

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR (UASZ)



U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire

En vue de l'obtention du Master

Domaine : Sciences et Technologies

Mention : Mathématiques et Applications

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Statistique

Titre :

Méthodes d'estimation paramétrique de la distribution de Rayleigh généralisée

Présenté par : **BAMBA SECK**

Sous la direction de : **Dr EMMANUEL NICOLAS CABRAL**

Sous la supervision de : **Pr Alassane DIEDHIOU**

soutenu publiquement le : 29 avril 2023

Devant le jury composé de :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Clément MANGA	Professeur Assimilé	Président	UASZ
Alassane DIEDHIOU	Professeur Titulaire	Superviseur	UASZ
Mor NDONGO	Maître de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Emmanuel N. CABRAL	Maître de Conférences Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2021/2022

Remerciements

Avant tout, le grand et le vrai merci à Allah qui nous a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Nous tenons aussi à exprimer notre reconnaissance envers monsieur Emmanuel Nicolas Cabral pour avoir accepté de nous encadrer dans cette étude. Nous le remercions pour sa disponibilité, son encadrement et ses encouragements tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier vivement le professeur Clément MANGA, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je remercie sincèrement le professeur Alassane DIED-HIOU d'avoir accepté de superviser ce travail. Je remercie également le professeur Mor NDONGO qui a bien accepté d'examiner ce travail.

Nous adressons nos plus sincères remerciements à nos familles pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et économique qui nous ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire, particulièrement à "badiène" Amy Seck.

Je tiens à remercier l'Université Assane Seck, l'UFR des Sciences et Technologies, le Département de Mathématiques ainsi que tout les professeurs qui nous ont initié et donné les bases de l'étude mathématique pour exceller dans ce domaine.

Je remercie également mes amis et camarades de promotion : Fatou Diémé, Alioune Badara Wade, Awa Sané, Malick Sagna, Ibrahima Traoré, Abdoulaye Diouf, Malick Faye, Lamine Mané, ...

Enfin, je tiens à remercier Raymond Diatta et Pathé Bâ, par un petit message, un mail ou une parole m'ont apporté soutien et force.

Dédicaces

Je dédie ce travail.

À la mémoire de mes parents qui nous ont quitté.

À Ndaye Amy Diouf.

À Ngoné Diouf.

À Serigne Fallou Sene.

À Pape Seck.

À Papa Pape Seck.

À mon oncle Aly.

À Papa El-Hadji Seck.

À Tata Amy Seck.

À Tata Codou Seck.

À Tata Aïda et Fama Seck.

À la famille Diatta.

À tout mes voisins de la résidence LAMBAL, plus particulièrement à

mes co-locataires Chérif Mané, Moussa Diaw, Mbaye Diome,

Mbaye Fall pour tout les bons moments partagés ensemble.

À toute la promotion de M.P.I.

À tout mes sœurs et frères en ALLAH.

Résumé

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la distribution de Rayleigh généralisée à deux paramètres α et λ .

Nous nous baserons sur l'estimation paramétrique pour pouvoir estimer les paramètres α et λ .

Récemment, les auteurs Raqab et Kundu (2003) ont considéré cette distribution et ont discuté ces différentes propriétés.

Dans ce travail, nous considérons principalement différents estimateurs et nous comparons leurs performances à travers les simulations de Monte-Carlo.

Mots-clés : Estimateur du maximum de vraisemblance; Estimateur du moment modifié; Matrice d'information de Fisher; Distribution asymptotique; Statistique d'ordre; Estimateur basé sur les percentiles; Estimateur des moindres carrés; Estimateur du L-moment.

Sommaire

Introduction	7
1 Rappels d'outils probabilistes et statistiques	8
1.1 Vecteur aleatoire	8
1.2 Cas du vecteur aleatoire gaussien	8
1.3 Esperance et matrice de variance covariance d'un vecteur aleatoire	9
1.4 Statistiques et qualites de l'estimateur	10
2 Distribution de Rayleigh à deux paramètres	14
2.1 Fonction de répartition	14
2.2 Fonction de densité	15
2.3 Fonction de survie	15
2.4 Fonction de hasard ou fonction de risque	16
2.5 Relations entre les fonctions qui caractérise cette loi	16
3 Méthodes d'estimation paramétrique	18
3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance	18
3.2 Estimateur du moment modifié	24
3.3 Estimateur basé sur les percentiles	26
3.4 Estimateur des moindres carrés et des moindres carrés pondérés	29
3.5 Estimateur du L-moment modifié	30
4 Simulations et Comparaisons	32
4.1 Estimation de α pour λ connu.	33
4.2 Estimation de λ pour α connu.	35
4.3 Estimation de λ et α inconnus.	38
Conclusion	44
Bibliographie	45
Annexes	47

Abréviation

GR : Distribution de Rayleigh généralisée.

MLE : Estimateur du maximum de vraisemblance.

$\mathbb{V}(X)$ ou $\text{Var}(X)$: La variance de la variable aléatoire X .

$\mathbb{E}(X)$: L'espérance de la variable aléatoire X .

\mathcal{N} : Loi gaussienne.

i.i.d : Indépendante identiquement distribuée.

i.e : C'est-à-dire.

v.a : Variable ou vecteur aléatoire.

LGN : Loi des grands nombres.

TCL : Théorème central limite.

MC : Monte-Carlo.

LSE : Estimateur des moindres carrés.

WLSE : Estimateur des moindres carrés pondérés.

IC : Intervalle de confiance.

MME : Estimateur du moment modifié.

PCE : Estimateur basé sur les percentiles.

MLME : Estimateur du L-moment modifié.

GE : Distribution exponentielle généralisée.

EQM : Erreur quadratique moyenne.

UBE : Estimateur sans biais (maximum de vraisemblance).

Introduction

En 1942, Burr a présenté douze formes différentes de fonctions de distribution cumulative pour modéliser les données de durée de vie. Parmi ces distributions, Burr de type X et Burr de type XII sont les plus populaires.

Récemment, Surlés et Padgett dans [25] ont introduit la distribution de Burr de type X à deux paramètres et correctement nommée distribution de Rayleigh généralisée. Il convient de noter que la distribution de Rayleigh généralisée à deux paramètres est un membre particulier de la distribution de Weibull généralisée, proposée à l'origine par Mudholkar et Srivastava dans [15], qui est très utilisée dans le domaine industriel (par exemple la fiabilité), pour décrire des bruits de mesure dans des récepteurs de transmission, des instants de dégradation de matériel, des durées d'appels dans certains réseaux de télécommunication, etc. Dans ce travail, nous préférons également appeler la distribution à deux paramètres de Burr de type X la distribution de Rayleigh généralisée (GR). La distribution GR à deux paramètres sera désignée par $GR(\alpha, \lambda)$. Surlés et Padgett (2001) ont montré que la distribution GR à deux paramètres peut être utilisée assez efficacement pour modéliser la durée de vie des données.

L'objectif principal de ce travail est de considérer différents estimateurs et d'étudier comment les estimateurs des différents paramètres inconnus se comportent pour différentes tailles d'échantillon et pour différentes valeurs de paramètres et de comparer leurs performances en utilisant la méthode de Monte-Carlo. Dans notre cas nous considérons : les estimateurs du maximum de vraisemblance, les estimateurs du moment modifié, les estimateurs basés sur les percentiles, les estimateurs des moindres carrés, les estimateurs des moindres carrés pondérés et les estimateurs du L-moment modifié.

Ce travail est structuré comme suit : après avoir présenté brièvement les outils probabilistes et Statistiques dans le chapitre 1, nous décrivons les généralités sur les méthodes de Monte-Carlo dans le chapitre 2, ensuite nous verrons les méthodes d'estimations paramétriques dans le chapitre 3, et enfin les simulations et comparaisons sont présentées dans le chapitre 4.

Chapitre 1

Rappels d'outils probabilistes et statistiques

Dans ce chapitre nous allons aborder quelques notions de probabilités et statistiques utiles à notre travail.

1.1 Vecteur aléatoire

Définition 1.1 On appelle vecteur aléatoire de dimension n un n -uplet (X_1, \dots, X_n) où chaque X_i est une variable aléatoire réelle définie sur le même espace. On distingue :

- Vecteur aléatoire discret

Définition 1.2 Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire. On dit que X est un vecteur aléatoire discret s'il prend ses valeurs dans un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R}^n c'est-à-dire les X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes.

- Vecteur aléatoire continu

Définition 1.3 Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire continu s'il existe une fonction positive Lebesgue-intégrable $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ $\forall \phi$ mesurable de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$
- ▶ $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad \forall A \in B(\mathbb{R}^n).$
- ▶ $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$

1.2 Cas du vecteur aléatoire gaussien

Nous allons voir à présent un exemple particulièrement important de vecteur aléatoire. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note leur produit scalaire $\langle x, y \rangle$.

Définition 1.4 Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire gaussien si les variables aléatoires $\langle a, X \rangle$ suivent des lois normales, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1

1. Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien alors les X_i sont des variables aléatoires gaussiennes pour chaque $i = 1, \dots, n$.
2. Si $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, le vecteur $AX : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien.

Remarque 1.1 La réciproque de la première propriété est fausse.

1.3 Espérance et matrice de variance covariance d'un vecteur aléatoire

- **Espérance d'un vecteur aléatoire**

Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire (discret ou continu). L'espérance d'un vecteur aléatoire de dimension n est le vecteur de \mathbb{R}^n constitué des espérances de chacune des coordonnées, i.e, $\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))$.

- **Covariance d'un vecteur aléatoire**

Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire (discret ou continu). La covariance de X_i et X_j est donnée par :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j).$$

Proposition 1.2 Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire (discret ou continu). Si X_i et X_j sont indépendantes alors :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0 \quad \text{car} \quad \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j).$$

Attention ! La réciproque est en général fausse.

- **Matrice de variance covariance**

Définition 1.5 Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension n . On appelle matrice de variance covariance de X , la matrice carrée de taille $n \times n$, noté Σ_X , dont les coefficients $(\Sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ sont donnés par $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$. En notation matricielle, la matrice de variance covariance d'un vecteur aléatoire est :

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_n, X_{n-1}) & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Remarque 1.2 Si les coordonnées de X sont indépendantes, alors Σ_X est une matrice diagonale, i.e, si et seulement si les covariances des composantes prises deux à deux sont toutes nulles.

Définition 1.6 Nous appelons **fonction gamma** la fonction définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

La fonction gamma satisfait aux relations suivantes :

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$;
- ▶ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$;
- ▶ En particulier, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Elle est une généralisation directe de la notion de factorielle pour des nombres réels non entiers. On appelle fonction gamma tronquée (ou incomplète) la fonction définie par :

$$\gamma(a,x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x u^{\alpha-1} \exp(-u) du$$

et on note

$$\Gamma(a,x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^{+\infty} u^{\alpha-1} \exp(-u) du \quad .$$

Définition 1.7 Nous appelons aussi la fonction digamma la fonction définie comme la dérivée logarithmique de la fonction gamma :

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

et la fonction polygamma d'ordre m est une fonction spéciale notée $\psi_m(z)$ ou $\psi^{(m)}(z)$ et définie comme la $m + 1^e$ dérivée du logarithme de la fonction $\Gamma(z)$:

$$\psi_m(z) = \left(\frac{d}{dz} \right)^{m+1} \ln \Gamma(z) \quad .$$

La fonction digamma et la fonction polygamma satisfont les relations suivantes :

- ▶ $\forall \alpha > 0, \quad \psi(1) = -\gamma$ où $\gamma = 0,577 \dots$;
- ▶ $\forall \alpha > 0, \quad \psi(\alpha) = -\gamma - \frac{1}{\alpha} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{j(j+\alpha)} = -\gamma - \frac{1}{\alpha} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{(j+\alpha)} \right]$;
- ▶ $\forall \alpha > 0, \quad \psi(\alpha + 1) = \psi(\alpha) + \frac{1}{\alpha}$;
- ▶ $\forall \alpha > 0, \quad \psi(\alpha + 1) = -\gamma + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{j(j+\alpha)}$ avec $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$;
- ▶ $\forall \alpha > 0, \quad \psi'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+\alpha)^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+\alpha)^2}$.

1.4 Statistiques et qualités de l'estimateur

Nous entrons maintenant véritablement dans le domaine de la statistique en nous penchant sur l'étude **d'observations répétées** issues d'un certain phénomène de nature aléatoire. Le caractère aléatoire est simplement attribué au phénomène pour refléter l'incertitude de l'observateur par rapport à un ensemble de résultats possibles, par exemple le nombre d'appels parvenant à un standard téléphonique dans une unité de temps, la durée de vie d'un appareil, etc. Toutefois, il est nécessaire pour l'approche statistique, de pouvoir observer le phénomène de façon répétée afin de constituer des échantillons.

Définition 1.8 On appelle échantillon aléatoire de taille n (en bref n -échantillon) une suite de n variables aléatoires indépendantes et de même loi (ou v.a. *i.i.d.*). Cette loi est appelée la **loi mère** de l'échantillon.

Définition 1.9 Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon, on appelle **statistique** toute v.a. $T_n = h(X_1, \dots, X_n)$, fonction de X_1, \dots, X_n .

Définition 1.10 Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires de même loi que X . On appelle **moyenne de l'échantillon** ou **moyenne empirique** la statistique, notée \bar{X}_n , définie par :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad .$$

La variance empirique de l'échantillon notée S_n^2 est définie par :

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad .$$

Le moment empirique d'ordre k , $k \in \mathbb{N}^*$ de l'échantillon notée $\mu_k(X)$ est définie par :

$$\mu_k(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad .$$

Définition 1.11 Soit h_k la fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui à (x_1, x_2, \dots, x_n) fait correspondre la k -ième valeur parmi x_1, x_2, \dots, x_n lorsqu'on les range dans l'ordre croissant. On appelle alors **statistique d'ordre k** , la v.a. notée $X_{(k)}$, définie par :

$$X_{(k)} = h_k(X_1, \dots, X_n).$$

Ceci généralise les notions de minimum ($k = 1$) et de maximum ($k = n$).

Définition 1.12 La fonction quantile d'ordre ω liée à la fonction de répartition F est la fonction inverse généralisée (ou pseudo-inverse) de F notée F^{-1} définie par :

$$q_\omega = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{t : F(t) > \omega\}, 0 < \omega < 1.$$

Si F est continue et strictement croissante alors :

$$q_\omega = F^{-1}(\omega) \quad .$$

La **vraisemblance (likelihood en anglais)** de l'échantillon X_1, \dots, X_n est la loi de probabilité de ce n -uplet, notée $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ et définie par :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i | \theta) \quad .$$

si X est une variable aléatoire discrète, et par :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad .$$

si X est une variable aléatoire continue de densité $f(x_i; \theta)$.

