonctionnelle (mutlipliée par le signe $-$) est une primitive de l'opérateur Hessien sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$, c'est-à-dire $E'_m(\phi) = -(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m}$ sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ au sens du Lemme 1.8.4. D'après le Lemme 1.8.4, elle est convexe (sur les segments) sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

La deuxième fonctionnelle est attachée à une mesure de Borel positive μ sur Ω vérifiant la condition d'intégrabilité suivante :

$$\mathcal{E}^1_m(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega, \mu). \tag{0.0.20}$$

La fonctionnelle associée à μ est définie par la formule suivante

$$I_m(\phi) = I_{\Omega,\mu,m}(\phi) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu, \ \ \phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega). \tag{0.0.21}$$

C'est encore une fonctionnelle convexe sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $I'_m(\phi) = -(-\phi)^m\mu$ pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ au sens du Lemme 1.8.4.

Cela montre que l'équation $(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m} = (-\lambda\phi)^m\mu$ est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle

$$\Phi_{\Omega,\mu,m}(\phi) := E_m(\phi) - \lambda^m I_{\Omega,\mu,m}(\phi), \ \ \phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega). \tag{0.0.22}$$

Lorsque (Ω, μ) est fixé, on écrira $I_m = I_{\Omega,\mu,m}$ et $\Phi_m = \Phi_{\Omega,\mu,m}$. Pour énoncer nos principaux résultats, nous faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèses (H)

- $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est m-hyperconvexe c'est-à-dire qu'il admet une fonction d'exhaustion m-sousharmonique négative et continue (voir Définition 1.7.7) ;
- μ est une mesure de Borel positive telle que $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ qui est fortement diffuse par rapport à la m-capacité (voir Définition 1.9.1).

Un exemple important est lorsque $\mu := g\beta^n$, où $0 \leq g \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/m$ et $\int_\Omega g\beta^n > 0$ (voir Section 1.9 pour plus d'exemples).

Voici le premier résultat de cette partie :

Théorème 0.0.6. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné et μ une mesure de Borel positive sur Ω telles que (Ω, μ) vérifie les hypothèses (H). Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{E}^1_m(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega, \mu)$;

(ii) la formule

$$\lambda_1^m := \inf\left\{\frac{E_m(\phi)}{I_m(\phi)}; \phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega), \phi \not\equiv 0\right\}, \tag{0.0.23}$$

définit un nombre réel positif $\lambda_1 = \lambda_1(m, \mu, \Omega) > 0$;

(iii) il existe une fonction $u_1 \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $u_1 \not\equiv 0$ dans Ω et

$$\lambda_1^m = \frac{E_m(u_1)}{I_m(u_1)}; \tag{0.0.24}$$

(iv) (λ_1, u_1) est une solution de l'équation des valeurs propres (†) c'est-à-dire

$$(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m} = (-\lambda_1 u_1)^m \mu,$$

au sens des mesures sur Ω.

(v) Si de plus Ω est strictement m-pseudoconvexe, $\mu = g\beta^n$ avec $g \in L^p(\Omega)$ et (m, p) qui vérifie les conditions suivantes

$$(n-1)/2 < m \leq n \ \text{ et } \ p > p^*(m, n), \tag{0.0.25}$$

où $p^*(m, n)$ est donné par la formule (4.3.7), alors $u_1 \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ pour un certain $\alpha \in]0, 1[$ et le couple (λ_1, u_1) est une solution du problème des valeurs propres (0.0.18).

Lorsque $m = n$, le point (v) est démontré au niveau du chapitre 3.

Idée de la preuve : La preuve des points (i), (ii), (iii) et (iv) utilise une approche variationnelle et est similaire à celle du Théorème 0.0.3.

Pour prouver le point (v), on montre que si Ω est strictement m-pseudoconvexe, $\mu = g\beta^n$ avec $g \in L^p(\Omega)$ et (m, p) qui vérifie les conditions (0.0.25), il existe r dépendant seulement de p, m et de n telle que $n/m < r < p$ et pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$, on a $g_\phi := (-\phi)^m g \in L^r(\Omega)$. Donc $g_1 := (-\lambda_1 u_1)^m g \in L^r(\Omega)$.

Ensuite, on montre en utilisant [Ch16b] qu'il existe une fonction m-sousharmonique $v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ telle que $(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} = g_1\beta^n$ sur Ω et $v = 0$ dans $\partial\Omega$. Alors $u_1, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ sont deux solutions de l'équation

$$(dd^c \phi)^m \wedge \beta^{n-m} = g_1\beta^n.$$

Par unicité dans $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ (voir [Lu15, Théorème 1.1]), on a $u_1 = v$ dans $\bar{\Omega}$. Cela met fin à la preuve de (v).

Le deuxième résultat principal de cette partie est le suivant.

Théorème 0.0.7. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné et μ une mesure de Borel positive sur Ω telles que (Ω, μ) vérifie les hypothèses (H).*

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne vérifiant les propriétés suivantes :

- *pour tout $t \leq 0$, $f(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega, \mu)$.*
- *il existe une constante $\lambda_0 < \lambda_1$ telle que pour μ-p.p. $z \in \Omega$, la fonction $t \mapsto f(z, t)$ soit différentiable sur $] - \infty, 0[$ et vérifie*

$$\partial_t f(z, t) \geq -\lambda_0, \ \ \text{pour tout } t < 0.$$

Alors l'équation Hessienne

$$(dd^c \varphi)^m \wedge \beta^{n-m} = f(\cdot, \varphi)^m \mu \ \text{ dans } \Omega, \tag{0.0.26}$$

admet une solution $\varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

Si de plus Ω *est strictement* m*-pseudoconvexe,* $\mu = g\beta^n$ *avec* $g \in L^p(\Omega)$ *et* (m,p) *qui vérifie les conditions* (0.0.25)*, alors le problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases} (dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} = f(\cdot,\varphi)^m\mu & dans \ \ \Omega, \\ \varphi = 0 & dans \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.27}$$

admet une solution $\varphi \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ *pour un certain* $\alpha \in]0,1[$.

$\mathcal{SH}_m(\Omega)$ est la classe des fonctions m-sousharmoniques sur Ω.

Dans le cas réel, des résultats similaires ont été obtenus par K. Tso pour l'opérateur de Monge-Ampère réel sur un domaine convexe borné de $\mathbb{R}^n$ en considérant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (voir [Tso90]). Pour le cas des opérateurs Hessiens réels, l'existence de la première valeur propre a été prouvée par X. J. Wang (voir [Wang94]). Ces auteurs ont utilisé une méthode différente basée sur une approche parabolique.

Le Théorème 0.0.7 se déduit facilement d'un résultat plus général. En effet, nous allons prouver un théorème plus général (voir le Théorème 0.0.8 ci-dessous) et donner quelques applications au niveau de la section 4.4.

Considérons le problème de Dirichlet plus général suivant

$$\begin{cases} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = G(\cdot,u)\mu, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \\ u < 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{0.0.28}$$

où $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est un domaine borné, $G : \Omega \times]-\infty, 0] \longrightarrow [0,+\infty[$ est une fonction borélienne donnée, μ une mesure de Borel positive sur Ω vérifiant certaines conditions et $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

On définit $H : \Omega \times \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ comme suit

$$H(z,t) := \int_t^0 G(z,s)ds,$$

pour $(z,t) \in \Omega \times]-\infty, 0]$.

Considérons les hypothèses suivantes :

- $(H0)$ Ω est un domaine borné m-hyperconvexe et μ est une mesure de Borel positive sur Ω tels que (Ω,μ) soit fortement Γ-diffuse au sens de la définition 1.9.1.
- $(H1)$ pour μ-p.p. $z \in \Omega$, la fonction $t \longmapsto G(z,t)$ est continue sur $]-\infty, 0]$;
- $(H2)$ il existe $\theta_1 < \lambda_1^m/(m+1)$ tel que

$$\limsup_{t\to-\infty} \frac{(\sup_{z\in\Omega} H(z,t))}{|t|^{m+1}} < \theta_1 < \lambda_1^m/(m+1),$$

- $(H3)$ Si $G(z,0) \equiv 0$ dans Ω, il existe $\theta_2 > \lambda_1^m/(m+1)$ tel que

$$\liminf_{t\to0^-} \frac{H(z,t)}{|t|^{m+1}} > \theta_2 > \lambda_1^m/(m+1),$$

  pour μ-p.p. $z \in \Omega$.

Ici $\lambda_1 := \lambda_1(\Omega, \mu)$ est la première valeur propre de l'opérateur Hessien complexe défini par la formule (0.0.23).

On définit la fonctionnelle correspondante sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ par la formule

$$\Phi_{G,\mu}(\phi) := E_m(\phi) - \int_\Omega H(z, \phi(z)) d\mu(z), \quad \phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$$

Formellement l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est précisément l'équation Hessienne

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = G(\cdot, u)\mu$$

du problème (0.0.28) comme nous allons le voir au niveau de la section 4.4.

Nous allons utiliser une méthode variationnelle pour démontrer le résultat suivant.

Théorème 0.0.8. *Supposons que (Ω, μ, G) vérifie les hypothèses $(H0)$, $(H1)$ et $(H2)$. Alors la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ a les propriétés suivantes :*

1) la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est bien définie, coercive sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ et atteint son minimum en une fonction $\varphi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega, C)$, pour un certain $C > 0$ suffisamment grand ;

2) la fonction φ est un point critique de la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$, donc c'est une solution de l'équation Hessienne c'est-à-dire

$$(dd^c \varphi)^m \wedge \beta^{n-m} = G(\cdot, \varphi)\, \mu,$$

au sens des mesures sur Ω ;

3) si Ω est strictement m-pseudoconvexe, G est à croissance polynomiale de degré m et $\mu = g\beta^n$ avec $g \in L^p(\Omega)$, où (p, m) vérifie les conditions (0.0.25), alors $\varphi \in \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ pour un certain $\alpha \in]0, 1[$ et φ est une solution du problème de Dirichlet (0.0.28).

Si de plus $G(z, 0) \equiv 0$ dans Ω et G vérifie $(H3)$, φ est une solution non triviale c'est-à-dire $\varphi < 0$ dans Ω.

Ici G est à croissance polynomiale de degré m signifie qu'il existe une constante $M_0 > 0$ telle que pour μ-p.p. $z \in \Omega$ et tout $t < 0$, on a

$$G(z, t) \leq M_0 |t|^m.$$

Idée de la preuve :

La preuve du Théorème utilise une méthode variationnelle mais tout d'abord on doit montrer que sous les conditions $(H0)$, $(H1)$ et $(H2)$, la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est bien définie sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ et est semi-continue inférieurement sur chaque ensemble

$$\mathcal{E}_m^1(\Omega, C) := \{\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega) \,;\, 0 \leq E_m(\phi) \leq C\},$$

avec $C > 0$ et qu'il existe des constantes $\epsilon_0 > 0$ et $C_0 > 0$ telles que pour tout $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$,

$$\Phi_{G,\mu}(\phi) \geq \epsilon_0\, E_m(\phi) - C_0. \tag{0.0.29}$$

En particulier $\Phi_{G,\mu}$ est minoré.

On remarque que l'inégalité (0.0.29) signifie par définition que la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est coercive.

Ensuite, on montre qu'il existe une constante $C > 1$ telle que

$$\inf\{\Phi_{G,\mu}(\phi)\,;\,\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)\} = \inf\{\Phi_{G,\mu}(\phi)\,;\,\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega, C)\}\cdot$$

Puisque la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est semi-continue inférieurement sur l'ensemble compact $\mathcal{E}_m^1(\Omega, C)$, elle atteint son minimum en un certain $\varphi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega, C)$.

Du coup, comme dans la preuve du Théorème 0.0.6, on en déduit que φ est un point critique de $\Phi_{G,\mu}$ c'est-à-dire que φ est une solution de l'équation

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = G(\cdot, u)\mu.$$

Lorsque $G(z, 0) \equiv 0$ dans Ω, on montre que la condition $(H3)$ implique que $\varphi \not\equiv 0$ dans Ω. Plus précisément on montre que la condition $(H3)$ implique que l'infimum de $\Phi_{G,\mu}$ est strictement négatif.

Pour prouver que φ est Hölder continue et $\varphi \equiv 0$ dans $\partial\Omega$ lorsque Ω est strictement m-pseudoconvexe, G est à croissance polynomiale de degré m et $\mu = g\beta^n$ avec $g \in L^p(\Omega)$ où (p, m) vérifie les conditions (0.0.25), on utilise le même argument que dans la preuve du Théorème 0.0.6.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notions de base en théorie du pluripotentiel

Dans cette section nous allons donner quelques notions de base de la Théorie du Pluripotentiel qui nous seront utiles tout au long de cette thèse. Pour plus d'informations sur la théorie du pluripotentiel voir [Kl81, De89, Kol05, GZ17].
Nous entendons par domaine un ensemble non vide, ouvert et connexe.

Définition 1.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine. Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est sousharmonique si elle est semi-continue supérieurement sur Ω et pour tout $a \in \Omega$, il existe $0 < \rho(a) < \mathrm{dist}(a, \partial\Omega)$ tel que, pour tout $0 < r < \rho(a)$, on a

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta. \tag{1.1.1}$$

On rappelle qu'une fonction u est semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé) sur Ω si pour tout $c \in \mathbb{R}$, les sous-ensembles de sous-niveau $\{u < c\}$ sont des ouverts de Ω.

En analyse complexe de plusieurs variables, il est bien connu que la classe des fonctions sousharmoniques est trop grande et que la théorie classique du potentiel n'a qu'une gamme limitée d'applications. En conséquence, le besoin d'une sous-classe plus appropriée se fait tout naturellement sentir. Cela a motivé la théorie des fonctions plurisousharmoniques et la Théorie du Pluripotentiel.

En Théorie du Pluripotentiel on étudie donc une classe plus restreinte de fonctions sousharmoniques dont la composition avec des applications biholomorphes sont sousharmoniques. Cette classe est précisément la classe des fonctions plurisousharmoniques définies comme suit :

Définition 1.1.2. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est plurisousharmonique (psh en abrégé) si elle est semi-continue supérieurement et pour toute droite complexe $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, la restriction $u|_{\Lambda\cap\Omega}$ est sousharmonique sur $\Omega \cap \Lambda$. C'est-à-dire pour chaque point $a \in \Omega$ et chaque $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, la fonction d'une variable complexe $u_\xi : \tau \to u(a + \tau\xi)$ est sousharmonique sur l'ensemble ouvert $\Omega_\xi := \{\tau \in \mathbb{C}\,; \, a + \tau\xi \in \Omega\} \subset \mathbb{C}$.

Cette dernière propriété peut être reformulée comme suit : pour tout $a \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{C}^n$ avec $|\xi| = 1$, et $r > 0$ tels que $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$, on a

$$(1.1.2) \qquad u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta}\xi)d\theta.$$

Notation 1.1.3. On note $PSH(\Omega)$ le cône positif convexe de l'ensemble des fonctions psh u sur Ω et telles que $u|_\Omega \not\equiv -\infty$.

Nous allons commencer par donner quelques propriétés de base des fonctions plurisousharmoniques.

Proposition 1.1.4. *(1) $PSH(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

(2) Si $u, v \in PSH(\Omega)$ alors $\lambda u + \eta v \in PSH(\Omega)$, $\forall \lambda, \eta \geq 0$.

(3) Si $u \in PSH(\Omega)$ et χ est une fonction réelle convexe croissante sur un intervalle contenant $u(\Omega)$, alors $\chi \circ u \in PSH(\Omega)$.

(4) Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions psh sur Ω. Alors $u := \lim u_j$ est psh sur Ω.

(5) Si $u \in PSH(\Omega)$ alors les régularisations standards $u * \rho_\epsilon$ sont psh sur $\Omega_\epsilon := \{z \in \Omega|\ \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > \epsilon\}$, pour $0 < \epsilon \ll 1$ et u_ϵ décroit vers u lorsque ϵ décroit vers 0.

(6) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{T})$, et $E(z, x) : \Omega \times X \to [-\infty, +\infty[$ une fonction telle que

i) pour μ-p.p. $x \in X$, $z \mapsto E(z, x)$ est psh sur Ω,

ii) pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et $g \in L^1(\mu)$ tels que pour tout $z \in B(z_0, r)$ et $E(z, x) \leq g(x)$ pour μ-p.p. $x \in X$.

Alors $z \mapsto V(z) := \int_X E(z, x)d\mu(x)$ est plurisousharmonique.

(7) Soit u une fonction psh sur un domaine Ω. Soit v une fonction psh sur un sous-domaine relativement compact $\Omega' \subset \Omega$. Si $u \geq v$ sur $\partial\Omega'$, alors la fonction

$$z \mapsto w(z) = \begin{cases} \max[u(z), v(z)], & si\ z \in \Omega', \\ u(z) & si\ z \in \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

est plurisousharmonique sur Ω.

(8) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions psh dans un domaine Ω, qui est localement uniformément majorée sur Ω, et soit $u := \sup_{i\in I} u_i$ son enveloppe supérieure. Alors la régularisée semi-continue supérieureurement

$$z \mapsto u^*(z) := \limsup_{\Omega \ni z' \to z} u(z') \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

est plurisousharmonique sur Ω et $\{u < u^*\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Nous allons utiliser les fonctions plurisousharmoniques pour définir des domaines pseudoconvexes.

Définition 1.1.5. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit pseudoconvexe s'il existe une fonction plurisousharmonique continue φ sur Ω telle que $\{z \in \Omega|\ \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$, pour tout nombre réel $c \in \mathbb{R}$.

Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à bord lisse $\partial\Omega$ est dit strictement pseudoconvexe, s'il existe une fonction strictement plurisousharmonique ρ de classe C^∞ définie au voisinage de $\bar{\Omega}$ telle que $\rho < 0$ dans Ω, $\rho = 0$ dans $\partial\Omega$ et $\nabla\rho \neq 0$.

Une classe importante de domaines pseudoconvexes est la classe des domaines hyperconvexes.

Définition 1.1.6. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit hyperconvexe, s'il existe une fonction plurisousharmonique négative continue φ sur Ω telle que $\{z \in \Omega |\ \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$, pour tout nombre réel $c < 0$.

Le triangle de Hartogs est un domaine pseudoconvexe mais pas hyperconvexe. Cependant, Demailly a prouvé dans [De87] que tout domaine pseudoconvexe à bord Lipschitz est hyperconvexe.

1.2 L'opérateur de Monge-Ampère complexe

Les opérateurs de différentiations extérieures d se décomposent comme suit : $d = \partial + \bar{\partial}$ et $d^c = (i/2)(\bar{\partial} - \partial)$, où ∂ et $\bar{\partial}$ sont les opérateurs différentiels usuels. Alors on a $dd^c = i\partial\bar{\partial}$.
Pour $u \in PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, on définit l'opérateur de Monge-Ampère complexe comme suit :

$$(dd^c u)^n = \underbrace{dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u}_{n\ fois} = \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)\beta^n,$$

où $\beta := dd^c|z|^2 = i\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$ est la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}^n$.

Notons que $\beta^n = 2^n n!dV_{2n}$ où

$$dV_{2n} = \left(\frac{i}{2}\right)^n \underbrace{dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n}_{n\ fois}$$

est le volume usuel de $\mathbb{R}^{2n}$ ou $\mathbb{C}^n$.

Pour $n = 1$, on a $dd^c u = (1/2)\Delta u dV_2$ et on sait que l'opérateur de Laplace est bien défini pour toutes les fonctions sousharmoniques.

Pour $n \geq 2$, l'opérateur de Monge-Ampère complexe n'est pas bien défini pour toute la classe des fonctions plurisousharmoniques. Pour définir $(dd^c u)^n$ lorsque u n'est pas régulière, on peut approcher u par une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques lisses (u_j) et étudier la limite faible au sens des courants lisses $(dd^c u_j)^n$. Lorsque $u \in PSH(\Omega) \cap C(\Omega)$, la convergence des (u_j) est localement uniforme et l'existence de la limite se montre grâce à l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg suivante (voir [BT82, BT87], [GZ17]) :

Proposition 1.2.1. *Soient $K \Subset U \Subset \Omega$, où K est un compact et U un ouvert. Soient $u_j \in PSH(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, $j = 1, \ldots, n$. Alors il existe une constante $C > 0$ dépendant de K, U, Ω telle que*

$$\|dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n\|_K \leq C\|u_1\|_{L^\infty(U)} \ldots \|u_n\|_{L^\infty(U)}.$$

Cependant, lorsque u est psh et (localement) borné sur Ω mais non continue, Bedford et Taylor [BT76, BT82] ont réussi à montrer que l'opérateur de Monge-Ampère est bien défini. Ils définissent par récurrence le courant positif fermé :

$$dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n := dd^c(u_1 dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n),$$

où $u_j \in PSH(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, $j = 1, \ldots, n$.

Alors pour une fonction $u \in PSH(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, $(dd^c u)^n$ est un courant positif de bidegré (n, n) sur Ω qui s'identifie à une mesure de Radon positive sur Ω. D'après le théorème de représentation classique de F. Riesz, on peut étendre cette mesure de Radon en une mesure de Borel positive, unique et de masse localement finie, appelée mesure de Monge-Ampère complexe de u.

De plus l'opérateur de Monge-Ampère complexe est continu pour la convergence uniforme locale, pour la convergence monotone des suites dans $PSH(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ et il satisfait le principe de comparaison suivant.

Proposition 1.2.2 ([BT76]). *Soient $u, v \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tels que pour $\zeta \in \partial\Omega$, on a $\liminf_{z \to \zeta}(u - v) \geq 0$ et $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ au sens des courants sur Ω. Alors $u \geq v$ sur Ω.*

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. On définit la capacité de Bedford-Taylor [BT82], comme suit : pour tout ensemble de Borel $B \subset \Omega$,

$$\mathrm{Cap}_\Omega(B) := \sup \left\{ \int_B (dd^c v)^n \ : \ v \in PSH(\Omega, \ -1 \leq v \leq 0) \right\}.$$

Cette capacité joue un rôle important dans la théorie du pluripotentiel (voir [BT82]) et d'après la Proposition 1.2.1, elle est finie lorsque B est relativement compact dans Ω.
Soit $D > 0$ le diamètre de Ω, $R := D/2$ et $B(a, R)$ une boule contenant Ω. On considère une fonction test $v(z) := R^{-2}|z - a|^2 - 1$ qui est psh et bornée sur Ω. Alors en utilisant la définition de la capacité, on montre que pour tout borélien $B \subset \Omega$,

$$\mathrm{Vol}(B) \leq R^{2n} \mathrm{Cap}_\Omega(B), \tag{1.2.1}$$

où $\mathrm{Vol}(B) := \int_B (dd^c|z|^2)^n$ est à une constante multiplicative près le volume de B sur $\mathbb{C}^n$.

1.3 Les classes d'énergie finie

Dans cette sous-section, nous supposons que $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est hyperconvexe c'est-à-dire qu'il admet une fonction d'exhausion plurisousharmonique négative continue. Nous allons définir une classe importante convexe de fonctions plurisousharmoniques singulières dans Ω adaptée à l'approche variationnelle. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, l'opérateur de Monge-Ampère $(dd^c \cdot)^n$ est bien défini sur la classe des fonctions plurisousharmoniques localement bornées dans Ω.

Suivant Urban Cegrell [Ceg98], nous définissons la classe $\mathcal{E}^0(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques bornées ϕ sur Ω avec une valeur au bord nulle telles que $\int_\Omega (dd^c \phi)^n < +\infty$. Ensuite, on définit $\mathcal{E}^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques u dans Ω telles qu'il existe une suite décroissante $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans la classe $\mathcal{E}^0(\Omega)$ satisfaisant $u = \lim_j u_j$ dans Ω et $\sup_j \int_\Omega (-u_j)(dd^c u_j)^n < +\infty$. Il est facile de voir à partir de la définition que $\mathcal{E}^1(\Omega)$ est un cône positif convexe dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Il s'avère que l'opérateur de Monge-Ampère complexe s'étend à la classe $\mathcal{E}^1(\Omega)$ et est continu pour la convergence monotone dans $\mathcal{E}^1(\Omega)$. Si de plus $u \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, alors on a $\int_\Omega (-u)(dd^c u)^n < +\infty$ (voir [Ceg98]).

1.4 Problème de Dirichlet

Dans cette section, nous allons énoncer quelques résultats fondamentaux sur l'existence de solution pour le problème de Dirichlet pour les équations de Monge-Ampère complexes que nous allons utiliser dans la suite.

1.4.1 Le Théorème de CKNS

Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord de classe C^∞ c'est-à-dire Ω admet une fonction définissante $\rho \in C^\infty(\bar{\Omega})$ qui est strictement plurisousharmonique au voisinage de $\bar{\Omega}$ et vérifie $\|\nabla\rho\| > 0$ sur $\partial\Omega$. On considère le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (dd^c u)^n = \psi(\cdot, u)\, \beta^n & \text{dans} & \Omega, \\ u = \varphi & \text{dans} & \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.4.1}$$

où $\beta = dd^c|z|^2$, $\psi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lisses.

Nous aurons besoin du théorème fondamental de L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck suivant (voir [CKNS85]).

Théorème 1.4.1 ([CKNS85]). *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse. Soient $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ telles que $\partial_t \psi(z,t) \geq 0$ et $\psi > 0$ dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$.*

Alors le problème de Dirichlet (1.4.1) admet une unique solution $u \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$.

1.4.2 Le théorème de sous-solution de B. Guan

Rappelons que sous la condition $\frac{\partial\psi}{\partial u} \geq 0$, Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck ont utilisé la méthode de continuité et des estimées a priori pour prouver l'existence d'une solution unique au problème de Dirichlet (1.4.1).

Dans le cas général, la méthode de continuité ne s'applique pas. Cependant sous la forte hypothèse que ψ admet une borne inférieure strictement positive, B. Guan ([Guan98]) a pu étendre le résultat de [CKNS85] à une situation plus générale en utilisant des estimées a priori et une méthode plus complexe, la méthode du degré topologique comme dans le cas réel (voir [CNS84]).

Énonçons le théorème de B. Guan [Guan98, Théorème 1.1]) que nous n'utiliserons que dans notre application (voir Proposition 3.2.2).

Théorème 1.4.2 ([Guan98]). *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné à bord lisse et $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$. Supposons que $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $\psi > 0$ dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction strictement plurisousharmonique $\underline{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ telle que $(dd^c \underline{u})^n \geq \psi(\cdot, \underline{u})\beta^n$ dans Ω et $\underline{u} = \varphi$ dans $\partial\Omega$.*

Alors le problème (1.4.1) admet une solution lisse $u \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $u \geq \underline{u}$ dans Ω.

Ce théorème ne peut pas être appliqué pour prouver le Théorème 3.1.1 car dans ce cas, le second membre $(-\lambda u)^n$ dégénère au bord puisque $u = 0$ dans $\partial\Omega$. Nous allons démontrer au chapitre 2, un nouveau théorème d'existence de solution qui traite ce cas (voir Théorème 2.1.1).

1.5 Le problème des valeurs propres pour les opérateurs linéaires elliptiques

Pour démontrer le Théorème 3.1.1 au niveau du chapitre 3, nous avons besoin de rappeler quelques résultats de la théorie des opérateurs linéaires elliptiques du second ordre. Le lien avec les opérateurs de type Monge-Ampère complexes est assuré par la Formule de Gaveau [Gav77] en algèbre linéaire : si b est une matrice hermitienne positive $n \times n$, on a

$$(\det b)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \inf\{tr(a \cdot b) : \ a \in \mathcal{H}_n\}, \tag{1.5.1}$$

où $\mathcal{H}_n$ est l'ensemble des matrices hermitiennes positives $n \times n$ telles que $\det a \geq 1$.

Cette formule permet de réduire le problème des valeurs propres pour les opérateurs de type Monge-Ampère complexe (voir l'équation (3.1.1)) en une équation de type Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Soit $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des matrices hermitiennes positives $n \times n$, $a = (a_{j\bar{k}})_{1 \leq j,k \leq n}$ à coefficients des fonctions continues sur Ω tels que $\det a \geq 1$.

À chaque matrice $a = (a_{j\bar{k}})_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathcal{A}(\Omega)$, on associe l'opérateur différentiel linéaire du second ordre

$$L_a = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^{n} a_{j\bar{k}} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}. \tag{1.5.2}$$

L'opérateur L_a est elliptique et vérifie le principe du maximum. De plus la formule de Gaveau implique que si $u \in C^2(\Omega)$, on a ponctuellement

$$(\det u_{j\bar{k}})^{\frac{1}{n}} = \inf \left\{ L_a u \, ; \ \ a \in \mathcal{A}(\Omega) \right\} \tag{1.5.3}$$

dans Ω.

Suivant l'idée de Lions dans le cas réel [Lions86], nous allons montrer au chapitre 3, l'existence d'une valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère complexe en utilisant les premières valeurs propres des opérateurs linéaires L_a qui le définissent.

Pour cela nous aurons besoin du résultat classique suivant (voir [Eva10, Théorème 6.5.2]) :

Lemme 1.5.1. *Il existe un unique couple $(\gamma_1, \phi_1) = (\gamma_1(a), \phi_1(a))$ qui satisfait $\gamma_1 > 0, \phi_1 \in C^2(\bar{\Omega})$ et $\|\phi_1\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 1$ tel que (γ_1, ϕ_1) soit une solution du problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} L_a \phi_1 = -\gamma_1 \phi_1 f & \text{dans} \quad \Omega, \\ \phi_1 = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ \phi_1 < 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.5.4}$$

Le nombre $\gamma_1(a) = \gamma_1(L_a, \Omega)$ est appelé la première valeur propre de l'opérateur $-L_a$ et ϕ_1 est la fonction propre associée.

Nous allons utiliser les résultats suivants pour prouver l'unicité du Théorème 3.1.1 (voir chapitre 3).

Proposition 1.5.2 ([BNV94])**.** *Soient $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $\gamma_1 := \gamma_1(a)$. Alors*

1. γ_1 est donné par la formule suivante :

$$\gamma_1(a) = \gamma_1(L_a, \Omega) = \sup\{\gamma \geq 0 : \quad \exists \phi < 0, L_a\phi + \gamma\phi f \geq 0\}, \tag{1.5.5}$$

où $\phi \in C^2(\Omega)$ et $\phi = 0$ dans $\partial\Omega$,

2. si $\phi \in C^2(\Omega)$ est majorée dans Ω, $\limsup_{z\to\zeta} \phi(z) \leq 0$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$ et satisfaisant $L_a\phi + \gamma_1\phi f \geq 0$ dans Ω, il existe une constante $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $\phi = \theta\phi_1$.

