UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées
OPTION : Equations aux Dérivées Partielles

Sujet :

Étude du phénomène d'érosion-sédimentation autour d'un fleuve

Présenté par : **Alioune BA**

Sous la direction de : **Docteur Timack NGOM**
Sous la supervision de : **Professeur Edouard DIOUF**

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Université**
Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président	UASZ
Edouard DIOUF	Professeur Assimilé	Superviseur	UASZ
Mouhamadou S. GOUDIABY	Maitre de conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Mamadou GUEYE	Maitre de conférences Assimilé	Examinateur	UASZ
Timack NGOM	Maitre de conférences Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2020-2021

TABLE DES MATIÉRES

Remerciements et dédicaces :

Tout d'abord, je rend grâce à Dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.
Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire Docteur Timack NGOM, Maitre de Conférences Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, d'avoir accepté de diriger ce travail. Je le suis très reconnaissant pour sa disponibilité et de m'avoir, par son aide et ses précieux conseils, amené à faire preuve d'exigence et de pédagogie scientifique. Sa compétence et sa bonne humeur ont contribué à rendre le climat du travail plus agréable.

Je joins ces remerciements à Monsieur Salomon SAMBOU, Professeur Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor pour l'honneur qu'il m'a fait d'être le président du jury.
Je joins aussi ces remerciements à Monsieur Edouard DIOUF, Professeur Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir supervisé ce travail et d'accepter de faire part au jury.
Je joins aussi ces remerciements à Monsieur Mouhamadou Samsidine GOUDIABY Maitre de Conférences Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor et à Monsieur Mamadou GUEYE Maitre de Conférences Assimilé, membres du jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire part au Jury et d'avoir consacré de leur temps pour examiner ce travail.

Je tiens aussi à remercier profondément tous les professeurs du département de mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont dispensé, leur vision des mathématiques reste un modèle pour nous.

Un grand merci à mes parents et à tous les membres de ma famille qui ont rendu possible l'aboutissement de ce travail.
Mes vifs remerciements vont également à ma grande sœur Lazousse Mint Khouwa, à ma petite sœur Siga et à mon petit frère Amadou Codione.
Je remercie aussi mon oncle Abdou Karim DIOUF pour ses prières.

Je remercie vivement mes amis du Lycée Abdoulaye Sadji depuis Rufisque : Papa Alassane NDIAYE, Bathie NDIAYE, Mame Beytir NDIAYE, Mouhamadou Falillou DRAME, Elhadji Malick MAR, Abdou DIA, Alpha NDOYE, Birame NDOYE, Elhadji Madior NDOYE et Assane GADIO.
Je joins ces remerciements à mes amis de l'Université Assane Seck de Ziguinchor : Samba Alassane BA, Serigne Saliou DIALLO, Cheikh FALL, Abdou NDIAYE, Elimane Malick SAMB, Abdou Aziz NDIAYE et Ansu SANE.
Mes vifs remerciements vont aussi également à tous mes camarades de promo et plus particulièrement : Mamadou Korka BA, Daouda DIACK, Seydi Djamil DIOUF, Fatou DIENG.
Je tiens aussi à remercier Docteur Sonhaibou SAMBOU pour ses précieux conseils et de nous avoir hébergé au niveau de l'Institut Polytechnique de Ziguinchor.

Je ne saurais terminer cette partie sans dire merci à un être qui m'est cher, à une personne merveilleuse qui m'a aidé à m'épanouir à chaque fois que l'occasion se présente, je veux nommer ma femme Adama DIOUF.

Je dédie ce travail :

- A ma défunte sœur Yacine
- A mon père Mamadou Seydou BA
- A mon père et mon ami Omar BA
- A ma maman Sokhna Rokhaya DIOUF
- A ma femme Adama DIOUF

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est de présenter un autre moyen d'obtenir les équations de Saint-Venant-Exner en se basant sur les travaux de NGOM et ERSOY [12].
D'abord, on considère un couplage particule-fluide dont le mouvement des particules est régi par l'équation de Vlasov incluant un terme de gravité et l'évolution du fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes compressibles avec un tenseur de viscosité anisotrope.
Ce couplage sera appelé le modèle mélange.
Ensuite, on fait un développement asymptotique sur le modèle mélange.
Puis on intègre l'équation de Vlasov sans dimension afin d'obtenir les équations de type Euler et par la suite on les additionne avec les équations de Navier-Stokes compressibles sans dimension.
On obtient alors les équations de Navier-Stokes compressibles qui prend en compte la densité des sédiments.
Le modèle obtenu sera appelé le modèle intermédiaire.
Et enfin, on fait une analyse asymptotique couche mince sur le modèle intermédiaire afin d'obtenir notre modèle asymptotique qu'on va par la suite intégrer suivant la verticale tout en tenant compte de la faible profondeur du fleuve par rapport à son étendu.
Alors, on obtient les équations de Saint-Venant couplées à une équation de transport de sédiments.

Mots-clés : Equation de Vlasov, équations de Navier-Stokes, interaction fluide-particules, Viscosité anisotrope, Saint-Venant-Exner, loi barotrope modifiée.

Introduction :

Tout fleuve a son propre lit. Mais il arrive que la population y jette ses ordures, que les industries y déversent des produits chimiques comme les hydrocarbures ou les PCB (polychlorophényles) ou que les affluents et l'atmosphére y transportent des produits phytosanitaire/pesticides (herbicides, insecticides, fongicides) contenus dans les engrais et utilisés dans l'agriculture créant ainsi des sédiments.
Ainsi, les sédiments qui sont contaminés, affectent la qualité de l'eau, sont souvent source de maladies et viennent perturber l'ecosysteme.
De plus, à long terme, le lit sous l'action de la sédimentation se déforme et peut engendrer des problèmes de navigabilité.
Par conséquent, il est d'un grand intérêt d'avoir des modèles mathématiques de sédimentation qui vont nous permettre de prédire et simuler l'évolution de la morphologie du lit d'un cours d'eau au fil du temps.
A cet effet, de nombreux modèles mathématiques sont proposés.
Le plus souvent utilisé est celui appelé Saint-Venant-Exner.
Ce modèle est composé des équations de Saint-Venant qui régissent la partie hydrodynamique et d'une équation de transport modélisant la partie morphodynamique, c'est à dire le mouvement du fond.
De ce fait les équations de Saint-Venant sont couplées à l'équation d'Exner par le terme de topographie.
Les équations Saint-Venant sont données par :

$$\begin{cases} \partial_t h + div(q) = & 0, \\ \partial_t q + div\left(\dfrac{q \otimes q}{h}\right) + \nabla\left(gh^2/2\right) = & -gh\nabla b \end{cases} \tag{1}$$

et l'équation d'Exner est donnée par :

$$\partial_t b + \xi div\Big(q_b(h, q)\Big) = 0, \tag{2}$$

où h désigne la hauteur de l'eau, $q = hu$ le débit d'eau, $\xi = 1/(1-\psi)$ la porosité de la couche de sédiments et q_b le flux de transport de sédiment qui est une loi empirique donnée. Parmi ces lois (pour n'en citer que quelques-unes), on trouve dans la littérature :

- l'équation de Grass [7],
- L'équation de Meyer-Peter et Muller [11].

Ce modèle a été étudié numériquement, par exemple dans [14, 5] et mathématiquement pour la version visqueuse, par exemple dans [15, 4] en utilisant les résultats bien connus [13, 8, 1, 2, 3, 10].
Ce manuscrit étant un des travaux de NGOM et ERSOY [12], présente un autre moyen d'obtenir les équations de Saint-Venant-Exner en utilisant une autre approche.
Le document est organisé comme suit :
► dans le chapitre 1, on énonce les outils mathématiques utilisés,
► dans le chapitre 2, on fait le mélange entre l'équation de Vlasov avec un terme de gravité et les équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes,
► dans le chapitre 3, on fait un développement asymptotique sur le modèle mélange.

Du coup, on part de Vlasov aux équations d'Euler compressibles puis on fait la somme entre ces équations et les équations de Navier-Stokes compressibles pour obtenir notre modèle intermédiaire.
Après cela, on fait une analyse asymptotique couche mince sur le modèle intermédiaire pour aboutir à notre modèle asymptotique.
Et par la suite, on intègre suivant la verticale le modèle asymptotique tout en tenant compte de la faible profondeur du fleuve par rapport à son étendu. On obtient ainsi les équations de Saint-Venant couplées à une équation de transport.

Chapitre 1

I Préliminaires et notions de bases

I.1 Rappels de quelques opérateurs différentiels

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 1$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On considère les fonctions $v : \Omega \to \mathbb{R}$ et $w : \Omega \to \mathbb{R}^d$ régulière avec $w(\mathbf{x}) = (w_1(\mathbf{x}), ..., w_d(\mathbf{x}))$ pour $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. On définit les opérateurs différentiels suivants :

1. Opérateur nabla (∇) :
   - $\nabla v = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial v}{\partial x_d}\right) \in \mathbb{R}^d$ est le gradient de v (un vecteur).
   - $\nabla \mathbf{w} = \left(\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq d} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial w_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial w_d}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial w_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de w.
   - $\Big(\mathbf{w} \cdot \nabla\Big)\mathbf{w} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur.
2. Divergence :
   - $div(\mathbf{w}) = \nabla \cdot \mathbf{w} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}$ est un scalaire.
   - Si $M = M\Big(\mathbf{x}\Big)$ désigne une matrice de taille $d \times d$ définie pour $\mathbf{x}$ dans Ω, alors $div(M) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial M_{1j}}{\partial x_j}, ..., \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial M_{dj}}{\partial x_j}\right)^t \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur

     et $\Big(div(M)\Big)_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}$ pour $1 \leq i \leq d$.
3. Laplacien vectoriel :

   $\Delta \mathbf{w} = div\Big(\nabla \mathbf{w}\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur.

I.2 Les espaces de Lebesque L^p, $1 \leq p \leq \infty$

Définition I.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \in \mathbb{N}^*$.
1. On note $L^p\Big(\Omega\Big), 1 \leq p < \infty$, *l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions* f *mesurables presque partout, définie par :*

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

Une norme dans L^p *est définie par :*

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad pour \qquad f \in L^p(\Omega).$$

2. Lorsque $p = \infty$, on définit l'espace L^∞ par :

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ f \quad mesurable : |f| < \infty \Big\}$$

et la norme dans L^∞ est :

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = inf\Big\{ C \geq 0 : |f| \leq C \quad presque \quad partout \Big\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ muni de sa norme correspondante est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

I.3 Les espaces de Sobolev

Définition I.2 *On note $D(\Omega)$, le $\mathbb{C}-$espace des fonctions définies de Ω dans $\mathbb{C}$ indéfiniment différentiables à support compact inclus dans Ω.*

Définition I.3 *Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans L^2 s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$ pour $i \in 1, ..., N$ telles que :*

$$\int_\Omega v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = - \int_\Omega w_i(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Chaque w_i est appelée la $i^{ème}$ dérivée partielle faible de v et notée $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

Définition I.4 *On dit que $v \in L^2(\Omega)$ est m fois dérivables au sens faible si toutes ses dérivées partielles d'ordre $m-1$ sont dérivables au sens faible.*

Définition I.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \Big\{ v \in L^2(\Omega) / \forall i \in \Big\{1, ..., N\Big\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \Big\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est la $i^{ème}$ dérivée partielle faible de v.
On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \Big(u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x) \Big) dx$$

et de la norme :

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \Big(\langle u, u \rangle \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme correspondante est un espace de Hilbert.

Définition I.6 *L'espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et est caractérisé par :*

$$H^1_0(\Omega) = \Big\{ v \in H^1(\Omega) / v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \Big\}.$$

Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, l'espace $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition I.7 *Soit $m \geq 0$. L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :*

$$H^m(\Omega) = \Big\{ v \in L^2(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \Big\}$$

où la dérivée $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible.
Muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

et de la norme :

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \Big(\langle u, u \rangle \Big)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition I.8 *Pour tout entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ v \in L^p(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \Big\}$$

où la dérivée $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible .
Muni de la norme :

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

I.4 Formules de Green

Soient f de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$ et g de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$. Alors,

$$\int_\Omega \Delta f(x) g(x) dx = - \int_\Omega \vec{\nabla} f(x) \cdot \vec{\nabla} g(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\sigma) g(\sigma) d\sigma$$

avec $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\sigma) = \vec{\nabla} f(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma)$ où $\vec{n}$ est la normale unitaire sortante à la frontière.

I.5 Quelques formules utiles

- $\nabla\Big(fg\Big) = \partial_{x_i}\Big(fg\Big) = f\partial_{x_i} g + g\partial_{x_i} f = f\nabla g + g\nabla f.$
- $div\Big(fb\Big) = \partial_{x_i}\Big(fb\Big) = f\partial_{x_i} b_i + b_i \partial_{x_i} f = f div b + b \cdot \nabla f.$
- $div\Big(a \otimes b\Big) = \partial_{x_i}\Big(a_i b_j\Big) = b_j \partial_{x_i} a_i + a_i \partial_{x_i} b_j = b div a + a \cdot \nabla b.$
- $\nabla\Big(fb\Big) = \partial_{x_i}\Big(fb_j\Big) = f\partial_{x_i} b_j + b_j \partial_{x_i} f = f\nabla b + \nabla f \otimes b.$
- $\nabla\Big(|b|\Big) = \partial_{x_i}\Big(b_j b_j\Big) = 2b_j \partial_{x_i} b_j = 2\Big(\partial_{x_i}\Big) b_j = 2\nabla b \cdot b.$
- $\nabla\Big(|b|\Big) = \dfrac{\nabla\Big(|b|^2\Big)}{2|b|} = \dfrac{1}{|b|} \nabla b \cdot b.$

Chapitre 2

II Le modèle mélange

II.1 Le modèle mélange

L'évolution des particules en interaction avec un fluide est décrite par la fonction de densité $f(t,x,\vartheta) \geqslant 0$ où $x \in \omega \subset \mathbb{R}^3$ désigne la position d'une particule avec $\vartheta \in \mathbb{R}^3$ sa vitesse cinétique.
Le domaine occupé par le mélange fluide/particule est donné par

$$\Omega_0 = \Big\{x \in \mathbb{R}^3; \Big(x_1, x_2\Big) \in \Big[0, \pounds_1\Big] \times \Big[0, \pounds_2\Big] \ \ et \ \ 0 \leqslant x_3 \leqslant H\Big(t, x_1, x_2\Big)\Big\}$$

et le domaine du fluide est donné par

$$\Omega(t) = \Big\{x \in \mathbb{R}^3; \Big(x_1, x_2\Big) \in \Big[0, \pounds_1\Big]\times\Big[0, \pounds_2\Big] \ et \ b\Big(t, x_1, x_2\Big) \leqslant x_3 \leqslant H\Big(t, x_1, x_2\Big)\Big\}.$$

H est l'élévation totale de la surface libre et b la topographie induite par le stockage des sédiments. La fonction de densité f satisfait l'équation de Vlasov avec la gravité :

$$\partial_t f + div_x\Big(\vartheta f\Big) + div_\vartheta\Big(\Big(F + \overrightarrow{g}\Big) f\Big) = r\Delta_\vartheta f. \tag{3}$$

Désignant par $M = \rho_p \frac{4}{3}\pi a^3$ la masse d'une particule où a est le rayon (supposé constant, c'est-à-dire $a = a_0$ pour toutes les particules) et ρ_p la densité de masse d'une particule, la quantité MF est la force agissant sur une particule et est proportionnelle à la force de traînée de Stokes, elle est donnée par :

$$F = \frac{6\pi\mu a}{M}\Big(u - \vartheta\Big), \tag{4}$$

où u est la vitesse du fluide et μ une viscosité caractéristique $\Big($supposée constante$\Big)$ du fluide. La quantité $r > 0$ indique la vitesse de diffusion donnée par la formule d'Einstein :

$$r = \frac{\kappa T}{M}\frac{6\pi\mu a}{M} = \frac{\kappa T}{M}\frac{9\mu}{2a^2\rho_p}, \tag{5}$$

où κ est la constante de Boltzmann, $T > 0$ est la température de la suspension supposée être une constante. Le terme $r\Delta_\vartheta f$ décrit alors le mouvement brownien des particules. La quantité $\overrightarrow{g}$ est le vecteur de gravité $\Big(0, 0, -g\Big)^t$, également désigné par $-g\overrightarrow{\kappa}$ avec $\overrightarrow{\kappa} = \Big(0, 0, 1\Big)^t$.