Sous certaines conditions, la $f(x_i; \theta)$, la **quantité d'information de Fisher** sur θ fournie par l'échantillon est le réel positif noté $I_n(\theta)$, définie par :

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad .$$

Propriétés de l'information de Fisher (cf [16] pour les preuves)

- Si le domaine de définition de $f(x, \theta)$ est indépendant de θ alors on a :

$$I_n(\theta) = \mathbb{E} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) \right) .$$

- Si le domaine de définition de $f(x, \theta)$ est indépendant de θ , chaque observation apporte la même information,

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta) .$$

Ainsi pour le cas p-dimensionnel (i.e, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$), en posant $l(x, \theta) = \ln L(x, \theta)$ le score est un vecteur définie par :

$$S_n(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} l(x_1, \dots, x_n; \theta_1), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta} l(x_1, \dots, x_n; \theta_p) \right) .$$

Il est centré et sa matrice de variance covariance qu'on appelle d'information de Fisher est définie par :

$$I_n(\theta) = (I_{i,j}^n)_{1 \leq i, j \leq p} .$$

Cette matrice est définie positive et de terme générale :

$$I_{i,j}^n = \text{cov} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} l(x_1, \dots, x_n; \theta), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_j} l(x_1, \dots, x_n; \theta) \right) .$$

Définition 1.13 Soit X une variable aléatoire de loi dépendant d'un paramètre θ et X_1, \dots, X_n un n - échantillon extrait de X . On appelle **estimateur de θ** toute statistique T_n fonction de (X_1, \dots, X_n) , c'est-à-dire $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$. Sa valeur est notée par :

$$\hat{\theta} = T_n(x_1, \dots, x_n).$$

Le biais d'un estimateur est l'écart entre sa moyenne et la vraie valeur du paramètre. Il est noté souvent par $b(T_n, \theta)$ ou par $b_n(\theta)$.

$$b(T_n, \theta) = \mathbb{E}(T_n) - \theta.$$

Un estimateur T_n de θ est dit **sans biais** si pour tout $\theta \in \Theta$ (espace des paramètres) et tout entier n :

$$b(T_n, \theta) = 0.$$

Un estimateur T_n de θ est dit **asymptotiquement sans biais** si pour tout θ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(T_n, \theta) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T_n) = \theta .$$

Définition 1.14 Un estimateur T_n , de θ est **consistant** (ou convergent) si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \theta| > \epsilon) = 0.$$

Tout estimateur sans biais ou asymptotiquement sans biais dont la variance tend vers 0 est convergent en moyenne quadratique donc consistant.

Un estimateur T_n , de θ dont l'espérance mathématique tend vers θ et dont la variance tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, est un estimateur consistant :

$$\mathbb{E}(T_n) = \theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_n) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty .$$

La moyenne empirique \bar{X}_n est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance de X. En effet pour le cas de la loi gamma à deux paramètres β et h , on a :

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \mathbb{E}(X) = \frac{\beta}{h} .$$

Donc \bar{X}_n est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(X)$.

La variance de \bar{X}_n est :

$$\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X\right) = \frac{\beta}{h^2 n}$$

$Var(\bar{X}_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent : la moyenne empirique \bar{X}_n est un estimateur sans biais et convergent en moyenne quadratique de $\mathbb{E}(X)$.

De la même manière on montre que la variance empirique n'est pas un estimateur sans biais de la variance de X.

En effet on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^2) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) \\ &= Var(X) + (\mathbb{E}(X))^2 - Var(\bar{X}_n) - (\mathbb{E}(\bar{X}_n))^2 = \frac{n-1}{n} Var(X) . \end{aligned}$$

Ainsi la variance empirique n'est pas un estimateur sans biais, mais, il est asymptotiquement sans biais. Il est aussi un estimateur convergent.

S_n^2 permet de déterminer un estimateur sans biais de la variance en posant $S_n'^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2$.

En effet on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n'^2) &= \frac{n}{n-1} \mathbb{E}(S_n^2) = \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n} Var(X) \\ \mathbb{E}(S_n'^2) &= Var(X) . \end{aligned}$$

Définition 1.15 On appelle *erreur quadratique moyenne* de T_n par rapport à θ , la valeur, notée $EQM(T_n)$, définie par :

$$EQM(T_n) = \mathbb{E}[(T_n - \theta)^2]$$

et l'on a :

$$EQM(T_n) = [b(T_n, \theta)]^2 + Var(T_n) .$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(T_n - \theta)^2] &= \mathbb{E}[\{T_n - \mathbb{E}(T_n) + \mathbb{E}(T_n) - \theta\}^2] \\ &= \mathbb{E}[\{T_n - \mathbb{E}(T_n)\}^2] + [\mathbb{E}(T_n) - \theta]^2 + 2\mathbb{E}[T_n - \mathbb{E}(T_n)][\mathbb{E}(T_n) - \theta] \\ &= Var(T_n) + [b(T_n, \theta)]^2 \quad \text{car} \quad \mathbb{E}[T_n - \mathbb{E}(T_n)] = 0 . \end{aligned}$$

Définition 1.16 On dit que l'estimateur T_n^1 *domine* l'estimateur T_n^2 si pour tout $\theta \in \Theta$, $EQM(T_n^1) \leq EQM(T_n^2)$, l'inégalité étant stricte pour au moins une valeur de θ .

Définition 1.17 On dit qu'un estimateur est *admissible* s'il n'existe aucun estimateur le dominant.

Chapitre 2

Distribution de Rayleigh à deux paramètres

La distribution de Rayleigh à deux paramètres α et λ strictement positifs est un cas particulier de la distribution de Weibull pour le cas où le facteur de forme α est égal à 2. Ici, α et λ sont respectivement les paramètres de position et d'échelle.

Il existe plusieurs fonctions qui caractérisent la loi de probabilité de cette distribution.

2.1 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire de $GR(\alpha, \lambda)$, absolument continue. La fonction de répartition est donnée par :

$$\begin{aligned} F_X(x; \alpha, \lambda) &= \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}_+^* \\ F_X(x; \alpha, \lambda) &= (1 - e^{-(\lambda x)^2})^\alpha; \quad x > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On a :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- La fonction de répartition est croissante sur \mathbb{R} .

F est à valeurs dans $[0,1]$, ce qui est évident car c'est la probabilité d'un évènement ($X \leq x$). La fonction de répartition de cette loi est représenté comme suit :

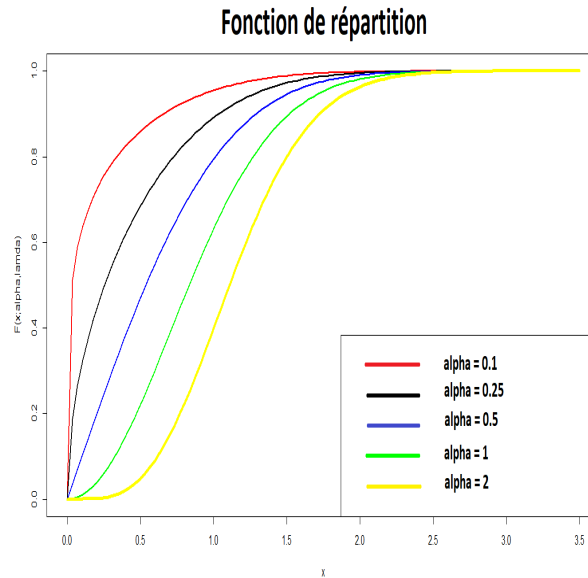


FIGURE 2.1 – Graphe du fonction de répartition de la distribution avec différentes valeurs de α pour $\lambda=1$.

2.2 Fonction de densité

La densité de probabilité de X est notée par f . Elle est défini sur $]0, +\infty[$ telle que pour tout $x \geq 0$

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x). \quad (2.2)$$

Si la fonction de répartition F_X admet une dérivée au point x alors,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \geq 0 \quad (2.3)$$

puisque f est la dérivée d'une fonction croissante.

La distribution GR a la fonction de densité :

$$f(x; \alpha, \lambda) = 2\alpha\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2} (1 - e^{-(\lambda x)^2})^{\alpha-1}; \quad x > 0. \quad (2.4)$$

2.3 Fonction de survie

La fonction de survie est défini comme :

$$S_x(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x). \quad (2.5)$$

$S_X(x)$ donne la probabilité que le temps de survie d'un individu dépasse x . C'est-à-dire la probabilité que l'individu soit toujours vivant après x unités de temps.

On a :

- $S_X(x)$ est positive et continue à droite, c'est-à-dire $S_X(x^+) = S_X(x)$, $\forall x > 0$.
- $S_X(x)$ est décroissante et satisfait les conditions aux limites :

$$S_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t = +\infty. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} S_X(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} S_X(x) = 0. \end{cases}$$

Ainsi toute la population est en vie en $x = 0$ et plus personne n'est en vie en $x = +\infty$.
La distribution GR a la fonction de survie :

$$S(x; \alpha, \lambda) = 1 - (1 - e^{-(\lambda x)^2})^\alpha; \quad x > 0. \quad (2.6)$$

La fonction de Survie de cette loi est représenté comme suit :

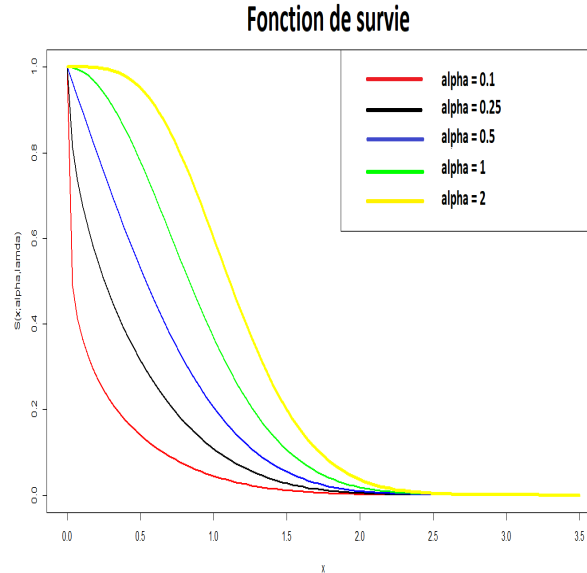


FIGURE 2.2 – Graphe du fonction de survie de la distribution avec différentes valeurs de α pour $\lambda=1$.

2.4 Fonction de hasard ou fonction de risque

La fonction de hasard est aussi importante car :

- elle mesure l'intensité instantanée ;
- elle peut être utilisée pour identifier la forme spécifique d'un modèle (exponentielle, weibull...).

C'est la base des mathématiciens pour la modélisation des données de survie. La fonction de hasard, notée $h_X(x)$, est définie, pour tout x de \mathbb{R}^+ par :

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} \quad (2.7)$$

La distribution GR a la fonction hasard :

$$h(x; \alpha, \lambda) = \frac{2\alpha\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2} (1 - e^{-(\lambda x)^2})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-(\lambda x)^2})^\alpha}; \quad x > 0. \quad (2.8)$$

2.5 Relations entre les fonctions qui caractérise cette loi

Par manipulation des définitions précédentes, on peut en déduire les relations suivantes :

- Pour la fonction de répartition $F_X(x)$, on a :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - S_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt = 1 + \exp\left(-\int_0^x h_X(t)dt\right). \quad (2.9)$$

- Pour la fonction de densité, on a :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = -\frac{dS_X(x)}{dx}. \quad (2.10)$$

- Pour la fonction de survie, on a :

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = \exp\left(-\int_0^x f_X(t)dt\right) = \exp\left(-\int_0^x h_X(t)dt\right). \quad (2.11)$$

- Pour la fonction de hasard, on a :

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = -\frac{\partial \ln(S_X(x))}{\partial x}. \quad (2.12)$$

Espérance et variance :

Puisque, la distribution de Rayleigh généralisée à deux paramètres est un membre particulier de la distribution de Weibull généralisée pour $\alpha = 2$.

$$\text{On a : } \mathbb{E}(X) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{k}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{k}{\alpha} + 1\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right).$$

Ainsi pour $k = 1$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \text{ et avec } k = 2, \text{ on a : } \mathbb{V}(X) = \frac{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\lambda}.$$

Le quantile et la médiane :

On a alors le quantile d'ordre ω qui est égal à : $q_\omega = \left(-\frac{\ln(1-\omega)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Sa médiane est alors : $Me(X) = \left(\frac{\ln(2)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$

Chapitre 3

Méthodes d'estimation paramétrique

Un problème important est de trouver une façon de construire des estimateurs des deux paramètres de la distribution de Rayleigh. Dans ce chapitre, nous verrons les estimateurs suivants : estimateur du maximum de vraisemblance, estimateur du moment modifié, estimateur basé sur les percentiles, estimateur des moindres carrés, estimateur des moindres carrés pondérés et l'estimateur du L-moment modifié.

3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

Dans cette section on considère l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) de $GR(\alpha, \lambda)$.

- **Premièrement nous considérons le cas où les α et λ sont inconnus.**

Soient x_1, \dots, x_n un échantillon aléatoire de taille n de $GR(\alpha, \lambda)$, alors la fonction de log-vraisemblance $L(\alpha, \lambda)$ peut être obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} L(\alpha, \lambda) &= \ln \left[\prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \lambda) \right] = \sum_{i=1}^n \ln \left[2\alpha\lambda^2 x_i e^{-(\lambda x_i)^2} (1 - e^{-(\lambda x_i)^2})^{\alpha-1} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln \lambda^2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{i=1}^n \ln e^{-(\lambda x_i)^2} + \sum_{i=1}^n \ln (1 - e^{-(\lambda x_i)^2})^{\alpha-1} \\ &= n \ln 2 + n \ln \alpha + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{i=1}^n -\lambda^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^n \ln (1 - e^{-(\lambda x_i)^2})^{\alpha-1} \end{aligned}$$

et en posant $c = n \ln 2$ on a :

$$L(\alpha, \lambda) = c + n \ln \alpha + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln (1 - e^{-(\lambda x_i)^2}). \quad (3.1)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[c + n \ln \alpha + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln (1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) \right] \\ &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln (1 - e^{-(\lambda x_i)^2}). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[c + n \ln \alpha + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2} \right) \right] \\ \frac{\partial L(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{2n}{\lambda} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} \\ &= \frac{2n}{\lambda} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\lambda(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} .\end{aligned}$$

En annulant les dérivées partielles successivement par rapport à α et λ on obtient les équations de vraisemblance :

$$\frac{\partial L(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\lambda(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} = 0 \quad (3.3)$$

Et de plus sa matrice Hessienne est :

$$H(\alpha, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \alpha} & \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha} & \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \lambda} \end{bmatrix} ,$$

avec :

$$\frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \alpha} = -\frac{n}{\alpha^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \lambda} &= -\frac{2n}{\lambda^2} - 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} \\ &+ 2\lambda(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{-2\lambda x_i^4 e^{-(\lambda x_i)^2} \left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2} \right) - 2\lambda x_i^4 e^{-2(\lambda x_i)^2}}{\left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2} \right)^2} \\ &= -\frac{2n}{\lambda^2} - 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} - 2\lambda(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda x_i^4 e^{-(\lambda x_i)^2}}{\left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2} \right)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} .$$

Vérifions que $\det(H(\alpha, \lambda)) > 0$.