Tous ces résultats sont démontrés dans [BNV94] dans le cas $f \equiv 1$ dans Ω, mais ils sont toujours valables pour une densité positive générale $f > 0$ (voir [NP92]).

Pour appliquer ces résultats dans notre contexte, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.5.3. *Soient $u, v \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Alors, il existe une matrice $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ telle que*

$$[\det(u_{j\bar{k}})]^{\frac{1}{n}} - [\det(v_{j\bar{k}})]^{\frac{1}{n}} = L_a(u - v).$$

Preuve. Rappelons que la fonction $x \mapsto \det x$ de classe C^1 sur l'espace $\mathcal{M}_n$ des matrices d'ordre n et pour tout $x \in \mathcal{M}_n$ et $\xi \in T_x\mathcal{M}_n \simeq \mathcal{M}_n$, sa dérivée est donnée par la formule

$$D_\xi(\det)(x) = D(\det)(x) \cdot \xi = tr(\tilde{x}^\tau \xi), \tag{1.5.6}$$

où $\tilde{x}$ est la comatrice de x et $\tilde{x}^\tau$ sa transposée.

Posons $g(t) := [\det(tu_{j\bar{k}} + (1-t)v_{j\bar{k}})]^{\frac{1}{n}}$ pour $0 \leq t \leq 1$. Alors g est différentiable dans $[0, 1]$ et on a

$$[\det(u_{j\bar{k}})]^{\frac{1}{n}} - [\det(v_{j\bar{k}})]^{\frac{1}{n}} = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt.$$

En appliquant la formule (1.5.6) de la différentielle de det au point $x(t) := t(u_{j\bar{k}}) + (1-t)(v_{j\bar{k}})$ avec $\xi := (u_{j\bar{k}}) - (v_{j\bar{k}})$, nous obtenons

$$g'(t) := \frac{1}{n}[\det(x(t))]^{\frac{1}{n}-1} tr(\tilde{x}(t)^\tau \xi).$$

Alors en posant $w := u - v$, on en déduit que

$$[\det(u_{j\bar{k}})]^{\frac{1}{n}} - [\det(v_{j\bar{k}})]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n} a_{j\bar{k}} w_{j\bar{k}} = L_a w,$$

où

$$a_{j\bar{k}} := \int_0^1 [\det(x(t))]^{\frac{1}{n}-1} \tilde{x}_{j\bar{k}}(t)dt.$$

Il nous reste à montrer que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$.

En effet, $\det^{\frac{1}{n}}$ est une fonction concave sur l'ensemble convexe $\mathcal{H}_n$ des matrices hermitiennes positives $n \times n$ (ce résultat découle de la formule de Gaveau) . Donc

$$\begin{aligned}(\det a)^{\frac{1}{n}} &\geq \int_0^1 \left[\det\left([\det x(t)]^{\frac{1}{n}-1}\tilde{x}(t)\right)\right]^{\frac{1}{n}} dt \\ &= \int_0^1 [\det x(t)]^{\frac{1}{n}-1}[\det \tilde{x}(t)]^{\frac{1}{n}} dt.\end{aligned}$$

Il reste à calculer $\det \tilde{x}(t)$. Cela se fait en se souvenant de la formule de l'inverse d'une matrice $x \in \mathcal{H}_n$: $x^{-1} = \frac{1}{\det x}\tilde{x}^\tau$ et donc $\det \tilde{x} = (\det x)^{n-1}$. Donc $\det a \geq 1$ et $a \in \mathcal{A}(\Omega)$. □

1.6 Fonctions m-sousharmoniques

Les ingrédients utilisés dans cette section sont développés dans [Bl05, Lu12, Ch16a]. Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et m un entier fixé entre 1 et n. Soit $\mathbb{C}^n_{(1,1)}$ l'espace des $(1,1)$-formes réelles sur $\mathbb{C}^n$.

Définition 1.6.1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^n_{(1,1)}$. On dit que la $(1,1)$-forme α est m-positive au point $P \in \Omega$ si

$$\alpha^j \wedge \beta^{n-j} \geq 0 \text{ au point P}, \ j = 1, \dots, m.$$

On dit que α est m-positive sur Ω si elle l'est en chaque point de Ω.

On définit alors le cône des $(1,1)$-formes m-positives sur $\mathbb{C}^n$ par

$$\Theta_m := \{\alpha \in \mathbb{C}^n_{(1,1)} : \ \alpha \wedge \beta^{n-1}, \dots, \alpha^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0\}.$$

Le lemme suivant est une généralisation de l'inégalité de Gårding (voir [Ga59]) pour les $(1,1)$-formes.

Lemme 1.6.2 ([Lu12]). *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Theta_m$. On note*

$$(\alpha^j)^m \wedge \beta^{n-m} = h_j \beta^n, \ j = 1, \dots, m.$$

Alors

$$\frac{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m \wedge \beta^{n-m}}{\beta^n} \geq h_1^{1/m} \dots h_m^{1/m}.$$

Soit T un courant de bidegré $(n-k, n-k)$, $k \leq m$ sur Ω. On dit que T est m-positif si

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge T \geq 0,$$

pour toutes $(1,1)$-formes m-positives $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sur Ω.

Définition 1.6.3. Soit $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$. On dit que u est m-sousharmonique (m-sh en abrégé) si elle est sousharmonique et si

$$dd^c u \wedge \alpha_1 \dots \wedge \alpha_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0, \tag{1.6.1}$$

pour toutes $(1,1)$-formes m-positives $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$.
L'inégalité (1.6.1) signifie que le courant $dd^c u \wedge \beta^{n-m}$ est m-positif.
On notera par $\mathcal{SH}_m(\Omega)$ la classe des fonctions m-sousharmoniques dans Ω.

Puisque les fonctions m-sousharmoniques sont en particulier sousharmoniques, la classe $\mathcal{SH}_m(\Omega)$ jouit des propriétés basiques comme les fonctions sousharmoniques sur Ω. On les résume dans la proprosition suivante.

Proposition 1.6.4 ([Bl05]).

1) Soit u une fonction de classe C^2 dans Ω. Alors u est m-sh si et seulement si la forme dd^cu est m-positive en tout point de Ω.

2) Si $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ alors $\lambda u + \eta v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, $\forall \lambda, \eta \geq 0$.

3) Soit u une fonction m-sh sur Ω. Considérons la suite régularisante standard par convolution avec un noyau lisse $u * \chi_\epsilon$. Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, u_ϵ est m-sh sur $\Omega_\epsilon := \{z \in \Omega : \ dist(z, \partial\Omega) > \epsilon\}$ et u_ϵ décroit vers u lorsque $\epsilon > 0$ décroit vers 0.

4) Soit $(u_i)_{i\in I} \subset \mathcal{SH}_m(\Omega)$ une suite localement uniformément majorée. Alors $(\sup_{i\in I} u_i)^* \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, où v^* est la régularisée semi-continue supérieurement de v.

5) PSH=$\mathcal{SH}_n \subset \ldots \subset \mathcal{SH}_1 = \mathcal{SH}$.

6) Soit $\emptyset \neq U \subsetneq \Omega$ un sous-emsemble tel que $\partial U \cap \Omega$ est relativement compact dans Ω. Supposons que $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, $v \in \mathcal{SH}_m(U)$ et $\limsup_{z' \to z} v(z') \leq u(z)$ pour chaque $z \in \partial U \cap \Omega$. Alors

$$z \mapsto w(z) = \begin{cases} \max[u(z), v(z)], & si\ \ z \in U, \\ u(z) & si\ \ z \in \Omega \setminus U, \end{cases}$$

est m-sh sur Ω.

Contrairement aux fonctions psh, l'exemple suivant nous montre que les fonctions m-sh ne sont pas invariantes par les applications holomorphes.

Exemple 1.6.5. Considérons la fonction u définie par $u(z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \frac{1}{2}|z_3|^2$, $z \in \mathbb{C}^3$. On voit que u est 2-sh dans $\mathbb{C}^3$ mais $u \notin PSH(\mathbb{C}^3)$.

Soit $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ une application holomorphe, définie par $f(z) = (z_1, z_2, \sqrt{2}z_3)$. Alors la fonction $u \circ f(z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$ est sousharmonique mais n'est pas 2-sh sur $\mathbb{C}^3$.

1.7 L'opérateur Hessien complexe

Dans cette section on utilise la méthode de Bedford et Taylor (pour les fonctions psh) pour définir l'opérateur Hessien complexe pour des fonctions m-sousharmoniques localement bornées.

Lemme 1.7.1 ([SaAb12])**.** *Soient $u_1, \ldots, u_k$ $(k \leq m)$ des fonctions m-sousharmoniques localement bornées sur Ω et T un courant m-positif fermé de bidegré $(n-p, n-p)$ $(p \geq k)$. Alors on peut définir par récurrence un courant m-positif fermé*

$$dd^cu_1 \wedge dd^cu_2 \wedge \ldots \wedge dd^cu_k \wedge T = dd^c(u_1 \cdot dd^cu_2 \wedge \ldots \wedge dd^cu_k \wedge T).$$

Le produit est symétrique ; c'est-à-dire

$$dd^cu_1 \wedge dd^cu_2 \wedge \ldots \wedge dd^cu_k \wedge T = dd^cu_{\sigma(1)} \wedge dd^cu_{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge dd^cu_{\sigma(k)} \wedge T,$$

pour toute permutation $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$. En particulier, la mesure Hessienne d'ordre m de $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ est définie par

$$H_m(u) := (dd^cu)^m \wedge \beta^{n-m}$$

L'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg est encore valable dans ce contexte.

Proposition 1.7.2 (Inégalité de Chern-Levine-Nirenberg)**.** *Soient D un ouvert relativement compact de Ω et $K \Subset D$ un compact de D. Il existe $A > 0$ tel que*

$$\|dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_k \wedge T\|_K \leq A.\|u_1\|_{L^\infty(D)} \ldots \|u_k\|_{L^\infty(D)} \|T\|_D \tag{1.7.1}$$

et

$$\|v dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_k \wedge T\|_K \leq A.\|u_1\|_{L^\infty(D)} \ldots \|u_k\|_{L^\infty(D)} \int_D |v| T \wedge \beta^p, \tag{1.7.2}$$

pour toute fonction m-sousharmonique v qui est intégrable par rapport au courant m-positif fermé T de bidegré $(n-p, n-p)$ $(p \leq m)$, et toutes fonctions m-sousharmoniques $u_1, \ldots, u_k$ (avec $k \leq p$).

De plus l'opérateur Hessien complexe est continu pour la convergence uniforme locale et pour la convergence monotone des suites dans $\mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ (voir [Bl05, SaAb12, Lu15]).

Théorème 1.7.3 ([SaAb12])**.** *Soient $(u_0^j), \ldots, (u_k^j)$ des suites décroissantes de fonctions m-sousharmoniques dans Ω qui convergent vers $u_0, \ldots, u_k \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ respectivement. Soit T un courant m-positif fermé de bidegré $(n-p, n-p)$ $(m \geq p \geq k)$ sur Ω. Alors*

$$u_0^j.dd^c u_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c u_k^j \wedge T \rightharpoonup u_0.dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_k \wedge T,$$

au sens des courants.

Le théorème suivant montre que l'opérateur Hessien complexe est continue pour les limites croissantes.

Théorème 1.7.4 ([Lu15])**.** *Soient $\{u_k^j\}_{j=1}^\infty$ des suites localement uniformément bornées de fonctions m-sousharmoniques dans Ω pour $k = 1, \ldots, m$. Supposons que $u_k^j \uparrow u_k \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ presque partout lorsque $j \to +\infty$, $k = 1, \ldots, m$. Alors*

$$dd^c u_1^j \wedge \ldots \wedge dd^c u_N^j \wedge \beta^{n-m} \rightharpoonup dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}.$$

L'opérateur Hessien complexe satisfait aussi au principe de comparaison.

Proposition 1.7.5 ([Lu15])**.** *Soient $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ telles que $\liminf_{z \to \partial\Omega} (u(z) - v(z)) \geq 0$. Alors*

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{u<v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Corollaire 1.7.6. *Soient $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ telles que $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \leq (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}$ et $\liminf_{z \to \partial\Omega} (u(z) - v(z)) \geq 0$. Alors $u \geq v$ sur Ω.*

On va utiliser les fonctions m-sousharmoniques pour définir la notion de m-hyperconvexité.

Définition 1.7.7. 1. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. On dit que Ω est m-hyperconvexe s'il existe une fonction m-sousharmonique continue $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^-$ qui est exhaustive ; c'est-à-dire pour tout $c < 0$, $\{z \in \Omega : \ \rho(z) < c\} \Subset \Omega$.

2. On dit que le domaine $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est strictement m-pseudoconvexe si Ω admet une fonction définissante lisse ρ qui est strictement m-subharmonique dans un voisinage de $\bar{\Omega}$ et vérifiant ponctuellement $|\nabla\rho| > 0$ sur $\partial\Omega = \{\rho = 0\}$. Dans ce cas on peut choisir ρ de sorte que

$$(dd^c\rho)^k \wedge \beta^{n-k} \geq \beta^n \text{ for } 1 \leq k \leq m, \tag{1.7.3}$$

ponctuellement sur Ω.

Lorsque $m = n$, on dit que Ω est strictement pseudoconvexe.

Nous renvoyons le lecteur à [ACH18] pour plus de détails sur la géométrie de ces domaines.

L'une des propriétés les plus importantes des fonctions m-sousharmoniques est la quasi-continuité : c'est-à-dire la restriction d'une fonction m-sousharmonique au complémentaire d'un ouvert de m-capacité arbitrairement petite, est continue. C'est l'analogue pour les fonctions mesurables du théorème de Lusin en théorie de la mesure (voir [Ru87]).

Définition 1.7.8. Soit $E \subset \Omega$ un sous-ensemble de Borel. On définit la m-capacité de E par rapport à Ω comme suit :

$$c_{m,\Omega}(E) := \sup\left\{\int_E (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \ : \ u \in \mathcal{SH}_m(\Omega),\ -1 \leq u \leq 0\right\}.$$

La m-capacité partage les mêmes propriétés élémentaires que la capacité de Bedford-Taylor (Voir [Lu15]).

Proposition 1.7.9.

(1) $c_{m,\Omega}(E_1) \leq c_{m,\Omega}(E_2)$ *si* $E_1 \subset E_2$.

(2) $c_{m,\Omega}(E) = \lim_{j\to+\infty} c_{m,\Omega}(E_j)$ *si* $E_j \uparrow E$.

(3) $c_{m,\Omega}(E) \leq \sum c_{m,\Omega}(E_j)$ *avec* $E = \cup_j E_j$.

1.8 Les classes d'énergie finie de type Cegrell

Dans cette section on suppose toujours que Ω est un domaine m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$. Suivant Cegrell [Ceg98], on introduit quelques classes convexes de fonctions m-sousharmoniques singulières dans Ω adaptées à l'approche variationnelle. On va aussi donner quelques propriétés basiques et importantes de ces classes.

Définition 1.8.1. On note $\mathcal{E}^0_m(\Omega)$ le cône positif convexe des fonctions négatives $\phi \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telles que

$$\int_\Omega (dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m} < +\infty,\ \phi_{|\partial\Omega} \equiv 0.$$

On note $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ la classe de fonctions m-sousharmoniques u dans Ω telles qu'il existe une suite décroissante $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans la classe $\mathcal{E}^0_m(\Omega)$ vérifiant

(i) $u = \lim_j u_j$,

(ii) $\sup_j \int_\Omega (-u_j)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} < +\infty$.

Alors on définit l'énergie des fonctions dans $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ comme suit :

Définition 1.8.2. Soit $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$. On définit son m-énergie par

$$E_m(\phi) = E_{m,\Omega}(\phi) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{1.8.1}$$

Pour chaque constante $C > 0$, on définit l'ensemble convexe

$$\mathcal{E}_m^1(\Omega, C) := \{\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega) : \; E_m(\phi) \leq C\}. \tag{1.8.2}$$

Un autre concept qui sera utile est défini pour toute fonction borélienne h localement majorée sur Ω par la formule

$$P_m(h) = P_{m,\Omega}(h) := \Big(\sup\{v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)\,;\, v \leq h \text{ dans } \Omega\}\Big)^*, \tag{1.8.3}$$

où $*$ signifie la régularisation semi-continue supérieurement.

S'il existe $v_0 \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ tel que $v_0 \leq h$ dans Ω, alors $P_{m,\Omega}(h) \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ et $v_0 \leq P_{m,\Omega}(h)$ dans Ω. La fonction $P_m(h)$ est appelée l'enveloppe m-sousharmonique de h dans Ω.

Cette construction est classique en Analyse Convexe ainsi qu'en Théorie du Potentiel. Elle a été utilisée plus tôt dans la théorie du Pluripotentiel par J. Siciak (voir [Si81] et les références qu'il contient) et considérée dans ce contexte par C.H. Lu (voir [Lu15]).

Un cas particulier de cette construction qui a été étudié dans ce contexte par C.H. Lu dans [Lu15] (voir aussi [SaAb13]) est la fonction dite extrémale définie comme suit.

Soit $K \subset \Omega$ un ensemble compact. La fonction extrémale relative m-sousharmonique du condensateur (K, Ω) est définie par

$$h_K = h_{K,\Omega} := P_m(-\mathbf{1}_K) = \Big(\sup\{v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)\,;\, v \leq 0\ ,\ \text{et } v \leq -1 \text{ dans } K\}\Big)^*. \tag{1.8.4}$$

Les propriétés la fonction extrémale sont résumées dans le lemmme suivant.

Lemme 1.8.3 ([Lu15])**.** *Soit $\Omega \Subset \Omega$ un domaine borné m-hyperconvexe et $K \subset \Omega$ un sous-ensemble compact non m-polaire.*

Alors on a les propriétés suivantes :

(1) $h_K \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ *et* $-1 \leq h_K < 0$ *dans* Ω *;*

(2) $h_K = -1$ *quasi-partout dans K, cela qui signifie que $h_K = -1$ sur $K \setminus E$ où $E \subset \Omega$ est un ensemble de Borel de m-capacité nulle ;*

(3) $(dd^c h_K)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ *dans* $\Omega \setminus K$ *;*

(4) *pour tout* $\zeta \in \partial\Omega$, $\lim_{z\to\zeta} h_K(z) = 0$ *;*

(5) *La capacité du condensateur (K, Ω) est donnée par la formule*

$$c_m(K, \Omega) = \int_\Omega (dd^c h_K)^m \wedge \beta^{n-m} = E_m(h_K). \tag{1.8.5}$$

La dernière égalité dans formule (1.8.5) vient du fait que la mesure $\nu_K := (dd^c h_K)^m \wedge \beta^{n-m}$ est de support K et $h_K = -1$ quasi-partout dans K, donc ν_K-p.p. dans K.

Si de plus $h \leq 0$ et qu'il existe $v_0 \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ tel que $v_0 \leq h$ dans Ω alors $P_{m,\Omega}(h) \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$.

L'opérateur P_m joue un rôle fondamental dans l'approche variationnelle. Ceci a été mis en évidence dans [BBGZ13] pour les équations de Monge-Ampère complexe et étendu aux équations Hessiennes dans [Lu15].

Lemme 1.8.4. *On a les propriétés suivantes.*

(1) *La fonctionnelle E_m est Gâteaux différentiable et $-E_m$ est une primitive de l'opérateur Hessien complexe c'est-à-dire pour tout chemin lisse $t \longmapsto \phi_t$ dans $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{d}{dt} E_m(\phi_t) = \int_\Omega (-\dot{\phi}_t)(dd^c \phi_t)^m \wedge \beta^{n-m},\ t \in I. \tag{1.8.6}$$

En particulier si $u, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et $u \leq v$, on a $E_m(v) \leq E_m(u)$.

(2) *On a aussi*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} E_m(\phi_t) &= \int_\Omega (-\ddot{\phi}_t)(dd^c \phi_t)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &+ m \int_\Omega d\,\dot{\phi}_t \wedge d^c \dot{\phi}_t \wedge (dd^c \phi_t)^{m-1} \wedge \beta^{n-m},\ t \in I. \end{aligned}$$

En particulier, pour tous $u, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$, la fonction $t \longmapsto E_m((1-t)u + tv)$ est convexe dans $[0,1]$.

(3) *La fonctionnelle $E_m : \mathcal{E}^1_m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ pour la topologie $L^1_{loc}(\Omega)$.*

(4) *Pour tout $C > 0$, l'ensemble $\mathcal{E}^1_m(\Omega, C)$ est compacte pour la topologie $L^1_{loc}(\Omega)$.*

1.9 Théorèmes de stabilité

Pour faire marcher l'approche variationnelle, on introduit une deuxième fonctionnelle associée à une mesure de Borel μ qui est définie par la formule suivante :

$$I_m(\phi) = I_{\Omega,\mu,m}(\phi) := \frac{1}{m+1} \int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu, \quad \phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega). \tag{1.9.1}$$

Pour étudier les propriétés de continuité de la fonctionnelle $I_{m,\mu,\Omega}$, nous allons considérer une classe plus spéciale de mesures de Borel introduites dans [Kol98] et utilisées dans [CZ23].

La définition suivante a été introduite dans [CZ23] suivant une terminologie classique en Théorie du Potentiel (voir [Po16]).

Définition 1.9.1. 1) Une mesure de Borel positive sur Ω est dite diffuse par rapport à la capacité $c_m = c_{m,\Omega}$ s'il existe une fonction croissante continue $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\Gamma(0) = 0$ et pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$ on a

$$\mu(K) \leq \Gamma(c_m(K)). \tag{1.9.2}$$

Dans ce cas on dit que μ est Γ-diffuse par rapport à c_m.

2) Une mesure de Borel positive sur Ω est dite fortement Γ-diffuse par rapport à la capacité c_m si elle est Γ-diffuse avec $\Gamma(t) = t\gamma(t)$, où γ est une fonction croissante continue vérifiant la

condition de type Dini suivante

$$\int_{0^+}^{1} \gamma(t)^{\frac{1}{m}} \frac{dt}{t} = \int_{0^+}^{1} \frac{\Gamma(t)^{\frac{1}{m}}}{t^{\frac{1}{m}}} \frac{dt}{t} < +\infty. \tag{1.9.3}$$

La notion de domination par la capacité a été considée en premier dans [Kol98] lorsque $m = n$.

On note $\mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$ l'ensemble des mesures de Borel positives μ sur Ω de masse finie fortement Γ-diffuses.

Donnons quelques exemples (voir [CZ23]).

Exemple 1.9.2. 1. Soient $0 \leq g \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/m$ et $\mu := g dV_{2n}$. Alors d'après un résultat de Dinew-Kołodziej [DK14], $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$ pour une fonction Γ définie par $\Gamma(t) = At^\tau$ avec $\tau > 1$, qui vérifie évidemment la condition de Dini (1.9.3) (voir aussi [CZ23, Exemple 3.4]).

2. Soit μ une mesure de Borel positive telle qu'il existe $\varphi \in \mathcal{S}H_m(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$ avec $\varphi = 0$ dans $\partial\Omega$ et que $\mu \leq (dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m}$ au sens des mesures sur Ω. Alors $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$ pour une fonction Γ définie par $\Gamma(t) = At^\tau$ avec $\tau > 1$, ce qui satisfait la condition de Dini (1.9.3) (voir [CZ23, Corollaire 4.1]).

Nous aurons besoin du théorème de stabilité faible suivant ([CZ23, Theorem 3.11]).

Théorème 1.9.3. *Soit $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$ avec Γ qui vérifie la condition de Dini (1.9.3). Soient $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tels que $\liminf_{z \in \partial\Omega}(u - v)(z) \geq 0$ et*

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \mu,$$

au sens des courants sur Ω.

Alors

$$\sup_\Omega (v - u)_+ \leq Bh(\|v - u)_+\|^m_{m,\mu})$$

où $\|(v - u)_+\|^m_{m,\mu} := \int_\Omega (v - u)^m_+ d\mu$, $B = B(m, \gamma, \mu(\Omega)) > 0$ est une constante uniforme et h est une fonction continue dans $\mathbb{R}^+$ telle que $h(0) = 0$ qui dépend seulement de μ et Γ.

Également nous aurons besoin du résultat suivant qui est une conséquence d'une combinaison du Théorème 1 et du Théorème 2.2 dans [CZ23].

Théorème 1.9.4. *Soit $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$ avec Γ qui vérifie la condition de Dini (1.9.3). Alors pour tout $A > 0$, il existe $C_m = C(m, \Omega, A) > 0$ tel que pour tous $u, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega, A)$, on a*

$$\int_\Omega |u - v|^{m+1} d\mu \leq C_m \tilde{h}\Big(\int_\Omega |u - v|^{m+1} dV_{2n}\Big), \tag{1.9.4}$$

où $\tilde{h} = \tilde{h}_\Gamma$ est continue dans $\mathbb{R}^+$ avec $h(0) = 0$.

Chapitre 2

Problème de Dirichlet pour les équations de Monge-Ampère complexes

Le contenu de ce chapitre est la section 3 de l'article [BaZe23a]. Ici on démontre un nouveau théorème d'existence de solutions pour un cas spécial d'équations de Monge-Ampère complexes dégénérées que l'on utilisera pour démontrer les résultats principaux du chapitre 3. Pour cela, on va établir de nouvelles estimées a priori du gradient et du laplacien de telles solutions en utilisant les méthodes et les résultats de L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85] et de B. Guan [Guan98].

2.1 Introduction

Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné à bord lisse et $\psi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction lisse sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ et $\psi \geq 0$.

On considère le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe :

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \psi(\cdot, u)\beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où β est la forme de Kähler standard sur $\mathbb{C}^n$ et $u \in \mathcal{P}(\Omega) := PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ est la fonction inconnue.

Comme nous l'avons déjà dit, le problème (2.1.1) a été résolu par L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85] lorsque $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est un doamine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, sous l'hypothèse $\frac{\partial\psi}{\partial u} \geq 0$ et certaines conditions sur la façon dont ψ dégénère près du bord $\partial\Omega$. Plus tard ce résultat a été étendu par B. Guan [Guan98] et B. Guan et Q. Li [GL10] à une situation plus générale dans le cas non dégénéré sur un domaine général (domaine borné à bord lisse), en supposant l'existence d'une sous-solution strictement plurisousharmonique.

Cependant ces résultats ne s'appliquent pas dans le cas des problèmes que nous considérons au niveau du chapitre 3. Alors, en utilisant les idées de [CKNS85], nous sommes en mesure de prouver un nouveau théorème d'existence pour de telles équations sous l'hypothèse de l'existence d'une sous-solution et d'une sursolution par application de la méthode du point fixe.

On dit que $\underline{u} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est une sous-solution de (2.1.1) si elle satisfait

$$\begin{cases} (dd^c\underline{u})^n \geq \psi(z,\underline{u})\beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ \underline{u} = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

De plus une sous-solution $\underline{u}$ est dite *sous-solution stricte* si

$$(dd^c\underline{u})^n \geq (\psi(z,\underline{u}) + \epsilon_0)\beta^n \quad \text{dans} \ \Omega, \tag{2.1.3}$$

où $\epsilon_0 > 0$.

On dit aussi que $\bar{u} \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ est une sursolution de (2.1.1), si elle satisfait

$$\begin{cases} (dd^c\bar{u})^n \leq \psi(z,\bar{u})\beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

L'inégalité différentielle est entendue ici au sens des courants sur Ω.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse, $0 \leq \psi^{\frac{1}{n}} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ et $\frac{\partial\psi}{\partial u} \leq 0$ dans $\Omega \times]-\infty, 0]$.*

Supposons les conditions suivantes :

(1) si $\psi > 0$ dans $\bar{\Omega} \times]-\infty, 0]$, le problème de Dirichlet (2.1.1) admet une sous-solution $\underline{u} \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$;

(2) si $\psi \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times]-\infty, 0]$ et $\psi > 0$ dans $\Omega \times]-\infty, 0[$, le problème de Dirichlet (2.1.1) admet une sous-solution stricte $\underline{u} \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$;

(3) le problème de Dirichlet (2.1.1) admet une sursolution $\bar{u} \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $\underline{u} \leq \bar{u} < 0$ sur Ω.

Alors le problème de Dirichlet (2.1.1) admet une solution $u \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ sur $\bar{\Omega}$.

L'idée de la preuve est la suivante. Lorsque $\psi > 0$ dans $\bar{\Omega} \times]-\infty, 0]$, on montre en utilisant le Théorème 1.4.1 que pour tout $v \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$, le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \psi(\cdot, v)\beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

admet une unique solution $u = T(v) \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$.

La solution du problème de Dirichlet (2.1.1) est un point fixe pour l'inverse T de l'opérateur de Monge-Ampère. Nous allons utiliser une méthode itérative pour trouver un point fixe de T. Nous devons ensuite établir des estimées a priori pour contrôler le processus d'itération. C'est cela que nous allons faire dans les trois premières sous-sections de la section suivante.

2.2 Les estimées a priori

Dans cette section, nous supposons les conditions suivantes.

1. Ω est un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse de $\mathbb{C}^n$ et ρ est une fonction définissante lisse de Ω telle que $dd^c\rho \geq \beta = dd^c|z|^2$;
2. $\psi > 0$ et lisse dans $\bar{\Omega} \times]-\infty, 0]$;

2.2.1 Les estimées du gradient

Soit $\phi \in C^0(\bar{\Omega})$ une fonction fixée telle que $\phi < 0$ sur Ω.

Proposition 2.2.1. *Soit $v \in PSH(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ telle que $v \leq \phi$ sur Ω. Soit $u \in PSH(\Omega) \cap C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ une solution du problème de Dirichlet (2.1.5).*

Alors on a l'estimée suivante

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u|^2 \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla v|^2}{2} + C_1,$$

où C_1 dépend de $L := \|\nabla \rho\|_{C^0(\bar{\Omega})}$, $C_0 := \sup_{\bar{\Omega}}(|u|+|\rho|)$, $M_0 := \sup_{\bar{\Omega}} |v|$, $K_1 := \|\psi^{1/n}\|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M_0,0])}$ et $m_0 := \min_{\bar{\Omega}_0\times[-M_0,-A_0]} \psi^{1/n} > 0$, où Ω_0 dépend de C_0, K_1 et $A_0 := \min_{\bar{\Omega}_0} |\phi|$.

