UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Analyse et Géométrie Complexe

Thème : Le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur l'espace de Fock

Présenté par : Marie Faye

Sous la direction de : Dr Mamadou Eramane BODIAN & Dr Souhaibou SAMBOU

Sous la supervision du : Pr Marie Salomon SAMBOU

Soutenu publiquement le 13 **Mars** 2023 **devant le jury ci-après :**

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Clément MANGA	Professeur Assimilé	Président	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Superviseur	UASZ
Timack NGOM	Maitre Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Chérif Mamina COLY	Chercheur	Examinateur	UASZ
Mamadou Eramane BODIAN	Maître de Conférences Assimilé	Directeur	UASZ
Souhaibou SAMBOU	Chercheur	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2021-2022

Table des matières

Remerciements

Il est très important pour moi, de remercier avec beaucoup de coeur les personnes qui m'ont accompagnées, encouragées et ont permis, quelle que fut la manière, d'en être arrivée là.

Ne sachant pas encore avec précision quelle branche des mathématiques m'attirerait, j'assiste en Licence au cours d'analyse complexe d'une variable, enseigné par Docteur Mansour SANE. Je découvre là une inspiration qui me pousse à suivre la suite de ce cours en master 1 et 2 par le Professeur Marie Salomon SAMBOU marquant alors indéniablement mon chemin.

Je tiens tout d'abord à remercier grandement mes directeurs de mémoire, Docteur Mamadou Eramane BODIAN et Docteur Souhaibou SAMBOU, non seulement pour m'avoir fait confiance depuis tout ce temps, mais également pour leur gentillesse, leurs conseils, leur disponibilité, leurs remarques scientifiques constructives et leurs grandes qualités humaines.

Je remercie très sincèrement Professeur Marie Salomon SAMBOU pour toute la qualité de connaissances qu'il nous a transmise, de nous avoir fait aimer son domaine et d'avoir accepté de superviser notre travail. MERCI INFINIMENT !

Je suis honoré par la présence du Professeur Clément MANGA qui a accepté de présider le jury de ma soutenance, de Docteur Timack NGOM et de Docteur Chérif Mamina COLY qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membres de mon jury, je les remercie sincèrement.

Je tiens à exprimer une profonde gratitude envers tous les professeurs du département de mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont dispensé. Leur vision des mathématiques reste sans hésitation un modèle pour nous. Sans oublier le Professeur Diaraf SECK de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar. Un grand merci à vous !

Je remercie très chaleureusement les responsables de ZIP(Ziguinchor Institut Polytechnique) Monsieur Alassane TAMBOURA et Docteur Souhaibou SAMBOU, pour m'avoir permis d'effectuer mes recherches dans leurs locaux.

Je remercie également tous mes camarades du groupe de recheche analyse et géométrie complexe : Malick FAYE, Abdourahmane DIATTA et Jésus Christ BASSE.

Je profite de l'occasion pour remercier toute la deuxième et troixième promo MPI. Mes remerciements s'adressent en particulier à Lamine MANE, Doudou MANE, Ibrahima NDAO, Amidou DIOP, Amadou SEYDI, Ibrahima TRAORE, Thierno DIALLO, Pape Aly CISSE, Abdoulaye DIOUF.

J'ai eu la chance d'échanger avec les posdocts et les doctorants du département de mathématiques de l'UASZ. J'ai pu profiter de leurs divers points de vue et connaissances des mathématiques. Je les remercie à cet égard. En particulier, je remercie Papa BADIANE Doctorant à l'UASZ, Docteur Chérif Mamina COLY, Docteur Abdoulaye DIOUF, Docteur Souhaibou SAMBOU et Docteur Sény DIATTA.

Mention spécial à mes tuteurs Docteur Timack NGOM et sa femme Hélène FALL pour tous les encouragements et pour tous les incommensurables sacrifices consentis pour toute ma formation. Je les remercie vivement d'avoir su me transmettre le soutien nécessaire.

J'en profite pour exprimer ma reconnaissance envers ma plus que sœur Angélique siga SAGNE qui n'hésite pas en aucun cas pour satisfaire mes besoins, Merci INFINIMENT ! sans oublier sa sœur Marième SAGNE et toute la famille SAGNE de Soudiane.

Je remercie chaleureusement mon père Mor FAYE et Ma mère Marie BAKHOUM pour le soutien et les encouragements qu'ils ne cessent de renouveler, une page entière ne suffira pas pour les remercier. Je suis infiniment reconnaissant en vers mes parents pour l'éducation qu'ils m'ont donné et de m'avoir appris à acquérir la connaissance avec passion et patience. J'en profite pour exprimer toute ma gratitude à mes très chers frères et sœurs qui n'ont pas hésité à me soutenir moralement et financièrement dans mes études et surtout ils n'arrêtent pas de m'encourager. MERCI INFINIMENT !

J'adresse mes sincères remerciements :

A ma tante Marie NDIAYE et toute la famille FAYE à Tilène Ziguinchor.

Maman Aïssatou BARRY, ma sœur Mariama DIALLO et toute la famille DIALLO à Alwar Ziguinchor.

Mes plus que sœurs (Dieynaba SAMB, Awa BARRY, Souhadou DIALLO, Fatou DIEME, Fatou DIENG, Lala DIEME).
Mes filleules (Fatou DIEYE, Mariama CISSOKHO, Khady KANE, Yacine THIAM, Jeanne Marie BAKHOUM, Saly DIALLO).

Mes amis d'enfances (Alpha FAYE, Babacar SENE, Arphang FAYE, Jean Latyr NDOUR, Coumba FAYE, Pascal BAKHOUM, Fatou FAYE, Marie FAYE, Thioro FAYE, Léontine BAKHOUM, Héléne NDOUR, Marie SENGHOR, Rosalie NDOUR, Yvette Dalo DIOR, Fama BAKHOUM, Ma Djiguéne NDOUR, Marth NDOUR).

Mes neveux (Ablaye FAYE (Cauchy), Tapha GUEYE (Tiger), ELhadji WADE.)
Toute la team J.U.D.L (Jeunes Unis pour le Développement de Loul).

Je remercie toute ma famille pour le soutien et les encouragements, que ce travail soit le témoignage sincère et affectueux de ma profonde reconnaissance. Et pour tout ce que vous avez fait pour moi ! Enfin à tous ceux qui ont participé à ma réussite.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :
A ma Mère et mon Père, pour leur confiance,
amour et surtout leurs conseils précieux durant toutes mes années d'études ;
A mes frères et mes sœurs ;
A tout l'entourage familial ;
A tous mes amis qui se connaissent eux même sans citer leurs noms, sans oublier tout ce qui tenaient à moi ;
Et bien sur à moi-même.

Résumé

Dans ce travail, l'objectif est de détailler les travaux de F.Haslinger qui consistent à déterminer le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur l'espace de Fock $L^2(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$ avec $\varphi(z) = |z|^2$. Pour se faire, nous avons dans un premier temps calculé le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $\square_{\varphi,0}$ et celui de $\square_{\varphi,1}$ pour $\varphi(z) = |z|^2$ dans le cas unidimensionnel. Puis dans le cas multidimensionnel, nous calculons le spetre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $\square_{\varphi,q}$ pour $\varphi(z) = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$. Ensuite nous montrons que le Laplacien complexe de Witten noté $\Delta_\varphi^{(0,q)}$ a le même spectre que le Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $\square_{\varphi,q}$. Enfin, nous donnons quelques applications sur la compactification du $\bar{\partial}$-Neumann $N_{\varphi,q}$ en utilisant :

- les valeurs propres de la matrice de Lévi.
- la théorie spectral sur les opérateurs de Schrödinger dans la mécanique quantique.

Introduction

Le problème du $\bar{\partial}$-Neumann à poids est l'un des problèmes les plus importants dans la théorie de l'analyse complexe de plusieurs variables. Spécialement l'analyse dans les espaces L^2 à poids où ce problème est d'une importance capitale et est devenue indispensable pour le sujet depuis les travaux fondamentaux de Kohn en 1963. Une propriété importante de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann à poids (noté $N_{\varphi,q}$) est qu'il peut être utilisé dans les espaces L^2 à poids pour fournir une solution bornée de l'équation $\bar{\partial}u = f$ pour toute $(0,q)$-forme différentielle f $\bar{\partial}$-fermée. Cette solution est appelée solution canonique et est donnée par

$$u = \bar{\partial}^* N_{\varphi,q} f.$$

La théorie spectrale est un problème intéressant en analyse complexe de plusieurs variables. Le Laplacien du $\bar{\partial}$-Neumann sur un domaine borné Ω dans $\mathbb{C}^n$ est le Laplacien qui est inversible et qui agit diagonalement sur les $(0,q)$-formes différentielles. C'est un opérateur densément défini, positif, fermé et auto-adjoint. En tant que tel, son spectre est un sous ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}^+$. Le comportement spectrale du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur des domaines spéciaux sert souvent de modèle pour la théorie générale. Le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur la boule et son complémentaire a été calculé par G. B. Folland en 1972 voir [12]. Et en 2007, S. Fu a déterminé le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur les polydisques voir [13]. Dans notre travail, nous nous sommes intéressés aux calculs du spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur l'espace de Fock due à Friedrich Haslinger. L'espace de Fock est défini comme suit :

$$L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2}) = \{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{C}^n} | f(z) |^2 e^{-|z|^2} d\lambda(z) < \infty\}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.
Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction poids plurisousharmonique de classe C^2, notons $L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$ l'espace des $(0,q)$-formes différentielles à coefficients dans $L^2(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$ pour $1 \leq q \leq n$.
Nous commencerons par calculer le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $\Box_{\varphi,0}$ et celui de $\Box_{\varphi,1}$. Le résultat est le suivant :

Th*é*orème 0.1.

Soient $n = 1$ et $\varphi(z) = |z|^2$. Le spectre du Laplacien $\Box_{\varphi,0}$ est constitué de tous les entiers positifs $\{0, 1, 2, \cdots\}$. Leur multiplicité est infinie.
Le spectre du Laplacien $\Box_{\varphi,1}$ est constitué de tous les entiers strictements positifs $\{1, 2, \cdots\}$. Leur multiplicité est infinie.

Ensuite on calcule le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $\Box_{\varphi,q}$. Le résultat est donné par :

Th*é*orème 0.2.

Soient $n > 1$, $\varphi(z) = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ et $0 \leq q \leq n$. Le spectre du Laplacien $\Box_{\varphi,q}$ est constitué de tous les entiers $\{q, q+1, q+2 \cdots\}$. Leur multiplicité est infinie.

X. Ma et G. Marinescu (2007) ont calculé le spectre du Laplacien $\Delta_\varphi^{(0,0)}$ pour $\varphi(z) = |z|^2$ (voir [25, 26]). Par la suite F. Haslinger montre que le Laplacien complexe de Witten noté $\Delta_\varphi^{(0,q)}$ sur les $(0,q)$-formes différentielles a le même spectre que le Laplacien $\Box_{\varphi,q}$. Le résultat est le suivant :

Th*é*orème 0.3.

Soient $n > 1$, $\varphi(z) = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ et $0 \leq q \leq n$. Le spectre du Laplacien complexe de Witten noté $\Delta_\varphi^{(0,q)}$ est constitué de tous les entiers $\{q, q+1, q+2 \cdots\}$. Leur multiplicité est infinie.

Nous étudierons dans la dernière partie de ce document quelques applications sur la compactification du $\bar{\partial}$-Neumann à poids $N_{\varphi,q}$:
- comme première application nous allons montrer que le $\bar{\partial}$-Neumann à poids $N_{\varphi,q}$ est compact en utilisant les valeurs propres de la matrice de Lévi. Le résultat est le suivant :

Th*é*orème 0.4.

Soit φ une fonction plurisousharmonique de classe C^2. Si $1 \leq q \leq n$ et on suppose que la somme s_q de toutes les q plus petites valeurs propres de M_φ satisfait :

$$\lim_{|z| \to +\infty} s_q(z) = +\infty. \tag{1}$$

Alors $N_{\varphi,q} : L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi) \longrightarrow L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$ est compact.

-Deuxième application nous allons montrer que le $\bar{\partial}$-Neumann à poids $N_{\varphi,q}$ est compact en utilisant la théorie spectrale sur les opérateurs de Schrödinger dans la mécanique quantique due à S. Fu et Emil J. Straube (cf[15]). Le résultat est le suivant :

Th*é*orème 0.5.

Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}$ et $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. On pose $E = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2\,;\, z \in \Omega,\, |w| < e^{-\varphi(z)}\}$ un domaine de Hartogs pseudoconvexe complet, borné et lisse dans $\mathbb{C}^2$. Supposons que bE soit strictement pseudoconvexe sur $bE \cap \{w = 0\}$. Alors

1. bE satisfait la propriété (P_q) si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$.
2. $N_{\varphi,q}$ est compact si seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$.

1 Préliminaires

1.1 Géométrie différentielle

1.1.1 Notion de Variété différentiable

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty, \omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois différentiables et de dérivée k-ième continue et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

Définition 1.1 (Carte)**.**

Soit M une variété topologique.
Une carte sur M est un couple (U, φ) où $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

Définition 1.2 (Atlas)**.**

Un atlas de classe C^k est une collection d'homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$, appelée carte différentielle où $(U_\alpha)_{\alpha \in I \subset \mathbb{N}}$ constitue un recouvrement d'ouverts de X, $(V_\alpha)_\alpha$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous α *et* $\beta \in I$, si $(U_\alpha \cap U_\beta) \neq 0$ les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^k [1].
Les composantes $\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ sont appelées coordonnées locales sur U_α définies par la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Définition 1.3 (Variété différentiable)**.**

Une variété différentiable X de dimension n et de classe C^k est un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4 (Vecteur tangent)**.**

Soit X une variété différentiable de classe C^k et de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert et $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$.
Un vecteur v, tangent à X au point x_0, est par définition un opérateur différentiel qui agit sur les fonctions, c'est-à-dire pour tout $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on associe $v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$; où les v_j sont des réels.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ autour de x_0 sur Ω, on écrit simplement

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

1.1.2 Fibrés vectoriels

Définition 1.5.

Soient X une variété différentiable de dimension n et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ un champ scalaire. Un fibré vectoriel de rang r au-dessus de X est une variété E de classe C^∞ munie d'une application $\pi : E \longrightarrow X$ de classe C^∞ appelée projection et d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r sur chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$. Cela veut dire qu'il existe un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ de X et des C^∞-difféomorphismes θ_α appelés trivialisations

$$\theta_\alpha : E_{|V_\alpha} \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{K}^r \quad \text{où} \quad E_{|V_\alpha} = \pi^{-1}(V_\alpha)$$

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $U \subset E$, $V \subset F$ deux ouverts, $f : U \to V$ une application. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^k si f est inversible et si f et f^{-1} sont différentiables de classe C^k.

telle que pour tout $x \in V_\alpha$ l'application

$$E_x \xrightarrow{\theta_\alpha} \{x\} \times \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Pour chaque $\alpha, \beta \in I$, l'application

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

peut se mettre sous la forme

$$\theta_{\alpha\beta}(x, \xi) = (x, g_{\alpha\beta}(x).\xi), (x, \xi) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

où la famille $(g_{\alpha\beta})$ est inversible à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(V_\alpha \cap V_\beta, \mathrm{Gl(r, \mathbb{K})})$, d'inverse $(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g_{\beta\alpha})$ et satisfaisant à la condition de cocycle

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{sur} \quad \mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{V}_\beta \cap \mathrm{V}_\gamma.$$

La collection $(g_{\alpha\beta})$ est appelée système de matrices de transition. Réciproquement, toute collection de matrices inversibles satisfaisant la condition de cocycle définit un fibré vectoriel E, obtenu en recollant les cartes $V_\alpha \times \mathbb{K}^r$ via les identifications $\theta_{\alpha\beta}$.

Exemple 1.1.

Les fibrés tangent $TX = \bigcup\limits_{a \in X} T_a X$ et cotangent $T^*X = \bigcup\limits_{a \in X} T_a^* X$ d'une variété différentiable X de dimension n sont des fibrés vectoriels localement triviaux de rang n au-dessus de X.

Définition 1.6.

Soit $\Omega \subset X$ un ouvert. Soient E un fibré vectoriel sur X et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty, \omega\}$. Une section de classe C^k de $E_{|\Omega}$ est une application $s : \Omega \longrightarrow E$ de classe C^k telle que $s(x) \in E_x$, pour tout $x \in \Omega$ (i.e $\pi \circ s = \mathrm{Id}_\Omega$).

Définition 1.7 (Champ de vecteurs)**.**

Soient X une variété différentiable de classe C^r avec $r > k$ et Ω un ouvert de X. On appelle champ de vecteurs de classe C^k sur Ω toute application $s : \Omega \longrightarrow TX$ de classe C^k telle que $s(x) \in T_x X$ pour tout $x \in X$.
On note $\Gamma^k(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^k sur X.

Remarque 1.1.

Un champ de vecteurs sur Ω est une section de fibré tangent TX définie sur Ω.

1.1.3 Formes différentielles

Définition 1.8 (1-forme différentielle)**.**

Soient X une variété différentiable et U un ouvert de X. Une 1-forme différentielle sur U est une application

$$\begin{aligned} w : \ U &\longrightarrow T^*X = \bigcup_{a \in U} T_a^* X \\ a &\longmapsto w_a \end{aligned}$$

à valeurs dans l'espace cotangent à U en tout point a.
Si $a = (x_1, \ldots, x_n)$, on a :

$w(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i(x_1, \ldots, x_n)(dx_i)_a$
où les coefficients $w_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ dépendent de a.
Localement une 1-forme différentielle s'écrit $w = \sum_{i=1}^{n} w_i dx_i$ où les coefficients $(w_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des fonctions $w : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
Une 1-forme différentielle est de classe C^k si les coefficients w_i le sont.

