UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

L'EXCELLENCE MA RÉFÉRENCE

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE :	**Sciences et Technologies**
MENTION :	**Mathématiques et Applications**
SPÉCIALITÉ :	**Mathématiques Pures**
OPTION :	**Géométrie Algébrique**

Thème :

Plongement de Segré

Présenté par : Abdourahmane BA

Sous la direction de : Professeur Oumar SALL

Soutenu publiquement le samedi 05 novembre 2022 devant le jury composé de :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Salomon SAMBOU	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Amoussou Thomas GUEDENON	Professeur assimilé	Examinateur	UASZ
Mansour SANE	Maître de conférences titulaire	Examinateur	UASZ
Moussa FALL	Maître de conférences titulaire	Examinateur	UASZ
Oumar SALL	Professeur titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : $2020 - 2021$

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux, pour tous ses bienfaits et particulièrement pour m'avoir permis d'achever ce mémoire dans les meilleures conditions.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de mon mentor le Pr Oumar SALL pour sa générosité, sa gentillesse, sa patience, ses précieux conseils et surtout pour la rigueur dont il a toujours fait preuve pour l'établissement de ce travail. Bref, il représente dans ma vie un puissant modèle à imiter.

Je remercie aussi le Pr Salomon SAMBOU en particulier pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de présider mon jury, également pour avoir beaucoup contribué à ma formation durant tout le temps que je suis à l'Université Assane Seck de Ziguinchor.

J'exprime ma reconnaissance la plus sincère au Pr Amoussou Thomas GUEDENON, au Dr Moussa FALL et au Dr Mansour SANE d'avoir participé au jury.

De même, je remercie grandement toute l'équipe pédagogique de l'UFR Sciences et Technologies, en particulier les professeurs qui m'ont enseigné durant ma formation sans oublier les intervenants.

Je désire aussi remercier chaleureusement mes camarades et aînés chercheurs avec qui j'ai souvent eu des échanges et discussions riches autour des mathématiques. On peut citer : M. Moustapha CAMARA, M. Abdoulaye SAGNA, M. Nestor DJINTELBE, M. Chérif Mamina COLY et M. Souhaibou SAMBOU.

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à M. Lamarana DIALLO et M. Alpha Ibrahima BA de la Librairie Papeterie Ahoune Sané, M. Mamadou DIAWARA de l'Entrepôts Maliens au Sénégal, M. Théophile ISSAC de l'Hôpital de la Paix et Mme Dieynaba FOFANA adjointe au maire de Ziguinchor pour leur soutien et leur encouragement.

Je ne saurais terminer sans remercier tous mes frères, mes sœurs, mes amis pour leur soutien moral et même financier ainsi que tous mes camarades étudiants.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

DÉDICACE

C’est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

- ✔ À ma mère **Aïssatou DIALLO** qui m’a enseigné l’amour et la bienveillance ;
- ✔ À la mémoire de mon père **Amadou BA** ;
- ✔ À mes frères et sœurs, mes oncles et tantes.

RÉSUMÉ

Résumé :
L'objectif de ce mémoire est de parler du plongement de Segré et de donner une de ses applications qui consiste à montrer qu'un produit de variétés projectives peut-être muni d'une structure de variété projective. On a d'abord montré la propriété suivante : un produit de variétés affines est une variété affine : $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$.
Dans le cadre projectif, la propriété n'est pas évidente car $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ n'est pas forcément isomorphe à $\mathbb{P}^{n+m}$, mais d'après le plongement de Segré $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ est isomorphe à une variété projective.
Dans ce mémoire on a rappelé le plongement de Segré et donné la démonstration de certaines propositions permettant de montrer qu'un produit de variétés projectives est une variété projective. Cette propriété est illustrée par deux exemples.

Mots-clés : Variétés projectives, Plongement de Segré.

Abstrac :
The aim of this paper is to talk about the Segre embedding and to give one of its applications which consists in showing that a product of projective varieties can be provided with a structure of a projective variety. We have first shown the following property : a product of affine varieties is an affine variety : $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$.
In the projective framework, the property is not obvious because $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ is not necessarily isomorphic to $\mathbb{P}^{n+m}$, but by the Segre embedding $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ is isomorphic to a projective variety.
In this paper we have recalled the Segre embedding and given the proof of some propositions allowing to show that a product of projective varieties is a projective variety. This property is illustrated by two examples.

Keywords : Projective varieties, Segre embedding.

INTRODUCTION

La géométrie algébrique est une discipline des mathématiques qui s'intéresse aux ensembles définis par l'annulation d'une famille de polynômes. On en remonte l'origine à Descartes et de nombreux mathématiciens s'y sont illustrés, on peut citer Abel, Riemann, Poincaré, M. Noether, l'école italienne avec Severi, plus récemment Weil, Zariski et Chevalley. Dans les années 1950-1960, elle a connu un bouleversement gigantesque sous l'impulsion de J.-P. Serre et surtout d'A. Grothendieck et son développement a été considérable. Aujourd'hui, c'est une discipline fondamentale, non seulement pour elle-même, mais aussi dans de nombreuses branches des mathématiques.
Le but de ce mémoire intitulé **plongement de Segré** est de transformer un produit de variétés algébriques projectives en une variété algébrique projective à l'aide du plongement de Segré. Pour cela, on considère l'application $f : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{nm+n+m}$ définie par

$$f\left((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)\right) = (x_0y_0 : \cdots : x_0y_m : \cdots : x_ny_0 : \cdots : x_ny_m).$$

On vérifie que cette application est injective ce qui permet d'identifier l'ensemble $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{P}^{nm+n+m}$. Ce qui nous permettra de munir le produit des variétés, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, d'une structure de variété projective isomorphe à $f(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$. Le plongement de Segré a été introduit par Corrado Segré $(1863 - 1924)$ dans son célèbre article de 1891 (voir, [Seg91]).
Après avoir fait un rappel sur les notions fondamentales (idéaux engendrés par des polynômes et les variétés algébriques) dans le chapitre 1, nous présenterons, au chapitre 2, les morphismes de variétés algébriques et les courbes lisses. Au chapitre 3, il sera question d'abord de montrer comment construire le plongement de Segré. Ensuite, nous montrerons comment on transforme un produit de variétés algébriques projectives en une variété algébrique projective à l'aide du plongement de Segré. Enfin, nous présenterons des résultats sur des applications qui sont construites de manière similaire au plongement de Segré.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

Dans ce chapitre il sera question de rappeler quelques notions mathématiques de base qui seront fondamentales dans la suite. On désignera par k un corps commutatif sauf mention expresse du contraire et n sera considéré un entier strictement positif.

1.1 Polynômes et idéaux engendrés par des polynômes

Dans cette section, nous étudierons les propriétés des polynômes et des idéaux de l'anneau des polynômes à coefficients dans le corps k. Ce sont des objets mathématiques très importants, car ils lient l'algèbre et la géométrie.

1.1.1 Polynômes

Définition 1.1.1.1 (Monôme). *Un monôme en les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ est un produit de la forme*

$$\alpha X_1^{d_1} X_2^{d_2} \dots X_n^{d_n},$$

*où les $d_1, \dots, d_n$ sont des entiers naturels et $\alpha \in k$. On appelle **degré** d'un tel monôme, la somme $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.*

Notation 1.1.1.1. Soit $d = (d_1, \dots, d_n)$ un n-uplet d'entiers naturels. Nous noterons

$$X^d = X_1^{d_1} X_2^{d_2} \dots X_n^{d_n}.$$

En particulier, $X^{(0,\dots,0)} = 1$. Le degré de X^d sera noté $\mid d \mid$; ainsi $\mid d \mid = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

Définition 1.1.1.2 (Polynôme à plusieurs variables). *Un polynôme P en les variables $X_1, \dots, X_n$ à coefficients dans k est une combinaison linéaire finie de monômes. Avec la notation 1.1.1.1, un polynôme s'écrit sous la forme*

$$\sum_d a_d X^d,$$

où la somme est indexée sur un nombre fini de n-uplets $d = (d_1, \dots, d_n)$.

L'ensemble des polynômes de variables $X_1, \dots, X_n$, muni de l'addition et de la multiplication forme un anneau commutatif, noté $k[X_1, \dots, X_n]$.

1.1.2 Idéaux engendrés par des polynômes

Définition 1.1.2.1 (Idéal). *Un sous-ensemble $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ est un idéal s'il satisfait aux assertions suivantes :*

❶ $0 \in I$ *;*

❷ *si $F, G \in I$, alors $F + G \in I$;*

❸ *si $F \in I$ et $H \in k[X_1, \ldots, X_n]$, alors $HF \in I$.*

Notation 1.1.2.1. Soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Notons

$$\langle P_1, \ldots, P_r \rangle = \left\{ P \mid P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \ , \ \lambda_i \in k \right\}$$

l'idéal engendré par $P_1, \ldots, P_r$.

On dit qu'un idéal I de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de **type fini** s'il existe un nombre fini de polynômes $P_1, \ldots, P_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $I = \langle P_1, \ldots, P_r \rangle$. On dit alors que les polynômes $P_1, \ldots, P_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ engendrent I.

Théorème 1.1.2.1 (Théorème de la base de Hilbert). L'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$ est **noethérien**. Cela signifie qu'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

❶ tout idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est de type fini ;

❷ toute suite $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ croissante d'idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$.

1.2 Variétés algébriques affines

Dans cette section, on notera $\mathcal{A}$ l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées à coefficients dans k.

1.2.1 Sous-variétés affines

Définition 1.2.1.1 (Espace affine). *On appelle* ***espace affine*** *de dimension n, et l'on note $\mathbb{A}^n(k)$ ou $\mathbb{A}^n$(s'il n'y a pas d'ambiguïté sur k), l'ensemble k^n, produit cartésien itéré n fois du corps k.*

Les éléments de $\mathbb{A}^n$ sont appelés points. Les espaces $\mathbb{A}^1$ et $\mathbb{A}^2$ sont appelés respectivement droite affine et plan affine. Un élément $a \in \mathbb{A}^n$ est dit zéro d'un polynôme $P \in \mathcal{A}$ si $P(a) = 0$.

Définition 1.2.1.2 (Sous-variété affine). *Soit S une partie quelconque de $\mathcal{A}$. On pose :*

$$\mathcal{V}(S) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid \forall P \in S, \ P(a) = 0\} .$$

On dit que $\mathcal{V}(S)$ est la sous-variété affine (ou l'ensemble algébrique affine) définie par S.

Notation 1.2.1.1. On notera souvent dans le cas d'un ensemble fini, $\mathcal{V}(P_1, \ldots, P_n)$ au lieu de $\mathcal{V}(\{P_1, \ldots, P_n\})$. En particulier, si $S = \{P\}$, alors $\mathcal{V}(S)$ est noté $\mathcal{V}(P)$. Si $S = (P_i)_{i \in I}$, alors $\mathcal{V}(S) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{V}(P_i)$.

On remarque que $\mathcal{V}(S)$ est l'ensemble des zéros communs à tous les polynômes de S.

Définition 1.2.1.3 (Hypersurface). *Soit $P \in \mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{V}(P) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid P(a) = 0\}$ est appelé hypersurface (lorsque k est algébriquement clos, et P non constant). Le degré d'une hypersurface $\mathcal{V}(P)$ est le degré de P.*

Cas particuliers d'hypersurfaces.

✔ $\mathcal{V}(P) = \{a \in \mathbb{A}^2 \mid P(a) = 0\}$ est appelé courbe algébrique affine plane.
On appelle conique, cubique, quartique, quintique, sextique, etc. une courbe algébrique affine plane de degré respectivement 2,3,4,5,6, etc..

✔ Si $\deg(P) = 1$, alors $\mathcal{V}(P) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid P(a) = 0\}$ est appelé hyperplan affine.

✔ Si $\deg(P) = 1$, alors $\mathcal{V}(P) = \{a \in \mathbb{A}^2 \mid P(a) = 0\}$ est appelé droite affine.

Exemple 1.2.1.1.

❶ On a $\mathcal{V}(1) = \emptyset$ et $\mathcal{V}(0) = \mathbb{A}^n$, le vide et l'espace tout entier sont des sous-variétés algébriques affines.

❷ Tout point de $\mathbb{A}^n$ est un ensemble algébrique affine. En effet, soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$, on a : $\mathcal{V}(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$.

❸ Dans $\mathbb{A}^2$, on a $\mathcal{V}(X^2) = \mathcal{V}(X)$: c'est l'axe des ordonnés. Des parties différentes peuvent donner la même sous-variété affine.

Remarque.

❶ L'application $\mathcal{V}$ est décroissante : si $S_1 \subset S_2$, alors $\mathcal{V}(S_2) \subset \mathcal{V}(S_1)$.

❷ Pour tout $S \subset \mathcal{A}$, on montre que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle)$ où $\langle S \rangle$ est l'idéal engendré par S. Ainsi, l'étude des sous-variétés algébriques affines se ramène à l'étude des idéaux de $\mathcal{A}$. Puisque, l'anneau $\mathcal{A}$ est noethérien, tout idéal de $\mathcal{A}$ est de type fini. Ainsi, toute sous-variété algébrique affine peut-être définie par l'annulation d'un nombre fini de polynômes : $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle) = \mathcal{V}(P_1, \ldots, P_r)$.

1.2.2 Idéal d'une sous-variété et Nullstellensatz de Hilbert

La géométrie algébrique établit une correspondance entre des objets algébriques (idéaux des anneaux de polynômes) et des objets géométriques (sous-variétés algébriques). L'épine dorsale de cette correspondance est le Nullstellensatz de Hilbert. Commençons par définir une application qui associe à un ensemble de points, un idéal de l'anneau de polynômes.

Définition 1.2.2.1 (Idéal d'une sous-variété affine). *Soit V une partie de $\mathbb{A}^n$. On appelle idéal de V, la partie de $\mathcal{A}$ notée $\mathfrak{I}(V)$, l'ensemble défini par :*

$$\mathfrak{I}(V) = \{P \in \mathcal{A} \mid \forall a \in V \ , \ P(a) = 0\} \, .$$

On voit bien que $\mathfrak{I}(V)$ est l'ensemble des polynômes nuls sur V.

Exemple 1.2.2.1. On a $\mathfrak{I}(\emptyset) = \mathcal{A}$ et $\mathfrak{I}(\mathbb{A}^n) = \{0\}$.

Proposition 1.2.2.1.

❶ Si $A \subset B \subset \mathbb{A}^n$, alors $\mathfrak{I}(B) \subset \mathfrak{I}(A)$.

❷ Si $(A_i)_{i\in I}$ est un ensemble de parties de $\mathbb{A}^n$, alors $\mathfrak{I}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{I}(A_i)$.

Définition 1.2.2.2 (Idéal radical). *Soit I un idéal de $\mathcal{A}$. On appelle idéal radical de I et l'on note $\sqrt{I}$, l'ensemble défini par :*

$$\sqrt{I} = \{P \in \mathcal{A} \mid \exists\, m \in \mathbb{N}^* ,\ P^m \in I\}.$$

Exemple 1.2.2.2. On a $\sqrt{\langle (X-Y)^2\rangle} = \langle X-Y\rangle$ et $\sqrt{\langle X^n, Y^m\rangle} = \langle X, Y\rangle$ dans $\mathcal{A}$.

Nous avons déjà défini deux applications :

$$\mathcal{V} : \{\text{idéaux de } \mathcal{A}\} \longrightarrow \{\text{sous-variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n\}$$

$$\mathfrak{I} : \{\text{sous-variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n\} \longrightarrow \{\text{idéaux de } \mathcal{A}\}$$

Ces applications ne sont pas inverses l'une de l'autre. En effet, $\mathfrak{I}$ à une inverse à gauche $\mathcal{V}$, c'est-à-dire pour toute sous-variété algébrique V, nous avons $\mathcal{V}(\mathfrak{I}(V)) = V$; mais non à droite, car pour tout idéal $I \subset \mathcal{A}$, nous n'avons pas en général $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) = I$, nous n'avons que $I \subset \mathfrak{I}(\mathcal{V}(I))$. Voici les deux problèmes qui empêchent l'égalité.

❶ Lorsque k n'est pas algébriquement clos, par exemple lorsque $k = \mathbb{R}$ et $I = \langle X^2 + Y^2 + 1\rangle$, nous avons $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathfrak{I}(\emptyset) = \mathcal{A} \neq I$.