Preuve. On pose $\Phi = |\nabla u|^2 = \sum_p |u_p|^2$, où u_p représente la dérivée partielle de u suivant la direction z_p.

On considère la fonction

$$G(z) := \log \Phi(z) + \frac{u^2}{2} + B\rho$$

définie et continue sur $\bar{\Omega}$. Ici B est une constante positive que l'on spécifiera plus tard. Le maximum de G sur $\bar{\Omega}$ est atteint en un point z_0 que l'on peut supposer être à l'intérieur (sinon la preuve est finie).

Si $\Phi(z_0) \leq 1$, alors pour tout $z \in \Omega$, $G(z_0) \leq C_0^2$, donc $G(z) \leq C_0^2$, ce qui donne la borne supérieure $\Phi(z) \leq e^{C_0^2+BC_0}$ sur Ω.

On peut donc supposer que $\Phi(z_0) \geq 1$. Désormais, nous allons effectuer nos calculs au point $z_0 \in \Omega$ et nous pouvons supposer que la matrice $(u_{i\bar{j}})$ est diagonale. D'après le principe du maximum on a, pour tous $1 \leq p, q \leq n$,

$$\begin{aligned} 0 = G_p &= \frac{\Phi_p}{\Phi} + uu_p + B\rho_p, \\ 0 = G_{\bar{q}} &= \frac{\Phi_{\bar{q}}}{\Phi} + uu_{\bar{q}} + B\rho_{\bar{q}}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

En utilisant (2.2.1), on obtient

$$\begin{aligned} 0 \geq \sum_{p=1}^n u^{p\bar{p}} G_{p\bar{p}} &= \sum_{p=1}^n u^{p\bar{p}} \left(\frac{\Phi_{p\bar{p}}}{\Phi} - \frac{|\Phi_p|^2}{\Phi^2} + B + |u_p|^2 + uu_{p\bar{p}} \right) \\ &= \sum_{p=1}^n u^{p\bar{p}} \left(\frac{\Phi_{p\bar{p}}}{\Phi} - |uu_p + B\rho_p|^2 + B + |u_p|^2 \right) + nu. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n u^{p\bar{p}} \Phi_{p\bar{p}} = \sum_{p=1}^n u^{p\bar{p}} \sum_{j=1}^n (u_j u_{\bar{j}})_{p\bar{p}} &= \sum_{p=1,j=1}^n u^{p\bar{p}} \left(2Re(u_{\bar{j}} u_{jp\bar{p}}) + |u_{jp}|^2 + |u_{j\bar{p}}|^2 \right) \\ &= \sum_{1\leq p,j\leq n} u^{p\bar{p}} \left(2Re(u_{\bar{j}} u_{jp\bar{p}}) + |u_{jp}|^2 \right) + \sum u_{p\bar{p}}. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Posons $g(z) := \log \psi(z, v(z))$ pour $z \in \Omega$.

En dérivant l'équation de Monge-Ampère

$$\log\det(u_{i\bar{j}}) = \log\psi(\cdot, v) = g,$$

on obtient

$$\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j} = g_j.$$

Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}}\Phi_{p\bar{p}} &= \sum u_{p\bar{p}} + \sum_{1\leq p,j\leq n} u^{p\bar{p}}|u_{jp}|^2 + 2Re\left(\sum_{1\leq j\leq n} g_j u_{\bar{j}}\right)\\ &\geq \sum_{1\leq p,j\leq n} u^{p\bar{p}}|u_{jp}|^2 - 2|\nabla g|\sqrt{\Phi}.\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Nous allons estimer le premier terme du membre de droite. D'après le principe du maximum, voir (2.2.1),

$$\sum_{1\leq j\leq n} u_{jp}u_{\bar{j}} + u_p u_{p\bar{p}} = -\Phi(uu_p + B\rho_p),$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\Phi(uu_p + B\rho_p) + u_p u_{p\bar{p}}|^2 \leq \Phi\sum_j |u_{jp}|^2,$$

par suite, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j,p}\frac{u^{p\bar{p}}|u_{jp}|^2}{\Phi} &\geq \Phi^{-2}\sum_p u^{p\bar{p}}|\Phi(uu_p + B\rho_p) + u_p u_{p\bar{p}}|^2\\ &\geq \sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar{p}}|uu_p + B\rho_p|^2 - 2\Phi^{-1}\sum_{1\leq p\leq n}|uu_p + B\rho_p||u_p|\\ &\geq \sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar{p}}|uu_p + B\rho_p|^2 - 2C_0 - 2BL\Phi^{-1/2},\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

où $L = \sup_{\bar{\Omega}}|\nabla\rho|$. D'après (2.2.4) et (2.2.5) et le fait que $\Phi(z_0) \geq 1$, on obtient

$$\Phi^{-1}\sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar{p}}\Phi_{p\bar{p}} \geq \sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar{p}}|uu_p + B\rho_p|^2 - 2\Phi^{-1/2}|\nabla g| - A_1, \tag{2.2.6}$$

où $A_1 := 2C_0 + 2BL$.

Puisque $g(z) = \log\psi(z, v(z)) = n\log\psi^{1/n}(z, v(z)))$, on a

$$\nabla g = n\left[\nabla\psi^{1/n}(\cdot, v) + (\psi^{1/n})_t(\cdot, v)\nabla v\right]\psi^{-1/n}(\cdot, v)$$

et par suite

$$|\nabla g| \leq nK_1\left(1 + |\nabla v|\right)\psi^{-1/n}(\cdot, v),$$

où K_1 est une borne supérieure de la norme C^1 de $\psi^{1/n}$ sur $\bar{\Omega}\times[-M_0, 0]$.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on observe que

$$\sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar p} \geq n\psi(\cdot,v)^{-1/n}.$$

Ce qui avec (2.2.2) donnent

$$0 \geq (B-2K_1)\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar p} - 2nK_1\Phi^{-1/2}|\nabla v|\psi^{-1/n}(\cdot,v) - A_2 + \sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar p}|u_p|^2, \tag{2.2.7}$$

où $A_2 := A_1 + nC_0$.

Nous allons poser $B = 1 + 2K_1(1+e^{C_0^2+1})$, et ensuite considérer deux cas.

Premier cas : $\rho(z_0) \geq -B^{-1}$. On pose

$$B_1 := e^{-C_0^2-2}\sup_{\bar\Omega}(1+|\nabla v|^2).$$

Si $\Phi(z_0) \leq \max(B_1, 1)$ on a

$$G(z) \leq G(z_0) \leq \max(\log B_1, 0) + \frac{C_0^2}{2} \leq \max(\log(1+\sup_{\bar\Omega}|\nabla v|^2) - 2, C_0^2),$$

donc pour tout $z\in\Omega$,

$$\log\Phi(z) \leq G(z) - \frac{u(z)^2}{2} - B\rho \leq \max(\log(1+\sup_{\bar\Omega}|\nabla v|^2) - 1, C_0^2+1),$$

et on en déduit l'estimée recherchée.

On rappelle que $\Pi_{1\leq p\leq n}u^{p\bar p} = \psi^{-1}(\cdot,v)$.

Si $\Phi(z_0) \geq \max(B_1,1)$, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$2nK_1\Phi^{-1/2}|\nabla v|\psi^{-1/n}(\cdot,v) \leq 2nK_1e^{C_0^2+1}\psi^{-1/n}(\cdot,v) \leq (B-2K_1-1)\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar p}.$$

D'après (2.2.7), il s'en suit que

$$0 \geq \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar p} - A_2 + \sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar p}|u_p|^2. \tag{2.2.8}$$

Donc $\sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar p} \leq A_2$.

Maintenant, rappelons l'inégalité élémentaire suivante : pour $0<\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n$, on a

$$\sum_{1\leq j\leq n}\lambda_j \leq n\left(\Pi_{1\leq j\leq n}\lambda_j\right)\left(\sum_{1\leq j\leq n}\lambda_j^{-1}\right)^{n-1}. \tag{2.2.9}$$

En appliquant cette inégalité avec $\lambda_j = u_{j\bar j}$, on en déduit que $\sum_{p=1}^n u_{p\bar p} \leq A_3 := nA_2^{n-1}K_1$. Puisque $0\leq u_{p\bar p}$, il s'ensuit que $u_{p\bar p}\leq A_3$, donc $u^{p\bar p}\geq A_3^{-1}$. En introduisant cela dans (2.2.8) on obtient $\Phi \leq A_4 := A_2 A_3$ comme souhaité.

Deuxième cas : $\rho(z_0) \leq -B^{-1}$. Observons que $\Omega_0 := \{z \in \Omega; \rho(z_0) < -B^{-1}\} \Subset \Omega$, $z_0 \in \bar{\Omega}_0$. De la continuité de ϕ et du fait que $\phi < 0$ sur Ω, on en déduit que $\phi(z_0) \leq -A_0 := \max_{\bar{\Omega}_0} \phi < 0$. Donc $v(z_0) \leq \phi(z_0) \leq -A_0 < 0$.

Puisque $z_0 \in \bar{\Omega}_0$, $-M_0 \leq v(z_0) \leq -A_0$ et $\psi > 0$ dans $\Omega \times]-M_0, 0[$, on a alors

$$\psi^{1/n}(z_0, v(z_0)) \geq m_0 := \min_{\bar{\Omega}_0 \times [-M_0, -A_0]} \psi^{1/n}(z,t) > 0.$$

Si $\Phi(z_0) \leq e^{-C_0^2 - BC_0} \sup |\nabla v|^2$ alors on a pour tout $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\log \Phi(z) &= G(z) - \frac{u^2(z)}{2} - B\rho(z) \leq G(z_0) - \frac{u^2(z)}{2} - B\rho(z) \\
&\leq \log \Phi(z_0) + \frac{u^2(z_0)}{2} + B\rho(z_0) - B\rho(z) \\
&\leq -C_0^2/2 - 1 - B(C_0 + \rho(z)) + \log \sup |\nabla v|^2 \\
&\leq -1 + \log \sup |\nabla v|^2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'estimée recherchée.

Si $\Phi(z_0) \geq e^{-C_0^2 - BC_0} \sup |\nabla v|^2$, on a

$$\Phi^{-1/2}(z_0) |\nabla v(z_0)| \psi^{-1/n}(z_0, v(z_0)) \leq m_0^{-1} e^{C_0^2/2 + BC_0/2} =: A_5,$$

et d'après (2.2.7), il s'en suit que

$$0 \geq (B - 2K_1) \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - A_6 + \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} |u_p|^2 \geq \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - A_6 + \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} |u_p|^2,$$

puisque $B - 2K_1 \geq 1$, où $A_6 := A_2 + 2nK_1 A_5$. Le même raisonnement qu'au premier cas donne l'estimée souhaitée. □

L'estimée a priori de la Proposition 2.2.1 peut être améliorée pour un point fixe de l'opérateur T.

Corollaire 2.2.2. *Soit $u \in PSH(\Omega) \cap C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ une solution de l'équation de Monge-Ampère complexe*

$$(dd^c u)^n = \psi(\cdot, u) \beta^n$$

telle que $u \leq 0$ dans $\bar{\Omega}$.

Alors on a l'estimée suivante

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u|^2 \leq \sup_{\partial \Omega} |\nabla u|^2 + C_1,$$

où C_1 dépend de $L := \|\rho\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, $C_0 := \sup_{\bar{\Omega}}(|u| + |\rho|)$ et de $K_1 := \|\psi^{1/n}\|_{C^1(\bar{\Omega} \times [-C_0, 0])}$.

Il est important de noter qu'ici la constante C_1 est indépendante de la borne inférieure de ψ.

Preuve. On va utiliser les mêmes notations que dans la preuve de la Proposition 2.2.1. Lorsque $v = u$, dans la preuve de la Proposition 2.2.1, on obtient $\Phi = |\nabla v|^2$ et alors l'inégalité

(2.2.7) devient

$$0 \geq (B - 2K_1)\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - 2nK_1\psi^{-1/n}(\cdot, u) - A_2 + \sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar{p}}|u_p|^2. \tag{2.2.10}$$

D'après cette inégalité et le fait que $\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} \geq n\psi^{-1/n}(\cdot, u)$, on en déduit que

$$0 \geq \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - A_2 + \sum_{1\leq p\leq n} u^{p\bar{p}}|u_p|^2,$$

si on pose $B = 4K_1 + 1$. La conclusion s'en déduit de la même manière. □

2.2.2 Les estimées du laplacien

On fixe une fonction $v \in PSH(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$.

Proposition 2.2.3. *Soit $u \in PSH(\Omega) \cap C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ une solution du problème de Dirichlet* (2.1.5).

Alors, on a l'estimée suivante

$$\sup_{\bar{\Omega}} \Delta u \leq \sup_{\partial\Omega} \Delta u + \frac{1 + \|\nabla v\|^2 + \sup_{\Omega} \Delta v}{2} + C_2,$$

où C_2 dépend de $r := \sup_{\Omega} |z|$, $C_0 := \sup_{\bar{\Omega}} |u|$, $M_0 := \sup_{\bar{\Omega}} |v|$, $C_1 = \sup_{\bar{\Omega}}(|\nabla u|)$ et de $K_2 := \|\psi^{1/n}\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega}\times[-M_0,0]}$.

Preuve. Considérons la fonction $H(z) = \log(\Delta u) + b\|z\|^2$ lisse sur Ω et continue sur $\bar{\Omega}$. Alors H atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$ en un point $z_0 \in \bar{\Omega}$. Si $z_0 \in \partial\Omega$ alors, on a l'estimée souhaitée immédiatement.

Supposons alors que $z_0 \in \Omega$. Nous allons effectuer nos calculs au point z_0 et nous pouvons aussi supposer que $(u_{i\bar{j}}(z_0))$ est diagonale. Alors, d'après le principe du maximum, on a pour tous $1 \leq p, q \leq n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial z_p} = H_p = \frac{(\Delta u)_p}{\Delta u} + b\bar{z}_p \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_q} = H_{\bar{q}} = \frac{(\Delta u)_{\bar{q}}}{\Delta u} + bz_q. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

En utilisant (2.2.11), on a

$$\begin{aligned} 0 \geq \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} H_{p\bar{p}} &= \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} \left(\frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{\Delta u} - \frac{|(\Delta u)_p|^2}{(\Delta u)^2} + b \right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} \left(\frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{\Delta u} - b^2 r^2 + b \right). \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

En dérivant deux fois l'équation de Monge-Ampère

$$(\det(u_{i\bar{j}}))^{1/n} = \psi(\cdot, v)^{1/n} = g(\cdot, v),$$

on obtient, en utilisant la convention de sommation,

$$n^{-1} g u^{p\bar{q}} u_{p\bar{q}j} = g_j + g_v v_j,$$

$$n^{-2} g u^{k\bar{l}} u_{k\bar{l}\bar{j}} u^{p\bar{q}} u_{p\bar{q}j} + n^{-1} g (u^{p\bar{q}})_{\bar{j}} u_{p\bar{q}j} + n^{-1} g u^{p\bar{q}} u_{p\bar{q}j\bar{j}} = 2Re(g_{vj} v_{\bar{j}}) + g_v v_{j\bar{j}} + g_{vv} |v_j|^2 + g_{j\bar{j}}.$$

Si D est un opérateur de dérivée partielle alors $Du^{k\bar{q}} = -u^{p\bar{q}} u^{k\bar{l}} Du_{p\bar{l}}$. Puisque $u_{i\bar{j}}$ est diagonale en z_0, on a

$$Du^{k\bar{q}} = -u^{q\bar{q}} u^{k\bar{k}} Du_{q\bar{k}}.$$

En utilisant à nouveau le fait que $(u_{i\bar{j}})$ est diagonale en z_0, on obtient

$$n^{-2} g u^{p\bar{p}} u^{q\bar{q}} u_{p\bar{p}\bar{j}} u_{q\bar{q}j} - n^{-1} g u^{p\bar{p}} u^{q\bar{q}} |u_{p\bar{q}j}|^2 + n^{-1} g u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j\bar{j}} = 2Re(g_{vj} v_{\bar{j}}) + g_v v_{j\bar{j}} + g_{j\bar{j}},$$

qui est la même égalité que

$$n^{-1} g \left| \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}\bar{j}} \right|^2 - g \sum_{p,q=1}^{n} u^{p\bar{p}} u^{q\bar{q}} |u_{p\bar{q}j}|^2 + g \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j\bar{j}} = n(2Re(g_{vj} v_{\bar{j}}) + g_v v_{j\bar{j}} + g_{vv} |v_j|^2 + g_{j\bar{j}}).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on remarque que

$$g \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j\bar{j}} \geq -A_1 (1 + \|\nabla v\|^2 + \Delta v),$$

où $\|\nabla v\| := \|\nabla v\|_{C^0(\bar{\Omega})}$ et $A_1 > 0$ dépends seulement de $\|\psi^{1/n}\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega} \times [-C_0, 0]}$.

En introduisant cela dans (2.2.12) on obtient au point z_0,

$$0 \geq (b - b^2 r^2) \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - \frac{A_1 (1 + \|\nabla v\|^2 + \Delta v)}{g \Delta u}.$$

En choisissant b suffisamment petit (en fonction de r) on obtient au point z_0,

$$0 \geq \frac{b}{2} \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - \frac{A_1 (1 + \|\nabla v\|^2 + \Delta v)}{g \Delta u}.$$

Si $\Delta u(z_0) \leq e^{-br^2 - 1} (1 + \|\nabla v\|^2 + \Delta v(z_0))$, alors

$$H(z_0) \leq \log(1 + \|\nabla v\|^2 + \Delta v(z_0)) - 1,$$

donc pour tout $z \in \Omega$,

$$\log \Delta u(z) \leq H(z) \leq H(z_0) \leq \log(1 + \|\nabla v\|^2 + \sup_{\Omega} \Delta v) - 1,$$

et on en déduit l'estimée souhaitée.

Supposons alors que $\Delta u(z_0) \geq e^{-br^2-1}(1+\|\nabla v\|^2+\Delta v(z_0))$. Alors, en z_0 on obtient l'inégalité

$$\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} \leq A_1 g^{-1}. \tag{2.2.13}$$

En appliquant l'inégalité (2.2.9) avec $\lambda_j := u_{j\bar{j}}$, on déduit de (2.2.13) que

$$\Delta u(z_0) \leq A_1 g^n g^{-(n-1)} \leq A_2,$$

où $A_2 := A_1 \sup_{\Omega\times[-C_0,0]} \psi^{1/n}$. Donc pour tout $z \in \Omega$, on a

$$\Delta u(z) \leq H(z) \leq H(z_0) \leq \Delta(z_0) + b|z_0|^2 \leq A_2 + br^2.$$

Ce qui met fin à la preuve.

□

Nous allons donner une deuxième estimation du lapacien d'un point fixe de l'opérteur T qui dépend de la norme C^2 de ψ sur $\bar{\Omega}$.

Soit u une solution lisse du problème de Monge-Ampère complexe

$$(dd^c u)^n = \psi(z,u)\beta^n \text{ dans } ;\Omega,\ u = \phi \text{ dans } ;\partial\Omega,$$

où $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse, ϕ est une fonction lisse sur $\partial\Omega$, et u est psh dans Ω. Comme Ω est borné, on peut fixer une constante positive R telle que $|z| \leq R$, pour tout $z \in \Omega$. Alors on a :

Proposition 2.2.4. *Soit $s \geq n-1$ un nombre réel fixé. Alors on a l'estimée a priori suivante*

$$\sup_{\bar{\Omega}} \Delta u \leq C_2(1 + \sup_{\partial\Omega} \Delta u),$$

où C_2 dépend seulement de s, ϕ, R, $C_0 := \sup_{\bar{\Omega}} |u|$, $C_1 := \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u|$, $\psi_0 := \sup_{\bar{\Omega}\times[-C_0,C_0]} \psi$ et de $\psi_2 := \sup_{\bar{\Omega}\times[-C_0,C_0]} |D^2\psi^{1/s}|$.

Preuve. Considérons la fonction $H(z) = \log(\Delta u) + 2b\|z\|^2$ définie et lisse sur $\bar{\Omega}$. Ici $b > 0$ est une petite constante que l'on spécifiera plus tard. Supposons que H atteigne son maximum en un certain $z_0 \in \Omega$ (si z_0 est sur la bord $\partial\Omega$, alors on a terminé). Le but est de majorer $\Delta u(z_0)$, on peut donc supposer que $\Delta u(z_0) \geq 1$. Maintenant, nous allons effectuer nos calculs au point z_0 et nous pouvons supposer que $(u_{i\bar{j}}(z_0))$ est diagonale. Alors, par le principe du maximum on a, pour tous $1 \leq p, q \leq n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial z_p} = H_p = \frac{(\Delta u)_p}{\Delta u} + b\bar{z}_p \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_q} = H_{\bar{q}} = \frac{(\Delta u)_{\bar{q}}}{\Delta u} + bz_q. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

En utilisant (2.2.14), on a

$$
\begin{aligned}
0 \geq \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} H_{p\bar{p}} &= \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} \left(\frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{\Delta u} - \frac{|(\Delta u)_p|^2}{(\Delta u)^2} + b \right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} \left(\frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{\Delta u} - 4b^2R^2 + 2b \right).
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

En dérivant deux fois l'équation de Monge-Ampère complexe

$$(\det(u_{i\bar{j}}))^{1/s} = \psi^{1/s}(\cdot, u) = g(\cdot, u),$$

et utiliser la convention de sommation, on a

$$s^{-1} g u^{p\bar{q}} u_{p\bar{q}j} = g_j + g_u u_j,$$

$$s^{-2} g u^{k\bar{l}} u_{k\bar{l}\bar{j}} u^{p\bar{q}} u_{p\bar{q}j} + s^{-1} g (u^{p\bar{q}})_{\bar{j}} u_{p\bar{q}j} + s^{-1} g u^{p\bar{q}} u_{p\bar{q}j\bar{j}} = 2Re(g_j g_u u_{\bar{j}}) + g_u u_{j\bar{j}} + g_{uu}|u_j|^2 + g_{j\bar{j}}.$$

Si D est un opérateur de dérivée partielle, on a $Du^{k\bar{q}} = -u^{p\bar{q}} u^{k\bar{l}} Du_{p\bar{l}}$. Donc, en z_0 (en utilisant le fait que $(u_{i\bar{j}})$ est diagonale)

$$Du^{k\bar{q}} = -u^{q\bar{q}} u^{k\bar{k}} Du_{q\bar{k}}.$$

En utilisant à nouveau le fait que $(u_{i\bar{j}})$ est diagonale en z_0, on a

$$s^{-2} g u^{p\bar{p}} u^{q\bar{q}} u_{p\bar{p}\bar{j}} u_{q\bar{q}j} - s^{-1} g u^{p\bar{p}} u^{q\bar{q}} |u_{p\bar{q}j}|^2 + s^{-1} g u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j\bar{j}} = 2Re(g_j g_u u_{\bar{j}}) + g_u u_{j\bar{j}} + g_{uu}|u_j|^2 + g_{j\bar{j}},$$

qui esl la même chose que

$$s^{-1} g \left| \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}\bar{j}} \right|^2 - g \sum_{p,q=1}^{n} u^{p\bar{p}} u^{q\bar{q}} |u_{p\bar{q}j}|^2 + g \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j\bar{j}} = s(2Re(g_j g_u u_{\bar{j}}) + g_u u_{j\bar{j}} + g_{uu}|u_j|^2 + g_{j\bar{j}}).$$

Notons que

$$s^{-1} \left| \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}\bar{j}} \right|^2 - \sum_{p,q=1}^{n} u^{p\bar{p}} u^{q\bar{q}} |u_{p\bar{q}j}|^2 \leq s^{-1} \left| \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}\bar{j}} \right|^2 - \sum_{p=1}^{n} |u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j}|^2.$$

En fixant $1 \leq j \leq n$, nous affirmons que

$$s^{-1} \left| \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}\bar{j}} \right|^2 - \sum_{p=1}^{n} |u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}j}|^2 \leq A_2 b^2 (\Delta u) \sum_{1 \leq p \leq n} u^{p\bar{p}}. \tag{2.2.16}$$

On écrit $z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j$. On remarque que $2u_{p\bar{p}\bar{j}} = u_{p\bar{p}x_j} + \sqrt{-1} u_{p\bar{p}y_j}$, $u_{p\bar{p}x_j} \in \mathbb{R}$, $u_{p\bar{p}y_j} \in \mathbb{R}$. Donc

$$4 \left| \sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}\bar{j}} \right|^2 = \left(\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}x_j} \right)^2 + \left(\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} u_{p\bar{p}y_j} \right)^2,$$

$$4\sum_{p=1}^{n}|u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}j}|^2=\sum_{p=1}^{n}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2+\sum_{p=1}^{n}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}y_j})^2.$$

Donc il suffit de prouver les estimées pour les dérivées partielles réelles. Nous allons nous occuper de la dérivée par rapport à x_j car le même argument s'applique pour la dérivée par rapport à y_j. En utilisant une idée de Pengfei Guan dans le cas réel [Guan97], on considère deux cas.

Cas 1. Supposons que les nombres $u_{p\bar{p}x_j}$, $p=1,...,n$ ne sont pas du même signe. Soient I_+ l'ensemble des indices p tels que les $u_{p\bar{p}x_j}$ sont positifs et I_- l'ensemble des indices p tels que les $u_{p\bar{p}x_j}$ sont négatifs. Alors

$$\begin{aligned}
s^{-1}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2&=s^{-1}\left(\sum_{p\in I_+}u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j}+\sum_{p\in I_-}u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j}\right)^2\\
&\le s^{-1}\left(\sum_{p\in I_+}u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j}\right)^2+s^{-1}\left(\sum_{p\in I_-}u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j}\right)^2\\
&\le \sum_{p\in I_+}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2+\sum_{p\in I_-}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2,
\end{aligned}$$

où dans la dernière ligne nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque $s\ge n-1\ge \max(\mathrm{Card}(I_+),\mathrm{Card}(I_-))$.

Cas 2. Supposons que les nombres $u_{p\bar{p}x_j}$, $p=1,...,n$ sont de même signe. Sans perte de généralité, nous supposons que $u^{n\bar{n}}\ge u^{p\bar{p}}$, pour tout $1\le p\le n-1$. Alors, on a les inégalités suivantes : $\Delta u\le nu_{n\bar{n}}\le n\Delta u$ et par suite $u^{n\bar{n}}\le n(\Delta u)^{-1}$. D'après le principe du maximum, on a $H_{x_j}=0$. Donc

$$\sum_{p=1}^{n}u_{p\bar{p}x_j}+4bx_j\Delta u=0.$$

Puisque les $u_{p\bar{p}x_j}$ sont de même signe, on en déduit

$$\sum_{p=1}^{n}|u_{p\bar{p}x_j}|=4b|x_j|\Delta u\le 4bR\Delta u,$$

donc $|u_{p\bar{p}x_j}|\le 4bR\Delta u$ pour tout $1\le p\le n$. En utilisant cela, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $s^{-1}\le n-1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&s^{-1}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2-(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2\\
&=2u^{n\bar{n}}|u_{n\bar{n}x_j}|\sum_{p=1}^{n-1}u^{p\bar{p}}|u_{p\bar{p}x_j}|+s^{-1}(u^{n\bar{n}}u_{n\bar{n}x_j})^2+s^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n-1}u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j}\right)^2-\sum_{p=1}^{n}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2\\
&\le 2n(\Delta u)^{-1}(4bR\Delta u)^2\sum_{p=1}^{n}u^{p\bar{p}}+s^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n-1}u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j}\right)^2-\sum_{p=1}^{n-1}(u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}x_j})^2\\
&\le A_2b^2\Delta u\sum_{p=1}^{n}u^{p\bar{p}}.
\end{aligned}$$

L'affirmation est ainsi prouvée. On obtient alors

$$g\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}}u_{p\bar{p}j\bar{j}} \geq -A_2b^2g(\Delta u)\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - A_3.$$

En introduisant cela dans (2.2.15) on obtient

$$0 \geq (2b - 4b^2R^2 - A_2b^2)\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - \frac{A_3}{g},$$

car $\Delta u \geq 1$. En choisissant b suffisamment petit, on obtient $0 \geq b\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} - A_3g^{-1}$, ce qui implique

$$\sum_{p=1}^{n} u^{p\bar{p}} \leq A_3b^{-1}g^{-1}. \tag{2.2.17}$$

En appliquant l'inégalité (2.2.9) avec $\lambda_j := u_{j\bar{j}}$, on déduit de (2.2.17) que

$$\Delta u \leq A_4\psi g^{-n+1} = A_4\psi\psi^{-(n-1)/s} \leq A_5,$$

puisque $s \geq n-1$. Cela complète la preuve. □

2.2.3 Les estimées du second ordre sur le bord

Proposition 2.2.5. *Supposons que $\underline{u} \in PSH(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ est une fonction strictement plurisousharmonique sur $\bar{\Omega}$, $w \in SH(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ telles que $\underline{u} \leq w < 0$ dans Ω et $\underline{u} = w = 0$ dans $\partial\Omega$. Soit $v \in PSH(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ telle que $v \leq w$ in $\bar{\Omega}$. Alors toute solution $u \in PSH(\Omega) \cap C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ de (2.1.5) telle que $\underline{u} \leq u \leq w$ dans Ω vérifie l'estimée a priori suivante*

$$\sup_{\partial\Omega} \|D^2u\| \leq C_3, \tag{2.2.18}$$

où $C_3 > 0$ est une constante qui ne dépendant que de $C_0 := \max_{\bar{\Omega}}\{|\underline{u}|, \|\underline{u}\|_{C^1(\bar{\Omega})}, \|w\|_{C^1(\bar{\Omega})}, \|v\|_{C^1(\bar{\Omega})}\}$ et de $\|\psi^{1/n}\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega}\times[-C_0,0])}$.

Preuve. Puisque $\underline{u} \leq u \leq w$, on a

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u| \leq C_0, \tag{2.2.19}$$

et

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq C_1, \tag{2.2.20}$$

où C_0, C_1 qui ne dépend que de la norme C^1 de v et de w sur $\partial\Omega$.

Alors, la Proposition 2.2.1 donne une estiamtion uniforme de classe C^1 de u dans $\bar{\Omega}$:

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq C_1', \tag{2.2.21}$$

où $C_1' > 0$ est une constante uniforme qui dépend de $\|\underline{u}\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, $\|w\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, $\|\psi^{1/n}\|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M,0])}$ et de $\|v\|_{C^1(\bar{\Omega})}$.

L'estimée C^2 sur le bord se fait en trois étapes.