Exemple 1.2 (1-forme différentielle)**.**

1. dx est une 1-forme différentielle de coefficient 1.
2. $w(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} dx - \dfrac{y}{x^2 + y^2} dy$ est une 1-forme différentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.

Remarque 1.2.

Une 1-forme différentielle sur un ouvert U est une section du fibré cotangent T^*X définie sur U.

Définition 1.9 (r-forme différentielle)**.**

Soient n et r deux éléments de $\mathbb{N}$, et X une variété différentiable de classe C^k de dimension n, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Une r-forme différentielle de classe C^k sur X est une section de classe C^k du fibré des r-formes extérieures noté $\Lambda^r T^*X$.
Ainsi, une r-forme différentielle ω associe à tout x dans X, une r-forme linéaire alternée ω_x sur l'espace tangent T_xX à X en x.

Remarque 1.3.

Dans un ouvert de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$, pour chaque $a \in X$, nous avons la base $\{(dx_1)_a, \ldots, (dx_n)_a\}$ de l'espace cotangent T_a^*X. On a

$$\Lambda^r T_a^*X = vect\{(dx_{i_1})_a \wedge \ldots \wedge (dx_{i_r})_a\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n}.$$

Une r-forme différentielle u de classe C^k s'écrit
$u(x) = \sum'_{|I|=r} u_I(x) dx_I$ *où* $u_I \in C^k$
$I = (i_1, ..., i_r)$ avec $1 \leq i_1 < ..... < i_r \leq n$
$dx_I = dx_{i_1} \wedge .... \wedge dx_{i_r}$.

On note $C^k(X, \Lambda^r T^*X)$ l'espace des r-formes différentielles de classe C^k.

On peut effectuer plusieurs opérations avec les r-formes différentielles, par exemple :

- **Produit extérieur**

Localement, si

$$v(x) = \sum'_{|J|=q} v_J(x) dx_J$$

est une q-forme différentielle sur X et

$$u(x) = \sum'_{|I|=p} u_I(x) dx_I$$

est une p-forme différentielle sur X,
alors le produit extérieur de u avec v est la forme de degré $(p + q)$ définie par :

$$u \wedge v(x) = \sum'_{|I|=p, |J|=q} u_I(x) v_J(x) dx_I \wedge dx_J \text{ avec } 0 \leq p + q \leq n$$

$$I = (i_1, ...i_p) \text{ avec } 1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$$
$$J = (j_1, ...j_q) \text{ avec } 1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$$
$$dx_I = dx_{i_1} \wedge ..... \wedge dx_{i_p}$$
et
$$dx_J = dx_{j_1} \wedge ..... \wedge dx_{j_q}.$$

• **Dérivée extérieure**

La dérivée extérieure des p-formes différentielles est un opérateur différentiel
$$d : C^k(X, \Lambda^p T^* X) \longrightarrow C^{k-1}(X, \Lambda^{p+1} T^* X)$$
défini localement par la formule
$$du = \sum_{|I|=p}^{\prime} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$
et vérifie les propriétés suivantes :

1. $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ (Règle de Leibniz),
2. $d^2 u = 0$ (idempotence).

Une forme différentielle u est dite fermée si $du = 0$ et elle est dite exacte s'il existe une forme différentielle v telle que $deg(v) = deg(u) - 1$ vérifiant $u = dv$.

• **Pull-back**

Soit $F : X \to Y$ une application de classe C^∞ entre deux variétés orientées de dimension respectives n_1, n_2. Si $v(y) = \sum_{|I|=p}^{\prime} v_I(y) dy_I$ est une p-forme différentielle sur Y, le pull-back (tiré-en-arrière) $F^* v$ est la p-forme différentielle sur X obtenue en remplaçant y par $F(x)$ dans l'écriture de v, c'est-à-dire
$$F^* v(x) = \sum_{|I|=p}^{\prime} v_I(F(x)) dF_{i_1} \wedge ... \wedge dF_{i_p}.$$

1.2 Notion de variété complexe

Définition 1.10 (Variété complexe)**.**

Une variété complexe X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$, où les U_α sont des ouverts de X tels que $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
et $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes pour lesquels on a : si
$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \quad alors \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{sont des biholomorphismes.}$$
$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sont appelées cartes locales.
$$z \in U_\alpha, \varphi_\alpha(z) = (z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha) \in \mathbb{C}^n.$$
$$(z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha) \quad \text{sont appelés coordonnées locales autour de z.}$$
La collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ est appelée atlas complexe.

Définition 1.11 (Domaine de classe C^k)**.**

Un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ est dit à bord de classe C^k s'il existe un voisinage U de $\overline{D}$ et ρ une fonction de classe C^k tel que :
$D \cap U = \{z \in U : \rho(z) < 0\}$, où $\rho : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définissante de D. Si $d\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial D$, on dit que D est à bord lisse de classe C^k.

Définition 1.12 (Domaine Etoilé)**.**

1. On dit qu'un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ est étoilé en un point $P \in D$ si pour tout point $M \in D$, le segment $[P, M]$ est contenu dans D.
2. On dit qu'un domaine est étoilé s'il est au moins étoilé par rapport à un de ses points.

Remarque 1.4.

On dit qu'un domaine est convexe s'il est étoilé par rapport à tous ses points.

Exemple 1.3.

La boule unité de $\mathbb{C}^n$ définie par $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ est un domaine étoilé, mais mieux, elle est aussi convexe.

1.2.1 Structure complexe

Soit X une variété analytique complexe de dimension (complexe) n.
Considèrons X comme une variété différentiable de dimension $2n$.
Pour tout $z \in X$, on a l'espace cotangent T_z^*X de X en z et une structure complexe J_z de T_z^*X (c'est-à-dire l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de T_z^*X vérifiant

$$J_z \circ J_z = -Id_{T_z^*X}$$

et définie localement par

$$J_z(dx_j) = dy_j$$

et

$$J_z(dy_j) = -dx_j).$$

Soit $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ le complexifié de T_z^*X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme

$$u + iv$$

où

$$u, v \in T_z^*X$$

et

$$i = \sqrt{-1}.$$

J_z se prolonge en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ noté encore J_z tel que $J_z^2 = -Id_{T_z^*X^{\mathbb{C}}}$ par

$$J_z(u + iv) = J_z(u) + iJ_z(v)$$

pour tous $u, v \in T_z^*X$.
On a

$$T_z^*X^{\mathbb{C}} = T_{z1,0}^*X \oplus T_{z0,1}^*X$$

où

$$T_{z1,0}^*X = \{v \in T_z^*X^{\mathbb{C}} / J_z v = iv\}$$

$$T^*_{z0,1}X = \{v \in T^*_z X^{\mathbb{C}} / J_z v = -iv\}$$

$$T^*_{1,0}X = \bigcup_{z\in X} T^*_{z1,0}X$$

et

$$T^*_{0,1}X = \bigcup_{z\in X} T^*_{z0,1}X$$

sont respectivement des fibrés cotangents holomorphes et antiholomorphes.
Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p, q \leq n$, notons par $\Lambda^p T^*_{z1,0}X$ et $\Lambda^q T^*_{z0,1}X$ respectivement les espaces vectoriels des p-formes alternées sur $T^*_{z1,0}X$ et des q-formes alternées sur $T^*_{z0,1}X$.
Dans un système de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$,

$$\Lambda^p T^*_{z1,0}X = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p}\}_{1\leq i_1 <....< i_p \leq n}$$

$$\Lambda^q T^*_{z0,1}X = vect\{d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}_{1\leq j_1 <....< j_q \leq n}$$

où $(dz_1, ..., dz_n)$ et $(d\bar{z}_1, ..., d\bar{z}_n)$ sont des bases locales de $T^*_{z1,0}X$ et $T^*_{z0,1}X$
donc

$$\Lambda^p T^*_{1,0}X := \bigcup_{z\in X} \Lambda^p T^*_{z1,0}X$$

et

$$\Lambda^q T^*_{0,1}X := \bigcup_{z\in X} \Lambda^q T^*_{z0,1}X$$

sont respectivement les fibrés des p-formes extérieures sur le fibré $T^*_{1,0}X$ et des q-formes extérieures sur le fibré $T^*_{0,1}X$.
On pose

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = \Lambda^p T^*_{z1,0}X \oplus \Lambda^q T^*_{z0,1}X$$

donc

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ..... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}$$

avec $1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$.

Définition 1.13.

Le fibré $\Lambda^{(p,q)} T^* X^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T^*_{1,0}X \otimes \Lambda^q T^*_{0,1}X$ est appelé fibré des (p, q)-formes extérieures sur le fibré cotangent complexifié $T^* X^{\mathbb{C}} := \bigcup_{z\in X} T^*_z X^{\mathbb{C}}$.

1.2.2 (p, q)-Formes différentielles

Définition 1.14 (Formes différentielles)**.**

Soit $\Omega \subset X$ un ouvert. On appelle forme différentielle de bidegré (p,q) (ou (p,q)-forme différentielle) et de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) sur Ω, toute section définie sur Ω de classe C^k du fibré $\Lambda^{(p,q)}T^*X^{\mathbb{C}}$.
On note $C^k_{p,q}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur X et
$C^{\infty}_{p,q}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^{∞} sur X.
Dans un ouvert $\Omega \subset X$ de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$, une (p,q)-forme différentielle u de classe C^k s'écrit

$$u(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' u_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les u_{IJ} sont des fonctions de classe C^k, $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ sont des multi-indices d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$,

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p}$$

$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

et $\sum'$ indique que la somme se fait suivant les indices croissants. On note par $D^k_{p,q}(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par les (p,q)-formes différentielles de classe C^k à support compact dans X et par $D_{p,q}(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^{\infty}_{p,q}(X)$ formé par les (p,q)-formes différentielles de classe C^{∞} à support compact dans X. Toute fonction $f \in D_{0,0}(X)$ est appelée fonction test.

1.2.3 Notion de variété hermitienne

Définition 1.15 (Produit scalaire hermitien)**.**

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Le produit scalaire hermitien sur X est la donnée en tout point $z_0 \in X$ d'une application
$h : T_{z_0}X \times T_{z_0}X \to \mathbb{C}$, définie par :
pour deux vecteurs

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \text{appartenant à } T_{z_0}X;$$

$$h(u,v) = \sum_{j,k=1}^{n} h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0) u_j \overline{v}_k = \sum_{j,k=1}^{n} h_{j,k} u_j \overline{v}_k$$

où

$$h_{j,k}(z_0) = h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $h(\lambda u, v) = \lambda h(u,v), \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
2. $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$,
3. $h(u,u) \geq 0$,
4. $h(u,u) > 0 \ \forall \ u \neq 0$,
5. $h(u+v,w) = h(u,w) + h(v,w), \ \forall \ u, \ v \ et \ w \in T_{z_0}X.$

On note $her(T_{z_0}X)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur $T_{z_0}X$.

Remarque 1.5.

$(h_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$ est une matrice hermitienne, définie positive et dépend de façon C^∞ du point z_0.
Cette forme hermitienne, définie sur l'espace tangent à X en un point, s'étend aux formes différentielles sur X comme suit :
soient

$$u = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{'} u_{I,J}\ dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad et \quad v = \sum_{|K|=p,|L|=q}^{'} v_{K,L}\ dz_K \wedge d\bar{z}_L$$

$$h(u,v) = \sum_{|K|=|L|=p \quad |I|=|J|=q} u_{I,J}\ \overline{v}_{K,L}\ h^{i_1k_1}...h^{i_pk_p}\overline{h^{j_1l_1}}...\overline{h^{j_ql_q}},$$

où $(h^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ est l'inverse de la matrice hermitienne $(h_{ij}) = h(\dfrac{\partial}{\partial z_i}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j})_{i,j=1,\dots,n}$
et $(\overline{h^{jl}})_{j,l=1,\dots,n}$ les conjugués des $(h^{jl})_{j,l=1,\dots,n}$.

Définition 1.16 (Métrique hermitienne)**.**

Soit X une variété complexe de dimension n et soit $T^{1,0}X$ son fibré tangent holomorphe.
Une métrique hermitienne sur X est la donnée pour tout $z_0 \in X$ d'un produit scalaire hermitien h sur $T^{1,0}_{z_0}X$ qui varie de manière C^∞ en fonction de X.

Définition 1.17 (Variété hermitienne)**.**

Soit X une variété complexe et h une métrique hermitienne. Alors le couple (X,h) est appelé variété hermitienne.

1.3 Fonctions plurisousharmoniques

Dans ce paragraphe, nous définissons au cas de plusieurs variables complexes la notion de fonction sousharmonique. Ces fonctions nous serviront à définir la pseudoconvexité.
Les résultats sont tirés de [24].

1.3.1 Fonctions sousharmoniques

Nous commençons d'abord par définir l'harmonicité dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.18 (Fonction harmonique)**.**

Une fonction complexe f deux fois continûment différentiables dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est harmonique dans Ω si elle satisfait la condition suivante :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Remarque 1.6.

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on va voir que les fonctions harmoniques sont très liées aux fonctions holomorphes.
La partie réelle d'une fonction holomorphe ou anti-holomorphe sur un ouvert de $\Omega \subset \mathbb{C}$ est harmonique.
On rappelle qu'une fonction $f : z \in \Omega \mapsto f(z)$ continue est holomorphe si elle est différentiable et satisfait les équations de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Définition 1.19 (Fonction sousharmonique)**.**

Une fonction u définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

u est semi-continue supérieurement (s.c.s), c'est-à-dire $\{z \in \Omega : u(z) < s\}$ est ouvert pour tout $s \in \mathbb{R}$ ou bien $\overline{\lim}_{z\to a} u(z) \leq u(a)$ si $a \in \Omega$;

pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute fonction h continue sur K, harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, telle que $h \geq u$ sur ∂K, alors $h \geq u$ sur K.

Remarque 1.7.

Une fonction u de classe C^2 est sousharmonique si et seulement si $\Delta u \geq 0$. Lorsque $\Delta u > 0$, on dit que u est strictement sousharmonique.

Exemple 1.4.

Soient $a \in \mathbb{C}$ fixé et $c > 0$. Alors la fonction $z \mapsto c \log|z - a|$ est sousharmonique.

1.3.2 Fonctions plurisousharmoniques

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$.
Nous commençons par définir une fonction d'exhaustion.

Définition 1.20.

Soit φ une fonction continue et définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que φ est une fonction d'exhaustion de Ω si pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$$

est relativement compact dans Ω.

Définition 1.21 (Fonction plurisousharmonique)**.** *(cf [5])*

Une fonction u définie de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique sur Ω notée $PSH(\Omega)$, si u est semi-continue supérieurement et si pour tout $a \in \Omega$ et $w \in \mathbb{C}^n$, la fonction $\lambda \mapsto u(a + \lambda w)$ est sousharmonique dans $\{a + \lambda w : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \Omega$.

Définition 1.22 (Forme de Lévi)**.**

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et ρ une fonction de classe C^2 sur Ω. On appelle forme de Lévi de ρ en $z \in \Omega$, la Hessienne complexe $L_z\rho$ de ρ en z, c'est-à-dire la forme hermitienne

$$w \longmapsto L_z\rho(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k.$$

Définition 1.23 (Fonction strictement plurisousharmonique)**.**

Soit ρ une fonction de classe C^k, $k = 2, ..., +\infty$.
On dit que ρ est strictement plurisousharmonique si sa forme de Lévi $L_z\rho$ au point z est une forme hermitienne définie positive.

1.4 Domaines pseudoconvexes

Définition 1.24 (Espace tangent complexe)**.**

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné et ρ une fonction définissante de Ω . L'espace tangent complexe noté $T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega)$ est donné par :

$$T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_j} w_j = 0\}.$$

Définition 1.25 (Domaine pseudoconvexe et strictement pseudoconvexe)**.**

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné et ρ une fonction définissante de Ω.
On dit que Ω est pseudoconvexe si $L_z\rho(w) \geq 0$ pour tout $z \in b\Omega$ et $w \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega)$.
On dit que Ω est strictement pseudoconvexe si $L_z\rho(w) > 0$ pour tout $z \in b\Omega$ et $w \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega)\backslash\{0\}$.

On a cette relation entre la plurisousharmonicité, la pseudoconvexité et la convexité.

Remarque 1.8. *cf([5])*

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné, où $n \geq 2$

- Si Ω est strictement pseudoconvexe de fonction définissante ρ de classe C^k, $k = 2, ...,$ alors Ω admet une fonction définissante strictement plurisousharmonique de classe C^k, $k = 2, ...$(Cf Théorème 3.4.4 [5]).
- Si Ω est pseudoconvexe à bord de classe C^2, alors Ω admet une fonction strictement plurisousharmonique de classe C^∞. (Cf Corollaire 4.3.8 [5]).

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ n'est pas borné, on définit la pseudoconvexité comme suit :

Définition 1.26.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine non borné. On dit que Ω est pseudoconvexe si Ω admet une fonction d'exhaustion φ plurisousharmonique continue.

Remarque 1.9.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est pseudoconvexe et φ une fonction d'exhaustion de classe C^∞ strictement plurisousharmonique, alors les domaines $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$ sont strictement pseudoconvexes et approximent $\Omega = \bigcup\limits_{c \in \mathbb{R}} \Omega_c$.

