UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE :	Sciences et Technologies
MENTION :	Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ :	Mathématiques Pures
OPTION :	Algèbre

Thème : Produit semi-direct d'algèbres de H-dimodules déformées

Présenté par : Azize MANGA

Sous la direction de : Thomas GUEDENON

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Marie Salomon SAMBOU	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Thomas GUEDENON	Professeur Assimilé	Directeur	UASZ
Moussa FALL	Maitre de Conf. Assimilé	Examinateur	UASZ
Christophe Lopez NANGO	Docteur	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2020−2021

Produit semi-direct d'algèbres de H-dimodules déformées

Azize MANGA

19 Mars 2022

Table des matières

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude à l'**ÉTERNEL DIEU** de grâce, Lui sans qui je ne peux rien faire, pour toute la force, le courage et la persévérance qu'il m'a donné d'accomplir ce modeste travail.

Que la louange et la gloire Lui reviennent.

La première personne que je tiens à remercier, est mon Directeur de mémoire **Thomas GUEDENON**, pour les orientations, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les enseignants de l'Université Assane Seck, en particulier ceux du Département de Mathématiques pour leur grande contribution à ma formation de la licence 1 jusqu'en Master 2.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les membres du jury : Professeur **Marie Salomon SAMBOU**, Docteur **Moussa FALL** et Docteur **Christophe Lopez NANGO** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon projet en acceptant d'examiner mon travail et d'apporter des propositions pertinentes ayant permis de réaliser ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi aux Docteurs : **Eramane BODIAN, Souhaibou SAMBOU, Nestor DJINTELBE, Marcel BADIANE** $\cdots$ Je remercie également mes anciens : **Seth KOUMLA, Pape Modou SARR, Agack Alain DIEDHOU, Moustapha CAMARA, Papa BADIANE** et à l'ensemble des étudiants de Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université Assane Seck sans oublier mes camarades de promotion en Master Mathématiques.

Mes chaleureux et cordiaux remerciements à mon père **Jean-Baptiste MANGA**, ma maman **Margot DIATTA** et à mon oncle **Joisin MANGA**, pour leur amour inestimable, leur confiance, leurs soutiens, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

Je ne saurais terminer sans témoigner ma reconnaissance à l'endroit de ma bien-aimée tante **Jacqueline MANGA**, pour toute son affection, sa complicité et ses précieux encouragements.

Je n'oublie bien évidemment pas d'adresser une pensée spéciale de gratitude à tous mes merveilleux et aimables frères et sœurs de la Communauté Chrétienne Évangélique (**CCE**) et à tous les membres du Groupe Biblique Universitaire de l'UASZ (**GBU**) pour leurs prières, leurs conseils et encouragements.

Qu'il me soit enfin permis de remercier toute la famille **MANGA**, la famille **BASSENE** à Lyndiane, Mr **César BASSENE**, Mr **Adolphe DIATTA**, Mr **Antoine DIATTA**, Mr **François BASSENE**, Docteur **GUY MBATCHOU**, ma grande sœur **Jeanne Marie SENGHOR**, Mr **Médard DIATTA** et mes deux petites sœurs : **Fatou Djilobone MANGA et Juliette Agnialao MANGA** pour leur amour et leurs soutiens constants et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

RÉSUMÉ

Soit $\mathbb{K}$ un corps et H une algèbre de Hopf sur $\mathbb{K}$.
L'objectif de ce travail est d'étudier les H-dimodules déformés. Notre étude est basée précisément sur deux notions : l'action à gauche $\rightharpoonup$ et celle à droite $\leftharpoonup$ pour une algèbre de H-dimodule déformée. La formule de la co-unité : $h_1\varepsilon(h_2) = h = \varepsilon(h_1)h_2$ et celle de l'antipode : $S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = h_1S(h_2)$ vont jouer un rôle très important dans la compréhension des H-dimodules déformés.

INTRODUCTION ET PRELIMINAIRES

Dans ce Mémoire de Master nous avons étudié les résultats de l'article de Chen Xiao-Yuan intitulé **Produit semi-direct d'algèbres de H-dimodule déformées** (Titre original : « **Smash product algebras over twisted dimodule algebras** ») paru dans *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, volume 23, n°3, (2008), 366—370.* Dans [2] ; Caenepeel, Oystaeyen et Zhang ont introduit la notion d'algèbres de modules de Yang-Baxter quantiques issues d'un module de Yang-Baxter quantique. Dans [3], Long a montré que les algèbres de modules de Yang-Baxter quantiques sont exactement des algèbres de dimodules si l'algèbre de Hopf sous-jacente est à la fois commutative et cocommutative. De plus, ils ont défini un produit tressé pour l'algèbre des modules de Yang-Baxter quantiques de sorte que la catégorie des modules de Yang-Baxter quantiques devienne une catégorie monoïdale et les groupes de Brauer de l'algèbre des modules de Yang-Baxter quantiques peuvent être construits. Motivé par les idées de Zhang et Tong (cf [6]), l'auteur de cet article a introduit la notion d'algèbre de H-dimodule déformée et a mené une étude détaillée de ses propriétés. L'organisation de ce mémoire de Master est la suivante : dans la première partie titrée Algèbre et coalgèbre, nous rappelons quelques notions de base sur les algèbre de Hopf. Dans la deuxième partie nous avons parlé de comodule et de module de Hopf relatif pour définir la notion d'algèbre de H-comodule. Enfin, la troisième et principale partie de ce Mémoire porte sur la définition de l'algèbre de H-dimodule déformée et sur l'étude du produit semi-direct des algèbres de H-dimodules déformées. Voici les principaux résultats qui ont fait l'objet de cette étude :

Théorème 0.0.1 *Soient H une algèbre de Hopf, A et X deux algèbres de H-dimodules déformées telles que les conditions suivantes sont réunies :*

$$\Sigma(h_1 \rightharpoonup a) \otimes h_2 = \Sigma(h_2 \rightharpoonup a) \otimes h_1, \tag{1}$$

$$\Sigma(a \leftharpoonup h_1) \otimes h_2 = \Sigma(a \leftharpoonup h_2) \otimes h_1, \tag{2}$$

$$\Sigma x_0 \otimes x_1 h = \Sigma x_0 \otimes h x_1, \quad \forall\ a \in A,\ x \in X \quad et \quad h \in H. \tag{3}$$

Alors le produit semi-direct $A\sharp X$ de A et X est une algèbre de H-dimodule déformée, où les actions et la coaction sont données respectivement par :

$$h \rightharpoonup (a\sharp x) = \Sigma(h_1 \rightharpoonup a)\sharp(h_2 \rightharpoonup x), \tag{4}$$

$$(a\sharp x) \leftharpoonup h = \Sigma(a \leftharpoonup h_1)\sharp(x \leftharpoonup h_2), \tag{5}$$

$$\lambda(a\sharp x) = \Sigma a_{[0]}\sharp x_{[0]} \otimes a_{[1]} x_{[1]}, \quad \forall\ a \in A, \quad x \in X \quad et \quad h \in H. \tag{6}$$

Théorème 0.0.2 *Soient H une algèbre de Hopf, A et X deux algèbres H-dimodules déformées. Si A et X sont des bialgèbres, alors la structure de coalgèbre tensorielle sur $A\sharp X$ est compatible avec la structure d'algèbre du produit semi-direct $A\sharp X$ est fait de $A\sharp X$ une bialgèbre si et seulement si l'application*

$$f : A\sharp X \longrightarrow A\sharp X,\ f(a\sharp x) = \Sigma x_{[1]1} \rightharpoonup a \leftharpoonup S(x_{[1]2})\sharp x_{[0]}, \forall\ a \in A, x \in X \tag{7}$$

est un morphisme de coalgèbres. De plus, si A et X sont toutes deux des algèbres de Hopf, alors $A\sharp X$ est également une algèbre de Hopf dont l'antipode est donné par :

$$S(a\sharp x) = (1\sharp S(x))(S(a)\sharp 1), \forall\ a \in A, x \in X. \tag{8}$$

Chapitre 1

ALGÈBRE ET COALGÈBRE

1.1 COALGÈBRE

Dans tout notre travail, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et toutes les applications sont $\mathbb{K}$-linéaires.

1.1.1 Algèbre

Définition 1.1.1 *Soit A un ensemble. On dit que A est une $\mathbb{K}$-algèbre (associative unitaire) s'il existe :*

- *deux lois internes :*

$$\begin{array}{llll} "+" : & A \times A \longrightarrow A & & \\ & (a;a') \longmapsto a + a',\ \forall\ a, a' \in A \end{array} \quad et \quad \begin{array}{ll} "\times" : & A \times A \longrightarrow A \\ & (a;a') \longmapsto a \times a' = aa' \end{array}$$

- *et une loi externe :*

$$\begin{array}{ll} "." : & \mathbb{K} \times A \longrightarrow A \\ & (\lambda; a) \longmapsto \lambda.a = \lambda a,\ \forall\ a \in A \ et\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

telles que :

i) $(A, +, .)$ *est un $\mathbb{K}$-module,*

ii) $(A, +, \times)$ *est un anneau,*

iii) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

On a la définition équivalente suivante qui nous permettra de comprendre la définition d'une coalgèbre.

Définition 1.1.2 *Soit A un $\mathbb{K}$-module. On considère $A \otimes_{\mathbb{K}} A = A \otimes A$ le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$.*
Une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire A est un triplet du type (A, m_A, μ_A) où A est un $\mathbb{K}$-module et les applications

$$\begin{array}{ll} m_A : & A \otimes A \longrightarrow A \\ & a \otimes a' \longmapsto aa', \forall\ a, a' \in A \end{array} \qquad et\ \begin{array}{ll} \mu_A : & \mathbb{K} \longrightarrow A \\ & \lambda \longmapsto \lambda 1_A, \forall\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

sont $\mathbb{K}$-linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "id_A\otimes m_A"] \arrow[d, "m_A\otimes id_A"'] & A\otimes A \arrow[d, "m_A"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m_A"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A\otimes A \arrow[dd, "m_A"] & \\
\mathbb{K}\otimes A \arrow[ur, "\mu_A\otimes id_A"] \arrow[dr, "\approx"'] & & A\otimes\mathbb{K} \arrow[ul, "id_A\otimes\mu_A"'] \arrow[dl, "\approx"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire,

- $m_A\circ(m_A\otimes id_A)=m_A\circ(id_A\otimes m_A)$ *: c'est l'associativité,*
- *et* $m_A\circ(id_A\otimes\mu_A)=m_A\circ(\mu_A\otimes id_A)$ *: c'est l'unité.*

L'application m_A est appelée le produit ou la multiplication, l'application μ_A est l'application unité et $\mu_A(1_{\mathbb{K}})$ est l'élément unité de A.

1.1.2 Morphisme d'algèbres

Définition 1.1.3 *Soient A et B deux algèbres. Une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : A\longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres si les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\mu_B"'] & A \arrow[dl, "f"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

1) $m_B\circ(f\otimes f)=f\circ m_A$,

2) $f\circ\mu_A=\mu_B$.

1.1.3 Coalgèbre

Une coalgèbre est la notion duale d'algèbre. On la définit en renversant les flèches dans la définition d'algèbre.