Les estimées des dérivées du second ordre tangentielle-tangentielle et tangentielle-normale découlent de [Guan98] (voir aussi [CKNS85]). En effet ces estimées ne dépendent pas de la borne inférieure de ψ, mais elles dépendent de la plurisousharmonicité stricte de $\underline{u}$ et d'une borne uniforme sur $|\nabla \underline{u}|$ et $|\nabla u|$ près de $\partial\Omega$.

Cependant, l'estimée des dérivées du second ordre normale-normale obtenues dans [Guan98] dépend fortement de la borne inférieure strictement positive de ψ sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, tandis que celle obtenue dans [CKNS85] ne dépend pas de la borne inférieure de ψ mais utilise le fait que ψ est croissante par rapport à la seconde variable.

Pour contourner cette difficulté, nous allons utiliser le fait que $\partial\Omega$ est strictement pseudo-convexe et adapter les arguments de [CKNS85] à notre cas.

Fixons un point $P \in \partial\Omega$ et soit ρ une fonction définissante strictement plurisousharmonique de Ω. Nous pouvons supposer que $P = 0$ est l'origine et choisir un système de coordonnées locales $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $z_j = x_j + iy_j$, $(1 \leq j \leq n)$ autour de l'origine tel que $\rho_{z_\alpha}(0) = 0$ pour $\alpha < n$, $\rho_{y_n}(0) = 0$, $\rho_{x_n}(0) = -1$ de sorte que l'axe x_n soit la direction normale intérieure à $\partial\Omega$ en 0. Par commodité, posons

$$t_{2k-1} = x_k, \quad t_{2k} = y_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad t_{2n-1} = y_n, \quad t_{2n} = x_n.$$

Puisque $d\rho$ ne s'annule pas près du bord, et $u = 0$ dans $\partial\Omega$, on peut écrire u comme suit

$$u = h\rho, \tag{2.2.22}$$

où h est une fonction lisse près du bord.

Nous allons utiliser les notations classiques

$$u_{t_\alpha} := \frac{\partial u}{\partial t_\alpha}, \quad u_{t_\alpha t_\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_\alpha \partial t_\beta}, \quad u_{j\bar{k}} := \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}.$$

Puisque $\rho = 0$ dans $\partial\Omega$, d'après (2.2.22), on voit que $u_{x_n}(0) = -h(0)$, et alors

$$u_{t_\alpha t_\beta}(0) = -u_{x_n}(0)\rho_{t_\alpha t_\beta}(0), \quad \alpha, \beta < 2n. \tag{2.2.23}$$

Donc il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$|u_{t_\alpha t_\beta}(0)| \leq C_2, \quad \alpha, \beta \leq 2n-1, \tag{2.2.24}$$

où $C_2 > 0$ dépend seulement de la borne C^1 de $\underline{u}$ sur le bord, de la constante C_1' dans (2.2.21) et de la borne supérieure de la forme de Levi de ρ sur $\partial\Omega$.

Pour établir les estimées

$$u_{t_\alpha x_n} \leq C_2, \ \alpha \leq 2n-1,$$

on procède comme dans la preuve de [CKNS85, Lemme 3.1] (voir aussi [Guan98], p. 692-693). Remarquons qu'ici la constante C_2 dépend de la borne inférieure de $dd^c\underline{u}$ ($\underline{u}$ est strictement plurisousharmonique sur $\bar{\Omega}$) et de la norme C^1 de $\psi(\cdot, v)$ mais elle ne dépend pas de la borne inférieure de ψ.

Il reste à établir l'estimée

$$|u_{x_n x_n}(0)| \leq C_3, \tag{2.2.25}$$

pour une constante uniforme $C_3 > 0$ qui ne dépend pas de la borne inférieure de ψ.

Nous allons utiliser une idée de [CKNS85] (voir p. 221) basée sur le lemme de Hopf avec les modifications appropriées. D'après (2.2.24) nous avons déjà les estimées

$$|u_{p\bar{q}}(0)| \leq C_2, \quad p \leq n-1, q \leq n, \tag{2.2.26}$$

où $C > 0$ est une constante uniforme qui ne dépend que de la borne C^1 de u sur le bord et de la géométrie de $\partial\Omega$. Donc il suffit de montrer que

$$0 \leq u_{n\bar{n}}(0) = \frac{1}{4}(u_{x_n x_n}(0) + u_{y_n y_n}(0)) \leq C. \tag{2.2.27}$$

En effet, en développant $\det(u_{j\bar{k}})_{1\leq j,k\leq n}$, on obtient

$$\det(u_{j\bar{k}}(0)) = a u_{n\bar{n}}(0) + b, \tag{2.2.28}$$

où

$$a := \det(u_{p\bar{q}}(0))|_{\{1\leq p,q\leq n-1\}}$$

et b est borné d'après (2.2.26).

Puisque $\det(u_{j\bar{k}})$ est majoré, il nous suffit de trouver un minorant strictement positif de a, ce qui équivaut à l'inégalité

$$\{u_{\alpha\bar{\beta}}(0)\}_{\alpha,\beta<n} \geq c_0 I_{n-1}, \tag{2.2.29}$$

où une constante uniforme $c_0 > 0$ qui ne dépend pas de la borne inférieure de ψ.

En effet, on déduit de (2.2.23) que

$$u_{\alpha\bar{\beta}}(0) = -u_{x_n}(0)\rho_{\alpha\bar{\beta}}(0), \quad \alpha, \beta \leq n-1. \tag{2.2.30}$$

Puisque $u \leq w < 0$ dans Ω et $w = 0$ dans $\partial\Omega$, d'après le lemme de Hopf (voir [Eva10, Lemme 6.2]), on a

$$u_{x_n}(0) \leq w_{x_n}(0) =: -\delta_0 < 0. \tag{2.2.31}$$

Puisque $\partial\Omega$ est strictement pseudoconvexe, d'après (2.2.31) et (2.2.30), on a (2.2.29). La conclusion s'en suit. $\square$

2.2.4 Les estimées a priori globales

En utilisant les résultats précédents, on déduit ici les estimées a priori globales pour les solutions de l'équation

$$(dd^c u)^n = \psi(\cdot, u)\beta^n. \tag{2.2.32}$$

Proposition 2.2.6. *Soit $\psi : \bar{\Omega}\times]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction positive lisse telle que $\psi^{1/n} \in C^{1,1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$. Soient $\underline{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ une fonction strictement plurisousharmonique et $w \in SH(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ telles que $\underline{u} \leq w < 0$ dans Ω et $\underline{u} = w = 0$ dans $\partial\Omega$.*

Alors, si $u \in PSH(\Omega) \cap C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ est une solution de l'équation (2.2.32) telle que $\underline{u} \leq u \leq w$ dans Ω, on a les estimées a priori suivantes :

$$\|\nabla u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C_1, \tag{2.2.33}$$

où $C_1 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|\underline{u}\|_{C^2(\bar{\Omega})}, \|w\|_{C^1(\bar{\Omega})}$ et de $\|\psi^{1/n}\|_{C^1(\bar{\Omega}\times[-M_0,0])}$ ($M_0 := \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})}$),

et

$$\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2, \tag{2.2.34}$$

où $C_2 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|\underline{u}\|_{C^2(\bar{\Omega})}, \|w\|_{C^1(\bar{\Omega})}$ et de $\|\psi^{1/n}\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega}\times[-M_0,0])}$.

Preuve. Puisque $\underline{u} \leq u \leq w \leq 0$ dans $\bar{\Omega}$, on a

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u| \leq C_0 := \sup_{\bar{\Omega}} |\underline{u}|, \tag{2.2.35}$$

et

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq C_1 := \max\{\sup_{\partial\Omega} |\nabla \underline{u}|, \|\nabla w\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\}. \tag{2.2.36}$$

Alors, le Corollaire 2.2.2 donne une estimée C^1 uniform de u dans $\bar{\Omega}$:

$$\sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq C_1', \tag{2.2.37}$$

où $C_1' > 0$ est une constante uniforme.

Alors, on peut appliquer la Proposition 2.2.5 pour obtenir une estimée uniforme de Δu sur $\partial\Omega$. Ainsi pour conclure il suffit d'appliquer la Proposition 2.2.3. □

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

Rappelons que nous voulons résoudre le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \psi(\cdot, u)\, \beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Comme il s'agit d'un problème de point fixe, nous allons utiliser une méthode itérative pour le résoudre. Puisque ψ peut dégénérer sur le bord $\partial\Omega$, nous allons procéder en deux étapes pour y parvenir.

Étape 1. Supposons que $\psi > 0$ sur $\bar{\Omega}\times]-\infty, 0]$. En appliquant le Théorème 1.4.1, nous allons construire par récurrence une suite (u_j) dans $PSH(\Omega)\cap C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $u_0 := \underline{u}$ et pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $u_{j+1} := T(u_j)$ soit l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} (dd^c u_{j+1})^n = \psi(\cdot, u_j)\, \beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ u_{j+1} = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Alors, l'observation principale est que la suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante et satisfait $\underline{u} \leq u_j \leq u_{j+1} \leq \bar{u}$ dans Ω. Cela découle du principe de comparaison (Proposition 1.2.2) et du fait que ψ est décrroissante.

En effet, pour $j = 0$, posons $u_0 := \underline{u}$. Supposons que pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, nous avons construit des fonctions $(u_k)_{1\leq k\leq j}$ dans $PSH(\Omega)\cap C^\infty(\bar{\Omega})$ telles que pour $1 \leq k \leq j$, on ait

$$(dd^c u_k)^n = \psi(\cdot, u_{k-1})\, \beta^n, \ \text{dans } \Omega \ \text{ et } \ u_k = 0 \text{ dans } \partial\Omega,$$

et $\underline{u} \leq u_{k-1} \leq u_k \leq \bar{u}$ dans Ω.

D'après le Théorème 1.4.1, le problème de Dirichlet (2.3.2) admet une unique solution $u_{j+1} \in PSH(\Omega)\cap C^\infty(\bar{\Omega})$.

Puisque $\underline{u} \leq u_{j-1} \leq u_j \leq \bar{u}$ dans Ω et ψ est décroissante par rapport à la seconde variable, on a

$$\begin{aligned} (dd^c\bar{u})^n \leq \psi(\cdot, \bar{u})\, \beta^n &\leq \psi(\cdot, u_j)\, \beta^n = (dd^c u_{j+1})^n \\ &\leq \psi(\cdot, u_{j-1})\, \beta^n = (dd^c u_j)^n \\ &\leq \psi(\cdot, \underline{u})\, \beta^n \leq (dd^c \underline{u})^n, \ \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

D'après le principe de comparaison, $\bar{u} \geq u_{j+1} \geq u_j \geq \underline{u}$ dans Ω. Ce qui réalise la construction de la suite par récurrence.

Puisque la suite (u_j) est croissante, elle converge presque partout vers une fonction $u \in PSH(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ dans Ω.

Posons $K_j := \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u_j|^2$ pour $j \in \mathbb{N}$; d'après la Proposition 2.2.1, on voit que

$$K_{j+1} \leq C_1 + 2^{-1}K_j,$$

pour tout j, où C_1 une constante uniforme indépendante de j. Ainsi $K_j \leq 2C_1 + K_0$, pour tout j, donc la suite $(\|\nabla u_j\|_{C^0(\bar{\Omega})})$ est bornée par une constante qui ne dépend pas de j. D'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà $u_j \to u$ uniformément dans $\bar{\Omega}$ et $u \in PSH(\Omega)\cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

De plus, en passant à la limite au sens faible dans (2.3.2), on voit que u est une solution faible du problème de Dirichlet (2.3.1).

Par ailleurs, les inégalités $\underline{u} \leq u_j \leq \bar{u}$ sur $\bar{\Omega}$, donnent

$$\sup_j \left(\|u_j\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\nabla u_j\|_{C^0(\partial\Omega)}\right) < +\infty.$$

D'après la Proposition 2.2.1, il s'ensuit que $\sup_j \|\nabla u_j\|_{C^0(\bar{\Omega})} < +\infty$. Alors, d'après l'estimée du laplacien sur le bord (ici nous avons besoin de la borne du gradient) que la suite

$(\|\Delta u_{j+1}\|_{C^0(\partial\Omega)})$ est bornée. Donc il existe une constante uniforme $C' > 0$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\|\nabla u_j\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\Delta u_j\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq C'.$$

En appliquant la Proposition 2.2.3 avec $u = u_{j+1}$ et $v = u_j$, on voit que les constantes $L_j := \|\Delta u_j\|_{L^\infty(\Omega)}$ satisfont aux inégalités $L_{j+1} \leq C_2 + 2^{-1}L_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Donc $L_j \leq 2C_2 + L_0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une constante uniforme $C'' > 0$ telle que

$$\|u_j\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C'', \tag{2.3.3}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, où C'' ne dépend que de C', des barrières uniformes $\underline{u}$ et $\bar{u}$ des u_j et de la borne supérieure de ψ sur $\bar{\Omega} \times [-M_0, 0]$ ainsi que de la borne inférieure de ψ sur $\Omega_0 \times [-M_0, -A_0]$, cette dernière ne dépendant que de Ω et $\bar{u}$ et de la borne supérieure de ψ sur $\bar{\Omega} \times [-M_0, 0]$ où M_0 est une borne uniforme des u_j (voir Proposition 2.2.1).

En passant à la limite dans (2.3.3), on obtient $\|u\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C$. D'où $u \in C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$.

Étape 2 : Maintenant, supposons que $\psi \geq 0$, $\psi > 0$ dans $\Omega\times]-\infty, 0[$ et $\underline{u}$ une sous-solution stricte du problème de Dirichlet (2.1.5) c'est-à-dire qu'elle satisfait l'inégalité (2.1.3) pour $\epsilon_0 > 0$. Pour $0 < \varepsilon \leq 1$ fixé, posons $\psi_\varepsilon := \psi + \varepsilon^n$. Considérons alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \psi_\varepsilon(\cdot, u)\, \beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Puisque $\psi_\varepsilon \geq \varepsilon^n > 0$, nous pouvons appliquer la première étape pour résoudre le problème (2.3.4). Pour cela, nous devons construire une sous-solution $\underline{u}_\varepsilon$ et une sursolution $\bar{u}_\varepsilon$ du problème (2.3.4) avec $\underline{u}_\varepsilon \leq \bar{u}_\varepsilon$ dans Ω.

En effet, il est facile de voir que $\bar{u}_\varepsilon := \bar{u}$ une sursolution du problème (2.3.4) puisque $\psi \leq \psi_\varepsilon$. Par stricte pseudoconvexité, le domaine Ω admet une fonction définissante lisse ρ strictement plurisousharmonique telle que $dd^c\rho \geq \beta$ dans Ω. Pour $0 < \varepsilon < 1$, $\underline{u}_\varepsilon := \underline{u} + \varepsilon\rho$ est plurisousharmonique sur Ω et $\underline{u} + \rho \leq \underline{u}_\varepsilon \leq \underline{u}$ dans Ω. Si de plus on pose

$$M := \|\rho\|_{C^0(\bar{\Omega})} \cdot \|\partial_t\psi\|_{C^0(\bar{\Omega}\times I)},$$

où $I := [-C_0, 0]$ et $C_0 := \|\underline{u} + \rho\|_{C^0(\bar{\Omega})}$, on a

$$\begin{aligned} (dd^c\underline{u}_\varepsilon)^n &\geq (dd^c\underline{u})^n + \varepsilon^n(dd^c\rho)^n \geq (\psi(\cdot, \underline{u}) + \epsilon_0 + \varepsilon^n)\beta^n \\ &\geq (\psi(\cdot, \underline{u}_\varepsilon) - M\varepsilon + \epsilon_0 + \varepsilon^n)\beta^n \geq (\psi(\cdot, \underline{u}_\varepsilon) + \varepsilon^n)\beta^n, \end{aligned}$$

si on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $M\varepsilon \leq \epsilon_0$.

Donc pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := \min\{1, \epsilon_0/M\}$, la fonction $\underline{u}_\varepsilon$ est une sous-solution du problème de Dirichlet (2.3.4) telle que $\underline{u}_\varepsilon \leq \underline{u} \leq \bar{u}$ dans $\bar{\Omega}$.

Alors d'après la première étape, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $u_\varepsilon \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$, solution du problème de Dirichlet (2.3.4) telle que $\underline{u} + \rho \leq \underline{u} + \varepsilon\rho \leq u_\varepsilon \leq \bar{u}$ dans Ω.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut extraire une sous-suite (u_{ε_j}) qui converge uniformément sur $\bar{\Omega}$ vers une fonction $u \in PSH(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Donc $(dd^c u)^n = \psi(\cdot, u)\beta^n$ faiblement sur Ω et $u = 0$ dans $\partial\Omega$ c'est-à-dire que u est une solution faible du problème de Dirichlet (2.3.1).

Notons que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, nous avons $\underline{u}_1 := \underline{u} + \rho \leq u_\varepsilon \leq \bar{u} < 0$ sur Ω.

On affirme qu'il existe une constante uniforme $C > 0$ indépendante de $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C. \tag{2.3.5}$$

En effet, soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ fixé. D'après la première étape, nous savons que par construction u_ε est la limite d'une suite $(u_\varepsilon^j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ satisfaisant l'équation

$$(dd^c u_\varepsilon^{j+1})^n = (\psi(\cdot, u_\varepsilon^j) + \varepsilon^n)\beta^n,$$

dans Ω et $\underline{u}_\varepsilon \leq u_\varepsilon^j \leq \bar{u}$ dans Ω pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Puisque $\underline{u}_1 := \underline{u} + \rho \leq u_\varepsilon^j \leq \bar{u}$ sur Ω, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on déduit des estimées (2.3.3) de la première étape que

$$\|u_\varepsilon^j\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C, \tag{2.3.6}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε, j. En passant à la limite dans (2.3.6), quand $j \to +\infty$ pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ fixé, on obtient l'estimée recherchée (2.3.5), qui prouve notre affirmation.

D'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous-suite $\varepsilon_j \to 0$ telle que $u_j := u_{\varepsilon_j} \to u$ uniformément sur $\bar{\Omega}$, avec $u \in PSH(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ et $\underline{u} \leq u \leq \bar{u} < 0$ dans Ω.

De plus en passant à la limite dans (2.3.5) quand $\varepsilon = \varepsilon_j \to 0$, on obtient l'estimée recherchée

$$\|u\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C,$$

ce qui prouve que $u \in C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$.

Pour prouver que $u \in C^\infty(\Omega)$, nous allons utiliser l'analogue complexe de l'argument de type Evans-Krylov.

Rappelons que pour chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $u_\varepsilon \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ est une solution de l'équation de Monge-Ampère suivante

$$(dd^c u_\varepsilon)^n = g_\varepsilon\, \beta^n \text{ dans } \Omega, \;\text{ où }\; g_\varepsilon(z) := \psi(z, u_\varepsilon(z)) + \varepsilon^n.$$

Observons que le second membre g_ε de cette équation est localement uniformément minoré dans Ω par une constante positive indépendante de ε.

En effet, on a $g_\varepsilon(z) \geq \psi(z, u_\varepsilon(z)) \geq \psi(z, \bar{u}(z)) > 0$ dans Ω puisque ψ est croissante et $u_\varepsilon \leq \bar{u} < 0$ dans Ω. De plus $g_\varepsilon^{1/n} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ et $\|g_\varepsilon^{1/n}\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}$ est uniformément borné par une constante indépendante de $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

On peut alors appliquer l'argument complexe de la théorie d'Evans-Krylov locale développé dans [Wang12] (voir aussi [DZZ11] et [GZ17, Théorème 14.9]). Alors pour tout sous-domaine $\Omega' \Subset \Omega$ et tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C',$$

où C' est une constante indépendante de $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. On en déduit que $u \in C^{2,\alpha}(\Omega')$.

Pour montrer que $u \in C^\infty(\Omega)$, nous allons utiliser la théorie de Schauder expliqué dans [GZ17, Section 14.3.2]. Plus précisément l'opérateur

$$F(u) := \det(u_{j\bar{k}})$$

est localement uniformément elliptique sur la classe des fonctions lisses u strictement plurisousharmoniques sur Ω.

Fixons un ensemble ouvert $\Omega'' \Subset \Omega$ et prenons un sous-domaine Ω' tel que $\Omega'' \Subset \Omega' \Subset \Omega$. Rappelons que $u \in C^{2,\alpha}(\Omega')$ est une solution de l'équation suivante

$$F(u) = g := \psi(\cdot, u),$$

sur Ω'.

Puisque $g \in C^{\alpha}(\Omega')$, pour $\zeta \in \mathbb{C}^n$ fixé avec $|\zeta| = 1$, les fonctions

$$u^h(z) := \frac{u(z + h\zeta) - u(z)}{h},$$

sont définies dans un voisinage V de $\bar{\Omega}''$ pour $|h| > 0$ suffisamment petit et vérifient une équation linéaire du second ordre uniformément elliptique $L^h u^h = g^h$ dans V à coefficients Höldériens et à second membre Höldérien (voir [GZ17, Section 14.3.2], [GT98, Corollaire 6.3]). D'après les estimées a priori intérieures de Schauder dans [GT98, Corollaire 6.3], on a $u^h \in C^{2,\alpha}(V)$ avec un contrôle uniforme sur sa norme $C^{2,\alpha}(\Omega'')$ (indépendamment de h et ζ). Donc $u \in C^{3,\alpha}(\Omega'')$ pour tout $\Omega'' \Subset \Omega$. En itérant cet argument, nous montrons que $u \in C^k(\Omega'')$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\Omega'' \Subset \Omega$. On en déduit que $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

Chapitre 3

Problème des valeurs propres pour les opérateurs de type Monge-Ampère complexe

Dans ce troisième chapitre qui est le contenu des sections 4 et 5 de l'artilcle [BaZe23a], on va d'une part prouver en suivant la stratégie de P. L. Lions [Lions86], l'existence de la première valeur propre et d'une fonction propre associée qui est plurisousharmonique avec condition au bord de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe sur un domaine bornée strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. On montre que la fonction propre est plurisousharmonique, lisse de Laplacien borné dans Ω et de valeurs au bord nulle. De plus, il est unique à une constante multiplicative positive près.

D'autre part, on propose une approche variationnelle pluripotentielle du problème et en utilisant le nouveau théorème d'existence du chapitre 2, on démontre une formule de type quotient de Rayleigh pour la première valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

3.1 Introduction

Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord lisse $\partial\Omega$ et $0 < f \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Notre objectif dans ce chapitre est de résoudre le problème des valeurs propres avec condition au bord de Dirichlet pour un opérateur de Monge-Ampère complexe .

Le problème consiste à trouver un couple (λ, u), avec $\lambda > 0$ et $u \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ remplissant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (dd^c u)^n = (-\lambda u)^n f^n \beta^n & \text{dans} & \Omega \\ u = 0 & \text{dans} & \partial\Omega \\ \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 1, & & \end{array} \right. \tag{3.1.1}$$

où $\beta := dd^c|z|^2$ est la forme de Kähler standard sur $\mathbb{C}^n$. Ici, nous utilisons les opérateurs différentiels standards $d = \partial + \bar{\partial}$ et $d^c := (i/2)(\bar{\partial} - \partial)$ de sorte que $dd^c = i\partial\bar{\partial}$.

P. L. Lions a résolu le problème d'existence de la première valeur propre avec condition au bord de type Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère réel sur un domaine borné lisse strictement convexe dans $\mathbb{R}^N$ (voir [Lions86]). Il affirma qu'en utilisant les résultats de L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85], tous ses résultats s'étendent sans changement dans le cas de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Nous n'avons pas été en mesure d'appliquer directement les résultats de [CKNS85] comme l'affirmait Lions pour résoudre le problème dans le cas complexe. En effet, on a affaire à des équations de Monge-Ampère complexes avec un second membre du type $\psi_\varepsilon(z,u) := (\varepsilon - \lambda u)^n f(z)^n$ où $\varepsilon > 0$. Puisque ces fonctions sont décroissantes en u et $\psi_\varepsilon(z,0) \equiv \varepsilon f(z)^n$ est complètement dégénérée au bord lorsque $\varepsilon \to 0^+$, les résultats d'existence de [CKNS85] et [Guan98] ne s'appliquent pas directement dans ce cas.

Pour contourner cette difficulté, nous allons utiliser notre nouveau théorème d'existence pour les équations de Monge-Ampère complexes dégénérées de ce type (voir Théorème 2.1.1) établi au niveau du chapitre 2. Le premier résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3.1.1. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse et $0 < f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ une fonction positive lisse dans $\bar{\Omega}$.*

Alors il existe un nombre réel $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, f) > 0$ et une fonction $u_1 \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ avec $\|u_1\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 1$ tels que le couple (λ_1, u_1) est l'unique solution du problème des valeurs propres (3.1.1).

Le nombre λ_1 sera appelé la première valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère complexe par rapport à la forme volume $d\nu_f := f^n \beta^n$ et u_1 est la fonction propre normalisée qui lui est associée.

On note $C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ l'espace de toutes les fonctions $u \in C^1(\bar{\Omega})$ dont le laplacien Δu au sens des distributions est une fonction bornée $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$ c'est-à-dire

$$\|u\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\nabla u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty.$$

D'après la théorie de Calderon-Zygmund, une fonction $u \in C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ satisfait $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ et d'après la théorie des espaces de Sobolev (lemme de Morrey), il s'ensuit que $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour tout $\alpha \in]0,1[$ (voir [GT98]). Notons que cette condition signifie que la Hessienne complexe de u_1 est bornée dans Ω.

On ne sait pas si la fonction propre u_1 de notre théorème satisfait $u_1 \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$.

D'autre part on développe une approche variationnelle générale pour le problème de l'existence de la première valeur propre pour des opérateurs de Monge-Ampère plus généraux. En utilisant cette approche et notre nouveau théorème d'existence, nous allons prouver une formule de type quotient de Rayleigh pour la première valeur propre. C'est le deuxième résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.1.2. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe à bord lisse et $0 < f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ une fonction positive lisse dans $\bar{\Omega}$. Soit (λ_1, u_1) la solution normalisée du problème des valeurs propres* (3.1.1). *Alors*

$$\lambda_1^n = \frac{\int_\Omega (-u_1)(dd^c u_1)^n}{\int_\Omega (-u_1)^{n+1} d\nu_f} = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega (-\phi)(dd^c \phi)^n}{\int_\Omega (-\phi)^{n+1} d\nu_f} ; \phi \in \mathcal{E}^1(\Omega), \phi \neq 0 \right\},$$

où $d\nu_f = f^n \beta^n$.

$\mathcal{E}^1(\Omega) \subset PSH(\Omega)$ est le cône positif convexe des fonctions plurisousharmoniques négatives et d'énergie de Monge-Ampère finie dans Ω (voir Section 1.3 du chapitre 1 pour la définition précise).

3.2 L'existence de la première valeur propre

Dans cette section, nous allons donner la preuve du Théorème 3.1.1, déduire quelques propriétés de la première valeur propre et donner une application.

3.2.1 Preuve du Théorème 3.1.1

Nous allons suivre la stratégie de P. L. Lions [Lions86].

Rappelons que pour $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, la première valeur propre de l'opérateur $-L_a$ est donnée par la formule

$$\gamma_1(a) := \sup\{\gamma \geq 0 : \ \exists u \in C^2(\Omega), \quad u < 0 \ \text{ et } \ L_a u \geq -\gamma u f\}. \tag{3.2.1}$$

Preuve. On définit le nombre suivant :

$$\lambda_1 := \inf\{\gamma_1(a) : \quad a \in \mathcal{A}(\Omega)\}. \tag{3.2.2}$$

Suivant Lions, on considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = (1 - \lambda u)^n f^n \beta^n & \text{dans} \quad \Omega, \\ u \equiv 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre.

Puis on introduit le nombre réel suivant :

$$\mu_1 := \sup\{\lambda \geq 0 : \ \exists u \in \mathcal{P}_0(\Omega), \text{ solution de } (3.2.3)\}, \tag{3.2.4}$$

où

$$\mathcal{P}_0(\Omega) := \{u \in PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})\,;\, u_{|\partial\Omega} = 0\}. \tag{3.2.5}$$

D'après Théorème 1.4.1, il existe $u_0 \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ solution du problème (3.2.3) pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire $(dd^c u_0)^n = f^n \beta^n$. Donc μ_1 est bien défini et $0 \leq \mu_1 \leq +\infty$.

Puisque le second membre $\psi(z, u) := (1 - \lambda u)^n f(z)^n \geq f^n(z)$ dans $\bar{\Omega}\times] - \infty, 0]$, on observe que la fonction u_0 est sursolution du problème de Dirichlet (3.2.3) pour tout $\lambda > 0$.

La preuve se fera en plusieurs étapes.

Étape 1 : On montre que $\mu_1 \leq \lambda_1$.

En effet, si $\lambda \geq 0$ est tel que u_λ est une solution du problème (3.2.3), d'après la formule (1.5.1), on a pour tout $a \in \mathcal{A}(\Omega)$

$$L_a u \geq (1 - \lambda u_\lambda) f \text{ in } \Omega,\ u_\lambda < 0 \text{ in } \Omega,\ u_\lambda = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

Alors $\lambda \leq \gamma_1(a)$. Par suite, on a $0 \leq \mu_1 \leq \lambda_1 < +\infty$.

Étape 2 : Nous allons montrer que $\mu_1 \geq \|u_0\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})}$.

En effet, si $\lambda < \|u_0\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})}$, on pose $C = (1 - \lambda \|u_0\|_{C^0(\bar{\Omega})})^{-1}$. Alors $\underline{u} = Cu_0 \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ et

$$(dd^c \underline{u})^n = (dd^c C u_0)^n = C^n (dd^c u_0)^n = C^n f^n \beta^n.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} Cf - (1 - \lambda \underline{u}) f &= \lambda C f (\|u_0\|_{C^0(\bar{\Omega})} + u_0) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{lll} (dd^c \underline{u})^n \geq (1 - \lambda \underline{u})^n f^n \beta^n & \text{dans} & \Omega, \\ \underline{u} \equiv 0 & \text{dans} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.2.6}$$

En d'autres termes, $\underline{u}$ est une sous-solution du problème (3.2.3). Puisque $(1 - \lambda \underline{u})^n f^n \beta^n \geq f^n \beta^n = (dd^c u_0)^n$ dans Ω, il s'ensuit que u_0 est une sursolution du problème (3.2.3) telle que $\underline{u} \leq u_0$ dans Ω. Puisque le second membre de l'équation (3.2.3) est strictement positif, on peut appliquer le Théorème 2.1.1 pour conclure, c'est-à-dire que pour $0 < \lambda < \|u_0\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})}$, il existe $u_\lambda \in \mathcal{P}_0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ solution de (3.2.3) telle que $\underline{u} \leq u_\lambda \leq u_0$ dans Ω. Cela prouve que tout $\lambda < \|u_0\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})}$, satisfait l'inégalité $\lambda \leq \mu_1$. Donc nous avons montré que

$$\|u_0\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \mu_1 \leq \lambda_1. \tag{3.2.7}$$

Étpe 3 : Nous allons montrer que pour tout $0 < \lambda < \mu_1$, le problème (3.2.3) admet une solution u_λ.