Définition 1.27 (Domaine de Hartogs)**.**

Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine. On dit que D est un domaine de Hartogs de centre $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ si D vérifie la propriété suivante :
pour tout $z_0 = (z_{0_1}, \cdots, z_{0_n}) \in D$ alors D contient tout point $z = (z_{0_1}, \cdots, z_{0_{n-1}}, z_n)$ avec

$$z_n - a_n = (z_{0_n} - a_n)e^{i\Theta}, \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi.$$

D est un domaine de Hartogs complet si de plus pour $z_0 \in D$, D contient tout point z tel que

$$|z_n - a_n| \leq |z_{0_n} - a_n|.$$

Définition 1.28 (Domaine de Hartogs pseudoconvexe)**.** *cf([21])*

Soit X une variété complexe, un domaine $\Omega \subset X$ est dit Domaine de Hartogs pseudoconvexe s'il existe une métrique kählérienne sur X et un voisinage U de $b\Omega$ tels que la restriction de $-\log d_{b\Omega}(z)$ à $U \cap \Omega$ se prolonge en une fonction strictement plurisousharmonique sur Ω, où $d_{b\Omega}(z)$ est la distance de z au bord de Ω.

1.5 Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$

Définition 1.29 (Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$)**.**

Soient X une variété complexe et $\Omega \subset X$ un ouvert. Si f est une fonction de classe C^1 sur un voisinage d'un point $a \in \Omega$, on a localement

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)dy_j,$$

posons
$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j})\ et\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j})$$
$$dz_j=dx_j+idy_j\ \ et\ d\overline{z}_j=dx_j-idy_j.$$
Cette transformation permet d'écrire df_a sous la forme qui suit
$$df_a=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(a)d\overline{z}_j.$$
Posons
$$\partial f_a=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j\ \ et\ \overline{\partial} f_a=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(a)d\overline{z}_j,$$
donc
$$df=\partial f+\overline{\partial}f.$$
La décomposition
$$d=\partial+\overline{\partial}$$
avec
$$\partial=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}dz_j\ \text{et}\ \overline{\partial}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}d\overline{z}_j,$$
se généralise aux formes différentielles.
En effet, si
$$w(z)=\sum_{|I|=p,|J|=q}{}' w_{I,J}(z)dz_I\wedge d\overline{z}_J$$
est une (p,q)-forme différentielle de classe C^1
$$dw(z)=\sum_{|I|=p,|J|=q}{}' dw_{I,J}(z)\wedge dz_I\wedge d\overline{z}_J=\sum_{|I|=p,|J|=q}{}' (\partial w_{I,J}(z)+\overline{\partial}w_{I,J}(z))\wedge dz_I\wedge d\overline{z}_J.$$
On pose
$$\partial w(z)=\sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \partial w_{I,J}(z)\wedge dz_I\wedge d\overline{z}_J\ \ et\ \overline{\partial}w(z)=\sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \overline{\partial}w_{I,J}(z)\wedge dz_I\wedge d\overline{z}_J.$$
Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants :
$$\partial : C^k_{p,q}(\Omega)\longrightarrow C^{k-1}_{p+1,q}(\Omega)$$
$$\overline{\partial} : C^k_{p,q}(\Omega)\longrightarrow C^{k-1}_{p,q+1}(\Omega).$$
Propriétés 1.1.

1. $d=\partial+\overline{\partial}$.
2. $\partial^2=\overline{\partial}^2=\partial\circ\overline{\partial}+\overline{\partial}\circ\partial=0$.

Soient X une variété analytique complexe et Ω un ouvert de X.
Une forme différentielle w de type (p,q), de classe C^k et définie sur Ω est dite $\overline{\partial}$-fermée si $\overline{\partial}w=0$.
On note
$$Z^k_{p,q}(\Omega)=\{w\in C^k_{p,q}(\Omega)/\overline{\partial}w=0\}.$$
$Z^k_{p,q}(\Omega)$ est un sous groupe de $C^k_{p,q}(\Omega)$.
Une (p,q)-forme différentielle w de classe C^k définie sur un ouvert Ω d'une variété analytique complexe

X est dite $\overline{\partial}$-exacte s'il existe une $(p, q-1)$-forme différentielle u de classe C^k telle que $\overline{\partial} u = w$.
On note
$$B^k_{p,q}(\Omega) = \{w \in C^k_{p,q}(\Omega) / \exists u \in C^k_{p,q-1} \text{ avec } \overline{\partial} u = w\}.$$
Puisque $\overline{\partial}^2 = 0$ donc $B^k_{p,q}(\Omega) \subset Z^k_{p,q}(\Omega)$.
L'espace vectoriel
$$H^k_{p,q}(\Omega) = \frac{Z^k_{p,q}(\Omega)}{B^k_{p,q}(\Omega)}$$
est appelé le (p, q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe C^k définies sur Ω.

1.6 Outils d'analyse fonctionnelle

Définition 1.30 (Distribution)**.**
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a
$$D(V) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / supp\varphi \subset V compact\}$$
avec
$$supp\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \neq 0\}}.$$
Une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(V)$ converge vers φ dans $D(V)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

1. pour tout indice j, le support de φ_j et φ sont contenus dans un compact $K \subset V$,
2. $D^\alpha \varphi_j(x)$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi(x)$ sur $K \subset V$,
   pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$
   ($i.e$ $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$)
   $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} ..... \partial {x_n}^{\alpha_n}}$ est la dérivée d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Une forme linéaire T sur $D(V)$ est dite séquentiellement continue sur $D(V)$ si l'application $T : D(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$; si $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ dans $D(V)$, alors la suite des nombres complexes $T(\varphi_j) \longrightarrow T(\varphi)$.
Désignons par D_K l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K.
Une distribution T sur V est une forme linéaire sur $D(V)$ dont la restriction à chaque D_K est continue.
De plus, si T est une distribution réelle, l'application $\varphi \mapsto - < T, \dfrac{d\varphi}{dx} >$ est une distribution.
Par définition, c'est la dérivée de T notée $\dfrac{dT}{dx}$.

Exemple 1.5.
1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ la fonction définie par :
$\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ qui a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe
$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) =< \delta_a, \varphi >$ est une distribution appelée mesure de Dirac.
2) Soit f une fonction localement intégrable [2] sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors l'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe $T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ définit une distribution sur Ω.

Définition 1.31 (Norme)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle norme sur E l'application
$||.|| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2. Une fonction à valeurs complexes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact de Ω est intégrable au sens de Lebesgue.

2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x|| \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad et \quad x \in E$,
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall \quad x, y \in E$.

Définition 1.32 (Produit scalaire)**.**

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Un produit scalaire sur E est une application

$$\begin{aligned} <,>: \quad & E \times E \to \mathbb{R} \\ & (u,v) \to < u,v > \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés ci-dessous :
soient $u, u', v \in E \;\; et \; \lambda \in \mathbb{K}$.

1. $< u,u > \geq 0 \quad et \quad < u,u >= 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. $< \lambda(u+u'), v >= \lambda < u,v > +\lambda < u',v >$,
3. $< u,v >=< v,u >$.

Définition 1.33 (Espace de Banach)**.**

$(E, ||\cdot||)$ est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.
Un tel espace est dit espace de Banach.

Exemple 1.6 (Espace de Banach)**.**

Soient (E,T,m) un espace mesuré et f une fonction mesurable définie de E vers $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}$= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$L^p(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \text{mesurable tel que} \quad \int_E |f|^p dm < +\infty\}$$

est un espace de Banach avec la norme associée

$$||f||_p = \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}}, \;\; 1 \leq p < +\infty, dm$$

étant l'élément de volume.

Définition 1.34 (Espace de Hilbert)**.**

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach.
On dit que $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Hilbert si la norme est issue d'un produit scalaire.

Exemple 1.7 (Espace de Hilbert)**.**

Soient (E,T,m) un espace mesuré et f une fonction définie de E vers $\mathbb{C}$ mesurable,

$$L^2(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{mesurable tel que} \quad \int_E |f|^2 dm < +\infty\}$$

muni de la norme $||f||_2 = \Big(\int_E |f|^2 dm\Big)^{\frac{1}{2}}$ qui provient du produit scalaire définit par : $\forall f, g \in E$ on a

$$< f, g >= \int_E (f \times \overline{g}) dm$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.35 (Espace de Sobolev)**.**

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, on définit les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty, m \in \mathbb{N}$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Les normes pour ces espaces sont données par :

$$||f||_{ES}^p := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^p(\Omega)}^p \Big)^{\frac{1}{p}}, p < +\infty$$

et

$$||f||_{ES}^\infty := max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ces normes font de $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{m,\infty}(\Omega)$ des espaces de Banach.
Pour p=2

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

$H^m(\Omega)$ muni de la norme

$$||f||_{ES}^2 := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^2(\Omega)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

qui provient du produit scalaire

$$< u, v >_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2}$$

est un espace de Hilbert (cf[3]).

1.7 Théorie des Opérateurs

Tout au long de cette sous-section H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert.

Définition 1.36 (Opérateur)**.**

Un opérateur dans H_1 est une application T définie sur un sous-espace vectoriel $dom(T) \subset H_1$ à valeurs dans H_2.

$$T : dom(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$$

$dom(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur.
On note un opérateur par $(T, dom(T))$ s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant son domaine on note simplement par T.
Si $dom(\tilde{T})$ est un sous-espace vectoriel de H_1 qui contient $dom(T)$ et $\tilde{T}f = Tf$ pour $f \in dom(T)$, alors on dit que $\tilde{T}$ est une extension de T.

Définition 1.37 (Graphe d'un opérateur)**.**

Soit $T : dom(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur. Le graphe de T est le sous-espace de $H_1 \times H_2$ donné par

$$\Gamma(T) = \{(x, T_x) : x \in dom(T)\} \subset H_1 \times H_2.$$

Définition 1.38.

Un opérateur $(T, dom(T))$ est fermé si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $dom(T)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \to +\infty} Tx_n = y$$

alors $x \in dom(T)$ et $y = Tx$.

Proposition 1.1 (Opérateur fermé).

On dit que $(T, dom(T))$ est fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est un fermé de $H_1 \times H_2$.

Définition 1.39 (Opérateur fermable).

Un opérateur T est dit fermable si $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur.

Définition 1.40 (Fermeture).

La fermeture de l'opérateur fermable T est l'opérateur noté $\bar{T}$ tel que $\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

Remarque 1.10.

Un opérateur T est dit fermé si $\bar{T} = T$.

Définition 1.41 (Opérateur borné).

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On dit que T est un opérateur borné de H_1 vers H_2 si $dom(T) = H_1$ et s'il existe C tel que

$$||Tu||_{H_2} \leq C||u||_{H_1} \;\; \forall \;\; u \in H_1. \tag{2}$$

On pose alors :

$$||T|| = \sup_{u \in H_1, u \neq 0} \frac{||Tu||_{H_2}}{||u||_{H_1}}.$$

Si $dom(T) \neq H_1$ et s'il existe une constante C telle que :

$$||Tu||_{H_2} \leq C||u||_{H_1} \;\; \forall \;\; u \in dom(T) \tag{3}$$

alors l'opérateur T se prolonge en un opérateur borné de $\overline{dom(T)}$ vers H_2, où $\overline{dom(T)}$ désigne l'adhérence de $dom(T)$ dans H_1.

Proposition 1.2. *(cf[29])*

Soit $(T, dom(T))$ un opérateur fermé.
Alors T est borné si et seulement si $dom(T) = H_1$.

Définition 1.42 (Opérateur dense).

On dit qu'un opérateur $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est à domaine dense si $\overline{dom(T)} = H_1$.

Définition 1.43 (Adjoint d'un opérateur).

Soit $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur, $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ est l'unique application linéaire telle que pour tout $x \in H_1$, $y \in H_2$ on ait

$$< T(x), y >=< x, T^*(y) > .$$

T^* est appelée adjoint de T.

Remarque 1.11.

Pour $H_1 = H_2$ et si $T = T^*$ alors T est auto-adjoint.

Définition 1.44 (Opérateur symétrique).

Un opérateur T est dit symétrique si $T \subset T^*$, c'est-à-dire,

$$dom(T) \subset dom(T^*), \quad Tu = T^*u \;\; \text{pour} \;\; u \in dom(T).$$

Remarque 1.12.

Si T est un opérateur symétrique alors l'adjoint T^* devient une extension de T.

Définition 1.45 (Opérateur essentiellement auto-adjoint)**.**

Un opérateur symétrique T est dit essentiellement auto-adjoint s'il admet une unique extension auto-adjointe qui n'est rien d'autre que sa fermeture $\bar{T}$.
En d'autre termes un opérateur symétrique T est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture $\bar{T}$ est l'unique extension qui est auto-adjointe.

Définition 1.46.

Soient X et Y deux espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues et $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.
On dit que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si l'image par T de la boule unité fermé B_X de X est relativement compacte dans l'espace Y ($\overline{T(B_X)}$ est compact).

Remarque 1.13.

1. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans X, la suite image (Tx_n) admet des sous-suites convergentes dans Y.
2. Si T_1, $T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ sont compacts, alors $a_1T + a_2T$ est compact pour tous scalaires a_1, a_2. Ainsi, les opérateurs compacts de X dans Y forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$. Cet espace des opérateurs compacts sera noté $\mathcal{K}(X, Y)$.

1.8 Le $\overline{\partial}$-Neumann

Dans cette partie, on va introduire l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann. Soit $L^2_{p,q}(\Omega)$ l'espace des (p, q)-formes différentielles à coefficient dans $L^2(\Omega)$ pour $1 \leq q \leq n$. Si

$$f = \sum_{I,J}{}' f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

et

$$g = \sum_{I,J}{}' g_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

sont deux (p, q)-formes différentielles dans $L^2_{p,q}(\Omega)$, nous définissons le produit scalaire et la norme comme suit :

$$< f, g >= \sum_{I,J}{}' < f_{I,J}, g_{I,J} >, \quad |f|^2 =< f, f >= \sum_{I,J}{}' |f_{I,J}|^2$$

$$||f||^2 = \int_\Omega < f, f > dm = \sum_{I,J}{}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 dm.$$

Soit φ une fonction continue et positive sur Ω. On note $L^2_{p,q}(\Omega,\ \varphi)$ l'espace vectoriel des formes différentielles f de bidegré $(p,\ q)$ qui s'écrit par :

$$f = \sum_{|I|=p, |J|=q}{}' f_{I,J} dz_I \wedge dz_J$$

où $f_{I,J}$ est une fonction mesurable telle que $\int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$ ($d\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$). Sur $L^2_{p,q}(\Omega,\ \varphi)$, on définit un produit scalaire noté $< f,\ g >_\varphi$ par :

$$< f,\ g >_\varphi = \sum_{|I|=p,|J|=q}' \int_\Omega f_{I,J}\overline{g_{I,J}} e^{-\varphi} d\lambda,$$

sa norme est définie par :

$$\|f\|^2_\varphi = \sum_{|I|=p,|J|=q}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

Ainsi $L^2_{p,q}(\Omega,\ \varphi)$ muni de cette norme est un espace de Hilbert.

Définition 1.47.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. L'opérateur $\bar{\partial}$ défini pour les (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur Ω s'étend aux (p,q)-formes différentielles de carré intégrable sur Ω aux sens des distributions. Si $u \in L^2_{p,q}(\Omega)$ (resp.$u \in L^2_{p,q}(\Omega,\varphi)$) est dans $dom(\bar{\partial})$, alors l'opérateur

$$\bar{\partial} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega)$$

avec

$$dom(\bar{\partial}) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) :\ \bar{\partial} f \in L^2_{p,q+1}(\Omega)\}$$

(resp.

$$\bar{\partial} : L^2_{p,q}(\Omega,\ \varphi) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega,\ \varphi)$$

avec

$$dom(\bar{\partial}) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) :\ \bar{\partial} f \in L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi)\})$$

admet un adjoint noté $\bar{\partial}^*$ *(resp.*$\bar{\partial}^*_\varphi$*),*
c'est-à-dire que

$$< \bar{\partial} u,\ v > = < u,\ \bar{\partial}^* v >$$

(resp.

$$< \bar{\partial} u,\ v >_\varphi = < u,\ \bar{\partial}^*_\varphi v >_\varphi),$$

$\forall\ u \in dom(\bar{\partial})$ et $v \in dom(\bar{\partial}^*)$ *(resp.* $\forall\ u \in dom(\bar{\partial})$ *et* $v \in dom(\bar{\partial}^*_\varphi)$*).*
Notons

$$\square_{(p,q)} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

le Laplacien complexe avec

$$dom(\square_{(p,q)}) = \{f \in dom(\bar{\partial}) \cap dom(\bar{\partial}^*) :\ \bar{\partial} f \in dom(\bar{\partial}^*)\ et\ \bar{\partial}^* f \in dom(\bar{\partial})\}$$

et

$$\square_{(p,q)\varphi} = \bar{\partial}\bar{\partial}^*_\varphi + \bar{\partial}^*_\varphi\bar{\partial}$$

le Laplacien complexe à poids.

Nous donnons à présent une proposition d'une grande importance pour le Laplacien complexe.

Proposition 1.3. $\square_{(p,q)}$ est un opérateur linéaire, fermé, dense et auto-adjoint.