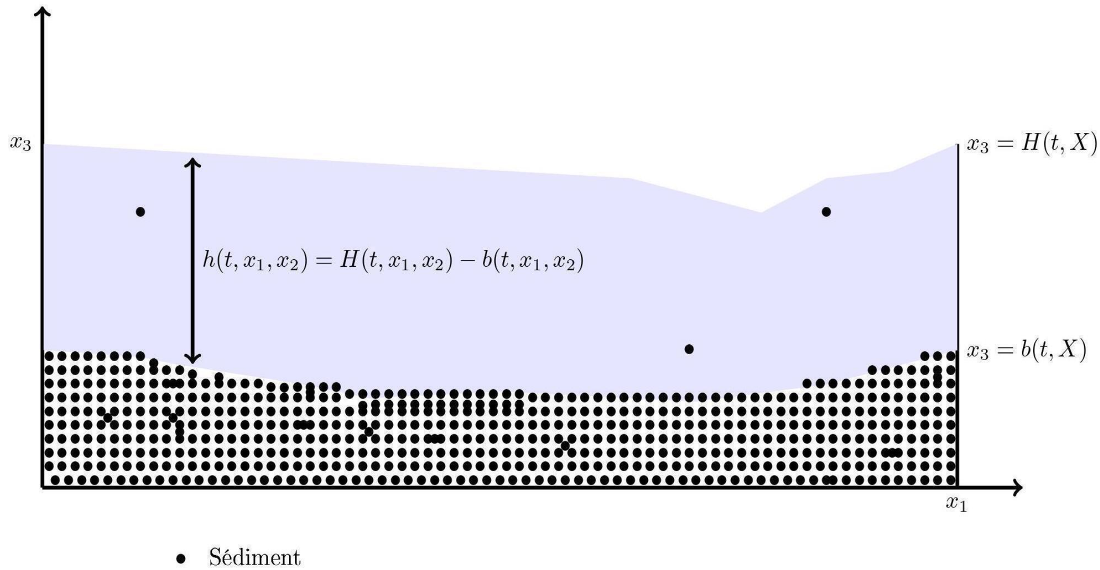

Figure 1: Domaine $\Omega(t)$

D'autre part, le fluide est décrit par sa vitesse $u\Big(t, x\Big) = \Big(u_1, u_2, u_3\Big)\Big(t, x\Big)$ avec $x = \Big(x_1, x_2, x_3\Big) \in \Omega(t)$ et sa densité $\rho_w\Big(t, x\Big)$ qui satisfont les équations de Navier-Stokes compressibles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_w + div\Big(\rho_w u\Big) = 0, & (6) \\ \partial_t\Big(\rho_w u\Big) + div\Big(\rho_w u \otimes u\Big) = div\sigma\Big(\rho_w, u\Big) + \mathfrak{F}, & (7) \\ \mathcal{P} = \mathcal{P}\Big(\rho_w, \rho_s\Big) & (8) \end{cases}$$

où $\sigma\Big(\rho_w, u\Big)$ est le tenseur des contraintes totales :

$$-\mathcal{P}\Big(\rho_w, \rho_s\Big)I_3 + 2\sum\Big(\rho\Big) : D(u) + \lambda(\rho)div(u)I_3$$

où I_3 représente la matrice d'identité. Le terme $\Sigma(\rho)$ est la matrice anisotrope. Elle prend en compte les sédiments et permet de contrôler la direction de l'écoulement en jouant sur l'amplitude des viscosités μ_i.
Cette matrice est donnée par :

$$\Sigma(\rho) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_3 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

et le tenseur des déformations est donné par :

$$D(u) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \frac{1}{2}\Big(\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_1} u_2\Big) & \frac{1}{2}\Big(\partial_{x_3} u_1 + \partial_{x_1} u_3\Big) \\ \frac{1}{2}\Big(\partial_{x_1} u_2 + \partial_{x_2} u_1\Big) & \partial_{x_2} u_2 & \frac{1}{2}\Big(\partial_{x_3} u_2 + \partial_{x_2} u_3\Big) \\ \frac{1}{2}\Big(\partial_{x_1} u_3 + \partial_{x_3} u_1\Big) & \frac{1}{2}\Big(\partial_{x_2} u_3 + \partial_{x_3} u_2\Big) & \partial_{x_3} u_3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en faisant le produit des éléments de $\Sigma(\rho)$ et de $D(u)$, le tenseur visqueux $\Sigma(\rho) : D(u)$ est donné par :

$$\begin{pmatrix} \mu_1(\rho)\partial_{x_1}u_1 & \dfrac{\mu_1(\rho)}{2}\Big(\partial_{x_2}u_1+\partial_{x_1}u_2\Big) & \dfrac{\mu_2(\rho)}{2}\Big(\partial_{x_3}u_1+\partial_{x_1}u_3\Big) \\ \dfrac{\mu_1(\rho)}{2}\Big(\partial_{x_1}u_2+\partial_{x_2}u_1\Big) & \mu_1(\rho)\partial_{x_2}u_2 & \dfrac{\mu_2(\rho)}{2}\Big(\partial_{x_3}u_2+\partial_{x_2}u_3\Big) \\ \dfrac{\mu_3(\rho)}{2}\Big(\partial_{x_1}u_3+\partial_{x_3}u_1\Big) & \dfrac{\mu_3(\rho)}{2}\Big(\partial_{x_2}u_3+\partial_{x_3}u_2\Big) & \mu_3(\rho)\partial_{x_3}u_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

La loi de pression est modifiée pour tenir compte de la densité des sédiments et elle est donnée comme suit :

$$\mathcal{P}\Big(\rho_w,\rho_s\Big)=\frac{g}{\rho_p}\frac{h(\rho_w+\rho_s)^2}{4}, \tag{10}$$

où ρ_s est la densité macroscopique des sédiments :

$$\rho_s=\int_{\mathbb{R}^3} f\,d\vartheta$$

et $h=H-b$ est la hauteur du fluide.
Le dernier terme $\mathfrak{F}$ de la partie droite de l'équation (7) est l'effet du mouvement des particules sur le fluide obtenu en additionnant la contribution de toutes les particules :

$$\mathfrak{F}=-\int_{\mathbb{R}^3} Ff\,d\vartheta+\rho_w\overrightarrow{g}=\frac{9\mu}{2a^2\rho_p}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\vartheta-u\Big)f\,d\vartheta+\rho_w\overrightarrow{g}. \tag{11}$$

En remplaçant r dans l'équation de vlasov par son expression, $\mathfrak{F}$ et $\sigma\Big(\rho_w,u\Big)$ dans l'équation de Navier-Stokes par leurs expressions on aura :

$$\begin{cases} \partial_t f+div_x\Big(\vartheta f\Big)+div_\vartheta\Bigg(\bigg(\dfrac{6\mu a}{M}\Big(\mu-\vartheta\Big)+\overrightarrow{g}\bigg)f\Bigg) & =\dfrac{\kappa T}{M}\dfrac{9\mu}{2a^2\rho_p}\Delta_\vartheta f, \\ \partial_t\rho_w+div\Big(\rho_w u\Big) & =0, \\ \partial_t\Big(\rho_w u\Big)+div\Big(\rho_w u\otimes u\Big)+div\Big(P\mathbf{I_3}\Big)-2div\Big(\sum:\mathsf{D}(u)\Big) & =div\Bigg(\lambda(\rho_w)div(u)\mathbf{I_3}\Bigg) \\ +\dfrac{9\mu}{2a^2\rho_p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\vartheta-u\Big)f\,d\vartheta-g\rho_w\overrightarrow{k}, & \end{cases}$$

or

$$div\Big(P\mathbf{I_3}\Big)=Pdiv\Big(\mathbf{I_3}\Big)+\mathbf{I_3}\cdot\nabla P=\nabla\Big(P\Big)$$

et

$$div\Big(\lambda div(u)\mathbf{I_3}\Big)=\nabla\Big(\lambda div(u)\Big).$$

Enfin, le modèle mélange est décrit par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f + div_x\Big(\vartheta f\Big) + div_\vartheta\Bigg(\bigg(\Big(\frac{6\mu a}{M}\Big(\mu - \vartheta\Big) + \overrightarrow{g}\bigg)f\Bigg) & = \frac{\kappa T}{M}\frac{9\nu}{2a^2\rho_p}\Delta_\vartheta f, \\ \partial_t \rho_w + div\Big(\rho_w u\Big) & = 0, \\ \partial_t\Big(\rho_w u\Big) + div\Big(\rho_w u \otimes u\Big) + \nabla P - 2div\Big(\Sigma : D(u)\Big) & = \nabla\Big(\lambda(\rho_w)div(u)\Big) \\ +\frac{9\mu}{2a^2\rho_p}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\vartheta - u\Big)f\,d\vartheta - g\rho_w\overrightarrow{k} & \end{cases} \tag{12}$$

où $\mathcal{P}$ est donné par (10). Le système (12) est alors doté des conditions aux limites décrites dans la section suivante.

II.2 Conditions aux Limites d'interface

Pour rappel, le domaine du fluide est défini comme suit :

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^3; \Big(x_1, x_2\Big) \in \Big[0, \pounds_1\Big] \times \Big[0, \pounds_2\Big] \quad et \quad b\Big(t, x_1, x_2\Big) \leqslant x_3 \leqslant H\Big(t, x_1, x_2\Big)\Big\}$$

où H représente l'élevation locale de l'eau depuis la surface $x_3 = 0$ jusqu'à la surface libre et b désigne l'élévation locale de la couche de sédiment depuis la surface $x_3 = 0$ jusqu'à $x_3 = b$. Les conditions aux limites sont composées des conditions de surface libre et des conditions au fond. Les conditions au fond décrivent comment la couche de sédiment évolue i.e. comment les particules entrantes ou sortantes augmentent ou diminuent l'élevation de b.

Conditions de surface libre

Considérant que la viscosité de l'air est négligeable, nous imposons une condition normale de continuité des contraintes sur la surface libre avec une tension superficielle à l'interface air/fluide par :

$$\sigma(u)n_s = \Big(\beta\kappa(t,x) - p_0\Big)n_s \quad en \quad x_3 = H(t,x) \tag{13}$$

où β est un coefficient capillaire et κ est la courbure moyenne de la surface et p_0 la pression atmosphérique à la surface libre. Le vecteur n_s est la normale unitaire extérieure à la surface libre définie par

$$n_s = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{x_1,x_2}H|^2}}\begin{pmatrix} -\partial_{x_1}H \\ -\partial_{x_2}H \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments de la condition à la surface libre sont donnés par :

$$\sigma(u)\begin{pmatrix} -\partial_{x_1}H \\ -\partial_{x_2}H \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Big(\beta\kappa - p_0\Big)\partial_{x_1}H \\ -\Big(\beta\kappa - p_0\Big)\partial_{x_2}H \\ \Big(\beta\kappa - p_0\Big) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Et en détaillant plus (14), on obtient

$$
\begin{cases}
p\partial_{x_1}H - 2\mu_1\partial_{x_1}u_1\partial_{x_1}H - \lambda div(u)\partial_{x_1}H - \partial_{x_2}H\mu_1\Big(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2\Big) \\
+\mu_2\Big(\partial_{x_3}u_1 + \partial_{x_1}u_3\Big) = -\Big(\beta\kappa - p_0\Big)\Big(\partial_{x_1}H\Big), \\
p\partial_{x_2}H - 2\mu_1\partial_{x_2}u_2\partial_{x_2}H - \lambda div(u)\partial_{x_2}H - \mu_1\partial_{x_1}H\Big(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2\Big) \\
+\mu_2\Big(\partial_{x_3}u_2 + \partial_{x_2}u_3\Big) = -\Big(\beta\kappa - p_0\Big)\Big(\partial_{x_2}H\Big), \\
-\partial_{x_1}H\mu_3\Big(\partial_{x_1}u_3 + \partial_{x_3}u_1\Big) - \partial_{x_2}H\mu_3\Big(\partial_{x_2}u_3 + \partial_{x_3}u_2\Big) - p + 2\mu_3\partial_{x_3}u_3 \\
+\lambda div(u) = \beta\kappa - p_0.
\end{cases}
\tag{15}
$$

D'où, les conditions au niveau de la surface libre sont données par :

$$
\begin{cases}
\Big(p + \beta\kappa - p_0\Big)\nabla_{x_1,x_2}H - 2\mu_1\mathbf{D}_{x_1,x_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\nabla_{x_1,x_2}H \\
+\mu_2\Big(\partial_{x_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1,x_2}u_3\Big) - \lambda div(u)\nabla_{x_1,x_2}H = 0, \\
-p - \beta\kappa + p_0 - \mu_3\Big(\partial_{x_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1,x_2}u_3\Big)\cdot\nabla_{x_1,x_2}H \\
+2\mu_3\partial_{x_3}u_3 + \lambda div(u) = 0.
\end{cases}
\tag{16}
$$

Remarque II.1 *Cette condition peut être obtenue comme dans [15, 9], où les auteurs on introduit une fonction indicatrice ϕ qui montre que la hauteur de la région humide est advectée par la vitesse du fluide u :*

$$
\phi = \begin{cases} 1 \quad si \quad x_3 \in [b(t,x_1,x_2), H(t,x_1,x_2)], \\ 0 \quad sinon. \end{cases}
\tag{17}
$$

En effet à partir des équations (6) et (17), on a

$$
\partial_t\Big(\rho_w\phi\Big) + div\Big(\rho_w u\phi\Big) = 0.
\tag{18}
$$

Ainsi, en intégrant cette fonction de b à $+\infty$ et de b à H suivant x_3 et en faisant la différence des deux résultats obtenus, on obtient la condition de surface libre.

Conditions au fond

On impose de manière très générale, une condition au fond qui s'écrit :

$$\Big(\big(\sigma(u)n_b\big)\cdot\tau_b\Big)\tau_b = \mathfrak{K}(u) \quad en \qquad x_3 = b(t,x_1,x_2).$$

Par exemple, le frottement

$$\mathfrak{K}(u) = \Big(\mathfrak{K}_1(u), \mathfrak{K}_2(u), \mathfrak{K}_3(u)\Big)^t$$

peut être le frottement laminaire et/ou turbulent (voir [9]). Le vecteur normal unitaire extérieur est donné par

$$n_b = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{x_1,x_2}b|^2}}\begin{pmatrix}\partial_{x_1}b\\ \partial_{x_2}b\\ -1\end{pmatrix}$$

où τ_b est un vecteur unitaire du plan tangent à la surface $x_3 = b(t,x_1,x_2)$.
La condition au fond mobile peut aussi s'écrire comme suit :

$$\sigma(u)n_b - \Big(\sigma(u)n_b\cdot n_b\Big)n_b = \mathfrak{K}(u) \text{ en } x_3 = b(t,x_1,x_2),$$

Ainsi, $\sigma(u)$ est donné par :

$$\begin{pmatrix} -p+2\mu_1(\rho)\partial_{x_1}u_1+\lambda div(u) & \mu_1\big(\partial_{x_2}u_1+\partial_{x_1}u_2\big) & \mu_2\big(\partial_{x_3}u_1+\partial_{x_1}u_3\big)\\ \mu_1\big(\partial_{x_1}u_2+\partial_{x_2}u_1\big) & -p+2\mu_1(\rho)\partial_{x_2}u_2+\lambda div(u) & \mu_2\big(\partial_{x_3}u_2+\partial_{x_2}u_3\big)\\ \mu_3\big(\partial_{x_1}u_3+\partial_{x_3}u_1\big) & \mu_3\big(\partial_{x_2}u_3+\partial_{x_3}u_2\big) & -p+2\mu_3(\rho)\partial_{x_3}u_3+\lambda div(u)\end{pmatrix},$$

et lorsqu'on multiplie $\sigma(u)$ par n_b, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla b|^2}}\begin{pmatrix} \partial_{x_1}b\Big(-p+2\mu_1(\rho)\partial_{x_1}u_1+\lambda div(u)\Big)+\partial_{x_2}b\mu_1\big(\partial_{x_2}u_1+\partial_{x_1}u_2\big)-\mu_2\big(\partial_{x_3}u_1+\partial_{x_1}u_3\big)\\ \partial_{x_1}b\mu_1\big(\partial_{x_1}u_2+\partial_{x_2}u_1\big)+\partial_{x_2}b\Big(-p+2\mu_1(\rho)\partial_{x_2}u_2+\lambda div(u)\Big)-\mu_2\big(\partial_{x_3}u_2+\partial_{x_2}u_3\big)\\ \partial_{x_1}b\mu_3\big(\partial_{x_1}u_3+\partial_{x_3}u_1\big)+\partial_{x_2}b\mu_3\big(\partial_{x_2}u_3+\partial_{x_3}u_2\big)+p-2\mu_3(\rho)\partial_{x_3}u_3-\lambda div(u)\end{pmatrix},$$

de même en faisant le produit scalaire entre $\sigma(u)n_b$ et n_b, on obtient :

$$\frac{1}{1+|\nabla b|^2}\begin{pmatrix} \Big(\partial_{x_1}b\Big)^2\Big(-p+2\mu_1(\rho)\partial_{x_1}u_1+\lambda div(u)\Big)+\Big(\partial_{x_1}b\Big)\Big(\partial_{x_2}b\Big)\mu_1\big(\partial_{x_2}u_1+\partial_{x_1}u_2\big)\\ -\partial_{x_1}b\mu_2\big(\partial_{x_3}u_1+\partial_{x_1}u_3\big)+\Big(\partial_{x_2}b\Big)\Big(\partial_{x_1}b\Big)\mu_1\big(\partial_{x_1}u_2+\partial_{x_2}u_1\big)\\ +\Big(\partial_{x_2}b\Big)^2\Big(-p+2\mu_1(\rho)\partial_{x_2}u_2+\lambda div(u)\Big)-\partial_{x_2}b\mu_2\big(\partial_{x_3}u_2+\partial_{x_2}u_3\big)\\ -\partial_{x_1}b\mu_3\big(\partial_{x_1}u_3+\partial_{x_3}u_1\big)-\partial_{x_2}b\mu_3\big(\partial_{x_2}u_3+\partial_{x_3}u_2\big)-p+2\mu_3(\rho)\partial_{x_3}u_3+\lambda div(u)\end{pmatrix},$$

et $\Big(\sigma(u)n_b \cdot n_b\Big)n_b$ est donné par :

$$\frac{1}{\Big(1+|\nabla b|^2\Big)^{3/2}} \begin{pmatrix} \sigma(u)n_b \cdot n_b \partial_{x_1} b \\ \\ \sigma(u)n_b \cdot n_b \partial_{x_2} b \\ \\ -\sigma(u)n_b \cdot n_b \end{pmatrix}.$$