❷ Lorsqu'une puissance F^m, $m \geqslant 2$ d'un polynôme s'annule sur une partie V de $\mathbb{A}^n$, alors F lui-même s'annule sur V. Par exemple, si $I = \langle X^3\rangle$, nous avons $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathfrak{I}(0) = \langle X\rangle \neq I$. De même, si $I = \langle X^m, Y^n\rangle$, avec m et n des entiers supérieurs ou égaux à 2, alors $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathfrak{I}((0,0)) = \langle X, Y\rangle \neq I$.

Ainsi, la question de savoir comment exprimer $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I))$ en fonction de I fait l'objet d'un théorème dû à Hilbert appelé **Nullstellensatz** ou **Théorème des zéros**.

Théorème 1.2.2.1 (Nullstellensatz de Hilbert, 1893, [Per95], Chap.I, th.4.1 et th.4.3 **).** Soit k un corps algébriquement clos et I un idéal de $\mathcal{A}$. Si I est un idéal propre (i.e. $I \neq \mathcal{A}$ ou bien $1 \notin I$), alors

❶ **(Nullstellensatz faible** [1]**)** $\mathcal{V}(I)$ est non vide.

❷ **(Nullstellensatz)** $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Dans le Nullstellensatz de Hilbert, si on se restreint aux idéaux radicaux, nous obtenons l'égalité désirée et par conséquent, les applications $\mathfrak{I}$ et $\mathcal{V}$ deviennent inverses l'une de l'autre et définissent donc une bijection entre l'ensemble des idéaux radicaux et l'ensemble algébrique affine. Le Nullstellensatz a donc permis d'établir un dictionnaire entre la géométrie et l'algèbre dont les éléments de base peuvent être résumés dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.2.2 (Correspondance idéal-variété, [CLO15], chap.4, sec.2, th.7**).** Soit k un corps.

1. Remarquons que le Nullstellensatz faible généralise le théorème fondamental de l'algèbre.

❶ Les applications

$$\mathcal{V} : \{\text{idéaux de } \mathcal{A}\} \to \{\text{sous-variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n\}$$

et

$$\mathfrak{I} : \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n\} \to \{\text{idéaux de } \mathcal{A}\}$$

renversent les inclusions, c'est-à-dire si $I_1 \subset I_2$ sont des idéaux de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{V}(I_2) \subset \mathcal{V}(I_1)$ et, de même, si $V_1 \subset V_2$ sont des variétés algébriques, alors $\mathfrak{I}(V_2) \subset \mathfrak{I}(V_1)$.

❷ Pour toute variété algébrique affine V,

$$\mathcal{V}\left(\mathfrak{I}(V)\right) = V.$$

❸ Tout idéal $I \subset \mathcal{A}$ satisfait

$$\mathcal{V}\left(\sqrt{I}\right) = \mathcal{V}(I).$$

❹ Si k est algébriquement clos et si nous nous restreignons aux idéaux radicaux, les applications

$$\mathfrak{I} : \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n\} \to \{\text{idéaux radicaux de } \mathcal{A}\}$$

et

$$\mathcal{V} : \{\text{idéaux radicaux de } \mathcal{A}\} \to \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n\}$$

sont bijectives et sont inverses l'une de l'autre.

Basé sur ce dictionnaire, nous pouvons traduire quelques propriétés géométriques en propriétés algébriques lorsque le corps de base est algébriquement clos. Voici quelques premiers exemples :

❶ $\{\text{variétés algébriques affines irréductibles de } \mathbb{A}^n\} \leftrightarrow \{\text{idéaux premiers de } \mathcal{A}\}$ [2]

❷ $\{\text{points de } \mathbb{A}^n\} \leftrightarrow \{\text{idéaux maximaux de } \mathcal{A}\}$ [3]

1.2.3 Topologie de Zariski

Une notion essentielle pour la suite qu'il convient également de rappeler dans cette partie préliminaire est la notion de topologie sur un ensemble.

Définition 1.2.3.1. *Une topologie sur un ensemble E est une collection τ de parties de E vérifiant les axiomes suivants :*

❶ *$\emptyset$ et E sont dans τ ;*

❷ *une union quelconque d'éléments de τ est dans τ ;*

❸ *une intersection finie d'éléments de τ est dans τ.*

Le couple (E, τ) est appelé ***espace topologique****. Les éléments de τ sont appelés* ***ouverts*** *de (E, τ), ou simplement* ***ouverts*** *de E s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

2. Un idéal I de $\mathcal{A}$ est dit premier si pour tous $F, G \in \mathcal{A}$, $FG \in I$ implique $F \in I$ ou $G \in I$.
3. Un idéal propre I de $\mathcal{A}$ est dit maximal si pour tout idéal J tel que $I \subset J$, on a $J = I$ ou $J = \mathcal{A}$.

Remarque. Dans l'axiome (3) on peut remplacer "intersection finie" par "intersection de deux éléments", l'équivalence découlant par une récurrence immédiate utilisant l'égalité

$$(U_1 \cap \ldots \cap U_n) = (U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1}) \cap U_n.$$

Exemple 1.2.3.1.

❶ Soit E un ensemble quelconque. Alors $\tau = \{\emptyset, E\}$ est une topologie sur E, appelée topologie grossière.

❷ Soit E un ensemble quelconque. Posons $\tau = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Alors τ est une topologie sur E, appelée topologie discrète.

Définition 1.2.3.2. *Soit (E, τ) est un espace topologique quelconque. On dit que $F \subset E$ est un fermé de τ si le complémentaire de F, noté F^c, est ouvert.*

Proposition 1.2.3.1. Soit (E, τ) un espace topologique quelconque. Alors :

❶ $\emptyset$ et E sont des fermés ;

❷ une intersection quelconque de fermés est fermée ;

❸ une union finie de fermés est fermée.

Preuve.

❶ On a : $\emptyset^c = E \in \tau \Rightarrow \emptyset$ est un fermé de τ. Et $E^c = \emptyset \in \tau \Rightarrow E$ est un fermé de τ.

❷ Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés pour la topologie τ. Notons $F = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$. On a alors $F^c = \left(\bigcap\limits_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup\limits_{i \in I} F_i^c$. Or par définition des fermés, F_i^c est un élément de τ pour tout $i \in I$ et comme une union quelconque d'ouverts est un ouvert, F est un fermé.

❸ Soient F_1 et F_2 deux parties fermées pour la topologie τ. Notons $F = F_1 \cup F_2$. On a alors $F^c = (F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c$. Or par définition des fermés, F_1^c et F_2^c sont des élément de τ. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert, donc F est un fermé.

❑

Remarque. Si l'ensemble de fermés vérifie les trois axiomes de la proposition 1.2.3.1, alors les complémentaires définissent une topologie.

Définition 1.2.3.3 (Topologie de Zariski). *On appelle topologie de Zariski, la topologie sur $E = \mathbb{A}^n$ dont les fermés sont des sous- variétés algébriques affines.*

Proposition 1.2.3.2. $\{\mathcal{V}(S) \mid S \subset \mathcal{A}\}$ décrit une topologie.

Preuve. Pour montrer que $\{\mathcal{V}(S)\}$ définit une topologie, il faut vérifier les trois axiomes de la proposition 1.2.3.1.

❶ L'axiome 1 de l'exemple 1.2.1.1 nous montre déjà que $\mathbb{A}^n$ et $\emptyset$ sont bien des sous-variétés affines.

❷ Soit $(A)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-variétés, on peut écrire $A_i = \mathcal{V}(S_i)$ avec $S_i \subset \mathcal{A}$. On veut montrer que $\cap_{i\in I} A_i = \cap_{i\in I}\mathcal{V}(S_i)$ est une sous-variété i.e. $\cap_{i\in I}\mathcal{V}(S_i) = \mathcal{V}(S)$ avec $S \subset \mathcal{A}$. On peut prendre $S = \cup_{i\in I} S_i$ on a alors :

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{V}\left(\cup_{i\in I} S_i\right) &\Leftrightarrow \forall\, P \in \cup_{i\in I} S_i, P(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, i \in I, \forall P \in S_i, P(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, i \in I, a \in \mathcal{V}(S_i) \\ &\Leftrightarrow a \in \cap_{i\in I}\mathcal{V}(S_i). \end{aligned}$$

Donc $\cap_{i\in I}\mathcal{V}(S_i) = \mathcal{V}\left(\cup_{i\in I} S_i\right)$ est bien une sous-variété.

❸ Soient A et B deux sous-variétés affines, on peut écrire $A = \mathcal{V}(S_1)$ et $B = \mathcal{V}(S_2)$ avec S_1 et S_2 des parties de $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} a \in A \cup B &\Leftrightarrow a \in \mathcal{V}(S_1) \;\text{ ou }\; a \in \mathcal{V}(S_2) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in S_1, P(a) = 0 \;\text{ ou }\; \forall G \in S_2, G(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall P \in S_1, \forall G \in S_2, P(a) = 0 \;\text{ ou }\; G(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall P \in S_1, \forall G \in S_2, PG(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \in \mathcal{V}(PG \mid P \in S_1, G \in S_2) \end{aligned}$$

Donc $A \cup B = \mathcal{V}(PG \mid P \in S_1, G \in S_2)$ est bien une sous-variété.

❑

Définition 1.2.3.4 (Ouvert standard). *Soient $P \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{V}(P)$ l'hypersurface définie par P. L'ensemble*

$$\mathcal{D}(P) = k^n - \mathcal{V}(P) = \{a \in k^n \mid P(a) \neq 0\}$$

est un ouvert de Zariski de k^n, dit ouvert standard.

Remarque. Les ouverts standards forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire tout ouvert U est réunion finie d'ouverts standards.

Définition 1.2.1. *Soient (E, τ) un espace topologique et $x \in E$. On dit que $V \subset E$ est un voisinage de x, s'il contient un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}_\tau(x)$ l'ensemble des voisinages de x pour la topologie τ.*

Définition 1.2.2. *Soit (E, τ) un espace topologique et soit A une partie de E. On appelle voisinage de A toute partie V de E qui contient un ouvert qui contient A.*

Définition 1.2.3. *Soit (E, τ) un espace topologique. Soit A une partie de E et soit $x \in E$. On dit que x est un point intérieur à A si $A \in \mathcal{V}_\tau(x)$. L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\mathring{A}$.*

Remarque. L'intérieur d'une partie A de (E, τ) est le plus grand ouvert contenu dans A.

Exemple 1.2.3.2. Prenons $n = 1$ et $k = \mathbb{R}$ de sorte que l'on ait l'anneau $k[X]$. Alors pour la topologie de Zariski, on a $\mathring{\overline{[0,1]}} = \emptyset$. En effet, soit $\mathcal{D}(P) \subset [0,1]$ un ouvert, donc $\{a \in \mathbb{R} \mid P(a) \neq 0\} \subset [0,1]$. Par passage au complémentaire, on obtient
$\mathbb{R} \setminus [0,1] \subset \{a \in \mathbb{R} \mid P(a) = 0\} = \mathcal{V}(P)$. Donc, P a une infinité de racines dans $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, d'où $P = 0$, et alors pour tout $a \in \mathbb{R}, P(a) = 0$. Donc $\mathcal{D}(P) = \{a \in \mathbb{R} \mid P(a) \neq 0\} = \emptyset$. Donc, tout ouvert inclus dans $[0,1]$ est vide, en particulier on aura $\mathring{\overline{[0,1]}} = \emptyset$.
De même on montre que tout ouvert inclus dans $\mathbb{Z}$ est vide, en particulier on aura $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

Définition 1.2.4. *Soit (E, τ) un espace topologique. On dit que (E, τ) est un espace topologique séparé (ou de Hausdorff) si pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe des voisinages V de x et W de y tels que $V \cap W = \emptyset$ (disjoints).*

Remarque. La topologie de Zariski n'est pas séparée au sens de Hausdorff. Pire : si k est infini, deux ouverts non vides quelconques se rencontrent.

Exemple 1.2.3.3. Prenons $n = 1$ et $k = \mathbb{R}$ de sorte que l'on ait l'anneau $k[X]$, alors $\mathbb{R}$ n'est pas séparée pour la topologie de Zariski.
En effet, pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas séparée pour la topologie de Zariski, il suffit de montrer que l'intersection de deux ouverts non vides est non vide.
Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$ deux parties fermées. On a : $(A \cup B)^c = (\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\})^c \Leftrightarrow A^c \cap B^c = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, c'est-à-dire A^c et B^c sont non vides. A-t-on $A^c \cap B^c \neq \emptyset$? Par l'absurde, si $A \cup B = \mathbb{R}$ sachant que $Q \neq 0$, alors, on aura B finie et donc A sera non finie. Donc P aura une infinité de racines, d'où $P = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $A \cup B$ n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier, d'où l'intersection de deux ouverts non vide est non vide.

Définition 1.2.5. *Soit (E, τ) un espace topologique. Soit A une partie de E et soit $x \in E$. On dit que x est adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A (i.e. $\forall V \in \mathcal{V}_\tau(x), V \cap A \neq \emptyset$). L'ensemble des points x est appelé adhérence de A, noté $\bar{A}$.*

Remarque. L'adhérence d'une partie A de (E, τ) est le plus petit ensemble fermé contenant A dans (E, τ).

Exemple 1.2.3.4. Prenons $n = 1$ et $k = \mathbb{R}$ de sorte que l'on ait l'anneau $k[X]$. Alors pour la topologie de Zariski, on a $\overline{[0, 1]} = \mathbb{R}$. En effet, $\overline{[0, 1]}$ est le plus petit fermé qui contient $[0, 1]$. Donc, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\mathcal{V}(P) = \overline{[0, 1]}$. Donc $\forall x \in [0, 1], x \in \overline{[0, 1]} = \mathcal{V}(P)$. D'où P admet une infinité de racines dans $[0, 1]$, donc c'est le polynôme constant qui est égal à 0. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$, d'où $\mathbb{R} \subset \mathcal{V}(P)$. Et comme, par définition $\mathcal{V}(P) \subset \mathbb{R}$ alors $\mathcal{V}(P) = \overline{[0, 1]} = \mathbb{R}$.
De même on montre que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

Définition 1.2.6. *Soient E un ensemble, τ_1 et τ_2 deux topologies sur E. On dit que τ_1 est moins fine que τ_2 (ou que τ_2 est plus fine que τ_1) si tout ouvert de τ_1 est un ouvert de τ_2. On note dans ce cas $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Exemple 1.2.3.5. Soient E un ensemble quelconque et $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ une topologie sur E.

❶ On a $\tau \subset \mathcal{P}(E) = \tau_D$, donc τ est moins fine que la topologie discrète.

❷ On a $E \in \tau$ et $\emptyset \in \tau$, donc τ est plus fine que la topologie grossière $\tau_G = \{\emptyset, E\}$.

Ainsi $\tau_G \subset \tau \subset \tau_D$.

Définition 1.2.3.5 (Irréductibilité). *Soit E un espace topologique non vide. On dit que E est irréductible s'il n'est pas réunion de deux fermés distincts de E.*

Autrement dit, E irréductible i.e. $[E = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 des fermés de $E \Rightarrow E = F_1$ ou $E = F_2]$.

Remarque. Un espace qui n'est pas irréductible est dit **réductible** ; dans ce cas cet espace s'écrit comme réunion de deux de ses fermés propres.

Exemple 1.2.3.6. $\mathbb{R}$ est irréductible pour la topologie de Zariski. En effet, on a déjà montré dans l'exemple 1.2.3.3 que l'intersection de deux ouverts non vides est non vide. Donc $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$ avec O_1, O_2 deux ouverts $\Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Et par contraposition, on obtient $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 sont des fermées $\Rightarrow$ ($\mathbb{R} = F_1$ ou $\mathbb{R} = F_2$).

Proposition 1.2.3.3. Si k est infini, alors $\mathbb{A}^n$ est irréductible.

Définition 1.2.3.6. *Une sous-variété algébrique affine est dite irréductible si elle l'est pour la topologie de Zariski.*

Proposition 1.2.3.4. Soit $V \subset \mathbb{A}^n$ non vide. Alors V est irréductible si, et seulement si son idéal est premier.

Remarque. Pour toute sous-variété algébrique affine non vide V, on a :

$$V \text{ irréductible} \iff \text{l'idéal } \mathfrak{I}(V) \text{ est premier} \iff \text{l'algèbre } \mathcal{A}/\mathfrak{I}(V) \text{ est intègre.}$$

On note $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}/\mathfrak{I}(V)$ appelé algèbre de V.