Démonstration. Soit $D^{p,q}(\Omega)$ l'ensemble des (p,q)-formes différentielles à support compact.
$\square_{(p,q)}$ est donc un opérateur linéaire.
On sait que :

$$D^{p,q}(\Omega) \subset dom(\square_{(p,q)}) \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$

Le passage à l'adhérence nous donne les inclusions suivantes :

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} \subset \overline{dom(\square_{(p,q)})} \subset \overline{L^2_{p,q}(\Omega)}.$$

Or

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} = L^2_{p,q}(\Omega) = \overline{L^2_{p,q}(\Omega)}.$$

Donc

$$L^2_{p,q}(\Omega) \subset \overline{dom(\square_{(p,q)})} \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$

D'où

$$\overline{dom(\square_{(p,q)})} = L^2_{p,q}(\Omega).$$

Ce qui montre que $\square_{(p,q)}$ est dense.
Montrons que $\square_{(p,q)}$ est fermé.
Soit $f_n \in dom(\square_{(p,q)})$ telle que $f_n \to f$ avec $f \in dom(\square_{(p,q)})$.
Montrons que $\square_{(p,q)} f_n \to \square_{(p,q)} f$:

$$\begin{aligned} < \square_{(p,q)} f_n,\ f_n > &=< (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) f_n,\ f_n > \\ &=< \bar\partial\bar\partial^* f_n + \bar\partial^*\bar\partial f_n,\ f_n > \\ &=< \bar\partial\bar\partial^* f_n,\ f_n > + < \bar\partial^*\bar\partial f_n,\ f_n > \\ &=< \bar\partial^* f_n,\ \bar\partial^* f_n > + < \bar\partial f_n,\ \bar\partial f_n > \\ &= \|\bar\partial^* f_n\|^2 + \|\bar\partial f_n\|^2. \end{aligned}$$

Puisque $\bar\partial$ et $\bar\partial^*$ sont des opérateurs fermés, il existe $f \in dom(\bar\partial) \cap dom(\bar\partial^*)$ telles que :

$$\bar\partial f_n \to \bar\partial f \ \text{ et } \ \bar\partial^* f_n \to \bar\partial^* f \text{ resp. dans } L^2_{p,q+1} \text{ et } L^2_{p,q-1}.$$

Il découle à nouveau du fait que $\bar\partial$ et $\bar\partial^*$ sont des opérateurs fermés que

$$\bar\partial\bar\partial^* f_n \to \bar\partial\bar\partial^* f \ \text{ et } \ \bar\partial^*\bar\partial f_n \to \bar\partial^*\bar\partial f.$$

Nous avons donc prouvé que $\square_{(p,q)} f_n \to \square_{(p,q)} f$.
Donc $\square_{(p,q)}$ est un opérateur fermé.
Montrons que $\square_{(p,q)}$ est auto-adjoint.
Soient $u,\ v \in dom(\square_{(p,q)})$, a-t-on $< \square_{(p,q)} u,\ v >=< u,\ \square_{(p,q)} v >$?

$$\begin{aligned} \text{on a : } < \square_{(p,q)} u,\ v > &=< (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) u,\ v > \\ &=< \bar\partial\bar\partial^* u + \bar\partial^*\bar\partial u,\ v > \\ &=< \bar\partial\bar\partial^* u,\ v > + < \bar\partial^*\bar\partial u,\ v > \\ &=< \bar\partial^* u,\ \bar\partial^* v > + < \bar\partial u,\ \bar\partial v > \\ &=< u,\ \bar\partial\bar\partial^* v > + < u,\ \bar\partial^*\bar\partial v > \\ &=< u,\ (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) v > \\ &=< u,\ \square_{(p,q)} v > . \end{aligned}$$

□

Remarque 1.14. La proposition (1.3) reste valable si on remplace le Laplacien $\square_{(p,q)}$ par $\square_{(p,q)}\varphi$.

Définition 1.48. Le problème du $\bar{\partial}$ Neumann (resp du $\bar{\partial}$ Neumann à poids) consiste à chercher un inverse à $\square_{(p,q)}$ (resp. $\square_{(p,q)\varphi}$), on l'appelle opérateur de Neumann noté

$$N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega)$$

(resp. opérateur de Neumann à poids noté

$$N_{p,q\varphi} : L^2_{p,q}(\Omega, \varphi) \to L^2_{p,q}(\Omega, \varphi)).$$

C'est une méthode proposée par Donald SPENCER pour la résolution du $\bar{\partial}$.
L'opérateur $N_{p,q}$ a les propriétés suivantes : (cf [5])

1) $R(N_{p,q}) \subset dom(\square_{(p,q)})$ où $dom(\square_{(p,q)})$ désigne le domaine de $\square_{(p,q)}$ et $R(N_{p,q})$ l'image de $N_{p,q}$;

2) $\square_{(p,q)} N_{p,q} = N_{p,q} \square_{(p,q)} = I$ où I désigne l'application identité *;*

3) pour toute $f \in L^2_{p,q}(\Omega)$, $f = \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} f \oplus \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_{p,q} f$ *;*

4) $\bar{\partial} N_{p,q} = N_{p,q+1} \bar{\partial}$, $\forall \; 1 \leq q \leq n-1$ sur $dom(\bar{\partial})$ *;*

5) $\bar{\partial}^* N_{p,q} = N_{p,q-1} \bar{\partial}^*$, $\forall \; 2 \leq q \leq n$ sur $dom(\bar{\partial}^*)$.

Remarque 1.15. L'opérateur $N_{p,q\varphi}$ a des propriétés analogues à celles de l'opérateur $N_{p,q}$ énumérées ci-dessus.

Pour les $(0,q)$-formes différentielles on notera dans la suite $\square_{\varphi,q}$ au lieu de $\square_{(0,q)\varphi}$ et $N_{\varphi,q}$ au lieu de $N_{0,q\varphi}$ avec $0 \leq q \leq n$.

2 Le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur l'espace de Fock

Dans cette partie, l'objectif est de déterminer le spectre du Laplacien $\square_{\varphi,q}$ pour $\varphi(z) = |z|^2$ de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur l'espace de Fock.
Pour cela nous aurons besoin de quelques calculs et définitions qui nous seront utiles.
L'espace de Fock $L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2})$ est muni d'un produit scalaire défini par $(f,g) = \int_{\mathbb{C}^n} f\bar{g}e^{-|z|^2} d\lambda$ et d'une norme définie par $\|f(z)\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\lambda(z)$.
Soit u une $(0,q)$-forme différentielle, localement

$$u = \sum_{|J|=q}' u_J d\bar{z}_J, \tag{4}$$

Pour $q = 0$, u est une fonction. On a
$\overline{\partial} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$ et $\delta_j = \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \right)$
Montrons que

$$\square_{\varphi,0} u = \overline{\partial}_\varphi^* \overline{\partial} u = -\frac{1}{4}\Delta u + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j u_{\bar{z}_j}.$$

$$\begin{aligned}
\square_{\varphi,0} u &= \overline{\partial}_\varphi^* \overline{\partial} u \\
&= \overline{\partial}_\varphi^* \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \delta_j \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial |z|^2}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (z_j \bar{z}_j)}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} \right) + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} \right) + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \\
&= -\frac{1}{4}\Delta u + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j u_{\bar{z}_j},
\end{aligned}$$

donc

$$\Box_{\varphi,0}u = \overline{\partial}^*_{\varphi}\overline{\partial}u = -\frac{1}{4}\Delta u + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j u_{\bar{z}_j}, \tag{5}$$

avec $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = u_{\bar{z}_j}$.

Pour $q = n$, u est une $(0,n)$-forme différentielle.

Montrons que

$$\Box_{\varphi,n}u = \bar{\partial}\bar{\partial}^*_{\varphi}u = -\frac{1}{4}\Delta u + \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j u_{\bar{z}_j} + nu.$$

On a

$\overline{\partial}^*_{\varphi}u = -\sum_{|K|=n-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n} \delta_k u_{kK} d\bar{z}_K$, avec $\delta_k = \left(\dfrac{\partial}{\partial z_k} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_k}\right)$.

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}^*_{\varphi}u &= -\sum_{|K|=n-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right) u_K d\bar{z}_K \\
&= -\sum_{|K|=n-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{\partial|z|^2}{\partial z_k}\right) u_K d\bar{z}_K \\
&= -\sum_{|K|=n-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{\partial(z_k\bar{z}_k)}{\partial z_k}\right) u_K d\bar{z}_K \\
&= -\sum_{|K|=n-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_k\right) u_K d\bar{z}_K \\
&= -\sum_{|K|=n-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u_K}{\partial z_k} - \bar{z}_k u_K\right) d\bar{z}_K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\bar{\partial}^*_{\varphi}u &= \bar{\partial}\left(-\sum_{|K|=n-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u_K}{\partial z_k} - \bar{z}_k u_K\right) d\bar{z}_K\right) \\
&= -\sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u_K}{\partial z_k\partial\bar{z}_j} - \frac{\partial(\bar{z}_k u_K)}{\partial\bar{z}_j}\right) d\bar{z} \\
&= -\sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u_K}{\partial z_k\partial\bar{z}_j} - \frac{\partial(\bar{z}_k u_K)}{\partial\bar{z}_j}\right) d\bar{z} \\
&= -\sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u_K}{\partial z_k\partial\bar{z}_j}d\bar{z} + \sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial(\bar{z}_k u_K)}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z} \\
&= -\sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u_K}{\partial z_j\partial\bar{z}_j}d\bar{z} + \sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\bar{z}_j}{\partial\bar{z}_j}u_K d\bar{z} + \sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_K}{\partial\bar{z}_j}\bar{z}_j d\bar{z} \\
&= -\sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u_K}{\partial z_j\partial\bar{z}_j}d\bar{z} + \sum_{|K|=n}^{\prime}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_K}{\partial\bar{z}_j}\bar{z}_j d\bar{z} + \sum_{j=1}^{n} u \\
&= -\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}\right) + \sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_j} + nu \\
&= -\frac{1}{4}\Delta u + \sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j u_{\bar{z}_j} + nu,
\end{aligned}$$

donc

$$\Box_{\varphi,n}u = \bar{\partial}\bar{\partial}^*_{\varphi}u = -\frac{1}{4}\Delta u + \sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j u_{\bar{z}_j} + nu. \tag{6}$$

De manière analogue, on a

$$\Box_{\varphi,q}u = (\bar{\partial}\bar{\partial}^*_\varphi + \bar{\partial}^*_\varphi\bar{\partial})u = \sum_{|J|}{}^{'}(-\frac{1}{4}\Delta u_J + \sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j u_{J\bar{z}_j} + qu_J)d\bar{z}_J. \tag{7}$$

Définition 2.1 (Fonction propre, valeur propre, spectre)**.** *(cf [7])*
Soit T un opérateur linéaire défini de $dom(T) \subset B$ vers B, avec B un espace de Banach et $dom(T)$ le domaine de T.

1. Un nombre complexe μ est dit valeur propre de l'opérateur linéaire T, s'il existe une fonction $f \in dom(T)$ où f n'est pas identiquement nulle, qui satisfait :

$$Tf = \mu f.$$

2. Une telle fonction f est appelée fonction propre de l'opérateur T associée à la valeur propre μ.

Définition 2.2 (Multiplicité)**.**
La multiplicité de la valeur propre μ est la dimension de $\ker(T - \mu I)$.

Remarque 2.1.
La multiplicité peut être finie ou infinie.

Définition 2.3 (Résolvante)**.** *(cf [7])*
Soit T un opérateur linéaire défini de $dom(T) \subset B$ vers B, avec B un espace de Banach et $dom(T)$ le domaine de T.
Pour $z \in \mathbb{C}$ qui n'est pas une valeur propre de T, on appelle résolvante de T en z l'opérateur $R(z,T) = (zI - T)^{-1}$ où $(zI - T)^{-1}$ est borné. L'ensemble résolvante est la partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle la résolvante est définie. Autrement dit, l'ensemble résolvante de T est le complémentaire du spectre de T.

Définition 2.4 (Spectre)**.**
Le spectre de l'opérateur T noté $spect(T)$ est l'ensemble

$$spect(T) = \mathbb{C} \setminus R(z,T).$$

Définition 2.5 (Espace de Bergman)**.**
L'espace de Bergman noté $A^2(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$ est un sous-espace de $L^2(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$ des fonctions analytiques.

$$A^2(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi}) = \Big\{f : f \text{ analytique sur } \mathbb{C},\ \|f(z)\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |\ f(z)\ |^2 e^{-\varphi} d\lambda(z) < +\infty\Big\},$$

où

$$L^2(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi}) = \Big\{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{C}^n} |\ f(z)\ |^2 e^{-\varphi} d\lambda(z) < +\infty\Big\},$$

avec λ désigne la mesure de Lebesgue et $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+$ une fonction poids plurisousharmonique de classe C^2.

Pour déterminer le spectre du Laplacien $\Box_{\varphi,q}$ pour $\varphi(z) = |z|^2$ de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur l'espace de Fock, les Lemmes suivants nous seront utiles pour la preuve du Théorème (2.1).

Lemme 2.1. *(cf [7])*

Soient T un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H de domaine $dom(T)$ et $Spect(T)$ le spectre de T. Si $Spect(T)$ n'est pas égal au plan complexe $\mathbb{C}$ alors T est fermé. Le spectre d'un opérateur linéaire continu T est toujours fermé. Plus précisément soient $z \notin Spect(T)$ et $c = \|R(z,T)\|$, alors le spectre ne rencontre pas la boule

$$\{w \in \mathbb{C} : |z-w| \leq c^{-1}\}.$$

L'opérateur résolvante est une fonction analytique en z et satisfait les équations de la résolvante

$$R(z,T) - R(w,T) = -(z-w)R(z,T)R(w,T) \tag{8}$$

$$R(z,T)R(w,T) = R(w,T)R(z,T) \tag{9}$$

$$\frac{d}{dz}R(z,T) = -\left(R(z,T)\right)^2 \tag{10}$$

pour tout $z, w \notin Spect(T)$.

Démonstration.

Supposons que $z \notin Spect(T)$ et que $A = (zI - T)^{-1}$ soit l'opérateur inverse qui est borné par définition.
Soit $f \in dom(T)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n = g$ et $h_n := (zI-T)f_n$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}\{zf_n - Tf_n\} = zf - g,$$

ainsi

$$A(zf-g) = \lim_{n\to\infty}\{Ah_n\} = \lim_{n\to\infty}\{f_n\} = f.$$

Cela implique que $f \in dom(T)$ et $(zI-T)f = zf - g$, ou $Tf = g$. Donc T est fermé.
Le reste de la preuve est très similaire au cas où T est borné.
Considérons l'opérateur borné C défini par

$$C := \sum_{n=0}^{\infty}(-u)^n A^{n+1}, \tag{11}$$

où la série est de norme convergente si $|u| < \|A\|^{-1}$ et u désigne le coefficient en série entière. L'opérateur C satisfait les identités suivantes :

$$C = A - uAC, \quad C = A - uCA.$$

On a $C = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-u)^n A^{n+1} = A\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(u)^n A^n = A + A\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(u)^n A^n$.
Donc il reste à montrer que $A\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(u)^n A^n = -uAC$.
On a $-uAC = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(u)^{n+1}A^{n+2}$.
Par changement de variable posons $N = n+1$, si $n = 0$, alors $N = 1$.
Donc, on a $-uAC = \sum\limits_{N=1}^{\infty}(-1)^N(u)^N A^{N+1}$,
donc $C = A - uAC$.
Pour montrer la seconde identité, on utilise la même démarche .
L'équation $C = A - uAC$ implique que le noyau $ker(C)$ et l'image $im(C)$ satisfont :

$$ker(C) \subseteq ker(A), \quad im(C) \subseteq im(A),$$

alors que l'équation $C = A - uCA$ implique que

$$ker(A) \subseteq ker(C), \quad im(A) \subseteq im(C).$$

Puisque A a comme noyau $\{0\}$ et comme image $dom(T)$, on en déduit que C est un opérateur linéaire borné ponctuellement et défini de B vers $dom(T)$.
Si $f \in dom(T)$ et $g = (zI - T)f$ alors $f = Ag$ donc

$$\begin{aligned}
Cg &= (A - uAC)g \\
&= Ag - uACg \\
&= (z-T)^{-1}(z-T)f - u(z-T)^{-1}C(z-T)f \\
&= f - uCf.
\end{aligned}$$

Ainsi $C(z + u - T)f = f$.
Puisque $C(z + u - T)f = f$ pour tout $f \in$ alors $C = (z + u - T)^{-1}$. Ceci établit à la fois que $z + u \notin Spect(T)$ si $|u| < \|(z - T)^{-1}\|^{-1}$ et que

$$(z + u - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-u)^n (z - T)^{-(n+1)}. \tag{12}$$

La convergence de la norme de cette série justifie que la résolvante est une fonction analytique en z.
Démontrons l'équation résolvante (10). On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} R(z,T) &= \frac{d}{dz}(z-T)^{-1} \\
&= -1(z-T)^{-2} \\
&= -((z-T)^{-1})^2 \\
&= -(R(z,T))^2.
\end{aligned}$$

Donc $\frac{d}{dz} R(z,T) = -\left(R(z,T)\right)^2$.

Montrons l'équation résolvante (8). On a,

$$\begin{aligned}
R(z,T) - R(w,T) &= (z-T)^{-1} - (w-z)^{-1} \\
&= \frac{1}{z-T} - \frac{1}{w-T} \\
&= \frac{w-T}{(z-T)(w-T)} - \frac{z-T}{(z-T)(w-T)} \\
&= \frac{w-z}{(z-T)(w-T)} \\
&= (w-z)(z-T)^{-1}(w-T)^{-1} \\
&= -(z-w)R(z,T)R(w,T).
\end{aligned}$$

Donc $R(z,T) - R(w,T) = -(z-w)R(z,T)R(w,T)$.
Montrons l'équation résolvante (9). On a,

$$\begin{aligned}
R(w,T)R(z,T) &= \frac{1}{w-T}\frac{1}{z-T} \\
&= \frac{1}{z-T}\frac{1}{w-T} \\
&= R(z,T)R(w,T).
\end{aligned}$$

Donc $R(w,T)R(z,T) = R(z,T)R(w,T)$. □

Lemme 2.2.