Enfin les conditions au fond peuvent aussi s'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & -\mu_1\Big(\Big(1+|\nabla_{x_1,x_2} b|\Big)^2 I_2 - \nabla_{x_1,x_2} b \nabla_{x_1,x_2} b^t\Big) 2D_{x_1,x_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \nabla_{x_1,x_2} b \\ & +\mu_2\Big(\Big(1+|\nabla_{x_1,x_2} b|^2\Big) I_2 - \nabla_{x_1,x_2} b \nabla_{x_1,x_2} b^t\Big)\Big(\partial_{x_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1,x_2} u_3\Big) \\ & -\mu_3\Big(\Big(\partial_{x_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1,x_2} u_3\Big)\cdot \nabla_{x_1,x_2} b\Big)\nabla_{x_1,x_2} b + 2\mu_3 \partial_{x_3} u_3 \nabla_{x_1,x_2} b \\ & = \Big(1+|\nabla_{x_1,x_2} b|^2\Big)^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ & -\mu_3 |\nabla_{x_1,x_2} b|^2 \Big(\partial_{x_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1,x_2} u_3\Big)\cdot \nabla_{x_1,x_2} b + 2\mu_3 |\nabla_{x_1,x_2} b|^2 \partial_{x_3} u_3 \\ & +\mu_2\Big(\partial_{x_3}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1,x_2} u_3\Big)\cdot \nabla_{x_1,x_2} b - \mu_1\Big(D_{x_1,x_2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\nabla_{x_1,x_2} b\Big)\cdot \nabla_{x_1,x_2} b \\ & = \Big(1+|\nabla_{x_1,x_2} b|^2\Big)^{\frac{3}{2}} \mathfrak{K}_3(u). \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Nous complétons les conditions au fond par une équation de continuité de la vitesse à l'interface entre la partie solide et la région fluide. Cette équation s'écrit :

$$u \cdot n_b = u_b \cdot n_b. \tag{20}$$

On pose

$$\partial_t b + \sqrt{1+|\nabla_{x_1,x_2} b|^2}\, u \cdot n_b = S \quad en\ x_3 = b(t,x_1,x_2) \tag{21}$$

où $S - \sqrt{1+|\nabla_{x_1,x_2} b|^2}\, u \cdot n_b$ régit la variation de b comme le formalisme décrit ci-dessus pour les particules sortantes et entrantes.

CHAPITRE 3

III Modélisation

Dans ce chapitre, on part du modèle mélange pour obtenir le modèle intermédiaire via une modélisation.
Ensuite, on part du modèle intermédiaire pour obtenir le modèle asymptotique en faisant une deuxième modélisation.
Et enfin, on intègre suivant la verticale tout en tenant compte de la faible profondeur du fleuve par rapport à son étendu. Ainsi, on obtient les équations de Saint-Venant couplées à une équation de transport de sédiments.

III.1 Obtention du modèle intermédiaire à partir du modèle mélange

Dans cette partie, on va introduire des variables sans dimensions dans le modèle mélange (12) afin de l'écrire sous forme adimensionnelle.
Par la suite, en introduisant un nombre sans dimension, qui est le rapport de temps de relaxation par un temps caractéristique, supposé petit, on fait une analyse asymptotique sur le modèle mélange sans dimension.
Après cela, en intégrant l'équation de Vlasov sans dimension, on obtient les équations de type Euler compressibles.
Et enfin, on les additionne avec celles de Navier-Stokes compressibles afin d'obtenir notre modèle intermédiaire.

Adimensionnalisation

On introduit un petit paramètre $\varepsilon = \dfrac{\tau}{\mathfrak{T}}$ où τ est le temps de relaxation qui doit être comparé à un temps caractéristique $\mathfrak{T}$. Le temps de relaxation est donné par

$$\tau = \frac{M}{6\pi\mu a} = \frac{2a^2\rho_p}{9\mu}. \tag{22}$$

Il correspond au temps terminal de stokes, i.e. le temps à partir duquel une particule en chute atteint une accélération constante. On introduit également une longueur caractéristique $\mathfrak{L}$ et une vitesse caractéristique du fluide $\mathfrak{U}$ telles que $\mathfrak{U} = \dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}$. On définit alors une fluctuation de la vitesse thermique

$$\sqrt{\theta} = \sqrt{\frac{KT}{M}}$$

que l'on compare à $\mathfrak{U}$.
On introduit les variables sans dimensions :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\mathfrak{T}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\mathfrak{L}}, \quad \tilde{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\sqrt{\theta}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\sqrt{\theta}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_f\theta}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_f},$$

$$\tilde{\mu_i}(\tilde{\rho}) = \frac{\mu_i(\rho)}{\mu}, \quad \tilde{\lambda}(\tilde{\rho}) = \frac{\lambda(\rho)}{\mu} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\vartheta}) = \rho_f \sqrt{\theta}^3 f(\mathfrak{T}\tilde{t}, \mathfrak{L}\tilde{x}, \sqrt{\theta}\tilde{\vartheta}).$$

Avec ces variables sans dimensions, on a :

$$\partial_t f = \frac{1}{\mathfrak{T}}\frac{1}{\rho_f\sqrt{\theta}^3}\partial_{\tilde{t}}\tilde{f}, \qquad g\rho_w = \rho_f g\tilde{\rho_w},$$

$$\partial_t \rho_w = \frac{1}{\mathfrak{T}}\rho_f\partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho}_w, \qquad \partial_t(\rho_w u) = \frac{1}{\mathfrak{T}}\sqrt{\theta}\rho_f,$$

$$div_x\Big(\vartheta f\Big) = f div_x\Big(\vartheta\Big) + \vartheta\cdot\nabla_x f = \vartheta\cdot\nabla_x f = \frac{\sqrt{\theta}\tilde{\vartheta}}{\mathfrak{L}}\cdot\frac{1}{\rho_f\sqrt{\theta}^3}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{f},$$

$$\frac{KT9\mu}{M2a^2\rho_f}\Delta_\vartheta f = \frac{\theta}{\tau\sqrt{\theta}^2}\frac{1}{\rho_f\sqrt{\theta}^3}\Delta_{\tilde{\vartheta}}\Big(\tilde{f}\Big) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{\rho_f\sqrt{\theta}^3}div_{\tilde{\vartheta}}\Big(\nabla_{\tilde{\vartheta}}\tilde{f}\Big),$$

$$div_\vartheta\Bigg(\Bigg(\frac{6\pi\mu a}{M}(u-\vartheta)+\vec{g}\Bigg)f\Bigg) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}div_{\tilde{\vartheta}}\Bigg(\Bigg(\frac{\sqrt{\theta}}{\tau}(\tilde{u}-\tilde{\vartheta})-g\vec{k}\Bigg)\frac{1}{\rho_f\sqrt{\theta}^3}\tilde{f}\Bigg),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\theta}}\frac{1}{\rho_f\sqrt{\theta}^3}div_{\tilde{\vartheta}}\Big(-g\tilde{f}\vec{k}\Big) = -\frac{g}{\sqrt{\theta}}\frac{1}{\rho_f\sqrt{\theta}^3}div_\vartheta\Big(\tilde{f}\vec{k}\Big),$$

$$div\Big(\rho_w u\Big) = \frac{1}{\mathfrak{L}}\sqrt{\theta}\rho_f div\Big(\tilde{\rho}_w\tilde{u}\Big),$$

$$\nabla P = \frac{1}{\mathfrak{L}}\rho_f\theta\nabla_{\tilde{x}}\tilde{P},$$

$$div\Big(\rho_w u\otimes u\Big) = \frac{1}{\mathfrak{L}}\rho_f\theta div\Big(\tilde{\rho}_w\tilde{u}\otimes\tilde{u}\Big),$$

$$\nabla\Big(\lambda div(u)\Big) = \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}^2}\mu\nabla_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\lambda}div_{\tilde{x}}(\tilde{u})\Big),$$

$$div\Bigg(\sum : D(u)\Bigg) = \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}^2}\mu div_{\tilde{x}}\Bigg(\tilde{\sum} : D(\tilde{u})\Bigg),$$

$$\frac{9\mu}{2a^2\rho_p}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\vartheta-\mu\Big)\tilde{f}\,d\vartheta = \frac{9\mu}{2a^2\rho_p\rho_f\sqrt{\theta}}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\tilde{\vartheta}-\tilde{\mu}\Big)\tilde{f}\,d\tilde{\vartheta}.$$

Ainsi, le système (12) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\tilde{f} + \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}}\tilde{\vartheta}.\nabla_{\tilde{x}}\tilde{f} + \frac{1}{\sqrt{\theta}}div_{\tilde{\vartheta}}\Bigg(\frac{\sqrt{\theta}}{\tau}\Big(\tilde{u}-\tilde{\vartheta}\Big)\tilde{f} - g\tilde{f}\vec{k}\Bigg) = \frac{1}{\tau}\Delta_{\tilde{v}}\tilde{f}, & (23)\\ \frac{1}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho_w} + \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}}div\Big(\tilde{\rho_w}\tilde{u}\Big) = 0, & (24)\\ \frac{\sqrt{\theta}\rho_f}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\Big(\tilde{\rho_w}\tilde{u}\Big) + \frac{\theta\rho_f}{\mathfrak{L}}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\rho_w}\tilde{u}\otimes\tilde{u}\Big) - \\ \frac{\sqrt{\theta}\mu}{\mathfrak{L}^2}\Bigg(2div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\Sigma}:\mathbf{D}(\tilde{u})\Big) + \nabla_{\tilde{x}}\Big(\lambda div_{\tilde{x}}(\tilde{u})\Big)\Bigg) + \rho_f\theta\mathfrak{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{p} \\ = \frac{9\mu}{2a^2\rho_p}\rho_f\sqrt{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\tilde{\vartheta}-\tilde{\mu}\Big)\tilde{f}\,d\tilde{\vartheta} - \rho_f g\tilde{\rho_w}\vec{k}. & (25) \end{cases}$$

Après cela, on écrit les nombres sans dimensions comme B, C, E, F comme suit :

$$B = \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{U}}, \quad C = \frac{\mathfrak{T}}{\tau}, \quad F = \frac{g\mathfrak{T}}{\sqrt{\theta}}, \quad E = \frac{2}{9}\Big(\frac{a}{\mathcal{E}}\Big)^2\frac{\rho_p}{\rho_f}C. \tag{26}$$

Par la suite, en multipliant l'équation (23) par $\mathfrak{T}$, l'équation (24) par $\mathfrak{T}$ et l'équation (25) par $\dfrac{\mathfrak{T}}{\rho_f\sqrt{\theta}}$, en utilisant la définition de τ (22) avec les nombres sans dimension (26) et en omettant le $\tilde{.}$, le système précédent devient :

$$
\begin{cases}
\partial_t f + \dfrac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}\sqrt{\theta}div_x\Big(\vartheta f\Big) + \dfrac{\mathfrak{T}}{\sqrt{\theta}}div_\vartheta\bigg(\Big(u-\vartheta\Big)f - \nabla_\vartheta f\bigg) & = & \dfrac{g\mathfrak{T}}{\sqrt{\theta}}div_\vartheta\Big(\vec{k}f\Big), \\[2ex]
\quad \partial_t\rho_w + \dfrac{\mathfrak{T}\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}}div\Big(\rho_w u\Big) & = & 0, \\[2ex]
\partial_t\Big(\rho_w u\Big) + div\Big(\rho_w u\otimes u\Big) + \dfrac{\mathfrak{T}\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}}\nabla P - 2\dfrac{\mathfrak{T}\mu}{\mathfrak{L}^2\rho_f}div\bigg(\sum : \mathbf{D}(u)\bigg) & = & \dfrac{\mathfrak{T}\mu}{\mathfrak{L}^2\rho_f}\nabla\Big(\lambda div(u)\Big) \\
+\dfrac{\mathfrak{T}}{\tau}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Big(\vartheta-u\Big)f\,d\vartheta - \rho_w F\vec{k}. & &
\end{cases}
$$

Et après simplification, on aura :

$$
\begin{cases}
\partial_t f + Bdiv_x\Big(\vartheta f\Big) + Cdiv_\vartheta\bigg(\Big(u-\vartheta\Big)f - \nabla_\vartheta f\bigg) & = & Fdiv_\vartheta\Big(\vec{k}f\Big), \\[2ex]
\quad \partial_t\rho_w + Bdiv\Big(\rho_w u\Big) & = & 0, \\[2ex]
\partial_t\Big(\rho_w u\Big) + div\Big(\rho_w u\otimes u\Big) + B\nabla P - 2Ediv\bigg(\sum : \mathbf{D}(u)\bigg) & = & E\nabla\Big(\lambda div(u)\Big) \\
+C\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Big(\vartheta-u\Big)f\,d\vartheta - \rho_w F\vec{k}. & &
\end{cases}
\tag{27}
$$

où $\vec{k} = \bigg(0,0,1\bigg)^t$.

Remarque III.1 *Les conditions aux limites sont invariables par cette mise à l'échelle.*

Analyse asymptotique

Supposons $\varepsilon = \dfrac{\tau}{\mathfrak{T}}$ petit et considérons le régime asymptotique suivant,

$$\frac{\rho_p}{\rho_f} = \mathrm{O}(1), \quad B = \mathrm{O}(1), \quad C = \frac{1}{\varepsilon}, \quad F = \mathrm{O}(1), \quad E = \mathrm{O}(1). \tag{28}$$

Expliquons un peu les significations physiques de cet ordre asymptotique :

• l'hypothèse $\dfrac{\rho_p}{\rho_f} = \mathrm{O}(1)$ signifie que le poids des particules n'est pas négligeable.

• $B = \mathrm{O}(1)$ signifie que la vitesse caractéristique $\mathfrak{U}$ du fluide et la fluctuation de la vitesse thermique $\sqrt{\theta}$ sont du même ordre ε.

• Comme décrit dans [6], le terme C est le nombre de Knudsen et $C = \varepsilon^{-1}$ signifie que le temps d'interaction est très rapide.