Définition 1.1.4 *Une co-algèbre (ou coalgèbre) C est un triplet $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$, où C est un $\mathbb{K}$-module, $\Delta_C : C\longrightarrow C\otimes C$ et $\varepsilon_C : C\longrightarrow\mathbb{K}$ sont des applications $\mathbb{K}$-linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
C\otimes C\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "id_C\otimes\Delta_C"'] \\
C\otimes C \arrow[u, "\Delta_C\otimes id_C"] & C \arrow[l, "\Delta_C"] \arrow[u, "\Delta_C"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C\otimes C \arrow[dl, "\varepsilon_C\otimes id_C"'] \arrow[dr, "id_C\otimes\varepsilon_C"] & \\
\mathbb{K}\otimes C & & C\otimes\mathbb{K} \\
& C \arrow[ul, "\approx"] \arrow[ur, "\approx"'] \arrow[uu, "\Delta_C"] &
\end{tikzcd}$$

ce qui se traduit par :

- $(\Delta_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = (id_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C$, *c'est la co-associativité,*
- $(id_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C = (\varepsilon_C \otimes id_C) \circ \Delta_C$, *c'est la co-unité.*

L'application Δ_C est appelée la co-multiplication où le co-produit de C et l'application ε_C est appelée la co-unité de C.

1.1.4 Notation de Sweedler-Heyneman

Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre.
Un élément de $C \otimes C$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i$. Pour uniformité d'écriture et par convention, on utilise la notation de Sweedler-Heyneman : Soit $c \in C$, on note

$$\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_1 \otimes c_2 = c_{(1)} \otimes c_{(2)} = c_1 \otimes c_2.$$

Les notations de Sweedler-Heyneman (ou Sweedler) sont très utiles pour faire les calculs dans les coalgèbres.
Dans la suite de tout ce travail, nous utiliserons la notation $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.
Avec cette notation, l'axiome de la co-associativité se traduit par :

$$\Delta_C(c_1) \otimes c_2 = c_1 \otimes \Delta_C(c_2),$$

c'est-à-dire,

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3, \quad \forall c \in C.$$

L'axiome de la co-unité se traduit par :

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2), \quad \forall c \in C.$$

Ainsi pour montrer qu'un $\mathbb{K}$-module C est une $\mathbb{K}$-coalgèbre il suffit de montrer qu'il existe deux applications $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon_C : C \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que : $\forall c \in C$, avec $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$, on a :

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}$$

et

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2).$$

1.1.5 Produit tensoriel de coalgèbres

Définition 1.1.5 *Soient $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $D = (D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ deux coalgèbres. On définit deux applications $\mathbb{K}$-linéaires $\Delta_{C\otimes D} : C \otimes D \longrightarrow C \otimes D \otimes C \otimes D$ et $\varepsilon_{C\otimes D} : C \otimes D \longrightarrow \mathbb{K}$ par :*

$$\Delta_{C\otimes D} = (id_C \otimes \tau_{C\otimes D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \quad et \quad \varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D.$$

En d'autres termes, on a :

$$\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \quad et \quad \varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d),$$

avec $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$, $\Delta_D(d) = d_1 \otimes d_2$.
Ainsi ; $(C \otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$ est une coalgébre.

1.1.6 Morphisme de coalgèbres

Un Morphisme de coalgèbres est la notion duale du morphisme d'algèbres. On la définit en renversant les flèches dans la définition du morphisme d'algèbres.

Définition 1.1.6 *Soient C et D deux coalgèbres. Une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : C \longrightarrow D$ est un morphisme de coalgèbres si les diagrammes suivants sont commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C \otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f \text{ et } \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C.$$

Donc f est un morphisme de coalgèbres si :

$$f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_1) \otimes f(c_2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_D[f(c)] = \varepsilon_C(c) \quad \forall c \in C, \quad \text{avec} \quad \Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2.$$

1.1.7 Bialgèbre

Lemme 1.1.7 *Soient (B, m_B, μ_B) une algèbre et $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ une coalgèbre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) Δ_B et ε_B sont des morphismes d'algèbres,
ii) m_B et μ_B sont des morphismes de coalgèbres,
iii)Pour tous $a, b \in B$,

$$\Delta_B(ab) = a_1b_1 \otimes a_2b_2, \quad \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B,$$

$$\varepsilon_B(ab) = \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b), \quad \varepsilon_B(1_B) = 1_{\mathbb{K}}.$$

Définition 1.1.8 *On dit qu'un $\mathbb{K}$-module B est une bi-algèbre (ou bialgèbre) si B est une algébre (B, m_B, μ_B) et une coalgèbre $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ satisfaisant l'une des propriétés du Lemme 1.1.7.*

1.1.8 Morphisme de bialgèbres

Définition 1.1.9 *Soient B et B' deux bialgèbres.*
On dit que $f : B \longrightarrow B'$ est un morphisme de bialgèbres si f est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de coalgèbres.

1.2 ALGÈBRE DE HOPF

Dans cette section, nous allons définir la notion d'algèbre de Hopf. C'est une structure algébrique qui va lier celle d'algèbre et de co-algèbre.

1.2.1 Produit de convolution

Définition 1.2.1 *Soient $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. La convolution est définie par :*

$$f \star g = m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C, \tag{1.1}$$

ce qui se traduit par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "f\otimes g"] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\ C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "f\star g"'] & A \end{tikzcd}$$

Autrement dit, avec la notation de Sweedler, pour tout $c \in C$ on a :

$$(f \star g)(c) = f(c_1)g(c_2). \tag{1.2}$$

Ce produit est appelé produit de convolution. Muni du produit de convolution, $Hom_K(C, A)$ est une algèbre associative unitaire d'unité $\mu_A \circ \varepsilon_C$.

Définition 1.2.2 *Une bialgèbre $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H)$ est une algèbre de Hopf si l'application identique id_H de $Hom_K(H, H)$ admet une application inverse notée S_H par rapport au produit de convolution de $Hom_K(H, H)$. On appelle S_H l'antipode de H.*

1.2.2 Formule de l'antipode

Soient $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode S_H, on a :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

Preuve :
Par définition, on a :

$$S_H \star id_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = id_H \star S_H. \tag{1.3}$$

Ainsi, on a : $\forall\ h \in H$,

$$\begin{aligned} (S_H \star id_H)(h) &= \mu_H \circ \varepsilon_H(h) \\ S_H(h_1)id_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h)) \\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}}) \\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)1_H. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (id_H \star S_H)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h) \\ id_H(h_1)S_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h)) \\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}}) \\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)1_H, \end{aligned}$$

d'où la formule :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

$$\begin{array}{rl} \text{Donc :} & \\ S_H(1_H) & = 1_H S_H(1_H) \\ & = \varepsilon_H(1_H)1_H \\ & = 1_H \\ & \text{ou bien} \\ S_H(1_H) & = S_H(1_H)1_H \\ & = 1_H\varepsilon_H(1_H) \\ & = 1_H \\ \text{d'où} & S_H(1_H) = 1_H. \blacksquare \end{array}$$

Proposition 1.2.3 *Soit H une algèbre de Hopf. On a :*

$$\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H, \quad \forall\ h \in H. \tag{1.4}$$

Preuve :
Montrons que $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H$. Soit $h \in H$, on a :

$$\begin{array}{rl} \varepsilon_H(h) & = \varepsilon_H(\varepsilon_H(h)1_H) \\ & = \varepsilon_H(h_1 S_H(h_2)) \\ & = \varepsilon_H(h_1)\varepsilon_H(S_H(h_2)) \\ & = \varepsilon_H(\varepsilon_H(h_1)S_H(h_2)) \\ & = \varepsilon_H(S_H(\varepsilon_H(h_1)h_2)) \\ & = \varepsilon_H(S_H(h)) \\ & = (\varepsilon_H \circ S_H)(h) \end{array}$$

D'où $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H$.$\blacksquare$

1.2.3 Produit tensoriel de $H-$modules

Définition 1.2.4 *Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ une bialgèbre et soient M et N deux H-modules à gauche. On peut munir $M \otimes N$ d'une structure de H-module à gauche via l'application :*

$$\begin{array}{rl} \lambda_{M\otimes N}: & H \otimes M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \\ & h \otimes (m \otimes n) \longmapsto h.(m \otimes n) = h_1 m \otimes h_2 n, \quad \forall\ h \in H,\ m \in M,\ n \in N. \end{array}$$

1.3 ALGÈBRE DE H-MODULE

Définition 1.3.1 *Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et H une algèbre de Hopf. On dit que A est une algèbre de H-module à gauche si A est un H-module à gauche tel que :*

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \tag{1.5}$$

où $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$ et $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

Remarque 1.3.2 *On a $\mathbb{K}$ est un H-module trivial : $h.\lambda = \varepsilon(h)\lambda$.*

Définition 1.3.3 *Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et H une algèbre de Hopf. On dit que A est une algèbre de H-module à droite si A est un H-module à droite tel que :*

$$(ab) \cdot h = (a \cdot h_1)(b \cdot h_2) \tag{1.6}$$

où $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$ *et* $1_A \cdot h = 1_A \varepsilon(h)$.

Lemme 1.3.4 *Soit H une algèbre de Hopf. Si M et N sont des H-module à gauche, alors $M \otimes N$ est un H-module à gauche pour l'action diagonale :*

$$h(m \otimes n) = (h_1 m) \otimes (h_2 n), \ \forall\ h \in H,\ m \in M,\ n \in N.$$

Définition 1.3.5 *Soit H une algèbre de Hopf. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel M est un H-bimodule où H-module bilatère si M est un H-module à gauche ($h \otimes m \longmapsto h \rightharpoonup m$) et H-module à droite ($m \otimes h \longmapsto m \leftharpoonup h$) avec la compatibilité entre l'action à droite et à gauche :*

$$(h \rightharpoonup m) \leftharpoonup h' = h \rightharpoonup (m \leftharpoonup h'), \quad \forall\ h,\ h' \in H,\ m \in M. \tag{1.7}$$

1.3.1 Produit Semi-direct

Définition 1.3.6 *Soit A une algèbre de H-module à gauche.*
Le produit semi-direct de A et H noté $A\#H$ est le produit tensoriel $A \otimes H$ muni du produit :

$$(a \otimes h)(a' \otimes h') = a(h_1.a') \otimes (h_2 h'), \quad \forall\ a, a' \in A,\ h,\ h' \in H. \tag{1.8}$$

$A\#H$ est une algèbre associative unitaire (d'unité $1_A\#1_H$).

Chapitre 2

COMODULEet ALGÈBRE DE H-COMODULE

Les notions de comodules et de morphismes de comodules sont des notions duales de modules et de morphismes de modules. Afin de mieux comprendre ces deux notions, nous allons définir les modules et les morphismes de modules par des diagrammes.