Soit T un opérateur symétrique sur un espace de Hilbert H de domaine $dom(T)$ et soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une famille orthonormée complète dans H. Si chaque f_k appartient à $dom(T)$ et qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{R}$ tel que $Tf_k = \mu_k f_k$ pour tout k, alors T est essentiellement auto-adjoint. De plus le spectre de $\bar{T}$ est la fermeture dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble de tous les μ_k.

Démonstration.

Si $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \in dom(T)$ et

$g := Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n$,

alors, pour tout m fixé tel que $1 \leq m < \infty$, on a

$$\begin{aligned} \beta_m &= < g, f_m > \\ &= < Tf, f_m > \\ &= < f, Tf_m > \\ &= \mu_m < f, f_m > \\ &= \mu_m \alpha_m. \end{aligned}$$

Le fait que $f, g \in H$ implique que

$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_m|^2 < \infty$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \mu_n^2) |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Nous définissons maintenant un opérateur $\tilde{T}$ comme suit : $D(\tilde{T})$ l'ensemble de tous les $f \in H$ de la forme $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ où

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \mu_n^2) |\alpha_n|^2 < \infty,$$

on définit

$\tilde{T}f := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n f_n$.

Montrons que $\tilde{T}$ est une extension de T.

Soit $f \in dom(T)$ implique $Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n f_n = \tilde{T}f$. Donc $f \in dom(\tilde{T})$, ce qui implique que $dom(T) \subset dom(\tilde{T})$ d'où $\tilde{T}$ est une extension de T.

Déterminons d'abord le spectre de $\tilde{T}$.

Soit S la fermeture de l'ensemble $\{\mu_n : 1 \leq n < \infty\}$.

Or chaque μ_n est une valeur propre de $\tilde{T}$ et $Spect(\tilde{T})$ est un fermé, donc $S \subset Spect(\tilde{T})$.

Si $z \notin S$, alors l'opérateur A défini sur H par

$$A(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - \mu_n)^{-1} f_n$$

est borné ponctuellement. On a

$$\begin{aligned}(z-\tilde{T})Af &= (zAf-\tilde{T}Af)\\ &= z(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n(z-\mu_n)^{-1})-\tilde{T}(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n(z-\mu_n)^{-1})\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z\alpha_n f_n(z-\mu_n)^{-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\mu_n f_n(z-\mu_n)^{-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n f_n)(z-\mu_n)^{-1}(z-\mu_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n f_n)\\ &= f.\end{aligned}$$

On a $z \notin Spect(\tilde{T})$ et $A=(z-\tilde{T})^{-1}$ ce qui vaut dire que le complémentaire de S est inclus dans le complémentaire du spectre de $\tilde{T}$ et donc $Spect(\tilde{T}) \subset S$. Cela implique que $S = Spect(\tilde{T})$.
Montrons que $\tilde{T}$ est égale à la fermeture de T.
Montrons que $\bar{T} \subset \tilde{T}$.
Puisque $Spect(\tilde{T})$ n'est pas égale à $\mathbb{C}$, le Lemme (2.1) implique que $\tilde{T}$ est un opérateur fermé. Donc $\bar{T} \subset \tilde{T}$.
Montrons que $\tilde{T} \subset \bar{T}$.
Soit $g := \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n \in dom(\tilde{T})$ et on pose
$g_m := \sum_{n=1}^{m}\alpha_n f_n \in dom(T)$, alors $\lim_{m\to\infty} g_m = g$ et

$$\lim_{m\to\infty}(Tg_m)=\lim_{m\to\infty}(\sum_{n=1}^{m}(T\alpha_n f_n))=\lim_{m\to\infty}(\sum_{n=1}^{m}\mu_n\alpha_n f_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\alpha_n f_n=\tilde{T}g.$$

Alors on a,

$$\lim_{m\to\infty}(g_m, Tg_m)=(g,\tilde{T}g)$$

donc $(g,\tilde{T}g) \in \overline{\Gamma(T)}$, or $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\bar{T})$ donc $g \in dom(\bar{T})$. Puisque $dom(\tilde{T}) \subset dom(\bar{T})$, alors $\tilde{T} \subset \bar{T}$.
D'où $\tilde{T} = \bar{T}$.
Ainsi on peut conclure que $\tilde{T}$ est la fermeture de T.
Il reste à prouver que $\tilde{T}$ est auto-adjoint.
Soient $f = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n \in dom(\tilde{T}^*)$ et $\tilde{T}^* f = k$, on a

$$\begin{aligned}<k, f_k> &= <\tilde{T}^* f, f_k>\\ &= <f, \tilde{T}f_k>\\ &= \mu_k <f, f_k>\\ &= \mu_k <\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_n, f_k>\\ &= \mu_k\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n <f_n, f_k>\\ &= \mu_k\alpha_k <f_k, f_k>\\ &= <\mu_k\alpha_k f_k, f_k>\\ &= <\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\alpha_n f_n, f_k>,\ \ \forall f_k.\end{aligned}$$

Donc $k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \alpha_n f_n = \tilde{T} f$. Il s'ensuit que $f \in dom(\tilde{T})$ et donc $\tilde{T}^* = \tilde{T}$ d'où $\tilde{T}$ est auto-adjoint.
Donc T est essentiellement auto-adjoint.
Comme $\tilde{T}$ est la fermeture de T, on a $\tilde{T} = \bar{T}$. Donc le spectre de $\bar{T}$ est égale à S qui est la fermeture de l'ensemble $\{\mu_n : 1 \leq n < \infty\}$. $\square$

2.1 Cas unidimensionnel $(n = 1)$

Pour les raisons de simplicité et afin d'expliquer la méthode générale, nous commençons par le cas complexe unidimensionnel. En cherchant la valeur propre μ du laplacien $\square_{\varphi,0}$. On obtient à partir (5)

$$\square_{\varphi,0} u = -u_{z\bar{z}} + \bar{z} u_{\bar{z}} = \mu u. \tag{13}$$

Remarque 2.2.
L'espace $A^2(\mathbb{C}^n, e^{-|\varphi|})$ est contenu dans l'espace propre associé à la valeur propre $\mu = 0$.
Pour tout entier k positif, le monôme antiholomorphe $\bar{z}^k$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\mu = k$.

Lemme 2.3.
Soit $n = 1$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$u_{k,m}(z, \bar{z}) = \bar{z}^{k+m} z^m + \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j (k+m)\,!m\,!}{j\,!(k+m-j)\,!(m-j)\,!} \bar{z}^{k+m-j} z^{m-j} \tag{14}$$

est une fonction propre associée à la valeur propre $k + m$ du Laplacien $\square_{\varphi,0} u = -u_{z\bar{z}} + u_{\bar{z}}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, la fonction

$$v_{k,m}(z, \bar{z}) = \bar{z}^k z^{k+m} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j (k+m)\,!k\,!}{j\,!(k+m-j\,!)(k-j)\,!} \bar{z}^{k-j} z^{k+m-j} \tag{15}$$

est une fonction propre associée à la valeur propre k du Laplacien $\square_{\varphi,0} u = -u_{z\bar{z}} + \bar{z} u_{\bar{z}}$.

Démonstration.

On pose
$u_{k,m}(z, \bar{z}) = \bar{z}^{k+m} z^m + a_1 \bar{z}^{k+m-1} z^{m-1} + a_2 \bar{z}^{k+m-2} z^{m-2} + \cdots + a_{m-1} \bar{z}^{k+1} z + a_m \bar{z}^k$.
On a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} u_{k,m}(z, \bar{z}) = (k+m) m \bar{z}^{k+m-1} z^{m-1} + a_1 (k+m-1)(m-1) \bar{z}^{k+m-2} z^{m-2} + \cdots + a_{m-1}(k+1) \bar{z}^k,$$

et

$$\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u_{k,m}(z, \bar{z}) = (k+m) \bar{z}^{k+m} z^m + a_1 (k+m-1) \bar{z}^{k+m-1} z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(k+1) \bar{z}^{k+1} z + a_m k \bar{z}^k.$$

Déterminons les coefficients a_j tels que $u_{k,m}(z, \bar{z})$ soit une fonction propre associée à la valeur propre $\mu = k + m$.
D'après l'équation (13), en comparant les plus grands exposants de z et $\bar{z}$, on obtient

$$(k+m)m - a_1(k+m-1) = -(k+m) a_1,$$

implique que

$$a_1 = -(k+m)m.$$

En comparant les plus petits exposants suivants, on a

$$a_1(k+m-1)(m-1) - a_2(k+m-2) = -a_2(k+m),$$

implique que

$$a_2 = \frac{1}{2}(k+m)(k+m-1)m(m-1).$$

En généralisant, par itération pour $j = 1, 2, \cdots, m$, on a

$$a_j = \frac{(-1)^j (k+m)!m!}{j!(k+m-j)!(m-j)!}$$

ce qui prouve la relation (14).
Pour montrer la relation (15), on pose
$v_{k,m}(z,\bar{z}) = \bar{z}^k z^{k+m} + b_1 \bar{z}^{k-1} z^{k+m-1} + b_2 \bar{z}^{k+m-2} z^{m-2} + \cdots + b_{k-1} \bar{z} z^{m+1} + b_k z^m$.
On a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} v_{k,m}(z,\bar{z}) = k(k+m)\bar{z}^{k-1} z^{k+m-1} + b_1(k-1)(k+m-1)\bar{z}^{k-2} z^{k+m-2} + \cdots + b_{k-1}(m+1)z^m,$$

et

$$\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v_{k,m}(z,\bar{z}) = k\bar{z}^k z^{k+m} + b_1(k-1)\bar{z}^{k-1} z^{k+m-1} + \cdots + b_{k-1}\bar{z} z^{m+1}.$$

Déterminons les coefficients b_j tels que $v_{k,m}(z,\bar{z})$ soit une fonction propre associée à la valeur propre $\mu = k$.
D'après l'équation (13) et en comparant les plus grands exposants de z et $\bar{z}$, on obtient

$$k(k+m) - b_1(k-1) = -b_1 k,$$

implique que

$$b_1 = -(k+m)k.$$

En comparant les plus petits exposants suivants, on obtient

$$b_1(k-1)(k+m-1) - b_2(k-2) = -b_2 k,$$

implique que

$$b_2 = \frac{1}{2}(k+m)(k+m-1)k(k-1).$$

En généralisant, par itération pour $j = 1, 2, \cdots, k$

$$b_j = \frac{(-1)^j (k+m)!k!}{j!(k+m-j)!(k-j)!}$$

ce qui prouve la relation (15).

□

Définition 2.6 (Polynôme de Hermite). *(cf[10])*

Le n-ième polynôme de Hermite H_n est défini par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Exemple 2.1.

$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2,$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$

Le Lemme suivant est tiré du Théorème 6.11 de [10].

Lemme 2.4.

Les polynômes de Hermite $\{H_n\}_0^\infty$ sont orthogonaux sur $\mathbb{R}$ avec comme fonction à poids $w(x) = e^{-x^2}$ et

$$\|H\|_w^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Démonstration.

Si f est un polynôme quelconque, nous avons

$$\begin{aligned} < f, H_n > &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Pour la dernière équation, nous avons intégré par parties n fois ; les termes limites disparaissent car $p(x)e^{-x^2} \to 0$ si $x \to \pm\infty$ pour tout polynôme p. Si f est un polynôme de degré $m < n$ et en particulier si $f = H_m$ avec $m < n$, alors $f^{(n)} \equiv 0$ et donc $< f, H_n >_w = 0$. Cela prouve l'orthogonalité des polynômes de Hermite. D'autre part, si $f = H_n$ nous avons $f(x) = (2x)^n + \cdots$ et donc $f^{(n)} \equiv 2^n n!$, d'où

$$\|H\|_w^2 = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \left(2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx\right) = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

$\square$

Maintenant on ait en mesure de prouver le théorème suivant.

Théorème 2.1.

Soient $n = 1$ et $\varphi(z) = |z|^2$. Le spectre du Laplacien $\square_{\varphi,0}$ est constitué de tous les entiers positifs $\{0, 1, 2, \cdots\}$, dont chacun est de multiplicité infinie.
Le spectre du Laplacien $\square_{\varphi,1}$ est constitué de tous les entiers strictements positifs $\{1, 2, \cdots\}$. Leur multiplicité est infinie.

Démonstration.

D'après la remarque 2.2, l'espace de Bergman $A^2(\mathbb{C}, e^{-|z|^2})$ est contenu dans l'espace propre associé à la valeur propre 0 du Laplacien $\square_{\varphi,0}$. Pour tout entier positif k, le monôme antiholomorphe $\bar{z}^k$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\mu = k$. De plus, toutes fonctions de la forme $\bar{z}^\nu z^k$ avec $\nu, k \in \mathbb{N}$ peuvent être exprimées comme une combinaison linéaire des fonctions de la forme (14) et (15). Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, les fonctions de la forme (15) ont une multiplicité infinie, car le paramètre $m \in \mathbb{N}$ est non fixe. Donc toutes les valeurs propres sont de multiplicité infinie. Toutes les fonctions propres considérées jusqu'ici donnent une base orthogonale complète de $L^2(\mathbb{C}, e^{-|z|^2})$, d'après le Lemme 2.4, les polynômes de Hermite

$$\{H_0(x)H_k(y), H_1(x)H_{k-1}(y) \cdots, H_k(x)H_0(y)\} \tag{16}$$

pour $k = 0, 1, 2, \cdots$ forment un système orthogonal complet dans $L^2(\mathbb{R}^2, e^{(-x^2-y^2)})$ et puisque

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ et } y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z),$$

d'après le Lemme 2.2, le spectre du Laplacien $\square_{\varphi,0}$ est égal à $\mathbb{N}$.
De la même manière on montre que le spectre du Laplacien $\square_{\varphi,1}$ est égal à $\mathbb{N}^*$ en utilisant la relation (6). $\square$

2.2 Cas multidimensionnel $(n>1)$

Pour plusieurs variables, on peut adopter la méthode ci-dessus pour obtenir le résultant suivant.

Théorème 2.2.

Soient $n>1$, $\varphi(z)=|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2$ et $0\leq q\leq n$. Le spectre du Laplacien $\Box_{\varphi,q}$ est constitué de tous les entiers $\{q,q+1,q+2\cdots\}$. Leur multiplicité est infinie.

Démonstration.

D'après l'équation (7), on a

$$\Box_{\varphi,q}u=\sum_{|J|}{}'\left(-\frac{1}{4}\Delta u_J+\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j u_{J\bar{z}_j}+qu_J\right)d\bar{z}_J. \tag{17}$$

Le facteur q dans la relation (17) est dû au fait que q est la plus petite valeur propre, ce qui peut être vu, dans chaque composante séparément par

$$-\frac{1}{4}\Delta u_J+\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j u_{J\bar{z}_j}=(\mu-q)u_J.$$

Soient $k_1,k_2\cdots,k_n\in\mathbb{N}$ et $m_1,m_2\cdots,m_n\in\mathbb{N}^*$. D'après les relations (7) et (14) la fonction

$$u_{k_1,m_1}(z_1,\bar{z}_1)u_{k_2,m_2}(z_2,\bar{z}_2)\cdots u_{k_n,m_n}(z_n,\bar{z}_n) \tag{18}$$

est une fonction propre associée à la valeur propre $\sum_{j=1}^{n}(k_j+m_j)$ du Laplacien $\Box_{\varphi,q}$.

De même, il découle des relations (7) et (15) que pour $k_1,k_2\cdots,k_n\in\mathbb{N}$ et $m_1,m_2\cdots,m_n\in\mathbb{N}$, la fonction

$$v_{k_1,m_1}(z_1,\bar{z}_1)v_{k_2,m_2}(z_2,\bar{z}_2)\cdots v_{k_n,m_n}(z_n,\bar{z}_n) \tag{19}$$

est une fonction propre associée à la valeur propre $\sum_{j=1}^{n}k_j$.

Pour tout autre produit des n facteurs u_{k_j,m_j} (resp. v_{k_j,m_j}) de la forme de (18) (resp. de la forme (19)) apparaissent comme des fonctions propres du Laplacien $\Box_{\varphi,q}$.
Pour cela, on obtient toutes les expressions de la forme $z_1^{\alpha_1}\bar{z}_1^{\beta_1}\cdots z_n^{\alpha_n}\bar{z}_n^{\beta_n}$ $\forall\ \alpha_j,\beta_j\in\mathbb{N}$ et $j=1,\cdots,n$ et chaque expression peut être écrite comme une combinaison linéaire de fonctions propres du Laplacien $\Box_{\varphi,q}$, ce qui prouve que toutes les fonctions propres constituent une base complète dans $L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n,e^{-|z|^2})$; voir la preuve du Théorème 2.1. Nous pouvons à nouveau appliquer le Lemme 2.2 pour prouver que le spectre du Laplacien $\Box_{\varphi,q}$ est égal à $\{q,q+1,q+2\cdots\}$. Leur multiplicité est infinie. $\Box$

Remarque 2.3.