On a :

$$\begin{aligned}\det(H(\alpha, \lambda)) &= \frac{2n^2}{\alpha^2 \lambda^2} + \frac{2n}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2n}{\alpha^2} (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} + \frac{2n\lambda(\alpha - 1)}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda x_i^4 e^{-(\lambda x_i)^2}}{\left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2} \right)^2} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{4\lambda^2 x_i^4 e^{-2(\lambda x_i)^2}}{\left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2} \right)^2} > 0; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \alpha > 0, \lambda > 0.\end{aligned}$$

Vérifions que $\frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \alpha} + \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \lambda} < 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \alpha} + \frac{\partial^2 L(\alpha, \lambda)}{\partial^2 \lambda} &= -\frac{n}{\alpha^2} - \frac{2n}{\lambda^2} - 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{1 - e^{-(\lambda x_i)^2}} \\ &\quad - 2\lambda(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{2\lambda x_i^4 e^{-(\lambda x_i)^2}}{\left(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}\right)^2} < 0; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \alpha > 0, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Donc $H(\alpha, \lambda)$ est définit négative alors la log-vraisemblance atteint son maximum.

En considérant l'équation(3.2), nous obtenons l'estimateur du MLE de α en fonction de λ , noté $\hat{\alpha}(\lambda)$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n}{\alpha} &= - \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) \Leftrightarrow \alpha = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} . \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\hat{\alpha}(\lambda) = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} . \quad (3.4)$$

En substituant $\hat{\alpha}(\lambda)$ dans (3.1), nous obtenons le profil du log-vraisemblance de λ comme suit :

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= L(\hat{\alpha}(\lambda), \lambda) = c + n \ln\left(-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}\right) + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &\quad - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} - 1\right) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) \\ &= c + n \ln\left(\frac{n}{-\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}\right) + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &\quad - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{n \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} - \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) \\ &= c + n \ln\left(\frac{n}{-\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}\right) + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &\quad - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + -n - \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) \\ &= c + n \ln n - n - n \ln\left(-\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})\right) + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ &\quad - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) . \end{aligned}$$

Comme c est une constant indépendant de λ donc on peut poser :

$$C = c + n \ln n - n + \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

On obtient finalement le profil du log-vraisemblance de λ comme suit :

$$g(\lambda) = C - n \ln\left(-\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})\right) + 2n \ln \lambda - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) . \quad (3.5)$$

Par conséquent, l'estimateur du MLE de λ , soit $\hat{\lambda}_{MLE}$, peut être obtenu en maximisant (3.5) par rapport à λ . Il peut être montré que le maximum de (3.5) peut être obtenu comme une solution de point-fixe de l'équation suivante :

$$h(\mu) = \mu \quad . \quad (3.6)$$

En calculant la dérivé du profil du log-vraisemblance de λ on a :

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= -n \frac{\sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2 \lambda e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} + \frac{2n}{\lambda} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2 \lambda e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} \\ &= -n2\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} + \frac{2n}{\lambda} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2 \lambda e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} \end{aligned}$$

posons $g'(\lambda) = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} &-n2\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} + \frac{2n}{\lambda} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2 \lambda e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} = 0 \\ \Rightarrow &-n2\lambda \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2 \lambda e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} = -\frac{2n}{\lambda} \end{aligned}$$

en multipliant de part et d'autre par $-\frac{\lambda}{2n}$ on a :

$$\begin{aligned} &\lambda^2 \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} + \frac{\lambda^2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\lambda^2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} = 1 \\ \Leftrightarrow &\lambda^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} \right] = 1 \\ \Leftrightarrow &\lambda^2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} \right]^{-1} . \end{aligned}$$

En posant $\lambda^2 = \mu$ on a l'équation (3.6) qui est bien vérifiée où

$$h(\mu) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\mu x_i^2}}{(1 - e^{-\mu x_i^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\mu x_i^2})} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\mu x_i^2}}{(1 - e^{-\mu x_i^2})} \right]^{-1} .$$

Si $\hat{\mu}$ est une solution de (3.6), $\hat{\lambda}_{MLE} = \sqrt{\hat{\mu}}$. Une procédure itérative très simple $h(\mu^{(j)}) = \mu^{(j+1)}$, peut être utilisée, où $\mu^{(j)}$ est la j-ième itération à l'aide de l'algorithme du point fixe, voir l'annexe dans [2]. Une fois que $\hat{\lambda}_{MLE}$ est obtenu, le MLE de α , soit $\hat{\alpha}_{MLE}$, peut être obtenu à partir de (3.4) comme $\hat{\alpha}_{MLE} = \hat{\alpha}(\hat{\lambda}_{MLE})$. Notons que, $\hat{\alpha}_{MLE}$ et $\hat{\lambda}_{MLE}$ ne sont pas sous forme explicite. De plus, il n'est pas possible d'obtenir les variances de $\hat{\alpha}_{MLE}$ et $\hat{\lambda}_{MLE}$. Nous proposons d'utiliser les résultats de normalité asymptotique de $\hat{\alpha}_{MLE}$ et $\hat{\lambda}_{MLE}$,

tels que dérivés dans Surles et Padgett (2001) ou Raqab et Kundu (2003). En utilisant la notation :

$$\xi(a,b) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i+a)^b} \quad . \quad (3.7)$$

Les résultats de normalité asymptotique de l'estimateur du MLE de $(\alpha_{MLE}, \lambda_{MLE})$ peuvent être énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Pour un n assez grand alors on a :*

$$\left[\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{MLE} - \alpha), \sqrt{n}(\hat{\lambda}_{MLE} - \lambda) \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\alpha, \lambda)) \quad (3.8)$$

où $I(\alpha, \lambda)$ est la matrice d'information de Fisher, i.e,

$$I(\alpha, \lambda) = -\frac{1}{n} \begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \lambda}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \alpha}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}\right) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}$$

avec

$$I^{-1}(\alpha, \lambda) = \frac{1}{I_{11}I_{22} - I_{21}^2} \begin{bmatrix} I_{22} & -I_{12} \\ -I_{21} & I_{11} \end{bmatrix} \quad .$$

Preuve 3.1 *Voir la référence [23]*

On obtient d'après le théorème [3.1] :

$$\mathbb{V}(\hat{\alpha}_{MLE}) \approx \frac{I_{22}}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\hat{\lambda}_{MLE}) \approx \frac{I_{11}}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}$$

où

$$\begin{aligned} I_{11} &= -\frac{1}{\alpha} \\ I_{12} &= \frac{2}{(\alpha-1)\lambda^2} \left(\psi(\alpha) - \psi(1) - \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \quad \text{pour } \alpha \neq 1 \quad \text{et} \\ I_{12} &= \frac{2}{\lambda^2} \xi(2,2) \quad \text{pour } \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= -\frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} \left[\psi(\alpha-1) - \psi(1) \right] - \frac{2\alpha}{\lambda^3} \left(\psi(1) - \psi(\alpha) \right) - 2\frac{\alpha-1}{\lambda^3} \\ &\quad - \frac{4\alpha}{\lambda^3(\alpha-2)} \left(\left(\psi(2) - \psi(\alpha) \right)^2 + \psi'(2) - \psi'(\alpha) \right), \quad \text{pour } \alpha \neq 2 \\ I_{22} &= -\frac{2}{\lambda^2} \left[1 + \psi(\alpha-1) - \psi(1) \right] + \frac{4\alpha}{\lambda^3} \left[\xi(2,2) - 4\xi(3,2) - \xi(2,3) \right], \quad \text{pour } \alpha = 2 \quad . \end{aligned}$$

- **Considérons maintenant l'estimateur du MLE de α , lorsque le paramètre d'échelle λ est connu.**

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\lambda = 1$. Si λ est connu, l'estimateur du MLE de α , disons $\hat{\alpha}_{MLESK}$ est :

$$\hat{\alpha}_{MLESK} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-x_i^2})}. \quad (3.9)$$

Conséquence 3.1 Si les X_i sont i.i.d $GR(\alpha, 1)$, alors $-\alpha \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-x_i^2})$ suit une variable aléatoire gamma avec le paramètre de forme n et le paramètre d'échelle 1. Par conséquent, pour $n > 2$,

$$\mathbb{E}(\hat{\alpha}_{MLESK}) = \frac{n}{n-1}\alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\hat{\alpha}_{MLESK}) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\alpha^2.$$

En utilisant (3.9), une estimation sans biais de α peut être facilement obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\alpha}_{MLESK}) - \hat{\alpha}_{MLESK} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}(\hat{\alpha}_{MLESK}) &= \hat{\alpha}_{MLESK} \\ \frac{n}{n-1}\alpha &= \hat{\alpha}_{MLESK} \Leftrightarrow \alpha = \frac{n-1}{n}\hat{\alpha}_{MLESK} \end{aligned}$$

donc :

$$\hat{\alpha}_{USCK} = \frac{n-1}{n}\hat{\alpha}_{MLESK} = -\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-x_i^2})} \quad (3.10)$$

où $\mathbb{V}(\hat{\alpha}_{USCK}) = \frac{\alpha^2}{n-2}$.

- **Considérons l'estimateur du MLE de λ , disons $\hat{\lambda}_{MLESHK}$, lorsque le paramètre de forme α est connu.**

Pour un paramètre α connu, $\hat{\lambda}_{MLESHK}$ peut être obtenu en maximisant :

$$u(\lambda) = 2n \ln \lambda - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x_i)^2}) \quad (3.11)$$

par rapport à λ . Maintenant $\hat{\lambda}_{MLESHK}$, qui maximise $u(\lambda)$ peut être obtenu comme la racine carrée positive de $v(\lambda^2) = \lambda^2$ par procédure itérative, à l'aide de l'algorithme du point fixe, voir l'annexe dans [1], où

$$v(\lambda^2) = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1 - e^{-(\lambda x_i)^2})} \right]^{-1}. \quad (3.12)$$

D'après les propriétés asymptotiques de l'estimateur du MLE, il s'ensuit que :

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_{MLESK}) \approx \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\hat{\lambda}_{MLESK}) \approx \frac{1}{n} I_{22}^{-1}.$$

3.2 Estimateur du moment modifié

Raqab et Kundu dans 19 ont observé que les moments d'une distribution GR ne peuvent pas être exprimés sous une forme agréable. Par conséquent, il n'est pas toujours possible de calculer les estimateurs des moments très facilement. Mais il est observé dans Raqab et Kundu que si X suit $GR(\alpha, \lambda)$ alors :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\lambda^2}(\psi(\alpha + 1) - \psi(1)) \text{ et } \mathbb{E}(X^4) - (\mathbb{E}(X^2))^2 = \frac{1}{\lambda^4}(\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1))$$

ici, $\psi(\cdot)$ et $\psi'(\cdot)$ désignent respectivement les fonctions digamma et polygamma. Nous proposons les estimateurs du moment modifié (MME) suivantes. Définissons d'abord U et V comme suit :

$$U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 - U^2.$$

La MME de α peut être obtenu comme la solution de l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{V}{U^2} = \frac{\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)}{(\psi(\alpha + 1) - \psi(1))^2} \quad . \quad (3.13)$$

En considérant que x_i sont i.i.d de $GR(\alpha, \lambda)$, on obtient dans l'équation (3.13) :

$$\begin{aligned} V \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)]^2 &= U^2 \times [\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)] \\ \Leftrightarrow V \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)]^2 - U^2 \times [\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 - U^2 \right] \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)]^2 - U^2 \times [\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)] &= 0 \\ \text{Or } U &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \stackrel{i.i.d}{=} x_1^2 \Leftrightarrow U^2 = x_1^4 \neq 0 \\ \Leftrightarrow [x_1^4 - x_1^4] \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)]^2 - U^2 \times [\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)] &= 0 \\ \Leftrightarrow U^2 \times [\psi'(\alpha + 1) - \psi'(1)] &= 0 \Leftrightarrow \psi'(\alpha + 1) - \psi'(1) = 0 \quad . \end{aligned}$$

On obtient finalement l'estimateur du MME de α par procédure itérative de l'équation suivant, à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson, voir l'annexe dans[3].

$$\begin{aligned} \psi'(\alpha + 1) - \psi'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j + \alpha + 1)^2} - \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j + 1)^2} &= 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{(j + \alpha + 1)^2} - \frac{1}{(j + 1)^2} \right] = 0 \quad . \quad (3.14) \end{aligned}$$

Nous désignons l'estimation de α par $\hat{\alpha}_{MME}$. Une fois $\hat{\alpha}_{MME}$ obtenu, nous obtenons l'estimateur du MME de λ , soit $\hat{\lambda}_{MME}$, comme :

$$\hat{\lambda}_{MME} = \sqrt{\frac{\psi(\hat{\alpha}_{MME} + 1) - \psi(1)}{U}} \quad . \quad (3.15)$$

Il n'est pas possible d'obtenir les variances exactes de $\hat{\alpha}_{MME}$ ou de $\hat{\lambda}_{MME}$. Les variances asymptotiques de $\hat{\alpha}_{MME}$ et $\hat{\lambda}_{MME}$ peuvent être obtenues à partir de la propriété asymptotique suivante de $\hat{\alpha}_{MME}$ et $\hat{\lambda}_{MME}$:

Théorème 3.2 Pour un n assez grand alors on a :

$$\left[\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{MME} - \alpha), \sqrt{n}(\hat{\lambda}_{MME} - \lambda) \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}_2(0, \Sigma) \quad (3.16)$$

où Σ est une matrice 2×2 , et elle peut être exprimée comme suit :

$$\Sigma = \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}$$

où

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\psi'(\alpha + 1) & \psi''(\alpha + 1) \\ \psi(\alpha + 1) - \psi(1) & 2(-\psi'(\alpha + 1) + \psi'(1)) \end{bmatrix} .$$

Aussi,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

où

$$c_{11} = \psi'(1) - \psi'(\alpha + 1), \quad c_{12} = c_{21} = \psi''(\alpha + 1) - \psi'(1)$$

et

$$c_{22} = (\psi^{(3)}(1) - \psi^{(3)}(\alpha + 1)) - (\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1))^2 .$$

Preuve 3.2 Voir la référence [5]

- **Si le paramètre d'échelle est connu (sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il est égal à 1)**

Alors l'estimateur du MME de α , disons $\hat{\alpha}_{MMESCK}$, peut être obtenu en résolvant l'équation non linéaire :

$$U = \psi(\alpha) - \psi(1). \quad (3.17)$$

En considérant que les x_i sont i.i.d de $GR(\alpha, \lambda)$, on obtient dans l'équation (3.17) :

$$\begin{aligned} U - \psi(\alpha) + \psi(1) = 0 &\Leftrightarrow U - \left[-\gamma - \frac{1}{\alpha} + \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+\alpha)} \right] + \psi(1) = 0 \\ \Leftrightarrow U + \gamma + \frac{1}{\alpha} - \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+\alpha)} - \gamma &= 0 \Leftrightarrow U + \frac{1}{\alpha} - \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+\alpha)} = 0 \\ \text{Or } U &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \stackrel{i.i.d}{=} x_1^2 \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$x_1^2 + \frac{1}{\alpha} - \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+\alpha)} = 0 .$$

On obtient finalement l'estimateur du MME de α à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson dans [4] à partir de l'équation suivante :

$$x_1^2 + \frac{1}{\alpha} - \alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+\alpha)} = 0 . \quad (3.18)$$

La variance asymptotique de $\hat{\alpha}_{MMESCK}$ est :

$$\mathbb{V}(\hat{\alpha}_{MMESCK}) \approx \frac{(\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1))}{n(\psi'(\alpha + 1))^2} .$$

- **Si le paramètre de forme α est connu**

L'estimateur du MME de λ , soit $\hat{\lambda}_{MMESCK}$, est :

$$\hat{\lambda}_{MMESCK} = \frac{\sqrt{\psi(\alpha + 1) - \psi(1)}}{\sqrt{U}} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\hat{\lambda}_{MMESCK}) \approx \frac{1}{4n} \frac{\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)}{\sqrt{\psi(\alpha + 1) - \psi(1)}} .$$

3.3 Estimateur basé sur les percentiles

Si les données proviennent d'une fonction de distribution qui a une forme fermée, il est alors tout à fait naturel d'estimer des paramètres inconnus en ajustant une ligne droite aux points percentiles théoriques obtenus à partir de la fonction de distribution et les points de percentile de l'échantillon. Cette méthode a été proposée à l'origine par Kao dans [10][11] et a été utilisée avec succès pour la distribution de Weibull et pour la distribution exponentielle généralisée(GE). Dans ce travail, nous appliquons la même technique pour la distribution GR.