2.1 MODULE

2.1.1 Module sur une algèbre

Définition 2.1.1 *Soit A une algèbre. Un $\mathbb{K}$-module M est un A-module à gauche s'il existe une application $\mathbb{K}$-linéaire :*

$$\begin{aligned} \rho_M : \quad & A \otimes M \longrightarrow M \\ & a \otimes m \longmapsto a.m = am, \quad \forall\ a \in A,\ m \in M \end{aligned}$$

telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \rho_M"] \arrow[d, "m_A \otimes id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\rho_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\rho_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes M \arrow[rr, "\mu_A \otimes id_M"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\rho_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

La commutativité du rectangle équivaut à :

$$\rho_M \circ (id_A \otimes \rho_M) = \rho_M \circ (m_A \otimes id_M),$$

$$(ab)m = a(bm), \quad \forall\ a,\ b \in A,\ m \in M.$$

Celle du triangle équivaut à :

$$\rho_M \circ (\mu_A \otimes id_M) = f,$$

$$1_A m = m.$$

On dit alors que A agit à gauche sur M. L'application ρ_M est l'action sur M.

2.1.2 Morphisme de A-modules

Soit A une algèbre et soient M et N deux A-modules à gauche. Un morphisme de A-modules $f : M \longrightarrow N$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
A \otimes M \arrow[u, "\rho_M"] \arrow[r, "id_A \otimes f"'] & A \otimes N \arrow[u, "\rho_N"']
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$f \circ \rho_M = \rho_N \circ (id_A \otimes f).$$

Donc $\forall\ a \in A,\ m \in M$, on a :

$$(f \circ \rho_M)(a \otimes m) = (\rho_N \circ (id_A \otimes f))(a \otimes m),$$

c'est-à-dire,

$$f(a.m) = a.f(m).$$

2.2 COMODULE SUR UNE COALGEBRE

La notion de comodule est celle duale de module. On la définit en renversant les flèches dans la définition du module.

Définition 2.2.1 *Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. Un $\mathbb{K}$-module à gauche M est un C-co-module (ou C-comodule) à droite s'il existe une application $\mathbb{K}$-linéaire*

$$\lambda_M : M \longrightarrow M \otimes C$$

qui rend commutatif les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta_C"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\lambda_M \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \varepsilon_C"] \\
 & M \otimes \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Ce qui équivaut à :

- $(id_M \otimes \Delta_C) \circ \lambda_M = (\lambda_M \otimes id_C) \circ \lambda_M$,
- $(id_M \otimes \varepsilon_C) \circ \lambda_M = f$.

L'application λ_M est appelée la C-coaction ou la coaction de C sur M.

2.2.1 Notation de Sweedler pour les comodules

Soit $M = (M, \varphi_M)$ un $C-$comodule à droite. Pour $m \in M$, on note :

$$\lambda_M(m) = \Sigma m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \Sigma m_0 \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1. \tag{2.1}$$

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons la notation $\lambda_M(m) = m_0 \otimes m_1$.

Avec la notation de Sweedler, la commutativité des diagrammes précédents équivaut à :

$$m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$$

et

$$m_0 \varepsilon_C(m_1) = m = \varepsilon_C(m_0) m_1.$$

2.2.2 Morphisme de comodules

Pour définir un morphisme de comodules, on dualise tout simplement la notion de morphisme de modules.

Définition 2.2.2 *Soit C une coalgèbre et soient M et N deux C-comodules à droite. Une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de C-comodules ou une application C-colinéaire si le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & N \arrow[d, "\lambda_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire : $\lambda_N \circ f = (f \otimes id_C) \circ \lambda_M$. Donc $\forall\ m \in M$ on a :

$$(\lambda_N \circ f)(m) = [(f \otimes id_C) \circ \lambda_M](m)$$

$$(f(m))_0 \otimes (f(m))_1 = f(m_0) \otimes (m_1)$$

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

Ainsi, f est C-colinéaire si et seulement si

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1. \tag{2.2}$$

Remarque 2.2.3 *On peut aussi définir un C-comodule à gauche M avec la coaction à gauche définie par :*

$$\lambda_M(m) = m_{-1} \otimes m_0 \in C \otimes M.$$

2.2.3 Produit tensoriel de comodules

Proposition 2.2.4 *Soit $C = (C, m_C, \mu_C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une bialgèbre.*
Soient $M = (M, \lambda_M)$ et $N = (N, \lambda_N)$ deux C-comodules à droite. L'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\lambda_{M\otimes N} : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes C$$

munit $M \otimes N$ d'une structure de C-comodule à droite. C'est la coaction diagonale.
Le comodule $M \otimes N = (M \otimes N, \lambda_{M\otimes N})$ est appelé produit tensoriel des comodules M et N.
Dans la notation de Sweedler, on a :

$$\lambda_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1.$$

Preuve :
A-t-on :

$$(id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \lambda_{M\otimes N} = (\lambda_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \lambda_{M\otimes N}$$

et

$$(id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \lambda_{M\otimes N} = id_{M\otimes N}?$$

Soit $m \otimes n \in M \otimes N$.

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \lambda_{M\otimes N}](m \otimes n) &= [id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes (m_1 n_1)_1 \otimes (m_1 n_1)_2 \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_{11} n_{11} \otimes m_{12} n_{12} \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2. \quad (i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\lambda_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \lambda_{M\otimes N}](m \otimes n) &= [\lambda_{M\otimes N} \otimes id_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_{00} \otimes n_{00} \otimes m_{01} n_{01} \otimes m_1 n_1 \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2. \quad (ii)
\end{aligned}$$

$$(i) \text{ et } (ii) \Leftrightarrow \quad (id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \lambda_{M\otimes N} = (\lambda_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \lambda_{M\otimes N}$$

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \lambda_{M\otimes N}](m \otimes n) &= [id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes \varepsilon_C(m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \varepsilon_C(m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \varepsilon_C(m_1) \varepsilon_C(n_1) \\
&= m_0 \varepsilon_C(m_1) \otimes n_0 \varepsilon_C(n_1) \\
&= m \otimes n \\
&= id_{M\otimes N}(m \otimes n), \\
\text{d'où} \quad (id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \lambda_{M\otimes N} &= id_{M\otimes N}. \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3 MODULE DE HOPF RELATIF

2.3.1 Algèbre de H-comodule

Définition 2.3.1 *Soit H une algèbre de Hopf. Un $\mathbb{K}$-module A est une algèbre de H-comodule à droite si A est une $\mathbb{K}$-algèbre et un H-comodule à droite tel qu'on a :*
- $\lambda_A(aa') = (aa')_0 \otimes (aa')_1 = a_0 a'_0 \otimes a_1 a'_1$ *: la co-action est compatible avec le produit tensoriel,*
- $\lambda_A(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

Exemple 2.3.2 *L'algèbre de Hopf H est une algèbre de H-comodule à droite avec $\lambda = \triangle$, c'est-à-dire $\lambda(h) = \triangle(h)$ $\forall\ h \in H$: on a donc $h_0 \otimes h_1 = h_1 \otimes h_2$.*

Chapitre 3

ALGÈBRE DE H-DIMODULES DÉFORMÉES

Dans cette section, H est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative.

3.1 H-DIMODULES

Définition 3.1.1 *Un H-dimodule est un $\mathbb{K}$-module M qui est à la fois un H-module ($\rho_M : H \otimes M \longrightarrow M; h \otimes m \longmapsto hm$) à gauche et un H-comodule ($\lambda_M : M \longrightarrow M \otimes H; m \longmapsto m_0 \otimes m_1$) à droite tel que le diagramme commute :*

$$\begin{tikzcd} H \otimes M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "id_H \otimes \lambda_M"'] & M \arrow[d, "\lambda_M"] \\ H \otimes M \otimes H \arrow[r, "\rho_M \otimes id_H"'] & M \otimes H \end{tikzcd}$$

Le diagramme est commutatif signifie : $\lambda_M \circ \rho_M = (\rho_M \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \lambda_M)$.
C'est-à-dire

$$(hm)_0 \otimes (hm)_1 = hm_0 \otimes m_1. \tag{3.1}$$

Définition 3.1.2 *Soit M un H-module avec ρ_M comme action. On dit que M est trivial, si*

$$hm = \varepsilon_H(h)m, \ \forall \ h \in H, \ m \in M. \tag{3.2}$$

Soit M un H-comodule avec λ_M comme coaction. On dit que M est trivial, si

$$\lambda_M(m) = m \otimes 1_H, \ \forall \ m \in M. \tag{3.3}$$

Proposition 3.1.3

1) Soit M un H-module. En munissant M de la structure de H-comodule trivial, M est un H-dimodule.

2) Soit M un H-comodule. En munissant M de la structure de H-module trivial, M est un H-dimodule.

Preuve :
1)A-t-on $(\lambda \circ \rho)(h \otimes m) = (\rho \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \lambda)(h \otimes m) = hm \otimes 1_H$?

$$\begin{aligned} \bullet\ (\lambda \circ \rho)(h \otimes m) &= \lambda(\rho(h \otimes m)) \\ &= \lambda(hm) \\ &= hm \otimes 1_H \text{ car l'action est triviale.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ (\rho \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \lambda)(h \otimes m) &= (\rho \otimes id_H)(id_H(h) \otimes \lambda(m)) \\ &= (\rho \otimes id_H)(h \otimes m \otimes 1_H) \\ &= \rho(h \otimes m) \otimes id_H(1_H) \\ &= hm \otimes 1_H. \end{aligned}$$

Ainsi ; M est un H-dimodule.
2)A-t-on $(\lambda \circ \rho)(h \otimes n) = (\rho \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \lambda)(h \otimes n) = hn_0 \otimes n_1$?

$$\begin{aligned} \bullet\ (\lambda \circ \rho)(h \otimes n) &= \lambda(\rho(h \otimes n)) \\ &= \lambda(\varepsilon_H(h)n) \\ &= \varepsilon_H(h)\lambda(n) \\ &= \varepsilon_H(h)n_0 \otimes n_1 \\ &= hn_0 \otimes n_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ (\rho \otimes id_H) \circ (id_H \otimes \lambda)(h \otimes n) &= (\rho \otimes id_H)(id_H(h) \otimes \lambda(n)) \\ &= (\rho \otimes id_H)(h \otimes n_0 \otimes n_1) \\ &= \rho(h \otimes n_0) \otimes n_1 \\ &= \varepsilon_H(h)n_0 \otimes n_1 \\ &= hn_0 \otimes n_1. \end{aligned}$$

Ainsi, M est un H-dimodule.■

Définition 3.1.4 *Soient M, N deux H-dimodules et $f : M \longrightarrow N$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On dit que f est un morphisme de H-dimodules si f est à la fois un morphisme de H-modules à gauche et un morphisme de H-comodules à droite.*