• Le terme $\dfrac{1}{F}$ est le nombre de Froude. En effet, puisque $\sqrt{\theta} \approx \mathfrak{U} = \dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}$, on écrit F comme :

$$\mathrm{F}{=}\frac{g\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}} = \frac{g\mathfrak{L}}{\mathfrak{U}^2}.$$

• $E = \mathrm{O}(1)$ signifie que le diamètre des particules est petit devant la hauteur du domaine.
Puisque l'objectif est d'obtenir une approximation du système (27) à l'ordre principal par rapport à ε. Alors, nous écrivons le développement asymptotique de f, u, p et ρ comme suit :

$$f = f^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \;\; u = u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \;\; p = p^0 + \varepsilon p^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \;\; \rho_w = \rho_w^0 + \varepsilon \rho_w^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2). \tag{29}$$

Par la suite, en introduisant (29) dans le système (27), on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}
\partial_t\Big(f^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\Big) + B div_x\Big(\vartheta\big(f^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big) \\
+ C div_\vartheta\Big(\Big(\big(u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big) - \vartheta\Big)\big(f^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big) \\
-\nabla_\vartheta\big(f^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big) = F div_\vartheta\Big(\vec{k}\big(f^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big), \\
\partial_t \rho_w + B div\Big(\rho_w\big(u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big) = 0, \\
\partial_t\Big(\rho_w\big(u^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big) + div\Big(\rho_w\big(u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big) \otimes \big(u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big) \\
+ B\nabla P - 2E div\Big(\sum : \mathbf{D}\big(u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big) = E\nabla\Big(\lambda div\big(u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big) \\
+ C\int_{\mathbb{R}}\Big(\vartheta - \big(u^0 + \varepsilon u^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\Big)\Big(f^0 + \varepsilon f^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\Big)\, dv - \rho_w F\vec{k}.
\end{array}\right.$$

Et après cela, on regarde à l'ordre ε^{-1} et à l'ordre principal :
à l'ordre $\dfrac{1}{\varepsilon}$:

$$\left\{\begin{array}{ll}
div_v\Big(\big(u^0 - \vartheta\big)f^0 - \nabla_\vartheta f^0\Big) & = 0, \\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big(\vartheta - u^0\big) f^0 \, dv & = 0,
\end{array}\right. \tag{30}$$

à l'ordre principal :

$$\begin{cases} \partial_t f^0 + B\vartheta\nabla_x f^0 + div_v\Big(\Big(u^0-\vartheta\Big)f^1 - \nabla_\vartheta f^1\Big) + div_\vartheta\Big(u^1 f^0\Big) = F\nabla_\vartheta f^0, \\ \partial_t \rho_w^0 + Bdiv\Big(\rho_w^0 u^0\Big) = 0, \\ \partial_t\Big(\rho_w^0 u^0\Big) + Bdiv_x\Big(\rho_w^0 u^0 \otimes u^0\Big) + B\nabla_x p^0 = E\Big(2div\Big(\sum^0 : \mathbf{D}(u^0)\Big) \\ +\nabla\Big(\lambda(\rho_w^0)div(u^0)\Big)\Big) + \int_{\mathbb{R}} \Big(\vartheta - u^0\Big)f^1\, d\vartheta + \int_{\mathbb{R}} u^1 f^0\, d\vartheta - F\rho\vec{k}. \end{cases} \tag{31}$$

Après cela, on définit la densité macroscopique des particules ρ_s et la vitesse macroscopique V par les intégrales suivantes :

$$\rho_s = \int_{\mathbb{R}} f d\vartheta \quad et \quad \rho_s V = \int_{\mathbb{R}} \vartheta f d\vartheta. \tag{32}$$

On suppose que ρ_s et V s'écrivent à l'ordre principal comme suit :

$$\rho_s = \rho_s^0 + \varepsilon\rho_s^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \;\; V = V^0 + \varepsilon V^1 + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Ainsi, le système (30) nous donne d'une part l'équation suivante :

$$div_\vartheta\Big(\Big(u^o - \vartheta\Big)f^0 - \nabla_\vartheta f^0\Big) = 0. \tag{33}$$

Et de l'équation (33), on en déduit

$$\Big(u^o - \vartheta\Big)f^0 - \nabla_\vartheta f^0 = C, \tag{34}$$

où C ne dépend pas de ϑ.
La relation (34) est une équation différentielle ordinaire.

Pour la résolution de l'équation homogène, on a :

$$\Big(u^o - \vartheta\Big)f^0 - \nabla_\vartheta f^0 = 0 \Rightarrow \frac{\nabla_\vartheta f^0}{f^0} = \Big(u^0 - \vartheta\Big)$$

$$\Rightarrow ln|f^0| = -\frac{1}{2}\Big(u^0 - \vartheta\Big)^2 + const \Rightarrow f^0 = ke^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2},$$

ensuite, en calculant le gradient de f^0, on a :

$$\nabla_\vartheta f^0 = k'e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2} + k\Big(u^0 - \vartheta\Big)e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2},$$

en reportant $\nabla_\vartheta f^0$ dans (34), on obtient

$$k\Big(u^0 - \vartheta\Big)e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2} - k'e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2} - k\Big(u^0 - \vartheta\Big)e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2} = C$$

et après simplification, on a

$$-k' e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2} = C \Rightarrow k' e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2} = -C.$$

Posons $-C = c \Rightarrow k = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{c}{e^{-\frac{1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2}} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{c}{\frac{\sqrt{2\pi}^3}{\sqrt{2\pi}^3} e^{\frac{-1}{2}\left(u^0-\vartheta\right)^2}}$

$\Rightarrow k = \frac{c}{\sqrt{2\pi}^3}$ or $\int f^0 d\vartheta = \rho_s^0$

d'où

$$f^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \rho_s^0 e^{\frac{-1}{2}||u^0-\vartheta||^2}. \tag{35}$$

Et d'autre part, l'équation (33) nous donne :

$$\int \left(\vartheta - u^0\right) f^0 = 0 \Rightarrow \left(\vartheta - u^0\right) f^0 = 0 \Rightarrow \vartheta - u^0 = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\vartheta = u^0. \tag{36}$$

Ainsi, les équations (32)-(36) forment les systèmes suivants :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f^0 d\vartheta = \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^3} f^0 d\vartheta \right) = \partial_t \rho_s^0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vartheta \partial_t f^0 d\vartheta = \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^3} \vartheta f^0 d\vartheta \right) = \partial_t \left(\rho_s^0 u^0 \right).$$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ \vartheta \end{pmatrix} \partial_t f^0 dv = \begin{pmatrix} \partial_t \rho_s^0 \\ \\ \partial_t (\rho_s^0 u^0) \end{pmatrix}.$$

$$div_x \left(\vartheta f \right) = f div_x \left(\vartheta \right) + \vartheta \cdot \nabla_x f = \vartheta . \nabla_x f.$$

Ce qui implique que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vartheta \cdot \nabla_x f d\vartheta = \int_{\mathbb{R}^3} div_x \left(\vartheta f \right) = div_x \left(\int_{\mathbb{R}^3} \vartheta f^0 \right) = div_x \left(\rho_s^0 u^0 \right),$$

on a $\quad \vartheta^2 \cdot \nabla_x f^0 = \vartheta div_x \left(\vartheta f^0 \right)$

or $div_x \left(f \vartheta \otimes \vartheta \right) = \vartheta div_x \left(f^0 \vartheta \right) + \vartheta f^0 \cdot div_x \left(\vartheta \right) = \vartheta div_x \left(f^0 \vartheta \right) = \vartheta^2 \cdot \nabla_x f^0$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vartheta^2 \cdot \nabla_x f^0 d\vartheta = \int_{\mathbb{R}^3} div_x \left(f^0 \vartheta \otimes \vartheta \right) =$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} div_x \left(f^0 \left(\vartheta - u^0 \right) \otimes \vartheta \right) + \int_{\mathbb{R}^3} div_x \left(f^0 u^0 \otimes \vartheta \right)$$

or $f^0\Big(\vartheta-u^0\Big)=\nabla_\vartheta f^0 \Rightarrow div_x\Big(\int_{\mathbb{R}^3} f^0\Big(\vartheta-u^0\Big)\otimes\vartheta\Big)=div_x\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_\vartheta f^0\otimes\vartheta\Big)$

$$\Rightarrow div_x\Big(\int_{\mathbb{R}^3} f^0\Big(\vartheta-u^0\Big)\otimes\vartheta\Big)=div_x\Big(I\int_{\mathbb{R}^3} f^0 d\vartheta\Big)=\nabla_x\rho_s^0$$

alors

$\int_{\mathbb{R}^3} div_x\Big(f^0\Big(\vartheta-u^0\Big)\otimes\vartheta\Big)+\int_{\mathbb{R}^3} div_x\Big(f^0u^0\otimes\vartheta\Big)=div_x\Big(\rho_s^0u^0\otimes u^0\Big)+\nabla_x\rho_s^0.$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^3}\begin{pmatrix}1\\ \vartheta\end{pmatrix} div\Big(\vartheta f^0\Big)dv=\begin{pmatrix} div\Big(\rho_s^0u^0\Big)\\ div\Big(\rho_s^0u^0\otimes u^0\Big)+\nabla\rho_s^0\end{pmatrix},$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} div_\vartheta\Big(\Big(u^0-\vartheta\Big)f^1-\nabla_\vartheta f^1-u^1f^1-Ff^0\vec{k}\Big)d\vartheta=$$
$$-\int_{\mathbb{R}^3}\Big(u^0-\vartheta f^1-\nabla_\vartheta f^1-u^1f^1-Ff^0\vec{k}\Big)div_\vartheta\Big(I\Big)d\vartheta=0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3}\vartheta div_\vartheta\Big(\Big(u^0-\vartheta\Big)f^1-\nabla_\vartheta f^1-u^1f^1-Ff^0\vec{k}\Big)d\vartheta=$$
$$-\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\Big(u^0-\vartheta\Big)f^1-u^1f^1+F\rho_s^0\vec{k}\Big)div_\vartheta(\vartheta)d\vartheta.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^3}\begin{pmatrix}1\\ \vartheta\end{pmatrix} div_v\Big(\Big(u^0-\vartheta\Big)f^1-\nabla_v f^1-u_1f^1-Ff^0\vec{k}\Big)d\vartheta$$
$$=-\begin{pmatrix}0\\ \int_{\mathbb{R}^3}\Big(u^0-\vartheta\Big)f^1+u_1f^0+\rho_s^0\vec{k}\end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'équation de Vlasov sans dimension du système (31) devient

$$\begin{cases}\partial_t\rho_s^0+Bdiv\Big(\rho_s^0u^0\Big)=0,\\ \partial_t(\rho_s^0u^0)+Bdiv\Big(\rho_s^0u^0\otimes u^0\Big)+B\nabla(\rho_s^0)=\int_{\mathbb{R}^3}\Big(u^0-\vartheta\Big)f^1+\int_{\mathbb{R}^3}u_1f^0d\vartheta+\rho_s^0\vec{k}.\end{cases}\tag{37}$$

D'autre part, les équations de Navier-Stokes compressibles sans dimension se lisent :

$$\begin{cases}\partial_t\rho_w^0+Bdiv(\rho_w^0u^0)=0,\\ \partial_t(\rho_w^0u^0)+Bdiv\Big(\rho_w^0u^0\otimes u^0\Big)+B\nabla p^0=E\Big(2div\Big(\sum^0:\mathbf{D}(u^0)\\ +\nabla\Big(\lambda div(u^0)\Big)\Big)+\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\vartheta-u^0\Big)f^1-\int_{\mathbb{R}^3}u^1f^0dv+F\rho_w^0\vec{k},\end{cases}\tag{38}$$

Ensuite en posant $\varrho = \rho_w^0 + \rho_s^0$,
et en additionnant le système (37) et le système (38) on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + B div(\varrho u^0) = 0, \\ \\ \partial_t(\varrho u^0) + B div_x\Big(\varrho u^0 \otimes u^0\Big) + B\nabla_x \mathbf{P}(\varrho) = E\Big(2div\Big(\sum^0 : \mathbf{D}(u^0)\Big) \\ \\ +\nabla\Big(\lambda(\varrho) div(u^0)\Big)\Big) - F\varrho\vec{k}. \end{cases} \tag{39}$$

Maintenant, pour revenir aux variables physiques, on écrit :

$$\sqrt{\theta}u^0 = u, \quad \rho_f \varrho = \rho$$

et on multiplie l'équation de conservation de la masse du système (39) par $\dfrac{\rho_f}{\mathfrak{T}}$ l'équation de quantité de mouvement du même système par $\rho_f \dfrac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}}$, on obtient :

$$\frac{\rho_f}{\mathfrak{T}}\partial_t \varrho = \frac{1}{\mathfrak{T}}\partial_t \rho,$$

$$\frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}}\partial_t\Big(\varrho u^0\Big) = \frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}}\partial_t\Big(\frac{\rho u}{\rho_f\sqrt{\theta}}\Big) = \frac{1}{\mathfrak{T}}\partial_t\Big(\rho u\Big),$$

$$\frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}} B div\Big(\varrho u \otimes u\Big) = \frac{\theta\rho_f}{\mathfrak{T}} div\Big(\frac{\rho u}{\rho_f\sqrt{\theta}} \otimes \frac{u}{\sqrt{\theta}}\Big) = \frac{1}{\mathfrak{T}} div\Big(\rho u \otimes u\Big),$$

$$B\frac{\rho_f}{\mathfrak{T}} div\Big(\varrho u^0\Big) = \frac{B}{\sqrt{\theta}\mathfrak{T}} div\Big(\rho u\Big) = \frac{1}{\mathfrak{T}} div\Big(\rho u\Big) \quad \text{en} \quad \text{posant} \;\; B = \sqrt{\theta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}} B\nabla_x\Big(p + \rho_s^0\Big) &= \frac{\theta\rho_f}{\mathfrak{T}}\nabla_x\Big(\frac{gh\rho^2}{4\rho_f} + \rho_s^0\Big) = \frac{1}{\mathfrak{T}}\nabla_x\Big(\frac{\theta gh\rho^2}{4} + \theta\rho_f\rho_s^0\Big) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{T}}\nabla_x\Big(p + \theta\rho_s\Big), \end{aligned}$$

avec $p = \dfrac{\theta gh\rho^2}{4}$ et $\rho_s = \rho_f\rho_s^0$,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}} E\Big(2div\Big(\Sigma^0 : D(u^0)\Big) + \nabla\Big(\lambda div(u^0)\Big)\Big) &= E\frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}}\Big(2div\Big(\Sigma^0 : D\big(\frac{u}{\sqrt{\theta}}\big)\Big) \\ &\quad +\nabla\Big(\lambda div\big(\frac{u}{\sqrt{\theta}}\big)\Big)\Big) \\ &= \frac{E\rho_f}{\mathfrak{T}}\Big(2div\Big(\Sigma^0 : D(u)\Big) + \nabla\Big(\lambda div(u)\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{T}}\Big(2div\Big(\Sigma^0 : D(u)\Big) + \nabla\Big(\lambda div(u)\Big)\Big), \end{aligned}$$

en posant $E = \dfrac{1}{\rho_f}$,

$$-F\varrho\vec{k}\frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}} = -\frac{F\rho\vec{k}}{\rho_f}\times\frac{\rho_f\sqrt{\theta}}{\mathfrak{T}} = -\frac{g\mathfrak{T}\rho\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}}\vec{k} = -g\rho\vec{k}\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}\mathfrak{T}} = -\frac{1}{\mathfrak{T}}g\rho\vec{k},$$

car $\sqrt{\theta} = \mathfrak{U} = \dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}$.

En simplifiant par $\dfrac{1}{\mathfrak{T}}$ dans l'équation de conservation de la masse et dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient notre modèle intermédiaire donné par :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + div(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + div\Big(\rho u \otimes u\Big) + \nabla\Big(p(\rho) + \theta\rho_s\Big) = 2\Big(div\Big(\Sigma : \mathbf{D}(u)\Big)\Big) \\ +\nabla\Big(\lambda(\rho)div(u)\Big) - g\rho\vec{k} \end{cases} \tag{40}$$

où la pression est donnée par :

$$\mathbf{P}(\rho) = k(t,x_1,x_2)\rho(t,x) \;\; avec \;\; k\Big(t,x_1,x_2\Big) = \frac{gh\Big(t,x_1,x_2\Big)}{4\rho_p}. \tag{41}$$

III.2 Des équations de Navier-Stokes compressibles aux équations de Saint-Venant-Exner

Dans cette partie, on présente un modèle de transport de sédiments obtenu par une analyse asymptotique couche mince et par moyennisation suivant la verticale.
D'abord, on introduit des variables sans dimensions dans le modèle intermédiaire afin de l'adimensionnaliser.
Ensuite, en introduisant un nombre sans dimension qui est le rapport de la hauteur caractéristique par une longueur caractéristique, supposé petit, on fait une analyse asymptotique sur le modèle intermédiaire sans dimension.
Alors, on obtient notre modèle asymptotique et l'approximation hydrostatique.
Et enfin, on intègre suivant la verticale le modèle asymptotique tout en tenant compte de la faible profondeur du fleuve par rapport à son étendu. Ainsi, on obtient les équations de Saint-Venant couplées à une équation de transport.