- **Considérons le cas où les deux paramètres sont inconnus.**

Puisque

$$\begin{aligned} F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-(\lambda x)^2})^\alpha &\Leftrightarrow (F(x; \alpha, \lambda))^{\frac{1}{\alpha}} = 1 - e^{-(\lambda x)^2} \Leftrightarrow e^{-(\lambda x)^2} = 1 - (F(x; \alpha, \lambda))^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\Leftrightarrow \ln e^{-(\lambda x)^2} = \ln [1 - (F(x; \alpha, \lambda))^{\frac{1}{\alpha}}] \Leftrightarrow -\lambda^2 x^2 = \ln [1 - (F(x; \alpha, \lambda))^{\frac{1}{\alpha}}] \end{aligned}$$

par conséquent

$$-\frac{1}{\lambda^2} \ln [1 - (F(x; \alpha, \lambda))^{\frac{1}{\alpha}}] = x^2 \quad .$$

Désignons par $X_{(i)}$ la statistique d'ordre i , i.e, $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$. Si p_i désigne une certaine estimation de $F(x_{(i)}; \alpha, \lambda)$, alors l'estimation de α et λ peut être obtenue par la minimisation de :

$$\sum_{i=1}^n \left[x_{(i)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]^2 \quad (3.19)$$

par rapport à α et λ . Notons que (3.19) est une fonction non linéaire et qu'elle doit être minimisée en utilisant une technique d'optimisation non linéaire. Nous appelons les estimateurs correspondants les estimateurs de percentile ou PCE. Plusieurs estimateurs de p_i peuvent être utilisés ici, voir par exemple Mann, Schafer et Singpurwalla dans [13].

Dans ce travail, nous considérons principalement $p_i = \frac{i}{n+1}$, qui est la valeur attendue de $F(X_{(i)})$.

Les estimateurs correspondants sont vérifiés par l'optimisation suivante :

Soit $g(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left[x_{(i)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} g(\alpha, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sum_{i=1}^n \left[(x_{(i)}^2)^2 + \frac{2x_{(i)}^2}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) + \frac{1}{\lambda^4} \ln^2 \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[-\frac{4\lambda x_{(i)}^2}{\lambda^4} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) - \frac{4\lambda^3}{\lambda^8} \ln^2 \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{4x_{(i)}^2}{\lambda^3} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^n -\frac{4}{\lambda^5} \ln^2 \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_{(i)}^2 \lambda^2 \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^n -\ln^2 \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right)}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}^2 \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right)} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{-\frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right)}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}^2 \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right)}} \\
&\Rightarrow \hat{\lambda}_{PCE} = \sqrt{-\frac{\sum_{i=1}^n \left(\ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}^2 \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right)}} . \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Et on a aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} g(\alpha, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^n \left[(x_{(i)}^2)^2 + \frac{2x_{(i)}^2}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) + \frac{1}{\lambda^4} \ln^2 \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[-\frac{2x_{(i)}^2 p_i^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha \lambda^2 (1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}})} - \frac{2p_i^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha \lambda^4 (1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}})} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[-\frac{2p_i^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha \lambda^2 (1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}})} \left(x_{(i)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n -\frac{2p_i^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha \lambda^2 (1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}})} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n \left[x_{(i)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] = 0 \quad ; \forall \alpha > 0, \lambda > 0$$

$$\sum_{i=1}^n -\frac{2p_i^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha \lambda^2 (1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}})} = 0 \quad \text{absurde} \quad \forall \alpha > 0, \lambda > 0, p_i^{\frac{1}{\alpha}} \neq 1$$

donc

$$\sum_{i=1}^n \left[x_{(i)}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] = 0 \quad ; \forall \alpha > 0, \lambda > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_{(i)}^2 = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\lambda^2} \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n -\lambda^2 x_{(i)}^2 = \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}}\right) \\
&\quad \sum_{i=1}^n e^{-(\lambda x_{(i)})^2} = \sum_{i=1}^n \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-(\lambda x_{(i)})^2}\right) = \sum_{i=1}^n p_i^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - e^{-(\lambda x_{(i)})^2}\right) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \ln p_i \\
&\Leftrightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \ln p_i}{\sum_{i=1}^n \ln \left(1 - e^{-(\lambda x_{(i)})^2}\right)} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \ln p_i \ln \left(1 - e^{-(\lambda x_{(i)})^2}\right)}{\sum_{i=1}^n \left[\ln \left(1 - e^{-(\lambda x_{(i)})^2}\right)\right]^2} .
\end{aligned}$$

Alors

$$\hat{\alpha}_{PCE} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln p_i \ln \left(1 - e^{-(\lambda x_{(i)})^2}\right)}{\sum_{i=1}^n \left[\ln \left(1 - e^{-(\lambda x_{(i)})^2}\right)\right]^2} . \quad (3.21)$$

- **Considérons le cas où le paramètre de forme α est connu.**

Alors le PCE de λ , disons $\hat{\lambda}_{PCESHK}$ est :

$$\hat{\lambda}_{PCESHK} = \sqrt{-\frac{\sum_{i=1}^n \left(\ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}^2 \ln \left(1 - p_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)}} . \quad (3.22)$$

Il est intéressant de noter que $\hat{\lambda}_{PCESHK}$ a une forme explicite contrairement à l'estimateur du MLE correspondante.

- **Considérons le cas où le paramètre d'échelle λ est connu.**

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\lambda = 1$.

Si nous notons $F(x; \alpha) = F(x; \alpha, 1)$ alors :

$$\ln F(x; \alpha) = \alpha \ln(1 - e^{-x^2}) .$$

Par conséquent, l'estimateur du PCE de α , soit $\hat{\alpha}_{PCECK}$, peut être obtenu en minimisant :

$$\sum_{i=1}^n \left(\ln p_i - \alpha \ln(1 - e^{-x_{(i)}^2})\right)^2 \text{ par rapport à } \alpha .$$

Soit $h(\alpha) = \sum_{i=1}^n \left(\ln p_i - \alpha \ln(1 - e^{-x_{(i)}^2})\right)^2$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha} h(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^n \left(\ln p_i - \alpha \ln(1 - e^{-x_{(i)}^2})\right)^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{i=1}^n \left((\ln p_i)^2 - 2 \ln p_i \alpha \ln(1 - e^{-x_{(i)}^2}) + [\alpha \ln(1 - e^{-x_{(i)}^2})]^2\right)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(-2 \ln p_i \ln(1 - e^{-x_{(i)}^2}) + 2\alpha [\ln(1 - e^{-x_{(i)}^2})]^2\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -2 \sum_{i=1}^n \ln p_i \ln(1 - e^{-x^2(i)}) + 2\alpha \sum_{i=1}^n \left[\ln(1 - e^{-x^2(i)}) \right]^2 = 0 \\ \Leftrightarrow 2\alpha \sum_{i=1}^n \left[\ln(1 - e^{-x^2(i)}) \right]^2 &= 2 \sum_{i=1}^n \ln p_i \ln(1 - e^{-x^2(i)}) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \ln p_i \ln(1 - e^{-x^2(i)})}{\sum_{i=1}^n \left[\ln(1 - e^{-x^2(i)}) \right]^2} . \end{aligned}$$

Alors l'estimateur du PCE de α , disons $\hat{\alpha}_{PCECK}$ est :

$$\hat{\alpha}_{PCECK} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln p_i \ln(1 - e^{-x^2(i)})}{\sum_{i=1}^n \left[\ln(1 - e^{-x^2(i)}) \right]^2} . \quad (3.23)$$

Voir par exemple Mann, Schafer et Singpurwalla dans [13] pour une discussion détaillée à ce sujet.

3.4 Estimateur des moindres carrés et des moindres carrés pondérés

Les estimateurs des moindres carrés et les estimateurs des moindres carrés pondérés ont été initialement proposés par Swain, Venkataraman et Wilson dans [26] pour estimer les paramètres des distributions Béta. La méthode peut être décrite comme suit : supposons que Y_1, \dots, Y_n est un échantillon aléatoire de taille n provenant d'une fonction de distribution $G(\cdot)$ et $Y_{(1)} < \dots < Y_{(n)}$ désignent les statistiques d'ordre de l'échantillon observé. Il est bien connu que :

$$\mathbb{E}(G(Y_{(j)})) = \frac{j}{n+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(G(Y_{(j)})) = \frac{j(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)} \quad (3.24)$$

voir [9] pour plus de détaille.

La méthode proposée utilise (3.24) et obtient des estimations des paramètres inconnus.

- **Méthode 1 : Les estimateurs des moindres carrés (LSE)**

Les estimateurs des moindres carrés des paramètres inconnus peuvent être obtenu en minimisant :

$$\sum_{j=1}^n \left(G(Y_{(j)}) - \frac{j}{n+1} \right)^2 \quad (3.25)$$

avec le respect des paramètres inconnus. Par conséquence, dans ce cas, l'estimateur des moindres carrés de α et λ , disons $\hat{\alpha}_{LSE}$ et $\hat{\lambda}_{LSE}$ respectivement, peut être obtenu en minimisant :

$$\sum_{j=1}^n \left(\left[1 - e^{-(\lambda x_{(j)})^2} \right]^\alpha - \frac{j}{n+1} \right)^2 \quad (3.26)$$

avec le respect de α et λ , grâce à la fonction $\text{nlm}()$ sur R, voir l'annexe dans [4].

- **Méthode 2 : Les estimateurs des moindres carrés pondérés (WLSE)**

Les estimateurs des moindres carrés pondérés des paramètres inconnus peuvent être obtenus en minimisant :

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathbb{V}(G(Y_{(j)}))} \left(G(Y_{(j)}) - \frac{j}{n+1} \right)^2 \quad (3.27)$$

avec le respect des paramètres inconnus. Par conséquence, dans ce cas, l'estimateur des moindres carrés pondérés de α et λ , disons $\hat{\alpha}_{WLSSE}$ et $\hat{\lambda}_{WLSSE}$ respectivement, peut être obtenu en minimisant :

$$\sum_{j=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{j(n-j+1)} \left([1 - e^{-(\lambda x_{(j)})^2}]^\alpha - \frac{j}{n+1} \right)^2 \quad (3.28)$$

avec le respect de α et λ , grâce à la fonction $\text{nlm}()$ sur \mathbb{R} , voir l'annexe dans [5].

3.5 Estimateur du L-moment modifié

Dans cette section, nous proposons une méthode d'estimation des paramètres inconnus basés sur la combinaison linéaire des statistiques d'ordre. Cette méthode est populairement connue sous le nom d'estimateur L-moment ou L-estimateur. Il est observé par Hosking dans[18] que les estimateurs du L-moment présentent certains avantages par rapport aux estimateurs classiques du moment.

La méthode standard pour calculer les estimateurs de L-moments est d'égaliser les L-moments de l'échantillon avec les L-moments de la population. Lorsque les deux paramètres sont inconnus, nous devons mettre en équation les deux premiers L-moments de l'échantillon avec les L-moments de la population. Il est possible d'exprimer les L-moments en termes de moments ordinaires, voir par exemple Hosking dans[18]. Malheureusement, pour la distribution GR, tous les moments ne peuvent pas être exprimés sous une forme compacte. Puisque les moments pairs peuvent être exprimés en termes de la fonction $\psi(\cdot)$, nous proposons les estimateurs L-moment modifiés (MLME) suivants, similaires aux MME comme suit. Transformer les données $y_i = x_i^2$, pour $i = 1, \dots, n$. Si $y_{(1)} < \dots < y_{(n)}$ désigne l'échantillon transformé ordonné, alors en utilisant la même notation que Hosking dans[18], nous obtenons les L-moments du premier et du second échantillon comme :

$$l_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{(i)} \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)y_{(i)} - l_1 \quad . \quad (3.29)$$

De même, les deux premiers L-moments de population de la variable aléatoire transformée $Y = X^2$ sont les suivants :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}(\psi(\alpha+1) - \psi(1)) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}(\psi(2\alpha+1) - \psi(\alpha+1)) \quad . \quad (3.30)$$

Notons que Y suit $GE(\alpha, \lambda)$, donc, (3.30) suit des propriétés de la distribution GE (voir Gupta et Kundu dans[5]). Par conséquent, les estimateurs du MLME peuvent être obtenus en résolvant les deux équations suivantes :

$$l_1 = \frac{1}{\lambda}(\psi(\alpha+1) - \psi(1)) \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{1}{\lambda}(\psi(2\alpha+1) - \psi(\alpha+1)) \quad . \quad (3.31)$$

Nous obtenons d'abord l'estimateur du MLME de α , soit $\hat{\alpha}_{MLME}$, comme la solution de l'équation non linéaire suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(2\alpha + 1) - \psi(\alpha + 1)}{\psi(\alpha + 1) - \psi(1)} &= \frac{l_2}{l_1} \Leftrightarrow l_2 \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)] = l_1 \times [\psi(2\alpha + 1) - \psi(\alpha + 1)] \\
&\Leftrightarrow l_2 \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)] - l_1 \times [\psi(2\alpha + 1) - \psi(\alpha + 1)] = 0 \\
\Leftrightarrow \left[\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)y_{(i)} - l_1 \right] \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)] - l_1 \times [\psi(2\alpha + 1) - \psi(\alpha + 1)] &= 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)y_{(i)} \right] \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)] + l_1 \times \psi(1) - l_1 \times \psi(2\alpha + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)y_{(i)} \right] \times [\psi(\alpha + 1) - \psi(1)] + l_1 \times [\psi(1) - \psi(2\alpha + 1)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)y_{(i)} \right] \times \left[\sum_{i=1}^n \frac{\alpha}{i(i+\alpha)} \right] + l_1 \times [\psi(1) - \psi(2\alpha + 1)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)y_{(i)}\alpha}{i(i+\alpha)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{(i)} [\psi(1) - \psi(2\alpha + 1)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)y_{(i)}\alpha}{i(i+\alpha)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2y_{(i)}\alpha}{i(i+2\alpha)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)y_{(i)}\alpha}{i(i+\alpha)} - \frac{n-1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \frac{2y_{(i)}\alpha}{i(i+2\alpha)} = 0 \\
\frac{2}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)y_{(i)}\alpha}{i(i+\alpha)} - (n-1) \sum_{i=1}^n \frac{y_{(i)}\alpha}{i(i+2\alpha)} \right] &= 0 \quad . \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Cette résolution d'équation peut se faire à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson dans [4]. Une fois que $\hat{\alpha}_{MLME}$ est obtenu à partir de l'équation non linéaire (3.32), nous calculons l'estimateur du MLME de λ , soit $\hat{\lambda}_{MLME}$, comme :

$$\hat{\lambda}_{MLME} = \frac{\psi(\hat{\alpha}_{MLME} + 1) - \psi(\alpha + 1)}{l_1} \quad . \quad (3.33)$$

Notons que si $\alpha(\lambda)$ est connu, l'estimateur du MLME de $\lambda(\alpha)$ est le même que l'estimateur du MME correspondant, obtenu dans la section [3.2].