Lemme 3.1.5 *Si M et N sont des H-dimodules, alors $M \otimes N$ est un H-dimodule pour l'action diagonale et la coaction diagonale.*
Preuve :
En effet, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{M\otimes N}(h(m \otimes n)) &= \lambda_{M\otimes N}(h_1 m \otimes h_2 n) \\ &= (h_1 m \otimes h_2 n)_0 \otimes (h_1 m h_2 n)_1 \\ &= (h_1 m)_0 \otimes (h_2 n)_0 \otimes (h_1 m)_1.(h_2 n)_1 \\ &= h_1 m_0 \otimes h_2 n_0 \otimes m_1 n_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\rho_{M\otimes N}\otimes id_{M\otimes N})(id_H\otimes\lambda_{M\otimes N})(h\otimes m\otimes n)\\
&\qquad = (\rho_{M\otimes N}\otimes id_{M\otimes N})(id_H(h)\otimes\lambda_{M\otimes N}(m\otimes n))\\
&\qquad = (\rho_{M\otimes N}\otimes id_{M\otimes N})(h\otimes m_0\otimes n_0\otimes m_1n_1)\\
&\qquad = \rho_{M\otimes N}(h\otimes m_0\otimes n_0)\otimes id_{M\otimes N}(m_1n_1)\\
&\qquad = h(m_0\otimes n_0)\otimes m_1n_1\\
&\qquad = h_1m_0\otimes h_2n_0\otimes m_1n_1,
\end{aligned}$$

avec $m\in M$, $n\in N$ *et* $h\in H$.■

3.2 ALGÈBRE DE H-DIMODULES

Définition 3.2.1 *Une algébre de H-dimodule est un $\mathbb{K}$-module qui est un H-dimodule tel qu'elle est une algèbre de H-module à gauche et une algèbre de H-comodule à droite.*

Proposition 3.2.2

1) *Soit A une algèbre de H-module. Alors A est une algèbre de H-dimodule lorsqu'on la munit de la structure triviale de H-comodule.*

2) *Soit B une algèbre de H-comodule. Alors B est une algèbre de H-dimodule lorsqu'on la munit de la structure triviale de H-module.*

Preuve :
1)On a A une algèbre de H-module, donc c'est un H-module. Montrons que A est un H-dimodule avec $\lambda_A(a)=a\otimes 1_H$(voir Prop 3.1.1).
Soient $a,a'\in A$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_A(aa') &= (aa')_0\otimes(aa')_1\\
&= aa'\otimes 1_H \text{ car la coaction est triviale .}
\end{aligned}$$

Donc A est une algèbre de H-comodule. Si la H-coaction sur A est triviale, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_A(h.a) &= (ha)_0\otimes(ha)_1\\
&= h.a\otimes 1_H \text{ car la } H\text{-coaction sur } A \text{ est triviale}\\
&= h.(a)_0\otimes(a)_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, A est une algèbre de H-dimodule.
2)On a B une algèbre de H-comodule, donc c'est un H-comodule. Montrons que B est un H-dimodule avec $h.b=\varepsilon(h)b$.

$$\begin{aligned}
h.(bb') &= \varepsilon(h)(bb')\\
&= \varepsilon(h_1\varepsilon(h_2))(bb')\\
&= \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2)(bb')\\
&= (\varepsilon(h_1)b)(\varepsilon(h_2)b')\\
&= (h_1b)(h_2b').
\end{aligned}$$

Donc B est une algèbre de H-module. Si la H-action sur B est triviale, on a :

$$\begin{aligned}\lambda(h.b) &= \lambda(\varepsilon(h)b)\\ &= \varepsilon(h)\lambda(b)\\ &= \varepsilon(h)(b_0\otimes b_1)\\ &= \varepsilon(h)b_0\otimes b_1\\ &= (h.b_0)\otimes b_1.\end{aligned}$$

Ainsi, B est une algèbre de H-dimodule.$\blacksquare$

Définition 3.2.3 *Soient A et B deux algèbres de H-dimodules et $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On dit que f est un morphisme d'algèbres de H-dimodules s'il est un morphisme de H-dimodules et un morphisme d'algèbres.*

Définition 3.2.4 *Soient A et B deux algèbres de H-dimodules, on définit sur A et B le produit $A\#B$ appelé produit semi-direct.*
$A\#B$ est égal à $A\otimes B$ comme $\mathbb{K}$-module mais avec la multiplication :

$$(a\#b).(c\#d) = \Sigma a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0.d \tag{3.4}$$

où $h \rightharpoonup m = hm$ et $\lambda(b) = b_0\otimes b_1$.

Remarque 3.2.5 *On voit que le produit semi-direct ne dépend que de la structure de comodule de B et de la structure de module de A.*

Théorème 3.2.6 *Soient A et B deux algèbres de H-dimodules, H une algèbre de Hopf commutative et cocommutative.*

1) $A\otimes B$ est une algèbre de H-dimodule (son unité est $1_A\otimes 1_B$).

2) Avec la relation (3.4), $A\#B$ est une algèbre de H-dimodule (son unité est $1_A\#1_B$).

Preuve
1)On a déjà vu que $A\otimes B$ est une H-module et H-comodule, d'après le lemme 3.1.5.
Montrons que $A\otimes B$ est une algèbre de H-dimodules.

- *Vérifions que la H-action et la multiplication dans $A\otimes B$ sont compatibles .*
  Soient $a,\ c\in A,\ b,\ d\in B$. A-t-on $h((a\otimes b).(c\otimes d)) = (h_1.(a\otimes b))(h_2.(c\otimes d))$?
  On a :

$$\begin{aligned}h((a\otimes b).(c\otimes d)) &= h(ac\otimes bd)\\ &= (h_1(ac))\otimes(h_2.(bd))\\ &= ((h_{11}.a)(h_{12}.c))\otimes(h_{21}.b)(h_{22}.d))\\ &= (h_{11}.a\otimes h_{21}.b)(h_{12}.c\otimes h_{22}.d)\ \ H \text{ est cocommutative}\\ &= (h_{11}.a\otimes h_{12}.b)(h_{21}.c\otimes h_{22}.d)\\ &= (h_1.(a\otimes b))(h_2.(c\otimes d)).\end{aligned}$$

donc $A \otimes B$ *est une algèbre de* H*-module.*
• *Vérifions que la* H*-coaction et le produit dans* $A\#B$ *sont compatibles .*
A-t-on $\lambda((a \otimes b).(c \otimes d)) = \Sigma(a \otimes b)_0(c \otimes d)_0 \otimes (a \otimes b)_1(c \otimes d)_1$ *?*

$$\begin{aligned}
\lambda((a \otimes b).(c \otimes d)) &= \lambda(ac \otimes bd) \\
&= \Sigma(ac \otimes bd)_0 \otimes (ac \otimes bd)_1 \\
&= \Sigma(ac)_0 \otimes (bd)_0 \otimes (ac)_1(bd)_1 \\
&= \Sigma(a_0c_0) \otimes (b_0d_0) \otimes (a_1c_1)(b_1d_1) \\
&= \Sigma(a_0 \otimes b_0)(c_0 \otimes d_0) \otimes a_1c_1b_1d_1 \\
&= \Sigma(a_0 \otimes b_0)(c_0 \otimes d_0) \otimes a_1b_1c_1d_1 \ \textit{H est commutative} \\
&= \Sigma(a \otimes b)_0(c \otimes d)_0 \otimes (a \otimes b)_1(c \otimes d)_1 \ .
\end{aligned}$$

donc $A \otimes B$ *est une algèbre de* H*-comodule.*
Ainsi, $A \otimes B$ *est une algèbre de* H*-dimodules.*
2)Montrons $A\#B$ *est une algèbre de* H*-dimodule.*

$$\begin{aligned}
h \rightharpoonup [(\ a \ \# \ b\ )(\ c \ \# \ d\ )] &= h \rightharpoonup \Sigma(a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0d) \\
&= \Sigma h \rightharpoonup (a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0d) \\
&= \Sigma h_1 \rightharpoonup (a.(b_1 \rightharpoonup c))\#h_2 \rightharpoonup (b_0d) \\
&= \Sigma(h_1 \rightharpoonup (a\#b))(h_2 \rightharpoonup (c\#d)),
\end{aligned}$$

donc $A\#B$ *est une algèbre de* H*-module.*
on a aussi :

$$\begin{aligned}
3)\lambda[(\ a \ \# \ b\ )(\ c \ \# \ d\ )] &= \lambda[\Sigma(a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0d)] \\
&= \Sigma\lambda[(a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0d)] \\
&= \Sigma(a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0d)_0 \otimes (a.(b_1 \rightharpoonup c)\#b_0d)_1 \\
&= \Sigma(a(b_1 \rightharpoonup c))_0\#(b_0d)_0 \otimes (a(b_1 \rightharpoonup c))_1(b_0d)_1 \\
&= \Sigma a_0(b_1 \rightharpoonup c_0)\#b_{00}d_0 \otimes a_1c_1b_{01}d_1 \\
&= \Sigma a_0(b_1 \rightharpoonup c_0)\#b_0d_0 \otimes a_1c_1b_1d_1 \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4)(a\#b)_0(c\#d)_0 \otimes (a\#b)_1(c\#d)_1 &= \Sigma(a_0\#b_0)(c_0\#d_0) \otimes a_1b_1c_1d_1 \\
&= \Sigma a_0(b_{01} \rightharpoonup c_0)\#b_{00}d_0 \otimes a_1b_1c_1d_1 \\
&= \Sigma a_0(b_1 \rightharpoonup c_0)\#b_0d_0 \otimes a_1b_1c_1d_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda[(\ a \ \# \ b\ )(\ c \ \# \ d\ )] = \Sigma(a\#b)_0(c\#d)_0 \otimes (a\#b)_1(c\#d)_1$ *et par suite,* $A\#B$ *est une algèbre de* H*-comodule.*
D'où $A\#B$ *est une algèbre de* H*-dimodule.*■

3.3 ALGÈBRE DE H-DIMODULES DÉFORMÉES

3.3.1 Structure d'algèbre du produit semi-direct d'algèbres de H-dimodules déformées

Dans cette section, nous définissons tout d'abord, une algèbre de H-dimodule déformée, puis nous étudions les propriétés du produit semi-direct d'algèbre de H-dimodule déformée.

Définition 3.3.1 *Un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* N *est un* H*-dimodule déformé à droite s'il est* *une H-bimodule et un H-comodule à droite avec compatibilité entre la coaction et les actions à gauche et à droite :*

$$\lambda(h \rightharpoonup n \leftharpoonup g) = \Sigma(h \rightharpoonup n \leftharpoonup g)_{[0]} \otimes (h \rightharpoonup n \leftharpoonup g)_{[1]} = \Sigma h \rightharpoonup n_{[0]} \leftharpoonup g \otimes n_{[1]}, \tag{3.5}$$

pour tout $h,\ g \in H$ et $n \in N$, où " $\rightharpoonup$ "et" $\leftharpoonup$ " désignent respectivement les actions de H-module à gauche et à droite.

Proposition 3.3.2 *Soit N un H-dimodule. Si on munit N de la structure de H-module à droite triviale, alors N est un H-dimodule déformé.*
Preuve :
Il est clair que N est un H-dimodule et H-comodule à droite.
Soient $h,\ g \in H$ et $n \in N$.
A-t-on $(h \rightharpoonup n \leftharpoonup g)_0 \otimes (h \rightharpoonup n \leftharpoonup g)_1 = (h \rightharpoonup n_0 \leftharpoonup g) \otimes n_1$?

$$\begin{aligned}
(h \rightharpoonup n \leftharpoonup g)_0 \otimes (h \rightharpoonup n \leftharpoonup g)_1 &= (h \rightharpoonup (n \leftharpoonup g))_0 \otimes (h \rightharpoonup (n \leftharpoonup g))_1 \\
&= (h \rightharpoonup n\varepsilon(g))_0 \otimes (h \rightharpoonup n\varepsilon(g))_1 \\
&= h \rightharpoonup (n\varepsilon(g))_0 \otimes (n\varepsilon(g))_1 \\
&= h \rightharpoonup n_0\varepsilon(g) \otimes n_1 \\
&= (h \rightharpoonup n_0 \leftharpoonup g) \otimes n_1 . \blacksquare
\end{aligned}$$

Ainsi, N est un H-dimodule déformé avec l'action triviale à droite.