Adimensionnalisation couche mince

Nous supposons que

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{L}}{L} = \frac{V}{U}$$

où ε est un petit paramètre, $\mathfrak{L}$ est la hauteur caractéristique, L est la longueur caractéristique du fleuve, V la vitesse caractéristique verticale et U la vitesse caractéristique horizontale.
On introduit également un temps caractéristique T donné par $\mathfrak{T} = L/U$ et une pression $\bar{p} = \bar{\rho}U^2$ où $\bar{\rho}$ est la densité caractéristique.
Dans la suite du document, nous utilisons les notations

$$x = \Big(x_1, x_2\Big), \;\; y = x_3, \;\; u = \Big(u_1, u_2\Big) \;\; et \;\; \upsilon = x_3$$

pour dissocier les composantes verticales et horizontales.
Ainsi, nous introduisons les variables sans dimensions suivantes

$$\tilde{t} = \frac{t}{\mathfrak{T}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\mathfrak{L}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{V}$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\overline{p}}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\overline{\rho}}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{\mathfrak{L}}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{\mathfrak{L}},$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\overline{\lambda}}, \quad \tilde{\mu_j} = \frac{\mu_j}{\overline{\mu_j}}, j = 1, 2, 3.$$

Ces variables sans dimensions représentent le temps, l'espace, la vitesse du fluide, la pression, la densité, la hauteur totale, la hauteur du lit et les viscosités.
Avec ces notations, on a respectivement le nombre de Froude F_r, le nombre de Reynolds associé à la viscosité μ_i $\big($i=1, 2, 3$\big)$, Re_i et le nombre de Reynolds associé à la viscosité λ, Re_λ :

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g\mathfrak{L}}}, \quad Re_i = \frac{\overline{\rho}UL}{\overline{\mu_i}}, \quad Re_\lambda = \frac{\overline{\rho}UL}{\overline{\lambda}}. \tag{42}$$

On introduit également les grandeurs $\bar{\mathfrak{K}}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ correspondant au frottement caractéristique et à la vitesse caractéristique de la variation du lit.
En introduisant les quantités sans dimensions dans (40), (16) et (19),
on obtient :
les éléments du système (40) qui s'écrivent :

$$\partial_t \rho = \frac{1}{\mathfrak{T}} \partial_{\tilde{t}} \overline{\rho} \tilde{\rho} = \frac{\overline{\rho}}{\mathfrak{T}} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho},$$

$$div(\rho u) = div_x\Big(\rho u\Big) + \partial_y\Big(\rho v\Big) = \frac{U}{L}\overline{\rho} div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{u}\Big) + \frac{V}{\mathfrak{L}}\overline{\rho}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{v}\Big),$$

$$\partial_t\Big(\rho u\Big) = \begin{pmatrix} \partial_t\Big(\rho u\Big) \\ \\ \partial_t\Big(\rho v\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathfrak{T}}\overline{\rho} U \partial_{\tilde{t}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{u}\Big) \\ \\ \frac{1}{\mathfrak{T}}\overline{\rho} V \partial_{\tilde{t}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{v}\Big) \end{pmatrix},$$

$$div\Big(\rho u \otimes u\Big) = \begin{pmatrix} div\Big(\rho u \otimes u\Big) \\ \\ div\Big(\rho u v\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} div_{\tilde{x}}\Big(\overline{\rho}\tilde{\rho}\tilde{u}U \otimes \tilde{u}U\Big) + \frac{1}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\overline{\rho}\tilde{\rho}\tilde{u}U\tilde{v}V\Big) \\ \\ \frac{1}{L} div_{\tilde{x}}\Big(\overline{\rho}\tilde{\rho}\tilde{u}U\tilde{v}V\Big) + \frac{1}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\overline{\rho}\tilde{\rho}\tilde{v}^2V^2\Big) \end{pmatrix},$$

$$\nabla\Big(p(\rho) + \theta\rho_s\Big) = \begin{pmatrix} \nabla_x\Big(p(\rho) + \theta\rho_s\Big) \\ \\ \partial_y\Big(p(\rho) + \theta\rho_s\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L}\nabla_{\tilde{x}}\Big(\overline{p}\tilde{p} + \theta\overline{\rho}\tilde{\rho}_s\Big) \\ \\ \frac{1}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\overline{p}\tilde{p} + \theta\overline{\rho}\tilde{\rho}_s\Big) \end{pmatrix},$$

$$\nabla\Big(\lambda(\rho)div(u)\Big) = \begin{pmatrix} \nabla_x\Big(\lambda(\rho)div(u)\Big) \\ \\ \partial_y\Big(\lambda(\rho)div(u)\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{\lambda}\tilde{\lambda}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\Big(\dfrac{1}{L}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}U\Big)+\dfrac{1}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{v}V\Big)\Big) \\ \\ \dfrac{\overline{\lambda}\tilde{\lambda}}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\dfrac{1}{L}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}U\Big)+\dfrac{1}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{v}V\Big)\Big) \end{pmatrix},$$

$$div\Big(\Sigma : D(u)\Big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{\mu}_1 U}{L^2}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\mu}_1 D_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)+\dfrac{U\overline{\mu}_2}{2\mathfrak{L}^2}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\mu}_2\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}\Big)+\dfrac{V\overline{\mu}_2}{2L\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\mu}_2\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big) \\ \\ \dfrac{\overline{\mu}_3 U}{2L\mathfrak{L}}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\mu}_3\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}\Big)+\dfrac{\overline{\mu}_3 V}{2L^2}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\mu}_3\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)+\dfrac{\overline{\mu}_3 V}{\mathfrak{L}^2}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\mu}_3\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}\Big) \end{pmatrix},$$

$$g\rho\vec{k} = g\overline{\rho}\tilde{\rho}.$$

Ainsi le système (40) devient :

$$\left\{\begin{array}{l} \quad\dfrac{1}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho}+\dfrac{U}{L}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{u}\Big)+\dfrac{V}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{v}\Big)=0, \\ \\ \dfrac{\tilde{\rho}U}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{u}\Big)+\dfrac{\tilde{\rho}U^2}{L}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{u}\otimes\tilde{u}\Big)+\dfrac{\tilde{\rho}UV}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{u}\Big)+\nabla_{\tilde{x}}\Big(\dfrac{\tilde{p}}{L}\tilde{p}(\tilde{\rho})+\dfrac{\tilde{\rho}\theta}{L}\rho_s\Big)= \\ \\ 2\dfrac{\overline{\mu_1}U}{L^2}div_{\tilde{x}}\Big(\mu_1\mathbf{D}_{\tilde{x}}(\tilde{u})\Big)+\dfrac{\overline{\mu_2}U}{\mathfrak{L}^2}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\mu_2}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}\Big)+\dfrac{\overline{\mu_2}V}{L\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\mu_2}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big) \\ \\ +\dfrac{\overline{\lambda}U}{L^2}\nabla_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\lambda}div_{\tilde{x}}(\tilde{u})\Big)+\dfrac{\overline{\lambda}V}{L\mathfrak{L}}\nabla_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\lambda}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}\Big), \\ \\ \dfrac{\overline{\rho}V}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{v}\Big)+\dfrac{\overline{\rho}UV}{L}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}\Big)+\dfrac{\overline{\rho}V^2}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\rho}\tilde{v}^2\Big)+\partial_{\tilde{y}}\Big(\dfrac{\overline{p}}{\mathfrak{L}}\tilde{p}(\tilde{\rho})+\dfrac{\overline{\rho}\theta}{\mathfrak{L}}\rho_s\Big)= \\ \\ -g\overline{\rho}\tilde{\rho}+\dfrac{\overline{\mu_3}U}{L\mathfrak{L}}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\mu_3}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}\Big)+\dfrac{\overline{\mu_3}V}{L^2}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{\mu_3}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)+2\dfrac{\overline{\mu_3}V}{\mathfrak{L}^2}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\mu_3}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}\Big) \\ \\ \quad+\dfrac{\overline{\lambda}U}{L\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\lambda}div_{\tilde{x}}(\tilde{u})\Big)+\dfrac{\overline{\lambda}V}{\mathcal{L}^2}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\lambda}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}\Big). \end{array}\right. \tag{43}$$

Les éléments de la condition de surface libre (16) s'écrivent également :

$$\Big(p+\beta\kappa-p_0\Big)\nabla_x H = \frac{\mathfrak{L}}{L}\Big(\overline{p}\tilde{p}+\beta\frac{\overline{p}\tilde{p}}{\overline{\rho}^2\tilde{\rho}^2}-\overline{p}\tilde{p}_0\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H} = \frac{\tilde{p}\mathfrak{L}}{L}\Big(\tilde{p}+\beta\tilde{\kappa}-\tilde{p}_0\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}$$

avec

$$\tilde{\kappa} = \frac{\tilde{p}}{\overline{\rho}^2\tilde{\rho}^2},$$

$$\mu_1 D_x\Big(u\Big)\nabla_x H = \frac{\overline{\mu}_1\mathfrak{L}U}{L^2}D_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H},$$

$$\mu_2\Big(\partial_{x_3}u+\nabla_x u_3\Big)=\overline{\mu}_2\tilde{\mu}_2\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big),$$

$$\lambda div\Big(u\Big)\nabla_x H=\frac{\overline{\lambda}U\mathfrak{L}}{L^2}\tilde{\lambda}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}+\frac{\overline{\lambda}V}{L}\tilde{\lambda}\partial_{\tilde{y}}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H},$$
$$\Big(-p-\alpha\kappa+p_0\Big)=\overline{p}\Big(-\tilde{p}-\alpha\tilde{\kappa}-\tilde{p}_0\Big),$$

$$\mu_3\Big(\partial_{x_3}u+\nabla_x u_3\Big)\cdot\nabla_x H=\overline{\mu}_3\tilde{\mu}_3\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\cdot\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H},$$

$$2\mu_3\partial_{x_3}u_3=2\overline{\mu}_3\tilde{\mu}_3\frac{V}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v},$$

$$\lambda div\Big(u\Big)=\frac{\overline{\lambda}\tilde{\lambda}U}{L}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)+\frac{\overline{\lambda}\tilde{\lambda}V}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}.$$

D'où les conditions de surface libre sont données par

$$\begin{cases}\frac{\overline{p}\mathfrak{L}}{L}\Big(\tilde{p}+\beta\tilde{\kappa}-\tilde{p_0}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}-\frac{\overline{\mu_1}U\mathfrak{L}}{L^2}\tilde{\mu_1}D_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}+\\ \overline{\mu}\Big(\tilde{\mu}_2\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\Big)-\frac{\overline{\lambda}U\mathfrak{L}}{L^2}\tilde{\lambda}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}\\ -\frac{\overline{\lambda}V}{L}\tilde{\lambda}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{\vartheta}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}=0,\\ p\Big(-\tilde{p}-\tilde{\beta}k+\tilde{p}_0\Big)-\overline{\mu}_3\Big(\tilde{\mu_3}\Big(\frac{U}{L}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V\mathfrak{L}}{L^2}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\Big)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{\overline{H}}\\ +2\frac{\overline{\mu_3}V}{\mathfrak{L}}\tilde{\mu_3}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}+\frac{\overline{\lambda}U}{L}\tilde{\lambda}div_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)+\frac{\overline{\lambda}V}{\mathfrak{L}}\tilde{\lambda}\partial_{\tilde{y}}\Big(\tilde{v}\Big)=0.\end{cases}\tag{44}$$

Et les éléments de la condition au fond du système (19) s'écrivent aussi :

$$\mu_1\Big(1+|\nabla_x b|^2I_2-\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)D_x(u)\nabla_x b=\overline{\mu}_1\tilde{\mu}_1\Big(\Big(1+\Big|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\Big|^2\Big)I_2-\frac{\mathfrak{L}^2}{L^2}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}^t\Big)\frac{U\mathfrak{L}^2}{L^2}D_{\tilde{x}}(\tilde{u})\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b},$$

$$\mu_2\Big(\Big(1+|\nabla_x b|^2\Big)I_2-\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)\Big(\partial_{x_3}u+\nabla_x u_3\Big)=\overline{\mu}_2\tilde{\mu}_2\Big(\Big(1+\Big|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\Big|^2\Big)I_2-\frac{\mathfrak{L}^2}{L^2}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}^t\Big)\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big),$$

$$\mu_3\Big((\partial_{x_3}u+\nabla_x u_3)\cdot\nabla_x b\Big)\nabla_x b=\overline{\mu}_3\tilde{\mu}_3\Big(\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\cdot\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\Big)\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b},$$

$$2\mu_3\partial_{x_3}u_3\nabla_x b = 2\overline{\mu}_3\tilde{\mu}_3\frac{V}{L}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b},$$

$$\left(1+|\nabla_x b|^2\right)^{3/2}\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_1(u)\\ \\ \mathfrak{K}_2(u)\end{pmatrix} = \left(1+\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\right|^2\right)^{3/2}\overline{\mathfrak{K}}U\begin{pmatrix}\tilde{\mathfrak{K}}_1(\tilde{u})\\ \\ \tilde{\mathfrak{K}}_2(\tilde{u})\end{pmatrix},$$

$$\mu_3|\nabla_x b|^2\Big(\partial_{x_3}u+\nabla_x u_3\Big)\cdot\nabla_x b = \overline{\mu}_3\tilde{\mu}_3\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\right|^2\left(\frac{U}{L}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V\mathfrak{L}}{L^2}\right)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b},$$

$$\mu_3\left|\nabla_x b\right|^2\partial_{x_3}u_3 = \overline{\mu}_3\tilde{\mu}_3\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\right|^2\frac{V}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{v},$$

$$\mu_2\Big(\partial_{x_3}u+\nabla_x u_3\Big)\cdot\nabla_x b = \overline{\mu}_2\tilde{\mu}_2\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\cdot\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b},$$

$$\mu_1\Big(D_x(u)\nabla_x b\Big)\cdot\nabla_x b = \overline{\mu}_1\tilde{\mu}_1\Big(\frac{\mathfrak{L}^2U}{L^3}D_{\tilde{x}}(\tilde{u})\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b},$$

$$\left(1+|\nabla_x b|^2\right)^{3/2}\mathfrak{K}_3(u) = \left(1+|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}|^2\right)^{3/2}\overline{\mathfrak{K}}_3V\tilde{\mathfrak{K}}_3(\tilde{v}).$$

D'où les conditions au fond sont données par

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{\overline{\mu_1}U\mathfrak{L}}{L^2}\mu_1\Big(\Big(\Big(1+\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\right|^2\Big)I_2-\frac{\mathfrak{L}^2}{L^2}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}^t\Big)\mathbf{D}_{\tilde{x}}(\tilde{u})\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\\
&+\mu_2\Big(\Big(1+\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\right|^2\Big)I_2-\frac{\mathfrak{L}^2}{L^2}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}^t\Big)\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\\
&-\overline{\mu_3}\mu_3\Big(\Big(\frac{\mathfrak{L}U}{L^2}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V\mathfrak{L}^2}{L^3}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}+2\frac{V\overline{\mu_3}}{L}\mu_3\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\\
&\quad=\Big(1+\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\right|^2\Big)^{\frac{3}{2}}\overline{\mathfrak{K}}U\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_1(\tilde{u})\\ \\ \mathfrak{K}_2(\tilde{u})\end{pmatrix},\\
&\quad-\overline{\mu_3}\mu_3|\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}|^2\Big(\frac{\mathfrak{L}^2U}{L^3}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{\mathfrak{L}^3V}{L^2}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}+2\frac{\mathfrak{L}V\overline{\mu}_3}{L^2}\mu_3|\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}|^2\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}\\
&\quad+\overline{\mu_2}\frac{\mathfrak{L}}{L}\mu_2\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}+\frac{V}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{v}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\\
&\quad-\overline{\mu_1}\frac{U\mathfrak{L}^2}{L^3}\mu_1\Big(\mathbf{D}_{\tilde{x}}\Big(\tilde{u}\Big)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\\
&\quad=\Big(1+\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}\right|^2\Big)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}\right. \tag{45}$$

On a :

$$\sqrt{1+|\nabla_x b|^2}u\cdot n_b=\sqrt{1+|\nabla_x b|^2}u\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_x b|^2}}\begin{pmatrix}\partial_{x_1}b\\ \partial_{x_2}b\\ -1\end{pmatrix}=u\cdot\nabla_x b-\upsilon.$$

D'où

$$u\cdot\nabla_x b-\upsilon=\frac{U\mathfrak{L}}{L}\tilde{u}\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}-V\tilde{\upsilon}\quad et\quad \partial_t b=\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\tilde{b}.$$

Alors, la condition de la variation du lit (21) s'écrit :

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}\partial_{\tilde{t}}\tilde{b}+\frac{U\mathfrak{L}}{L}\tilde{u}\Big(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{b}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{x}}\tilde{b}-V\tilde{\upsilon}\Big(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{b}\Big)=\overline{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}. \tag{46}$$