Chapitre 4

Simulations et Comparaisons

Étant donné qu'il est possible de définir différents estimateurs pour la même quantité, il est important d'avoir un moyen de les comparer. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de quelques expériences numériques visant à comparer les performances des différents estimateurs proposés dans le chapitre précédent. L'application numérique se fera avec le logiciel R.

Il est observé par Raqab et Kundu (2003) qu'en prenant $\lambda = 1$ pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, la fonction de densité de probabilité d'une distribution GR est une fonction décroissante et qu'elle est une fonction unimodale à droite pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

On observe également qu'en prenant $\lambda = 1$, la fonction de hasard d'une distribution GR peut être soit le type baignoire ou une fonction croissante, en fonction du paramètre de forme α . Pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, la fonction de hasard de $GR(\alpha, \lambda)$ est de type baignoire et pour $\alpha > \frac{1}{2}$, elle a une fonction de hasard croissante. Les courbes de la figure 4 illustrent ce comportement.

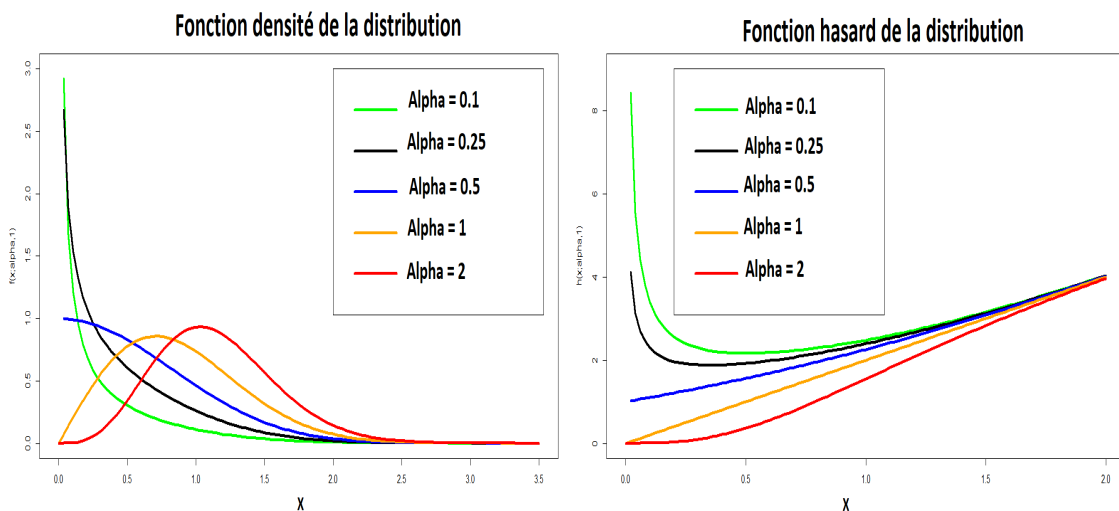


FIGURE 4.1 – Graphe de la fonction densité de probabilité et de la fonction hasard de la distribution avec différentes valeurs de α pour $\lambda=1$.

Nous effectuons de nombreuses simulations de Monte-Carlo pour comparer les performances des différents estimateurs, principalement en ce qui concerne leurs biais et leurs erreurs quadratiques moyennes (EQM) pour différentes tailles d'échantillons et pour différentes valeurs de paramètres. Notons que, λ est le paramètre d'échelle et tous les estimateurs sont

invariants à l'échelle. Par conséquent, nous prenons $\lambda = 1$ dans tous les cas considérés. Nous considérons $\alpha = 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 2.5$ et $n = 20, 50$. Nous calculons les estimations relatives moyennes et les EQM relatives moyennes sur 10000 répliques¹. Notons que 10000 répliques donneront une précision de l'ordre de $\pm(10000)^{-5} = \pm 0.01$ dans [12]. On ne présentera les résultats que pour $n = 20$ et 50 . Tout d'abord, nous observons comment les différentes méthodes se comportent pour estimer α si λ est connu.

4.1 Estimation de α pour λ connu.

Lorsque λ est connu, le MLE, l'estimateur sans biais (UBE) et le PCE de α peuvent être obtenus respectivement à partir de (3.9), (3.10) et (3.23) respectivement. L'estimateur du moment modifié de α peut être obtenu en résolvant l'équation non linéaire (3.14). De même, les estimateurs des moindres carrés et les estimateurs des moindres carrés pondérés de α peuvent être obtenus en minimisant respectivement (3.26) et (3.28) par rapport à α uniquement. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant où les EQM relatives moyennes sont indiquées entre parenthèses en regard de chaque estimation relative moyenne :

n	Méthode	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 2.5$
20	MLE	1.053(0.071)	1.052(0.069)	1.053(0.064)	1.053(0.063)	1.051(0.063)
	MME	1.043(0.293)	1.039(0.193)	1.042(0.147)	1.044(0.122)	1.039(0.116)
	PCE	0.926(0.055)	0.926(0.055)	0.928(0.058)	0.928(0.058)	0.926(0.055)
	LSE	1.062(0.085)	1.034(0.079)	1.047(0.081)	1.039(0.080)	1.045(0.090)
	WLSE	1.065(0.115)	1.043(0.076)	1.030(0.073)	1.015(0.069)	1.046(0.082)
	UBE	1.001(0.061)	1.000(0.060)	1.000(0.055)	1.000(0.055)	1.000(0.054)
50	MLE	1.022(0.024)	1.021(0.025)	1.020(0.022)	1.019(0.022)	1.022(0.022)
	MME	1.007(0.136)	1.023(0.089)	1.017(0.064)	1.021(0.055)	1.017(0.053)
	PCE	0.948(0.022)	0.947(0.022)	0.946(0.023)	0.946(0.023)	0.942(0.022)
	LSE	1.015(0.022)	1.014(0.029)	1.021(0.032)	1.020(0.030)	1.009(0.028)
	WLSE	1.013(0.020)	1.016(0.026)	1.018(0.028)	1.011(0.027)	1.009(0.025)
	UBE	0.999(0.026)	0.995(0.029)	1.000(0.021)	0.998(0.021)	1.002(0.021)

TABLEAU 4.1 – Tableau des estimations relatives moyennes et des EQM relatives moyennes de α lorsque λ est connu.

On observe dans le tableau [4.1] que la plupart des estimateurs surestiment généralement α , à l'exception de PCE, qui le sous-estime dans la plupart du temps et en considérant les EQM minimales, les PCE produisent les meilleurs résultats pour toutes les tailles d'échantillon et pour les différentes valeurs de α considérées ici. On constate que les EQM des UBE sont également assez proches de celles des PCE. Les courbes de la figure 4.2 illustrent ce comportement :

1. Fait de (se) reproduire en double.

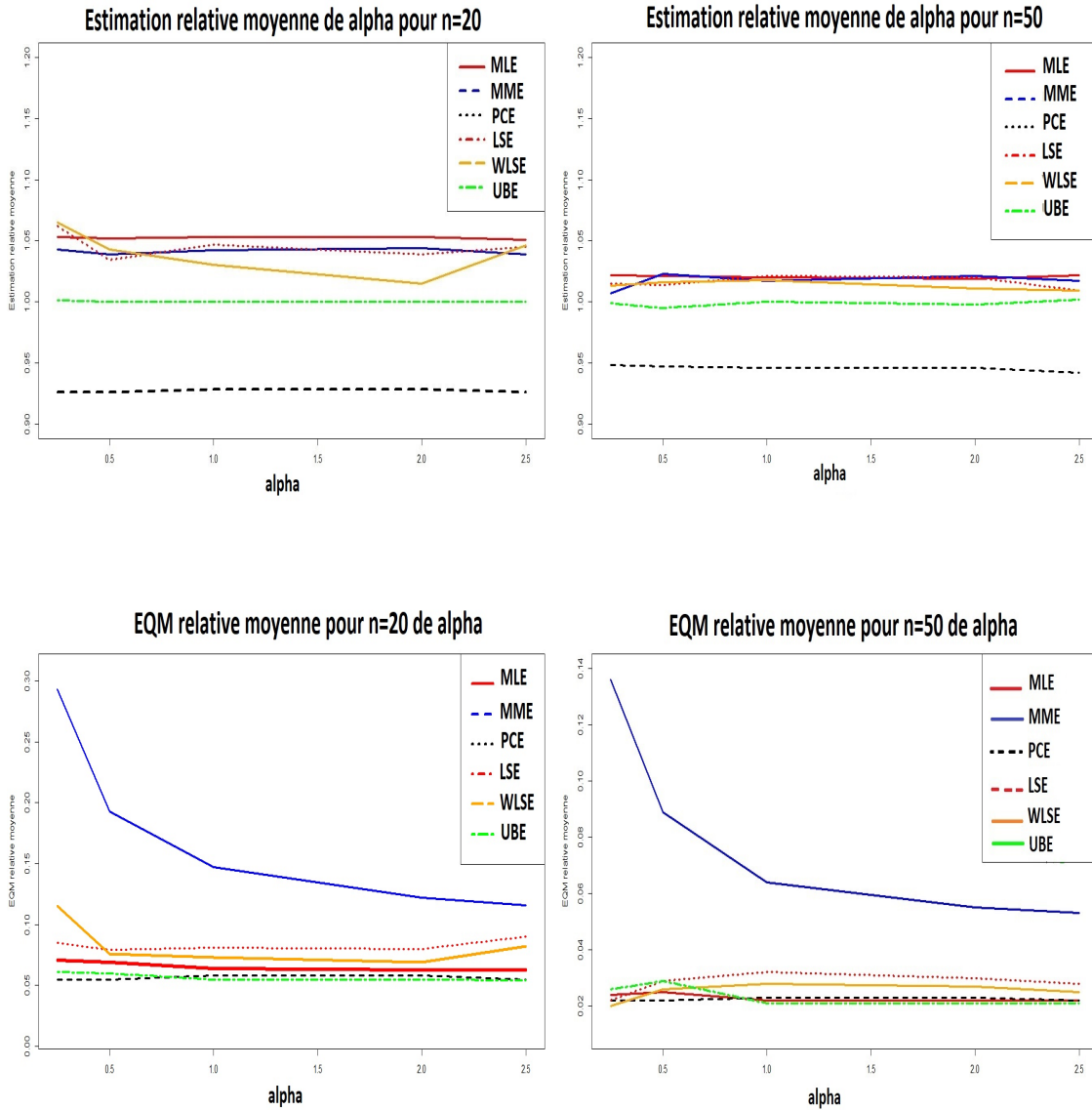


FIGURE 4.2 – Courbes représentatives des estimations relatives moyennes et des EQM relatives moyennes de α pour $n=20$ et $n=50$.

On sait que :

$$\begin{aligned}
 EQM(T_n) &= [b(T_n, \theta)]^2 + Var(T_n) \\
 \Leftrightarrow [b(T_n, \theta)]^2 &= EQM(T_n) - Var(T_n) \\
 \Leftrightarrow b(T_n, \theta) &= \pm \sqrt{EQM(T_n) - Var(T_n)} \quad .
 \end{aligned}$$

On obtient les résultats des biais relatifs moyens de α lorsque λ est connu pour $n = 20$ et $n = 50$ dans le tableau suivant :

n	Méthode	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 2.5$
20	MLE	± 0.2664568	± 0.2626770	± 0.2529806	± 0.2509964	± 0.2509964
	MME	± 0.5412898	± 0.4393116	± 0.3833989	± 0.3492774	± 0.3405799
	PCE	± 0.2345182	± 0.2345182	± 0.2408294	± 0.2408294	± 0.2345182
	LSE	± 0.2913549	± 0.2808695	± 0.2844076	± 0.2826441	± 0.2998128
	WLSE	± 0.3386020	± 0.2750478	± 0.2695391	± 0.2620139	± 0.2857469
	UBE	± 0.2469814	± 0.2449486	± 0.2345204	± 0.2345204	± 0.2323786
50	MLE	± 0.1549138	± 0.1581085	± 0.1483182	± 0.1483182	± 0.1483182
	MME	± 0.3687303	± 0.2982650	± 0.2529071	± 0.2344398	± 0.2301347
	PCE	± 0.3687303	± 0.1483064	± 0.1516404	± 0.1516404	± 0.1483064
	LSE	± 0.1482441	± 0.1702243	± 0.1788192	± 0.1731367	± 0.1672612
	WLSE	± 0.1413743	± 0.1612039	± 0.1672923	± 0.1642763	± 0.1580718
	UBE	± 0.1612244	± 0.1702742	± 0.1448906	± 0.1448906	± 0.1448906

TABLEAU 4.2 – Tableau des biais relatifs moyens de α lorsque λ est connu pour $n = 20$ et $n = 50$.