Définition 3.3.3 *[6, Définition 2.2] Une algèbre de Hopf H est dite coquasitriangulaire s'il existe une forme bilinéaire $\sigma : H \otimes H \longrightarrow \mathbb{K}$ dans Hom($H \otimes H$, $\mathbb{K}$) (où Hom($H \otimes H$, $\mathbb{K}$) est une algébre unitaire d'unité $\varepsilon_{H\otimes H} = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H$) qui est inversible au sens de la convolution telle que $\forall\ x,\ y,\ z \in H$,*

$$\sum \sigma(x_1, y_1)y_2x_2 = x_1y_1\sigma(x_2, y_2), \tag{3.6}$$

$$\sigma(x, yz) = \sigma(x_1, y)\sigma(x_2, z), \tag{3.7}$$

$$\sigma(xy, z) = \sigma(x, z_2)\sigma(y, z_1). \tag{3.8}$$

Lemme 3.3.4 *Soit (H, σ) une algèbre de Hopf coquasitriangulaire cocommutative. Nous définissons l'action à gauche sur H par*

$$h \rightharpoonup l = \Sigma\sigma(h, l_1)l_2,\ \forall\ h,\ l \in H \tag{3.9}$$

celle à droite sur H par

$$l \leftharpoonup h = \Sigma\sigma(h, l_2)l_1,\ \forall\ h,\ l \in H \tag{3.10}$$

et la coaction sur H par Δ. Alors H est un H-dimodule déformée sur lui-même.
Preuve :
- *On montre que c'est un H-bimodule c'est-à-dire :*

∘ *H-module à droite :*

$$\begin{aligned} l \leftharpoonup (hh') &= \sigma(hh', l_2)l_1 \\ &= \sigma(h, l_{22})\sigma(h', l_{21})l_1 \\ &= \sigma(h, l_3)\sigma(h', l_2)l_1 \\ &= \sigma(h, l_1)\sigma(h', l_2)l_3 \text{ (car } H \text{ est cocommutative).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l \leftharpoonup h) \leftharpoonup h' &= [\sigma(h, l_2)l_1] \leftharpoonup h' \\ &= \sigma(h', (\sigma(h, l_2)l_1)_2)(\sigma(h, l_2)l_1)_1 \\ &= \sigma(h', l_{12})\sigma(h, l_2)l_{11} \\ &= \sigma(h', l_2)\sigma(h, l_3)l_1 \\ &= \sigma(h', l_1)\sigma(h, l_2)l_3 \text{ (car } H \text{ est cocommutative).} \end{aligned}$$

∘ *H-module à gauche.*

$$\begin{aligned} (hh') \rightharpoonup l &= \sigma((hh'), l_1)l_2 \\ &= \sigma(h, l_{12})\sigma(h', l_{11})l_2 \\ &= \sigma(h, l_2)\sigma(h', l_1)l_3 \\ &= \sigma(h, l_1)\sigma(h', l_2)l_3 \text{ (} H \text{ est cocommutative).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup l) &= h \rightharpoonup [\sigma(h', l_1)l_2] \\ &= \sigma[h, (\sigma(h', l_1)l_2)_1](\sigma(h', l_1)l_2)_2 \\ &= \sigma[h, (\sigma(h', l_1)l_2)_2](\sigma(h', l_1)l_2)_1 \text{ (car } H \text{ est cocommutative)} \\ &= \sigma(h, l_{22})\sigma(h', l_1)l_{21} \\ &= \sigma(h, l_3)\sigma(h', l_1)l_2 \\ &= \sigma(h, l_1)\sigma(h', l_2)l_3 \end{aligned}$$

∘ *Compatibilité entre l'action à gauche et à droite :*
A-t-on $h \rightharpoonup (l \leftharpoonup h') = (h \rightharpoonup l) \leftharpoonup h'$ *?*

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup (l \leftharpoonup h') &= h \rightharpoonup [\sigma(h', l_2)l_1] \\ &= \sigma[h, (\sigma(h', l_2)l_1)_1](\sigma(h', l_2)l_1)_2 \\ &= \sigma[h, (\sigma(h', l_2)l_1)_2](\sigma(h', l_2)l_1)_1 \text{ (car } H \text{ est cocommutative)} \\ &= \sigma(h, l_{12})\sigma(h', l_2)l_{11} \\ &= \sigma(h, l_2)\sigma(h', l_{12})l_{11} \\ &= \sigma(h, l_2)l_1 \leftharpoonup h' \\ &= \sigma(h, l_1)l_2 \leftharpoonup h' \\ &= (h \rightharpoonup l) \leftharpoonup h' \end{aligned}$$

Ainsi, H est un H-bimodule.

∘ *H est un H-comodule à droite avec $\lambda = \triangle$.*

∘ *Compatibilité entre la coaction, les actions à gauche et à droite :*
A-t-on $\lambda(h \rightharpoonup (l \leftharpoonup g)) = h \rightharpoonup (l)_0 \leftharpoonup g \otimes (l)_1$ *?*

$$\begin{aligned}
\lambda(h \rightharpoonup (l \leftharpoonup g)) &= (h \rightharpoonup (l \leftharpoonup g))_0 \otimes (h \rightharpoonup (l \leftharpoonup g))_1 \\
&= [h \rightharpoonup (\sigma(g, l_2)l_1)]_0 \otimes [h \rightharpoonup (\sigma(g, l_2)l_1)]_1 \\
&= [\sigma(h, (\sigma(g, l_2)l_1)_1(\sigma(g, l_2))_2]_0 \otimes [\sigma(h, (\sigma(g, l_2)l_1)_1(\sigma(g, l_2)l_1)_2]_1 \\
&= [\sigma(h, (\sigma(g, l_2)l_{11})l_{12})]_0 \otimes [\sigma(h, (\sigma(g, l_2)l_{11})l_{12})]_1 \\
&= [\sigma(h, (\sigma(g, l_2)l_{11})l_{12})]_1 \otimes [\sigma(h, (\sigma(g, l_2)l_{11})l_{12})]_2 \\
&= [\sigma(h, (\sigma(g, l_3)l_1)l_2)]_1 \otimes [\sigma(h, (\sigma(g, l_3)l_1)l_2)]_2 \\
&= \sigma(h, (\sigma(g, l_3)l_1)l_{21} \otimes l_{22} \\
&= \sigma(h, (\sigma(g, l_4)l_1)l_2 \otimes l_3 \\
&= \sigma(h, (\sigma(g, l_3)l_{11}))l_{12} \otimes l_2 \\
&= \sigma(h, (\sigma(g, l_3)l_1)_1)(\sigma(g, l_3)l_1)_2 \otimes l_2 \\
&= h \rightharpoonup (\sigma(g, l_3)l_1) \otimes l_2 \\
&= h \rightharpoonup (\sigma(g, l_2)l_1) \otimes l_3 \ \textit{(car H est cocommutative)} \\
&= h \rightharpoonup (\sigma(g, l_{12})l_{11}) \otimes l_2 \\
&= h \rightharpoonup l_1 \leftharpoonup g \otimes l_2 \\
&= h \rightharpoonup (l)_0 \leftharpoonup g \otimes (l)_1 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Définition 3.3.5 *Une algèbre de H-bimodule est un H-bimodule satisfaisant (1.5) et (1.6).*

Définition 3.3.6 *Soit N un H-dimodule déformé. Si N est à la fois une algèbre de H-bimodule et une algèbre de H-comodule à droite, alors on dit que N est une algèbre de H-dimodule déformée.*
Soit H une algèbre de Hopf, A une algèbre de H-bimodule et X une algèbre de H-comodule à droite. Nous définissons $A\sharp X = A \otimes X$ comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et sa multiplication par :

$$(a\sharp x)(b\sharp y) = \Sigma a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y, \ \forall\ a,\ b \in A \ \ et \ \ x,\ y \in X. \tag{3.11}$$

L'action triviale à gauche est définie par : $h \rightharpoonup h' = \varepsilon(h)h'$ et celle à droite par : $h \leftharpoonup h' = h\varepsilon(h')$ avec sa compatibilité : $(h \rightharpoonup h') \leftharpoonup h'' = h \rightharpoonup (h' \leftharpoonup h'')$, $\forall\ h,\ h',\ h'' \in H$.
- $1_H \rightharpoonup h \leftharpoonup 1_H = h$.

Remarque 3.3.7 *Soit A une algèbre de H-dimodule déformée. On a :*
- $h \rightharpoonup 1_A = \varepsilon(h)1_A$,
- $h \rightharpoonup (ab) = \Sigma_h(h_1 \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup b),\ \forall\ a,\ b \in A,\ \forall\ h \in H$,
- *Soient A et B deux algèbres de H-dimodules déformées, on a :*

$h \rightharpoonup (a\sharp b) \leftharpoonup g = h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup g_1\sharp h_2 \rightharpoonup b \leftharpoonup g_2\ \forall\ h,\ g \in H,\ a \in A,\ b \in B.$

Lemme 3.3.8 *Soient H une algèbre de Hopf, A une algèbre de H-bimodule et X une algèbre de H-comodule à droite alors $A\sharp X$ est une algèbre associative avec l'unité $1_A\sharp 1_X$ si :*

$$\Sigma(h_1 \rightharpoonup a) \otimes h_2 = \Sigma(h_2 \rightharpoonup a) \otimes h_1 \tag{3.12}$$

et

$$\Sigma(a \leftharpoonup h_1) \otimes h_2 = \Sigma(a \leftharpoonup h_2) \otimes h_1, \ \ \forall\ a \in A \ \ \ et \ \ \ h \in H. \tag{3.13}$$

Preuve :
$\forall\ \ a,\ b,\ c \in A$ *et* $x,\ y,\ z \in X$. *A-t-on* $[(a\sharp x)(b\sharp y)](c\sharp z) = (a\sharp x)[(b\sharp y)(c\sharp z)]$ *?*

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
[(a\sharp x)(b\sharp y)](c\sharp z) &= \Sigma(a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y)(c\sharp z)\\
&= \Sigma(a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))((x_{[0]}y)_{[1]1} \rightharpoonup c \leftharpoonup S(x_{[0]}y))_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y_{[0]}z\\
&= \Sigma(a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))(x_{[0][1]1}y_{[1]1} \rightharpoonup c \leftharpoonup S(x_{[0][1]2}y_{[1]2}))\sharp x_{[0][0]}y_{[0]}z\\
&= \Sigma(a(x_{[1]3} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]4}))(x_{[1]1}y_{[1]1} \rightharpoonup c \leftharpoonup S(x_{[1]2}y_{[1]2}))z,
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons également :

$$\begin{aligned}
(a\sharp x)[(b\sharp y)(c\sharp z)] &= (a\sharp x)(b(y_{[1]1} \rightharpoonup c \leftharpoonup S(y_{[1]2}))\sharp y_{[0]}z),\\
&= \Sigma a(x_{[1]1} \rightharpoonup b(y_{[1]1} \rightharpoonup c \leftharpoonup S(y_{[1]2})) \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y_{[0]}z\\
&= \Sigma a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]3}))(x_{[1]2}y_{[1]1} \rightharpoonup c \leftharpoonup S(x_{[1]4}y_{[1]2})))\sharp x_{[0]}y_{[0]}z\\
&= \Sigma a(x_{[1]3} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]4}))(x_{[1]1}y_{[1]1} \rightharpoonup c \leftharpoonup S(x_{[1]2}y_{[1]2}))z,
\end{aligned}$$