En effet, si $0 < \lambda < \mu_1$, il existe $\lambda < \lambda' < \mu_1$ et $u_{\lambda'} \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ tels que

$$(dd^c u_{\lambda'})^n = (1 - \lambda' u_{\lambda'})^n f^n \beta^n \geq (1 - \lambda u_{\lambda'})^n f^n \beta^n.$$

Donc $u_{\lambda'}$ est une sous-solution du problème (3.2.3). Puisque nous savons déjà que u_0 est une sursolution, l'application à nouveau du Théorème 2.1.1 donne l'existence d'une solution $u_\lambda \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ du problème (3.2.3).

Étape 4 : Nous allons montrer que $\|u_\lambda\|_{C^0(\bar{\Omega})} \to +\infty$ lorsque $\lambda \to \mu_1$.

Supposons que le contraire est vrai, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour une sous-suite (λ_j) dans $]0, \mu_1[$, convergeant vers μ_1 nous avons, $\|u_{\lambda_j}\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq M < +\infty$. Alors

$$-M \leq u_{\lambda_j} \leq 0 \ \text{ in } \bar{\Omega}.$$

et pour tout $\lambda = \lambda_j$, on a

$$(dd^c u_\lambda)^n = (1 - \lambda u_\lambda)^n f^n \beta^n \leq (1 + \mu_1 M)^n f^n \beta^n.$$

Observons que $\underline{u} := (1+\mu_1 M)\, u_0$ résout le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{lll}(dd^c\underline{u})^n = (1+\mu_1 M)^n f^n\beta^n & \text{dans} & \Omega,\\ \underline{u} = 0 & \text{dans} & \partial\Omega,\end{array}\right. \tag{3.2.8}$$

et d'après le principe de comparaison $\underline{u} \leq u_\lambda$ sur $\bar{\Omega}$.

D'autre part, puisque

$$(dd^c u_\lambda) = (1-\lambda u_\lambda)^n f^n\beta^n \geq f^n\beta^n,$$

et $w := u_0$ résout le problème

$$\left\{\begin{array}{lll}(dd^c w)^n = f^n\beta^n & \text{dans} & \Omega,\\ w = 0 & \text{dans} & \partial\Omega,\end{array}\right. \tag{3.2.9}$$

alors, on a $u_\lambda \leq w$ sur $\bar{\Omega}$.

Ainsi $\underline{u} \leq u_\lambda \leq w < 0$ sur Ω. Puisque $\underline{u}$ est strictement plurisousharmonique sur Ω, d'après la Proposition 2.2.6, il existe une constante uniforme $C > 0$ telle que pour tout $\lambda = \lambda_j$,

$$\|u_\lambda\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C.$$

Par le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 2.1.1 (Étape 2) basée sur l'analogue complexe de la théorie d'Evans-Krylov, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout $\Omega' \Subset \Omega$, la suite $\{u_{\lambda_j}\}$ converge pour la norme $C^2(\bar{\Omega}')$ vers une fonction $u_{\mu_1} \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ solution de (3.2.3) lorsque $\lambda_j \to \mu_1$.

Comme dans la deuxième étape, on voit que pour $\delta < \|u_{\mu_1}\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})}$, $C := (1-\delta\|u_{\mu_1}\|_{C^0(\bar{\Omega})})^{-1}$ et $\underline{u} := Cu_{\mu_1} \in \mathcal{P}_0(\Omega)$, et on a

$$(dd^c\underline{u})^n = C^n(dd^c u_{\mu_1})^n = C^n(1-\mu_1 u_{\mu_1})^n f^n\beta^n,$$

et

$$C(1-\mu_1 u_{\mu_1}) - (1-(\delta+\mu_1)Cu_{\mu_1}) = C\delta(\|u_{\mu_1}\|_{C^0(\bar{\Omega})} + u_{\mu_1}) \geq 0.$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{lll}(dd^c\underline{u})^n \geq (1-(\delta+\mu_1)\underline{u})^n f^n\beta^n & \text{dans} & \Omega,\\ \underline{u} = 0 & \text{dans} & \partial\Omega.\end{array}\right. \tag{3.2.10}$$

En d'autres termes, $\underline{u}$ est une sous-solution du problème (3.2.3). Encore une fois puisque u_0 est une sursolution, il découle du Théorème 2.1.1 qu'il existe une solution u_λ de (3.2.3) pour $\mu_1 \leq \lambda < \mu_1 + \delta$ et cela contredit la définition de μ_1. Donc , $\|u_\lambda\|_{C^0(\bar{\Omega})} \to +\infty$ lorsque $\lambda \to \mu_1$.

Étape 5 : Dans cette partie nous montrons que la famille normalisée définie pour $\lambda < \mu_1$ par la formule suivante :

$$v_\lambda := \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_{C^0(\bar{\Omega})}},$$

converge vers une fonction $\varphi_1 \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que le couple (μ_1, φ_1) est une solution du problème des valeurs propres (3.1.1).

En effet, pour $\lambda < \mu_1$, on a

$$(dd^c v_\lambda)^n = \|u_\lambda\|^{-n}_{C^0(\bar{\Omega})}(1-\lambda u_\lambda)^n f^n\beta^n = (\|u_\lambda\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})} - \lambda v_\lambda)^n f^n\beta^n \text{ in } \Omega.$$

Donc v_λ résout le problème suivant :

$$(3.2.11) \qquad \begin{cases} (dd^c v_\lambda)^n = (\|u_\lambda\|^{-1}_{C^0(\bar\Omega)} - \lambda v_\lambda)^n f^n \beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ v_\lambda = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ \|v_\lambda\|_{C^0(\bar\Omega)} = 1. & \end{cases}$$

En utilisant la fonction u_0 définie précédemment, on affirme qu'il existe $C > 0$ et $0 < \mu_2 < \mu_1$ tels que pour $\mu_2 < \lambda < \mu_1$, on a

$$Cu_0 \leq v_\lambda \leq 0 \text{ dans } \bar\Omega.$$

En effet, d'après l'étape 4, il existe $0 < \mu_2 < \mu_1$ tel que pour $\mu_2 < \lambda < \mu_1$ on a $\|u_\lambda\|_{C^0(\bar\Omega)} > 1$. Puisque $v_\lambda < 0$ dans Ω et $\|v_\lambda\|_{C^0(\bar\Omega)} = 1$, il s'en suit que pour $\mu_2 < \lambda < \mu_1$,

$$(\|u_\lambda\|^{-1}_{C^0(\bar\Omega)} - \lambda v_\lambda) \leq 1 + \mu_1.$$

En posant, $C = 1 + \mu_1$, on a pour $\mu_2 < \lambda < \mu_1$,

$$(3.2.12) \qquad \begin{cases} (dd^c v_\lambda)^n \leq C^n f^n \beta^n \leq (dd^c(Cu_0))^n & \text{dans} \quad \Omega \\ v_\lambda = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après le principe de comparaison, on a pour $\mu_2 < \lambda < \mu_1$, $Cu_0 \leq v_\lambda < 0$ dans Ω . Cela juistifie notre affirmation.

Donc on a, une borne uniforme de $\|\nabla v_\lambda\|_{C^0(\partial\Omega)}$ qui est indépendante de $\lambda \in]\mu_2, \mu_1[$. Puisque $\|v_\lambda\|_{C^0(\bar\Omega)} = 1$, il résulte du Corollaire 2.2.2 qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in]\mu_2, \mu_1[$,

$$\|v_\lambda\|_{C^1(\bar\Omega)} \leq C_1$$

D'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli, il existe une sous-suite (λ_j) dans $]\mu_2, \mu_1[$ telle que $\lambda_j \to \mu_1$ et la sous-suite (v_{λ_j}) converge uniformément sur $\bar\Omega$ vers une certaine fonction $\varphi_1 \in PSH(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar\Omega)$ qui est une solution faible du problème suivant :

$$(3.2.13) \qquad \begin{cases} (dd^c \varphi_1)^n = (-\mu_1 \varphi_1)^n f^n \beta^n & \text{in} \quad \Omega \\ \varphi_1 = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \\ \|\varphi_1\|_{C^0(\bar\Omega)} = 1. & \end{cases}$$

Pour prouver que $\varphi_1 \in C^{1,\bar 1}(\bar\Omega)$, nous allons appliquer la Proposition 2.2.6. Cela nécessite l'existence d'une surbarrière uniforme pour tous les v_λ. Pour construire cette surbarrière nous allons utiliser la fonction φ_1.

En effet, puisque $v_{\lambda_j} \to \varphi_1$ uniformément dans $\bar\Omega$ quand $j \to +\infty$, il s'ensuit qu'en chaque point de $\bar\Omega$,

$$-v_{\lambda_j} \geq -\varphi_1 - \frac{1}{3}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Puisque $\|\varphi_1\|_{C^0(\bar\Omega)} = 1$, il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $-\varphi_1(z_0) = 1$. Alors, il existe une boule $B = B(z_0, r) \Subset \Omega$ telle que $-\varphi_1 \geq \frac{2}{3}$ dans $\bar B$. Donc

$$-v_{\lambda_j} \geq \frac{1}{3}$$

dans $\bar{B}$ pour tout j assez grand. Il s'ensuit que

$$(dd^c v_{\lambda_j})^n \geq 3^{-n}\lambda_j^n f^n \beta^n \geq 3^{-n}\mu_2^n f^n \beta^n$$

dans $\bar{B}$ et donc

$$\Delta v_{\lambda_j} \geq \frac{\mu_2}{3} f$$

dans $\bar{B}$.

En résolvant le problème de Dirichlet classique pour l'opérateur de Laplace suivant

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta w = \frac{\mu_2}{3} f \theta_B & \text{dans} & \Omega \\ w = 0 & \text{dans} & \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.2.14}$$

où $0 \leq \theta_B \leq 1$ est une fonction lisse dans $\bar{\Omega}$ avec $\mathrm{Supp}(\theta_B) \subset B$ et $\theta_B \equiv 1$ dans un voisinage de z_0, on obtient alors une fonction sousharmonique lisse w telle que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta w \leq \Delta v_{\lambda_j} & \text{dans} & \Omega \\ w = v_{\lambda_j} = 0 & \text{dans} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.2.15}$$

Donc $Cu_0 \leq v_{\lambda_j} \leq w < 0$ dans Ω pour j assez grand.

D'après la Proposition 2.2.6, il existe une constante positive $C > 0$ telle que pour j assez grand, on a

$$\|v_{\lambda_j}\|_{C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})} \leq C. \tag{3.2.16}$$

Rappelons que v_{λ_j} est une solution de l'équation de Monge-Ampère suivante :

$$(dd^c v_{\lambda_j})^n = g_j \beta^n \text{ dans } \Omega, \text{ où } g_j := (\|u_{\lambda_j}\|^{-1} - \lambda_j v_{\lambda_j})^n f^n.$$

Remarquons que le second membre g_j de cette équation est localement uniformément minoré par une constant positive indépendente de j, puisque $g_j \geq (-\mu_1 v_{\lambda_j})^n f^n$ et $v_{\lambda_j} \to \varphi_1$ uniformément dans $\bar{\Omega}$ et $\varphi_1 < 0$ dans Ω.

De plus $g_j^{1/n} = (\|u_{\lambda_j}\|^{-1} - \lambda_j v_{\lambda_j}) f \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ et $\|g_j^{1/n}\|_{C^{0,1}(\Omega)}$ est uniformément borné par une constante indépendante de j.

Nous pouvons à nouveau appliquer l'argument complexe de la théorie d'Evans-Krylov locale et la théorie de Schauder comme dans la preuve du théorème 2.1.1 (étape 2) pour conclure que $\varphi_1 \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{1,\bar{1}}(\bar{\Omega})$ et que le couple (μ_1, φ_1) est une solution de (3.1.1) avec $\mu_1 \leq \lambda_1$.

Étape 6 : Ici on montre que $\mu_1 \geq \lambda_1$.

En effet, d'après Lemme 1.5.3, il existe $\bar{a} \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que

$$L_{\bar{a}}\varphi_1 = \left[\det((\varphi_1)_{j\bar{k}})\right]^{\frac{1}{n}} = -\mu_1 \varphi_1 f.$$

Donc φ_1 est une fonction propre de $-L_{\bar{a}}$ associée à la valeur propre μ_1. Cela implique que $\mu_1 \geq \gamma_1(\bar{a}) \geq \lambda_1$. Puisque nous savons déjà que $\mu_1 \leq \lambda_1$, on en déduit que

$$\mu_1 = \lambda_1.$$

Étape 7 : La dernière étape consiste à prouver que (μ_1, φ_1) est unique. Soit (μ, φ) une autre solution de (3.1.1). Toujours d'après le Lemme 1.5.3, il existe $\tilde{a} \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $L_{\tilde{a}}\varphi = -\mu\,\varphi f$, ce qui implique que $\mu \geq \lambda_1$.

On affirme qu'il existe $t > 0$, tel que $0 \leq t(-\varphi) \leq -\varphi_1$ sur $\bar{\Omega}$. En effet, d'après le Lemme de Hopf ([Eva10, Lemme 6.4.2, p. 347]) on a $D_\nu \varphi_1 < 0$ sur $\partial\Omega$ (ν étant le vecteur normal unité intérieur de $\partial\Omega$). Donc il existe une constante $c_0 > 0$ telle que

$$\varphi_1(x) \leq -c_0 d(x, \partial\Omega) \text{ dans } \Omega.$$

D'autre part, soit ρ une fonction définissante lisse de Ω ; en particulier $|\nabla\rho| > 0$ sur $\partial\Omega$. Puisque $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, il s'ensuit que $\varphi = h\rho$ sur dans un voisinage de $\partial\Omega$, où h est une fonction lisse près de $\partial\Omega$. Alors, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que $0 \leq -\varphi \leq c_1(-\rho)$ sur $\bar{\Omega}$. Maintenant, il suffit d'observer que $d(x, \partial\Omega)$ est équivalent à $-\rho(x)$ sur $\bar{\Omega}$. En particulier, il existe une constante $c_0' > 0$ telle que $-\rho(x) \leq c_0' d(x, \partial\Omega)$ sur $\bar{\Omega}$. En résumé, on a

$$-\varphi \leq c_1(-\rho) \leq c_1 c_0' d(\cdot, \partial\Omega) \leq c_1 c_0' c_0^{-1}(-\varphi_1), \text{ dans } \Omega,$$

ce qui prouve l'affirmation.

Maintenant, posons $t_0 = \max\{t > 0 : \ 0 \leq t(-\varphi) \leq -\varphi_1 \text{ in } \bar{\Omega}\}$. En appliquant encore le Lemme 1.5.3 dans notre cas avec $(\mu, t_0\varphi)$ et (λ_1, φ_1), on trouve $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que

$$L_a(t_0\varphi - \varphi_1) + \mu t_0 \varphi f - \lambda_1 \varphi_1 f = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} L_a(t_0\varphi - \varphi_1) &= \lambda_1 \varphi_1 f - \mu t_0 \varphi f \\ &= -\lambda_1 f(t_0\varphi - \varphi_1) + (\lambda_1 - \mu) f t_0 \varphi. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_1 \leq \mu$ et $\varphi < 0$, on a $L_a(t_0\varphi - \varphi_1) \geq -\lambda_1 f(t_0\varphi - \varphi_1)$. En utilisant le fait que $\lambda_1 \leq \gamma_1(a)$ et $\phi := t_0\varphi - \varphi_1 \geq 0$, on en déduit que $L_a(\phi) \geq -\gamma_1(a)\phi f$. Comme ϕ est borné et $\phi = 0$ dans $\partial\Omega$, d'après la Proposition 1.5.2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi = \theta\phi_1$ où ϕ_1 est la fonction propre positive de l'opérateur $-L_a$.
Ainsi soit $\theta = 0$ et on conclut, soit $\theta > 0$ et en utilisant à nouveau le Lemme de Hopf ([Eva10, Lemme 6.4.2, p. 347]), on voit que il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\theta\phi_1 \geq \varepsilon(-\varphi)$ dans $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire $t_0\varphi - \varphi_1 \geq \varepsilon(-\varphi)$ dans $\bar{\Omega}$. Mais, cela veut dire que

$$-\varphi_1 \geq (t_0 + \varepsilon)(-\varphi) \text{ dans } \bar{\Omega}$$

contredisant la définition de t_0. Cela montre que $\varphi_1 = t_0\varphi$ et donc $\mu = \lambda_1$. Ce qui met fin à preuve du Théorème 3.1.1. □

Faisons quelques remarques qui proviennent de la preuve Théorème 3.1.1.

Remarque 3.2.1.
1. La preuve précédente donne une borne inférieure de $\lambda_1 = \lambda_1(f, \Omega)$. En effet, soit $u_0 \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ la solution de l'équation (3.2.3) pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire $(dd^c u_0)^n = f^n \beta^n$ dans Ω et $u_0 = 0$ dans $\partial\Omega$. Alors, d'après l'équation (3.2.7), on a

$$\lambda_1 \geq \|u_0\|^{-1}_{C^0(\bar{\Omega})}.$$

En particulier, si $\Omega := B(a,R) \subset \mathbb{C}^n$ est une boule euclidienne de rayon $R > 0$ alors, la première valeur propre $\lambda_1(B(a,R)) = \lambda_1(B(a,R),1)$ satisfait l'estimée suivante :

$$\lambda_1(B(a,R)) \geq R^{-2}. \tag{3.2.17}$$

En effet, pour $f = 1$, la fonction $u_0(z) := |z-a|^2 - R^2$ satisfait l'estimée (3.2.17) dans $B(a,R)$ et $\|u_0\|_{C^0(\bar{B}(a,R))} = R^2$.

2. Soit $F : \Omega' \longrightarrow \Omega$ une application biholmorphe entre domaines bornés strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ qui se prolonge de façon lisse jusqu'au bord. Alors, on a

$$\lambda_1(\tilde{f},\Omega') = \lambda_1(f,\Omega),$$

où $\tilde{f} := |J_F|^{2/n} f \circ F$ et J_F est le jacobien de F dans Ω'. En effet, soit (λ_1, φ_1) la solution du problème des valeurs propres (3.1.1) de sorte que $(dd^c\varphi_1)^n = (-\lambda_1\varphi_1)^n f^n \beta^n$ dans Ω. Alors

$$F^*((dd^c\varphi_1)^n) = (-\lambda_1\varphi_1 \circ F)^n (f \circ F)^n F^*(\beta^n).$$

Puisque $F^*(\beta^n) = |J_F|^2\beta^n$, alors en posant $\tilde{\varphi}_1 := \varphi_1 \circ F$ et $\tilde{f} := (f \circ F)|J_F|^{2/n}$, il s'ensuit que

$$(dd^c\tilde{\varphi}_1)^n = (-\lambda_1\tilde{\varphi}_1)^n \tilde{f}^n \beta^n,$$

ce qui prouve notre affirmation.

3.2.2 Une application

Nous allons donner une autre propriété de la première valeur propre $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega,1)$. Nous allons considérer une fonction lisse $H \in C^{1,1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} H(z,t) > 0 \quad \text{pour tout} \quad (z,t) \in \bar{\Omega} \times]-\infty, 0] \\ \frac{\partial H}{\partial t} \geq -\lambda_0 \qquad \text{dans} \qquad \bar{\Omega} \times]-\infty, 0], \end{cases} \tag{3.2.18}$$

où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est une constante uniforme.

Soit λ_1 la première valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère complexe avec $f = 1$. Rappelons que λ_1 est le supremum de tous les $\lambda > 0$ tels qu'il existe $u_\lambda \in PSH(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ satisfaisant l'équation $(dd^c u_\lambda)^n = (1 - \lambda u)^n \beta^n$ avec $u_\lambda = 0$ dans $\partial\Omega$.

On veut résoudre le problème de Dirichlet suivant.

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = H^n(z,u)\,\beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.19}$$

où $u \in PSH(\Omega)$ est la fonction inconnue.

D'après [CKNS85], il est bien connu que le problème (3.2.19) admet une unique solution lisse si $\partial_t H \geq 0$ dans $\Omega \times]-\infty, 0]$.

Suivant Lions [Lions86], nous allons démontrer le résultat plus général suivant.

Proposition 3.2.2. *Supposons que H vérifie les hypothèses (3.2.18) pour une constante $\lambda_0 < \lambda_1$. Alors le problème de Dirichlet (3.2.19) admet une unique solution $u \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Preuve. Pour montrer l'existence d'une solution, il suffit de construire une sous-solution et d'appliquer le Théorème 1.4.2.

Soit $C \geq \|H(\cdot,0)\|_{C^0(\bar{\Omega})} > 0$. Puisque $\lambda_0 < \lambda_1$, on peut choisir $\lambda \in]\lambda_0, \lambda_1[$ et définir $v := Cu_\lambda$, où u_λ est une solution du problème (3.2.3). Alors on a dans Ω,

$$\begin{aligned} [det(v_{j\bar{k}})]^{1/n} &= C(1-\lambda u_\lambda) \\ &\geq \|H(\cdot,0)\|_{C^0(\Omega)} + \lambda_0(-Cu_\lambda). \end{aligned}$$

Par contre pour $s < 0$ et $z \in \Omega$, on a

$$H(z,0) - H(z,s) = \int_s^0 \partial_t H(z,t)dt \geq -\lambda_0(-s) = \lambda_0 s.$$

En appliquant cette inégalité avec $s = Cu_\lambda(z)$, on a pour tout $z \in \Omega$,

$$C + \lambda_0(-Cu_\lambda) \geq H(z,0) + \lambda_0(-Cu_\lambda(z)) \geq H(z, Cu_\lambda(z)),$$

Donc Cu_λ est une sous-solution du problème (3.2.19). D'après le théorème 1.4.2, il s'ensuit que le problème (3.2.19) admet une solution $u \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$.

Maintenant nous allons prouver l'unicité. Si u, v sont deux solutions du problème (3.2.19), d'après le Lemme 1.5.3, on peut trouver $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que

$$\text{(3.2.20)} \qquad \begin{cases} L_a(u-v) = H(\cdot,u) - H(\cdot,v) & \text{dans} \quad \Omega \\ u - v = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ u - v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}). & \end{cases}$$

On a alors pour tout $z \in \Omega$,

$$H(z,u(z)) - H(z,v(z)) := c(z)(u(z) - v(z)),$$

où

$$c(z) := \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(z, v(z) + s(u(z) - v(z)))\, ds.$$

Posons $w := u - v$, alors (3.2.20) devient

$$\text{(3.2.21)} \qquad \begin{cases} (L_a - c)w = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}). & \end{cases}$$

Soit $\phi_1 > 0$ une fonction propre de $-L_a$ associée à la valeur propre $\gamma_1 = \gamma_1(a)$, c'est-à-dire $L_a\phi_1 = -\gamma_1\phi_1$ dans Ω et $\phi_1 = 0$ dans $\partial\Omega$.

Puisque $\partial_t H(z,t) \geq -\lambda_0$, il s'ensuit que $c \geq -\lambda_0 > -\gamma_1$. Donc $\phi_1 > 0$ dans Ω et

$$\begin{aligned} (L_a - c)\phi_1 &= L_a\phi_1 - c\phi_1 \\ &= -(\gamma_1 + c)\phi_1 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur $L_a - c$ vérifie le principe du maximum (voir [BNV94], propriété (ii) page 48). Donc le problème (3.2.21) admet une unique solution, ce qui implique que $w = 0$ dans Ω, c'est-à-dire $u = v$ dans Ω. □

3.3 Une formule variationnelle pour λ_1

Pour donner la preuve du Théorème 3.1.2, nous allons développer une approche variationnelle au problème des valeurs propres en utilisant la théorie du pluripotentiel.

3.3.1 La fonctionnelle d'énergie du Monge-Ampère

On définit la fonctionnelle d'énergie de l'opérateur de Monge-Ampère sur l'espace $\mathcal{E}^1(\Omega)$ comme suit : pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$,

$$E(\phi) := \frac{1}{n+1} \int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^n. \tag{3.3.1}$$

Il a été prouvé dans [BBGZ13] dans le cadre des variétés kähleriennes compactes que E est semi-continue inférieurement et que $-E$ est une primitive de l'opérateur Monge-Ampère complexe (voir aussi [Lu15], [ACC12] pour le cas des domaines). Plus précisément, on a :

Lemme 3.3.1. *1) Pour tout chemin lisse $t \longmapsto \phi_t$ dans $\mathcal{E}^1(\Omega)$ défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{d}{dt} E(\phi_t) = \int_\Omega (-\dot{\phi}_t)(dd^c\phi_t)^n,\ t \in I. \tag{3.3.2}$$

En particulier si $u, v \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ et $u \leq v$, alors $0 \leq E(v) \leq E(u)$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t) &= \int_\Omega (-\ddot{\phi}_t)(dd^c\phi_t)^n \\ &+ n \int_\Omega d\,\dot{\phi}_t \wedge d^c\dot{\phi}_t \wedge (dd^c\phi_t)^{n-1},\ t \in I \end{aligned}$$

En particulir, pour tous $u, v \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, la fonction $t \longmapsto E((1-t)u + tv)$ est convexe dans $[0,1]$.

2) La fonctionelle $E : \mathcal{E}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{E}^1(\Omega)$ pour la topologie $L^1_{loc}(\Omega)$.

Les estimées suivantes de la capacité des ensembles de sous-niveau des fonctions dans $\mathcal{E}^1(\Omega)$ nous seront utiles (voir [CKZ05]). Il existe une constante $D_0 > 0$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ et tout $s > 0$, on a

$$\mathrm{Cap}_\Omega(\{\phi \leq -s\}) \leq \frac{D_0}{s^{n+1}} E(\phi). \tag{3.3.3}$$

3.3.2 Une inégalité de type Sobolev-Poincaré non linéaire

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 3.3.2. *Soient* $0 \leq g \in L^p(\Omega)$, $p > 1$ *une fonction densité et* $dV_g := g\beta^n$ *une forme volume sur* $\bar{\Omega}$. *Alors, il existe une constante* $A = A(n, \|g\|_p) > 0$ *telle que pour tout* $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega (-\phi)^{n+1} dV_g \leq A\, E(\phi). \tag{3.3.4}$$

De plus, pour toute suite (u_j) *dans* $\mathcal{E}^1(\Omega)$ *convergeant vers* u *dans* $L^1_{loc}(\Omega)$ *telle que* $M := \sup_j E(u_j) < +\infty$, *on a*

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (-u_j)^{n+1} dV_g = \int_\Omega (-u)^{n+1} dV_g. \tag{3.3.5}$$

On observe que pour $n = 1$, $E(\phi) = (1/2)\int_\Omega (-\phi) dd^c\phi = (1/2)\|\nabla\phi\|^2_{L^1(\Omega)}$. Donc l'inégalité (3.3.4) dans ce cas est l'inégalité de Poincaré pour les fonctions ϕ dans $\mathcal{E}^1(\Omega) \subset W^{1,2}_0(\Omega)$.

Preuve. Pour démontrer l'inégalité (3.3.4), nous aurons besoin de l'estimée suivante due à Z. Błocki. Pour tous $u, v \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega (-u)^{n+1} (dd^c v)^n \leq (n+1)\,!\, \|v\|^n_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (-u)(dd^c u)^n, \tag{3.3.6}$$

Pour démontrer l'inégalité (3.3.6), on effectue une intégration par parties n fois (voir [Bl93]).

D'après un résultat bien connu de Kołodziej [Kol03], il existe $\phi_0 \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tel que $\phi_0 = 0$ dans $\partial\Omega$ et $(dd^c\phi_0)^n = gdV$ au sens des courants sur Ω.

Pour prouver l'estimée (3.3.4), il suffit de supposer que $\phi \in \mathcal{E}^0(\Omega)$. Puisque

$$\int_\Omega (-\phi)^{n+1} dV_g = \int_\Omega (-\phi)^{n+1} (dd^c\phi_0)^n,$$

on montre en utilisant (3.3.6) que

$$\int_\Omega (-\phi)^{n+1} dV_g \leq (n+1)\,!\, \|\phi_0\|^n_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^n,$$

ce qui prouve l'estimée (3.3.4) avec $A := (n+1)(n+1)\,!\, \|\phi_0\|^n_{L^\infty(\Omega)}$.

Démontrons la deuxième propriété. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $u_j \to u$ presque partout dans Ω.

Supposons d'abord que (u_j) est uniformément bornée dans Ω. Puisque la suite $(-u_j)^{n+1}_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $(-u)^{n+1}$ presque partout dans Ω, alors d'après le théorème de convergence de Lebesgue, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (-u_j)^{n+1} gdV = \int_\Omega (-u)^{n+1} gdV. \tag{3.3.7}$$

On considère maintenant le cas général. Pour $j, k \in \mathbb{N}$, on pose $h_j := (-u_j)^{n+1}$, $h_j^{(k)} = (-u_j^{(k)})^{n+1}$, $h := (-u)^{n+1}$ et $h^{(k)} := (-u^{(k)})^{n+1}$. Ici $u^{(k)} := \sup\{u, -k\}$ et $u_j^{(k)} := \sup\{u_j, -k\}$ pour $j, k \in \mathbb{N}$ fixés. Ceux sont des fonctions boréliennes dans $L^1(\Omega, dV_g)$ et on a l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
(3.3.8) \qquad \left|\int_\Omega (h_j - h)dV_g\right| &\leq \int_\Omega (h_j^{(k)} - h_j)dV_g + \left|\int_\Omega h_j^{(k)} - h^{(k)}dV_g\right| \\
&+ \int_\Omega (h^{(k)} - h)dV_g.
\end{aligned}
$$

Pour k fixé, la suite $(u_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions plurisousharmoniques uniformément bornée dans Ω. Alors, en appliquant la première étape, on voit que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le deuxième terme de (3.3.8) converge vers 0 lorsque $j \to +\infty$, tandis que le troisième terme converge vers 0 d'après le théorème de convergence monotone. Il reste à montrer que le premier terme converge vers 0 lorsque $k \to +\infty$, uniformément en j. En effet, pour $j, k \in \mathbb{N}^*$ on a les estimées suivantes

$$
(3.3.9) \qquad \int_\Omega |h_j - h_j^{(k)}|dV_g \leq 2\int_{\{h_j \geq k^{n+1}\}} h_j dV_g.
$$

On affirme que la suite $k \longmapsto \int_{\{h_j \geq k^{n+1}\}} h_j dV_g$ converge vers 0 uniformément en j lorsque $k \to +\infty$. En effet pour j, k fixés, on a

$$
(3.3.10) \qquad \int_{\{h_j \geq k^{n+1}\}} h_j dV_g = \int_{\{u_j \leq -k\}} (-u_j)^{n+1} g dV
$$

D'autre part, étant donné un sous-ensemble de Borel $B \subset \Omega$, d'après le théorème de Kołodziej [Kol03], il existe $\phi_B \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tel que $\phi_B = 0$ dans $\partial\Omega$ et $(dd^c\phi_B)^n = \mathbf{1}_B\, gdV$ au sens des courants sur Ω. De plus, il existe une constante uniforme $C_0 > 0$ telle que $\|\phi_B\|^n_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0 \|\mathbf{1}_B g\|_{L^p(\Omega)}$.