En ce qui concerne les biais du tableau [4.2], les UBE sont plus ou moins asymptotiquement sans biais, comme prévu. Les courbes de la figure 4.3 illustrent ce comportement :

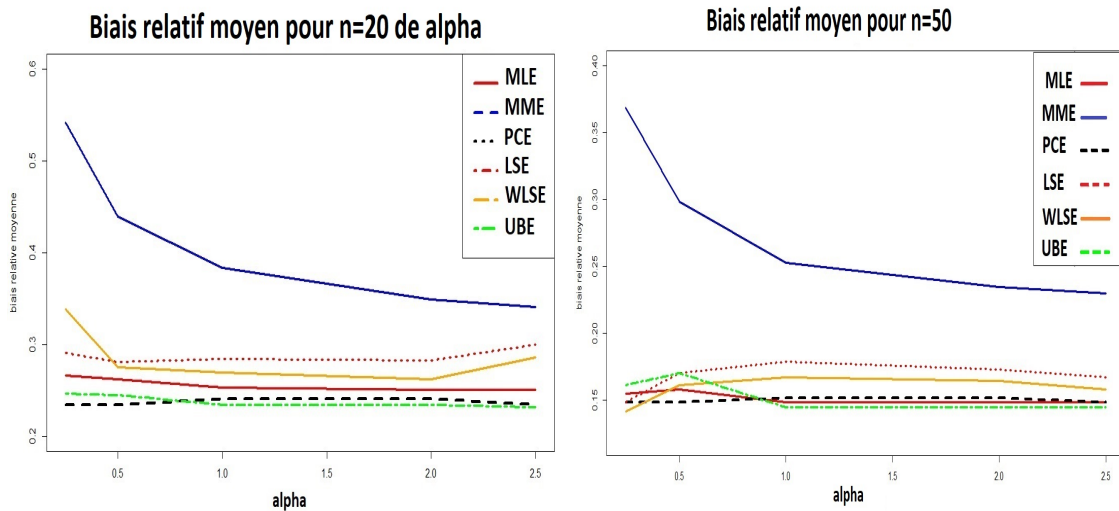


FIGURE 4.3 – Courbes représentatives des biais relatifs moyens de α lorsque λ est connu pour $n = 20$ et $n = 50$.

Dans le contexte des complexités de calcul, UBE, MLE et PCE sont les plus faciles à calculer. Elles n'impliquent pas la résolution d'équations non linéaires, alors que les MME, LSE et WLSE impliquent la résolution d'équations non linéaires ou la minimisation de certaines fonctions, et doivent être calculées par des processus itératifs. En comparant toutes les méthodes, nous concluons que pour un paramètre d'échelle connu, l'UBE devrait être utilisée pour estimer α .

4.2 Estimation de λ pour α connu.

Dans ce cas, le MLE de λ peut être obtenu en maximisant (3.11) par rapport à λ . Le MME et le PCE de λ peuvent être obtenus à partir de (3.15) et de (3.22) respectivement. Enfin,

le LSE et le WLSE peuvent être obtenus en minimisant (3.26) et (3.28) par rapport à λ seulement pour λ fixe. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

n	Méthode	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 2.5$
20	MLE	1.116(0.115)	1.078(0.068)	1.018(0.014)	1.010(0.007)	1.008(0.006)
	MME	1.074(0.068)	1.038(0.029)	1.019(0.014)	1.011(0.007)	1.008(0.006)
	PCE	0.981(0.310)	0.959(0.118)	0.959(0.057)	0.966(0.030)	0.966(0.025)
	LSE	1.087(0.158)	1.022(0.042)	1.007(0.017)	1.001(0.009)	1.002(0.006)
	WLSE	1.050(0.147)	1.033(0.048)	1.009(0.018)	1.005(0.008)	1.007(0.006)
50	MLE	1.104(0.079)	1.008(0.005)	1.004(0.003)	1.003(0.002)	0.000(0.000)
	MME	1.030(0.021)	1.013(0.010)	1.008(0.005)	1.004(0.003)	1.003(0.002)
	PCE	0.952(0.084)	0.955(0.041)	0.968(0.022)	0.974(0.012)	0.975(0.010)
	LSE	1.040(0.039)	1.004(0.016)	1.007(0.007)	1.003(0.003)	1.001(0.003)
	WLSE	1.013(0.037)	1.009(0.013)	1.005(0.006)	1.002(0.003)	1.001(0.003)

TABLEAU 4.3 – Tableau des estimations relatives moyennes et des EQM relatives moyennes de λ lorsque α est connu.

Dans le tableau [4.3], on observe qu'à l'exception du PCE, les autres estimateurs surestiment λ , PCE sous-estime λ dans la plupart des cas considérés. Les courbes de la figure 4.4 illustrent ce comportement :

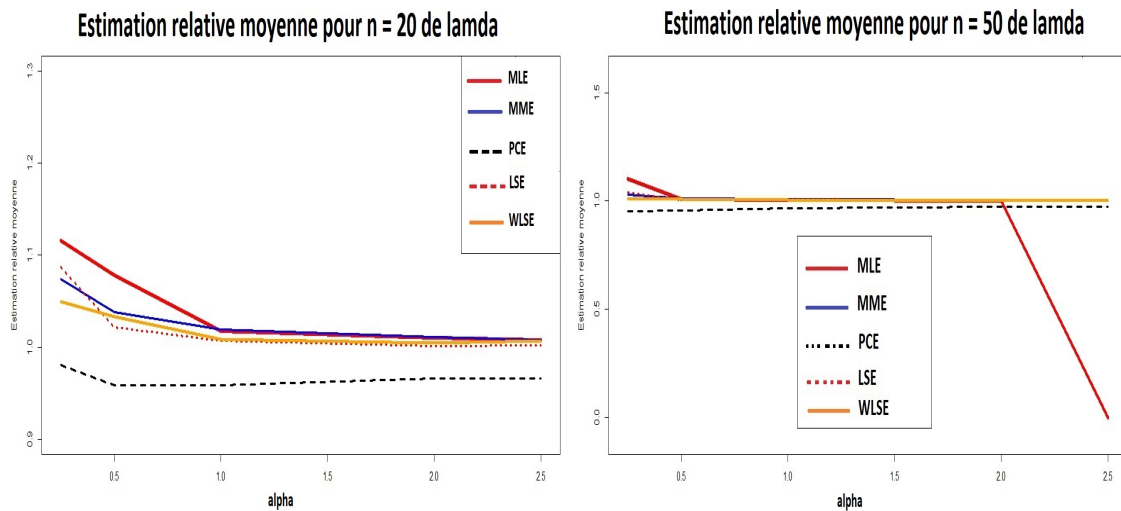


FIGURE 4.4 – Courbes représentatives des estimateurs relatifs moyens de λ lorsque α est connu pour $n = 20$ et $n = 50$.

En ce qui concerne les EQM dans le tableau [4.3], MME surpasse les autres dans la plupart des cas considérés ici. Les courbes de la figure 4.5 illustrent ce comportement :

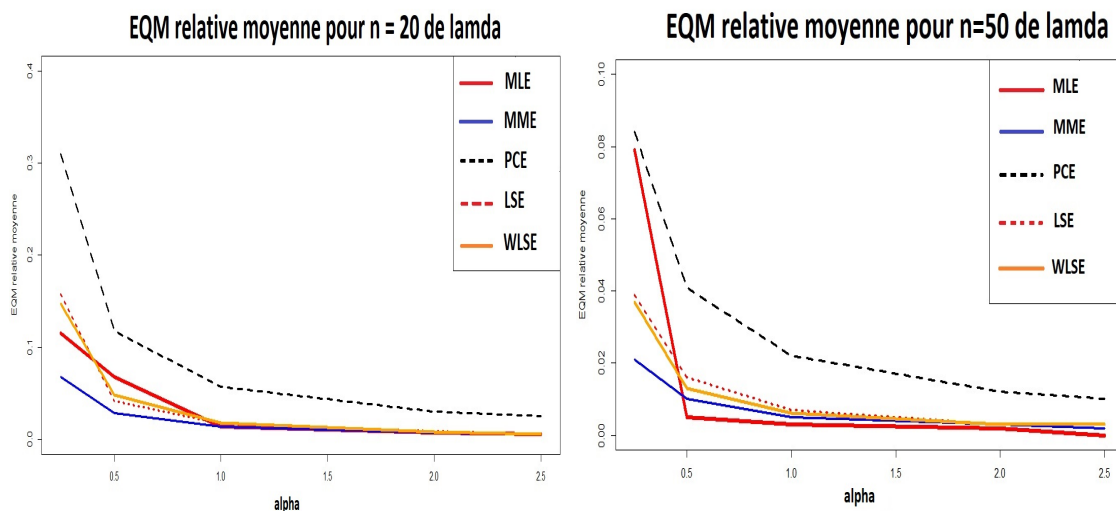


FIGURE 4.5 – Courbes représentatives des EQM relatives moyennes de λ lorsque α est connu pour $n = 20$ et $n = 50$.

On obtient également, les résultats des biais relatifs moyens de λ lorsque α est connu pour $n = 20$ et $n = 50$ dans le tableau suivant :

n	Méthode	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 2.5$
20	MLE	± 0.33561585	± 0.25619914	± 0.10787956	± 0.06810286	± 0.06031584
	MME	± 0.25934244	± 0.16810265	± 0.11514556	± 0.07911068	± 0.07251552
	PCE	± 0.5567040	± 0.3433938	± 0.2385777	± 0.1729720	± 0.1578585
	LSE	± 0.39582989	± 0.20169606	± 0.12522500	± 0.08764303	± 0.06842003
	WLSE	± 0.38289006	± 0.21818524	± 0.13268308	± 0.08720550	± 0.07486521
50	MLE	± 0.3673121	± 0.4570757	± 0.4592583	± 0.4603457	± 0.4625129
	MME	± 0.14449464	± 0.09939165	± 0.06984769	± 0.05365352	± 0.04334397
	PCE	± 0.28962959	± 0.20220114	± 0.14793681	± 0.10901972	± 0.09942485
	LSE	± 0.19680574	± 0.12542926	± 0.08205181	± 0.05227332	± 0.05227332
	WLSE	± 0.19228885	± 0.11390786	± 0.07729812	± 0.05454356	± 0.05454356

TABLEAU 4.4 – Tableau des biais relatifs moyens de λ lorsque α est connu pour $n = 20$ et $n = 50$.

En ce qui concerne les biais du tableau [4.4], les MME sont plus ou moins asymptotiquement sans biais et sont préférable par rapport aux autres pour toutes les tailles d'échantillon. Les courbes de la figure 4.6 illustrent ce comportement :

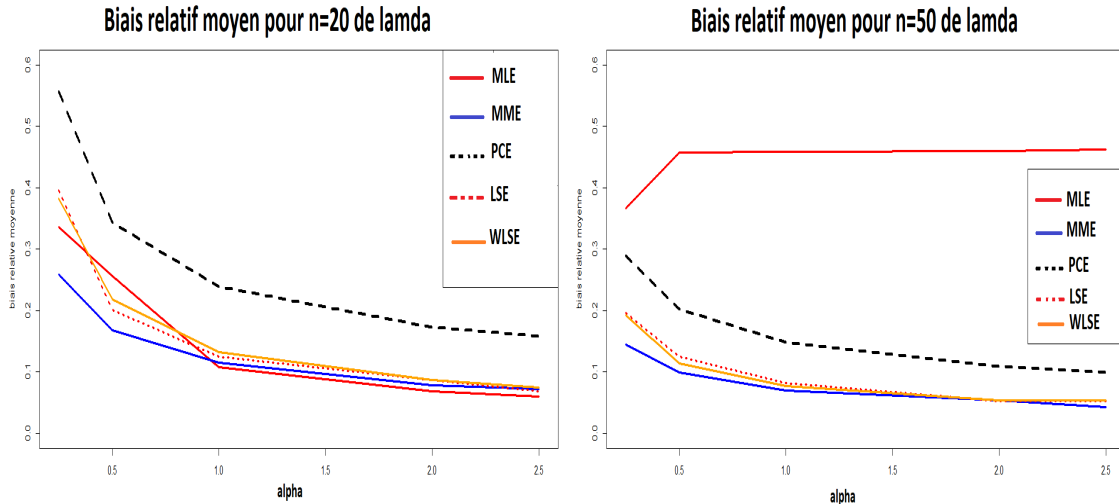


FIGURE 4.6 – Courbes représentatives des biais relatifs moyens de λ lorsque α est connu pour $n = 20$ et $n = 50$.

Si l'on compare la complexité de calcul des différents estimateurs, on observe que lorsque le paramètre de forme est connu, PCE et MME peuvent être calculés directement, alors que certaines techniques itératives sont nécessaires pour calculer MLE, LSE et WLSE. En conclusion, nous recommandons d'utiliser la MME pour estimer λ lorsque le paramètre de forme est connu.

4.3 Estimation de λ et α inconnus.

Nous considérons maintenant l'estimation de α et λ lorsque les deux sont inconnus. Nous considérons six estimateurs différents, à savoir MLE, MME, PCE, LSE, WLSE et MLME. Dans ce cas, le MLE de λ peut être obtenu à partir de la solution du point fixe (3.6) et le MLE de α peut être obtenu à partir de (3.4). Le MME de α ou MLME de α peut être obtenu à partir de (3.14) ou (3.32), puis MME de λ ou MLME de λ peut être obtenu à partir de (3.15) ou (3.33). Les PCE, LSE et le WLSE peuvent être obtenus en minimisant (3.19), [3.26] et (3.28) par rapport à α et λ respectivement. Les résultats pour α et λ sont présentés dans les tableaux suivants, pour une meilleure compréhension, les estimations relatives moyennes et les EQM relatives des différents estimateurs sont indiquées entre parenthèses en regard de chaque estimation :

n	Méthode	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 2.5$
20	MLE	1.111(0.354)	1.151(0.147)	1.167(0.210)	1.218(0.341)	1.244(0.435)
	MME	1.484(0.440)	1.388(0.405)	1.352(0.450)	1.410(0.630)	1.443(1.062)
	PCE	1.124(0.426)	1.023(0.322)	0.968(0.255)	0.999(0.423)	0.982(0.312)
	LSE	1.021(0.090)	1.035(0.151)	1.035(0.218)	1.061(0.361)	1.086(0.555)
	WLSE	1.043(0.090)	1.056(0.134)	1.060(0.272)	1.081(0.276)	1.121(0.553)
	MLME	1.048(0.215)	1.070(0.190)	1.103(0.225)	1.153(0.345)	1.181(0.467)
50	MLE	0.990(0.199)	1.106(0.070)	1.063(0.049)	1.080(0.071)	1.084(0.080)
	MME	1.203(0.150)	1.157(0.118)	1.136(0.107)	1.142(0.125)	1.152(0.141)
	PCE	0.958(0.163)	0.996(0.140)	0.951(0.106)	0.927(0.086)	0.924(0.095)
	LSE	1.025(0.034)	1.003(0.038)	1.014(0.055)	1.014(0.068)	1.028(0.081)
	WLSE	1.027(0.030)	1.028(0.034)	1.030(0.048)	1.035(0.062)	1.031(0.072)
	MLME	1.019(0.071)	1.019(0.058)	1.031(0.058)	1.047(0.074)	1.057(0.082)

TABLEAU 4.5 – Tableau des estimations relatives moyennes et des EQM relatives moyennes de α pour λ inconnu.

n	Méthode	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 2.5$
20	MLE	1.307(0.278)	0.951(0.107)	0.964(0.044)	0.967(0.021)	0.962(0.027)
	MME	1.224(0.126)	1.137(0.062)	1.087(0.038)	1.067(0.025)	1.064(0.023)
	PCE	0.947(0.123)	1.117(0.084)	1.052(0.028)	1.042(0.020)	1.041(0.018)
	LSE	1.048(0.172)	0.991(0.058)	0.978(0.032)	0.977(0.024)	0.984(0.021)
	WLSE	0.993(0.113)	1.017(0.054)	1.003(0.034)	0.990(0.021)	0.998(0.021)
	MLME	1.241(0.732)	1.134(0.263)	1.087(0.146)	1.068(0.096)	1.064(0.089)
50	MLE	1.160(0.059)	1.107(0.068)	1.023(0.010)	1.018(0.007)	1.017(0.007)
	MME	1.092(0.042)	1.056(0.023)	1.038(0.015)	1.026(0.010)	1.026(0.009)
	PCE	1.061(0.067)	0.960(0.027)	0.952(0.016)	0.957(0.010)	0.957(0.009)
	LSE	1.002(0.033)	0.995(0.019)	0.994(0.011)	0.994(0.009)	0.997(0.008)
	WLSE	0.987(0.042)	1.009(0.017)	1.004(0.010)	1.002(0.007)	0.998(0.007)
	MLME	1.085(0.149)	1.039(0.074)	1.029(0.045)	1.021(0.030)	1.026(0.029)

TABLEAU 4.6 – Tableau des estimations relatives moyennes et des EQM relatives moyennes de λ pour α inconnu.