Théorème 1.2.3.1. Toute sous-variété algébrique affine non vide V se décompose de façon unique (à permutation près) en une réunion finie de sous-variétés algébriques affines irréductibles $V_1, \ldots, V_r$, non contenues l'une dans l'autre. Les sous-variétés irréductibles $V_1, \ldots, V_r$ sont appelées composantes irréductibles de la sous-variété V.

Définition 1.2.3.7 (Variété algébrique affine). *On appelle variété algébrique affine tout ensemble algébrique affine irréductible.*

1.2.4 Cas particulier de topologie de Zariski

Définition 1.2.7. *On définit les fermés de la topologie de Zariski dans $\mathbb{R}^2$ par :*
soit $S \subset \mathbb{R}[X, Y]$, $\mathcal{V}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall P \in S, P(x, y) = 0\}$.

Étudions géométriquement les fermés $\mathcal{V}(P_i)$ avec $i \in \{1, \ldots, 5\}$ pour les polynômes suivants : $P_1 = XY$, $P_2 = X^2 - Y$, $P_3 = X^3 - Y^2$, $P_4 = X^3 - XY + X^2 - Y$. Et $\mathcal{V}(P_1, P_2)$ et $\mathcal{V}(P_4, P_2)$.

❶ Pour $P_1 = XY$, on a $\mathcal{V}(P_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P_1(x, y) = 0\}$.
$P_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0$, c'est l'union de l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses.

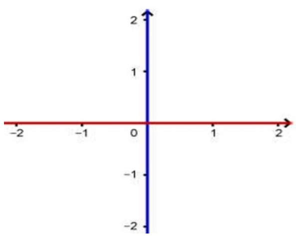

FIGURE 1.1 – $\mathcal{V}(P_1) \subset \mathbb{R}^2$.

❷ Pour $P_2 = X^2 - Y$, on a $\mathcal{V}(P_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P_2(x, y) = 0\}$.
$P_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$, c'est l'équation d'une parabole.

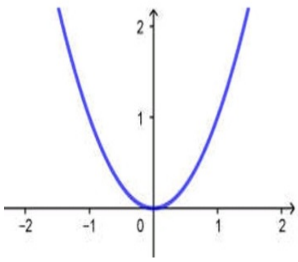

FIGURE 1.2 – $\mathcal{V}(P_2) \subset \mathbb{R}^2$.

❸ Pour $P_3 = X^3 - Y^2$, on a :
$\mathcal{V}(P_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P_3(x, y) = 0\} = \mathcal{V}(P_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^2 = 0\}$.
Deux cas se présentent.
Supposons d'abord que $x \geq 0$. Alors comme $y \in \mathbb{R}$, on a :
$x^3 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x^{3/2})(y + x^{3/2}) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y & = x^{3/2} \\ y & = -x^{3/2} \end{array} \right.$.
Supposons maintenant $x < 0$. Alors $x^3 - y^2 = 0$ n'a pas de solution.

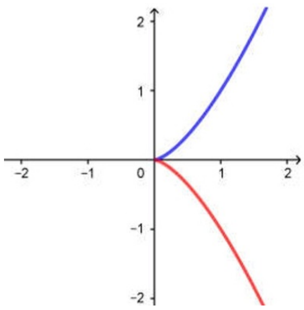

FIGURE 1.3 – $\mathcal{V}(P_3) \subset \mathbb{R}^2$.

❹ Pour $P_4 = X^3 - XY + X^2 - Y$, on a $\mathcal{V}(P_4) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P_4(x, y) = 0\}$.
$P_4(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 - xy + x^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $y = x^2$, c'est l'union de la droite $x = 1$ et P_3.

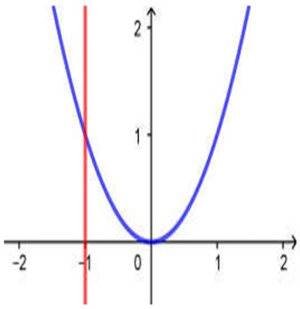

FIGURE 1.4 – $\mathcal{V}(P_4) \subset \mathbb{R}^2$.

❺ Pour $\mathcal{V}(P_1, P_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \;\text{ ou }\; y = 0) \;\text{ et }\; y = x^2\}$.

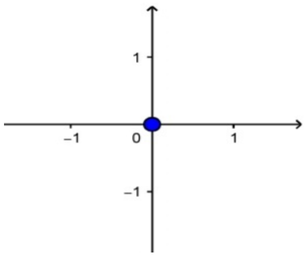

FIGURE 1.5 – $\mathcal{V}(P_1, P_2) \subset \mathbb{R}^2$.

❻ Pour $\mathcal{V}(P_4, P_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = -1 \;\text{ ou }\; y = x^2) \;\text{ et }\; y = x^2\}$.

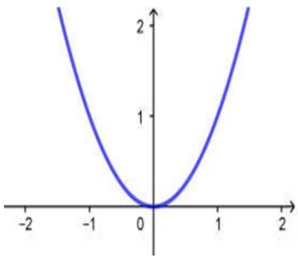

FIGURE 1.6 – $\mathcal{V}(P_4, P_2) \subset \mathbb{R}^2$.

1.3 Variétés algébriques projectives

La géométrie affine peut se révéler insuffisante pour bien comprendre des problèmes de nature géométrique. Nous considérons un nouvel espace appelé espace projectif qui est obtenu de l'espace affine en ajoutant "un point à l'infini dans chaque direction". L'ajout de points supplémentaires a pour but d'éviter les cas particuliers où un point "disparaît à l'infini". Dans cet espace agrandi, de nombreux problèmes deviennent plus simples et plus clairs. Par exemple, dans un espace affine, deux droites parallèles ne s'intersectent pas mais elles s'intersectent en un point à l'infini dans un plan projectif.

Dans cette section $\mathcal{R}$ désignera l'anneau $k[X_0, \ldots, X_n]$ des polynômes à $n+1$ indéterminées à coefficients dans k où k est le corps de base considéré pour définir $\mathbb{A}^n = k^n$.

1.3.1 Espaces projectifs

Considérons la relation $\sim$ sur $k^{n+1} - \{0\}$ définie par : pour tous vecteurs x et y de $k^{n+1} - \{0\}$, on a : $x \sim y$ s'il existe $\lambda \in k^*$ tel que $y = \lambda x$.

La relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence sur $k^{n+1} - \{0\}$. Géométriquement, deux vecteurs non nuls sont équivalents s'ils sont colinéaires.

Définition 1.3.1.1 (Espace projectif). *On appelle espace projectif de dimension n sur k et l'on note $\mathbb{P}^n(k)$ ou $\mathbb{P}(k^{n+1})$ ou simplement $\mathbb{P}^n$ (s'il n'y a pas risque de confusion sur k), l'ensemble des classes d'équivalence par $\sim$.*

Les éléments de $\mathbb{P}^n$ sont les droites vectorielles de k^{n+1}. Soit $x = (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} - \{0\}$ un représentant (ou vecteur directeur) d'un point $p \in \mathbb{P}^n$. Alors on peut écrire $p = (x_0 : \cdots : x_n)$ (ou bien $p = [x_0, \ldots, x_n]$) qui est la classe d'équivalence par $\sim$ de $(x_0, \ldots, x_n)$. On dit que $(x_0 : \cdots : x_n)$ est un système de coordonnées homogènes de p. Les systèmes de coordonnées homogènes de p ne diffèrent que par multiplication par un scalaire non nul.

$$\mathbb{P}^n = \left(k^{n+1} - \{0\}\right) \big/ \sim = \left\{(x_0 : \cdots : x_n) \mid (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}\right\}.$$

Les espaces $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ sont appelés respectivement droite projective et plan projectif. Un point $p \in \mathbb{P}^n$ est dit zéro de $F \in \mathcal{R}$ si $F(p) = 0$. Si $(x_0, \ldots, x_n)$ est un représentant de p, alors $F(p) = 0$ signifie que $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$.
On dit ainsi qu'un point $p = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ est un zéro de $F \in \mathcal{R}$ si, et seulement si pour tout $\lambda \in k^*$, on a : $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$.

$$\text{En d'autres termes } F(x_0, \ldots, x_n) = 0 \Longleftrightarrow F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0, \ \forall \ \lambda \in k^*.$$

Cas particulier. Soit E un k-espace vectoriel. On peut définir de la même manière l'espace projectif associé à E que l'on note $\mathbb{P}E$ (ou $\mathbb{P}(E)$). Si E est un k-espace vectoriel de dimension finie n, alors $\mathbb{P}(E)$ est un espace projectif de dimension $n-1$. En particulier l'espace projectif associé à 0 est de dimension -1.
Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'inclusion $F - \{0\} \subset E - \{0\}$ induit l'inclusion $\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$. Les $\mathbb{P}(F)$ ainsi obtenus sont appelés des sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}(E)$; et on a : $\mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(F') = \mathbb{P}(F \cap F')$.
Le théorème suivant montre que des sous-espaces linéaires se rencontrent toujours.

Théorème 1.3.1.1. Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Posons $\dim(F) = r$ et $\dim(F') = r'$ telles que $r + r' \geq n+1$. Alors $\dim\left(\mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(F')\right) \geq r + r' - n$.

Définition 1.3.1.2. *Soit $F \in \mathcal{R}$. On dit que F est homogène de degré d si pour tout $\lambda \in k^*$, on a : $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n)$.*

Remarque. Tout polynôme se décompose de façon unique en somme de polynômes hommogènes.

Définition 1.3.1.3. *On dit que des points de $\mathbb{P}^n$ sont linéairement indépendants si les droites qu'ils représentent sont en somme directe. On dit que des points de $\mathbb{P}^n$ sont en position générale si pour un nombre quelconque m avec $m < n+1$ d'entre-eux, ils sont linéairement indépendants.*

Définition 1.3.1.4. *Soit S une partie quelconque de $\mathcal{R}$ constituée de polynômes homogènes. On pose :*

$$\mathcal{V}(S) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid \forall\, F \in S, F(p) = 0\}$$

de sorte que les $p \in \mathcal{V}(S)$ sont les zéros communs à tous les polynômes de S. On dit que $\mathcal{V}(S)$ est l'ensemble algébrique projectif défini par S.

Comme dans le cas affine si l'ensemble est fini, on notera souvent $\mathcal{V}(F_0, \ldots, F_n)$ au lieu de $\mathcal{V}(\{F_0, \ldots, F_n\})$.

Définition 1.3.1.5 (Hypersurface). *On appelle hypersurface définie par un polynôme homogène, notée $\mathcal{V}(F)$, l'ensemble des zéros de F (lorsque k est algébriquement clos, et F non constant) :*

$$\mathcal{V}(F) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0\}\,.$$

Cas particuliers d'hypersurfaces.

- ✔ Si $n = 2$, alors $\mathcal{V}(F) = \{p \in \mathbb{P}^2 \mid F(p) = 0\}$ est appelé courbe projective plane. On appelle conique, cubique, quartique, quintique, sextique, etc. une courbe projective plane de degré respectivement 2,3,4,5,6, etc..
- ✔ Si $\deg(F) = 1$, alors $\mathcal{V}(F) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0\}$ est appelé hyperplan projectif.

Définition 1.3.1.6. *Soit I un idéal de $\mathcal{R}$. On dit que I est homogène s'il est engendré par des polynômes homogènes.*

On montre que I est homogène si, et seulement si pour toute décomposition $F = \sum\limits_{i=1}^{r} F_i$ d'un élément de I en somme de polynômes homogènes, les F_i sont éléments de I.

Remarque. Les résultats obtenus dans $\mathbb{A}^n$ se transportent presque tous dans le cadre projectif. On peut en citer quelques uns :

- ✔ L'opérateur $\mathcal{V}$ est décroissante.
- ✔ tout $\mathcal{V}(S)$ peut-être défini par l'annulation d'un nombre fini de polynômes homogènes car $\mathcal{R}$ est noethérien.
- ✔ l'ensemble $\{\mathcal{V}(S) \mid S \subset \mathcal{R}\}$ définit une topologie.

Donc, comme en affine, en projectif on peut définir une topologie de Zariski dont les fermés sont des ensembles projectifs.

Définition 1.3.1 (Idéal d'un ensemble de points). *Soit V une partie de $\mathbb{P}^n$. On appelle idéal de V dans $\mathbb{P}^n$, l'ensemble noté $\mathfrak{I}(V)$ défini par*

$$\mathfrak{I}(V) = \{F \in \mathcal{R} \text{ homogène } \mid \forall\, p \in V,\ F(p) = 0\}\,.$$

Remarque. La notion d'irréductibilité et ses propriétés en affine se comportent telles qu'elles dans le cadre projectif.

Définition 1.3.1.7 (Variété algébrique projective). *On appelle variété algébrique projective tout ensemble algébrique projectif irréductible (pour la topologie de Zariski).*

1.3.2 Lien affine - projectif

Considérons les parties de $\mathbb{P}^n$ définies de la manière suivante :
$U_i = \{p = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$.
Les ensembles U_i recouvrent $\mathbb{P}^n$. Chacun des U_i est isomorphe à $\mathbb{A}^n$. En effet

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ (x_0 : \cdots : x_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right) \end{array}$$

est un isomorphisme i.e. $U_i \backsimeq \mathbb{A}^n$. Le complémentaire de U_i dans $\mathbb{P}^n$ est l'espace linéaire $\mathbb{P}H_i$ où H_i est l'hyperplan défini par l'équation $x_i = 0$ dans k^{n+1}. On peut donc voir $\mathbb{P}^n$ comme l'espace $\mathbb{A}^n$ auquel on adjoint des " points à l'infini ". Par exemple, la droite projective $\mathbb{P}^1$ est la droite affine k auquel on adjoint un unique " point à l'infini". Plus généralement, le complémentaire dans $\mathbb{P}^n$ de n'importe quel hyperplan projectif s'identifie naturellement à $\mathbb{A}^n$.

1.3.3 Déshomogénéisation

Les ensembles algébriques projectifs V de $\mathbb{P}^n$ sont les fermés d'une topologie sur $\mathbb{P}^n$ que l'on appelle topologie de Zariski. A tout fermé de V on peut associer l'idéal homogène que l'on note $\mathfrak{I}(V)$ engendré par des polynômes homogènes $F_1, \ldots, F_p$ s'annulant en tous les points de V.

Définition 1.3.3.1. *On dit que V est défini sur k, et l'on note V/k, si l'on peut choisir les F_i comme polynômes homogènes à coefficients dans k. Si V est défini sur k, l'ensemble des points k-rationnels de V est : $V(k) = V \cap \mathbb{P}^n(k)$.*

Cas particulier. Soit $C = V(F)$ une courbe projective plane. On dit que C est définie sur k, et l'on note C/k, si F est à coefficients dans k.
L'ensemble des points k-rationnels de C est : $C(k) = C \cap \mathbb{P}^n(k)$. Soient U_2 et L_∞ les ensembles définis par :

$$U_2 = \left\{(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2 \mid Z \neq 0\right\}$$
$$L_\infty = \left\{(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2 \mid Z = 0\right\} \quad .$$

On introduit les coordonnées x, y telles que $x = \frac{X}{Z}$ et $y = \frac{Y}{Z}$. L'application définie par

$$\begin{array}{cccc} \phi_2 : & \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & U_2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x : y : 1) \end{array}$$

est une bijection dont la réciproque est :

$$\begin{array}{cccc} \phi_2^{-1} : & U_2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (X : Y : Z) & \longmapsto & \left(\dfrac{X}{Z}, \dfrac{Y}{Z}\right) \end{array} \quad .$$

On définit aussi une bijection avec l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & L_\infty \\ & (X:Y) & \longmapsto & (X:Y:0) \end{array} .$$

On voit clairement que $\mathbb{P}^2$ est la réunion disjointe $\mathbb{P}^2 = U_2 \cup L_\infty$ du "plan affine" U_2 et de la "droite à l'infini" L_∞. Un point de L_∞ est appelé point à l'infini que l'on notera P_∞. Le plan projectif $\mathbb{P}^2$ peut donc être vu comme le plan affine auquel on adjoint un point à l'infini par famille de droites parallèles.
De la même manière que U_2, on peut définir d'autres sous-ensembles de $\mathbb{P}^2$ tels que :
$U_0 = \{(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2 \mid X \neq 0\}$ et $U_1 = \{(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2 \mid Y \neq 0\}$ et des bijections

$$\begin{array}{rccc} \phi_0^{-1} : & U_0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (X:Y:Z) & \longmapsto & \left(\dfrac{Y}{X}, \dfrac{Z}{X}\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \phi_1^{-1} : & U_1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (X:Y:Z) & \longmapsto & \left(\dfrac{X}{Y}, \dfrac{Z}{Y}\right) \end{array} .$$

Les applications ϕ_i^{-1} permettent d'identifier le plan affine $\mathbb{A}^2$ avec un ouvert U_i de $\mathbb{P}^2$. Il faut noter que la réunion des U_i recouvre $\mathbb{P}^2$: $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. Une courbe projective plane C est la réunion de trois courbes planes : $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$ avec $C_i = C \cap U_i$. Lorsque nous identifions U_i avec $\mathbb{A}^2$, alors C_0, C_1 et C_2 s'identifient avec les courbes affines définies respectivement par les polynômes $F_*(Y,Z) = F(1,Y,Z)$, $F_*(X,Z) = F(X,1,Z)$ et $F_*(X,Y) = F(X,Y,1)$. Le fait de remplacer $F(X,Y,Z)$ par $F(1,Y,Z)$, $F(X,1,Z)$ ou $F(X,Y,1)$ est appelé déshomogénéisation suivant respectivement X, Y et Z. Inversement, à tout polynôme non nul $F(X,Y) \in k[X,Y]$ on associe le polynôme homogène F^* tel que $F^*(X,Y,Z) = Z^d F\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ où $d = \deg(F)$. Le polynôme F^* est appelé l'homogénéisé de F par rapport à Z. On peut introduire la notion de variété projective.