Montrons que : $(a\sharp x)(1\sharp 1) = (1\sharp 1)(a\sharp x) = a\sharp x.$

- $$\begin{aligned}
(a\sharp x)(1\sharp 1) &= \Sigma a(x_{[1]1} \rightharpoonup 1 \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}1\\
&= a(x_{[1]1} \rightharpoonup 1 \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}1\\
&= a\varepsilon(x_{[1]1})1 \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}\\
&= a \leftharpoonup S(\varepsilon(x_{[1]1})x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}\\
&= a \leftharpoonup S(x_{[1]})\sharp x_{[0]}\\
&= a\varepsilon(S(x_{[1]}))\sharp x_{[0]}\\
&= a(\varepsilon \circ S)(x_{[1]})\sharp x_{[0]}\\
&= a\varepsilon(x_{[1]})\sharp x_{[0]}\\
&= a\sharp x_{[0]}\varepsilon(x_{[1]})\\
&= a\sharp x.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
(1\sharp 1)(a\sharp x) &= \Sigma 1(1_{[1]1} \rightharpoonup a \leftharpoonup S(1_{[1]2}))\sharp 1_{[0]}x\\
&= 1(1_{[1]1} \rightharpoonup a \leftharpoonup S(1_{[1]2}))\sharp 1_{[0]}x\\
&= 1\varepsilon(1_{[1]1})a \leftharpoonup S(1_{[1]2})\sharp 1_{[0]}x\\
&= a \leftharpoonup S(\varepsilon(1_{[1]1})1_{[1]2})\sharp 1_{[0]}x\\
&= a \leftharpoonup S(1_{[1]})\sharp 1_{[0]}x\\
&= a\varepsilon(S(1_{[1]}))\sharp 1_{[0]}x\\
&= a(\varepsilon \circ S)(1_{[1]})\sharp 1_{[0]}x\\
&= a\varepsilon(1_{[1]})\sharp 1_{[0]}x\\
&= a\sharp 1_{[0]}\varepsilon(1_{[1]})x\\
&= a\sharp 1x\\
&= a\sharp x.\blacksquare
\end{aligned}$$

Théorème 3.3.9 *Soient H une algèbre de Hopf, A et X deux algèbres de H-dimodules déformées telles que les conditions suivantes sont réunies :*

$$\Sigma(h_1 \rightharpoonup a) \otimes h_2 = \Sigma(h_2 \rightharpoonup a) \otimes h_1, \tag{3.14}$$

$$\Sigma(a \leftharpoonup h_1) \otimes h_2 = \Sigma(a \leftharpoonup h_2) \otimes h_1, \tag{3.15}$$

$$\Sigma x_0 \otimes x_1 h = \Sigma x_0 \otimes h x_1, \ \forall\ a \in A,\ x \in X \quad et \quad h \in H. \tag{3.16}$$

Alors le produit semi-direct est une algèbre de H-dimodule déformée, où les actions et la coaction sont données respectivement par :

$$h \rightharpoonup (a\sharp x) = \Sigma(h_1 \rightharpoonup a)\sharp(h_2 \rightharpoonup x), \tag{3.17}$$

$$(a\sharp x) \leftharpoonup h = \Sigma(a \leftharpoonup h_1)\sharp(x \leftharpoonup h_2), \tag{3.18}$$

$$\lambda(a\sharp x) = \Sigma a_0\sharp x_0 \otimes a_1 x_1, \quad \forall\ a \in A, \quad x \in X \quad et \quad h \in H. \tag{3.19}$$

Preuve :
Montrons que $A\sharp X$ est un H-bimodule et un H-comodule à droite.
• *Montrons que $A\sharp X$ est un H-bimodule.*
○ *Montrons que $A\sharp X$ est un H-module à gauche.*
A-t-on $1_H \rightharpoonup (a\sharp x) = a\sharp x$?
On a :

$$\begin{aligned} 1_H \rightharpoonup (a\sharp x) &= 1_{H_1} \rightharpoonup a\sharp 1_{H_2} \rightharpoonup x \\ &= 1_H \rightharpoonup a\sharp 1_H \rightharpoonup x \\ &= a\sharp x, \end{aligned}$$

$\forall\ a \in A,\ x \in X.$

Soient $h,\ h' \in H,\ a \in A,\ x \in X$. A-t-on $(h \rightharpoonup h') \rightharpoonup (a\sharp x) = h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup (a\sharp x))$?

$$\begin{aligned} (h \rightharpoonup h') \rightharpoonup (a\sharp x) &= (h \rightharpoonup h')_1 \rightharpoonup a\sharp(h \rightharpoonup h')_2 \rightharpoonup x \\ &= (h_1 \rightharpoonup h'_1) \rightharpoonup a\sharp(h_2 \rightharpoonup h'_2) \rightharpoonup x \\ &= h_1 \rightharpoonup (h'_1 \rightharpoonup a)\sharp h_2 \rightharpoonup (h'_2 \rightharpoonup x) \\ &= h \rightharpoonup ((h'_1 \rightharpoonup a)\sharp(h'_2 \rightharpoonup x)) \\ &= h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup (a\sharp x)). \end{aligned}$$

Ainsi; $A\sharp X$ est un H-module à gauche.

○ *Montrons que $A\sharp X$ est un H-module à droite.*
A-t-on $(a\sharp x) \leftharpoonup 1_H = a\sharp x$?
On a :

$$\begin{aligned} (a\sharp x) \leftharpoonup 1_H &= (a \leftharpoonup 1_{H_1})\sharp(x \leftharpoonup 1_{H_2}) \\ &= (a \leftharpoonup 1_H)\sharp(x \leftharpoonup 1_H) \\ &= a\sharp x, \end{aligned}$$

$\forall\ a \in A,\ x \in X.$

Soient $h,\ h' \in H,\ a \in A,\ x \in X$. A-t-on $(a\sharp x) \leftharpoonup (h \leftharpoonup h') = ((a\sharp x) \leftharpoonup h) \leftharpoonup h'$?

$$\begin{aligned} (a\sharp x) \leftharpoonup (h \leftharpoonup h') &= a \leftharpoonup (h \rightharpoonup h')_1\sharp x \leftharpoonup (h \rightharpoonup h')_2 \\ &= a \leftharpoonup (h_1 \leftharpoonup h'_1)\sharp x \leftharpoonup (h_2 \rightharpoonup h'_2) \\ &= (a \leftharpoonup h_1) \leftharpoonup h'_1\sharp(x \leftharpoonup h_2) \leftharpoonup h'_2 \\ &= (a \leftharpoonup h_1\sharp x \leftharpoonup h_2) \leftharpoonup h' \\ &= ((a\sharp x) \leftharpoonup h) \leftharpoonup h'. \end{aligned}$$

Ainsi ; $A\sharp X$ est un H-module à droite.

∘ *Montrons la compatibilité des actions.*
A-t-on $(h \rightharpoonup (a\sharp x)) \leftharpoonup h' = h \rightharpoonup ((a\sharp x) \leftharpoonup h')$?

$$\begin{aligned}
(h \rightharpoonup (a\sharp x)) \leftharpoonup h' &= (h_1 \rightharpoonup a\sharp h_2 \rightharpoonup x) \leftharpoonup h' \\
&= (\varepsilon(h_1)a\sharp\varepsilon(h_2)x) \leftharpoonup h' \\
&= \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2)(a\sharp x) \leftharpoonup h' \\
&= \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2)(a \leftharpoonup h'_1\sharp x \leftharpoonup h'_2) \\
&= \varepsilon(h_1\varepsilon(h_2)(a \leftharpoonup h'_1\sharp x \leftharpoonup h'_2) \\
&= \varepsilon(h)(a \leftharpoonup h'_1\sharp x \leftharpoonup h'_2) \\
&= \varepsilon(h)((a\sharp x) \leftharpoonup h') \\
&= h \rightharpoonup ((a\sharp x) \leftharpoonup h').
\end{aligned}$$

Montrons que $A\sharp X$ est un H-comodule à droite.
∘ *Co-associative*
A-t-on $\lambda((a\sharp x)_0) \otimes (a\sharp x)_1 = (a\sharp x)_0 \otimes \vartriangle ((a\sharp x)_1)$?

$$\begin{aligned}
\lambda((a\sharp x)_0) \otimes (a\sharp x)_1 &= a_{00}\sharp x_{00} \otimes a_{01}x_{01} \otimes a_1\sharp x_1 \\
&= a_0\sharp x_0 \otimes a_1x_1 \otimes a_2\sharp x_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a\sharp x)_0 \otimes \vartriangle ((a\sharp x)_1) &= a_0\sharp x_0 \otimes (a\sharp x)_{11} \otimes (a\sharp x)_{12} \\
&= a_0\sharp x_0 \otimes a_{11}x_{11} \otimes a_{12}\sharp x_{12} \\
&= a_0\sharp x_0 \otimes a_1x_1 \otimes a_2\sharp x_2.
\end{aligned}$$

La propriété de la co-associativité est donc vérifiée.

∘*Co-unité*
A-t-on $(a\sharp x)_0\varepsilon((a\sharp x)_1)) = \varepsilon((a\sharp x)_0)(a\sharp x)_1 = a\sharp x$?

$$\begin{aligned}
(a\sharp x)_0\varepsilon((a\sharp x)_1) &= a_0\sharp x_0\varepsilon(a_1\sharp x_1) \\
&= (a_0\varepsilon(a_1))\sharp(x_0\varepsilon(x_1)) \\
&= a\sharp x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon((a\sharp x)_0)(a\sharp x)_1 &= \varepsilon(a_0\sharp x_0)(a_1\sharp x_1) \\
&= (\varepsilon(a_0)a_1)\sharp(\varepsilon(x_0)x_1) \\
&= a\sharp x.
\end{aligned}$$

La propriété est de la co-unité est donc vérifiée.