En utilisant la définition des nombre sans dimension (42), en fixant $\rho_p=\overline{\rho}$ en omettant le $\tilde{\cdot}$ en multipliant l'équation de masse du système (43) par $\mathfrak{T}$, l'équation de quantité de mouvement pour u du système (43) par $\dfrac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}$, l'équation de quantité de mouvement pour ϑ du système (43) par $\dfrac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}$, nous obtenons une version sans dimension du système (40) où les éléments sont donnés comme suit :

$$\frac{1}{\mathfrak{T}}\partial_t\rho\times\mathfrak{T}=\partial_t\rho,\qquad \frac{U}{L}div_x(\rho u)\times\mathfrak{T}=div_x(\rho u)\;\; car\;\;\mathfrak{T}=\frac{L}{U},$$

$$\frac{V}{\mathfrak{L}}\partial_y(\rho\upsilon)=\partial_y(\rho\upsilon)\quad car\quad \frac{\mathfrak{L}}{V}=\frac{L}{U},$$

$$\frac{\overline{\rho}U}{\mathfrak{T}}\partial_t\Big(\rho u\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\partial_t\Big(\rho u\Big),$$

$$\frac{\overline{\rho}U^2}{L}div_x\Big(\rho u\otimes u\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\frac{U\mathfrak{T}}{L}div_x\Big(\rho u\otimes u\Big)=div_x\Big(\rho u\otimes u\Big),$$

$$\frac{\overline{\rho}UV}{\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\rho\upsilon u\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\frac{V\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\rho\upsilon u\Big)=\partial_y\Big(\rho\upsilon u\Big),$$

$$\nabla_x\Big(\frac{\overline{p}}{L}p+\frac{\overline{\rho}\theta}{L}\rho_s\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\nabla_x\Big(\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}U^2}p+\frac{\theta\mathfrak{T}^2}{L^2}\Big)=\nabla_x\Big(p+\frac{\theta\mathfrak{T}^2}{L^2}\rho_s\Big),$$

$$\frac{\overline{\mu}_1U}{L^2}div_x\Big(\mu_1D_x(u)\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\rho}UL}\frac{U\mathfrak{T}}{L}div_x\Big(\mu_1D_x(u)\Big)=\frac{1}{Re_1}div_x\Big(\mu_1D_x(u)\Big),$$

$$\frac{\overline{\mu}_2U}{\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\mu_2\partial_yu\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\frac{\overline{\mu}_2}{\overline{\rho}U}\times\frac{U\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}^2}\partial_y\Big(\mu_2\partial_yu\Big)=\frac{\overline{\mu}_2}{\overline{\rho}U}\times\frac{U^3\mathfrak{T}}{V^2L^2}\partial_y\Big(\mu_2\partial_yu\Big)=\frac{1}{Re_2\varepsilon^2}\partial_y\Big(\mu_2\partial_yu\Big),$$

$$\frac{\overline{\mu}_2V}{L\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\mu_2\nabla_x\upsilon\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\frac{\overline{\mu}_2}{\overline{\rho}UL}\times\frac{V\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\mu_2\nabla_x\upsilon\Big)=\frac{1}{Re_1}\partial_y\Big(\mu_2\nabla_x\upsilon\Big),$$

$$\frac{\overline{\lambda}U}{L^2}\nabla_x\Big(\lambda div_x(u)\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\rho}UL}\frac{U\mathfrak{T}}{L}\nabla_x\Big(\lambda div_x(u)\Big)=\frac{1}{Re_\lambda}\nabla_x\Big(\lambda div_x(u)\Big),$$

$$\frac{\overline{\lambda}V}{L\mathfrak{L}}\nabla_x\Big(\lambda\partial_y\upsilon\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}U}=\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\rho}UL}\times\frac{V\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}\nabla_x\Big(\lambda\partial_y\upsilon\Big)=\frac{1}{Re_\lambda}\nabla_x\Big(\lambda\partial_y\upsilon\Big),$$

$$\frac{\overline{\rho}V}{\mathfrak{T}}\partial_t\Big(\rho\upsilon\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\partial_t\Big(\rho\upsilon\Big),$$

$$\frac{\overline{\rho}UV}{L}div_x\Big(\rho u\upsilon\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{U\mathfrak{T}}{L}div_x\Big(\rho u\upsilon\Big)=div_x\Big(\rho u\upsilon\Big),$$

$$\frac{\overline{\rho}V^2}{\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\rho\upsilon\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{V\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\rho\upsilon\Big)=\partial_y\Big(\rho\upsilon\Big),$$

$$\partial_y\Big(\frac{\overline{p}p}{\mathfrak{L}}+\frac{\overline{\rho}\theta}{\mathfrak{L}}\rho_s\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\partial_y\Big(\frac{U^2\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}V}p+\frac{\theta\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}V}\rho_s\Big)=\partial_y\Big(\frac{U^2}{V^2}p+\frac{\theta\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{L}^2}\rho_s\Big)=\partial_y\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}p+\frac{\theta\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{L}^2}\rho_s\Big),$$

$$g\overline{\rho}\rho\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{g\mathfrak{T}}{U^2}\times\frac{U^2}{V}\rho=\frac{g\mathfrak{L}}{U^2}\frac{U^2}{V^2}\rho=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{Fr^2}\rho,$$

$$\frac{\overline{\mu}_3U}{L\mathfrak{L}}div_x\Big(\mu_3\partial_yu\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}LU}\frac{UL}{V\mathfrak{L}}div_x\Big(\mu_3\partial_yu\Big)=\frac{1}{Re_3\varepsilon^2}div_x\Big(\mu_3\partial_yu\Big),$$

$$\frac{\overline{\mu}_3V}{L^2}div_x\Big(\mu_3\nabla_x\upsilon\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}UL}div_x\Big(\mu_3\nabla_x\upsilon\Big)=\frac{1}{Re_3}div_x\Big(\mu_3\nabla_x\upsilon\Big),$$

$$\frac{\overline{\mu}_3V}{\mathfrak{L}^2}\partial_y\Big(\mu_3\partial_y\upsilon\Big)\times\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}}\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}^2V^2}\partial_y\Big(\mu_3\partial_y\upsilon\Big)=\frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}L}\frac{U}{LU^2\varepsilon^2}\partial_y\Big(\mu_3\partial_y\upsilon\Big)=\frac{1}{Re_3\varepsilon^2}\partial_y\Big(\mu_3\partial_y\upsilon\Big),$$

$$\frac{\overline{\lambda}U}{L\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\lambda div_x(u)\Big)\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\rho}UL}\frac{UL}{V\mathfrak{L}}\partial_y\Big(\lambda div_x(u)\Big)=\frac{1}{Re_\lambda}\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_y\Big(\lambda div_x(u)\Big),$$

$$\frac{\overline{\lambda}V}{\mathfrak{L}^2}\partial_y\Big(\lambda\partial_y\upsilon\Big)\frac{\mathfrak{T}}{\overline{\rho}V}=\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\rho}}\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}^2V^2}\partial_y\Big(\lambda\partial_y\upsilon\Big)=\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\rho}UL}\frac{U}{U\varepsilon^2}\partial_y\Big(\lambda\partial_y\upsilon\Big)=\frac{1}{Re_\lambda\varepsilon^2}\partial_y\Big(\lambda\partial_y\upsilon\Big).$$

D'où le système (40) devient :

$$
\begin{cases}
\partial_t\rho + div_x(\rho u) + \partial_y(\rho\upsilon) = 0,\\[2ex]
\partial_t(\rho u) + div_x(\rho u\otimes u) + \partial_y(\rho\upsilon u) + \nabla_x\Big(p(\rho) + \dfrac{\theta\mathfrak{T}^2}{L^2}\rho_s\Big) =\\[2ex]
\dfrac{1}{Re_1}div_x\Big(\mu_1\mathbf{D}_x(u)\Big) + \dfrac{1}{Re_2}\partial_y\Big(\mu_2\Big(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u + \nabla\upsilon\Big)\Big) + \dfrac{1}{Re_\lambda}\nabla_x\Big(\lambda div(u)\Big),\\[2ex]
\partial_t(\rho\upsilon) + div_x(\rho u\upsilon) + \partial_y(\rho\upsilon^2) + \partial_y\Big(\dfrac{1}{\varepsilon^2}p(\rho) + \dfrac{\theta\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{T}^2}\rho_s\Big) = -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{1}{F_r^2}\rho\\[2ex]
+\dfrac{1}{Re_3}div_x\Big(\mu_3\Big(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u + \nabla_x\upsilon\Big)\Big) + \dfrac{2}{\varepsilon^2 Re_3}\partial\Big(\mu_3\partial_y\upsilon\Big)\\[2ex]
+\dfrac{1}{\varepsilon^2 Re_\lambda}\partial_y\Big(\lambda div(u)\Big).
\end{cases}
\tag{47}
$$

En multipliant la première équation du système (44) par $\dfrac{L}{\overline{p}\mathfrak{L}}$ et la seconde par $\dfrac{1}{\overline{p}}$ on obtient les éléments de la condition de surface libre comme suit :

$$\frac{\overline{p}\mathfrak{L}}{L}\Big(p+\beta\kappa-p_0\Big)\nabla_x H\frac{L}{\overline{p}\mathfrak{L}} = \Big(p+\beta\kappa-p_0\Big),$$

$$\frac{\overline{\mu}_1 U\mathfrak{L}}{L^2}\mu_1 D_x(u)\nabla_x H\frac{L}{\overline{p}\mathfrak{L}} = \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\rho}UL}\mu_1 D_x(u)\nabla_x H = \frac{1}{Re_1}\mu_1 D_x(u)\nabla_x H,$$

$$\overline{\mu}_2\frac{L}{\overline{p}\mathfrak{L}}\Big(\mu_2\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_y u+\frac{V}{L}\nabla_x\upsilon\Big)\Big) = \frac{\overline{\mu}_2}{\overline{\rho}UL}\frac{L^2}{U\mathfrak{L}}\Big(\mu_2\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_y u+\frac{V}{L}\nabla_x\upsilon\Big)\Big) = \frac{1}{Re_2}\Big(\mu_2\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u+\nabla_x\upsilon\Big)\Big),$$

$$\frac{\overline{\lambda}U\mathfrak{L}}{L^2}\frac{L}{\overline{p}\mathfrak{L}} = \frac{\overline{\lambda}}{L\overline{\rho}U}\lambda div(u)\nabla_x H = \frac{1}{Re_\lambda}\lambda div(u)\nabla_x H,$$

$$\frac{\overline{\lambda}V}{L}\frac{L}{\overline{p}\mathfrak{L}}\lambda\partial_y(\upsilon)\nabla_x H = \frac{\overline{\lambda}}{LU\overline{\rho}}\frac{VL}{U\mathfrak{L}}\lambda\partial\upsilon\nabla_x H = \frac{1}{Re_\lambda}\lambda\partial_y(\upsilon)\nabla_x H,$$

$$\overline{\mu}_3\frac{1}{\overline{p}}\Big(\mu_3\Big(\frac{U}{L}\partial_y u+\frac{V}{L^2}\mathfrak{L}\nabla_x\upsilon\Big)\Big)\cdot\nabla_x H = \frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}UL}\mu_3\Big(\partial_y u+\frac{V\mathfrak{L}}{UL}\nabla_x\upsilon\Big)\cdot\nabla_x H = \frac{1}{Re_3}\mu_3\Big(\partial_y u+\varepsilon^2\nabla_x\upsilon\Big)\cdot\nabla_x H,$$

$$\frac{\overline{\mu}_3 V}{\mathfrak{L}}\frac{1}{\overline{p}}\mu_3\partial_y(\upsilon) = \frac{\overline{\mu}_3 V}{\mathfrak{T}VU^2\overline{\rho}}\mu_3\partial_y(\upsilon) = \frac{1}{Re_3}\mu_3\partial_y(\upsilon),$$

$$\frac{\overline{\lambda}U}{L}\frac{1}{\overline{p}}\lambda div(u) = \frac{\overline{\lambda}U}{\overline{\rho}U^2 L}\lambda div(u) = \frac{1}{Re_\lambda}\lambda div(u),$$

$$\frac{\overline{\lambda}V}{\mathfrak{L}}\frac{1}{\overline{p}}\lambda\partial_y(\upsilon) = \frac{\overline{\lambda}U\varepsilon}{\varepsilon L\overline{\rho}u^2}\lambda\partial_y(\upsilon) = \frac{1}{Re_\lambda}\lambda\partial_y(\upsilon).$$

D'où la condition de surface libre est donné par

$$\begin{cases} \Big(p+\beta\kappa-po\Big)\nabla_x H-\dfrac{F_r^2}{Re_1}\mu_1\mathbf{D}_x(u)\nabla_x H \\ +\dfrac{F_r^2}{Re_2}\Big(\mu_2\Big(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u+\nabla_x \upsilon\Big)\Big)-\dfrac{F_r^2}{\varepsilon Re_\lambda}\lambda div_x(u)\nabla_x H \\ -\dfrac{F_r^2}{Re_\lambda}\lambda\partial_y(\upsilon)\nabla_x H=0, \\ \Big(-p-\beta\kappa+p_0\Big)-\dfrac{F_r^2}{Re_3}\Big(\mu_3\Big(\partial_y u+\varepsilon^2\nabla_x\upsilon\Big)\Big)\cdot\nabla_x H \\ +2\dfrac{F_r^2}{Re_3}\mu_3\partial_y\upsilon+\dfrac{F_r^2}{Re_\lambda}\lambda\Big(div_x(u)+\partial_y(\upsilon)\Big)=0. \end{cases} \tag{48}$$

Et en multipliant la première équation du système (45) par $\dfrac{L}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}$, la dernière équation du même système par $\dfrac{1}{\overline{\rho}U^2}$, les éléments de la condition au fond sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mu}_1 U\mathfrak{L}}{L^2}\mu_1\frac{L}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}\Big(\Big(1+\Big|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_x b\Big|^2\Big)I_2-\frac{\mathfrak{L}^2}{L^2}\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)D_x(u)\nabla_x b &= \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\rho}UL}\mu_1\Big(\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)I_2 \\ &\quad -\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)D_x(u)\nabla_x b \\ &= \frac{\mu_1}{Re_1}\Big(\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)I_2 \\ &\quad -\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)D_x(u)\nabla_x b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mu}_2\mu_2 L}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}\Big(\Big(1+\Big|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_x b\Big|^2\Big)I_2-\frac{\mathfrak{L}^2}{L^2}\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)\Big(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_y u+\frac{V}{L}\nabla_x\upsilon\Big) &= \overline{\mu}_2\mu_2\frac{V}{L}\frac{L}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}\Big(\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)I_2 \\ &\quad -\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)\Big(\frac{UL}{V\mathfrak{L}}\partial_y u+\nabla_x\upsilon\Big) \\ &= \frac{\overline{\mu}_2 U}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{T}}\Big(\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)I_2 \\ &\quad -\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u+\nabla_x\upsilon\Big) \\ &= \frac{\mu_2}{Re_2}\Big(\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)I_2 \\ &\quad -\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\Big)\Big(\frac{1}{\varepsilon_2}\partial_y u+\nabla_x\upsilon\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mu}_3\mu_3 L}{\overline{\rho}U^2 L}\Big(\Big(\frac{\mathfrak{L}U}{L^2}\partial_y u+\frac{V\mathfrak{L}^2}{L^3}\nabla_x\upsilon\Big)\cdot\nabla_x b\Big)\nabla_x b &= \frac{\overline{\mu}_3\mu_3 L}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}\frac{\mathfrak{L}U}{L^2}\Big(\Big(\partial_y u+\frac{V\mathfrak{L}^2L^2}{L^2\mathfrak{L}U}\nabla_x\upsilon\Big)\cdot\nabla_x b\Big)\nabla_x b \\ &= \frac{\overline{\mu}_3\mu_3}{\overline{\rho}UL}\Big(\Big(\partial_y u+\varepsilon^2\nabla_x\upsilon\Big)\cdot\nabla_x b\Big)\nabla_x b \\ &= \frac{\mu_3}{Re_3}\Big(\Big(\partial_y u+\varepsilon^2\nabla_x\upsilon\Big)\cdot\nabla_x b\Big)\nabla_x b, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{V\overline{\mu}_3 L}{L\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}\mu_3\partial_y\upsilon\nabla_x b &= \frac{V\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}\mu_3\partial_y\upsilon\nabla_x b \\
&= \frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}\mu_3\partial_y\upsilon\nabla_x b \\
&= \frac{1}{Re_3}\mu_3\partial_y\upsilon\nabla_x b,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\left|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_x b\right|^2\right)^{3/2}\frac{L}{\overline{\rho}U^2\mathfrak{L}}.\overline{\mathfrak{K}}U\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_1(u)\\ \\ \mathfrak{K}_2(u)\end{pmatrix} &= \left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\right)^{3/2}\frac{L\overline{\mathfrak{K}}}{\overline{\rho}U\mathfrak{L}}\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_1(u)\\ \\ \mathfrak{K}_2(u)\end{pmatrix} \\
&= \left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\right)^{3/2}\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_1(u)\\ \\ \mathfrak{K}_2(u)\end{pmatrix} \\
avec \quad \overline{\mathfrak{K}} = \frac{\overline{\rho}U\mathfrak{L}}{L},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{\mu}_3\mu_3}{\overline{\rho}U^2}|\nabla_x b|^2\left(\frac{\mathfrak{L}^2U}{L^3}\partial_y u+\frac{\mathfrak{L}^3V}{L^2}\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b &= \frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}UL}\mu_3|\nabla_x b|^2\left(\frac{\mathfrak{L}^2}{L^2}\partial_y u+\frac{\mathfrak{L}^3V}{LU}\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b \\
&= \frac{\mu_3}{Re_3}|\nabla_x b|^2\left(\varepsilon^2\partial_y u+\varepsilon^4\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{L}V\overline{\mu}_3}{L^2\overline{\rho}U^2}\mu_3|\nabla_x b|^2\partial_y\upsilon &= \frac{\overline{\mu}_3}{\overline{\rho}UL}\frac{\mathfrak{L}V}{UL}\mu_3|\nabla_x b|^2\partial_y\upsilon \\
&= \frac{\mu_3}{Re_3}\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\partial_y\upsilon,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{\mu}_2\mathfrak{L}}{L\overline{\rho}U^2}\mu_2\left(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_y u+\frac{V}{L}\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b &= \frac{\overline{\mu}_2}{\overline{\rho}UL}\frac{\mathfrak{L}}{U}\mu_2\left(\frac{U}{\mathfrak{L}}\partial_y u+\frac{V}{L}\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b \\
&= \frac{\mu_2}{Re_2}\left(\partial_y u+\frac{\mathfrak{L}V}{UL}\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b \\
&= \frac{\mu_2}{Re_2}\left(\partial_y u+\varepsilon^2\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{\mu}_1U\mathfrak{L}^2}{L^2\overline{\rho}U^2}\mu_1\left(D_x(u)\nabla_x b\right)\cdot\nabla_x b &= \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\rho}UL}\frac{\mathfrak{L}^2}{L}\mu_1\left(D_x(u)\nabla_x b\right)\cdot\nabla_x b \\
&= \frac{\mu_1}{Re_1}\varepsilon^2\left(D_x(u)\nabla_x b\right)\cdot\nabla_x b,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(1+|\frac{\mathfrak{L}}{L}\nabla_x b|^2\overline{\mathfrak{K}}V\mathfrak{K}_3(\upsilon)\frac{1}{\overline{\rho}U^2} &= \left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\right)^{3/2}\frac{\overline{\mathfrak{K}}V}{\overline{\rho}U^2}\mathfrak{K}_3(\upsilon)\\
&= \frac{\overline{\rho}U\mathfrak{L}}{L}\frac{V}{\overline{\rho}U^2}\mathfrak{K}_3(\upsilon)\\
&= \frac{\mathfrak{L}V}{LU}\left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\right)^{3/2}\mathfrak{K}_3(\upsilon)\\
&= \varepsilon^2\left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\right)^{3/2}\mathfrak{K}_3(\upsilon).
\end{aligned}
$$