Par conséquent, comme précédemment, l'inégalité de Błocki (3.3.6) donne

$$
\begin{aligned}
\int_B (-u_j)^{n+1} g dV = \int_\Omega (-u_j)^{n+1}(dd^c\phi_B)^n &\leq (n+1)!\, \|\phi_B\|^n_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (-u_j)(dd^c u_j)^n \\
&\leq (n+1)!\, C_0 M \|\mathbf{1}_B g\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Puisque $g^p \in L^1(\Omega)$, on déduit de la continuité absolue que $\|\mathbf{1}_B g\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_B g^p dV \to 0$ quand $\mathrm{Vol}(B) \to 0$.

Cela implique que $\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_B (-u_j)^{n+1} g dV \to 0$ quand $\mathrm{Vol}(B) \to 0$. On va appliquer ce résultat aux ensembles de Borel $B := \{u_j \leq -k\}$. Pour estimer leurs volumes, on observe d'abord que la capacité de Monge-Ampère de ces ensembles peut être contrôlée à l'aide de l'inégalité (3.3.3) c'est-à-dire que pour tous $j, k \in \mathbb{N}$, on a

$$
\mathrm{Cap}_\Omega(\{u_j \leq -k\}) \leq \frac{D_0}{k^{n+1}} E(u_j) \leq \frac{D_0 M}{k^{n+1}}.
$$

En utilisant l'inégalité (1.2.1), on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$
\sup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}(\{u_j \leq -k\}) \leq \frac{M D_0 R^{2n}}{k^{n+1}} \to 0, \text{ lorsque } k \to +\infty.
$$

Cela prouve l'affirmation et complète la preuve du Lemme.

□

3.3.3 Une formule de type quotient de Rayleigh

Nous utilisons d'abord une approche variationnelle pour prouver le résultat suivant.

Théorème 3.3.3. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine hyperconvexe, $0 \leq g \in L^p(\Omega)$, $p > 1$ une fonction densité et $dV_g := g\beta^n$ une forme volume sur $\bar{\Omega}$ tels que $\int_\Omega dV_g > 0$. On définit le nombre réel*

$$\eta_1^n := \inf\left\{\frac{E(\phi)}{I_g(\phi)}; \phi \in \mathcal{E}^1(\Omega), w \neq 0\right\}, \tag{3.3.11}$$

où $I_g(\phi) := \frac{1}{n+1}\int_\Omega (-\phi)^{n+1} dV_g$.

Il existe une fonction $w \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ telle que

$$\eta_1^n = \frac{E(w)}{I_g(w)}. \tag{3.3.12}$$

De plus (η_1, w) est une solution (faible) du problème des valeurs propres

$$\begin{cases} (dd^c w)^n = (-\eta_1 w)^n g\beta^n & \text{dans} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \\ w < 0. \end{cases} \tag{3.3.13}$$

Preuve. Par hypothèse, Ω admet une fonction d'exhaustion plurisousharmonique négative continue ρ. Alors $\rho \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ et tout $w \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ tel que $w < 0$ satisfait $\int_\Omega (-w)^{n+1} dV_g > 0$. En effet, puisque $\int_\Omega dV_g > 0$, il existe un ensemble compact $K \Subset \Omega$ tel que $V_g(K) := \int_K dV_g > 0$. Donc $\int_\Omega (-w)^{n+1} dV_g \geq (-\max_K w)^{n+1} V_g(K) > 0$. Donc η_1 est un nombre réel positif bien défini et par homogénéité, on a

$$\eta_1^n = \inf\{E(w)\,;\, w \in \mathcal{E}^1(\Omega),\, I_g(w) = 1\}. \tag{3.3.14}$$

De plus, d'après le Lemme 3.3.2, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $w \in \mathcal{E}^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (-w)^{n+1} dV_g \leq A\, E(w).$$

En particulier, on a $\eta_1^n \geq A^{-1} > 0$.

Par ailleurs, il existe, par définition, une suite minimisante $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}^1(\Omega)$ telle que $I_g(w_j) = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{j\to+\infty} E(w_j) = \eta_1^n.$$

Par construction, la suite $(E(w_j))$ est bornée. En appliquant le Lemme 3.3.2 à la mesure de Lebesgue λ_{2n}, on voit que la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{n+1}(\Omega, \lambda_{2n})$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (w_j) converge faiblement vers $w \in PSH(\Omega)$ et presque partout dans Ω. Donc (w_j) converge vers w dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Par semi-continuité inférieure de la fonctionnelle d'énergie, il s'ensuit que $w \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ et $E(w) \leq \lim_{j\to+\infty} E(w_j) = \eta_1^n$.

Puisque $\sup_j E(w_j) =: C < +\infty$, on déduit du Lemme 3.3.2 que

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (-w_j)^{n+1} dV_g = \int_\Omega (-w)^{n+1} dV_g. \tag{3.3.15}$$

Donc $I_g(w) = 1$ et $w \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ est une fonction extrémale pour le problème des valeurs propres, c'est-à-dire

$$\eta_1^n = \frac{E(w)}{I_g(w)}\cdot$$

Pour prouver que (η_1, w) est une solution du problème des valeurs propres, on considère la fonctionnelle suivante définie pour $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, par la formule

$$F_g(\phi) := E(\phi) - \eta_1^n I_g(\phi).$$

On observe aussi que lorsque ϕ est lisse,

$$F_g'(\phi) = -(dd^c\phi)^n + \eta_1^n(-\phi)^n dV_g.$$

Cela signifie que l'équation des valeurs propres est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle F_g sur $\mathcal{E}^1(\Omega)$.

On observe comme précédemment que pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ avec $\phi \not\equiv 0$, on a $I_g(\phi) > 0$ et que

$$F_g(\phi) := I_g(\phi)\left(\frac{E(\phi)}{I_g(\phi)} - \eta_1^n\right) \geq 0,$$

par définition de η_1. Puisque $F_g(w) = 0$, cela signifie que la fonctionnelle F_g atteint son minimum sur $\mathcal{E}^1(\Omega)$ en w. Donc w est une sorte de "point critique" de la fonctionnelle F_g. Pour prouver cette affirmation, on va utiliser un argument délicat qui remonte à [BBGZ13].

Fixons une "fonction test" $\psi \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ et considérons le chemin $\phi_t = w + t\psi$ qui appartient à $\mathcal{E}^1(\Omega)$ si $0 \leq t \leq 1$ car c'est un cône positif convexe. Lorsque $t < 0$, ce n'est plus le cas, donc on considère son enveloppe plurisousharmonique $\tilde{\phi}_t := P(\phi_t)$ c'est-à-dire la plus grande fonction plurisousharmonique inférieure à ϕ_t dans Ω. Puisque pour $t < 0$, $w \leq \phi_t$, il s'ensuit que $w \leq P(\phi_t)$. Donc $\tilde{\phi}_t \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ pour tout $t \in [-1, +1]$ (voir [Ceg98]).

Considérons maintenant la fonction d'une variable définie pour $t \in [-1, +1]$ par

$$h(t) := E \circ P(\phi_t) - \eta_1^n I_g(\phi_t).$$

Nous affirmons que la fonction h est dérivable sur $[-1, +1]$, positive et atteint son minimum en $t = 0$. En effet, observons d'abord que $h(0) = 0$. De plus puisque pour tout $t \in [-1, 1]$, $\tilde{\phi}_t \leq \phi_t < 0$ dans Ω, il s'ensuit que $I_g(\phi_t) \leq I_g(\tilde{\phi}_t)$ et que

$$h(t) \geq E(\tilde{\phi}_t) - \eta_1^n I_g(\tilde{\phi}_t) = F_g(\tilde{\phi}_t) \geq 0,$$

pour tout $t \in [-1, 1]$, ce qui prouve notre affirmation. Une propriété importante de l'opérateur P est que pour toute courbe lisse $t \longmapsto \varphi_t$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, on a :

$$\frac{d}{dt}(E \circ P)(\varphi_t) = \int_\Omega (-\dot{\varphi}_t)(dd^c P(\varphi_t))^n,$$

pour tout t (voir [BBGZ13], [Lu15]).

Donc h est dérivable sur $[-1,+1]$ et d'après le Lemme 3.3.1, on a pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{d}{dt}E(\tilde{\phi}_t) - \eta_1^n \frac{d}{dt}I_g(\phi_t) \\ &= \int_\Omega (-\dot{\phi}_t)(dd^c\tilde{\phi}_t)^n + \eta_1^n \int_\Omega \dot{\phi}_t(-\phi_t)^n dV_g. \end{aligned}$$

Puisque h atteint son minimum sur $[-1,+1]$ au point 0, il s'ensuit que $h'(0) = 0$, ce qui implique l'identité suivante :

$$\int_\Omega \psi\,(dd^c w)^n = \eta_1^n \int_\Omega \psi\,(-w)^n dV_g.$$

pour tout $\psi \in \mathcal{E}^0(\Omega)$. Puisque toute fonction test lisse χ dans Ω peut être écrite sous la forme $\chi = \psi_1 - \psi_2$, où $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}^0(\Omega)$, il s'ensuit que

$$(dd^c w)^n = \eta_1^n (-w)^n dV_g,$$

au sens des courants sur Ω. □

3.3.4 Preuve du Théorème 3.1.2

Le Théorème 3.1.2 est une conséquence immédiate du résultat suivant.

Théorème 3.3.4. *Soit $d\nu_f := f^n\beta^n$ une forme volume positif lisse sur $\bar{\Omega}$ et (λ_1, φ_1) la solution lisse normalisée du problème des valeurs propres (3.1.1) et soit (η_1, w_1) une solution faible du problème (3.3.13) pour $g = f^n$.*

Alors $\lambda_1 = \eta_1$ et $\varphi_1 = \theta w_1$, où $\theta > 0$ est une constante. En particulier

$$\lambda_1^n = \frac{\int_\Omega (-\varphi_1)(dd^c\varphi_1)^n}{\int_\Omega (-\varphi_1)^{n+1} d\nu_f} = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^n}{\int_\Omega (-\phi)^{n+1} d\nu_f} ; \phi \in \mathcal{E}^1(\Omega), \phi \neq 0 \right\}. \tag{3.3.16}$$

Preuve. Puisque (λ_1, φ_1) est la solution du problème des valeurs propres (3.1.1) donnée par le Théorème 3.1.1, il s'ensuit que

$$\int_\Omega (-\varphi_1)(dd^c\varphi_1)^n = \lambda_1^n \int_\Omega (-\varphi_1)^{n+1} f^n \beta^n.$$

D'après la formule (3.3.11) on voit que $\lambda_1 \geq \eta_1$.

Montrons d'abord que $\eta_1 = \lambda_1$. Pour cela nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $\eta_1 < \lambda_1 = \mu_1$. Il résulte de l'étape 3 de la preuve du Théorème 3.1.1, qu'il existe $u_{\eta_1} \in PSH(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ telle que

$$(dd^c u_{\eta_1})^n = (1 - \eta_1 u_{\eta_1})^n f^n \beta^n \text{ dans } \Omega \text{ et } u_{\eta_1} = 0 \text{ dans } \partial\Omega.$$

De plus w_1 est une (sur)-solution faible du problème (3.3.13). Nous voulons comparer u_{η_1} et w_1 en appliquant le principe de comparaison.

D'abord on affirme que w_1 est borné dans Ω et $w_1 = 0$ dans $\partial\Omega$. En effet d'après le Lemme 3.3.2, on a $\mathcal{E}^1(\Omega) \subset L^{n+1}(\Omega)$, donc $w_1 \in L^{n+1}(\Omega)$. Posons $p := \frac{n+1}{n} > 1$. Puisque f est borné dans Ω, il s'ensuit que

$$\int_\Omega [(-\eta_1 w_1)^n f^n]^p \beta^n \leq \int_\Omega (-\eta_1 w_1)^{n+1} f^{n+1} \beta^n \leq \|\eta_1 f\|^{n+1}_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (-w_1)^{n+1} \beta^n < +\infty.$$

Cela signifie que la densité $g := (-\eta_1 w_1)^n f^n \in L^p(\Omega)$ avec $p > 1$. D'après un résultat de Kołodziej [Kol96, Théorème 3], il existe une unique fonction $v \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$ telle que

$$(dd^c v)^n = (-\eta_1 w_1)^n f^n \beta^n \quad \text{sur} \quad \Omega \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega.$$

De plus on a aussi $v \in \mathcal{E}^1(\Omega)$. Cela signifie qu'on a deux solutions faibles $v, w_1 \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ de l'équation de Monge-Ampère complexe

$$(dd^c \phi)^n = (-\eta_1 w_1)^n f^n \beta^n.$$

D'après le théorème d'unicité de Cegrell [Ceg98, Théorème 6.2], il s'ensuit que $w_1 = v \in C^0(\bar\Omega)$ et $w_1 = 0$ dans $\partial\Omega$. Cela prouve notre affirmation.

Maintenant on a

$$(dd^c w_1)^n = (-\eta_1 w_1)^n f^n \beta^n \leq t^n f^n \beta^n \text{ sur } \Omega,$$

où $t := \eta_1 M$ et $M := \max_{\bar\Omega} w_1$. De plus $(dd^c u_{\eta_1})^n \geq f^n \beta^n$ sur Ω. Donc $(dd^c w_1)^n \leq (dd^c t u_{\eta_1})^n$ sur Ω. Puisque $t u_{\eta_1} = 0 = w_1$ dans $\partial\Omega$, d'après le principe de comparaison, on a $\underline{u} := t u_{\eta_1} \leq w_1$ dans Ω.

Remarquons que

$$\begin{aligned}(dd^c \underline{u})^n &= t^n (1 - \eta_1 u_{\eta_1})^n f^n \beta^n \\ &\geq t^n \left(1 + (-\eta_1 u_{\eta_1})^n\right) f^n \beta^n \\ &= ((-\eta_1 \underline{u})^n + t^n) f^n \beta^n.\end{aligned}$$

Donc $\underline{u}$ est une sous-solution stricte et lisse du problème (3.3.13) et w_1 une sursolution continue du problème (3.3.13) telles que $\underline{u} \leq w_1$ dans Ω. D'après le Théorème 2.1.1, il existe une solution $\varphi \in PSH(\Omega) \cap C^{1,\bar 1}(\bar\Omega)$ du problème (3.3.13) telle que $\underline{u} \leq \varphi \leq w_1$ dans Ω. Donc si $\theta^{-1} := \|\varphi\|_{C^0(\bar\Omega)}$, alors $(\eta_1, \theta\varphi)$ est une autre solution lisse du problème des valeurs propres (3.1.1). D'après la propriété d'unicité du Théorème 3.1.1, il s'ensuit que $\eta_1 = \lambda_1$. Cette contradiction conduit à la conclusion $\eta_1 = \lambda_1$. Le fait que $\varphi_1 = \theta w_1$ pour une constante positive $\theta > 0$ découle de la propriété d'unicité de la Proposition 3.3.5 ci-dessous. □

Proposition 3.3.5. *Soit (λ_1, φ_1) la solution lisse normalisée du problème des valeurs propres (3.1.1). Supposons que $u \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ est une solution faible du problème suivant*

$$\left\{\begin{array}{lll} (dd^c u)^n = (-\lambda_1 u)^n f^n \beta^n & \text{dans} & \Omega \\ u = 0 & \text{dans} & \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.3.17}$$

Alors il existe une constante positive $\theta > 0$ telle que $u = \theta\varphi_1$.

L'idée principale de la preuve de ce résultat est due à Chinh H. Lu.

Preuve. Observons d'abord que $u \in PSH(\Omega) \cap C^\alpha(\bar\Omega)$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$. En effet comme dans la preuve précédente du Théorème 3.3.4, on voit que la densité $g := (-\lambda_1 u)^n f^n \in L^{1+1/n}(\Omega)$. Donc d'après [Ch15] (voir aussi [GKZ08]), il existe $\phi \in PSH(\Omega) \cap C^\alpha(\bar\Omega)$ tel que

$(dd^c\phi)^n = g\beta^n$ dans Ω et $\phi = 0$ dans $\partial\Omega$. D'après le théorème d'unicité de Cegrell pour les solutions dans $\mathcal{E}^1(\Omega)$ (voir [Ceg98, Théorème 6.2]), on a $u = \phi \in PSH(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$.

D'après les inégalités mixtes de Monge-Ampère ([Kol03], [Din09]), on a

$$dd^c u \wedge (dd^c\varphi_1)^{n-1} \geq (-\lambda_1 uf)(-\lambda_1\varphi_1 f)^{n-1}\beta^n = (-\lambda_1 u)G\beta^n,$$

faiblement sur Ω, où $G := (-\lambda_1\varphi_1)^{n-1}f^n$ est une fonction lisse dans $\bar{\Omega}$.

Considérons l'opérateur linéaire elliptique du second ordre suivant

$$L\phi := dd^c\phi \wedge (dd^c\varphi_1)^{n-1}/\beta^n.$$

Alors $L\varphi_1 = (-\lambda_1\varphi_1)G$, et aussi

$$Lu \geq -\lambda_1 uG, \tag{3.3.18}$$

faiblement sur Ω.

Puisque $-\lambda_1 uG \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, d'après la théorie de Schauder, le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} Lv = -\lambda_1 uG & \text{dans} \quad \Omega \\ v = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3.19}$$

admet une solution $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

En effet l'opérateur L est elliptique sur Ω et vérifie le principe du maximum [GT98, Théorème 3.5]. De plus l'opérateur L est localement uniformément elliptique et ses coefficients sont localement hölderiens sur Ω.

On peut donc appliquer l'observation de [GT98, Section 6.6]. Pour être plus précis on peut appliquer la méthode de Perron pour résoudre le problème de Dirichlet (3.3.19) comme expliqué après l'énoncé du [GT98, Théorème 6.11]. Remarquons en effet que u est une sous-solution de ce problème, donc l'enveloppe supérieure v de toutes les sous-solutions du problème de Dirichlet (3.3.19) est bien définie et est une sous-solution bornée telle que $u \leq v \leq 0$ dans Ω. Pour montrer que $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ est une solution du problème de Dirichlet (3.3.19), on peut utiliser le processus de balayage classique en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du [GT98, Théorème 2.12], grâce au résultat de compacité fourni par les estimées locales de Schauder du [GT98, Corollaire 6.3].

D'après (3.3.18), on a $Lu \geq -\lambda_1 uG = Lv$, donc $u \leq v \leq 0$ dans $\bar{\Omega}$. Donc $Lv \geq -\lambda_1 vG$ sur Ω.

En appliquant la Proposition 1.5.2, on en déduit qu'il existe $\theta > 0$ tel que $v = \theta\varphi_1$. Donc $Lv = -\lambda_1 vG$ dans Ω et $v = 0$ dans $\partial\Omega$. D'après (3.3.19), on en déduit que $u = v$, donc $u = \theta\varphi_1$. □

3.3.5 La propriété de monotonie de $\lambda_1(\Omega)$

Soient $\Omega' \Subset \Omega \Subset \mathbb{C}^n$ deux domaines strictement bornés pseudoconvexes et $0 < f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. On a alors le théorème de comparaison suivant :

Théorème 3.3.6. *Soit $f' := f_{\Omega'}$ la restriction de f dans Ω'. Alors, on a*

$$\lambda_1(\Omega, f) \leq \lambda_1(\Omega', f').$$

Preuve.
Soit $u \in \mathcal{E}^1(\Omega)$. On note $E_\Omega(u) := \frac{1}{n+1}\int_\Omega(-u)(dd^c u)^n$ et $I_{\Omega,f} := \frac{1}{n+1}\int_\Omega(-u)^{n+1}f^n dV$. D'après le Théorème 3.3.4, il existe $w' \in \mathcal{E}^1(\Omega')$ tel que

$$\lambda_1(\Omega', f_{\Omega'}) = \frac{E_{\Omega'}(w')}{I_{\Omega',f'}(w')}.$$

D'après le théorème de sous-extension de [CKZ11], il existe $w \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ tel que $w \le w'$ dans Ω' et $E_\Omega(w) \le E_{\Omega'}(w')$. Puisque $w \le w'$ dans Ω', il s'ensuit que $I_{\Omega',f'}(w') \le I_{\Omega,f}(w)$, donc

$$\frac{E_{\Omega'}(w')}{I_{\Omega',f'}(w')} \ge \frac{E_\Omega(w)}{I_{\Omega,f}(w)}.$$

D'après le Théorème 3.3.4 on a $\lambda_1(\Omega', f') \ge \lambda_1(\Omega, f)$. □

D'après l'inégalité (3.2.17) on a la borne inférieure de la première valeur propre suivante.

Corollaire 3.3.7. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement pseudoconvexe et $R :=$ diam$(\Omega)/2$. Alors la première valeur propre $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega, 1)$ satisfait l'estimée suivante :*

$$\lambda_1(\Omega) \ge R^{-2}.$$

3.4 Questions ouvertes

Problème 1 : La solution donnée par le Théorème 0.0.2 est-elle dans $C^{1,1}(\bar{\Omega})$?

Problème 2 : Il serait intéressant de généraliser le Théorème 0.0.1 et le Théorème 0.0.2 au cas des équations Hessiennes complexes. Pour ce faire il faudrait établir des estimées a priori du premier et du second ordre pour les solutions de ces équations. Cela est plus délicat et fera l'objet de notre étude ultérieurement.

Chapitre 4

Approche variationnelle aux problèmes des valeurs propres pour les opérateurs de type Hessien complexe

Le contenu de ce quatrième chapitre se trouve dans l'article [BaZe23b]. On utilise une approche variationnelle pour prouver l'existence de la première valeur propre et d'une fonction propre associée qui est m-sousharmonique d'énergie finie pour les opérateurs Hessiens complexes associés à une mesure μ sur un domaine borné m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$. Sous certaines hypothèses supplémentaires sur la mesure μ, on prouve que cette fonction propre est Hölder continue. De plus, on donne des applications sur la solvabilité d'équations Hessiennes complexes dégénérées plus générales avec un second membre qui dépend de la fonction inconnue.

4.1 Introduction

Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$, $\mu \geq 0$ une mesure de Borel positive sur Ω, de masse positive finie $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ et m un entier tel que $1 \leq m \leq n$.

Le problème des valeurs propres de l'opérateur Hessien complexe associé à μ consiste à trouver un couple (λ, u), où $\lambda > 0$ est une constante et $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$(4.1.1) \qquad \begin{cases} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (-\lambda\, u)^m \mu & \text{dans} \quad \Omega, \quad (\dagger) \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega, \quad (\dagger\dagger) \\ u < 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

L'équation $(\dagger)$ est interprétée aux sens des courants (ou des mesures de Radon) sur Ω (voir chapitre 1, section 1.7) et l'identité $(\dagger\dagger)$ signifie que pour tout $\zeta \in \partial\Omega$, $\lim_{z\to\zeta} u(z) = 0$.

Lorsque $m = 1$ et μ est la mesure de Lebesgue, c'est le problème classique des valeurs propres de l'opérateur de Laplace. Lorsque $m = n$ et μ est une forme volume lisse sur $\bar{\Omega}$, c'est le problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe que nous avons étudié dans [BaZe23a] et qui a fait l'objet du chapitre 3 de cette thèse.

Nous allons utiliser la méthode variationnelle pour résoudre ce problème. Nous définissons deux fonctionnelles sur le cône positif convexe $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ des fonctions m-sousharmoniques d'énergie finie (voir chapitre 1, section 1.8).

La première est la fonctionnelle d'énergie définie sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ par la formule :

$$E_m(\phi) = E_{m,\Omega}(\phi) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m}, \ \ \phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega). \tag{4.1.2}$$

Cette fonctionnelle (mutlipliée par le signe $-$) est une primitive de l'opérateur Hessien sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ c'est-à-dire $E'_m(\phi) = -(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m}$ sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ au sens du Lemme 1.8.4. D'après le Lemme 1.8.4, elle est convexe (sur des droites affines) sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$.

La deuxième fonctionnelle est attachée à une mesure de Borel positive μ sur Ω vérifiant la condition d'intégrabilité suivante :

$$\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega, \mu). \tag{4.1.3}$$

La fonctionnelle associée à μ est définie par la formule suivante

$$I_m(\phi) = I_{\Omega,\mu,m}(\phi) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu, \ \ \phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega). \tag{4.1.4}$$

C'est encore une fonctionnelle convexe sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ telle que $I'_m(\phi) = -(-\phi)^m\mu$ pour tout $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ au sens du Lemme 1.8.4.

Cela montre que l'équation $(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m} = (-\lambda\phi)^m\mu$ est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle

$$\Phi_{\Omega,\mu,m}(\phi) := E_m(\phi) - \lambda^m I_{\Omega,\mu,m}(\phi), \ \ \phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega). \tag{4.1.5}$$

Lorsque (Ω, μ) est fixé, on écrira $I_m = I_{\Omega,\mu,m}$ et $\Phi_m = \Phi_{\Omega,\mu,m}$.

Pour énoncer nos principaux résultats, nous faisons les hypothèses suivantes.

Hypothèses (H)

- $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est m-hyperconvexe c'est-à-dire qu'il admet une fonction d'exhaustion m-sousharmonique négative et continue (voir Définition 1.7.7) ;
- μ est une mesure de Borel positive telle que $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ qui est fortement diffuse par rapport à la m-capacité (voir Définition 1.9.1).

Un exemple important est lorsque $\mu := g\beta^n$, où $0 \leq g \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/m$ et $\int_\Omega g\beta^n > 0$ (voir Section 1.9 pour plus d'exemples).

Voici le premier résultat de ce chapitre

Théorème 4.1.1. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné et μ une mesure de Borel positive sur Ω telles que (Ω, μ) vérifie les hypothèses (H). Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega, \mu)$ *;*

(ii) la formule

$$\lambda_1^m := \inf\left\{\frac{E_m(\phi)}{I_m(\phi)}; \phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega), \phi \not\equiv 0\right\}, \tag{4.1.6}$$

définit un nombre réel positif $\lambda_1 = \lambda_1(m, \mu, \Omega) > 0$;

(iii) il existe une fonction $u_1 \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ *telle que* $u_1 \not\equiv 0$ *dans* Ω *et*

$$\lambda_1^m = \frac{E_m(u_1)}{I_m(u_1)}; \tag{4.1.7}$$

(iv) (λ_1, u_1) *est une solution de l'équation des valeurs propres (†) c'est-à-dire*

$$(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m} = (-\lambda_1 u_1)^m \mu,$$

au sens des mesures sur Ω.

(v) Si de plus Ω *est strictement m-pseudoconvexe,* $\mu = g\beta^n$ *avec* $g \in L^p(\Omega)$ *et* (m,p) *vérifie les conditions suivantes*

$$(n-1)/2 < m \leq n \ \ et \ \ p > p^*(m,n), \tag{4.1.8}$$

où $p^*(m,n)$ *est donné par la formule (4.3.7), alors* $u_1 \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ *pour un certain* $\alpha \in]0,1[$ *et le couple* (λ_1, u_1) *est une solution du problème des valeurs propres (4.1.1).*

Lorsque $m = n$, le point (v) de ce résultat a été démontré au niveau du Chapitre 3.

Notre deuxième résultat principal est le suivant.

Théorème 4.1.2. *Soient* $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ *un domaine borné et* μ *une mesure de Borel positive sur* Ω *telles que* (Ω, μ) *vérifie les hypothèses* (H).

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une fonction borélienne vérifiant les propriétés suivantes :*

- *pour tout* $t \leq 0$, $f(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega, \mu)$.
- *pour* μ*-p.p.* $z \in \Omega$, *la fonction* $t \mapsto f(z,t)$ *est différentiable sur* $]-\infty, 0[$ *et il existe une constante* $\lambda_0 < \lambda_1$ *telle que*

$$\partial_t f(z,t) \geq -\lambda_0, \ \ pour\ tout\ \ t < 0.$$

Alors l'équation Hessienne

$$(dd^c \varphi)^m \wedge \beta^{n-m} = f(\cdot, \varphi)^m \mu \ \ dans\ \Omega, \tag{4.1.9}$$

admet une solution $\varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

Si de plus Ω *est strictement m-pseudoconvexe,* $\mu = g\beta^n$ *avec* $g \in L^p(\Omega)$ *et* (m,p) *qui vérifie les conditions (4.1.8), alors le problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases} (dd^c \varphi)^m \wedge \beta^{n-m} = f(\cdot, \varphi)^m \mu & dans \ \ \Omega, \\ \varphi = 0 & dans \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.10}$$

admet une solution $\varphi \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ *pour un certain* $\alpha \in]0,1[$.

Le Théorème 4.1.1 sera démontré dans la sections 4.3 et le Théorème 4.1.2 dans la section 4.4.

4.2 Les inégalités de type Sobolev-Poincaré non linéaires

Il existe plusieurs versions de ce type d'inégalités (voir [AC20] et [WZ22]). Ici, nous allons donner différents types d'inégalités plus adaptés à notre approche.

4.2.1 Intégrabilité des potentiels d'énergie finie

Pour définir la fonctionnelle $I_{m,\mu,\Omega}$, on considère des mesures qui vérifient la condition d'intégrabilité (4.1.3). Pour cela on va donner des conditions suffisantes sur une mesure de Borel μ pour assurer les propriétés d'intégrabilité des fonctions de la classe $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

On aura besoin du résultat suivant.