On pose $Z_k=\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_k}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_k}$ et $Z_k^*=-\dfrac{\partial}{\partial z_k}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}$. Considérons une $(0,q)$-forme différentielle définie localement par $h=\sum_{|J|=q}{}' h_J d\bar{z}_J$. On définit

$$\overline{D}_{q+1}h=\sum_{k=1}^{n}\sum_{|J|=q}{}' Z_k(h_J)d\bar{z}_k\wedge d\bar{z}_J \tag{20}$$

et

$$\overline{D}_q^*h=\sum_{k=1}^{n}\sum_{|J|=q}{}' Z_k^*(h_J)d\bar{z}_k\rfloor d\bar{z}_J, \tag{21}$$

avec $d\bar{z}_k\rfloor d\bar{z}_J$ désigne la multiplication intérieur par $d\bar{z}_k$ c'est-à-dire que nous avons

$$< \alpha, d\bar{z}_k\rfloor d\bar{z}_J >=< d\bar{z}_k \wedge \alpha, d\bar{z}_J > \tag{22}$$

pour tout $(0, q-1)$-forme différentielle α.
Le Laplacien complexe de Witten sur les $(0,q)$-formes différentielles est alors donné par

$$\Delta_\varphi^{0,q} = \overline{D}_q\overline{D}_q^* + \overline{D}_{q+1}^*\overline{D}_{q+1} \tag{23}$$

pour $q = 1, \cdots, n-1$.
En général les opérateurs $\overline{D}$ et $\overline{D}^*$ sont définis par :

$$L^2_{(0,q-1)}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\overline{D}_q} L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\overline{D}_{q+1}} L^2_{(0,q+1)}(\mathbb{C}^n)$$
$$et$$
$$L^2_{(0,q+1)}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\overline{D}^*_{q+1}} L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\overline{D}^*_q} L^2_{(0,q-1)}(\mathbb{C}^n).$$

Il s'ensuit que

$$\overline{D}_{q+1}\Delta_\varphi^{(0,q)} = \Delta_\varphi^{(0,q+1)}\overline{D}_{q+1} \tag{24}$$

et

$$\overline{D}^*_{q+1}\Delta_\varphi^{(0,q+1)} = \Delta_\varphi^{(0,q)}\overline{D}^*_{q+1}. \tag{25}$$

Nous remarquons que

$$\overline{D}^*_q h = \sum_{k=1}^n \sideset{}{'}\sum_{|J|=q} Z_k^*(h_J) d\bar{z}_k\rfloor d\bar{z}_J = \sideset{}{'}\sum_{|K|=q-1} \sum_{k=1}^n Z_k^*(h_{kK}) d\bar{z}_K. \tag{26}$$

En particulier, pour une fonction $v \in L^2(\mathbb{C}^n)$, on obtient

$$\Delta_\varphi^{(0,0)} v = \overline{D}_1^*\overline{D}_1 v = \sum_{j=1}^n Z_j^* Z_j(v) \tag{27}$$

et pour une $(0,1)$-forme différentielle $g = \sum_{l=1}^n g_l d\bar{z}_l \in L^2_{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$, on obtient

$$\Delta_\varphi^{(0,1)} g = \left(\overline{D}_1\overline{D}_1^* + \overline{D}_2^*\overline{D}_2\right) g = (\Delta_\varphi^{(0,0)} \otimes I)g + M_\varphi g, \tag{28}$$

où on pose

$$M_\varphi g = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} g_k\right) d\bar{z}_j \tag{29}$$

et

$$(\Delta_\varphi^{(0,0)} \otimes I)g = \sum_{k=1}^n \Delta_\varphi^{(0,0)} g_k d\bar{z}_k. \tag{30}$$

En général, on a

$$\Delta_\varphi^{(0,q)} = e^{-\frac{\varphi}{2}} \Box_{\varphi,q} e^{\frac{\varphi}{2}}, \tag{31}$$

pour $q = 0, 1, \cdots, n$, voir([20],[16]).
Dans notre cas $\varphi|z| = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$, on a

$$\Delta_\varphi^{(0,q)} h = \sideset{}{'}\sum_{|J|=q} \left(-\frac{1}{4}\Delta h_J + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (\bar{z}_j h_{J\bar{z}_j} - z_j h_{Jz_j}) + \frac{1}{4}|z|^2 h_J + \left(q - \frac{n}{2}\right) h_J\right) d\bar{z}_J, \tag{32}$$

pour $h = \sideset{}{'}\sum_{|J|=q} (h_J) d\bar{z}_J \in dom\Delta^{(0,q)} \subseteq L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n)$.

Théorème 2.3.

Soient $n > 1$, $\varphi(z) = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ et $0 \leq q \leq n$. Le spectre du Laplacien complexe de Witten noté $\Delta_\varphi^{(0,q)}$ est constitué de tous les entiers $\{q, q+1, q+2 \cdots\}$ dont chacun est de multiplicité infinie.

Démonstration. **1)** Montrons $Spect(\square_{\varphi,q}) \subset Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)})$.
Supposons $\mu_k \in Spect(\square_{\varphi,q})$. D'après le Lemme 2.2, $\exists f_k \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$ tel que $\square_{\varphi,q} f_k = \mu_k f_k$.
Montrons que $\mu_k \in Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)})$.
Soit $f_k \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$. D'après l'équation (31) et le Lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi^{(0,q)} f_k &= e^{-\frac{\varphi}{2}}\ \square_{\varphi,q}\ e^{\frac{\varphi}{2}} f_k \\ &= e^{-\frac{\varphi}{2}}\ \square_{\varphi,q} f_k\ e^{\frac{\varphi}{2}} \\ &= e^{-\frac{\varphi}{2}}\ \mu_k f_k\ e^{\frac{\varphi}{2}} \\ &= \mu_k f_k. \end{aligned}$$

Donc $\mu_k \in Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)})$. Par conséquent, $Spect(\square_{\varphi,q}) \subset Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)})$.
2) Montrons que $Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)}) \subset Spect(\square_{\varphi,q})$.
Supposons $\mu_k \in Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)})$. D'après le Lemme 2.2, $\exists f_k \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$ tel que $\Delta_\varphi^{(0,q)} f_k = \mu_k f_k$.
Montrons que $\mu_k \in Spect(\square_{\varphi,q})$.
Soit $f_k \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, e^{-\varphi})$. D'après l'équation (31), on a

$$e^{-\frac{\varphi}{2}}\ \square_{\varphi,q}\ e^{\frac{\varphi}{2}} = \Delta_\varphi^{(0,q)},$$

donc

$$\square_{\varphi,q} = e^{\frac{\varphi}{2}}\ \Delta_\varphi^{(0,q)}\ e^{-\frac{\varphi}{2}}.$$

D'après le Lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned} \square_{\varphi,q} f_k &= \left(e^{\frac{\varphi}{2}}\ \Delta_\varphi^{(0,q)}\ e^{-\frac{\varphi}{2}}\right) f_k \\ &= e^{\frac{\varphi}{2}}\ \Delta_\varphi^{(0,q)} f_k\ e^{-\frac{\varphi}{2}} \\ &= e^{\frac{\varphi}{2}}\ \mu_k f_k\ e^{-\frac{\varphi}{2}} \\ &= \mu_k f_k, \end{aligned}$$

donc $\mu_k \in Spect(\square_{\varphi,q})$. Par conséquent, $Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)}) \subset Spect(\square_{\varphi,q})$.
On a $Spect(\Delta_\varphi^{(0,q)}) = Spect(\square_{\varphi,q})$ et d'après le Théorème 2.2, le spectre du Laplacien complexe de Witten $\Delta_\varphi^{(0,q)}$ est constitué de tous les entiers $\{q, q+1, q+2 \cdots\}$. Leur multiplicité est infinie. $\square$

3 Applications

Dans cette section nous allons étudier quelques méthodes pour établir la compactification du $\bar{\partial}$-Neumann à poids.

3.1 Compactification du $\bar{\partial}$-Neumann à poids avec les valeurs propres de la matrice de Lévi

Dans cette partie, nous allons utiliser les valeurs propres de la matrice de Lévi pour montrer que le $\bar{\partial}$-Neumann à poids est compact. Cela est équivalent au résultat suivant :

Théorème 3.1. *cf[19]*

Soient φ une fonction plurisousharmonique de classe C^2 et M_φ la matrice de Lévi. Si $1 \le q \le n$ et on suppose que la somme s_q de toutes les q plus petites valeurs propres de M_φ satisfait :

$$\lim_{|z|\to+\infty} s_q(z) = +\infty. \tag{33}$$

Alors $N_{\varphi,q} : L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n,\varphi) \longrightarrow L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n,\varphi)$ est compact.

Pour la preuve du Théorème 3.1, nous avons besoin de faire quelques calculs et prouver quelques résulats en avance.
On a

$$\begin{aligned}(\square_{\varphi,q}u,u)_\varphi &= (\overline{\partial}\overline{\partial}^*_\varphi u + \overline{\partial}^*_\varphi\overline{\partial}u, u)\\ &= (\overline{\partial}\overline{\partial}^*_\varphi u, u) + (\overline{\partial}^*_\varphi\overline{\partial}u, u)\\ &= (\overline{\partial}^*_\varphi u, \overline{\partial}^*_\varphi u) + (\overline{\partial}u, \overline{\partial}u)\\ &= \|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi\end{aligned}$$

pour $u \in dom(\square_{\varphi,q})$.
On obtient

$$\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi = \sum_{|J|=|M|=q}{}' \sum_{j,k=1} \varepsilon^{kM}_{jJ} \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial u_J}{\partial \bar z_j}\overline{\frac{\partial u_M}{\partial \bar z_k}} e^{-\varphi} d\lambda + \sum_{|K|=q-1}{}' \sum_{j,k=1} \int_{\mathbb{C}^n} \delta_j u_{jK}\overline{\delta_k u_{kK}} e^{-\varphi} d\lambda, \tag{34}$$

Où $\varepsilon^{kM}_{jJ} = 0$ si $j \in J$ ou $k \in M$ ou si $k \cup M \ne j \cup J$ et égal au signe de la permutation $\begin{pmatrix} kM \\ jJ \end{pmatrix}$ dans le cas contraire. De la formule (34), on obtient l'expression suivante :

$$\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi = \sum_{|J|=q}{}' \sum_{j=1} \left\|\frac{\partial u_J}{\partial \bar z_j}\right\|^2_\varphi + \sum_{|K|=q-1}{}' \sum_{j,k=1} \int_{\mathbb{C}^n} \left(\delta_j u_{jK}\overline{\delta_k u_{kK}} - \frac{\partial u_{jK}}{\partial \bar z_k}\overline{\frac{\partial u_{kK}}{\partial \bar z_j}}\right) e^{-\varphi} d\lambda,$$

voir [31] proposition 2.4.
Maintenant pour $f, g \in C^\infty_0(\mathbb{C}^n)$ on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}, g\right)_\varphi = -(f, \delta_k g)_\varphi, \quad \text{avec} \quad \delta_k = \left(\frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}\right)$$

et donc

$$\left(\left[\delta_j, \frac{\partial}{\partial \bar z_k}\right] u_{jK}, u_{kK}\right)_\varphi = -\left(\frac{\partial u_{jK}}{\partial \bar z_k}, \frac{\partial u_{kK}}{\partial \bar z_j}\right)_\varphi + (\delta_j u_{jK}, \delta_k u_{kK})_\varphi .$$

Puisque

$$\left[\delta_j, \frac{\partial}{\partial \bar z_k}\right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k},$$

on obtient

$$\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi = \sum_{|J|=q}{}' \sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial u_J}{\partial \bar z_j}\right\|^2_\varphi + \sum_{|K|=q-1}{}' \sum_{j,k=1}^n \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k} u_{jK}\bar u_{kK} e^{-\varphi} d\lambda. \tag{35}$$

Lemme 3.1. *cf[19]* Soit $1 \le q \le n$ et supposons que la somme s_q de toutes les q plus petites valeurs propres de M_φ avec $M_\varphi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k}\right)_{jk}$ la matrice de Lévi satisfait

$$\liminf_{|z|\to\infty} s_q(z) > 0. \tag{36}$$

Alors il existe un opérateur linéaire borné $N_{\varphi,q} : L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n,\varphi) \longrightarrow L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n,\varphi)$, tel que $\square_{\varphi,q} \circ N_{\varphi,q} u = u$, pour tout $u \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n,\varphi)$.

Démonstration. Soient $\mu_{\varphi,1} \leq \mu_{\varphi,2} \leq \ldots \leq \mu_{\varphi,n}$ les valeurs propres de la matrice Hermitienne M_φ. Alors M_φ est diagonalisable (voir [4]) et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{|K|=q-1}^{\prime} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} u_{jK} \bar{u}_{kK} &= \sum_{|K|=q-1}^{\prime} \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{\varphi,j} |u_{jK}|^2 \\
&= \sum_{|J=(j_1,\ldots,j_q)}^{\prime} (\mu_{\varphi,j_1} + \ldots + \mu_{\varphi,j_q}) |u_J|^2 \\
&\geq s_q |u|^2.
\end{aligned}$$

D'après l'équation (35) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_\varphi^2 \leq C(\|\overline{\partial} u\|_\varphi^2 + \|\overline{\partial^*} u\|_\varphi^2) \tag{37}$$

pour tout $(0, q)$-forme différentielle $u \in dom(\overline{\partial}) \cap dom(\overline{\partial_\varphi^*})$. Soit $v \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$, considérons la fonction linéaire L sur $dom(\overline{\partial}) \cap dom(\overline{\partial_\varphi^*})$ donnée par $L(u) = (u, v)_\varphi$. Comme $dom(\overline{\partial}) \cap dom(\overline{\partial_\varphi^*})$ un espace de Hilbert pour le produit scalaire Q_φ est défini par $Q_\varphi(f, g) = (\overline{\partial} f, \overline{\partial} g)_\varphi + (\overline{\partial}_\varphi^* f, \overline{\partial}_\varphi^* g)_\varphi$. D'après l'équation (37), on a

$$|L(u)| = |(u, v)_\varphi| \leq \|u\|_\varphi \|v\|_\varphi \leq C(Q_\varphi(u, u))^{\frac{1}{2}} \|v\|_\varphi.$$

Donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique $(0, q)$-forme différentielle $N_{\varphi,q} v$ tel que

$$(u, v)_\varphi = Q_\varphi(u, N_{\varphi,q} v) = (\overline{\partial} u, \overline{\partial} N_{\varphi,q} v)_\varphi + (\overline{\partial}_\varphi^* u, \overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v)_\varphi,$$

d'où on a $\square_{\varphi,q} \circ N_{\varphi,q} v = v$, pour tout $v \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$. Si on pose $u = N_{\varphi,q} v$ dans l'équation (37) on a

$$\begin{aligned}
\|\overline{\partial} N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2 + \|\overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2 &= Q_\varphi(N_{\varphi,q} v, N_{\varphi,q} v) \\
&= (\overline{\partial} N_{\varphi,q} v, \overline{\partial} N_{\varphi,q} v) + (\overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v, \overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v) \\
&= (N_{\varphi,q} v, \overline{\partial}_\varphi^* \overline{\partial} N_{\varphi,q} v) + N_{\varphi,q} v, \overline{\partial} \overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v) \\
&= (N_{\varphi,q} v, v)_\varphi \\
&\leq \|N_{\varphi,q} v\|_\varphi \|v\|_\varphi \\
&\leq C_1(\|\overline{\partial} N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2 + \|\overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \|v\|_\varphi,
\end{aligned}$$

donc

$$(\|\overline{\partial} N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2 + \|\overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \|v\|_\varphi,$$

et finalement d'après l'équation (37), on a

$$\|N_{\varphi,q} v\| \leq C_3(\|\overline{\partial} N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2 + \|\overline{\partial}_\varphi^* N_{\varphi,q} v\|_\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_4 \|v\|_\varphi,$$

avec $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ sont des constantes. On obtient donc que $N_{\varphi,q}$ est un opérateur linéaire continu de $L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$ cf([5] ou [22]). $\square$

Pour la suite on a besoin d'une caractérisation des sous-espaces relativement compacts de l'espace L^2 (voir [1], [19]).

Définition 3.1.

Un sous-espace borné A de $L^2(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ et un sous-ensemble $W \subset\subset \Omega$ tels que pour tout $u \in A$ et $h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| < \delta$, on a les relations suivantes :

$$(i) \int_\Omega |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^2 dx < \varepsilon^2, \quad (ii) \int_{\Omega \setminus \overline{W}} |u(x)|^2 dx < \varepsilon^2. \tag{38}$$

Définition 3.2. *cf[19]*

Soit

$$\mathcal{W}_q^{Q_\varphi} = \{u \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi) : \|\overline{\partial} u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi < +\infty\}.$$

L'expression

$$\|u\|_{Q_\varphi} := (\|\overline{\partial} u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

définie une norme dans cet espace.

Remarque 3.1.

$\mathcal{W}_q^{Q_\varphi}$ coïncide avec $dom(\overline{\partial}) \cap dom(\overline{\partial^*})$ qui est le domaine de définition de Q_φ d'après [16] et [17].

Maintenant nous allons faire les détails de la preuve du Théorème 3.1.