Dans les tableaux [4.5] et [4.6], la plupart des estimateurs surestiment α et λ à tous les cas considérés, à l'exception de PCE, qui les sous-estime dans la plupart du temps, pour les tailles d'échantillon moyennes et grandes ($n=20$ et $n=50$). Les courbes de la figure 4.7 illustrent ce comportement :

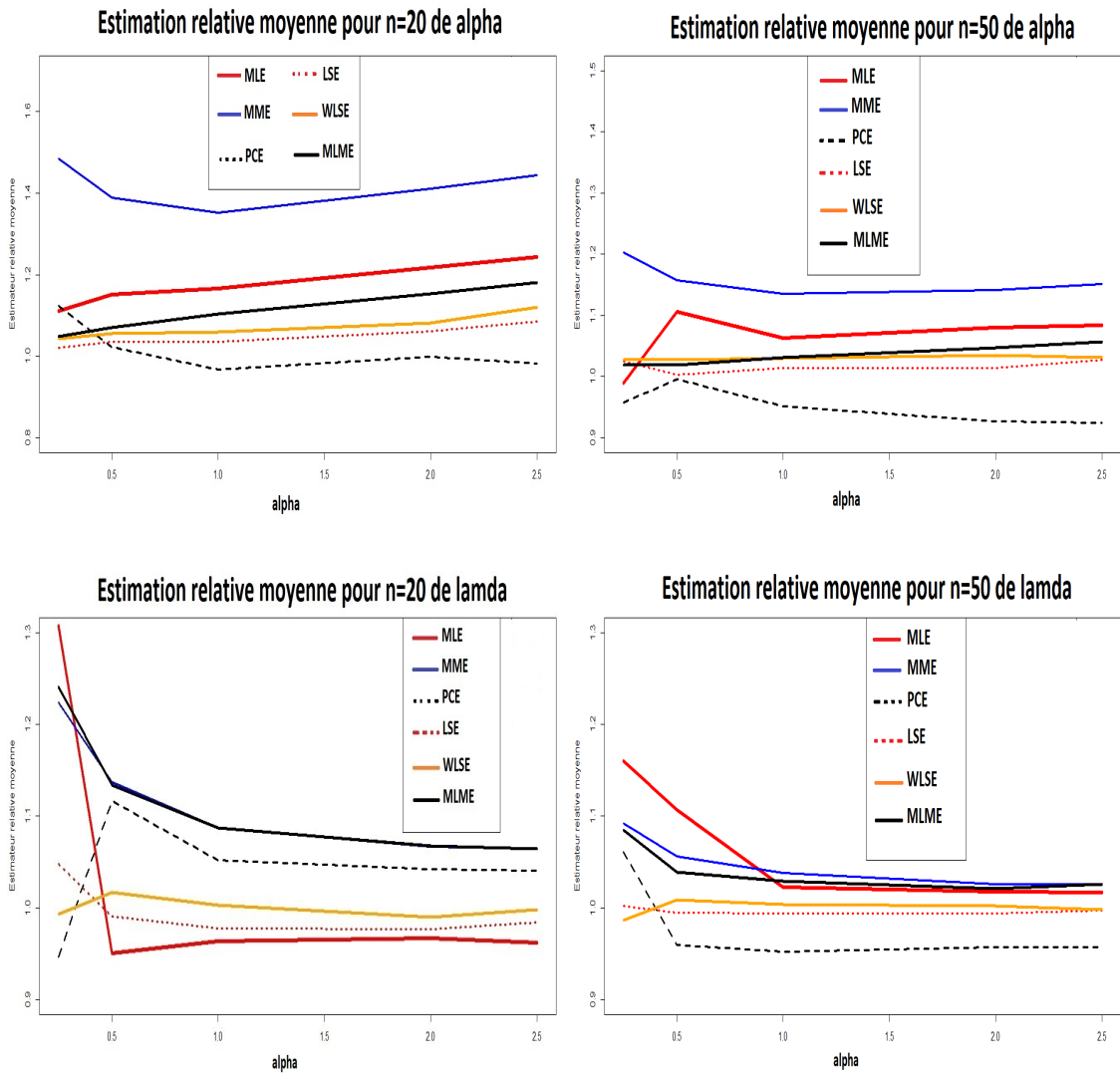


FIGURE 4.7 – Courbes représentatives des estimateurs relatifs moyens de λ et α pour $n = 20$ et $n = 50$ lorsque λ et α sont inconnus.

En ce qui concerne les EQM, WLSE surpasse les autres dans la plupart des cas considérés ici de λ et α . Les courbes de la figure 4.8 illustrent ce comportement :

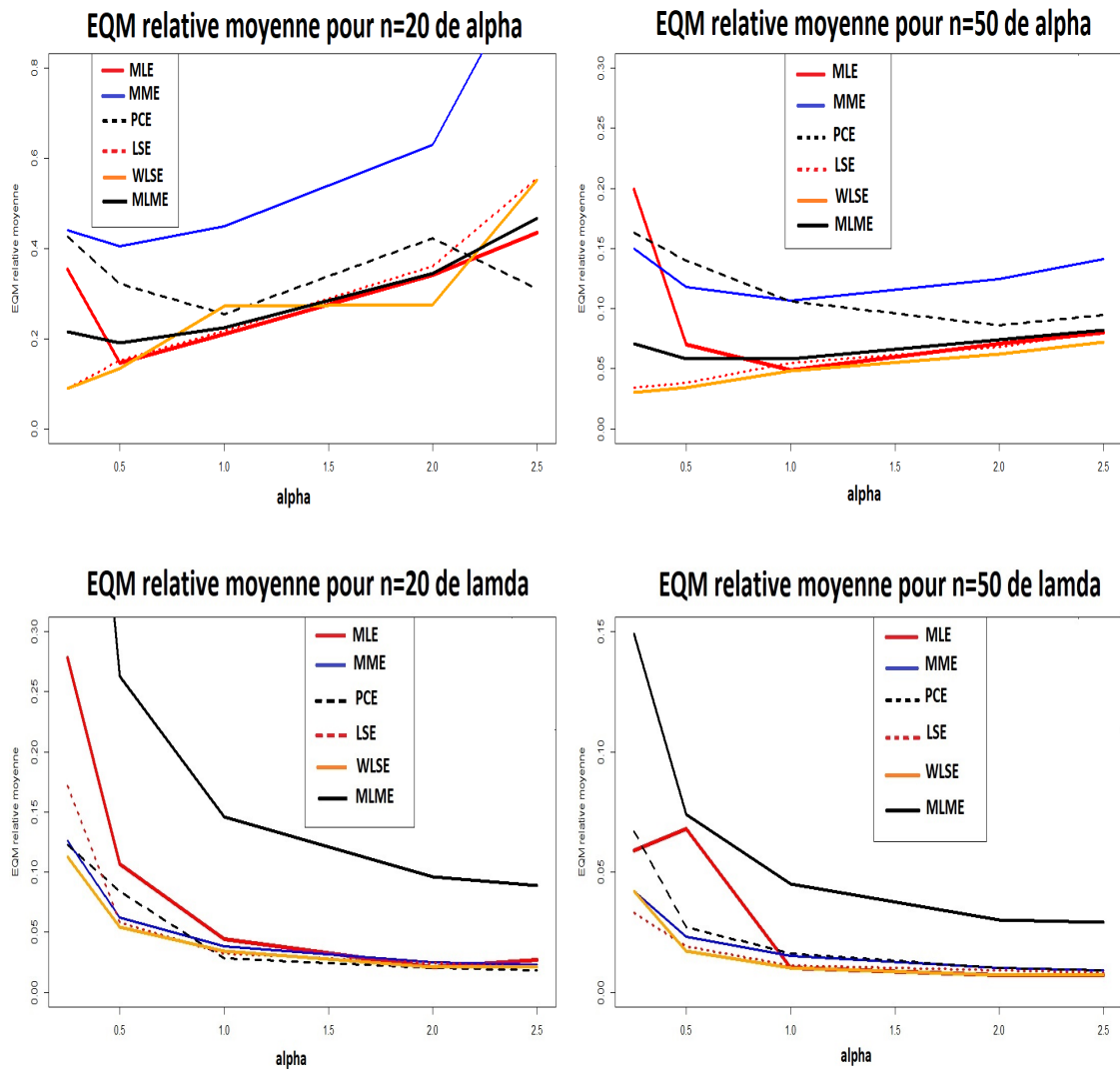


FIGURE 4.8 – Courbes représentatives des EQM relatives moyennes de λ et α pour $n = 20$ et $n = 50$ lorsque λ et α sont inconnus.

On obtient les résultats des biais relatifs moyens de λ et α pour $n = 20$ et $n = 50$ lorsque λ et α sont inconnus dans les tableaux suivants :

n	Méthode	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 2.5$
20	MLE	± 0.5926013	± 0.3797055	± 0.4551662	± 0.5815293	± 0.6574012
	MME	± 0.6613873	± 0.6343762	± 0.6689045	± 0.7921068	± 1.0292877
	PCE	± 0.6497286	± 0.5640455	± 0.5011460	± 0.6474159	± 0.5551102
	LSE	± 0.2988816	± 0.3877244	± 0.4661869	± 0.6002751	± 0.7445335
	WLSE	± 0.2984448	± 0.3647866	± 0.5206432	± 0.5244705	± 0.7430137
	MLME	± 0.4603319	± 0.4323257	± 0.4710685	± 0.5847269	± 0.6811061
50	MLE	± 0.4438763	± 0.2608183	± 0.2168553	± 0.2627284	± 0.2793317
	MME	± 0.3863929	± 0.3424901	± 0.3260360	± 0.3525613	± 0.3745657
	PCE	± 0.4026851	± 0.3730353	± 0.3242766	± 0.2918138	± 0.3068474
	LSE	± 0.1841203	± 0.1946800	± 0.2343081	± 0.2605769	± 0.2844298
	WLSE	± 0.1731771	± 0.1843646	± 0.2190669	± 0.2489785	± 0.2683101
	MLME	± 0.2659158	± 0.2402316	± 0.2402316	± 0.2714981	± 0.2858517

TABLEAU 4.7 – Tableau des biais relatifs moyens de α pour λ inconnu.

n	Méthode	$\alpha=0.25$	$\alpha=0.5$	$\alpha=1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha=2.5$
20	MLE	± 0.50400427	± 0.28813243	± 0.14149311	± 0.05458663	± 0.05495726
	MME	± 0.3485503	± 0.2397651	± 0.1829954	± 0.1431339	± 0.1359680
	PCE	± 0.3454248	± 0.2834048	± 0.1559433	± 0.1277431	± 0.1196591
	LSE	± 0.4136553	± 0.2389785	± 0.1763823	± 0.1520220	± 0.1418122
	WLSE	± 0.3359871	± 0.2321364	± 0.1840850	± 0.1445244	± 0.1445244
	MLME	± 0.8523851	± 0.5075040	± 0.3749137	± 0.3009324	± 0.2890680
50	MLE	± 0.23395192	± 0.25245495	± 0.07571988	± 0.05228288	± 0.05228288
	MME	± 0.20305960	± 0.14910801	± 0.11930298	± 0.09608954	± 0.09073698
	PCE	± 0.25457357	± 0.15750460	± 0.11750617	± 0.08836119	± 0.08250879
	LSE	± 0.18162792	± 0.13779949	± 0.10482700	± 0.09480875	± 0.08937953
	WLSE	± 0.20477182	± 0.13012110	± 0.09965691	± 0.08325563	± 0.08325563
	MLME	± 0.3859164	± 0.2719035	± 0.2119705	± 0.1730072	± 0.1700926

TABLEAU 4.8 – Tableau des biais relatifs moyens de λ pour α inconnu.

Dans le tableau [4.7], on peut mentionner que pour toutes les méthodes, les biais de l'estimation α sont assez sévères, en particulier pour des tailles d'échantillon moyennes ($n = 20$). Une technique de correction de biais comme le jackknife peut être utilisée à des fins pratiques, bien qu'elle ne soit pas poursuivie ici. En comparant les performances de tous les estimateurs de α , on observe qu'en ce qui concerne les biais, pour $n = 50$, le WLSE surpasse marginalement le LSE.