Définition 1.3.3.2. *Un ensemble projectif S est appelé variété projective si l'idéal homogène $\mathfrak{I}(S)$ est premier dans $\overline{k}[X_0, \ldots, X_n]$. Une variété quasi-projective est un sous-ensemble ouvert (de Zariski) d'une variété projective.*

Remarque. Soit $C = \mathcal{V}(F)$ une courbe projective plane. On a les équivalences suivantes :
C est irréductible $\Longleftrightarrow$ C est une variété projective $\Longleftrightarrow$ F est irréductible.

Définition 1.3.3.3. *Soit $C = \mathcal{V}(F)$ une courbe affine plane avec $d = \deg(F) \geq 1$. La clôture projective de C, que l'on note $\overline{C}$, est la courbe plane projective $\overline{C} = \mathcal{V}(H)$ où H est l'homogénéisé de F. Les points $\left(\overline{C} - C\right)$ sont les points à l'infini de C.*

CHAPITRE 2

MORPHISMES DE VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES ET COURBES LISSES

2.1 Catégories et foncteurs

2.1.1 Catégories

Définition 2.1.1.1 (Catégorie). *Une catégorie $\mathcal{C}$ est définie par les données suivantes :*

❶ *une famille notée $Ob(\mathcal{C})$ appelée la classe des objets de $\mathcal{C}$. On note $X \in Ob(\mathcal{C})$ pour dire que X est un objet de $\mathcal{C}$.*

❷ *une collection d'ensembles de morphismes notée $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour tous $X, Y \in Ob(C)$. Si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on dit que X est la source de f et Y est le but ; on écrit $f : X \longrightarrow Y$ pour dire que f est une flèche de $\mathcal{C}$ ou un morphisme de $\mathcal{C}$.*

❸ *pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, une application*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & Hom_{C}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \ . \end{array}$$

L'image $g \circ f$ du couple (f, g) est appelée le composé de f suivi de g.

Ces données doivent de plus vérifier les axiomes suivants :

a) la loi $\circ$ est associative : $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, T)$ on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \ ;$$

b) la neutralité des identités : pour tout $X \in Ob(\mathcal{C})$, il existe un morphisme identité de X noté $id_X : X \longrightarrow X$ vérifiant les conditions suivantes : pour tous $Y \in Ob(\mathcal{C})$, $f \in Hom_C(X, Y)$ et $g \in Hom_C(Y, X)$, on a $f \circ id_X = f$ et $id_X \circ g = g$;

c) si (X, Y) et (X', Y') sont deux couples distincts d'objets de $\mathcal{C}$, alors

$$Hom_C(X,Y) \cap Hom_C(X',Y') = \emptyset \ .$$

Exemple 2.1.1.1.

❶ La catégorie des ensembles notée Ens.
- ✔ Les objets de Ens sont tous les ensembles. En d'autres termes, Ens est la classe de tous les ensembles.
- ✔ Les morphismes sont toutes les fonctions.
- ✔ La composition est celle des fonctions.

❷ La catégorie des groupes notée G_r.
- ✔ La catégorie G_r est la classe de tous les groupes.
- ✔ Les morphismes sont les morphismes de groupes.
- ✔ La composition est la composition des fonctions.

❸ La catégorie des espaces topologiques notée Top.
- ✔ La catégorie Top est la classe de tous les espaces topologiques.
- ✔ Les morphismes sont les applications continues.
- ✔ La composition est la composition des fonctions.

2.1.2 Foncteurs

Définition 2.1.2.1 (Foncteur covariant). *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un foncteur covariant (ou simplement foncteur) $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est la donnée :*

❶ *d'une application notée*

$$\begin{array}{rccc} F: & Ob(\mathcal{C}) & \longrightarrow & Ob(\mathcal{C}') \\ & X & \longmapsto & F(X)\,; \end{array}$$

❷ *pour tous X, Y objets de $\mathcal{C}$, d'une application notée aussi*

$$\begin{array}{rccc} F: & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y)) \\ & f & \longmapsto & F(f). \end{array}$$

Ces données doivent de plus vérifier les conditions suivantes :

a) pour tout $X \in Ob(\mathcal{C})$, on a $F(id_X) = id_{F(X)}$;

b) pour tout $(f, g) \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Exemple 2.1.2.1.

❶ Sur toute catégorie $\mathcal{C}$ on dispose d'un foncteur identité $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ défini par les égalités $id_{\mathcal{C}}(X) = X$ et $id_{\mathcal{C}}(f) = f$ pour tout objet X et toute flèche f de $\mathcal{C}$.

❷ Si $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont trois catégories, si F est un foncteur de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathcal{C}_2$ et si F' est un foncteur de $\mathcal{C}_2$ vers $\mathcal{C}_3$ on définit de façon évidente le foncteur composé $F \circ F' : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$. La composition des foncteurs est associative, et les foncteurs identités sont neutres pour celle-ci.

Définition 2.1.2.2. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, et soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. On dit que F est fidèle (resp. plein, resp. pleinement fidèle) si pour tout couple (X, Y) de $Ob(\mathcal{C})$, l'application $f \mapsto F(f)$ de $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ vers $Hom_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$ est injective (resp. surjective, resp. bijective).*

Définition 2.1.2.3 (Morphisme de foncteur). *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, soient F et $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ deux foncteurs covariants. Un morphisme (ou transformation naturelle) φ de F vers F' est la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\varphi(X) : F(X) \to F'(X)$ de la catégorie $\mathcal{C}'$, de sorte que pour toute flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(X) \arrow[d, "F'(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] & F'(Y) \end{tikzcd}$$

commute.

Remarque. On résume parfois ces conditions en disant simplement qu'un morphisme de F vers F' est la donnée pour tout X d'un morphisme de $F(X)$ dans $F'(X)$ qui est fonctoriel en X.

Définition 2.1.2.4 (Foncteur contravariant). *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est la donnée :*

❶ *d'une application notée*

$$\begin{array}{rccc} F : & Ob(\mathcal{C}) & \longrightarrow & Ob(\mathcal{C}') \\ & X & \longmapsto & F(X) \ ; \end{array}$$

❷ *pour tous X, Y objets de $\mathcal{C}$, d'une application notée aussi*

$$\begin{array}{rccc} F : & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}'}(F(Y),F(X)) \\ & f & \longmapsto & F(f) \ . \end{array}$$

Ces données doivent de plus vérifier les conditions suivantes :

a) pour tout $X \in Ob(\mathcal{C})$, on a $F(id_X) = id_{F(X)}$;

b) pour tout $(f,g) \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, on a $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

2.2 Morphismes de variétés algébriques

Dans ce paragraphe on suppose le corps k infini. Nous sommes maintenant en possession d'objets : les sous-variétés algébriques. Mais plus encore que ces objets, ce sont les morphismes qui vont permettre de préciser les contours de la théorie. C'est en effet un principe maintenant bien établi en mathématiques que les mêmes objets (par exemple nos ensembles algébriques affines, disons dans le cas $k = \mathbb{C}$) peuvent donner lieu à des théories totalement distinctes selon les morphismes que l'on autorise entre eux, par exemple les applications continues, ou différentiables au sens réel, ou analytiques, ou polynomiales. On fera alors respectivement de la topologie, de la géométrie différentielle, de la géométrie analytique, ou de la géométrie algébrique. Dans le cas présent ce sont bien entendu les applications polynomiales qui vont être retenues, précisément :

2.2.1 Cas affine

Définition 2.2.1.1 (Application régulière). *Soient $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ deux sous-variétés affines et $\varphi : V \to W$ une application, que l'on peut écrire $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ avec $\varphi_i : V \to k$. On dit que φ est régulière (ou un morphisme) si ses composantes φ_i sont des fonctions polynomiales.*

On note $Mor(V, W)$ l'ensemble des applications régulières de V dans W.

Remarque. Une fonction régulière est une application régulière $\varphi : V \longrightarrow k$. On retient que $W = k$.

Définition 2.2.1.2 (Variétés algébriques affines isomorphes). *Une application régulière $\varphi : V \to W$ est un isomorphisme s'il existe une application régulière $\phi : W \to V$ telle que $\varphi \circ \phi = id_W$ et $\phi \circ \varphi = id_V$. On dit que V et W sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $V \to W$.*

Exemple 2.2.1.1.

❶ Supposons k infini. Prenons pour V l'hypersurface affine $\mathcal{V}(Y - X^2)$. L'application $\varphi : V \longrightarrow k$ définie par $\varphi(x, y) = x$ est régulière et bijective; son inverse $\varphi^{-1} : k \longrightarrow V$ définie par $\varphi^{-1}(x) = (x, x^2)$ est aussi régulière. On dit ainsi que φ est un isomorphisme.

❷ Supposons toujours k infini. Prenons l'hypersurface plane affine $V = \mathcal{V}(Y^3 - X^2)$. L'application $\varphi : k \longrightarrow V$ définie par $\varphi(x) = (x^3, x^2)$ est régulière.

❸ Supposons k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. L'application $\varphi : k \longrightarrow k$ définie par $\varphi(x) = x^p$ (dite de "Frobenius") est régulière et bijective. Mais n'est pas un isomorphisme.

Définition 2.2.1.3. *Une application régulière $\varphi : V \longrightarrow W$ est dite dominante si son image est dense i.e. $\overline{\varphi(V)} = W$.*

Remarque. Soient V et W des sous-variétés affines et $\varphi : V \longrightarrow W$ une application régulière. L'ensemble des fonctions régulières de V dans k s'identifie à l'algèbre
$\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}/\mathcal{I}(V)$ avec $\mathcal{A} = k[X_1, \ldots, X_n]$.

Nous avons associé à une sous-variété algébrique affine V son algèbre affine $\mathcal{A}(V)$ et commencé à établir un dictionnaire pour passer de l'un à l'autre. Il faut bien sûr compléter cette correspondance sur les morphismes, c'est-à-dire montrer qu'elle est fonctorielle. C'est fait grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.2.1.1. Si $\varphi : V \to W$ est un morphisme, on lui associe un morphisme de k-algèbres $\varphi^* : \mathcal{A}(W) \to \mathcal{A}(V)$ définie par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Proposition 2.2.1.2 ([Per95], Chap.1, pro. 6.7)**.** Le foncteur $\mathcal{F}$ est pleinement fidèle, ce qui signifie que l'application $\sigma : Mor(V, W) \to Hom_{k-alg}(\mathcal{A}(W), \mathcal{A}(V))$ définie par $\sigma(\varphi) = \varphi^*$ est bijective.

Corollaire 2.2.1.1. Soit $\varphi : V \to W$ un morphisme. Alors, φ est un isomorphisme si et seulement si φ^* en est un. En conséquence, V et W sont isomorphes si et seulement si leurs algèbres $\mathcal{A}(V)$ et $\mathcal{A}(W)$ le sont.

Proposition 2.2.1.3. Soit $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme. Alors

❶ φ est dominant si, et seulement si φ^* est injectif.

❷ si φ^* est surjectif, alors φ est injectif.

Preuve.

❶ CN $\Rightarrow$) Supposons que le morphisme φ est dominant et montrons que le morphisme d'algèbres φ^* est injectif.

$$\begin{aligned} f \in \ker(\varphi^*) &\Rightarrow \varphi^*(f) = 0 \\ &\Rightarrow f \circ \varphi = 0 \\ &\Rightarrow f \in \mathfrak{I}\left(\varphi(V)\right) \\ &\Rightarrow f \in \mathfrak{I}\left(\overline{\varphi(V)}\right) \\ &\Rightarrow f \in \mathfrak{I}(W) \quad \text{par hypothèse} \end{aligned}$$

f s'annule alors sur W et par suite $f = 0$. Ainsi $\ker(\varphi^*) = 0$.
CS $\Leftarrow$) On raisonne par contraposition.
Supposons que le morphisme φ est non dominant et montrons que le morphisme d'algèbres φ^* est non injectif.
φ non dominant $\Rightarrow \overline{\varphi(V)} \neq W$ or $\varphi(V) \subset \overline{\varphi(V)}$, d'où φ non dominant $\Rightarrow \varphi(V) \subsetneq W$
$\Rightarrow \exists f : W \to k$, nulle sur $\varphi(V)$, mais pas sur W donc

$$\begin{aligned} f\left(\varphi(V)\right) = 0 &\Rightarrow (f \circ \varphi)(V) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi^*(f) = 0 \\ &\Rightarrow f \in \ker(\varphi^*). \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(\varphi^*) \neq 0$. Ce qui montre que φ^* n'est pas injectif.

❷ Supposons que le morphisme d'algèbres φ^* est surjectif et montrons que le morphisme φ est injectif.
Soient x et y deux éléments distincts de V. Il existe alors une fonction régulière
$f : V \to k$ nulle en x et pas en y.
φ^* surjectif $\Rightarrow \exists g \in \mathcal{A}(W) : f = \varphi^*(g)$.
Ainsi

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & = f(x) = \varphi^*(g)(x) = (g \circ \varphi)(x) = g\left(\varphi(x)\right) \\ 0 & \neq f(y) = \varphi^*(g)(y) = (g \circ \varphi)(y) = g\left(\varphi(y)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y).$$

Ce qui montre que φ est injectif.

❑

2.2.2 Cas projectif

Il est impossible de copier la définition des fonctions régulières donnée dans le cadre affine, parce qu'un polynôme ne définit pas une fonction de $\mathbb{P}^n$ dans k. L'idée est de se ramener au cas affine en remarquant que toute variété projective est réunion de variétés affines.

Définition 2.2.2.1 (Variété quasi-projective). *On appelle variété quasi-projective, tout ouvert (de Zariski) d'une variété projective.*

Toute variété affine est donc quasi-projective. Dire que X est une variété signifie que X est quasi-projective ; en revanche, dire que Y est une sous-variété d'une variété X signifie que Y est un fermé de X.

Remarque. L'idée de base est de montrer que même si un polynôme homogène ne définit pas une fonction sur $\mathbb{P}^n$, le quotient F/G de polynômes homogènes de même degré, définit une fonction sur l'ouvert de $\mathbb{P}^n$ où G ne s'annule pas.

Définition 2.2.2.2 (Fonction régulière). *Soient X une sous-variété quasi-projective de $\mathbb{P}^n$ et $x \in X$. On dit que $f : X \longrightarrow k$ est une fonction régulière en x, s'il existe des polynômes homogènes de même degré F, G tels que $G(x) \neq 0$ et $f = F/G$ sur un voisinage de x.*

On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow k$ est régulière sur X si elle l'est en tout point de X.