Démonstration. (Théorème 3.1)

Pour les $(0,q)$- formes différentielles, à partir de l'équation (35) et du Lemme 3.1 nous avons,

$$\|\overline{\partial} u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial^*} u\|^2_\varphi \geq \int_{\mathbb{C}^n} s_q(z)|u(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z). \tag{39}$$

Montrons que l'injection $j_{\varphi,q} : \mathcal{W}_q^{Q_\varphi} \hookrightarrow L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$ est compacte.
Il suffit de prouver qu'on a les conditions (i) et (ii) de l'équation (38), pour montrer que la boule unité de $\mathcal{W}_q^{Q_\varphi}$ est un sous-espace relativement compact dans $L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$.
Montrons d'abord que la condition (i) est satisfaite.
Nous allons procéder de la même manière que dans la preuve du Lemme 2.3 dans [19].
Soit $u = \sum_{j=1}^n u_j d\bar{z}_j$ une $(0,1)$-forme différentielle à coefficients dans C_0^∞ (espace des fonctions à support compact). Soient $t \in \mathbb{R}$ et $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit pour chaque u_j,

$$v_j(t) := u_j(z + th).$$

Notons que

$$|v_j'(t)| \leq |h| \left[\sum_{k=1}^n \left(\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(z+th) \right|^2 + \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_k}(z+th) \right|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

où $z_k = x_k + iy_k$, pour $k = 1, \cdots, n$. Puisque

$$u_j(z+h) - u_j(z) = v_j(1) - v_j(0) = \int_0^1 v_j'(t) dt.$$

Pour $|h| < R$, nous pouvons maintenant estimer

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_R} |u_j(z+h) - u_j(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) &= \int_{\mathbb{B}_R} |\chi_R u_j(z+h) - \chi_R u_j(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{B}_R} \int_0^1 |\chi_R v'(t)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \\
&\leq |h|^2 \int_{\mathbb{B}_R} \left[\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\left| \frac{\partial(\chi_R u_j)}{\partial x_k}(z+th) \right|^2 + \left| \frac{\partial(\chi_R u_j)}{\partial y_k}(z+th) \right|^2 \right) dt \right] \times \\
&\quad e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \\
&\leq C_{R,\varphi} |h|^2 \int_{\mathbb{B}_{3R}} \sum_{k=1}^n \left(\left| \frac{\partial(\chi_R u_j)}{\partial x_k}(z) \right|^2 + \left| \frac{\partial(\chi_R u_j)}{\partial y_k}(z) \right|^2 \right) e^{-\varphi(z)} d\lambda(z)
\end{aligned}$$

pour $j = 1, \cdots, n$; $\mathbb{B}_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$; où χ_R est une fonction de classe C^∞ qui est identiquement égale à 1 sur $\mathbb{B}_{2R}$ et 0 en dehors de $\mathbb{B}_{3R}$ et par l'inégalité de Gårding pour $\mathbb{B}_{3R}$ voir [5],[11],[18]

$$\begin{aligned}\|\chi_R u\|^2_{\varphi,1} &\leq C'_{\varphi,R}\left(\|\overline{\partial}(\chi_R u)\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi(\chi_R u)\|^2_\varphi + \|\chi_R u\|^2_\varphi\right)\\ &\leq C''_{\varphi,R}\left(\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^* u\|^2_\varphi + \|u\|^2_\varphi\right).\end{aligned}$$

On a

$$\|\chi_R u)\|^2_{\varphi,1} = \int_{\mathbb{B}_{3R}} \sum_{k=1}^n \left(\left|\frac{\partial(\chi_R u_j)}{\partial x_k}(z)\right|^2 + \left|\frac{\partial(\chi_R u_j)}{\partial y_k}(z)\right|^2\right) e^{-\varphi(z)} d\lambda(z),$$

puisque

$$\|u\|^2_\varphi \leq C(\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^* u\|^2_\varphi),$$

donc

$$\begin{aligned}\|\chi_R u)\|^2_{\varphi,1} &\leq C''_{\varphi,R}\left(\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi\right) + CC''_{\varphi,R}\left(\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi\right)\\ &\leq (C''_{\varphi,R} + CC''_{\varphi,R})\left(\|\overline{\partial}u\|^2_\varphi + \|\overline{\partial}^*_\varphi u\|^2_\varphi\right)\\ &\leq C'''_{\varphi,R}\|u\|^2_{Q_\varphi}.\end{aligned}$$

On a

$$\int_{\mathbb{B}_R} |u_j(z+h) - u_j(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \leq C_{\varphi,R}|h|^2 \|\chi_R u)\|^2_{\varphi,1}.$$

Or

$$C_{\varphi,R}\|\chi_R u)\|^2_{\varphi,1} \leq C'''_{\varphi,R}\|u\|^2_{Q_\varphi},$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_R} |u_j(z+h) - u_j(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) &\leq C_{\varphi,R}C'''_{\varphi,R}|h|^2\|u\|^2_{Q_\varphi}\\ &\leq C''''_{\varphi,R}|h|^2\|u\|^2_{Q_\varphi}.\end{aligned}$$

Or $|h| < R$ et pour $R = 1$, si $h \to 0$ alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \int_{\mathbb{B}_1} |u_j(z+h) - u_j(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < \varepsilon^2.$$

Donc nous obtenons que la condition (i) est satisfaite.
La condition (ii) de (38) est satisfaite pour la boule unité de $\mathcal{W}^{Q_\varphi}$ puisque nous avons

$$\int_{\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B}_R} |u(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \leq \int_{\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B}_R} \frac{s_q(z)|u(z)|^2}{\inf\{s_q(z) : |z| \geq R\}} e^{-\varphi(z)} d\lambda(z),$$

d'après (39), on a

$$\int_{\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B}_R} |u(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \leq \frac{\|u\|^2_{Q_\varphi}}{\inf\{s_q(z) : |z| \geq R\}} < \varepsilon,$$

pour R assez grand.
Donc la boule unité de $\mathcal{W}^{Q_\varphi}$ est relativement compacte dans $L^2_{(0,1)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$. En appliquant la même méthode aux $(0,q)$-formes différentielles, on montre que la boule unité de $\mathcal{W}^{Q_\varphi}_q$ est relativement compacte dans $L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$. Donc $j_{\varphi,q} : \mathcal{W}^{Q_\varphi}_q \hookrightarrow L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \varphi)$ est compacte.
D'après le Lemme 3.1, $N_{\varphi,q}$ est linéaire, continue et s'écrit sous la forme $N_{\varphi,q} = j_{\varphi,q} \circ j^*_{\varphi,q}$, avec $j^*_{\varphi,q}$ l'opérateur adjoint de $j_{\varphi,q}$ (voir [31]). Donc $N_{\varphi,q}$ est compact. □

Remarque 3.2. *(cf[19])*
Si $q = 1$ la condition (33) signifie que la plus petite valeur propre de la matrice de Lévi satisfait

$$\lim_{|z| \to +\infty} \mu_{\varphi,1}(z) = +\infty, \tag{40}$$

alors $N_{\varphi,1}$ est compact.

3.2 Théorie spectrale sur les opérateurs de Schrödinger dans la mécanique quantique

Il existe un lien entre le $\bar{\partial}$-Neumann à poids et les opérateurs de Schrödinger dans la mécanique quantique. C'est pourquoi nous allons rassembler quelques faits concernant les opérateurs de Schrödinger.
Soient Ω un domaine à bord lisse de $\mathbb{C}$ et φ une fonction sousharmonique dans Ω. On note par L^2_φ l'espace L^2 à poids

$$L^2_\varphi(\Omega) := \left\{ f \in L^2_{loc} : \int_\Omega |f|^2 e^{-2\varphi} < \infty \right\}.$$

Pour résoudre l'équation $\bar{\partial} v = g$ et estimer $ve^{-\varphi}$ par $ge^{-\varphi}$, on peut procéder par changement de variable.
En effet, on fait un changement de variable comme dans [6], en posant

$$u = ve^{-\varphi}, \quad f = ge^{-\varphi}$$

et l'équation devient

$$\overline{D} u = f \tag{41}$$

où $\overline{D} = e^{-\varphi} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{\varphi}$. Alors v est la solution minimale de l'équation $\overline{\partial} v = g$ dans L^2_φ si et seulement si u est la solution de (41) qui est minimale dans $L^2(\Omega)$. L'intégration par parties montre que l'adjoint formel de $\overline{D}$ est $-D$, où

$$D = e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z} e^{-\varphi}.$$

Supposons que $\varphi \in C^2(\Omega)$, donc toute forme différentielle de la forme

$$u = D\alpha, \quad \alpha \in C^1_0(\bar{\Omega})$$

est orthogonal à $ker(\overline{D})$ et est donc la solution minimal de (41) si $f = \overline{D} D\alpha$.
Ce qui nous ramène au problème suivant :

$$\overline{D} D\alpha = f, \quad \alpha \in C^1_0(\bar{\Omega}).$$

Définition 3.3. *(cf[2])*
Soient V une fonction à valeur réelle et $A = \sum A_j dx_j$ une 1-forme différentielle réelle. Tout opérateur de la forme

$$S_{A,V} = -(hd - iA)^2 + V,$$

où

$$(hd - iA)u = \sum (h \frac{\partial u}{\partial x_j} - iA_j u) dx_j,$$

et son carré

$$(hd - iA)^2 u = \sum (h \frac{\partial}{\partial x_j} - iA_j)^2 u$$

est appelé opérateur de Schrödinger. Ici h représente la constante de Planck, V est le potentiel électrique et A est un potentiel pour le champ magnétique $B = dA$.

Remarque 3.3. *(cf[2])*
Une solution à l'équation

$$S_{A,V} u = \lambda u$$

qui est nulle à l'infini représente l'état d'un système mécanique quantique d'énergie totale λ.

Exemple 3.1. *(cf[2])* Puisque $D = \frac{\partial}{\partial z} - \varphi_z$ et $\overline{D} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \varphi_{\bar{z}}$, alors

$$\begin{aligned}\overline{D}D &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \varphi_{\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} - \varphi_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - |\varphi_z|^2 - \varphi_{z\bar{z}} \\ &= \frac{1}{4}\Big((d - iA)^2 - \Delta\varphi\Big)\end{aligned}$$

où $\varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\varphi_{\bar{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}$ et $A = -\varphi_y dx + \varphi_x dy$. Donc si nous prenons $h = 1$, l'opérateur $\bar{D}D$ est un opérateur de Schrödinger avec un potentiel électrique $\Delta\varphi$ et un champ magnétique $(\frac{i}{2})\partial\bar{\partial}\varphi$.

Remarque 3.4. *cf[15]*

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}$. Soit $\varphi(z) \in C^2(\bar{\Omega})$. Posons $\bar{L}_\varphi = e^{-\varphi}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})e^{\varphi} = \partial_{\bar{z}} + \varphi_{\bar{z}}$ un opérateur différentiel du premier ordre défini au sens des distributions sur $L^2(\Omega)$ et son adjoint formel est $L_\varphi = -e^{\varphi}(\frac{\partial}{\partial z})e^{-\varphi} = -\partial_z + \varphi_z$. Le domaine de l'adjoint formel de $\bar{L}_\varphi$ est l'espace de Sobolev $W_0^1(\Omega)$. Soit S_φ l'unique opérateur positive, auto-adjoint et densément défini sur $L^2(\Omega)$ et donné par

$$S_\varphi = 4\bar{L}_\varphi L_\varphi = -\Big[(\partial_x + i\varphi_y)^2 + (\partial_y - i\varphi_x)^2\Big] + \Delta\varphi. \tag{42}$$

On note le domaine de S_φ par

$$dom(S_\varphi) = W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega).$$

C'est la réalisation de Dirichlet de l'opérateur de Schrödinger sur Ω avec un potentiel magnétique $A = (-\varphi_y, \varphi_x) = -\varphi_y dx + \varphi_x dy$, de champs magnétique $dA = \Delta\varphi dx \wedge dy$ et de potentiel électrique $V = \Delta\varphi$. Puisque $dom(S_\varphi) = W_0^1(\Omega) \cap W^2(\Omega)$ se prolonge de manière compacte dans $L^2(\Omega)$, S_φ a une résolvante compacte. Par constructions S_φ est la restriction à son domaine d'un isomorphisme de $W_0^1(\Omega)$ sur $W^{-1}(\Omega)$. Par conséquent, en tant qu'opérateur (non borné) sur $L^2(\Omega)$, il est injectif et d'inverse borné (qui de plus est compact). Soit $S_\varphi^0 = -\Delta + \Delta\varphi$ l'opérateur de Schrödinger sans potentiel magnétique correspondant à S_φ (avec le même domaine que S_φ) ; lui aussi a une résolvante compacte. Puisque S_φ et S_φ^0 ont tous une résolvante compacte, le spectre dans chaque cas consiste en une suite de valeurs propres tendant vers l'infini. Soient λ_φ et λ_φ^0 les valeurs propres de S_φ et S_φ^0 respectivement. Notons que

$$\begin{aligned}\lambda_\varphi(\Omega) &= inf\left\{4\frac{\int_\Omega |L_\varphi u|^2 dA}{\int_\Omega |u|^2 dA},\ u \in C_0^\infty(\Omega),\ u \not\equiv 0\right\} \\ &= inf\left\{4\frac{\int_\Omega |u_z|^2 e^{2\varphi} dA}{\int_\Omega |u|^2 e^{2\varphi} dA},\ u \in C_0^\infty(\Omega), u \not\equiv 0\right\}\end{aligned} \tag{43}$$

avec φ une fonction sousharmonique (ie.$\Delta\varphi \geq 0$).

On peut définir la propriété P_q de CATLIN et la propriété $\tilde{P}_q$ de McNeal.

Définition 3.4. *cf[30]*

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné, on dit que $b\Omega$ satisfait la propriété P_q si $\forall M > 0$, $\exists$ un voisinage $U = U_M$ de $b\Omega$ et une fonction lisse $\lambda = \lambda_M$ de classe C^2 sur U tel que :

1. $0 \leq \lambda(z) \leq 1\ \forall z \in U$ et
2. $\forall z \in U$, la somme des q valeurs propres de la forme hermitienne

$$\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\right)_{j,k},$$

est supérieure ou égale à M. C'est-à-dire pour toute (0,q)-forme différentielle u et $z \in U$,

$$\sum_{|K|=q-1}{}' \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) u_{j,K}(z) \bar{u}_{k,K}(z) \geq M|u(z)|^2.$$

Définition 3.5. *(cf [27])*

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné.
On dit que $b\Omega$ satisfait la propriété $(\tilde{P}_q)$ s'il existe une constant $C > 0$ telle que $\forall M > 0$, il existe un voisinage $U = U_M$ de $b\Omega$ et une fonction lisse $\varphi = \varphi_M$ de classe C^∞ sur U tel que pour tout $(0, q)$-forme différentielle u *et* $z \in U$ on a :

$$(i) \sum_{|K|=q-1}' \| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(z) u_{j,K}(z)\|^2 \leq C \sum_{|K|=q-1}' \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) u_{j,K}(z)\overline{u}_{k,K}(z),$$

$$(ii) \sum_{|K|=q-1}' \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) u_{j,K}(z)\overline{u}_{k,K}(z) \geq M|u(z)|^2.$$

Théorème 3.2. *cf[15]*

Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}$ et $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$. Posons $E = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,;\, z \in \Omega,\ |w| < e^{-\varphi(z)}\}$ un domaine de Hartogs pseudoconvexe complet borné et lisse dans $\mathbb{C}^2$. Supposons que bE soit strictement pseudoconvexe sur $bE \cap \{w = 0\}$. Alors

1. bE satisfait la propriété (P_q) si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$.
2. $N_{\varphi,q}$ est compact si seulement si $\lim_{n \to +\infty} \lambda_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$.

Pour faire la preuve du Théorème 3.2, on a besoin des Lemmes suivants.

Lemme 3.2. *(cf[15])*

Soit K un sous-espace compact de $\mathbb{C}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. K satisfait à la propriété (P_q).
2. Pour tout ensemble ouvert U_j tel que $K \subset\subset U_{j+1} \subset\subset U_j$ et $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{U}_j = K$, $\lambda(U_j) \to +\infty$ quand $j \to +\infty$.

Lemme 3.3. *(cf[15])*

Soient Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}$ et $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, posons $E = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,;\, z \in \Omega,\ |w| < e^{-\varphi(z)}\}$ un domaine de Hartogs complet pseudoconvexe lisse borné dans $\mathbb{C}^2$ et $W = \{z \in \Omega \mid \Delta\varphi(z) = 0\}$. On a

1. bE satisfait la propriété (P_q) si et seulement si W satisfait la propriété (P_q).
2. bE satisfait la propriété $(\tilde{P}_q)$ si et seulement si W satisfait la $(\tilde{P}_q)$.

A présent on peut faire la preuve du Théorème (3.2).