Lors de l'estimation de λ , dans le tableau [4.8], les biais du WLSE sont inférieurs à ceux des autres estimateurs dans la plupart du temps. Les courbes de la figure 4.9 illustrent ce comportement :

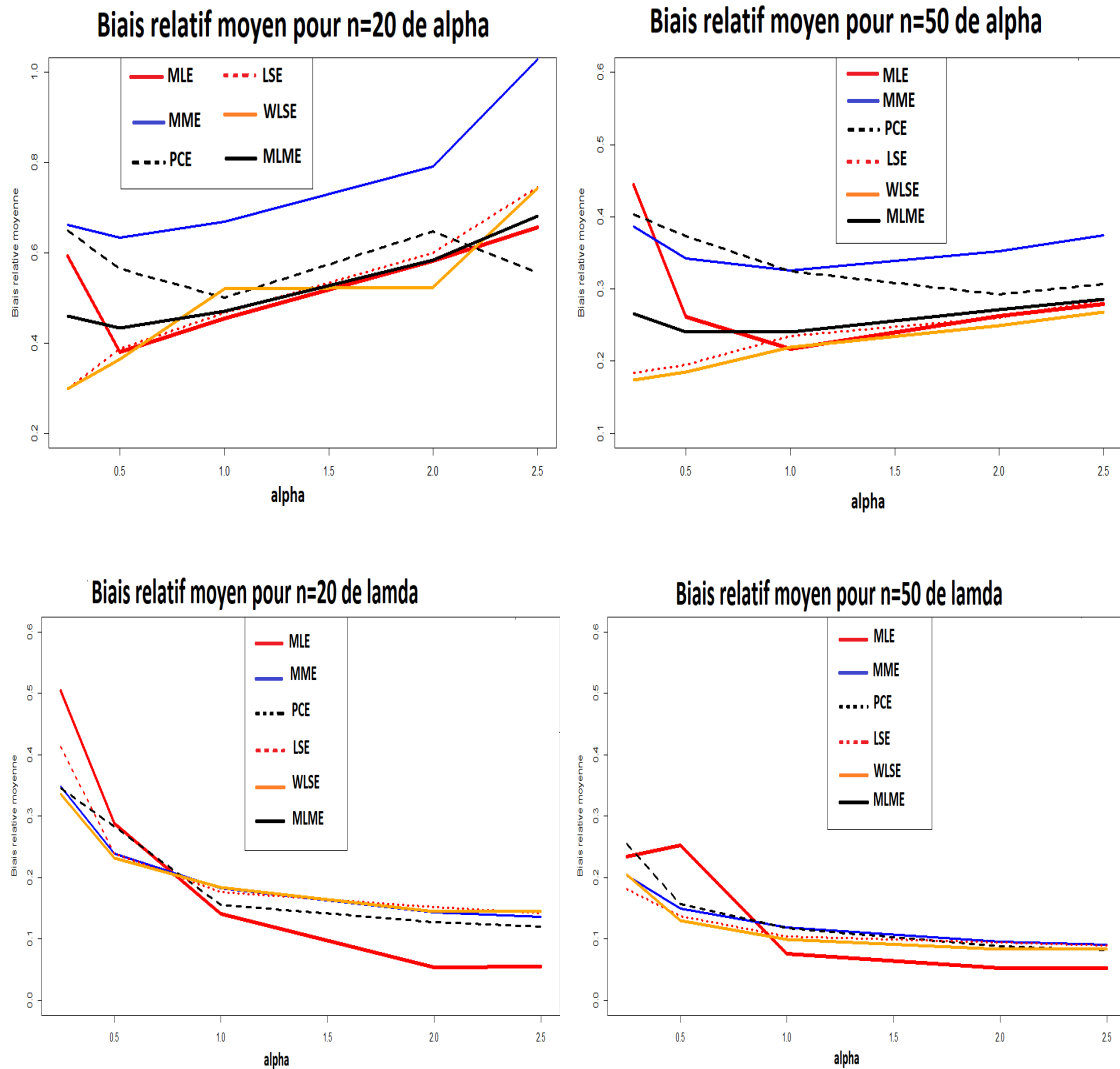


FIGURE 4.9 – Courbes représentatives des biais relatifs moyens de λ et α pour $n = 20$ et $n = 50$ lorsque λ et α sont inconnus.

Du point de vue informatique, le LSE et le WLSE impliquent une optimisation à deux dimensions alors que les autres estimateurs n'impliquent qu'une dimension. Bien que le WLSE puisse être obtenu en effectuant une optimisation à deux dimensions, nous recommandons de l'utiliser pour l'estimation de λ et α pour $n = 20$ et $n = 50$ lorsque λ et α sont inconnus.

Conclusion

En conclusion, nous nous sommes intéressés à des méthodes d'estimation paramétrique de la distribution de Rayleigh généralisée. L'estimation paramétrique de la distribution a été effectuée par : la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode du moment modifié, la méthode basée sur les percentiles, la méthode des moindres carrés, la méthode des moindres carrés pondérés et la méthode du L-moment modifié et on a aussi comparé la performance de ses différentes méthodes.

Des données d'estimation pour les différentes méthodes de la distribution ont été simulées à travers des simulations de Monte-carlo vu que certaines estimations étaient difficiles voire impossibles à calculer on a fait recours à cette méthode et nous retenons en ce qui concerne les estimations, la plupart des estimateurs surestime les deux paramètres dans la plupart des cas considérés ici, en ce qui concerne les erreurs quadratiques moyennes on observe : pour un paramètre d'échelle connu, l'UBE devrait être utilisé pour estimer α ; pour le paramètre de forme connu, la MME devrait être utilisée pour estimer λ et pour λ et α inconnus, WLSE devrait être utilisé pour l'estimation de λ et α pour $n = 20$ et $n = 50$. Par ailleurs, en guise de perspectives nous pouvons, pour de futur recherche élargir ce travail sur l'estimation paramétrique de la distribution de Rayleigh généralisée pour $n = 10, 30$ et 100 et pourquoi pas sur l'estimation non-paramétrique de la distribution de Rayleigh généralisée.

Bibliographie

- [1] Ahmad K.E., Fakhry M.E., Jaheen Z.F. (1997). Empirical Bayes estimation of $P(Y < X)$ and characterization of Burr-type X model, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 64, 297-308.
- [2] Burr I.W. (1942). Cumulative frequency distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 13, 215-232.
- [3] David, H.A. (1981). *Order Statistics*, 2nd Edition, Wiley, New York.
- [4] Elisa T. Lee, John Wenyu Wang (2013). *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, Third Edition, Wiley.
- [5] Gupta R.D., Kundu D. (2002). Generalized exponential distribution : different methods of estimation, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 59, 315-337.
- [6] Hosking J.R.M. (1990). L-Moment : Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics, *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B*, vol. 52, 105-124.
- [7] Jaheen Z.F. (1995). Bayesian approach to prediction with outliers from the Burr type X model, *Microelectron. Rel.*, vol. 35, 45-47.
- [8] Jaheen Z.F. (1996). Empirical Bayes estimation of the reliability and failure rate functions of the Burr type X failure model, *Journal of Applied Statistical Science*, vol. 3, 281-288.
- [9] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. (1995). *Continuous Univariate Distribution Vol. 1, 2nd Ed.*, New York, Wiley.
- [10] Kao J.H.K. (1958). Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies, *Transactions of IRE-Reliability and Quality Control*, vol. 13, 15-22.
- [11] Kao J.H.K. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life testing electron tube, *Technometrics*, vol. 1, 389-407.
- [12] Karian Z.A., and Dudewicz E.J. (1999). *Modern Statistical Systems and GPSS Simulations*, 2nd Edition, CRC Press, Florida.
- [13] Mann N.R., Schafer R.E. and Singpurwalla N.D. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, Wiley, New York.
- [14] Mudholkar G.S., Srivastava D.K. and Freimer M. (1995). The exponentiated Weibull family ; a re-analysis of the bus motor failure data, *Technometrics*, vol. 37, 436-445.
- [15] Mudholkar G.S., Srivastava D.K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure data, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 42, 299-302.
- [16] Morris H. DeGroot, Mark J. Schervish (2012). *Probability and Statistics*, Fourth Edition, Addison-Wesley.

- [17] Pierre Beaudoin mai 2007. Mémoire de recherche présenté à l'université du Québec à Rimouski, *disponible sur [https://semaphore.uqar.ca/id/eprint/16/1/Pierre Beaudoin mai 2007.pdf](https://semaphore.uqar.ca/id/eprint/16/1/Pierre_Beaudoin_mai_2007.pdf)*.
- [18] Raqab M.Z. (1998). Order statistics from the Burr type X model, *Computers Mathematics and Applications*, vol. 36, 111-120.
- [19] Raqab M.Z., Kundu D. (2003). Burr Type X distribution ; revisited, *submitted for publication*.
- [20] Rodriguez R.N. (1977). A guide to Burr Type XII distributions, *Biometrika*, vol. 64, 129-134.
- [21] Sartawi H.A., Abu-Salih M.S. (1991). Bayes prediction bounds for the Burr type X model, *Communications in Statistics Theory and Methods*, vol. 20, 2307-2330.
- [22] Surles J.G., Padgett W.J. (1998). Inference for $P(Y < X)$ in the Burr Type X model, *Journal of Applied Statistical Science*, 225-238.
- [23] Smith R.L. Maximum likelihood estimation in a class of non-regular cases, *Biometrika*, 1985;72 :67-90.
- [24] Surles J.G., Padgett W.J. (2001). Inference for reliability and stress-strength for a scaled Burr Type X distribution, *Lifetime Data Analysis*, vol. 7, 187-200.
- [25] Surles J.G., Padgett, W.J. (2004). Some properties of a scaled Burr type X distribution, *to appear in the Journal of Statistical Planning and Inference*.
- [26] Swain J., Venkatraman S., Wilson J. (1988). Least squares estimation of distribution function in Johnson's translation system, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 29, 271-297.
- [27] Wingo D.R. (1993). Maximum likelihood methods for fitting the Burr Type XII distribution to multiply (progressively) censored life test data, *Metrika*, vol. 40, 203-210.

Annexe A : Méthode du point fixe

Elle consiste à d'abord remplacer l'équation $f(x) = 0$ par une équation $g(x) = x$.

Définition 4.1 Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dérivable et telle que

$$|g'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{avec} \quad 0 \leq K < 1$$

alors, pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ converge vers l'unique point fixe de g .

Un critère d'arrêt souvent utilisé consiste à choisir a priori une tolérance ϵ et à terminer l'algorithme lorsque

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon \quad .$$

Comme nous travaillons sur des données de durées de vie, la fonction g précédente est

$$\text{donnée par } h(\mu) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\mu x_i^2}}{(1-e^{-\mu x_i^2})}}{\sum_{i=1}^n \ln(1-e^{-\mu x_i^2})} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\mu x_i^2}}{(1-e^{-\mu x_i^2})} \right]^{-1} \quad \text{où}$$
$$v(\lambda^2) = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x_i)^2}}{(1-e^{-(\lambda x_i)^2})} \right]^{-1} \quad \text{et } \mu = x \text{ où } \lambda^2 = x \quad .$$

Programme 1 POUR TROUVER L'ESTIMATEUR DE λ DU MLE LORSQUE α EST CONNU DE $v(\lambda^2) = \lambda^2$.

```
> pointfixe=function(htn,mu0, iter){
+   df_point=data.frame(mu1=numeric(0), mu2=numeric(0)
+                       , y1=numeric(0), y2=numeric(0))
+   munew=mu0
+   for (i in 1:iter){
+     muold=munew
+     munew=htn(muold)
+     df_point[2*i-1,]=c(muold, muold, muold, munew)
+       #point vertical(mu1=mu2)
+     df_point[2*i,]=c(muold, munew, munew, munew)}
+       #point horizontal
+   return(sqrt(sqrt(munew)))}
> s=rweibull(1,2,1)
> n=20
> t=0
> alpha=2
```

```

> h=function(mu) {
+   for (i in 1:n){
+     t=(2/n)/(s**2-((alpha-1)*(s**2)*exp(-mu*s**2)/
+                   (1-exp(-(mu*s**2)))))+t}
+     return(t)}
> pointfixe(h,3,iter=5)

```

Résultat :

n	Estimateur	Valeur
20	λ	1.839285
50	λ	1.829145

Programme 2 POUR TROUVER L'ESTIMATEUR DE λ DU MLE LORSQUE α EST INCONNU DE $h(\mu) = \mu$.

```

pointfixe=function(htn,mu0, iter){
+   df_point=data.frame(mu1=numeric(0), mu2=numeric(0),
+                       y1=numeric(0), y2=numeric(0))
+   munew=mu0
+   for (i in 1:iter){
+     muold=munew
+     munew=htn(muold)
+     df_point[2*i-1,]=c(muold, muold, muold, munew)
+     df_point[2*i,]=c(muold, munew, munew, munew)
+   }
+   return(abs(munew))}
> s=rweibull(1,2,1)
> n=20
> t=0
> h=function(mu) {
+   for (i in 1:n){
+     u=(s**2*exp(-mu*(s**2))/log(1-exp(-mu*(s**2)))) + s/n +
+       (1/n)*((s**2*exp(-mu*(s**2)))/(1-exp(-mu*(s**2))))
+     t=1/u + t
+     return(t)}
+   }
> s=pointfixe(h,1,iter=00.1)
> sqrt(s)

```

Résultat :

n	Estimateur	Valeur
20	λ	1.72064
50	λ	1.784202

Annexe B : Méthode de Newton-Raphson

C'est l'une des méthodes d'optimisation les plus utilisées en Statistique.

C'est une méthode numérique pour résoudre les racines d'une fonction.

Il s'agit d'un algorithme itératif basé sur l'équation suivante :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ et la relation de récurrence est : } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dans notre cas on a :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

et on obtient l'algorithme de [3.14] comme suit :

Programme 3 POUR TROUVER L'ESTIMATEUR DE α DU MME.

```
> alphak=0.5; niter=1; n=20; tol=0.00002; f=0
> myf = fonction(alpha){
+   for (i in 0:n){
+     f=1/(i+alpha+1)**2 - 1/(i+1)**2 + f}
+   return(f)}
> h=0.0001
> for (i in 1:niter){
+   q=(h/2)*((myf(alphak+h)-myf(alphak-h))
+             /(myf(alphak+h)-2*myf(alphak)+myf(alphak-h)))
+   alphanew=alphak-q
+   if ((alphanew-alphak) < tol)
+     break
+   alphak=alphanew
+   print(alphanew)}
```

On obtient le résultat suivant :

n	Estimateur	Valeur
20	α	1.086791
50	α	1.087922

Enfin, pour éviter à l'ordinateur de tourner sans s'arrêter lorsqu'il n'y a pas convergence, il est évidemment **indispensable de toujours** mettre un critère limitant le nombre total d'itérations.

Annexe C : Méthode de minimisation avec R

Programme 4 POUR TROUVER LES ESTIMATEUR DE α ET λ DU LSE.

```

n=20
t=0
> f = fonction(z,x=rweibull(1,2,1)){
+   for (i in 1:n){
+     lamda = z[1]
+     alpha = z[2]
+     t = ((1-exp(-(x*lamda)**2))**alpha - i/n+1)**2 + t
+     return(t)}}
> re =nlm(f,c(1,1))
> re

```

On obtient le résultat suivant :

n	minimum	estimation λ	estimation α	gradient λ	gradient α	itérations
20	1.023	1.0004	1.00008	15944	1221127	2
50	0.977	1.0003	0.999394	13835	344.4555	5

Programme 5 POUR TROUVÉE LES ESTIMATEUR DE α ET λ DU WLSE.

```

> n=20 ; t=0
> f = fonction(z,r=rweibull(1,2,1)){
+ for (i in 1:n){ lamda = z[1]
+   + alpha = z[2]
+     + t = ((n+1)**2*(n+2)/i*(n-i+1))*
+       ((1-exp(-(r*lamda)**2))**alpha - i/n+1)**2+t
+     + return(t)}}
> re =nlm(f,c(1,1))
> re

```

On obtient le résultat suivant :

n	minimum	estimation λ	estimation α	gradient λ	gradient α	itérations
20	206766.3	1.0044	1.003852	175228423	-166850065	2
50	7619358	1.0014	1.002062	530529648	-164059231	3