Définition 2.2.2.3 (Application régulière). *Soient X et Y deux variétés projectives. Une application $u : X \longrightarrow Y$ est dite régulière si :*

❶ *u est continue ;*

❷ *pour tout ouvert $U \subset Y$ et toute fonction régulière $f : U \longrightarrow k$, la composée $f \circ u$ est régulière sur $u^{-1}(U)$.*

S'il existe un morphisme réciproque $v : Y \longrightarrow X$ tel que $v \circ u = Id_X$ et $u \circ v = Id_Y$, on dit que u est un isomorphisme de variétés.

Remarque. Cette définition a l'avantage d'entraîner sans effort le fait que la composée d'applications régulières est encore une application régulière.

Les morphismes de variétés sont souvent donnés sous les formes suivantes :

❶ Soient $F_0, \ldots, F_m$ des polynômes homogènes de même degré en $(n+1)$ variables. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathbb{P}^n - \mathcal{V}(F_0, \ldots, F_m) & \longrightarrow & \mathbb{P}^m \\ & x & \longmapsto & (F_0(x) : \cdots : F_m(x)) \end{array}$$

est régulière.

Remarque. Si les $F_0, \ldots, F_m$ ne sont simultanément nuls qu'en zéro, alors

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^m \\ & x & \longmapsto & (F_0(x) : \cdots : F_m(x)) \end{array}$$

est régulière.

Exemple 2.2.2.1. L'application $\mu : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ définie par $\mu(x_0, x_1) = (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3)$ est régulière.

En effet, posons $F_0(x_0,x_1) = x_0^3$, $F_1(x_0,x_1) = x_0^2x_1$, $F_2(x_0,x_1) = x_0x_1^2$, $F_3(x_0,x_1) = x_1^3$. On a alors :

$$\begin{cases} F_0(x_0,x_1) &= 0 \\ F_1(x_0,x_1) &= 0 \\ F_2(x_0,x_1) &= 0 \\ F_3(x_0,x_1) &= 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} x_0^3 &= 0 \\ x_0^2x_1 &= 0 \\ x_0x_1^2 &= 0 \\ x_1^3 &= 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{cases}.$$

Ce qui montre que les F_i ne s'annulent simultanément qu'en 0. Ainsi, l'application u est régulière.

❷ **Application de Véronese**
Considérons tous les monômes $M_0,\dots,M_N$ de même degré d en $(n+1)$ variables, où $N = C_{n+d}^d - 1$ est le résultat de choisir :

$$\bullet \mid \bullet \cdots \bullet \mid \bullet\,\bullet$$

les places pour les $n+1$ variables (d points et n barres, mais on commence à énumérer par 0).

Définition 2.2.2.4. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mu_d : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & x & \longmapsto & (M_0(x):\cdots:M_N(x)) \end{array}$$

est appelée ***plongement de Véronese****, d'après le mathématicien italien Giuseppe Véronese* [1]*. Elle est bien définie et injective.*

Exemple 2.2.2.2.

❶ Pour $d = 2$ et $N = 2$, l'application $\mu_2 : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ définie par $\mu_2(x_0,x_1) = (x_0^2, x_0x_1, x_1^2)$ est un morphisme de Véronese. En effet, on a M_0, M_1, M_2 des monômes de degré 2 en 2 variables, avec $N = C_{1+2}^2 - 1 = 2$. Ainsi

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & x = (x_0 : x_1) & \longmapsto & (M_0(x) : M_1(x) : M_2(x)) \end{array}$$

est une application de Véronese.

❷ Pour $d = 2$ et $N = 5$, l'application $\mu_2 : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ définie par
$\mu_2(x_0,x_1,x_2) = (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ est un morphisme de Véronese. En effet, on a : $M_0,\dots,M_N$ des monômes de degré 2 en 3 variables, avec $N = C_{2+2}^2 - 1 = 5$. Ainsi

$$\begin{array}{rccc} \nu_2 : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & x = (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (M_0(x) : \cdots : M_N(x)) \end{array}$$

est une application de Véronese.

1. Giuseppe Véronese (1854 - 1917) est un mathématicien italien. Il est né à Chioggia, près de Venise. Sa monographie la plus célèbre est Fondamenti di geometria a più dimensioni ea più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare (1891).

2.3 Courbes lisses

2.3.1 Dimension d'une variété algébrique

Définition 2.3.1.1 (Dimension). *Soit X un espace topologique. La dimension de X est le maximum des entiers n pour lesquels il existe des parties irréductibles fermées $X_0, \ldots, X_n$ de X vérifiant $X_0 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n$.*

La dimension de X est donc un entier positif ou $+\infty$, et si X est vide, alors $\dim X = -\infty$.

Remarque. Si X est une union de fermés $X_0, \ldots, X_r$, alors $\dim X = \max\limits_{0 \leq i \leq r} (\dim X_i)$. On voit donc que la dimension d'un ensemble algébrique est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles.

Définition 2.3.1.2. *On dit qu'un ensemble algébrique est de dimension pure n, ou équidimensionnelle de dimension n, si chaque composante irréductible est de dimension n.*

Un ensemble algébrique est de dimension 0 s'il est constitué d'un nombre fini d'éléments.

Proposition 2.3.1. Tout ensemble algébrique irréductible est de dimension finie.

Définition 2.3.1.3. *Soient X un ensemble algébrique irréductible et $x \in X$. On appelle dimension de X en x et l'on note $\dim_x X$, le maximum des dimensions des composantes irréductibles de X passant par x.*

2.3.2 Espace tangent de Zariski

Considérons la courbe $\mathcal{C}$ affine définie par $F(x, y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$. Supposons $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ avec $p = (p_1, p_2)$. On peut paramétrer localement $\mathcal{C}$ par une fonction g vérifiant $p_2 = g(p_1)$ et $F(t, g(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $M = (x_0, y_0)$ est donnée par : $y - y_0 = g^{'}(x_0)(x - x_0)$ ou $(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(M) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(M) = 0$. Cette relation définie une droite sauf si $\frac{\partial F}{\partial x}(M) = \frac{\partial F}{\partial y}(M) = 0$.

Définition 2.3.2.1. *Soit H une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ définie par : $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. On appelle espace tangent affine à H en $p = (p_1, \ldots, p_n)$ l'espace vectoriel défini par l'équation : $(x_1 - p_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}(p) + \cdots + (x_n - p_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}(p) = 0$.*

C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.3.2.2 (Espace tangent de Zariski). *Soit X une sous-variété de $\mathbb{A}^n$. On appelle espace tangent de Zariski à X en $p = (p_1, \ldots, p_n)$, l'ensemble défini par les équations $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)(x_i) = 0$ pour tout $F \in \mathfrak{I}(X)$. On retrouve le même ensemble en se limitant aux F générateurs de $\mathfrak{I}(X)$. L'espace tangent de Zariski à X en p est noté $T_p(X)$; l'espace affine correspondant à $T_p(X)$ est défini par : $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) = 0$.*

Remarque. Pour tout $x \in X$, on a : $\dim(T_x(X)) \geqslant \dim_x(X)$.

2.3.3 Points lisses

Définition 2.3.3.1. *Soit X une variété algébrique, et soit $x \in X$. On dit que x est lisse sur X (ou que X est lisse en x) si* $\dim(T_x(X)) = \dim_x(X)$.

Un point x lisse est aussi appelé point régulier ; un point qui n'est pas régulier est appelé point singulier.
On dit que X est lisse si elle l'est en chacun de ses points. L'ensemble des points singuliers de X est un fermé propre de X et est noté $Sing(X)$. Le complémentaire de $Sing(X)$ dans X est noté X_{lisse}.

Définition 2.3.3.2. *Soit H une hypersurface de $\mathbb{A}^n$ définie par : $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. L'ensemble $Sing(H)$ des points singuliers de H est l'ensemble des solutions du système*

$$\begin{cases} F\ (x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Définition 2.3.3.3. *Soit H une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ définie par : $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$. L'ensemble $Sing(H)$ des points singuliers de H est l'ensemble des solutions du système*

$$\begin{cases} F\ (x_0, \ldots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Remarque. Si F est un polynôme de degré d et que la caractéristique de k ne divise pas d, alors $Sing(H)$ est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.3.3.1.

❶ On considère la courbe affine $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $\mathcal{C} : Y^2 - X^3 = 0$.
Posons $F(x, y) = y^2 - x^3$. L'ensemble des points singuliers de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} F\ (x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \textit{i.e.} \begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ -3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \textit{i.e.}\ (x, y) = (0, 0).$$

$$Sing(\mathcal{C}) = \{(0, 0)\},$$

la courbe $\mathcal{C}$ n'admet qu'un seul point singulier qui est $(0, 0)$. Ce qui montre que la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas lisse.

<u>**Interprétation géométrique**</u>

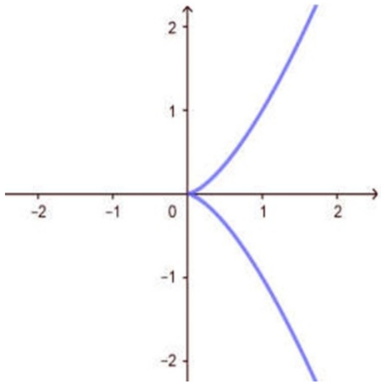

FIGURE 2.1 – $\mathcal{V}(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{R}^2$.

❷ On considère sur $\mathbb{R}^2$, la courbe affine $\mathcal{C}' : (X^2+Y^2)^2 - (Y^2 - X^2) = 0$. On pose $G(x,y) = (x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)$.
L'ensemble des points singuliers de $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} G\ (x,y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} (x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2) = 0 \\ 4x(x^2+y^2) + 2x = 0 \\ 4y(x^2+y^2) - 2y = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} (x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2) = 0 \\ x\left[2(x^2+y^2)+1\right] = 0 \\ y\left[2(x^2+y^2)-1\right] = 0 \end{cases}.$$

Deux cas se présentent :
<u>1^e ***cas :***</u> $x = 0$
Dans ce cas le système devient :

$$\begin{cases} y^4 - y^2 = 0 \\ y(2y^2-1) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

- si $y = 0$, on a : $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$; le point $(0,0)$ est singulier.
- si $y \neq 0$, on a :

$$\begin{cases} y^2(y^2-1) = 0 \\ 2y^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} y^2 = 1 \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \text{ ; c'est absurde car} 1 \neq \frac{1}{2}.$$

<u>2^e ***cas :***</u> $x \neq 0$
Dans ce cas le système devient :

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2) = 0 \\ 2(x^2+y^2)+1 = 0 \\ y\left[2(x^2+y^2)-1\right] = 0 \end{cases}$$

- si $y = 0$, on a :

$$\begin{cases} x^4 - x^2 = 0 \\ 2x^2 + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \text{ ; c'est absurde car } -1 \neq -\frac{1}{2}.$$

- si $y \neq 0$, on a :

$$\left\{\begin{array}{r} (x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)=0 \\ x^2+y^2=-\frac{1}{2} \\ x^2+y^2=\frac{1}{2} \end{array}\right. \text{ ; c'est absurde car } -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

En définitive, $Sing(\mathcal{C}^{'}) = \{(0,0)\}$. On déduit alors que $\mathcal{C}^{'}$ n'est pas lisse.

Interprétation géométrique

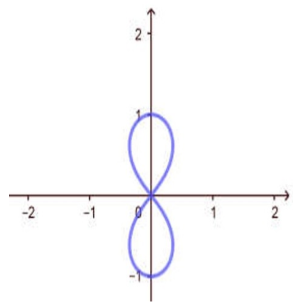

FIGURE 2.2 – $\mathcal{V}((X^2+Y^2)^2-(Y^2-X^2)) \subset \mathbb{R}^2$.

CHAPITRE 3

PLONGEMENT DE SEGRÉ

Notre but dans ce chapitre est d'étudier les produits de variétés algébriques.

3.1 Produit de variétés algébriques

Définition 3.1.1 (Produit dans une catégorie). *Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des variétés algébriques. On considère X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. Un produit de X et Y dans $\mathcal{C}$ consiste en la donnée d'un objet Π de $\mathcal{C}$ et de deux flèches de $\mathcal{C}$, $p_1 : \Pi \longrightarrow X$ et $p_2 : \Pi \longrightarrow Y$ (appelées projections) vérifiant la propriété (dite universelle) suivante : pour tout objet Z de $\mathcal{C}$ muni de flèches $h_1 : Z \longrightarrow X$ et $h_2 : Z \longrightarrow Y$, il existe une unique flèche h de Z dans Π telle que $h_1 = p_1 \circ h$ et $h_2 = p_2 \circ h$.*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] \arrow[ddr, bend right, "h_2"'] & & \\
& \Pi \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Remarque. Si le produit de X et Y existe, il est unique à un unique isomorphisme prés, l'isomorphisme commutant avec les projections. La propriété universelle du produit assure que la donnée de deux morphismes h_1 et h_2 d'un objet Z vers Π est la donnée h, puisque qu'à partir de h on retrouve h_1 par $h_1 = p_1 \circ h$ et on retrouve h_2 par $h_2 = p_2 \circ h$. Et réciproquement, la donnée de h induit deux morphismes uniques h_1 et h_2. Autrement dit cette propriété universelle signifie

$$Mor(Z, \Pi) \cong Mor(Z, X) \times Mor(Z, Y)$$

le produit ci-dessus étant le produit cartésien.

Exemple 3.1.1.

❶ Dans la catégorie Ens, le produit cartésien existe pour tous deux objets X et Y. C'est le produit cartésien ensembliste : $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ avec $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$.

❷ Dans la catégorie Top, le produit cartésien de deux espaces topologiques est leur produit cartésien ensembliste muni de la topologie produit.

❸ Dans la catégorie des k-algèbres, le produit existe pour tous deux objets X et Y. C'est le produit tensoriel des espaces vectoriels $X \otimes Y$ avec la multiplication définie par $(x_1 \otimes y_2).(x_2 \otimes y_1) = (x_1x_2) \otimes (y_2y_1)$ (les éléments de $X \otimes Y$ sont de la forme : $\sum x_i \otimes y_i$ où les $x_i \in X$ et les $y_i \in Y$). Les projections sont les morphismes de k-algèbres $X \to X \otimes Y$, $x \mapsto x \otimes 1$ et $Y \to X \otimes Y$, $y \mapsto 1 \otimes y$.

3.1.1 Produit de variétés algébriques affines

On construit maintenant le produit de variétés affines $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Y \subset \mathbb{A}^m$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_m)$ sont des points de $\mathbb{A}^n$ et $\mathbb{A}^m$ respectivement, alors on peut définir le point $(x,y) := (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{A}^{n+m}$, de sorte qu'on peut identifier $\mathbb{A}^{n+m}$ avec $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Définition 3.1.1.1. *Soient $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Y \subset \mathbb{A}^m$ des variétés algébriques affines. On appelle produit de X et Y, l'ensemble noté $X \times Y$ défini par*

$$X \times Y = \left\{(x,y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m} \mid x \in X, y \in Y\right\}.$$

Lemme 3.1.1.1. Soient $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Y \subset \mathbb{A}^m$ deux ensembles algébriques affines. Alors $X \times Y$ est un ensemble algébrique affine de $\mathbb{A}^{n+m}$.

Preuve. Supposons que X et Y soient deux ensembles algébriques affines de $\mathbb{A}^n$ et $\mathbb{A}^m$ respectivement. Alors on peut écrire

$$X = \mathcal{V}(F_1, \ldots, F_r) \ , \ F_i \in k[X_1, \ldots, X_n] \ , \ \forall i = 1, \ldots, r$$

$$Y = \mathcal{V}(H_1, \ldots, H_s) \ , \ H_j \in k[Y_1, \ldots, Y_m] \ , \ \forall j = 1, \ldots, s$$

Ainsi $X \times Y = \mathcal{V}(F_1, \ldots, F_r, H_1, \ldots, H_s) \subset \mathbb{A}^{n+m}$ où les $F_i, H_j \in k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$. Ce qui montre que le produit de X et Y est bien un ensemble algébrique affine de $\mathbb{A}^{n+m}$. ❑

Proposition 3.1.1.1. Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques.

❶ Si X est irréductible, alors $\varphi(X)$ est irréductible.

❷ Si $\varphi(X)$ est réductible, c'est-à-dire, $\varphi(X) = Y_1 \cup Y_2$ où $Y_i \subsetneq \varphi(X)$, alors $X = \varphi^{-1}(Y_1) \cup \varphi^{-1}(Y_2)$ avec $\varphi^{-1}(Y_i) \subsetneq X$.