Lemme 4.2.1. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement m-pseudoconvexe et μ une mesure de Borel positive sur Ω. Supposons qu'il existe une fonction $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ vérifiant*

$$\mu \leq (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad v_{|\partial\Omega} = 0.$$

Alors il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu \leq A E_m(\phi). \tag{4.2.1}$$

En particulier $\mathcal{E}^1_m(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega, \mu)$.

Remarquons que pour $m = 1$, on a

$$E_1(\phi) = \frac{1}{2} \int_\Omega (-\phi) dd^c\phi \wedge \beta^{n-1} = \frac{1}{2} \int_\Omega d\phi \wedge d^c\phi \wedge \beta^{n-1}.$$

Par conséquent, l'inégalité (4.2.1) dans ce cas est l'inégalité de Poincaré classique pour les fonctions dans $\mathcal{E}^1(\Omega) \subset W^{1,2}_0(\Omega)$.

Preuve. Pour démontrer l'inégalité (4.2.1), on aura besoin de l'estimée suivante due à Z. Błocki pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Pour tous $u, w \in \mathcal{E}^0_m(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega (-u)^{m+1} (dd^c w)^m \wedge \beta^{n-m} \leq (m+1)! \, \|w\|^m_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (-u)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}. \tag{4.2.2}$$

La preuve se fait en utilisant une intégration par parties m fois (voir [Bl93]).

Pour prouver l'estimée (4.2.1), il suffit de supposer que $\phi \in \mathcal{E}^0_m(\Omega)$. Puisqu'on a

$$\int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu \leq \int_\Omega (-\phi)^{m+1} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m},$$

on déduit de (4.2.2) que

$$\int_\Omega (-\phi)^{n+1} d\mu \leq (m+1)! \, \|v\|^m_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (-\phi)(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

En posnat $A := (m+1)(m+1)! \, \|v\|^m_{L^\infty(\Omega)}$, on obtient l'estimée (4.2.1).

□

Nous allons étendre le résultat précédent à une classe spéciale de mesures diffuses.

Proposition 4.2.2. *Soit μ une mesure de Borel Γ-diffuse finie, c'est-à-dire pour tout ensemble de Borel $K \subset \Omega$,*

$$\mu(K) \leq \Gamma(\mathrm{c}_m(K,\Omega)). \tag{4.2.3}$$

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que Γ vérifie la condition d'intégrabilité suivante

$$\ell_\Gamma := \int_0^1 \frac{\Gamma(t)}{t^{1+r/(m+1)}} dt < +\infty. \tag{4.2.4}$$

Alors il existe une constante $C = C(m, r, \Gamma, \mu(\Omega)) > 0$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq C E_m(\phi)^{r/(m+1)}.$$

En particulier $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^r(\Omega, \mu)$.

Preuve. L'idée de la preuve est classique (voir [BJZ05]). Soit $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$, alors d'après le principe de Cavalieri-Fubini, on a

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq \mu(\Omega) + r \int_1^{+\infty} t^{r-1} \mu(\{\phi < -t\}) dt.$$

D'après la propriété de domination (4.2.3), on a

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq \mu(\Omega) + r \int_1^{+\infty} s^{r-1} \Gamma(\mathrm{c}_m(\{\phi < -s\})) ds.$$

D'après [Lu15, Lemme 7.1], il existe une constante uniforme $B_m > 0$ telle que pour tout $s > 0$,

$$\mathrm{c}_m(\{\phi < -s\}) \leq \frac{B_m}{s^{m+1}} E_m(\phi), \tag{4.2.5}$$

Supposons d'abord que $E_m(\phi) \leq 1/B_m$. Alors

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq \mu(\Omega) + r \int_1^{+\infty} s^r \Gamma\left(s^{-m-1}\right) \frac{ds}{s}.$$

Posons $t = s^{-m-1}$. Alors on a

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq \mu(\Omega) + r(m+1) \int_0^1 \frac{\Gamma(t)}{t^{1+r/(m+1)}} dt.$$

En utilisant l'inégalité (4.2.4), on observe que

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \quad \leq \quad A,$$

où $A := \mu(\Omega) + r(m+1)\, \ell_\Gamma$.

Maintenant supposons que $E_m(\phi) \geq 1/B_m$ et considérons la fonction définie par

$$\tilde{\phi} := B_m^{-1/(m+1)} E_m(\phi)^{-1/(m+1)} \phi.$$

Alors $\tilde{\phi} \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ et $E_m(\tilde{\phi}) \leq 1/B_m$. En appliquant l'inégalité précédente à $\tilde{\phi}$, on a par homogénéité $\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq C E_m(\phi)^{r/m}$, où $C := A B_m^{r/(m+1)}$ est une constante uniforme. Cela prouve l'inégalité requise. □

Comme conséquence nous avons le résultat suivant.

Corollaire 4.2.3. *Soit μ une mesure de Borel finie qui vérifie la condition suivante : il existe des constantes $A > 0$ et $\tau > 0$ telles que pour tout ensemble de Borel $K \subset \Omega$,*

$$\mu(K) \leq A \operatorname{Cap}_m(K, \Omega)^\tau. \tag{4.2.6}$$

Alors pour tout $0 < r < \tau(m+1)$, il existe une constante $B = B(m, \tau, r, A, \Omega) > 0$ telle que

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq B E_m(\phi)^{r/(m+1)}.$$

En particulier $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^r(\Omega, \mu)$.

Remarque 4.2.4. Il est facile de voir que la condition suffisante d'intégrabilité précédente est presque optimale. En effet, supposons que $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^r(\Omega, \mu)$. En faisant un raisonnement par l'absurde comme dans [GZ07], on montre qu'il existe une constante $B > 0$, telle que pour tout $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq B E_m(\phi)^{r/(m+1)}.$$

Soit $K \subset \Omega$ un ensemble compact. En appliquant l'inégalité (4.2.6) à la fonction extrémale $h_K = h_{K,\Omega} = P_{m,\Omega}(-\mathbf{1}_K)$ et en tenant compte des propriétés de h_K on en déduit que

$$\mu(K) \leq \int_\Omega (-h_K)^r d\mu \leq B\, E_m(h_K)^{r/(m+1)} \leq B\, c_m(K)^{r/(m+1)}.$$

Le corollaire suivant a été prouvé dans [AC20] par des méthodes similaires.

Corollaire 4.2.5. *Soit $\mu := f\beta^n$ où $0 \leq f \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/m$. Posons $k(m,n,p) := n(p-1)/p(n-m)$. Alors pour tout $1 < r < (m+1)k(m,n,p)$, il existe une constante $C = C(r, m, n, p, \|f\|_p) > 0$ telle que*

$$\int_\Omega (-\phi)^r d\mu \leq C\, E_m(\phi)^{r/(m+1)}. \tag{4.2.7}$$

En particulier $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^r(\Omega, \mu)$.

Preuve. C'est une conséquence de la comparaison du volume et de la m-capacité due à Dinew-Kołodziej ([DK14]). À savoir pour tout $\theta < n/(n-m)$, il existe une constante $M = M(\theta, \Omega) > 0$ telle que

$$\int_K \beta^n \leq M \operatorname{Cap}_m(K)^\theta. \tag{4.2.8}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_K f\beta^n \leq M^{1/q}\|f\|_p(\mathrm{Cap}_m(K)^{\theta/q},$$

où $q := p/(p-1)$. Cela signifie que la condition de domination (4.2.6) est satisfaite pour tout $\tau < k(m,n,p) := \frac{n(p-1)}{p(n-m)}$. Pour conclure, on applique alors le Corollaire 4.2.3. □

Si μ satisfait aux hypothèses du Lemme 4.2.1 ou de la Proposition 4.2.2 avec $r \geq m+1$, alors on a

$$\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega,\mu).$$

Dans ce cas, la fonctionnelle

$$I_{m,\mu,\Omega}(\phi) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega (-\phi)^{m+1}d\mu$$

est bien défini sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$.

Maintenant nous allons étudier les propriétés de continuité de la fonctionnelle $I_{m,\mu,\Omega}$.

Théorème 4.2.6. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné m-hyperconvexe et $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega,\Gamma)$ avec Γ qui vérifie la condition de type Dini (1.9.3).*

Alors on a les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega,\mu)$;

2) si (u_j) est une suite dans $\mathcal{E}_m^1(\Omega,C)$ qui converge vers $u \in \mathcal{E}_m^1(\Omega,C)$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, alors (u_j) converge vers u dans $L^{m+1}(\Omega,\mu)$.

En particulier pour chaque $C>0$, la fonctionnelle $I_{m,\mu,\Omega}$ est continue dans $\mathcal{E}_m^1(\Omega,C)$ pour la topologie $L^1_{loc}(\Omega)$ et

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega (-u_j)^{m+1}d\mu = \int_\Omega (-u)^{m+1}d\mu. \tag{4.2.9}$$

Preuve. 1) On peut appliquer la proposition 4.2.2 pour $r = m+1$. En effet si $\Gamma(t) = t\gamma(t)$, la condition (4.2.4) est équivalente à $\int_0^1 t^{-1}\gamma(t)dt < +\infty$, qui est vérifiée si γ satisfait la condition de type Dini (1.9.3). Cela montre que $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega,\mu)$.

2) Soit (u_j) une suite dans $\mathcal{E}_m^1(\Omega,C)$ convergeant vers $u \in \mathcal{E}_m^1(\Omega,C)$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Nous allons procéder en deux étapes.

Supposons d'abord que (u_j) est uniformément bornée dans Ω. Alors puisque la suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^1_{loc}(\Omega; dV_{2n})$, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $u_j \to u$ p.p. dans Ω par rapport à la mesure de Lebesgue sur Ω. D'après le théorème de convergence de Lebesgue, on a $u_j \to u$ dans $L^p(\Omega, dV_{2n})$ pour tout $p > 1$. Donc $u_j \to u$ in $L^{m+1}(\Omega, dV_{2n})$ et d'après le Théorème 1.9.4, $u_j \to u$ dans $L^{m+1}(\Omega,\mu)$. Ce qui montre l'égalité (4.2.9).

Maintenant on va démontrer l'égalité (4.2.9) dans le cas général. Pour $j,k \in \mathbb{N}$ fixés, on définit $u^{(k)} := \sup\{u,-k\}$ et $u_j^{(k)} := \sup\{u_j,-k\}$. On définit aussi pour $j,k \in \mathbb{N}$, $h_j := (-u_j)^{m+1}$, $h_j^{(k)} = (-u_j^{(k)})^{m+1}$ et $h := (-u)^{m+1}$ et $h^{(k)} := (-u^{(k)})^{m+1}$. Ce sont des fonctions boréliennes dans $L^1(\Omega, \mu)$ et on a :

$$\left| \int_\Omega (h_j - h) d\mu \right| \leq \int_\Omega (h_j^{(k)} - h_j) d\mu + \int_\Omega |h_j^{(k)} - h^{(k)}| d\mu + \int_\Omega (h^k - h) d\mu. \tag{4.2.10}$$

Pour k fixé, la suite $(u_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions m-sousharmoniques uniformément bornée dans Ω. Alors, en appliquant la première étape, on voit que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le deuxième terme de (3.3.8) converge vers 0 lorsque $j \to +\infty$, tandis que le troisième terme converge vers 0 d'après le théorème de convergence monotone quand $k \to +\infty$. Il reste à montrer que le premier terme converge vers 0 lorsque $k \to +\infty$, uniformément dans j. En effet, pour $j, k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_\Omega |h_j - h_j^{(k)}| d\mu \leq 2 \int_{\{h_j \geq k^{m+1}\}} h_j d\mu. \tag{4.2.11}$$

On affirme que la suite $k \longmapsto \int_{\{h_j \geq k^{m+1}\}} h_j d\mu$ converge vers 0 uniformément dans j lorque $k \to +\infty$. En effet pour j, k fixés, on a

$$\int_{\{h_j \geq k^{m+1}\}} h_j d\mu = \int_{\{u_j \leq -k\}} (-u_j)^{m+1} d\mu. \tag{4.2.12}$$

Maintenant, soit $B \subset \Omega$ un sous-ensemble de Borel fixé. Puisque $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$, avec Γ vérifiant la condition Dini (1.9.3), d'après le [CZ23, Théorème 1], il existe une fonction $\phi_B \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $\phi_B = 0$ dans $\partial\Omega$ et $(dd^c\phi_B)^m \wedge \beta^{n-m} = \mathbf{1}_B \, \mu$ au sens des courants sur Ω .

Donc comme précédemment, l'inégalité de Blocki (4.2.2) donne pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_B (-u_j)^{m+1} \mu &= \int_\Omega (-u_j)^{m+1} (dd^c\phi_B)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\leq (m+1)! \, \|\phi_B\|^m_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (-u_j)(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\leq (m+1)! \, C_0 \|\phi_B\|^m_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

où $C_0 > 0$ est une constante uniforme.

D'après le Lemme 4.2.7 ci-dessous, on a $\|\phi_B\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ lorsque $\mu(B) \to 0$.

Cela implique que $\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_B (-u_j)^{m+1} d\mu \to 0$ lorsque $\mu(B) \to 0$. On veut appliquer ce résultat aux ensembles boréliens $B_{j,k} := \{u_j \leq -k\}$. Pour estimer la masse de μ sur les ensembles $B_{j,k}$, on observe d'abord en utilisant l'inégalité (1.9.2) que pour tous $j, k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu(\{u_j \leq -k\}) \leq \Gamma(c_m(\{u_j \leq -k\})).$$

D'après (4.2.5), on a pour tous $j, k \in \mathbb{N}^*$,

$$c_m(\{u_j \leq -k\}) \leq \frac{D_0}{k^{m+1}} E_m(u_j) \leq \frac{D_0 M}{k^{m+1}} =: \varepsilon_k,$$

et $\varepsilon_k \to 0$ lorsque $k \to +\infty$. Donc

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \mu(\{u_j \leq -k\}) \leq \Gamma(\varepsilon_k) \to 0, \text{ as } k \to +\infty.$$

Cela prouve l'affirmation et complète la preuve du théorème. □

Maintenant on va donner la preuve du Lemme 4.2.7 utilisé dans la démonstration du Théorème 4.2.6 ci-dessus.

Lemme 4.2.7. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné strictement m-pseudoconvexe et $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$ avec Γ qui vérifie la condition de Dini (1.9.3).*

Alors pour tout sous-ensemble de Borel $B \subset \Omega$, il existe une unique fonction $\phi_B \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $\phi_B = 0$ dans $\partial\Omega$ et $(dd^c\phi_B)^m \wedge \beta^{n-m} = \mathbf{1}_B\,\mu$ au sens des courants dans Ω.

De plus $\|\phi_B\|_{C^0(\bar{\Omega})} \to 0$ lorsque $\mu(B) \to 0$.

Preuve. L'existence de ϕ_B découle de [CZ23, Théorème 1]. Il reste à démontrer la deuxième partie du lemme.

Nous allons faire un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite d'ensembles de Borel $(B_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ dans Ω telle que $\mu(B_j) \to 0$ lorsque $j \to +\infty$ et $\|\phi_{B_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \delta_0$, où $\delta_0 > 0$ est une constante uniforme et $\phi_{B_j} \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ vérifie $\phi_{B_j} = 0$ dans $\partial\Omega$ et $(dd^c\phi_{B_j})^m \wedge \beta^{n-m} = \mathbf{1}_{B_j}\,\mu$ sur Ω. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mu(B_j) \leq 2^{-j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Supposons d'abord que $(B_j)_j$ est une suite décroissante et posons $B := \cap_j B_j$. Alors $\mu(B) = 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{1}_{B_{j+1}}\mu \leq \mathbf{1}_{B_j}\mu$ sur Ω. Cela implique que

$$(dd^c\phi_{B_{j+1}})^m \wedge \beta^{n-m} \leq (dd^c\phi_{B_j})^m \wedge \beta^{n-m} \quad \text{dans } \Omega,$$

avec $\phi_{B_{j+1}} = \phi_{B_j}$ dans $\partial\Omega$. D'après le principe de comparaison, $(\phi_{B_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante dans Ω qui converge p.p. vers $\phi \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $\phi_{|\partial\Omega} = 0$.

Puisque l'opérateur Hessien est continu pour la convergence monotone et $\mu(B) = 0$, on en déduit que

$$(dd^c\phi_{B_j})^m \wedge \beta^{n-m} \to (dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m} = \mathbf{1}_B\mu = 0.$$

Puisque $\phi_{|\partial\Omega} = 0$, d'après le principe de comparaison, on a $\phi = 0$ dans Ω.

Maintenant, démontrons que $\|\phi_{B_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ lorsque $j \to +\infty$.

Puisque $\mu \in \mathcal{M}_m(\Omega, \Gamma)$, d'après le résultat de stabilité uniforme faible Théorème 1.9.3, il existe une constante uniforme $C_0 > 0$ telle que

$$\|\phi_{B_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0 h\Big(\|\phi_{B_j}\|^m_{L^m(\Omega,\mu)}\Big), \tag{4.2.13}$$

où $h(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Puisque $(\phi_{B_j})_j \nearrow \phi = 0$ p.p dans Ω, on a $(\sup_j \phi_{B_j})^* = \phi = 0$ dans Ω. Comme $c_m(\{\sup_j \phi_{B_j} < \phi = 0\}) = 0$ (voir [Lu15]) et μ est diffuse par rapport à la capacité c_m, il s'ensuit que $\mu(\{\sup_j \phi_{B_j} < \phi = 0\}) = 0$. Cela implique que $(\phi_{B_j})_j \nearrow 0$ μ-p.p dans Ω lorsque $j \to +\infty$. Par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, le terme de droite dans (4.2.13) converge vers 0 lorsque $j \to +\infty$. Donc $\|\phi_{B_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ lorsque $j \to +\infty$ et cela contredit le fait que $\|\phi_{B_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \delta_0$.

Le cas général se déduit facilement du premier cas en posant pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A_j := \bigcup_{k\geq j} B_k$. Alors $(A_j)_j$ est une suite décroissante d'ensembles de Borel qui décroît vers un ensemble de Borel A. D'après la sous-additivité, on a $\mu(A_j) \leq 2^{-j+1}$. De plus puisque $B_j \subset A_j$, on déduit du principe de comparaison que $\phi_{A_j} \leq \phi_{B_j} \leq 0$ dans Ω. Donc $\|\phi_{A_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \|\phi_{B_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \delta_0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. En appliquant le raisonnement précédent avec A_j à la place de B_j, on obtient une contradiction. $\square$

4.3 Le problème des valeurs propres

4.3.1 L'approche variationnelle : Preuve du Théorème 4.1.1

Dans cette section, nous utilisons une méthode variationnelle pour résoudre le problème des valeurs propres de l'opérateur Hessien complexe (4.1.6).

Preuve. On a déjà montré dans le Théoème 4.2.6 que $\mathcal{E}^1_m(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega, \mu)$.

Puisque que Ω est m-hyperconvexe, remarquons d'abord qu'il admet une fonction d'exhaustion continue négative m-sousharmonique ρ telle que $\int_\Omega (dd^c\rho)^m \wedge \beta^{n-m} < +\infty$.

En effet, soit $\Omega_0 \Subset \Omega$ sous-domaine fixé et posons $K := \bar{\Omega}_0$. Donc $0 < c_m(K) < +\infty$ et d'après le Lemme 1.8.3, la fonction $\rho := h_K$ définie par la formule (1.8.4) est une fonction exhaustion pour Ω.

Alors $\rho \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et tout $w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ tel que $w < 0$ vérifie $\int_\Omega (-w)^{m+1} d\mu > 0$. En effet, puisque $\mu(\Omega) > 0$ il existe un ensemble compact $K \Subset \Omega$ tel que $\mu(K) := \int_K d\mu > 0$. Donc $\int_\Omega (-w)^{m+1} d\mu \geq (-\max_K w)^{m+1}\mu(K) > 0$. Alors λ_1 est un nombre réel positif bien défini et par homogénéité, on a

$$\lambda_1^m = \inf\{E_m(w)\,;\, w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega),\, I_m(w) = 1\}, \tag{4.3.1}$$

où l'on pose $I_m(\phi) = (m+1)^{-1} \int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu$.

De plus, d'après le Lemme 4.2.1, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$

$$I_m(w) \leq A\, E_m(w).$$

En particulier, on a $\lambda_1^m \geq A^{-1} > 0$.

Par ailleurs, il existe par définition une suite minimisante $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $I_m(w_j) = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{j\to+\infty} E_m(w_j) = \lambda_1^m.$$

Par construction, la suite $(E_m(w_j))_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée. En appliquant le Lemme 4.2.1 à la mesure de Lebesgue λ_{2n}, on voit que la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{m+1}(\Omega, \lambda_{2n})$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (w_j) converge faiblement vers $w \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ et p.p. dans Ω (par rapport à la mesure de Lebesgue). Donc (w_j) converge vers w dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Par semi-continuité inférieure de la fonctionnelle d'énergie, il s'ensuit que $w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et

$$E_m(w) \leq \liminf_{j\to+\infty} E_m(w_j) = \lambda_1^m.$$

Puisque $\sup_j E_m(w_j) =: C < +\infty$, d'après le Lemme 4.2.1 que

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (-w_j)^{m+1} d\mu = \int_\Omega (-w)^{m+1} d\mu. \tag{4.3.2}$$

Donc $I_m(w) = 1$ et $w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ est une fonction « extrémale » pour le problème des valeurs propres, c'est-à-dire

$$\lambda_1^m = \frac{E_m(w)}{I_m(w)}.$$

Puisque $I_m(w) = 1$, il s'ensuit que $u_1 := w \not\equiv 0$ dans Ω. Pour prouver que (λ_1, u_1) est une solution du problème des valeurs propres, considérons la fonctionnelle suivante, définie pour $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$, par la formule

$$\Phi_m(\phi) := E_m(\phi) - \lambda_1^m I_m(\phi).$$

Remarquons que lorsque ϕ est lisse alors

$$\Phi'_m(\phi) = -(dd^c\phi)^m \wedge \beta^{n-m} + \lambda_1^m(-\phi)^m\mu.$$

Cela signifie que l'équation (†) est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle Φ_m sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$. Il suffit donc de minimiser la fonctionnelle Φ_m sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$.

Comme on l'a observé précédemment, pour tout $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ avec $\phi \not\equiv 0$, on a $I_m(\phi) > 0$ et donc par définition de λ_1,

$$\Phi_m(\phi) := I_m(\phi)\left(\frac{E_m(\phi)}{I_m(\phi)} - \lambda_1^m\right) \geq 0.$$

Puisque $\Phi_m(u_1) = 0$, cela signifie que le minimum sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ de la fonctionnelle Φ_m est atteint en u_1. Donc u_1 est une sorte de "point critique" de la fonctionnelle Φ_m. Pour prouver cette affirmation, nous allons utiliser un argument délicat qui remonte à [BBGZ13].

Pour une "fonction test" $\psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ fixée, considérons le chemin $\phi_t = u_1 + t\psi$ qui appartient à $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ pour $0 \leq t \leq 1$, car $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ est un cône positif convexe. Cependant lorsque $t < 0$, ce n'est plus le cas, et on considère donc son enveloppe m-sousharmonique $\tilde{\phi}_t := P_m(\phi_t)$ dans Ω définie par la formule

$$P_m(\phi_t) := \sup\{v \in \mathcal{E}_m^1(\Omega) \,|\, v \leq \phi_t\}.$$

Puisque $u_1 \leq \phi_t$ lorsque $t < 0$, il s'ensuit que $u_1 \leq P_m(\phi_t)$ pour $t < 0$, donc $\tilde{\phi}_t \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ pour tout $t \in [-1, +1]$ (voir [Ceg98, Lu15]).

Maintenant considérons la fonction d'une variable définie pour $t \in [-1, +1]$ par

$$h(t) := E_m \circ P_m(\phi_t) - \lambda_1^m I_m(\phi_t).$$

Nous affirmons que la fonction h est dérivable sur $[-1, +1]$, positive et atteint son minimum au point $t = 0$. En effet, observons d'abord que $h(0) = 0$. De plus, puisqu'on a pour tout $t \in [-1, 1]$, $\tilde{\phi}_t \leq \phi_t < 0$ dans Ω, il s'ensuit que $I_m(\phi_t) \leq I_m(\tilde{\phi}_t)$. Alors

$$h(t) \geq E_m(\tilde{\phi}_t) - \lambda_1^m I_m(\tilde{\phi}_t) = \Phi(\tilde{\phi}_t) \geq 0,$$

pour tout $t \in [-1, 1]$, ce qui prouve notre affirmation.

D'après le Lemme 1.8.4, on a ϕ_t,

$$\frac{d}{dt}(E_m \circ P_m)(\phi_t) = \int_\Omega (-\dot{\phi}_t)(dd^c P_m(\phi_t))^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Donc h est dérivable dans $[-1,+1]$ et d'après le Lemme 1.8.4, on a pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{d}{dt} E_m(\tilde{\phi}_t) - \lambda_1^m \frac{d}{dt} I_m(\phi_t) \\ &= \int_\Omega (-\dot{\phi}_t)(dd^c\tilde{\phi}_t)^m \wedge \beta^{n-m} + \lambda_1^m \int_\Omega \dot{\phi}_t(-\phi_t)^m d\mu. \end{aligned}$$

Puisque h atteint son minimum sur $[-1,1]$ au point 0, il s'ensuit que $h'(0) = 0$, ce qui implique l'identité suivante :

$$\int_\Omega \psi\,(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = \lambda_1^m \int_\Omega \psi\,(-u)^m d\mu,$$

pour tout $\psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Puisque toute fonction test lisse χ dans Ω peut être écrite sous la forme $\chi = \psi_1 - \psi_2$, où $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ (voir [Lu15, Lemme 3.10]), il s'ensuit que

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = \lambda_1^m (-u)^m \mu,$$

au sens des courants sur Ω.

Maintenant supposons que Ω est strictement m-pseudoconvexe et (m,p) vérifiant les conditions (4.1.8). Pour prouver la continuité Hölder, observons que $(dd^c u_1)^m \wedge \beta^{n-m} = (-\lambda_1 u_1)^m g \beta^n$ a une densité $g_1 := (-\lambda_1 u_1)^m g$ et d'après le lemme 4.3.1 ci-dessous, on a $g_1 \in L^r(\Omega)$ avec $r > n/m$.

D'après [Ch16b], il existe $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} = g_1 \beta^n \text{ dans } \Omega \text{ et } v \equiv 0 \text{ dans } \partial\Omega.$$

Maintenant nous avons deux solutions $v, u_1 \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ de l'équation Hessienne complexe

$$(dd^c \phi)^m \wedge \beta^{n-m} = g_1 \beta^n.$$

Par unicité dans $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$, on a $v = u_1$, donc $u_1 \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ et $u_1 \equiv 0$ dans $\partial\Omega$ (voir [Lu15, Théorème 1.1]). $\square$

Démontrons le Lemme 4.3.1 utilisé dans la preuve du Théorème 4.1.1 ci-dessus.

Lemme 4.3.1. *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine m-hyperconvexe, $0 \leq g \in L^p(\Omega)$ avec (m,p) vérifiant les conditions suivantes :*

(4.3.3) $$(n-1)/2 < m \leq n \quad et \quad p > p^*(m,n),$$

où $p^*(m,n) \geq n/m$ est donnée par la formule (4.3.7) ci-dessous.

Alors il existe un exposant r qui dépend seulement de p, m et de n, telle que $n/m < r < p$ et pour tout $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$, $g_\phi := (-\phi)^m g \in L^r(\Omega)$.

Preuve. Fixons $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ et $r > 1$ tels que $1 < r < p$ et posons $s = p/r > 1$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g_\phi^r \beta^n &= \int_\Omega (-\phi)^{mr} g^r \beta^n \\
&\leq \left(\int_\Omega g^{rs}\beta^n\right)^{1/s} \left(\int_\Omega (-\phi)^{mrs'}\beta^n\right)^{1/s'} \\
&\leq \|g\|_{L^p(\Omega)}^{p/s} \left(\int_\Omega (-\phi)^{\tau}\beta^n\right)^{1/s'}
\end{aligned}$$

où $s' := s/(s-1)$ et $\tau = \tau(r,p,m) := mrs' = mrs/(s-1)$. Puisque $s = p/r$, on a $\tau(r,p,m) = mrp/(p-r)$.

D'après cette inégalité, on voit que $g_\phi \in L^r(\Omega)$ si $\phi \in L^\tau(\Omega)$. D'après le Corollaire 4.2.5, appliqué à la mesure de Lebesgue, $\phi \in L^\tau(\Omega)$ si on a la condition suivante

$$\tau = \tau(r,p,m) = \frac{mrp}{p-r} < \frac{n(m+1)(p-1)}{p(n-m)}. \tag{4.3.4}$$

Observons que si $m = n$, cette condition est toujours satisfaite pour tout exposant $r \in]n/m, p[$.

Supposons que $m < n$. Nous voulons trouver une condition sur (m,n,p) telle que la condition (4.3.4) soit satisfaite par un exposant $r \in]n/m, p[$.

Observons que la fonction τ est décroissante par rapport à p et le terme $\frac{n(m+1)(p-1)}{p(n-m)}$ est inférieur à $\frac{n(m+1)}{n-m}$. Par conséquent, une condition nécessaire pour que (4.3.4) soit valable avec $r > n/m$ est que $mr < (m+1)n/(n-m)$ et le nombre réel

$$\ell = \ell(m,n) := (m+1)/(n-m) > 1, \tag{4.3.5}$$

ce qui signifie que $m > (n-1)/2$.

Supposons maintenant que cette condition soit vraie pour $\ell > 1$ et observons que la fonction τ est croissante par rapport à r. Alors, par continuité, il existe $r \in]n/m, p[$ de sorte que (4.3.4) soit vrai si et seulement s'il est vrai pour $r = n/m$, c'est-à-dire

$$\tau(n/m, p, m) < \frac{\ell n(p-1)}{p}. \tag{4.3.6}$$

L'inégalité (4.3.6) est équivalente à

$$m(\ell-1)p^2 - \ell(n+m)p + \ell n > 0.$$

Il s'agit d'un polynôme quadratique en p dont le discriminant est positif. Il a donc deux zéros $p_* < p^*$ pour qu'il soit positif lorsque $p > p^*$, où

$$p^* = p^*(m,n) := \frac{\ell(n+m) + \sqrt{\Delta}}{2m(\ell-1)}, \text{ et } \Delta := \ell^2(n-m)^2 + 4\ell mn. \tag{4.3.7}$$

Il est facile de vérifier que $p^* > n/m$, ce qui prouve le lemme.