Démonstration. Théorème (3.2)

Soit $W = \{z \in \Omega \mid \Delta\varphi(z) = 0\}$. Puisque bE est strictement pseudoconvexe au voisinage des points du bord tel que $w = 0$, W est un sous-ensemble compact de Ω. Pour prouver la première partie du Théorème (3.2), nous utilisons le fait que bE satisfait la propriété (P_q) si et seulement si W satisfait la propriété (P_q), en tant qu'ensemble dans $\mathbb{C}$ voir le Lemme (3.3). On a aussi W satisfait la propriété (P_q) si et seulement si elle satisfait la propriété (2) du Lemme (3.2). Soit $(W_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de sous-espaces ouverts de Ω tels que $W = \cap_j \overline{W_j}$ et $W \subset W_{j+1} \subset\subset W_j \subset\subset \Omega$.
Supposons W vérifie la propriété (2) du Lemme (3.2). Soit $\eta_j \in C_0^\infty(W_j)$ tel que $0 \leq \eta_j \leq 1$ et $\eta_j = 1$ sur W_{j+1}. D'après [15], pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et $j \in \mathbb{N}$ on a,

$$\begin{aligned}(S^0_{n\varphi}u, u) &= \|\nabla u\|^2 + n\|\sqrt{\Delta\varphi}u\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla(u\eta_j)\|^2 + \frac{n}{2}\|\sqrt{\Delta\varphi}u\|^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}\lambda(W_j)\|u\eta_j\|^2 + \frac{n}{2}\|\sqrt{\Delta\varphi}u\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\lambda(W_j)\|u\|^2\end{aligned}$$

où n est suffisamment grand. Par hypothèse $\lambda(W_j) \to +\infty$ lorsque $j \to +\infty$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) = +\infty.$$

Donc si bE satisfait la propriété (P_q) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$.
Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$. Montrons que bE satisfait la propriété (P_q).
On a pour tous $(n,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\lambda^0_{n\varphi}(\Omega) \leq \lambda^0_{n\varphi}(W_j)$(par la monotonicité par rapport au domaine de la valeur propre). Aussi, pour $u \in C^\infty_0(W_j)$ on a

$$(S^0_{n\varphi}u,u) = (-\Delta u + n\Delta\varphi u, u) \leq (-\Delta u, u) + (u,u)$$

si j est suffisamment grand par rapport à n tel que $|n\Delta\varphi| \leq 1$ sur W_j. Par conséquent, $\lambda(W_j) \geq \lambda^0_{n\varphi}(W_j) - 1 \geq \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) - 1$ si j est suffisamment grand par rapport à n. Il s'ensuit que $\lim\limits_{j\to+\infty} \lambda(W_j) = +\infty$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$. Puisque la suite W_j est arbitraire, alors bE satisfait la propriété (P_q). Donc si $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^0_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$ alors bE satisfait la propriété (P_q).
Montrons maintenant la deuxième partie du Théorème (3.2).
Supposons $N_{\varphi,q}$ est compact. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$.
D'après la proposition 2 de [28], on a

$$S_{n\varphi} = -n^2\Big[\Big((\frac{1}{n})\partial_x + i\varphi_y\Big)^2 + \Big((\frac{1}{n})\partial_y - i\varphi_x\Big)^2\Big] + n\Delta\varphi. \tag{44}$$

Dans ce cas, $\lambda_{n\varphi}(\Omega)$ est défini par la deuxième égalité dans (43). Nous utilisons le fait que la compacité de $N_{\varphi,q}$ est équivalent à la compacité de l'opérateur solution canonique $S = \overline{\partial}^* N$, qui est à son tour équivalent aux estimations de compacité suivantes : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|Su\|^2 \leq \varepsilon\|u\|^2 + C_\varepsilon\|u\|^2_{-1} \tag{45}$$

pour tout $u \in L^2_{(0,1)}(E)$ (voir [14]. Lemme 1.1).
Soient $\beta \in C^\infty_0(\Omega)$, $u_n = \beta(z)w^n d\bar{z}$ et $f_n(z,w) = S(u_n)$. Posons

$$\frac{\partial g_n(z)}{\partial \bar{z}} = \beta(z), \tag{46}$$

on a

$$\begin{array}{rcl} f_n(z,w) &=& S(u_n) \\ &=& \overline{\partial}^* N(u_n) \\ &=& N\overline{\partial}^*(u_n) \\ &=& N\overline{\partial}^*(\beta(z)w^n d\bar{z}) \\ &=& w^n N\overline{\partial}^*(\beta(z)d\bar{z}) \\ &=& w^n N\overline{\partial}^*(\dfrac{\partial g_n(z)}{\partial \bar{z}} d\bar{z}) \\ &=& w^n N\overline{\partial}^*\overline{\partial} g_n(z) \\ &=& w^n g_n(z), \end{array}$$

donc $f_n(z,w) = g_n(z)w^n$.

En appliquant (45) et en utilisant le fait que $\|\beta(z)w^n\|^2_{-1,E} \lesssim (\frac{1}{n^2})\|\beta(z)w^n\|^2_E$, alors il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que $\|g_n(z)w^n\|^2 \lesssim \varepsilon\|\beta(z)w^n d\bar{z}\|^2$ pour $n > N_\varepsilon$. Donc

$$\int_\Omega |g_n(z)|^2 e^{-2(n+1)\varphi(z)} dA(z) \leq \varepsilon \int_\Omega |\beta(z)|^2 e^{-2(n+1)\varphi(z)} dA(z). \tag{47}$$

La dualité donne pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(z)|^2 e^{2(n+1)\varphi(z)} dA(z) &= \sup\left\{ |\langle u, \beta\rangle|^2; \beta \in C_0^\infty(\Omega); \int_\Omega |\beta|^2 e^{-2(n+1)\varphi(z)} dA(z) \le 1 \right\} \\
&\le \sup\left\{ |\langle u_z, g_n\rangle|^2; \int_D |g_n|^2 e^{-2(n+1)\varphi} dA(z) \le \varepsilon \right\} \\
&\le \varepsilon \int_\Omega |u_z|^2 e^{2(n+1)\varphi} dA(z).
\end{aligned}$$

L'inégalité du milieu découle de la considération du g_n associé dans l'équation (46) à un $\beta \in C_0^\infty(\Omega)$. D'après (43), on a $\lim_{n\to+\infty} \lambda_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$. Donc si $N_{\varphi,q}$ est compact alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$. Supposons $\lim_{n\to+\infty} \lambda_{n\varphi}(\Omega) = +\infty$, et montrons que $N_{\varphi,q}$ est compact.
Puisque la compacité de l'opérateur $\bar\partial$-Neumann est une propriété locale (voir [14], Lemme 1.2) et puisque par hypothèse bE est strictement pseudoconvexe dans un voisinage de $bE \cap \{w = 0\}$, il nous suffit d'établir des estimations de compacité du [Lemme 1.1,[14]] pour les formes différentielles dont le support ne rencontre pas $bE \cap \{w = 0\}$. De plus, par la régularité elliptique intérieur de $\bar\partial \oplus \bar\partial^*$, nous considérons les formes différentielles dont le support est proche de bE. Soit $\widehat\Omega \subset\subset \Omega$ tel que bE est strictement pseudoconvexe sur un voisinage de $bE \cap \widehat\Omega$.
Nous allons commencer le travail sur $\widehat\Omega \times S^1$ (S^1 est le cercle unitére). On note les variables sur $\widehat\Omega \times S^1$ par (z, t), soit

$$L = \partial_z + i\varphi_z\partial_t. \tag{48}$$

Nous utilisons $|||.|||$ pour désigner une norme sur $\widehat\Omega \times S^1$. Nous allons prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$|||u|||^2 \le \varepsilon(|||Lu|||^2 + |||\bar Lu|||^2) + C_\varepsilon |||u|||_{-1}^2 \tag{49}$$

pour $u \in C_0^\infty(\widehat\Omega \times S^1)$ et $\bar L$ l'adjoint formel de L. Par l'hypothèse sur les valeurs propres $\lambda_{n\varphi}(\Omega)$, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que lorsque $n > N_\varepsilon$,

$$\|v\|^2 \le \varepsilon \|L_{n\varphi} v\|^2 \text{ pour tout } v \in C_0^\infty(\widehat\Omega).$$

(Notons que $\lambda_{n\varphi}(\widehat\Omega) \ge \lambda_{n\varphi}(\Omega)$). En prenant son adjoint, on a lorsque $n < -N_\varepsilon$,

$$\|v\|^2 \le \varepsilon \|\bar L_{n\varphi} v\|^2 \text{ pour } \quad \text{tout } v \in C_0^\infty(\widehat\Omega).$$

Alors, lorsque $|n| > N_\varepsilon$,

$$\|v\|^2 \le \varepsilon \|L_{n\varphi} v\|^2 + \|\bar L_{n\varphi} v\|^2, \text{ pour } \quad \text{tout } v \in C_0^\infty(\widehat\Omega).$$

Pour $u \in C_0^\infty(\widehat\Omega \times S^1)$, on obtient le développement en série de Fourier de la fonction u donnée par

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(z) e^{int}$$

où $u_n(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(z, e^{it}) e^{-int} dt \in C_0^\infty(\widehat\Omega)$, avec $u(z, e^{it})$ une fonction périodique de période 2π par rapport à t. Alors,

$$Lu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-L_{n\varphi} u_n) e^{int}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}|||u|||^2 &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |||u_n|||^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ||u_n||^2 \\
&\le \sum_{|n|\le N_\varepsilon} \|u_n\|^2 + \varepsilon \sum_{|n|>N_\epsilon} (\|L_{n\varphi} u_n\|^2 + \|\bar L_{n\varphi} u_n\|^2) \\
&= \frac{\varepsilon}{2\pi}(|||Lu|||^2 + |||\bar Lu|||^2) + \sum_{|n|\le N_\varepsilon} (\|u_n\|^2 - \varepsilon(\|L_{n\varphi}\|^2 + \|\bar L u_n\|^2)).
\end{aligned}$$

On a

$$\sum_{|n|\leq N_\varepsilon}(\|u_n\|^2-\varepsilon(\|L_{n\varphi}\|^2+\|\bar{L}u_n\|^2))<C_\varepsilon\sum_{|n|\leq N_\varepsilon}\|u_n\|^2_{-1} \tag{50}$$

pour un certain C_ε suffisamment grand, dépendant seulement de ε. Ceci est dû au fait que $\forall n$, $L_{n\varphi}$ et $\bar{L}_{n\varphi}$ ont un inverse compact (voir remarque(3.4)), ce qui implique

$$\|u_n\|^2\leq\varepsilon(\|L_{n\varphi}u_n\|^2+\|L_{n\varphi}u_n\|^2)+C_\varepsilon\|u_n\|^2_{-1}$$

pour une constante C_ε. Ceci est analogue au Lemme 1.1 dans [23] ; voir aussi Lemme 1.1 dans [14]. C_ε dépend de n, mais comme on est dans le cas $|n|\leq N_\varepsilon$, C_ε peut être choisi en fonction de ε seulement. L'inégalité (49) découle maintenant du fait que la somme (50) est majorée par $|||u|||^2_{-1}$.
Nous revenons maintenant au cadre du domaine de Hartogs du Théorème (3.2). Pour le bord de $\widehat{\Omega}$, nous pouvons utiliser comme fonction définissante, la fonction

$$\rho(z,w)=\frac{1}{2}log(w\overline{w}e^{2\varphi}).$$

Pour $0<r<1$, les ensembles de niveaux $M_r=\{\rho=-r\}$ sont des surfaces de la forme $\{|w|^2=e^{-2\varphi-2r}\}$, pour un r fixé, on utilise les coordonnées (z,t) sur M_r par $(z,t)\leftrightarrow(z,e^{-\varphi(z)-r+it})$. On note par L_1 le champ tangentiel complexe usuel de type $(1,0)$ donné par $\rho_z\partial_w-\rho_w\partial_z$. On se restreint à M_r, $2wL_1$ devient $\partial_z+i\varphi_z\partial_t$, qui est l'opérateur L défini dans l'équation (48). Soit maintenant u une fonction lisse à support dans $\widehat{\Omega}$ et suffisamment proche de bE. On note par $d\sigma_r$ la mesure de surface sur M_r. En utilisant le fait que $dV\in\mathbb{C}^2$ est comparable à $d\sigma_r dr$ (sur supp(u)) et $d\sigma_r$ est comparable à $dV(z)dt$, uniformément par rapport à r, nous obtenons à partie de (45)

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \int_E|u|^2dV\simeq\left(\int_{M_r}|u|^2d\sigma_r\right)dr\\ &\lesssim \varepsilon\int_0^1\left(\int_{M_r}(|Lu|^2+|\bar{L}u|^2)d\sigma_r\right)dr+C_\varepsilon\int_0^1\|u\|^2_{-1,M_r}dr\\ &\lesssim \varepsilon\int_0^1\left(\int_{M_r}(|L_1u|^2+|\bar{L}_1u|^2)d\sigma_r\right)dr+C_\varepsilon\|u\|^2_{-1}\\ &\lesssim \varepsilon\left(\|L_1u\|^2+\|\bar{L}_1u\|^2\right)+C_\varepsilon\|u\|^2_{-1}.\end{aligned}$$

Ici, $\lesssim$ indique "inférieur où égale à un facteur constant qui est indépendant de ε". Soit maintenant $\alpha=a_1d\bar{z}+a_2d\overline{w}\in C^\infty_{(0,1)}(\bar{E})\cap dom(\bar{\partial}^*)$, de support dans $\widehat{\Omega}$ et proche de bE. Nous obtenons l'estimation ci-dessous

$$\|\alpha\|^2\leq\varepsilon(\|L_1\alpha\|^2+\|\bar{L}_1\alpha\|^2)+C_\varepsilon\|\alpha\|^2_{-1},$$

Ensuite en utilisant les estimations maximales énoncées dans [[9] ; Théorème 3.1] dans $\mathbb{C}^2$, on a

$$\|L_1\alpha\|^2+\|\bar{L}_1\alpha\|^2\leq\|\bar{\partial}\alpha\|^2+\|\bar{\partial}^*\alpha\|.$$

Le résultat de l'application des estimations maximales nous donne

$$\|\alpha\|^2\leq\varepsilon\left(\|\bar{\partial}\alpha\|^2+\|\bar{\partial}^*\alpha\|^2\right)+C_\varepsilon\|\alpha\|^2_{-1}.$$

En posant $\alpha=\overline{\partial^*}Nu$, on obtient l'estimation (45). D'où $N_{\varphi,q}$ est compact. □

4 Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur un Article de Friedrich Haslinger intitulé "Spectrum of the $\bar{\partial}$-Neumann Laplacian on the Fock space". Après avoir défini quelques outils nécessaires et rappelé quelques lemmes, nous avons calculé le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $\square_{\varphi,0}$, celui de $\square_{\varphi,1}$ (cf Théorème (0.1)) et celui de $\square_{\varphi,q}$ (cf Théorème (0.2)). Ensuite, on a montré par le Théorème (0.3) que le Laplacien Witten complexe $\Delta_{\varphi}^{(0,q)}$ a le même spectre que le Laplacien $\square_{\varphi,q}$ de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann. Enfin comme application on a montré que l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $N_{\varphi,q}$ est compact en utilisant :

- les valeurs propres de la matrice de Lévi.
- la théorie spectral sur les opérateurs de Schrödinger dans la mécanique quantique.

Références

[1] R.A. Adams et J.J.F.Fourier, Sovolev spaces in :Pure and Applied Math.Vol.140 Academic Press, 2006.

[2] B. Berndtsson, $\bar{\partial}$ and Schrödinger operators, Math.Z 221(1996)401 − 413.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[4] R.Cairoli, Algèbre linéaire, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1991.

[5] So. Chin Chen et Mei-Chi Shaw, Partial differential equations in several complex variables, Studies in Advanced Mathematics, vol. 19, Amer.Math. Soc. 2001.

[6] M. Christ, On the $\bar{\partial}$-equation in weighted L^2-norms in C.J Geom Anal 1(1991) pp 193 − 230.

[7] E.B. Davies, Spectral Theory and Differential Operators, in : Cambridge studies in Advanced Mathematical, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[8] J. P. Demailly, Complex analytic and différential geométry, Institut Fourier (Grenoble I)June 21, 2012.

[9] M. Derridj, Regularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudo-convexes, J. Differential Geom. 13(1978) 559 − 576.

[10] G. B Folland, Fourier Analysis and its Applications. Wadsworth and Brooks 1992.

[11] G. B Folland, Introduction to partial differential equations, Princeton University Press, Princeton, 1995.

[12] G.B. Folland, The tangential Cauchy-Riemann complex on spheres, Trans. Amer.Math. 171(1972) 83 − 133.

[13] S. Fu, Spectrum of the $\bar{\partial}$-Neumann on polydisc, Proc.Amer.Math.Soc. 135(2007) 725 − 730.

[14] S. Fu et E.J. Straube, Compactness in the $\bar{\partial}$-Neumann problem, in : J. McNeal (Ed.), Complex Analysis and Geometry, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. J. 9(2001) 141 − 160.

[15] S.Fu et E.J. Straube, Semi-classical analysis of Schrödinger operators and compactness in the $\bar{\partial}$-Neumann problem, J. Math. Anal. Appl. 271(2002)267 − 282.

[16] K.Gansberger, Compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann operator. Dissertation, University of Vienna, 2009.

[17] K.Gansberger et F. Haslinger, Compactness estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem in weighted L^2-spaces, Trends in Mathematics, Birkhäuser, (2010), pp, 159 − 174.

[18] K. Gansberger et F. Haslinger, Compactness estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann probleme in weighted L^2- espace, Proceedings of the conference on Complex Analysis 2008 in honour of Linda Rothschid, Fribourg 2008,.

[19] F. Haslinger, Compactness for $\bar{\partial}$-Neumann problem-a functional analysis approch. Collect. Math. 62(2011)121 − 129.

[20] F.Haslinger et B.Helffer, Compactness of the solution operator to $\bar{\partial}$ in weighted L^2-spaces, J.Funct.Anal. 243(2007) $679-697$.

[21] G.M. HENKIN et A. IORDAN, Regularity of $\bar{\partial}$ on pseodoconcave compacts and applications. Asian J. Math, 4(4) :$855-884$, 2000.

[22] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables. north Holland, (1990).

[23] J.J. Kohn et L. Nirenberg, Non-coercive boundary value problems, Comm.Pure. Appl. Math. 18(1965) $443-492$.

[24] C.Laurent-Thiébaut, Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables, InterEditions CNRS Editions (1997).

[25] X. Ma et G. Marinescu, Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels,in : progress in Mathematics, Birkhäuser verlag, (2007) .

[26] X. Ma et G. Marinescu, Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds, Adv.in Math. 217(2008) $1756-1815$.

[27] J. McNeal, A sufficient condition for compactness of the ∂-Neumann opérator, J.Funct.Anal. 195(2002) $190-205$.

[28] P. Matheos, A Hartogs domain with no analytic discs in the boundary for which the $\bar{\partial}$-Neumann problem is not compact, preprint (1997) ; to appear in J. Geom. Anal.

[29] V. Trénoguine, Analyse fonctionnelle, Mir. Moscou 1985.

[30] E. J Straube, Lectures on the L^2-Sobolev Theory of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. ESI Lectures in Mathematics and physics, vol.7, European Mathemetical Society (EMS) Zürich, 2010.

[31] E. Straube, The L^2-Sobolev theory of the $\bar{\partial}$-Neumann problem, in : ESI in Mathematics and Physics, EMS 2010.