Lemme 3.1.1.2 (voir [Geo76], Chap.2, Lem.2.13)**.** Soient X et Y deux espaces topologiques irréductibles. Considérons que le produit $X \times Y$ a une topologie pour laquelle les applications $q_1 : X \longrightarrow X \times Y, x \longmapsto (x,y)$ $q_2 : Y \longrightarrow X \times Y, y \longmapsto (x,y)$ sont continues pour tous $x \in X$ et $y \in Y$. Alors $X \times Y$ est irréductible.

Preuve. On raisonne par l'absurde. Soient X et Y deux espaces topologiques irréductibles. Supposons que $X \times Y$ est réductible, on peut écrire $X \times Y = F_1 \cup F_2$ où $F_i \subsetneq X \times Y$, $i = 1, 2$ est fermé. On pose

$$X_1 := \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subset F_1\} = \{x \in X \mid (x, y) \in F_1, \forall y \in Y\}.$$

Ce qui donne $X_1 := \bigcap\limits_{y \in Y} q_1^{-1}(F_1)$ avec $q_1^{-1}(F_1) = \{x \in X \mid (x, y) \in F_i\}$. De même $X_2 := \bigcap\limits_{y \in Y} q_1^{-1}(F_2)$. Puisque q_1 est continue pour tout $y \in Y$, $q_1^{-1}(F_1)$ et $q_1^{-1}(F_2)$ sont fermés. Et comme l'intersection quelconque de fermés est un fermé, X_1 et X_2 sont fermés dans X. Vérifions que $X = X_1 \cup X_2$. Soit $x \in X$, on a : $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ or $X \times Y = F_1 \cup F_2$, d'où $\{x\} \times Y \subset F_1 \cup F_2$. Puisque $q_2 : Y \longrightarrow X \times Y$ est continue, et son image $\{x\} \times Y$ est irréductible pour tout $x \in X$. Donc $\{x\} \times Y \subset F_1$ ou $\{x\} \times Y \subset F_2$ i.e $x \in X_1$ ou $x \in X_2$. Ce qui implique $X = X_1 \cup X_2$ avec $X_1 \subsetneq X$ et $X_2 \subsetneq X$. Donc X est réductible. Ce qui est absurde. On a donc montré que $X \times Y$ est un espace topologique irréductible. ❑

Corollaire 3.1.1.1. Soient $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Y \subset \mathbb{A}^m$ deux variétés algébriques affines, alors $X \times Y$ est aussi une variété algébrique affine.

Preuve. Montrer que $X \times Y$ est une variété algébrique affine revient à montrer que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, les applications $q_1 : X \longrightarrow X \times Y$, $x \longmapsto (x, y)$ et $q_2 : Y \longrightarrow X \times Y$, $y \longmapsto (x, y)$ sont continues. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}^n$ et soit $y = (y_1, \ldots, y_m) \in Y \subset \mathbb{A}^m$, alors l'application q_1 est donnée par

$$\begin{array}{rccc} q_1 : & X & \longrightarrow & X \times Y \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \end{array}$$

qui est régulière et donc continue. De la même manière l'application q_2 est continue. Donc d'après le lemme ci-dessus, $X \times Y$ est une variété algébrique affine. ❑

Proposition 3.1.1.2 (Propriété universelle du produit). Soient $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Y \subset \mathbb{A}^m$ deux variétés algébriques affines. Alors

❶ les projections $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ et $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ sont des morphismes.

❷ soit Z une variété. Alors le morphisme $h : Z \longrightarrow X \times Y$ est tout à fait le morphisme $(h_1, h_2) : Z \longrightarrow X \times Y$ défini par $(h_1, h_2)(z) = (h_1(z), h_2(z))$ pour les morphismes $h_1 : Z \longrightarrow X$ et $h_2) : Z \longrightarrow Y$.

Preuve.

❶ Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_m)$ les coordonnées de $\mathbb{A}^n$ et de $\mathbb{A}^m$ respectivement. Alors nous avons la projection $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ qui est donnée par $p_1 := (x_1, \ldots, x_n)$. Puisque p_1 est donnée par n-uplet de fonctions régulières sur $X \times Y$, p_1 est un morphisme. De façon similaire, p_2 est aussi un morphisme.

❷ Soit $h : Z \longrightarrow X \times Y$ un morphisme. On peut écrire $h_1 := (p_1 \circ h) : Z \longrightarrow X$ et $h_2 := (p_2 \circ h) : Z \longrightarrow Y$. Puisque p_1 et p_2 sont des morphismes, alors h_1 et h_2 sont tous deux des morphismes, comme la composition des morphismes est un morphisme. Aussi pour tout $z \in Z$, nous avons $h(z) = (p_1(h(z)), p_2(h(z))) = (h_1(z), h_2(z))$. Ainsi

$h = (h_1, h_2) : Z \longrightarrow X \times Y$ est un morphisme.
Inversement, soient $h_1 : Z \longrightarrow X$ et $h_2 : Z \longrightarrow Y$ des morphismes.
Soit $h_1 = (h_1^{'}, \ldots, h_n^{'})$, $h_i^{'} \in \mathcal{A}(Z)$ et $h_2 = (h_1^{''}, \ldots, h_m^{''})$, $h_i^{''} \in \mathcal{A}(Z)$.
Ainsi $(h_1, h_2) = (h_1^{'}, \ldots, h_n^{'}, h_1^{''}, \ldots, h_m^{''}) : Z \longrightarrow X \times Y$, avec $h_i^{'}, h_j^{''} \in \mathcal{A}(Z)$.

❑

Proposition 3.1.1.3. La variété affine $X \times Y$ avec les morphismes de projection est le produit Π de variétés affines X et Y (dans la catégorie des variétés algébriques affines et plus que cela dans la catégorie de toutes variétés).

Preuve. Soit Z une variété quelconque avec des morphismes $h_1 : Z \to X$ et $h_2 : Z \to Y$. Vu que l'ensemble $X \times Y$ est le produit Π des ensembles X et Y, il existe une et une seule application $h : Z \to \Pi$ telle que $h_1 = p_1 \circ h$ et $h_2 = p_2 \circ h$. C'est l'application $z \mapsto (h_1(z), h_2(z))$. Il s'agit d'un morphisme de variétés, d'où le résultat. ❑

Remarque. Il est important de noter que la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ n'est pas le produit topologique des topologies de Zariski sur les deux espaces. En effet, la topologie produit est générée par les produits des ensembles ouverts de base $\mathcal{U}_F = \mathbb{A}^n - \mathcal{V}(F)$ et $\mathcal{U}_G = \mathbb{A}^m - \mathcal{V}(G)$. Par conséquent, les polynômes qui sont dans $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ mais pas dans $k[X_1, \ldots, X_n]$ ou $k[Y_1, \ldots, Y_m]$ définiront des ensembles algébriques qui sont dans la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$, mais pas dans la topologie du produit. Sauf dans des cas très particuliers, elle est strictement plus fine que la topologie produit.

Proposition 3.1.1.4 (voir [Har77], Chap.I, Exo.I.3.15)**.** Soient $X \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ des variétés affines. Alors $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

Preuve. Soient $X \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ des variétés affines. Supposons que $\dim X = r$ et $\dim Y = s$. On a alors les chaînes $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X$ et $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_s = Y$ de sous-ensembles fermés irréductibles de X et Y respectivement. D'après ([Har77], I, thm. 1.8) ces chaînes peuvent-être étendues aux chaînes $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X \subsetneq X_{r+1} \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = \mathbb{A}^n$ et $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_s = Y \subsetneq Y_{s+1} \subsetneq \cdots \subsetneq Y_m = \mathbb{A}^m$ de sous-ensembles fermés irréductibles de $\mathbb{A}^n$ et de $\mathbb{A}^m$ respectivement. Ainsi nous obtenons une chaîne de sous-ensembles fermés irréductibles

$$X_0 \times Y_0 \subsetneq X_0 \times Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_0 \times Y_s \subsetneq X_1 \times Y_s \subsetneq \cdots \subsetneq X_r \times Y_s \tag{3.1}$$

$$\subsetneq X_r \times Y_{s+1} \subsetneq \cdots \subsetneq X_r \times Y_m \tag{3.2}$$

$$\subsetneq X_{r+1} \times Y_m \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \times Y_m = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}. \tag{3.3}$$

Cette chaîne est maximale, puisque $\dim \mathbb{A}^{n+m} = n + m$. Mais alors la ligne (3.1) de la chaîne doit aussi être maximale, de sorte que $\dim(X \times Y) = r + s = \dim X + \dim Y$. ❑

Il est également facile de voir que si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ sont des variétés quasi-affines, alors il en est de même pour $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$. En effet, on ecrit $X = X_1 \setminus X_0$ et $Y = Y_1 \setminus Y_0$, avec $X_0, X_1 \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y_0, Y_1 \subseteq \mathbb{A}^m$ des sous-variétés. On voit alors facilement que $X \times Y = (X_1, Y_1) \setminus ((X_1 \times Y_0) \cup (X_0 \times Y_1))$.

3.1.2 Produit de variétés algébriques projectives

3.1.2.1 Espace multiprojectif

On désigne par $k[X,Y]$ pour $k[X_0,\ldots,X_n,Y_0,\ldots,Y_m]$.

Définition 3.1.2.1.1. *Un polynôme $F \in k[X,Y]$ est bihomogène de bidegré (d,e) s'il vérifie, pour tous $\lambda,\mu \in k$,*

$$F(\lambda X_0,\ldots,\lambda X_n,\mu Y_0,\ldots,\mu Y_m) = \lambda^d \mu^e F(X_0,\ldots,X_n,Y_0,\ldots,Y_m).$$

Définition 3.1.2.1.2. *Soit S une partie quelconque de $k[X,Y]$ formée de polynômes bihomogènes. On note*

$$\mathcal{V}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid \forall F \in S, F(x,y) = 0\}$$

le sous-ensemble de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ formé des zéros communs à tous les éléments de S. Les sous-ensembles de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ de ce type sont les sous-variétés projectives.

Définition 3.1.2.1.3. *Soit V une partie de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. On appelle idéal de V, et l'on note $\mathfrak{I}(V) = \{F \in k[X,Y] \mid \forall (x,y) \in V, F(x,y) = 0\}$, l'idéal (homogène) engendré par les polynômes homogènes nuls sur V.*

Remarque. Dans un espace multiprojectif $\mathbb{P}^{n_1},\ldots,\mathbb{P}^{n_r}$ les sous-variétés (fermés) sont définies par des polynômes séparément homogènes par rapport aux paquets de variables correspondant à chaque espace projectif.

3.1.2.2 Plongement de Segré

Définition 3.1.2.2.1 (Plongement fermé). *Soit $f : X \longrightarrow Z$ un morphisme de variétés algébriques. On dit que f est un plongement fermé* [1] *si f se factorise à travers une sous-variété $Y \subset Z$ par un isomorphisme $g : X \longrightarrow Y$.*

Exemple 3.1.2.2.1 (Cubique gauche). Le morphisme $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ défini par

$$f(x_0,x_1) = \left(x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3\right)$$

est un plongement fermé, car il se factorise à travers la sous-variété

$$Y = \mathcal{V}\left(X_0X_3 - X_1X_2, X_1^2 - X_0X_2, X_2^2 - X_1X_3\right) \subset \mathbb{P}^3$$

par l'isomorphisme

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & Y \\ & (x_0 : x_1) & \longmapsto & f(x_0,x_1). \end{array}$$

En effet, notons $C = Im(f)$, $G_1 = X_0X_3 - X_1X_2$, $G_2 = X_1^2 - X_0X_2$ et $G_3 = X_2^2 - X_1X_3$.

(i) Montrons que $C = Y$ où $Y = \mathcal{V}(G_1,G_2,G_3)$ est l'intersection des quadriques.

1. On dit aussi immersion fermée.

✔ Montrons que $C \subset Y$.
Soit $p = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \in C$. Il existe alors $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ tel que
$f(x_0 : x_1) = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ i.e. $\begin{cases} y_0 &= x_0^3 \\ y_1 &= x_0^2x_1 \\ y_2 &= x_0x_1^2 \\ y_3 &= x_1^3 \end{cases}$.
On a :

$$\begin{aligned} G_1(p) &= G_1(y_0, y_1, y_2, y_3) = G_1(x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3) \\ &= (x_0^3)(x_1^3) - (x_0^2x_1)(x_0x_1^2) = x_0^3x_1^3 - x_0^3x_1^3 \\ G_1(p) &= 0 \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(p) &= G_2(y_0, y_1, y_2, y_3) = G_1(x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3) \\ &= (x_0^2x_1)^2 - (x_0^3)(x_0x_1^2) = x_0^4x_1^2 - x_0^4x_1^2 \\ G_2(p) &= 0 \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_3(p) &= G_3(y_0, y_1, y_2, y_3) = G_3(x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3) \\ &= (x_0x_1^2)^2 - (x_0^2x_1)(x_1^3) = x_0^2x_1^4 - x_0^2x_1^4 \\ G_3(p) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Ce qui montre que $p \in Y$. D'où $C \subset Y$.
✔ Montrons que $Y \subset C$.
Soit $p = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \in Y$ tel que $\begin{cases} G_1(p) = 0 \\ G_2(p) = 0 \\ G_3(p) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_0y_3 - y_1y_2 = 0 & ① \\ y_1^2 - y_0y_2 = 0 & ② \\ y_2^2 - y_1y_3 = 0 & ③ \end{cases}$.
Il reste à montrer que $p \in C$ i.e. $\begin{cases} y_0 &= x_0^3 \\ y_1 &= x_0^2x_1 \\ y_2 &= x_0x_1^2 \\ y_3 &= x_1^3 \end{cases}$.
Ainsi :
$y_0y_3 - y_1y_2 = (x_0^3)(x_1^3) - (x_0^2x_1)(x_0x_1^2) = x_0^3x_1^3 - x_0^3x_1^3 = 0$, ce qui vérifie ①.
$y_1 - y_0y_2 = (x_0^2x_1)^2 - (x_0^3)(x_0x_1^2) = x_0^4x_1^2 - x_0^4x_1^2 = 0$, ce qui vérifie ②.
$y_2^2 - y_1y_3 = (x_0x_1^2)^2 - (x_0^2x_1)(x_1^3) = x_0^2x_1^4 - x_0^2x_1^4 = 0$, ce qui vérifie ③.
Ce qui montre que $Y \subset C$. On a donc montré que $C = Y$.

(ii) Soit $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in Y$, on a :

$$(S) : \begin{cases} G_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \\ G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \\ G_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_0x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1x_3 = 0 \end{cases}$$

✔ Supposons d'abord $x_0 = 0$.

$$(S) : \begin{cases} x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 = 0 \\ x_2^2 - x_1x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in k \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_1 = \{(0:0:0:x_3) \mid x_3 \in k\} = \mathcal{L}in\,\{(0:0:0:1)\}$$

✔ Supposons maintenant $x_0 \neq 0$.

$(S) : \begin{cases} x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_0x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1x_3 = 0 \end{cases}$

Deux sous-cas se présentent.

1e sous-cas : $x_2 = 0$.

$$(S) : \begin{cases} x_0x_3 = 0 \\ x_1^2 = 0 \\ x_1x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_1^{'} = \{(x_0:0:0:0) \mid x_0 \in k\} = \mathcal{L}in\,\{(1:0:0:0)\}$$

2e sous-cas : $x_2 \neq 0$.

On a : $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ et $x_3 \neq 0$, d'où

$$\begin{aligned}(x_0:x_1:x_2:x_3) &= (x_0:0:0:0) + (0:x_1:0:0) + (0:0:x_2:0) + (0:0:0:x_3) \\ &= x_0(1:0:0:0) + x_1(0:1:0:0) + x_2(0:0:1:0) + x_3(0:0:0:1)\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_2^{'} = \mathcal{L}in\,\{(1:0:0:0),(0:1:0:0),(0:0:1:0),(0:0:0:1)\}\,.$$

Donc

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1^{'} \cup \mathcal{S}_2^{'} = \mathcal{S}_2^{'}.$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \mathcal{S}_i = \mathcal{S}_2 = \mathbb{P}^3 \setminus \{(0:0:0:0)\}\,.$$

Construction du plongement de Segré. La définition du produit de variétés affines dans la section précédente était très naturelle. Pour les variétés projectives, la situation est un peu plus compliquée. Le problème est bien sûr que, alors qu'il existe une identification naturelle $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ en tant qu'ensemble, ce qui nous permet de donner à $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ une structure naturelle de variété affine, il n'existe pas d'identification de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ avec $\mathbb{P}^{n+m}$ en raison des relations d'équivalence définissant les espaces projectifs. L'astuce est d'identifier l'ensemble $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ avec un sous-ensemble dans un espace projectif plus grand que $\mathbb{P}^{n+m}$ et de montrer que ce sous-ensemble est en fait une variété projective. Pour étudier cette situation, nous construisons le plongement de Segré.