Observons que si $m \to n$ alors $\ell \to \infty$ et $p^*(m,n) \to 1$.

$\square$

4.3.2 La propriété de monotonie de $\lambda_1(\Omega)$

Soient $\Omega' \Subset \Omega \Subset \mathbb{C}^n$ deux domaines bornés m-hyperconvexes et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \gamma)$. Alors on a le théorème de comparaison suivant :

Théorème 4.3.2. *Soit $\mu' := \mathbf{1}_{\Omega'}\mu$, la restriction de μ sur Ω'. Alors on a*

$$\lambda_1(\Omega, \mu) \leq \lambda_1(\Omega', \mu').$$

Ce résultat a été démontré dans le chapitre 3, (voir aussi [BaZe23a]) pour les valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe lorsque $\mu := gdV$ avec $g \in L^p(\Omega)$ $(p > 1)$.

Preuve. On note $E_\Omega(u) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega(-u)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ pour $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et $I_{\Omega,\mu}(u) := \frac{1}{m+1}\int_\Omega(-u)^{m+1}d\mu$.

D'après le Théorème 4.1.1 pour (Ω', μ'), il existe $w' \in \mathcal{E}^1_m(\Omega')$ tel que

$$\lambda_1(\Omega', \mu') = \frac{E_{\Omega'}(w')}{I_{\Omega',\mu'}(w')}.$$

Alors en utilisant le théorème de sous-extension (voir [CKZ11] pour $m = n$), on montre qu'il existe $w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ tel que $w \leq w'$ dans Ω' et $E_\Omega(w) \leq E_{\Omega'}(w')$. Puisque $w \leq w'$ dans Ω', il s'ensuit que $I_{\Omega',\mu'}(w') \leq I_{\Omega,\mu}(w)$. Donc

$$\frac{E_{\Omega'}(w')}{I_{\Omega',\mu'}(w')} \geq \frac{E_\Omega(w)}{I_{\Omega,\mu}(w)}.$$

Ainsi, d'après le Théorème 4.1.1 pour (Ω, μ), on a bien $\lambda_1(\Omega', \mu') \geq \lambda_1(\Omega, \mu)$. $\square$

4.4 Une approche variationnelle pour des équations plus générales

4.4.1 Un problème de Dirichlet plus général

Considérons le problème de Dirichlet plus général suivant

$$\begin{cases} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = G(\cdot, u)\mu & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \\ u < 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.4.1}$$

où $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est un domaine borné, $G : \Omega\times]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction borélienne donnée, μ une mesure de Borel positive vérifiant certaines conditions sur Ω et $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

On définit $H : \Omega \times \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+$ comme suit

$$H(z, t) := \int_t^0 G(z, s)ds,$$

pour $(z, t) \in \Omega\times]-\infty, 0]$.

Considérons les hypothèses suivantes :

- $(H0)$ Ω est un domaine borné m-hyperconvexe et μ est une mesure de Borel positive sur Ω telle que (Ω,μ) est fortement Γ-diffuse au sens de la définition 1.9.1.
- $(H1)$ pour μ-p.p. $z\in\Omega$, la fonction $t\longmapsto G(z,t)$ est continue sur $]-\infty,0]$;
- $(H2)$ il existe $\theta_1<\lambda_1^m/(m+1)$ tel que

$$\limsup_{t\to-\infty}\frac{(\sup_{z\in\Omega}H(z,t))}{|t|^{m+1}}<\theta_1<\lambda_1^m/(m+1),$$

- $(H3)$ Si $G(z,0)\equiv 0$ dans Ω, il existe $\theta_2>\lambda_1^m/(m+1)$ tel que

$$\liminf_{t\to0^-}\frac{H(z,t)}{|t|^{m+1}}>\theta_2>\lambda_1^m/(m+1),$$

  pour μ-p.p. $z\in\Omega$.

Ici $\lambda_1:=\lambda_1(\Omega,\mu)$ est la première valeur propre de l'opérateur Hessien complexe défini par la formule 4.1.6.

On définit la fonctionnelle correspondante sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ par la formule

$$\Phi_{G,\mu}(\phi):=E_m(\phi)-\int_\Omega H(z,\phi(z))d\mu(z),\ \ \phi\in\mathcal{E}_m^1(\Omega).$$

Formellement l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est précisément l'équation Hessienne

$$(dd^cu)^m\wedge\beta^{n-m}=G(\cdot,u)\mu$$

du problème (4.4.1) comme nous allons le voir.

Nous allons utiliser une méthode variationnelle pour démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.4.1. *Supposons que (Ω,μ,G) vérifie les hypothèses (H_0), $(H1)$ et $(H2)$ sur Ω. Alors la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ a les propriétés suivantes :*

1) la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est bien définie et coercive sur $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$ et atteint son minimum en une fonction $\varphi\in\mathcal{E}_m^1(\Omega,C)$, pour un certain $C>0$ suffisamment grand ;

2) la fonction φ est un point critique de la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$, donc c'est une solution de l'équation Hessienne c'est-à-dire

$$(dd^c\varphi)^m\wedge\beta^{n-m}=G(\cdot,\varphi)\,\mu,$$

au sens des mesures sur Ω ;

3) Si de plus Ω est strictement m-pseudoconvexe, G est à croissance polynomiale de degré m et $\mu=g\beta^n$ avec $g\in L^p(\Omega)$, où (p,m) vérifie les conditions (4.1.8), alors $\varphi\in\mathcal{C}^\alpha(\bar\Omega)$ pour un certain $\alpha\in]0,1[$ et φ est une solution du problème de Dirichlet (4.4.1).

4)Si $G(z,0)\equiv0$ dans Ω et G vérifie $(H3)$, φ est une solution non triviale c'est-à-dire $\varphi<0$ dans Ω.

Ici G est à croissance polynomiale de degré m signifie qu'il existe une constante $M_0>0$ telle que pour μ-p.p. $z\in\Omega$ et tout $t<0$, on a

$$G(z,t)\le M_0|t|^m.$$

Pour commencer, on démontre d'abord le lemme suivant que l'on utilisera dans la preuve du Théorème 4.4.1.

Lemme 4.4.2. *Supposons que G vérifie les hypothèses $(H0)$, $(H1)$ et $(H2)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(1) la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est bien définie sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et est semi-continue inférieurement sur chaque ensemble

$$\mathcal{E}^1_m(\Omega, C) := \{\phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)\,;\, 0 \leq E_m(\phi) \leq C\},$$

avec $C > 0$;

(2) la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est coercive sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $\epsilon_0 > 0$ et $C_0 > 0$ telles que pour tout $\phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$,

$$\Phi_{G,\mu}(\phi) \geq \epsilon_0 \, E_m(\phi) - C_0. \tag{4.4.2}$$

En particulier $\Phi_{G,\mu}$ est minoré.

Preuve. 1) D'après le Lemme 1.8.4, on sait déjà que E_m est bien défini et semi-continu inférieurement sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$. Il reste à prouver que la fonctionnelle définie par

$$L_{H,\mu}(\phi) := \int_\Omega H(z, \phi(z)) d\mu(z)$$

est bien défini sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et semi-continu supérieurement sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega, C)$. Montrons d'abord que $L := L_{H,\mu}$ est bien défini sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$. En effet la condition $(H2)$ implique qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$H(z, t) \leq M(-t)^{m+1}, \tag{4.4.3}$$

pour tout $t < 0$ et μ-p.p. $z \in \Omega$.

Puisque $\mathcal{E}^1_m(\Omega) \subset L^{m+1}(\Omega, \mu)$, il s'ensuit que la fonctionnelle $L_{H,\mu}$ est bien définie sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

Montrons maintenant que $L_{H,\mu}$ est continue sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega, C)$ pour la topologie $L^1_{loc}(\Omega)$. En effet soit (ϕ_j) une suite de $\mathcal{E}^1_m(\Omega, C)$ qui converge vers $\phi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega, C)$ pour la topologie $L^1_{loc}(\Omega)$. D'après le Théorème 4.2.6, la suite (ϕ_j) converge vers ϕ dans $L^{m+1}(\Omega, \mu)$. Nous voulons montrer que

$$\lim_{j \to +\infty} L_{H,\mu}(\phi_j) = L_{H,\mu}(\phi).$$

En effet, (ϕ_j) est une suite de Cauchy dans $L^{m+1}(\Omega, \mu)$ et alors il admet une sous-suite (ϕ'_j) telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\|\phi'_{j+1} - \phi'_j\|_{L^{m+1}(\Omega,\mu)} \leq 2^{-j}.$$

Par conséquent $F := |\phi'_0| + \sum_{j=0}^{+\infty} |\phi'_{j+1} - \phi'_j| \in L^{m+1}(\Omega, \mu)$ et on a $|\phi'_j| \leq F$ μ-p.p. dans Ω, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Donc en appliquant (4.4.3), on voit que $H(z, \phi'_j(z)) \leq M(-\phi'_j(z))^m \leq MF(z)^{m+1}$ pour μ-p.p. $z \in \Omega$ et tout $j \in \mathbb{N}$. Alors d'après le théorème de convergence de Lebesgue et la continuité de H par rapport t, on montre que

$$\lim_{j \to +\infty} L_{H,\mu}(\phi'_j) = L_{H,\mu}(\phi).$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, on voit que toute sous-suite de (ϕ_j) vérifie la même propriété c'est-à-dire que la suite $(L_{H,\mu}(\phi_j))$ admet une unique limite égale à $L_{H,\mu}(\phi)$. Cela prouve l'énoncé requis.

2) Pour prouver la coercivité, remarquons que la condition $(H2)$ implique que $0 < \theta_1 < \lambda_1^m/(m+1) =: \theta$ et $H(z,t) \leq \theta_1 |t|^{m+1}$ pour μ-p.p. $z \in \Omega$ et tout $t \leq t_0$, pour un certain $t_0 < 0$.

Observons qu'aussi H est décroissante par rapport à la seconde variable puisque $\partial_t H = -G \leq 0$. Donc pour tout $\phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\Phi_{G,\mu}(\phi) &\geq E_m(\phi) - \theta_1 \int_{\{\phi<t_0\}} (-\phi)^{m+1} d\mu - \int_\Omega H(z,t_0) d\mu(z)\\ &\geq E_m(\phi) - \theta_1 \int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu - C_0,\end{aligned}$$

où $C_0 := \int_\Omega H(z,t_0) d\mu(z)$.

D'autre part, d'après la définition de λ_1, on a

$$E_m(\phi) \geq \lambda_1^m/(m+1) \int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu = \theta \int_\Omega (-\phi)^{m+1} d\mu.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Phi_{G,\mu}(\phi) &\geq E_m(\phi) - (\theta_1/\theta) E_m(\phi) - C_0\\ &\geq (1-\theta_1/\theta) E_m(\phi) - C_0,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'estimée (4.4.2), en posant $\epsilon_0 := (1-\theta_1/\theta) > 0$.

□

Nous pouvons maintenant donner la preuve du Théorème 4.4.1.

Preuve. Observons que d'après (4.4.2), la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est minorée et

$$\lim_{E_m(\varphi)\to+\infty} \Phi_{G,\mu}(\phi) = +\infty.$$

Il existe alors une constante $C > 1$ telle que

$$\inf\{\Phi_{G,\mu}(\phi)\,;\, \phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)\} = \inf\{\Phi_{G,\mu}(\phi)\,;\, \phi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega, C)\}.$$

Puisque la fonctionnelle $\Phi_{G,\mu}$ est semi-continue inférieurement sur l'ensemble compact $\mathcal{E}_m^1(\Omega, C)$, elle atteint son minimum en un certain $\varphi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega, C)$.

Du coup, comme dans la preuve du Théorème 4.1.1, on en déduit que φ est un point critique de $\Phi_{G,\mu}$ c'est-à-dire que φ est une solution l'équation

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = G(\cdot, u)\mu,$$

du problème (4.4.1).

Montrons que lorsque $G(z,0) \equiv 0$ dans Ω, la condition $(H3)$ implique que $\varphi \not\equiv 0$ dans Ω. Plus précisément nous allons montrer que la condition $(H3)$ implique que l'infimum de $\Phi_{G,\mu}$ est strictement négatif.

En effet, soit u une solution non triviale du problème des valeurs propres (4.1.1), ce qui implique que $E(u) = \theta \int_\Omega (-u)^{m+1} d\mu$.

D'après $(H3)$, il existe $\theta_2 > 0$ tel que $\liminf_{t\to 0^-} \frac{H(z,t)}{|t|^{m+1}} > \theta_2 > \theta$ pour μ-p.p. $z \in \Omega$. Donc pour tout $t < 0$, on a

$$\begin{aligned} \Phi_{G,\mu}(tu) &= (-t)^{m+1}E_m(u) - \int_\Omega H(z,tu(z))d\mu(z) \\ &= \theta(-t)^{m+1}\int_\Omega (-u)^{m+1}d\mu - \int_\Omega H(z,tu(z))d\mu(z). \end{aligned}$$

Remarquons que pour $t < 0$, on a

$$\int_\Omega H(z,tu)d\mu = \int_\Omega \theta(tu)^{m+1}(H(z,tu)/\theta(tu)^{m+1})d\mu(z),$$

donc

$$\Phi_{G,\mu}(tu) = \theta(-t)^{m+1}\int_\Omega (-u)^{m+1}(1-h(z,t))d\mu(z),$$

où

$$h(z,t) := (H(z,tu(z))/\theta(tu(z))^{m+1})$$

est une fonction uniformément bornée sur Ω d'après (4.4.3) et vérifie $\lim_{t\to 0^-} h(z,t) \geq \theta_2/\theta > 1$ pour μ-p.p. $z \in \Omega$.

D'après le lemme de Fatou, on a

$$\limsup_{t\to 0^-} (-t)^{-m-1}\Phi_{G,\mu}(tu) \leq (\theta-\theta_2)\int_\Omega (-u)^{m+1}d\mu < 0,$$

puisque $\theta_2 > \theta$. Cela implique que pour $t < 0$ suffisamment petit, $\Phi_{G,\mu}(tu) < 0$, donc $\Phi_{G,\mu}(\varphi) = \inf \Phi_{G,\mu} < 0$. Ce qui prouve que $\varphi \not\equiv 0$ dans Ω.

Pour prover que φ est Hölder continue et $\varphi \equiv 0$ dans $\partial\Omega$ sous les hypothèses du point 3) de l'énoncé, nous utilisons le même argument que dans la preuve du Théorème 4.1.1 basé sur le Lemme 4.3.1.

□

4.4.2 Preuve du théorème 4.1.2

Ici, nous allons appliquer le Théorème 4.4.1 pour prouver le Théorème 4.1.2.

Preuve. On veut appliquer le Théorème 4.4.1 avec $G(z,t) = f(z,t)^m$ pour $(z,t) \in \Omega\times]-\infty,0]$.

L'hypothèse $(H1)$ est clairement satisfaite. Montrons que $(H2)$ est satisfaite. En effet, puisque $\partial_t f(z,t) \geq -\lambda_0$, il s'ensuit que pour μ-p.p. $z \in \Omega$ et $t < 0$,

$$f(z,t) = \int_0^t \partial_t f(z,s)ds \leq f(z,0) - \lambda_0 t.$$

Donc pour μ-p.p. $z \in \Omega$ et $t < 0$,

$$G(z,t) = f(z,t)^m \leq (M_0 - \lambda_0 t)^m,$$

où $M_0 := \|f(\cdot,0)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Donc pour μ-p.p. $z \in \Omega$ et $t < 0$,

$$H(z,t) = \int_t^0 G(z,s)ds \leq \frac{1}{\lambda_0(m+1)}(M_0 - \lambda_0 t)^{m+1}.$$

On en déduit l'hypothèse $(H2)$ puisque $\lambda_0 < \lambda_1$. Par conséquent, le théorème découle du Théorème 4.4.1. $\square$

4.4.3 Applications

On a comme conséquence les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.4.3. *Supposons que (Ω, μ) vérifie l'hypothèse $(H0)$. Alors pour tout nombre réel $0 < \lambda < \lambda_1 = \lambda_1(m, \Omega, \mu)$, l'équation Hessienne*

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (1 - \lambda u)^m \mu, \tag{4.4.4}$$

admet une solution $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

Si de plus Ω est strictement m-pseudoconvexe et $\mu = g\beta^n$ avec $g \in L^p(\Omega)$, où (m,p) vérifie les conditions (4.1.8), alors $u \in \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$ et $u \mid_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Preuve. En appliquant le Théorème 4.4.1 avec $G(z,t) = (1-\lambda t)^m$ pour $(z \in \Omega$ et $t \leq 0)$, on a

$$H(z,t) = (1-\lambda t)^{m+1}/(\lambda(m+1)),\ (z,t) \in \Omega \times]-\infty, 0].$$

Il est clair que les conditions (H_1) et $(H2)$ sont satisfaites pour tout $\lambda < \lambda_1$. $\square$

Corollaire 4.4.4. *Supposons que (Ω, μ) vérifie l'hypothèse $(H0)$ et fixons $0 < k < m$, $a \geq 0$ et $\lambda > 0$. Alors l'équation Hessienne*

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (a - \lambda u)^k \mu,$$

admet une solution non triviale $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

Si de plus Ω est strictement m-pseudoconvexe et $\mu = g\beta^n$ avec $g \in L^p(\Omega)$, où (m,p) vérifie les conditions (4.1.8), alors $u \in \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$ et $u \mid_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Preuve. En appliquant encore le Théorème 4.4.1 avec $G(z,t) = (a-\lambda t)^k$ pour $(z,t) \in \Omega \times]-\infty, 0]$, on a

$$H(z,t) = (a-\lambda t)^{k+1}/(\lambda(k+1)), (z,t) \in \Omega \times]-\infty, 0].$$

On voit de même que les conditions (H_1), $(H2)$ et $(H3)$ sont satisfaites puisque $0 < k < m$. $\square$

4.5 Questions ouvertes

Problème 1 : La valeur propre du Théorème 4.1.1 est-elle simple, c'est-à-dire que la fonction propre associée est-elle unique à une constante multiplicative positive près ?

Problème 2 : Dans le cas général, lorsque $m < n$ et $\mu = g\beta^n$, où $g \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/m$, la fonction propre du Théorème 4.1.1 est-elle bornée, continue ou Hölder continue dans $\bar{\Omega}$? La même question peut être posée pour la solution donnée par le Théorème 4.4.1 et ses corollaires.

Problème 3 : La solution donnée par le Corollaire 4.4.3 est-elle unique ?

Problème 4 : La solution donnée par le Corollaire 4.4.4 est-elle unique ?

Lorsque $\mu := g\beta^n$ avec $0 < g \in C^\infty(\bar{\Omega})$, il découle du Théorème 3.1.1 et de la Proposition 3.2.2 que la réponse à la première et à la deuxième question est positive lorsque $m = n$. Nous conjecturons que cela reste vrai en toute généralité.

Bibliographie

[AC20] P. Åhag, R. Czyż : *Poincaré and Sobolev-Type Inequalities for Complex m-Hessian Equations.* Results Math (2020), 75-63.

[ACC12] P. Åhag, U. Cegrell, R. Czyż : *On Dirichlet's principle and problem.* Math. Scand. 110 (2), 235-250 (2012).

[ACH18] P. Åhag, R. Czyż, L. Hed : *The geometry of m-hyperconvex domains.* J. Geom. Anal. 28 (2018), no. 4, 3196–3222.

[BaZe23a] P. Badiane, A. Zeriahi : *The eigenvalue problem for the complex Monge-Ampère operator.* J. Geom. Anal. 33 (2023), no. 12, 367.

[BaZe23b] P. Badiane, A. Zeriahi : *A variational approach to the eigenvalue problem for complex Hessian operators.* arXiv:2306.04437v2 to appear in NLAGA-BIRS (2023).

[BT76] E. Bedford and B. A. Taylor : *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation. Invent. Math.,* 37(1)(1976), 1-44.

[BT82] E. Bedford and B. A. Taylor : *A new capacity for plurisubharmonic functions. Acta Math.,* 149(1-2)(1982), 1-40.

[BT87] E. Bedford and B. A. Taylor : *Fine topology, ilov boundary, and $(dd^c)^n$.* J. Funct. Anal., 72(2)(1987), 225-251.

[BeZe20] A. Benali, A. Zeriahi : *The Hölder continuous subsolution theorem for complex Hessian equations.* J. Éc. polytech. Math. 7 (2020), 981–1007.

[BJZ05] S. Benelkourchi, B. Jennane, A. Zeriahi : *Polya's inequalities, global uniform integrability and the size of plurisubharmonic lemniscates.* Ark. Mat. 43(1)(2005), 85-112.

[BNV94] H. Berestycki, L. Nirenberg, S.R.S. Varadhan : *The first eigenvalue and maximum principle for second order elliptic differential operators in general domains.* Comm. Pure Appl. Math. 47 (1), 47-92 (1994).

[BBGZ13] R. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, A. Zeriahi : *A variational approach to complex Monge-Ampère equations.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 117, 179-245 (2013).

[Bl93] Z. Blocki : *Estimates for the complex Monge-Ampère operator.* Bulletin of the Polish Academy of Sciences 41, 151-157 (1993).

[Bl05] Z. Błocki : *Weak solutions to the complex Hessian equation.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55(5), (2005) 1735-1756.

[CKNS85] L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg, J. Spruck : *The Dirichlet problem for non-linear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic, equations.* Comm. Pure Appl. Math. 38 (2), 209-252 (1985).

[CNS84] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck : *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère.* Comm. Pure Appl. Math. 37, 369-402 (1984).

[Ceg84] U. Cegrell : *On the Dirichlet Problem for the Complex Monge-Ampère Operator.* Math.Z. 185, 247-251(1984).

[Ceg98] U. Cegrell : *Pluricomplex energy.* Acta Math. 180 (2), 187-217 (1998).

[CKZ11] U. Cegrell, S. Kolodziej, A. Zeriahi : *Maximal subextensions of plurisubharmonic functions.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 20 (6), 101–122 (2011).

[Ch15] M. Charabati : *Hölder regularity for solutions to complex Monge-Ampère equations.* Ann. Polon. Math. 113 (2), 109-127 (2015).

[Ch16a] M. Charabati : *Le problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère complexe.* Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse (UT3 Paul-Sabatier), 2016.

[Ch16b] M. Charabati : *Modulus of continuity of solutions to complex Hessian equations*. Internat. J. Math. 27 (2016), no. 1, 24 pp.

[CZ23] M. Charabati, A. Zeriahi : *The continuous subsolution theorem for complex Hessian equations.* Preprint arXiv:2007.10194 (to appear in IUMJ).

[CKZ05] U. Cegrell, S. Kolodziej, A. Zeriahi : *Subextension of plurisubharmonic functions with weak singularities*. Math. Zeit. 250, 7-22 (2005).

[De87] J.-P. Demailly : *Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques*, Math. Z. 194 (4) (1987), 519-564.

[De89] J.-P. Demailly : *Potential theory in several complex variables*, Lecture notes, ICPAM, Nice, 1989.

[Din09] S. Dinew : *An inequality for mixed Monge-Ampère measures.* Math. Z. 262, 1-15 (2009).

[DK14] S. Dinew, S. Kołdziej : *A priori estimates for the complex Hessian equation.* Anal. PDE 7 (2014), no. 1, 227-244.

[DZZ11] S. Dinew, X. Zhang, X.W. Zhang : *The $C^{2,\alpha}$ estimate of complex Monge-Ampère equation*. IUMJ, 60-5 (2011), 1713-1722.

[Eva10] L. C. Evans : *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics 19, Second edition, American Mathematical Society (2010).

[Ga59] L. Gårding : *An inequality for hyperbolic polynomials*, Acta Math. 180(1959) 957-965.

[Gav77] B. Gaveau : *Méthode de contrôle optimal en analyse complexe, I.* J. Funct. Anal. 25, 391-411 (1977).

[GT98] D. Gilbarg and N. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (2nd edn.)*. Grundlehr. der Math. Wiss., Springer, Berlin (1998).

[Guan98] B. Guan : *The Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equations and Regularity of the Pluricomplex Green Function.* Comm. Anal. Geom., 6 (4), 687–703 (1998).

[Guan97] P. Guan : *A priori estimates for degenerate Monge-Ampère equations.* Duke Math. J. 85-2 (1997), 323-346.

[GL10] B. Guan and Q. Li : *Complex Monge-Ampère equations and totally real submanifolds.* Adv. Math. 225, 1185-1223 (2010).

[GKZ08] V. Guedj, S. Koldziej and A. Zeriahi : *Hölder continuous solutions to Monge-Ampère equations.* Bull. Lond. Math. Soc. 40 (6), 1070–1080 (2008).

[GZ07] V. Guedj, A. Zeriahi : *The weighted Monge-Ampère energy of quasi-plurisubharmonic functions.* J. Funct. Anal. 250 (2007), no. 2, 442–482

[GZ17] V. Guedj, A. Zeriahi : *Degenerate complex Monge-Ampère equations.* EMS Tracts in Mathematics, 26. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017.

[Kl81] M. Klimek : *Pluripotential Theory*, London Mathematical Society Monographs, 6, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[Kol96] S. Kołodziej : *Some sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator.* Ann. Pol. Math. 65 (1), p. 11-21 (1996).

[Kol98] S. Kołdziej, *The complex Monge-Ampère equation.* Acta Math. 180 (1998), no. 1, 69–117.

[Kol03] S. Kołodziej : *Equicontinuity of families of plurisubharmonic functions with bounds on their Monge-Ampère masses.* Math. Z. 240 (4), 835-847 (2002).

[Kol05] S. Kołodziej : *The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 178 (2005), no. 840, x+64 pp.

[KR89] N.D. Koutev, I. P. Ramadanov : *Valeurs propres radiales de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.* Bull. Sc. Math. 113 (2), 195-212 (1989).

[KR90] N.D. Koutev, I. P. Ramadanov : *An eigenvalue problem for the complex Monge-Ampère operator in pseudoconvex domains.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 7 (5), 493-503 (1990).

[Lions86] P. L. Lions : *Two remarks on the Monge-Ampère equations.* Ann. Mat. Pura Appl. 142 (4), 263-275 (1986).

[Lu12] C.H. Lu : *Équations Hessiennes Complexes.* Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse (UT3-Paul Sabatier), 2012.

[Lu15] C.H. Lu : *A variational approach to complex Hessian equations in* $\mathbb{C}^n$. J. Math. Anal. Appli. 431 (2015), no. 1, 228-259.

[NP92] R. Nussbaum, Y. Pinchover : *On variational principles for the generalized principal eigenvalue of second order elliptic operators and applications.* Journal d'Analyse Mathématique. 59, 161-177 (1992).

[Po16] S. Pons : *Elliptic PDEs, Measures and Capacities. From the Poisson Equation to Nonlinear Thomas-Fermi Problems.* EMS Tracts in Mathematics, 23 (2016).

[Ru87] W. Rudin : *Real and Complex Analysis,* New York, McGraw-Hill, 1987, 3e éd., 416 p. (ISBN 978-0-07-054234-1, lire en ligne)

[SaAb12] A. Sadullaev, B. Abdullaev : *Potential theory in the class of m-subharmonic functions,* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, 2012, Vol. 279, pp. 166-192.

[SaAb13] A. Sadullaev, B. Abdullaev : *Capacities and Hessians in the class of m-subharmonic functions.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk 448 (2013), no. 5, 515-517 ; translation in Dokl. Math. 87 (2013), no. 1, 88-90.

[Si81] J. Siciak : *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$. Ann. Pol. Math. 39 (1981), 175-211.

[Tso90] K. Tso : *On a real Monge-Ampère functional.* Invent. Math. 101, 425-448 (1990).

[Wang94] X. J. Wang : *A class of fully nonlinear elliptic equations and related functionals.* Indiana Univ. Math. J. 43 (1994) 25-54.

[Wang12] Y. Wang : *On the* $C^{2,\alpha}$ *regularity of the complex Monge–Ampère equation.* Math. Research Letter 19, 939–946 (2012).

[WZ22] J. Wang, B. Zhou : *Trace inequalities, Isocapacitary ineqialities and regularity of the complex Hessian equations*, arXiv:2201.02061v1.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude du problème des valeurs propres de l'opérateur de Monge-Ampère complexe ainsi que celui des valeurs propres de l'opérateur Hessien complexe dans un domaine borné à bord lisse de $\mathbb{C}^n$.

Dans le premier chapitre, on donne les éléments de base dont on aura besoin pour les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, on démontre un nouveau théorème d'existence de solutions pour un cas spécial d'équations de Monge-Ampère complexes dégénérées. Pour cela, on va établir de nouvelles estimées a priori du gradient et du laplacien de telles solutions en utilisant les méthodes et les résultats de L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg et J. Spruck [CKNS85] et de B. Guan [Guan98].

Dans le troisième chapitre, en suivant la stratégie de P. L. Lions [Lions86], on prouve d'une part l'existence de la première valeur propre et d'une fonction propre associée pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe sur un domaine bornée strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. On montre que la fonction propre est plurisousharmonique, lisse de Laplacien borné dans Ω et de valeurs au bord nulle. De plus, elle est unique à une constante multiplicative positive près.

D'autre part, on propose une approche variationnelle pluripotentielle du problème et en utilisant le nouveau théorème d'existence, on démontre une formule de type quotient de Rayleigh pour la première valeur propre de l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Dans le quatrième chapitre, on utilise une approche variationnelle pour prouver l'existence de la première valeur propre et d'une fonction propre associée qui est m-sousharmonique d'énergie finie pour les opérateurs Hessiens complexes généralisées sur un domaine borné m-hyperconvexe Ω de $\mathbb{C}^n$ associés à une mesure de Borel positive μ sur Ω. Sous certaines hypothèses supplémentaires sur la mesure de Borel positive μ, on prouve que cette fonction propre est Hölder continue. De plus, on donne des applications sur la solvabilité d'équations Hessiennes complexes dégénérées plus générales avec un second membre qui dépend de la fonction inconnue.

Mots clés :
Fonction plurisousharmonique, Opérateur de Monge-Ampère complexe, Problème de Dirichlet, Problème des valeurs propres, Valeur propre, Fonction propre, Sous-solution, Sursolution, Estimée a priori, Energie fonctionnelle, Fonction m-sousharmonique, Opérateur Hessien, approche variationnelle, Quotient de Rayleigh.