Ainsi, $A\sharp X$ est un H-bimodule et un $H-$ comodule à droite.
∘ *Montrons la compatibilité de la coaction avec les actions.*
En effet, $\forall\ h,\ \ g \in H,\ \ a \in A,\ x \in X$,

$$\begin{aligned}
&\Sigma(h \rightharpoonup (a\sharp x) \leftharpoonup g)_{[0]} \otimes (h \rightharpoonup (a\sharp x) \leftharpoonup g)_{[1]} \\
&\quad = \Sigma(h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup g_1\sharp h_2 \rightharpoonup x \leftharpoonup g_2)_{[0]} \otimes (h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup g_1\sharp h_2 \rightharpoonup x \leftharpoonup g_2)_{[1]} \\
&\quad = \Sigma(h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup g_1)_{[0]}\sharp(h_2 \rightharpoonup x \leftharpoonup g_2)_{[0]} \otimes (h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup g_1))_{[1]}(h_2 \rightharpoonup x \leftharpoonup g_2)_{[1]} \\
&\quad = \Sigma h_1 \rightharpoonup a_{[0]} \leftharpoonup g_1\sharp h_2 \rightharpoonup x_{[0]} \leftharpoonup (g_2 \otimes a_{[1]}x_{[1]}) \\
&\quad = \Sigma h \rightharpoonup (a\sharp x)_{[0]} \leftharpoonup g \otimes (a\sharp x)_{[1]}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Ainsi, $A\sharp X$ est un H-dimodule déformé.
Montrons que $A\sharp X$ est une algèbre de H-bimodule.
D'après le lemme3.3.8, $A\sharp X$ est une algèbre associative unitaire d'unité $1_A\sharp 1_X$.
En effet, $\forall$ h $\in$ H, a, b $\in$ A, x, y $\in$ X,

- $$\begin{aligned} h \rightharpoonup ((a\sharp x)(b\sharp y)) &= \Sigma h \rightharpoonup (a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y) \\ &= \Sigma h_1 \rightharpoonup (a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp (h_2 \rightharpoonup x_{[0]}y) \\ &= \Sigma (h_{11} \rightharpoonup a)(h_{12} \rightharpoonup (x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp (h_{21} \rightharpoonup x_{[0]})(h_{22} \rightharpoonup y) \\ &= (h_1 \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup (x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp (h_3 \rightharpoonup x_{[0]})(h_4 \rightharpoonup y), \end{aligned}$$

Nous avons également :

- $$\begin{aligned} &\Sigma(h_1 \rightharpoonup (a\sharp x))(h_2 \rightharpoonup (b\sharp y)) \\ &= \Sigma(h_{11} \rightharpoonup a\sharp h_{12} \rightharpoonup x)(h_{21} \rightharpoonup b\sharp h_{22} \rightharpoonup y) \\ &= \Sigma(h_1 \rightharpoonup a)\sharp(h_2 \rightharpoonup x)(h_3 \rightharpoonup b)\sharp(h_4 \rightharpoonup y) \\ &= \Sigma(h_1 \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup x)_{[1]1} \rightharpoonup (h_3 \rightharpoonup b) \leftharpoonup S((h_2 \rightharpoonup x)_{[1]2}))\sharp(h_2 \rightharpoonup x)_{[0]}(h_4 \rightharpoonup y) \\ &= \Sigma(h_1 \rightharpoonup a)(x_{[1]1}h_3 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp(h_2 \rightharpoonup x_{[0]})(h_4 \rightharpoonup y) \\ &= \Sigma(h_1 \rightharpoonup a)(h_3 x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp(h_2 \rightharpoonup x_{[0]})(h_4 \rightharpoonup y) \\ &= \Sigma(h_1 \rightharpoonup a)(h_2 x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp(h_3 \rightharpoonup x_{[0]})(h_4 \rightharpoonup y) \\ &= h \rightharpoonup ((a\sharp x)(b\sharp y)), \end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup (1_A\sharp 1_X) &= \Sigma(h_1 \rightharpoonup 1_A)\sharp(h_2 \rightharpoonup 1_X) \\ &= (\varepsilon(h_1)1_A)\sharp(\varepsilon(h_2)1_X) \\ &= \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2)(1_A\sharp 1_X) \\ &= \varepsilon(h_1\varepsilon(h_2))(1_A\sharp 1_X) \\ &= \varepsilon(h)(1_A\sharp 1_X). \end{aligned}$$

Ainsi, $A\sharp X$ est une algèbre de H-module à gauche.

- $$\begin{aligned} &((a\sharp x)(b\sharp y)) \leftharpoonup h \\ &= \Sigma(a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y) \leftharpoonup h \\ &= \Sigma(a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2})) \leftharpoonup h_1\sharp x_{[0]}y \leftharpoonup h_2 \\ &= (a \leftharpoonup h_{11})(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2})) \leftharpoonup h_{12})\sharp(x_{[0]} \leftharpoonup h_{21})(y \leftharpoonup h_{22}) \\ &= (a \leftharpoonup h_1)(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2})) \leftharpoonup h_2)\sharp(x_{[0]} \leftharpoonup h_3)(y \leftharpoonup h_4). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\Sigma((a\sharp x) \leftharpoonup h_1)((b\sharp y) \leftharpoonup h_2) \\ &= \Sigma(a \leftharpoonup h_{11}\sharp x \leftharpoonup h_{12})(b \leftharpoonup h_{21}\sharp y \leftharpoonup h_{22}) \\ &= \Sigma(a \leftharpoonup h_1)\sharp(x \leftharpoonup h_2)(b \leftharpoonup h_3)\sharp(y \leftharpoonup h_4) \\ &= \Sigma(a \leftharpoonup h_1)(x \leftharpoonup h_2)_{[1]1} \rightharpoonup (b \leftharpoonup h_3) \leftharpoonup S((x \leftharpoonup h_2)_{[1]2}))\sharp(x \leftharpoonup h_2)_{[0]}(y \leftharpoonup h_4) \\ &= \Sigma(a \leftharpoonup h_1)(h_3 x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp(x_{[0]} \leftharpoonup h_2)(y \leftharpoonup h_4) \\ &= \Sigma(a \leftharpoonup h_1)(x_{[1]1}h_3 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp(x_{[0]} \leftharpoonup h_2)(y \leftharpoonup h_4) \\ &= \Sigma(a \leftharpoonup h_1)(x_{[1]1}h_2 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp(x_{[0]} \leftharpoonup h_3)(y \leftharpoonup h_4) \\ &= ((a\sharp x)(b\sharp y)) \leftharpoonup h. \end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned}(1_A\sharp 1_X)\leftharpoondown h &= \Sigma(1_A\leftharpoondown h_1)\sharp(1_X\leftharpoondown h_2)\\ &= (1_A\varepsilon(h_1))\sharp(1_X\varepsilon(h_2))\\ &= (1_A\sharp 1_X)\varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2)\\ &= (1_A\sharp 1_X)\varepsilon(h_1\varepsilon(h_2))\\ &= (1_A\sharp 1_X)\varepsilon(h).\end{aligned}$$

Ainsi, $A\sharp X$ est une algèbre de H-module à droite.
On sait aussi que $A\sharp X$ est un H-bimodule. On vient donc de montrer $A\sharp X$ est une algèbre de H-bimodule.
Ensuite, montrons que $A\sharp X$est une algèbre de H-comodule à droite.
En effet, $\forall$ a, b $\in$ A et x, y $\in$ X, nous avons :

$$\begin{aligned}&\lambda((a\sharp x)(b\sharp y))\\ &\quad= \Sigma\lambda(a(x_{[1]1}\rightharpoonup b\leftharpoondown S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y)\\ &\quad= \Sigma(a(x_{[1]1}\rightharpoonup b\leftharpoondown S(x_{[1]2}))_{[0]}\sharp(x_{[0]}y)_{[0]}\otimes(a(x_{[1]1}\rightharpoonup b\leftharpoondown S(x_{[1]2}))_{[1]}(x_{[0]}y)_{[1]}\\ &\quad= \Sigma(a_{[0]}(x_{[1]1}\rightharpoonup b\leftharpoondown S(x_{[1]2})_{[0]}\sharp(x_{[0][0]}y_{[0]}\otimes a_{[1]}(x_{[1]1}\rightharpoonup b\leftharpoondown S(x_{[1]2}))_{[1]}x_{[0][1]}y_{[1]}\\ &\quad= \Sigma(a_{[0]}(x_{[1]1}\rightharpoonup b_{[0]}\leftharpoondown S(x_{[1]2})\sharp(x_{[0]}y_{[0]}\otimes a_{[1]}b_{[1]}x_{[1]3}y_{[1]}\\ &\quad= \Sigma(a_{[0]}(x_{[1]1}\rightharpoonup b_{[0]}\leftharpoondown S(x_{[1]2})\sharp(x_{[0]}y_{[0]}\otimes a_{[1]}x_{[1]3}b_{[1]}y_{[1]}\\ &\quad= \Sigma(a_0\sharp x_0\otimes a_1x_1)(b_0\sharp y_0\otimes b_1y_1)\\ &\quad= \lambda(a\sharp x)\lambda(b\sharp y).\end{aligned}$$

Ainsi, la coaction est compatible avec le produit. On sait déjà $A\sharp X$ est un H-comodule à droite.
Montrons que $\lambda(1_A\sharp 1_X) = 1_A\sharp 1_X\otimes 1_H$.

$$\begin{aligned}\lambda_{A\sharp X}(1_A\sharp 1_X) &= 1_{A_0}\sharp 1_{X_0}\otimes 1_{A_1}1_{X_1}\\ &= 1_A\sharp 1_X\otimes 1_H1_H\\ &= 1_A\sharp 1_X\otimes 1_H,\end{aligned}$$

Ainsi, $A\sharp X$ est une algèbre de H-comodule.

Théorème 3.3.10 *Soient H une algèbre de Hopf, A et X deux algèbres de H-dimodules déformées. Si A et X sont des bialgèbres, alors la structure de coalgèbre tensorielle sur $A\sharp X$ est compatible avec le produit de $A\sharp X$ est fait du produit semi-direct de $A\sharp X$ une bialgèbre si et seulement si l'application*

$$f : A\sharp X\longrightarrow A\sharp X,\ f(a\sharp x) = \Sigma x_{[1]1}\rightharpoonup a\leftharpoondown S(x_{[1]2})\sharp x_{[0]},\ \forall\ a\in A,\ x\in X \tag{3.20}$$

est un morphisme de coalgèbres. De plus, si A et X sont toutes des algèbres de Hopf, alors $A\sharp X$ est également une algèbre de Hopf dont l'antipode est donnée par :

$$S(a\sharp x) = (1\sharp S(x))(S(a)\sharp 1),\ \forall\ a\in A,\ x\in X. \tag{3.21}$$

Preuve :
Prouvons que $A\sharp X$ est une bialgèbre.
• *Montrons que $A\#X$ est une algèbre.*
Soient $a,\ a',\ a''\in A,\ x,\ x',\ x''\in X$. On a :
○ *$A\#X$ est un $\mathbb{K}-$module d'après les hypothèses.*
○ *La linéarité de $m_{A\#X}$ et les propriétés du produit tensoriel donnent :*

$$\begin{aligned}&m_{A\#X}[((a\#x)+(a'\#x'))\otimes(a''\#x'')]\\&\quad=m_{A\#X}[((a\#x)\otimes(a''\#x''))+((a'\#x')\otimes(a''\#x''))]\\&\quad=m_{A\#X}[(a\#x)\otimes(a''\#x'')]+m_{A\#X}[(a'\#x')\otimes(a''\#x'')],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&m_{A\#X}[(a\#x)\otimes((a'\#x')+(a''\#x''))]\\&\quad=m_{A\#X}[((a\#x)\otimes(a'\#x'))+((a\#x)\otimes(a''\#x''))]\\&\quad=m_{A\#X}[(a\#x)\otimes(a'\#x')]+m_{A\#X}[(a\#x)\otimes(a''\#x'')].\end{aligned}$$