On fixe deux entiers naturels n, m strictement positifs et on considère le produit $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ des espaces projectifs de dimensions respectives n et m avec les systèmes de coordonnées homogènes $(x_0 : \cdots : x_n) \times (y_0 : \cdots : y_m)$. Soit $(z_{00} : z_{01} : \cdots : z_{0m} : z_{10} : \cdots : z_{nm})$ le système de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^N$ où $N = (n+1)(m+1) - 1 = nm + n + m$. On peut maintenant définir une application

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & ((x_0:\cdots:x_n),(y_0:\cdots:y_m)) & \longmapsto & (x_0y_0:\cdots:x_0y_m:\cdots:x_ny_0:\cdots:x_ny_m) \end{array}$$

qui est une immersion fermée où $z_{ij} = x_iy_j$ pour tous i et j.

Définition 3.1.2.2.2. *L'immersion*

$$\begin{array}{rcccl} f: & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & ((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)) & \longmapsto & (x_0y_0 : \cdots : x_0y_m : \cdots : x_ny_0 : \cdots : x_ny_m) \end{array}$$

est appelée le ***plongement de Segré*** *de* $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ *dans* $\mathbb{P}^N$*. Elle a été introduite par Corrado Segré en* 1891 *(voir [Seg91]).*

Proposition 3.1.2.1.

❶ L'application f est bien définie.

❷ L'application f est injective.

❸ L'image de f notée $\sum_{nm}$ est la sous-variété projective donnée par les équations $Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj} = 0$ (c'est l'ensemble des matrices $(n+1) \times (m+1)$).

Preuve.

❶ Soient $u = ((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m))$ et $v = \left((x_0^{'} : \cdots : x_n^{'}), (y_0^{'} : \cdots : y_m^{'})\right)$ des éléments de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tels que $(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0^{'} : \cdots : x_n^{'})$ et $(y_0 : \cdots : y_m) = (y_0^{'} : \cdots : y_m^{'})$. A-t-on $f(u) = f(v)$?
On a : $(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0^{'} : \cdots : x_n^{'})$ et $(y_0 : \cdots : y_m) = (y_0^{'} : \cdots : y_m^{'})$, donc il existe $\alpha, \beta \in k^*$ tels que $(x_0^{'} : \cdots : x_n^{'}) = (\alpha x_0 : \cdots : \alpha x_n)$ et $(y_0^{'} : \cdots : y_m^{'}) = (\beta y_0 : \cdots : \beta y_m)$. D'où

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left((x_0^{'} : \cdots : x_n^{'}), (y_0^{'} : \cdots : y_m^{'})\right) = f\left((\alpha x_0 : \cdots : \alpha x_n), (\beta y_0 : \cdots : \beta y_m)\right) \\ &= (\alpha\beta x_0y_0 : \cdots : \alpha\beta x_0y_m : \cdots : \alpha\beta x_ny_0 : \cdots : \alpha\beta x_ny_m) \\ &= (x_0y_0 : \cdots : x_0y_n : \cdots : x_ny_0 : \cdots : x_ny_m) \\ &= f\left((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)\right) = f(u). \end{aligned}$$

Donc f est bien définie.

❷ Soient $u, v \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tels que $f(u) = f(v)$. A-t-on $u = v$?
On a :

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\Rightarrow u = ([(x_i)_i], [(y_j)_j]) \\ v \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\Rightarrow v = \left([(x_i^{'})_i], [(y_j^{'})_j]\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(u) = f(v) &\Rightarrow f\left([(x_i)_i], [(y_j)_j]\right) = f\left([(x_i^{'})_i], [(y_j^{'})_j]\right) \\ &\Rightarrow [(x_iy_j)_{ij}] = \left[(x_i^{'}y_j^{'})_{ij}\right] \end{aligned}$$

Alors pour tous $i = 0, \ldots, n$ et $j = 0, \ldots, m$, il existe $\lambda \in k - \{0\}$ tel que $x_i^{'}y_j^{'} = \lambda x_iy_j$. Soient i_k, j_k avec $x_{i_k}y_{j_k} \neq 0$. Alors $x_{i_k}^{'}y_{j_k}^{'} \neq 0$. En particulier $y_{j_k}^{'} \neq 0$. Donc pour $j = j_k$, on a : $x_i^{'} = \dfrac{\lambda x_iy_{j_k}}{y_{j_k}^{'}} = \left(\dfrac{\lambda y_{j_k}}{y_{j_k}^{'}}\right) x_i$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. Ce qui donne $[(x_i)_i] = \left[(x_i^{'})_i\right]$. De la même manière on montre que $[(y_j)_j] = \left[(y_j^{'})_j\right]$. On a donc montré que f est injective.

❸ Notons $X = \mathcal{V}\left(Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj} \mid i,k = 0,\ldots,n \text{ et } j,l = 0,\ldots,m\right)$. Le problème revient à montrer que $\sum_{nm} = X$.
Montrons d'abord que $\sum_{nm} \subset X$.
Soit $[(x_i y_j)_{ij}] \in \sum_{nm}$, on a alors : $x_i y_j x_k y_l - x_i y_l x_k y_j = 0$ pour tous $i,k = 0,\ldots,n$ et $j,l = 0,\ldots,m$. Donc $[(x_i y_j)_{ij}] \in X$. Ce qui montre que $\sum_{nm} \subset X$.
Montrons maintenant que $X \subset \sum_{nm}$.
Soit $[(z_{ij})_{ij}] \in X$. On choisit k,l de sorte que $z_{kl} \neq 0$. Alors

$$[(z_{ij})_{ij}] = [(z_{ij}z_{kl})_{ij}]\,. \tag{3.4}$$

Puisque $[(z_{ij})_{ij}] \in X$, alors $z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = 0 \Leftrightarrow z_{ij}z_{kl} = z_{il}z_{kj}$. Donc d'après (3.4), on a : $[(z_{ij})_{ij}] = [(z_{il}z_{kl})_{ij}] = f\left([(z_{il})_i], [(z_{kj})_j]\right) \in \sum_{nm}$, car $[(z_{il})_i] \in \mathbb{P}^n$ et $[(z_{kj})_j] \in \mathbb{P}^m$. Ce qui montre que $\sum_{nm} \subset X$. On a donc montré que $\sum_{nm} = X$.

❑

Corollaire 3.1.2.2.1. L'application $f : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to X, \quad ([(x_i)_i], [(y_j)]) \mapsto f\left([(x_i)_i], [(y_j)]\right)$ est un isomorphisme.

D'après le corollaire 3.1.2.2.1, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ est une sous-variété et comme un produit d'irréductibles est irréductible d'après le lemme 3.1.1.2, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ est une variété projective.

Exemple 3.1.2.2.2. Par le plongement de Segré si $m = n = 1$, alors l'image de l'application $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$, définie par

$$f\left((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)\right) = (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1)$$

est la quadrique d'équation $X_{00}X_{11} - X_{01}X_{10} = 0$.

En effet, notons $\sum_{11} = Imf$ et $F = X_{00}X_{11} - X_{01}X_{10}$.
Le problème revient à montrer que $\sum_{11} = \mathcal{V}(F)$.

(i) Montrons que $\sum_{11} \subset \mathcal{V}(F)$.
Soit $P = (z_{00} : z_{01} : z_{10} : z_{11}) \in C$, il existe alors $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tel que $f\left((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)\right) = (z_{00} : z_{01} : z_{10} : z_{11})$ i.e. $\begin{cases} z_{00} = x_0y_0 \\ z_{01} = x_0y_1 \\ z_{10} = x_1y_0 \\ z_{11} = x_1y_1 \end{cases}$.
On a :

$$F(P) = F(z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}) = z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = (x_0y_0)(x_1y_1) - (x_0y_1)(x_1y_0) = 0,$$

donc P est un zéro de F i.e. $P \in \mathcal{V}(F)$. Ce qui montre ainsi que $\sum_{11} \subset \mathcal{V}(F)$.

(ii) Montrons que $\mathcal{V}(F) \subset \sum_{11}$.
Soit $P = (z_{00} : z_{01} : z_{10} : z_{11}) \in \mathcal{V}(F)$ tel que $F(P) = 0$ i.e. $z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = 0$ ①.
Il reste à montrer que $P = (z_{00} : z_{01} : z_{10} : z_{11}) \in \sum_{11}$ i.e. $\begin{cases} z_{00} = x_0y_0 \\ z_{01} = x_0y_1 \\ z_{10} = x_1y_0 \\ z_{11} = x_1y_1 \end{cases}$.
Ainsi : $z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = (x_0y_0)(x_1y_1) - (x_0y_1)(x_1y_0) = 0$, ce qui vérifie ①.
Donc $P \in \sum_{11}$. Ce qui montre ainsi que $\mathcal{V}(F) \subset \sum_{11}$. On a donc montré que $\sum_{11} = \mathcal{V}(F)$.

Interprétation géométrique

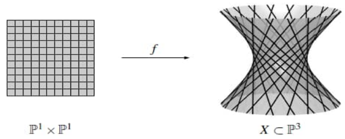

FIGURE 3.1 – Un hyperboloïde à une nappe.

Exemple 3.1.2.2.3. Par le plongement de Segré si $n = 1$ et $m = 2$, alors l'image de l'application $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$, définie par

$$f\left((x_0 : x_1), (y_0 : y_1 : y_2)\right) = (x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_1y_2)$$

est la sous-variété $\mathcal{V}\left(X_iX_{3+j} - X_jX_{3+i} \mid 0 \leq i, j \leq 2\right)$ de $\mathbb{P}^5$.

En effet, notons $\sum_{12} = Imf$, $F_1 = X_0X_4 - X_1X_3$, $F_2 = X_0X_5 - X_2X_3$ et $F_3 = X_1X_5 - X_2X_4$. Le problème revient à montrer que $\sum_{12} = \mathcal{V}(F_1, F_2, F_3)$.

(i) Montrons que $\sum_{12} \subset \mathcal{V}(F_1, F_2, F_3)$.

Soit $P = (z_{00} : z_{01} : z_{02} : z_{10} : z_{11} : z_{12}) \in C$, il existe alors $((x_0 : x_1), (y_0 : y_1 : y_2)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ tel que

$$f\left((x_0 : x_1), (y_0 : y_1 : y_2)\right) = (z_{00} : z_{01} : z_{02} : z_{10} : z_{11} : z_{12}) \text{ i.e. } \begin{cases} z_{00} = x_0y_0 \\ z_{01} = x_0y_1 \\ z_{02} = x_1y_0 \\ z_{10} = x_1y_1 \\ z_{11} = x_1y_1 \\ z_{12} = x_1y_2 \end{cases}.$$

On a :

$$F_1(P) = F_1(z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{10}, z_{11}, z_{12}) = z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = (x_0y_0)(x_1y_1) - (x_0y_1)(x_1y_0) = 0,$$

$$F_2(P) = F_2(z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{10}, z_{11}, z_{12}) = z_{00}z_{12} - z_{02}z_{10} = (x_0y_0)(x_1y_2) - (x_0y_2)(x_1y_0) = 0,$$

$$F_3(P) = F_2(z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{10}, z_{11}, z_{12}) = z_{01}z_{12} - z_{02}z_{11} = (x_0y_1)(x_1y_2) - (x_0y_2)(x_1y_1) = 0,$$

donc P est un zéro commun de F_1, F_2 et F_3 i.e. $P \in \mathcal{V}(F_1, F_2, F_3)$. Ce qui montre ainsi que $\sum_{12} \subset \mathcal{V}(F_1, F_2, F_3)$.

(ii) Montrons que $\mathcal{V}(F_1, F_2, F_3) \subset \sum_{12}$.

Soit $P = (z_{00} : z_{01} : z_{02} : z_{10} : z_{11} : z_{12}) \in \mathcal{V}(F_1, F_2, F_3)$ tel que

$$\begin{cases} F_1(P) = 0 \\ F_2(P) = 0 \\ F_3(P) = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = 0 \quad ① \\ z_{00}z_{12} - z_{02}z_{10} = 0 \quad ② \\ z_{01}z_{12} - z_{02}z_{11} = 0 \quad ③ \end{cases}.$$

Il reste à montrer que $P = (z_{00} : z_{01} : z_{02} : z_{10} : z_{11} : z_{12}) \in \sum_{12}$ i.e. $\begin{cases} z_{00} = x_0y_0 \\ z_{01} = x_0y_1 \\ z_{02} = x_0y_2 \\ z_{10} = x_1y_0 \\ z_{11} = x_1y_1 \\ z_{12} = x_1y_2 \end{cases}$.

Ainsi :
$z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10} = (x_0y_0)(x_1y_1) - (x_0y_1)(x_1y_0) = x_0x_1y_0y_1 - x_0x_1y_0y_1 = 0$, ce qui vérifie ①.
$z_{00}z_{12} - z_{02}z_{10} = (x_0y_0)(x_1y_2) - (x_0y_2)(x_1y_0) = x_0x_1y_0y_2 - x_0x_1y_0y_2 = 0$, ce qui vérifie ②.
$z_{01}z_{12} - z_{02}z_{11} = (x_0y_1)(x_1y_2) - (x_0y_2)(x_1y_1) = x_0x_1y_1y_2 - x_0x_1y_1y_2 = 0$, ce qui vérifie ③.
Donc $P \in \sum_{12}$. Ce qui montre ainsi que $\mathcal{V}(F_1, F_2, F_3) \subset \sum_{12}$. On a donc montré que $\sum_{12} = \mathcal{V}(F_1, F_2, F_3)$.

Corollaire 3.1.2.2.2. Un produit de variétés projectives est une variété projective.

Preuve. Soient X et Y des variétés projectives. Par définition, elles sont isomorphes respectivement à des sous- variétés de $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{P}^m$. Alors le produit $X \times Y$ est isomorphe à une sous-variété de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Comme celle-ci est une variété projective par le plongement de Segré, on en déduit que $X \times Y$ est aussi une variété projective. ❑

Proposition 3.1.2.2 (voir [Har77], Chap.I, Exo.I.3.16)**.** Soient $X \subseteq \mathbb{P}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ des variétés projectives. Alors $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

Soit X une variété algébrique. D'après la propriété universelle du produit $X \times X$, il existe un morphisme $X \longrightarrow X \times X$ qui se projette sur (id_X, id_X). Ce morphisme est appelé le morphisme diagonal ; l'image de l'application continue sous-jacente au morphisme diagonal est la diagonale Δ de $X \times X$.

Définition 3.1.2.1. *Soit X une variété algébrique. On dit que X est une variété séparée si la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ est fermée dans $X \times X$.*

Remarque. Cette propriété n'a rien à voir avec la séparation au sens usuel, toujours pour la même raison : la topologie sur le produit n'est pas la topologie produit.

Exemple 3.1.2.1. L'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est une variété algébrique séparée. En effet, montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est une variété algébrique séparée revient à montrer que la diagonale $\Delta_{\mathbb{P}^n} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ est fermée.
On a :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{P}^n} &= \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \mid x = y\} \\ &= \left\{((x_1 : \cdots : x_n), (y_1 : \cdots : y_n)) \mid rang\left[\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}\right] = 1\right\} \\ &= \{((x_1 : \cdots : x_n), (y_1 : \cdots : y_n)) \mid x_iy_j - x_jy_i = 0, \forall i, j = 1, \cdots, n\} \\ &= \mathcal{V}(Z_{ij} - Z_{ji} \mid i, j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

donc $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ est fermée. Ce qui montre que l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est une variété algébrique séparée.

3.2 Autres constructions

3.2.1 Applications rationnelles

D'une manière intuitive, on a vu que les fonctions régulières sur une variété X sont des morphismes $X \to k$, et on peut penser que les applications rationnelles dans X sont des morphismes qui sortent d'un ouvert non vide $U \subset X \to k$.