Ainsi, la condition au fond est donnée par

$$
\left\{
\begin{array}{l}
-\frac{\mu_1}{Re_1}\left(\left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\right)I_2-\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\right)\mathbf{D}(u)\nabla_x b\\
+\frac{\mu_2}{Re_2}\left(\left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\right)I_2-\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u+\nabla_x\upsilon\right)\\
-\frac{\mu_3}{Re_3}\left(\left(\partial_y u+\varepsilon^2\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b\right)\nabla_x b+2\frac{1}{Re_3}\mu_3\partial_y\upsilon\nabla_x b\\
\quad=\left(1+\upsilon^2|\nabla_x b|^2\right)^{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_1(u)\\ \\ \mathfrak{K}_2(u)\end{pmatrix},\\
-\frac{\mu_3}{Re_3}|\nabla_x b|^2\left(\varepsilon^2\partial_y u+\varepsilon^4\nabla_x\upsilon\right)\cdot\nabla_x b+2\varepsilon^2\frac{\mu_3}{Re_3}|\nabla_x b|^2\partial_y\upsilon\\
\quad+\frac{\mu_2}{Re_2}\left(\partial_y u+\varepsilon^2\nabla_x\upsilon\right)\nabla_x b\\
\quad-\varepsilon^2\frac{\mu_1}{Re_1}\left(\mathbf{D}_x(u)\nabla_x b\right)\cdot\nabla_x b\\
\quad=\varepsilon^2\left(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|\right)^{\frac{3}{2}}\mathfrak{K}(\upsilon).
\end{array}
\right.
\tag{49}
$$

En multipliant l'équation (46) par $\dfrac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}$ on aura :

$$
\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}\partial_t b\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}=\partial_t b,\quad \frac{U\mathfrak{L}}{L}\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}u\cdot\nabla_x b=u\cdot\nabla_x b,
$$

$$
V\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}\upsilon=\upsilon,\quad \overline{\mathcal{S}}\mathcal{S}\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}}=\frac{\overline{\mathcal{S}}\mathcal{S}}{V}=\frac{\overline{\mathcal{S}}\mathcal{S}}{\varepsilon U}.
$$

Alors, la condition de la variation du lit est donné par

$$\partial_t b + u\Big(x,t,b\Big)\cdot\nabla_x - \upsilon\Big(t,x,b\Big) = \frac{\overline{\mathcal{S}}}{\varepsilon U}\mathcal{S}. \tag{50}$$

On sait que

$$\sqrt{\theta} \approx \mathfrak{U} \quad or \quad \mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}} \Rightarrow \theta \approx \frac{\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{T}^2}.$$

D'où, on a

$$\left(\frac{\theta\mathfrak{T}^2}{L^2} = \varepsilon^2\right) \qquad et \qquad \left(\frac{\theta\mathfrak{T}^2}{\mathfrak{L}^2} = 1\right). \tag{51}$$

Lorsqu'on remplace (51) dans le système (47), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t\rho + div_x(\rho u) + \partial_y(\rho\upsilon) = 0, \\ \partial_t\Big(\rho u\Big) + div_x\Big(\rho u\otimes u\Big) + \partial_y\Big(\rho\upsilon u\Big) + \nabla_x\Big(p(\rho) + \varepsilon^2\rho_s\Big) = \\ \frac{1}{Re_1}div_x\Big(\mu_1\mathbf{D}_x(u)\Big) + \frac{1}{Re_2}\partial_y\left(\mu_2\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u + \nabla\upsilon\right)\right) + \frac{1}{Re_\lambda}\nabla_x\Big(\lambda div(u)\Big), \\ \partial_t\Big(\rho\upsilon\Big) + div_x\Big(\rho u\upsilon\Big) + \partial_y\Big(\rho\upsilon^2\Big) + \partial_y\left(\frac{1}{\varepsilon^2}p(\rho) + \rho_s\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{F_r^2}\rho \\ +\frac{1}{Re_3}div_x\left(\mu_3\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_y u + \nabla_x\upsilon\right)\right) + \frac{2}{\varepsilon^2 Re_3}\partial\Big(\mu_3\partial_y\upsilon\Big) \\ +\frac{1}{\varepsilon^2 Re_\lambda}\partial_y\Big(\lambda div(u)\Big). \end{cases} \tag{52}$$

Analyse asymptotique

Soit le régime asymptotique suivant

$$\frac{\mu_i}{Re_i} = \varepsilon^{i-1}\nu_i(\rho), \quad i = 1,2,3 \quad et \quad \frac{\lambda(\rho)}{Re_\lambda} = \varepsilon^2\gamma(\rho). \tag{53}$$

Maintenant on introduit (53) dans (50), (48) et (49) :
pour le système (50) on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + div_x(\rho u) + \partial_y(\rho \upsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + div_x\Big(\rho u \otimes u\Big) + \partial_y\Big(\rho \upsilon u\Big) + \nabla_x p(\rho) + \varepsilon^2 \nabla_x \rho_s = div_x\Big(\nu_1 D_x(u)\Big) \\ +\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y\Bigg(\nu_2\Big(\partial_y u\Big) + \varepsilon \partial_y\Big(\nu_2 \nabla_x \upsilon\Big)\Bigg) + \varepsilon^2 \nabla_x\Big(\gamma div(u)\Big), \\ \partial_t\Big(\rho \upsilon\Big) + div_x\Big(\rho u \upsilon\Big) + \partial_y\Bigg(\rho \upsilon^2\Bigg) + \partial_y\Bigg(\dfrac{1}{\varepsilon^2}p(\rho)\Bigg) + \partial_y \rho_s = \\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2 F_r^2}\rho + div_x\Big(\nu_3 \partial_y u\Big) + 2\partial_y\Big(\nu_3 \partial_y \upsilon\Big) + \partial_y\Big(\gamma div_x(u)\Big) + \varepsilon^2 div_x\Big(\nu_3 \nabla_x \upsilon\Big). \end{cases} \tag{54}$$

Les conditions à la surface libre (48) deviennent

$$\begin{cases} \Bigg(p + \beta\kappa - p_0\Bigg)\nabla_x H - \nu_1 D_x(u)\nabla_x H + \nu_2\Bigg(\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y u + \varepsilon \nabla_x \upsilon\Bigg) \\ -\varepsilon^2 \gamma div_x(u)\nabla_x H - \varepsilon^2 \gamma \partial_y(\upsilon)\nabla_x H = 0, \\ \Bigg(-p - \alpha\kappa + p_0\Bigg) - \varepsilon^2 \nu_3\Bigg(\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x \upsilon\Bigg)\cdot \nabla_x H \\ +2\varepsilon^2 \nu_3 \partial_y \upsilon + \varepsilon^2 \gamma\Bigg(div_x(u) + \partial_y(\upsilon)\Bigg) = 0 \end{cases} \tag{55}$$

et les conditions au fond (49) donnent le système suivant

$$\begin{cases} -2\nu_1\Bigg(\Bigg(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Bigg)I_2 - \varepsilon^2 \nabla_x b \nabla_x b^t\Bigg)D_x(u)\cdot \nabla_x b + \nu_2\Bigg(\Bigg(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Bigg)I_2 \\ -\varepsilon^2 \nabla_x b \nabla_x b^t\Bigg)\cdot\Bigg(\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y u + \varepsilon \nabla_x \upsilon\Bigg) - \varepsilon^2 \nu_3\Bigg(\Bigg(\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x \upsilon\Bigg)\cdot \nabla_x b\Bigg)\nabla_x b \\ +2\varepsilon^2 \nu_3 \partial_y \upsilon \nabla_x b = \Bigg(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Bigg)^{3/2}\begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ -\varepsilon^2 \nu_3 |\nabla_x b|^2\Bigg(\varepsilon^2 \partial_y u + \varepsilon^4 \nabla_x \upsilon\Bigg)\cdot \nabla_x b + 2\varepsilon^4 \nu_3 |\nabla_x b|^2 \partial_y \upsilon + \varepsilon \nu_2\Bigg(\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x \upsilon\Bigg)\cdot \nabla_x b \\ -\varepsilon^2 \nu_1\Bigg(D_x(u)\nabla_x b\Bigg)\cdot \nabla_x b = \varepsilon^2\Bigg(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Bigg)^{3/2}\mathfrak{K}_3(\upsilon). \end{cases} \tag{56}$$

On écrit maintenant le développement asymptotique des quantités u, p, υ et ρ c'est-à-dire sous la forme :

$$u = u^0 + \varepsilon u^1, \quad \rho = \rho^0 + \varepsilon \rho^1, \quad \upsilon = \upsilon^0 + \varepsilon \upsilon^1, \quad p = p^0 + \varepsilon p^1, \quad h = h^0 + \varepsilon h^1. \tag{57}$$

Par la suite, on introduit (57) dans (54), (55) et (56).
En le faisant, on a pour le système (54) :

$$
\begin{cases}
\partial_t\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)+div_x\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)+\partial_y\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg)=0,\\
\partial_t\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)+div_x\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\otimes\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)\\
+\partial_y\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)+\nabla_x\bigg(\dfrac{1}{4Fr^2}\Big(h^0+\varepsilon h^1\Big)\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)^2+\varepsilon^2\rho_s\bigg)\\
=div_x\bigg(\nu_1 D_x\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)+\varepsilon^2\nabla_x\bigg(\gamma div\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)\\
\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y\bigg(\nu_2\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\varepsilon\partial_y\Big(\nu_2\nabla_x\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\Big)\bigg),\\
\partial_t\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg)+div_x\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg)\\
+\partial_y\bigg(\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)^2\bigg)+\partial_y\bigg(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{1}{F_r^2}\Big(h^0+\varepsilon h^1\Big)\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)^2\bigg)+\partial_y\Big(\rho_s^0+\varepsilon\rho_s^1\Big)\\
=-\dfrac{1}{\varepsilon^2F_r^2}\Big(\rho^0+\varepsilon\rho^1\Big)+div_x\bigg(\nu_3\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)+2\partial_y\bigg(\nu_3\partial_y\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg)\\
+\partial_y\bigg(\gamma div_x\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\bigg)+\varepsilon^2 div_x\bigg(\nu_3\nabla_x\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg).
\end{cases}
\tag{58}
$$

Les conditions à la surface libre (55) deviennent

$$
\begin{cases}
\bigg(\dfrac{1}{4Fr^2}\Big(h^0+\varepsilon h^1\Big)\Big(\rho^1+\varepsilon\rho^1\Big)^2+\beta\kappa-p_0\bigg)\nabla_x H-\nu_1 D_x\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\nabla_x H\\
+\nu_2\bigg(\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\varepsilon\nabla_x\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg)-\varepsilon^2\gamma div_x\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\nabla_x H\\
-\varepsilon^2\gamma\partial_y\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\nabla_x H=0,\\
\bigg(-\dfrac{1}{4Fr^2}\Big(h^0+\varepsilon h^1\Big)-\alpha\kappa+p_0\bigg)-\varepsilon^2\nu_3\bigg(\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\varepsilon^2\nabla_x\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg)\cdot\nabla_x H\\
+2\varepsilon^2\nu_3\partial_y\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)+\varepsilon^2\gamma\bigg(div_x\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\partial_y\Big(\upsilon^0+\varepsilon\upsilon^1\Big)\bigg)=0
\end{cases}
\tag{59}
$$

et les conditions au fond (56) fournissent le système suivant

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\quad -2\nu_1\Bigg(\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)I_2-\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\Bigg)\cdot D_x\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\cdot\nabla_x b \\[2ex]
+\nu_2\Bigg(\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)I_2-\varepsilon^2\nabla_x b\nabla_x b^t\Bigg)\cdot\Bigg(\frac{1}{\varepsilon}\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\varepsilon\nabla_x\Big(v^0+\varepsilon v^1\Big)\Bigg) \\[2ex]
\;-\varepsilon^2\nu_3\Bigg(\Bigg(\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\varepsilon^2\nabla_x\Big(v^0+\varepsilon v^1\Big)\Bigg)\cdot\nabla_x b\Bigg)\nabla_x b \\[2ex]
\;+2\varepsilon^2\nu_3\partial_y\Big(v^0+\varepsilon v^1\Big)\nabla_x b=\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)^{3/2}\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_1\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\\[2ex]\mathfrak{K}_2\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\end{pmatrix}, \\[2ex]
\;-\varepsilon^2\nu_3|\nabla_x b|^2\Bigg(\varepsilon^2\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\varepsilon^4\nabla_x\Big(v^0+\varepsilon v^1\Big)\Bigg)\cdot\nabla_x b \\[2ex]
\qquad +2\varepsilon^4\nu_3|\nabla_x b|^2\partial_y\Big(v^0+\varepsilon v^1\Big)+\varepsilon\nu_2\Bigg(\partial_y\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)+\varepsilon^2\nabla_x\Big(v^0+\varepsilon v^1\Big)\Bigg)\cdot\nabla_x b \\[2ex]
-\varepsilon^2\nu_1\Bigg(D_x\Big(u^0+\varepsilon u^1\Big)\nabla_x b\Bigg)\cdot\nabla_x b=\varepsilon^2\Big(1+\varepsilon^2|\nabla_x b|^2\Big)^{3/2}\mathfrak{K}_3\Big(v^0+\varepsilon v^1\Big).
\end{array}
\right.
\tag{60}
$$

Après, on fait une identification suivant les puissances du paramètre ε.
A l'ordre ε^{-2} :

l'équation (58) donne,

$$\frac{h^0}{4Fr^2}\partial_y\Big(\rho^0\Big)^2=-\frac{1}{Fr^2}\rho^0\Longrightarrow\frac{h^0}{4}\partial_y\Big(\rho^0\Big)^2=-\rho^0.$$

D'où, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{h^0}{4}\partial_y\Big(\rho^0\Big)^2=-\rho^0 \quad &\Longrightarrow \quad 2\frac{h^0}{4}\rho^0\partial_y\rho^0=-\rho^0\\
&\Longrightarrow \quad h^0\partial_y\rho^0=-2\\
&\Longrightarrow \quad h^0\rho^0=-2[y]_Z^H\\
&\Longrightarrow \quad h^0\rho^0=-2\Big(H-Z\Big).
\end{aligned}
$$