Lemme 3.2.1.1. Soient X et Y deux variétés, soit $\varphi, \psi : X \to Y$ deux morphismes. S'il existe un ouvert non vide $U \subset X$ tel que φ et ψ coïncident sur U, alors φ et ψ coïncident.

Preuve. Comme $Y \subset \mathbb{P}^n$, en considérant $\varphi, \psi : X \to Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ on peut supposer que $Y = \mathbb{P}^n$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi \times \psi : & X & \to & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N \\ & p & \mapsto & (\varphi(p), \psi(p)) \end{array}$$

avec le plongement de Segré. Ceci est effectivement un morphisme car toutes les composantes pour cela sont polynômiales. La diagonale $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ (on pose $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ avec les coordonnées $(x_0 : \cdots : x_n) \times (y_0 : \cdots : y_n)$ définie par les équations $X_i Y_j = X_j Y_i$ pour tous $i, j = 0, \ldots, n$) est fermée dans $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.
Alors $\varphi \times \psi(U) \subset \Delta$ et comme U est dense dans X et $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ est fermée, on a $\varphi \times \psi(X) \subset \Delta$ et alors φ et ψ coïncident. ❑

Définition 3.2.1.1 (Application rationnelle). *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles. Considérons les couples (U, φ_U) où U est un ouvert dense de X et $\varphi_U : U \longrightarrow Y$ une application régulière. On dit que les couples (U, φ_U) et (V, φ_V) vérifient la relation $\perp$ et l'on note $(U, \varphi_U) \perp (V, \varphi_V)$ si $\varphi_U = \varphi_V$ sur $U \cap V$. Une application rationnelle φ de X dans Y est une classe d'équivalence pour la relation $\perp$. En d'autres termes*

$$\varphi = \overline{(U, \varphi_U)} = \{(V, \varphi_V) \mid (U, \varphi_U) \perp (V, \varphi_V)\}.$$

Une telle application est notée $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

Définition 3.2.1.2 (Fonction rationnelle). *On appelle fonction rationnelle sur X, une application rationnelle de X à valeurs dans k.*

Définition 3.2.1.3. *Une application rationnelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ est dite dominante si son image est dense dans Y, i.e. $\overline{\varphi(X)} = Y$.*

Définition 3.2.1.4. *On dit qu'une application rationnelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ est définie en un point $x \in X$, s'il existe un représentant régulier défini sur un voisinage ouvert de x dans X.*

Remarque. L'utilisation du symbole $\dashrightarrow$ à la place du symbole $\to$ est due au fait que l'application φ peut ne pas être une application de X vers Y au sens habituel car elle peut ne pas être définie partout sur X. L'ensemble des points de X, pour lesquels φ est définie est un ouvert dense de X, que l'on appelle parfois domaine de définition.

Définition 3.2.1.5 (Application birationnelle). *On appelle application birationnelle, une application rationnelle $X \dashrightarrow Y$ qui est un isomorphisme entre un ouvert de X et un ouvert de Y.*

On dit alors que X et Y sont birationnellement isomorphe. Une application régulière qui a cette propriété est appelée morphisme birationnel.

Définition 3.2.1.6. *On dit qu'une variété irréductible X est rationnelle s'il existe une application birationnelle d'un espace projectif (ou d'un espace affine) sur X.*

On dit que X est unirationnelle s'il existe une application rationnelle dominante d'un espace projectif sur X.

3.2.2 Éclatement

L'éclatement est une transformation jouant un rôle important en géométrie, car il permet de résoudre des singularités, de relier des variétés birrationnellement équivalentes, et de construire des variétés possédant des propriétés inédites. Nous l'étudierons pour le cas des variétés affines et (quasi-)projectives, en un point, et le long d'un idéal et d'une sous-variété.

Soient X et Y des variétés quasi-projectives.
Le graphe Γ_φ d'une application rationnelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ est l'adhérence de Zariski dans $X \times Y$ du graphe de $\varphi_{|U}$ où U est un sous-ensemble ouvert et dense de X :

$$\Gamma_\varphi = \overline{\{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\}} \subset X \times Y.$$

Notons que cela est indépendant du choix de U et que Γ_φ est birationnellement équivalent à X. En particulier, si l'application φ est régulière sur X, alors Γ_φ est le graphe ordinaire :

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

3.2.2.1 Éclatement dans $\mathbb{A}^n$

Soient $X \subset \mathbb{A}^n$ une variété algébrique affine et $I \subset k[X]$ l'idéal engendré par les polynômes $F_0, \dots, F_{n-1} \in k[X]$. Considérons l'application rationnelle

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & X & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ & x & \longmapsto & (F_0 : \cdots : F_{n-1}). \end{array}$$

Remarque. L'application φ est régulière sur $X \setminus \mathcal{V}(I)$ mais ne l'est pas en général sur tout X.

Définition 3.2.2.1.1 (Éclatement d'une variété le long d'un idéal). *L'éclatement de X le long de I noté $Bl_I(X)$ est le graphe $\Gamma_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$ de φ, avec la projection naturelle*[2] *$\pi : Bl_I \longrightarrow X$ sur le premier facteur.*

$$\begin{tikzcd} Bl_I \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & X \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

2. Parfois on dira aussi que le morphisme π est l'éclatement de X le long de I.

Définition 3.2.2.1.2 (Éclatement d'une variété le long d'une sous-variété). *Soit V une sous-variété de la variété algébrique affine X. L'éclatement de X le long de V est l'éclatement le long de l'idéal radical*

$$\mathfrak{I}(V) = \{F \in k[X_0, \ldots, X_{n-1}] \mid \forall x \in V, F(x) = 0\},$$

que nous notons $Bl_V(X)$.

L'inverse $\pi^{-1}(V) \subset Bl_V(X)$ qui n'est autre qu'une hypersurface est appelé **diviseur exceptionnel** de l'éclatement. Il est de codimension 1 dans Bl_V.
Soit $W \subset X$ une sous-variété de X autre que V. Si W n'intersecte pas V, alors il n'est pas affecté par l'éclatement de X le long de V. Cependant, si W intersecte V, alors l'ensemble $\widetilde{W} = \overline{\pi^{-1}(W \setminus V)}$ est appelé la **transformée propre (ou stricte)** de W, et l'ensemble $\pi^{-1}(W) = \pi^{-1}(V) \cup \overline{\pi^{-1}(W \setminus V)}$, la **transformée totale** de W. L'application π est un morphisme projectif birationnel et $Bl_V(X) \setminus \pi^{-1}(V)$ est isomorphe à $X \setminus V$. Cela veut dire que l'éclatement laisse X inchangé excepté le fait que l'on remplace V par $\pi^{-1}(V)$.

Exemple 3.2.2.1.1. (Éclatement de $\mathbb{A}^n$ en 0). Considérons l'application rationnelle

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{A}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1 : \cdots : x_n) \end{array}$$

avec les x_i non tous nuls. Le graphe Γ_φ de φ est :

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi &= \left\{((x_1, \ldots, x_n), (y_1 : \cdots : y_n)) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in (y_1 : \cdots : y_n)\right\} \\ &= \left\{((x_1, \ldots, x_n), (y_1 : \cdots : y_n)) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid rang\left[\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}\right] \leq 1\right\} \\ &= \mathcal{V}\left(mineurs\ d'ordre\ 2\ de\ \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \\ &= \mathcal{V}\left(x_i y_j - x_j y_i \mid 1 \leq i < j \leq n\right) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}. \end{aligned}$$

L'éclatement de $\mathbb{A}^n$ en $0 = (0, \ldots, 0)$ est $Bl_0(\mathbb{A}^n) = \Gamma_\varphi$ avec la projection naturelle $\pi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{A}^n$ restreinte à Γ_φ.
Le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est obtenu en posant $x = 0$ dans 1.1. Ainsi,

$$\pi^{-1}(0) = \left\{(0, y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}\right\} \cong \mathbb{P}^{n-1}.$$

En d'autres termes, l'éclatement de $\mathbb{A}^n$ laisse presque tous les points inchangés excepté le point 0 qui a été remplacé par $\mathbb{P}^{n-1}$ qui est le diviseur exceptionnel, correspondant à la pente des droites passant par 0 dans $\mathbb{A}^n$.

Cas particulier. Pour représenter géométriquement cette notion, nous allons étudier l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ en 0. L'éclatement de $\mathbb{A}^2$ en $0 = (0,\ 0)$ est $Bl_0\left(\mathbb{A}^2\right) = \mathcal{V}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ où y_1 et y_2 sont les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1$ avec la projection $\pi : Bl_0\left(\mathbb{A}^2\right) \longrightarrow \mathbb{A}^2$ sur le premier facteur.

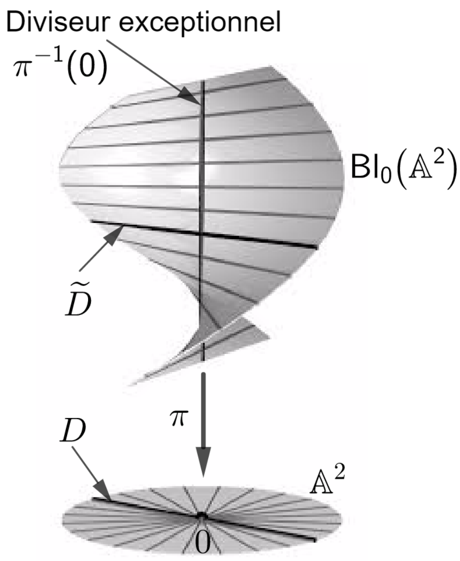

FIGURE 3.2 – Éclatement de $\mathbb{A}^2$ à l'origine (voir [Gat19]).

Remarque. Pour éclater $\mathbb{A}^n$ en un point p différent de l'origine, on décale l'origine vers p par la transformation $x \longmapsto x - p$ et on obtient :

$$Bl_p(\mathbb{A}^n) = \mathcal{V}\left((x_i - p_i)y_j - (x_j - p_j)y_i \mid 1 \leq i, j \leq n\right) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

3.2.2.2 Éclatement dans $\mathbb{P}^n$

Soient $X \subset \mathbb{P}^n$ et $Y \subset \mathbb{P}^n$ des variétés quasi-projectives. Alors les clôtures projectives $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont projectives. Soit $I \subset k[\overline{X}]$ un idéal homogène engendré par $F_0, \ldots, F_{r-1} \in k[\overline{X}]$ de même degré.
On définit de même une application rationnelle φ

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \overline{X} & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{r-1} \\ & x & \longmapsto & (F_0(x) : \cdots : F_{r-1}(x)). \end{array}$$

Définition 3.2.2.2.1. (Éclatement d'une variété projective le long d'un idéal homogène ou d'une sous-variété).

❶ *L'éclatement de $\overline{X}$ le long de I, noté $Bl_I(\overline{X})$ est la projection $\pi : Bl_I(\overline{X}) \longrightarrow \overline{X}$ où $Bl_I(\overline{X}) \subset \overline{X} \times \mathbb{P}^{n-1}$ est la variété éclatée de $\overline{X}$ le long de I qui est le graphe Γ_φ de φ.*
Si $\overline{W} \subset \overline{X}$ est une sous-variété projective de $\overline{X}$, l'éclatement de $\overline{X}$ le long de $\overline{W}$, noté $Bl_{\overline{W}}(\overline{X})$ est l'éclatement de $\overline{X}$ le long de l'idéal homogène radical $\mathfrak{I}(\overline{W})$.

❷ *L'éclatement de X le long de I, noté $Bl_I(X)$ est la projection $\pi : Bl_I(X) \longrightarrow \overline{X}$ où $Bl_I(X) = Bl_I(\overline{X}) \cap (X \times \mathbb{P}^{n-1})$ est la variété éclatée de X le long de I.*
Si $W \subset X$ est une sous-variété quasi-projective de X, la variété éclatée de X le long de W, est $Bl_W(X) = Bl_{\overline{W}}(\overline{X}) \cap (X \times \mathbb{P}^{n-1})$.

Exemple 3.2.2.2.1.

❶ **Éclatement de $\mathbb{P}^n$ en un point p.** Soit $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ la projection de centre un point $p \in \mathbb{P}^n$ et $\Gamma_\varphi \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ le graphe de φ. Comme dans le cas affine, l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ en p est la projection $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ où $\widetilde{\mathbb{P}^n} = \Gamma_\varphi$ est la variété éclatée de $\mathbb{P}^n$ en p. Comme précédemment, π est un isomorphisme de $\widetilde{\mathbb{P}^n} \setminus \pi^{-1}(p)$ sur $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ et la fibre $\pi^{-1}(p)$ au-dessus de p, isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

❷ **Éclatement d'une surface projective en un point.** Soient $C \subset \mathbb{P}^3$ la surface quadrique définie par $C = \mathcal{V}(x_0x_3 - x_1x_2)$ et $p = (0 : 0 : 0 : 1) \in C$. Considérons la projection depuis p suivante

$$\begin{array}{cccc} \varphi_p & : & C & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & & (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \longmapsto & (x_0 : x_1 : x_2) \end{array} .$$

L'éclatement de C en p est la variété

$$Bl_p(C) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \begin{array}{c} y_0x_1 - y_1x_0 = 0 \\ y_0x_2 - y_2x_0 = 0\,, y_1x_2 - y_2x_1 = 0 \\ x_3y_0 - y_2x_1 = 0 \end{array} \right\}$$

contenue dans $C \times \mathbb{P}^2$avec la projection $\pi : Bl_p(C) \longrightarrow C$ où $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, $y = (y_0 : y_1 : y_2)$, la première équation est l'équation (ou celle) de C, la seconde vient de $\varphi_p(x) = y$ et la dernière vient du graphe de la restriction de φ_p à $C \setminus \{p\}$.
Dans ces équations, si on fait $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, il ne reste plus que $y_0 = 0$, ce qui donne une droite projective : le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

CONCLUSION

Le plongement de Segré est un outil d'une importance capitale en géométrie algébrique, mais aussi dans de nombreuses parties des mathématiques notamment en géométrie différentielle (voir, [Che13]). Dans ce mémoire, après avoir défini les outils nécessaires et rappelé leurs propriétés, on a montré qu'un moyen important de transformer un produit de variétés algébriques en une variété algébrique est le plongement de Segré dont une des conséquences est que le produit de variétés projectives est une variété projective. L'astuce était de considérer l'application $f : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{nm+n+m}$ définie par

$$f\left((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)\right) = (x_0 y_0 : \cdots : x_0 y_m : \cdots : x_n y_m)$$

et de vérifier qu'elle est injective. Puis en déduire que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ est isomorphe à une variété projective, donc $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ est une variété projective.

BIBLIOGRAPHIE

[BH01] Dorje C Brody and Lane P Hughston. Geometric quantum mechanics. *Journal of geometry and physics*, 38(1) :19–53, 2001.

[Che13] Bang-Yen Chen. Segre embedding and related maps and immersions in differential geometry. *arXiv preprint arXiv :1307.0459*, 2013.

[CLO15] D. Cox, J. Little, and D. O'shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms : An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, third edition, 2015.

[Dji21] Nestor Djintelbe. Compactification du groupe des déplacements de l'espace et utilisation de points à l'infini dans des problèmes de cinématique. 2021.

[Ful08] W. Fulton. *Algebraic Curves : An Introduction to Algebraic Geometry*. 2008.

[Gat19] A. Gathmann. Birational Maps and Blowing Up. https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2019/alggeom-2019-c9.pdf, 2019.

[Geo76] D Mumford Algebraic Geometry. I, complex projective varieties, berlin, heildelberg, 1976.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52. Springer-Verlag New York, 1977.

[IS01] SP Inamdar and NS Narasimha Sastry. Codes from veronese and segre embeddings and hamada's formula. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 96(1) :20–30, 2001.

[Per95] D. Perrin. *Géométrie algébrique : Une introduction*. InterEditions et CNRS Editions, 1995.

[Sch00] Hans Georg Schaathun. The weight hierarchy of product codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(7) :2648–2651, 2000.

[Seg91] Corrado Segre. Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 5(1) :192–204, 1891.

[Sha13] Igor R Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1 : Varieties in Projective Space, 3rd ed.* SpringerLink : Bücher. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[SKKT00] Karen E Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, and William Traves. Affine algebraic varieties. In *An Invitation to Algebraic Geometry*, pages 1–13. Springer, 2000.

[SV99] José MM Senovilla and Raül Vera. Segre decomposition of spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 16(4) :1185, 1999.