A l'ordre ε^{-1} :

l'équation (58) donne,

$$\partial_y\Big(\nu_2\partial_y u^0\Big)=0,$$

l'équation (59) donne,

$$\nu_2 \partial_y u^0 = 0 \quad en \quad y = H^0,$$

A l'ordre ε^0 :

l'équation (58) devient,

$$\begin{cases} \partial_t \rho^0 + div_x\Big(\rho^0 u^0\Big) + \partial_y\Big(\rho^0 \upsilon^0\Big) = 0, \\ \partial_t\Big(\rho^0 u^0\Big) + div_x\Big(\rho^0 u^0 \otimes u^0\Big) + \partial_y\Big(\rho^0 \upsilon^0 u^0\Big) + \nabla_x p\Big(\rho^0\Big) = div_x\Big(\nu_1 \mathbf{D}_x\Big(u^0\Big)\Big) \\ +\partial_y\Big(\nu_2 \partial_y u^1\Big), \\ h^0 \rho^0\Big(t,x,y\Big) = 2\Big(H - y\Big), \end{cases} \tag{61}$$

l'équation (59) devient,

$$\begin{cases} \Big(p + \beta\kappa - p_0\Big)\nabla_x H - \nu_1 \mathbf{D}_x(u^0)\nabla_x H + \Big(\nu_2 \partial_y u^1\Big) = 0, \\ \Big(-p - \beta\kappa + p_0\Big) = 0, \end{cases} \tag{62}$$

l'équation (60) donne,

$$\begin{cases} -2\nu_1 \mathbf{D}_x\Big(u^0\Big)\nabla_x b + \nu_2 \partial_y u^1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u^0) \\ \mathfrak{K}_2(u^0) \end{pmatrix}, \\ \nu_2 \partial_y u^1 \nabla_x b = 0. \end{cases} \tag{63}$$

Et l'équation de continuité donne, en posant $\bar{\mathcal{S}} = \varepsilon U$,

$$\partial_t b^0 + U^0\Big(t,x,b^0\Big) \cdot \nabla_x b^0 - \upsilon^0\Big(t,x,b^0\Big) = \mathcal{S}.$$

Ainsi, en omettant la puissance zéro, à l'ordre principal, on obtient notre modèle asymptotique donné par :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + div_x\Big(\rho u\Big) + \partial_y\Big(\rho\upsilon\Big) = 0, \\ \partial_t\Big(\rho u\Big) + div_x\Big(\rho u \otimes u\Big) + \partial_y\Big(\rho\upsilon u\Big) + \nabla_x p(\rho) = div_x\Big(\nu_1 \mathbf{D}_x(u)\Big) \\ +\partial_y\Big(\nu_2 \partial_y u^1\Big), \\ h\rho\Big(t,x,y\Big) = 2\Big(H - y\Big). \end{cases} \tag{64}$$

En posant $\kappa = p_0 = 0$, la condition au niveau de la surface libre se réduit à :

$$\begin{cases} -\nu_1 \mathbf{D}_x(u)\nabla_x H + \Big(\nu_2 \partial_y u^1\Big) = 0, \\ \\ \nabla_x\Big(h\rho\Big) = 0 \end{cases} \tag{65}$$

et la condition au fond s'écrit :

$$\begin{cases} -\nu_1 \mathbf{D}_x(u)\nabla_x b + \nu_2 \partial_y u^1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ \\ \partial_t b + u(t,x,b)\cdot\nabla_x b - \upsilon(t,x,b) = \mathcal{S}. \end{cases} \tag{66}$$

Les équations proches des équations Saint-Venant-Exner sont alors obtenues en posant $\mathcal{S} = 0$.

Intégration suivant la verticale

Le modèle de sédimentation est obtenu en faisant une moyennisation suivant la verticale du système (64) tout en utilisant les conditions aux limites (65)-(66). A cette fin, pour toute fonction f, on note sa valeur moyenne verticale par

$$h(t,x)\bar{f}(t,x) = \int_b^H f\,dy.$$

On note que l'équation hydrostatique nous permet d'avoir $h\rho = 2\Big(H - y\Big)$. Par la suite, on en déduit :

$$\int_b^H \rho\,dy = \frac{1}{h}\int_b^H h\rho\,dy = \frac{2}{h}\int_b^H \Big(H-y\Big)\,dy = h. \tag{67}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \int_b^H \rho dy &= \frac{1}{h}\int_b^H h\rho dy = \frac{2}{h}\int_b^H (H-y)dy \\ &= \frac{2}{h}\left([Hy]_b^H - \frac{1}{2}[y^2]_b^H\right) = \frac{2}{h}\left(H\Big(H-b\Big) - \frac{1}{2}\Big(H-b\Big)\Big(H+b\Big)\right) \\ &= 2H - (H+b) = H - b = h. \end{aligned}$$

Ainsi, la pression moyenne s'écrit :

$$\int_b^H h\rho^2\,dy = \frac{4}{3}h^2 \tag{68}$$

i.e :

$$\begin{aligned}
\int_b^H h\rho^2 dy &= \frac{1}{h}\int_b^H h^2\rho^2 dy = \frac{4}{h}\int_b^H \Big(H-y\Big)^2 dy \\
&= \frac{4}{h}\int_b^H \Big(H^2 - 2Hy + y^2\Big) dy \\
&= \frac{4}{h}\bigg(H\Big(H-b\Big) - H\Big(H^2-b^2\Big) + \frac{1}{3}\Big(H^3-y^3\Big)\bigg) \\
&= \frac{4}{h}\bigg(H^2h - Hh\Big(H+b\Big) + \frac{1}{3}h\Big(H^2+Hb+b^2\Big)\bigg) \\
&= -4Hb + \frac{4}{3}H^2 + \frac{4}{3}Hb + \frac{4}{3}b^2 = \frac{4}{3}H^2 + \frac{4}{3}b^2 - \frac{8}{3}Hb \\
&= \frac{4}{3}\Big(H-b\Big)^2 = \frac{4}{3}h^2.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant :
• La formule de Leibniz qui est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f\Big(x,t\Big)dx = \int_{a(t)}^{(t)} \frac{\partial f\Big(x,t\Big)}{\partial t}dx - f\Big(a(t),t\Big)\frac{da}{dt} + f\Big(b(t),t\Big)\frac{db}{dt},$$

• les conditions aux limites (65)-(66),
• $u = \bar{u} + O(\varepsilon)$,
• l'équation (67).
On obtient, les éléments de l'équation de la masse moyenne suivant la verticale qui sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \partial_t \rho dy &= \partial_t \int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \rho dy - \rho\partial_t H + \rho\partial_t b \\
&= \partial_t h - \rho\partial_t H + \rho\partial_t b,
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} div_x(\rho u)dy &= div_x\bigg(\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \rho u dy\bigg) - \rho u\nabla_x H + \rho\nabla_x b \\
&= div_x(hu) - \rho u\nabla_x H + \rho u\nabla_x b,
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \partial_y(\rho v)dy &= \partial_y(hv) - \rho v\partial_y H + \rho v\partial_y b \\
&= \partial_y(hv).
\end{aligned} \tag{71}$$

Et en les additionnant, on obtient

$$\begin{aligned}
(69)+(70)+(71) &= \partial_t h - \rho\partial_t H + \rho\partial_t b + div_x(hu) - \rho u\nabla_x H + \rho u\nabla_x b + \partial_y(hv) \\
&= \partial_t h + div(hu) - \rho\bigg(\partial_t H + u\nabla_x H\bigg) + \rho\bigg(\partial_t b + u\nabla_x b\bigg) \\
&= \partial_t h + div(hu).
\end{aligned}$$

D'où l'équation de la masse moyenne devient

$$\partial_t h + div(h\overline{u}) = 0. \tag{72}$$

De la même manière, l'intégration de l'équation de la quantité de mouvement suivant l'horizontal du système (64) pour $b \leqslant z \leqslant H$ donne :

$$\begin{aligned}\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \partial_t(\rho u) &= \partial_t\Big(\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \rho u dy\Big) - \rho u \partial_t H + \rho u \partial_t b \\ &= \partial_t(hu) - \rho u \partial_t H + \rho u \partial_t b,\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} div_x\Big(\rho u \otimes u\Big) dy &= div_x\Big(\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \rho u \otimes u dy\Big) - \rho u \otimes u \nabla_x H + \rho u \otimes u \nabla_x b \\ &= div_x\Big(hu \otimes u\Big) - \rho u \otimes u \nabla_x H + \rho u \otimes u \nabla_x b,\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \partial_y\Big(\rho \upsilon u\Big) dy &= \partial_y\Big(\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \rho \upsilon u dy\Big) - \rho \upsilon u \partial_y H + \rho \upsilon u \partial_y b \\ &= \partial_y\Big(h \upsilon u\Big),\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \frac{1}{4F_r^2} \nabla_x\Big(h\rho^2\Big) dy &= \frac{1}{4F_r^2} \nabla_x\Big(\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} h\rho^2 dy\Big) - \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x H + \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x b \\ &= \frac{1}{4F_r^2}\frac{4}{3} \nabla_x\Big(h^2\Big) - \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x H + \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x b \\ &= \frac{1}{3F_r^2} \nabla_x h^2 - \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x H + \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x b,\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} div_x\Big(\nu_1 D_x(u)\Big) dy &= div_x\Big(\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \nu_1 D_x(u) dy\Big) - \nu_1 D_x(u) \nabla_x H + \nu_1 D_x(u) \nabla_x b \\ &= div_x\Big(\nu_1 h D_x(u)\Big) - \nu_1 D_x(u) \nabla_x H + \nu_1 D_x(u) \nabla_x b,\end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \partial_y\Big(\frac{\nu_2}{\varepsilon} \partial_y u^1\Big) dy &= \partial_y\Big(\int_{b(t,x)}^{H(t,x)} \frac{\nu_2}{\varepsilon} \partial_y u^1 dy\Big) - \frac{\nu_2}{\varepsilon} \partial_y H + \frac{\nu_2}{\varepsilon} \partial_y u^1 \partial_y b \\ &= \partial_y\Big(h \frac{\nu_2}{\varepsilon} \partial_y u^1\Big).\end{aligned} \tag{78}$$

En faisant la somme de (73), (74), (75), (76), (77) et (78) on a :

$$\begin{gathered}\partial_t\Big(hu\Big) - \rho u \partial_t H + \rho u \partial_t b + \partial_y\Big(h \upsilon u\Big) \\ + div_x\Big(hu \otimes u\Big) - \rho u \otimes u \nabla_x H + \rho u \otimes u \nabla_x b \\ + \frac{1}{3F_r^2} \nabla_x h^2 - \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x H + \frac{1}{4F_r^2} h\rho^2 \nabla_x b \\ = div_x\Big(\nu_1 h D_x(u)\Big) - \nu_1 D_x(u) \nabla_x H \\ + \nu_1 D_x(u) \nabla_x b + \partial_y\Big(h \frac{\nu_2}{\varepsilon} \partial_y u^1\Big).\end{gathered}$$

En utilisant les conditions limites (65)-(66), et $u = \overline{u} + O(\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(hu) + div_x(hu \otimes u) + \partial_y(h\upsilon u) + \frac{1}{3F_r^2}\nabla_x h^2 \\
&-\rho u\Big(\partial_t H + u\nabla_x H\Big) + \rho u\Big(\partial_t b + u\nabla_x b\Big) \\
&-\frac{1}{4F_r^2}h\rho^2\nabla_x H + \frac{1}{4F_r^2}h\rho^2\nabla_x b \\
&= div_x\Big(\nu_1 h D_x(u)\Big) - \frac{\nu_2}{\varepsilon}\partial_y u^1 \\
&+\frac{\nu_2}{\varepsilon}\partial_y u^1 - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Après simplification, on a :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(hu) + div\Big(hu \otimes u\Big) + \frac{1}{3F_r^2}\nabla_x h^2 \\
&-\frac{1}{4F_r^2}h\rho^2\nabla_x H + \frac{1}{4F_r^2}h\rho^2\nabla_x b \\
&= div_x\Big(\nu_1 h D_x(u)\Big) - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or

$$h\rho\Big(t,x,y\Big) = 2\Big(H-y\Big) \Rightarrow h\rho^2 = 2\Big(H-y\Big)\rho.$$

Lorsque

$$y = H \;\; alors \;\; h\rho^2 = 0$$

et lorsque

$$y = b \;\; alors \;\; h\rho^2 = 2(H-b)\rho = 2h\rho = 2\Big(2(H-b)\Big) = 4h.$$

Nous obtenons finalement pour la quantité de mouvement :

$$\partial_t(h\overline{u}) + div\Big(h\overline{u}\otimes u\Big) + \frac{1}{3F_r^2}\nabla h^2 = -\frac{h}{F_r^2}\nabla b + div\Big(h\mathbf{D}(\overline{u})\Big) - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Pour en revenir aux variables physiques, le modèle présenté de type Saint-Venant-Exner se lit comme suit :

$$\begin{cases}
\partial_t h + div\Big(h\overline{u}\Big) & = \quad 0, \\
\partial_t\Big(h\overline{u}\Big) + div\Big(h\overline{u}\otimes\overline{u}\Big) + gh\nabla\left(\dfrac{h}{3} + b\right) & = \quad div\Big(h\mathbf{D}(\overline{u})\Big) - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\
\partial_t b + u\cdot\nabla_x b & = \quad \upsilon.
\end{cases} \quad (80)$$

Remarque III.2

- *Si on pose* $\upsilon - u\cdot\nabla_x b = div\Big(\alpha h u|u|^k - \beta\nu\nabla b I\Big)$, *on aura le fond de Zabsonré.*
- *Si on pose* $\upsilon - u\cdot\nabla_x b = div(hu)$, *on aura le fond de Grass.*

Conclusion

Nous avons présenté une méthode nous permettant d'obtenir un modèle de Saint-Venant-Exner avec une équation de transport par charriage.
Ce modèle est obtenu par une moyennisation suivant la verticale des équations de Navier-Stokes compressibles aux quelles nous avons ajouté d'autres équations obtenues à partir de l'équation de Vlasov.
Toutefois, ce travail nous a permis d'obtenir les équations de Saint-Venant-Exner mais il serait pertinent d'étendre cette étude pour trouver l'expression de la vitesse verticale au fond à partir de l'équation de Vlasov.

Bibliographie

[1] Didier Bresch and Benoît Desjardins. Sur un modèle de Saint-Venant visqueux et sa limite quasi-géostrophique. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 335(12) :1079–1084, 2002.

[2] Didier Bresch and Benoît Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Commun. Math. Phys.*, 238(1-2) :211–223, 2003.

[3] Didier Bresch and Pascal Noble. Mathematical justification of a shallow water model. *Methods Appl. Anal.*, 14(2) :87–117, 2007.

[4] Jean de Dieu Zabsonré, Carine Lucas, and Enrique Fernández-Nieto. An energetically consistent viscous sedimentation model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 19(3) :477–499, 2009.

[5] AM Ferreiro. *Development of post-process technics of hydrodynamics flux, modelization of sediment transport problems and numerical simulation through finite volume technics.* PhD thesis, PhD Thesis, Seville, 2006.

[6] Thierry Goudon, Pierre-Emmanuel Jabin, and Alexis Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. I : Light particles regime. II : Fine particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6) :1495–1515, 2004.

[7] AJ Grass. *Sediment transport by waves and currents.* University College, London, Department of Civil Engineering, 1981.

[8] C. David Levermore, Marcel Oliver, and Edriss S. Titi. Global well-posedness for models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(2) :479–510, 1996.

[9] Fabien Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *Eur. J. Mech., B, Fluids*, 26(1) :49–63, 2007.

[10] A. Mellet and A. Vasseur. On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Commun. Partial Differ. Equations*, 32(3) :431–452, 2007.

[11] Eugen Meyer-Peter and R Müller. Formulas for bed-load transport. In *IAHSR 2nd meeting, Stockholm, appendix 2.* IAHR, 1948.

[12] Timack Ngom. *Etude mathématique et numérique de quelques modèles d'écoulement en couches minces : application à la sédimentation.* PhD thesis, Chambéry, 2010.

[13] Pierre Orenga. Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 130(2) :183–204, 1995.

[14] Céline Savary et al. Transcritical transient flow over mobile beds, boundary conditions treatment in a two-layer shallow water model, 2007.

[15] Babacar Toumbou, Daniel Y Le Roux, and Abdou Sene. An existence theorem for a 2-d coupled sedimentation shallow-water model. *Comptes Rendus Mathematique*, 344(7) :443–446, 2007.