○ *La commutativité du rectangle donne :*
A-t-on $[m_{A\#X}\circ(m_{A\#X}\otimes id_{A\#X})](a\#x\otimes a'\#x'\otimes a''\#x'')=[m_{A\#X}\circ(id_{A\#X}\otimes m_{A\#X})](a\#x\otimes a'\#x'\otimes a''\#x'')$?

$$\begin{aligned}&[m_{A\#X}\circ(m_{A\#X}\otimes id_{A\#X})](a\#x\otimes a'\#x'\otimes a''\#x'')\\&\quad=m_{A\#X}[(m_{A\#X}\otimes id_{A\#X})(a\#x\otimes a'\#x'\otimes a''\#x'')]\\&\quad=m_{A\#X}[(m_{A\#X}(a\#x\otimes a'\#x')\otimes id_{A\#X}(a''\#x'')]\\&\quad=m_{A\#X}[(m_{A\#X}(a\#x\otimes a'\#x')\otimes(a''\#x'')]\\&\quad=m_{A\#X}[(a\#x)(a'\#x')\otimes(a''\#x'')]\\&\quad=[(a\#x)(a'\#x')](a''\#x''),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[m_{A\#X}\circ(id_{A\#X}\otimes m_{A\#X})](a\#x\otimes a'\#x'\otimes a''\#x'')\\&\quad=m_{A\#X}[(id_{A\#X}\otimes m_{A\#X})](a\#b\otimes a'\#x'\otimes a''\#x'')]\\&\quad=m_{A\#X}[id_{A\#X}(a\#x)\otimes m_{A\#X}(a'\#x'\otimes a''\#x'')]\\&\quad=m_{A\#X}[(a\#x)\otimes m_{A\#X}(a'\#x'\otimes a''\#x'')]\\&\quad=m_{A\#X}[(a\#x)\otimes(a'\#x')(a''\#x'')]\\&\quad=(a\#x)[(a'\#x')(a''\#x'')].\end{aligned}$$

Ainsi, $A\#X$ *est associative.*
On a : $\forall\ a\#x,\ a'\#x',\ a''\#x''\in A\#X$,

○ *La commutativité des deux triangles donne :*
A-t-on $m_{A\#X}\circ(id_{A\#X}\otimes\mu_{A\#X})=m_{A\#X}\circ(\mu_{A\#X}\otimes id_{A\#X})$?

$$\begin{aligned}[m_{A\#X}\circ(id_{A\#X}\otimes\mu_{A\#X})]((a\#x)\otimes\lambda)&=m_{A\#X}[(id_{A\#X}\otimes\mu_{A\#X})]((a\#x)\otimes\lambda)]\\&=m_{A\#X}[id_{A\#X}(a\#x)\otimes\mu_{A\#X}(\lambda)]\\&=m_{A\#X}((a\#x)\otimes\lambda)\\&=(a\#x)\lambda,\\[1ex][m_{A\#X}\circ(\mu_{A\#X}\otimes id_{A\#X})](\lambda\otimes(a\#x))&=m_{A\#X}[(\mu_{A\#X}\otimes id_{A\#X})](\lambda\otimes(a\#x))]\\&=m_{A\#X}[\mu_{A\#X}(\lambda)\otimes id_{A\#X}(a\#x)]\\&=m_{A\#X}(\lambda\otimes(a\#x))\\&=\lambda(a\#x).\end{aligned}$$

Ainsi, $A\#X$ *est unitaire.*

$m_{A\#X}$ *est* $\mathbb{K}$*-linéaire. A-t-on* $m_{A\#X}(\lambda(a\#x)\otimes a'\#x'))=m_{A\#X}(a\#x)\otimes a'\#x')\lambda)$?

$$\circ\ m_{A\#X}(\lambda(a\#x)\otimes a'\#x')) \quad = \lambda m_{A\#X}(a\#x\otimes a'\#x') \\ = \lambda((a\#x)(a'\#x')) \\ = (\lambda(a\#x))(a'\#x'),$$

$$m_{A\#X}(\lambda(a\#x\otimes a'\#x')) \quad = m_{A\#X}((\lambda(a\#x)\otimes a'\#x')) \\ = m_{A\#X}((a\#x)\otimes\lambda(a'\#x')) \\ = (a\#x)(\lambda(a'\#x')).$$

Ainsi, $A\#X$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, d'où $A\#X$ est une algèbre.
• *Montrons que $A\#X$ est une coalgèbre.*
○ *Co-associativité*
A-t-on $(\triangle_{A\#X}\otimes id_{A\#X})\circ\triangle_{A\#X}=(id_{A\#X}\otimes\triangle_{A\#X})\circ\triangle_{A\#X}$?
Soient $a\#x\in A\#X$ on a :

$$((\triangle_{A\#X}\otimes id_{A\#X})\circ\triangle_{A\#X})(a\#b) \quad = (\triangle_{A\#X}\otimes id_{A\#X})\ \triangle_{A\#X}\ (a\#b) \\ = (\triangle_{A\#X}\otimes id_{A\#X})(a_1\#x_1\otimes a_2\#x_2) \\ = (\triangle_{A\#X}\ (a_1\#x_1)\otimes id_{A\#X})(a_2\#x_2) \\ = (a_{11}\#x_{11})\otimes(a_{12}\#x_{12})\otimes(a_2\#x_2) \\ = a_1\#x_1\otimes a_2\#x_2\otimes a_3\#x_3,$$

$$(id_{A\#X}\otimes\triangle_{A\#X})\circ\triangle_{A\#X})(a\#b) \quad = (id_{A\#X}\otimes\triangle_{A\#X})\ \triangle_{A\#X}\ (a\#x) \\ = (id_{A\#X}\otimes\triangle_{A\#X})(a_1\#x_1\otimes a_2\#x_2) \\ = id_{A\#X}(a_1\#x_1)\otimes\triangle_{A\#X}\ (a_2\#x_2) \\ = (a_1\#x_1)\otimes(a_{21}\#x_{21})\otimes(a_{22}\#x_{22}) \\ = a_1\#x_1\otimes a_2\#x_2\otimes a_3\#x_3.$$

Ainsi, la propriété du co-associativité est vérifiée.

○*Co-unité*
A-t-on $\varepsilon_{A\#X}(a_1\#x_1)(a_2\#x_2)=(a_1\#x_1)\varepsilon_{A\#X}(a_2\#x_2)=a\#x$?
On a :$\varepsilon_A(a_1)a_2=a_1\varepsilon_A(a_2)=a$,

$$\varepsilon_{A\#X}(a_1\#x_1)(a_2\#x_2) \quad = (\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_X(x_1))(a_2\#x_2) \\ = (\varepsilon_A(a_1)a_2)\#\varepsilon_X(x_1)(x_2) \\ = a\#x,$$

$$(a_1\#x_1)\varepsilon_{A\#X}(a_2\#x_2) \quad = (a_1\#x_1)(\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_X(x_2)) \\ = (a_1\varepsilon_A(a_2))\#(x_1\varepsilon_X(x_2)) \\ = a\#x.$$

Ainsi, la propriété du co-unité est vérifiée, donc $A\sharp X$ est une coalgébre, montrons l'équation clé :

$$\Sigma a_1(x_{[1]1}\rightharpoonup b\leftharpoonup S(x_{[1]2}))_1\sharp x_{[0]1}y_1\otimes a_2(x_{[1]1}\rightharpoonup b\leftharpoonup S(x_{[1]2}))_2\sharp x_{[0]2}y_2$$
$$=\Sigma a_1(x_{1[1]1}\rightharpoonup b_1\leftharpoonup S(x_{1[1]2}))x_{1[0]1}y_1\otimes a_2(x_{2[1]1}\rightharpoonup b_2\leftharpoonup S(x_{2[1]2}))x_{2[0]2}y_2.$$

Soient $a\sharp x,\ b\sharp y\in A\sharp X$, A-t-on $\triangle((a\sharp x)(b\sharp y))=\triangle(a\sharp x)\triangle(b\sharp y)$?

$$\begin{aligned}
\triangle\ ((a\sharp x)(b\sharp y)) &= \triangle\ (\Sigma a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y)\\
&= [\Sigma a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y)]_1 \otimes [\Sigma a(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))\sharp x_{[0]}y)]_2\\
&= \Sigma a_1(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))_1\sharp x_{[0]1}y_1 \otimes a_2(x_{[1]1} \rightharpoonup b \leftharpoonup S(x_{[1]2}))_2\sharp x_{[0]2}y_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangle\ (a\sharp x)\ \triangle\ (b\sharp y) &= [(a_1\sharp x_1)\otimes(a_2\sharp x_2)][(b_1\sharp y_1)\otimes(b_2\sharp y_2)]\\
&= [(a_1\sharp x_1)(b_1\sharp y_1)]\otimes[(a_2\sharp x_2)(b_2\sharp y_2)]\\
&= \Sigma a_1(x_{1[1]1} \rightharpoonup b_1 \leftharpoonup S(x_{1[1]2}))\sharp x_{[0]1}y_1 \otimes a_2(x_{2[1]1} \rightharpoonup b_2 \leftharpoonup S(x_{2[1]2}))\sharp x_{[0]2}y_2\\
&= \Sigma a_1(x_{1[1]1} \rightharpoonup b_1 \leftharpoonup S(x_{1[1]2}))x_{1[0]1}y_1 \otimes a_2(x_{2[1]1} \rightharpoonup b_2 \leftharpoonup S(x_{2[1]2}))x_{2[0]2}y_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, f est un morphisme de coalgèbres.
Montrons que si A et X sont toutes des algèbres de Hopf, alors $A\sharp X$ est une algèbre de Hopf, pour tout $a \in A,\ x \in X$.
A-t-on $\Sigma(a_1\sharp x_1)S(a_2\sharp x_2) = \Sigma S(a_1\sharp x_1)(a_2\sharp x_2) = \varepsilon(x)\varepsilon(a)$?
∘ *A-t-on $\Sigma(a_1\sharp x_1)S(a_2\sharp x_2) = \varepsilon(x)\varepsilon(a)$?*

$$\begin{aligned}
\Sigma(a_1\sharp x_1)S(a_2\sharp x_2) &= \Sigma(a_1\sharp x_1)(1\sharp S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= \sum(a_1(x_{1[1]1} \rightharpoonup 1 \leftharpoonup S(x_{1[1]2}))\sharp x_{1[0]}S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= \sum(a_1(\varepsilon(x_{1[1]1})1 \leftharpoonup S(x_{1[1]2}))\sharp x_{1[0]}S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= (a_1(1 \leftharpoonup S(\varepsilon(x_{1[1]1})x_{1[1]2}))\sharp x_{1[0]}S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= (a_1(1 \leftharpoonup S(x_{1[1]}))\sharp x_{1[0]}S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= a_1(1\varepsilon(S(x_{1[1]}))\sharp x_{1[0]}S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= a_1(\varepsilon\circ S)(x_{1[1]})\sharp x_{1[0]}S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= a_1(\varepsilon(x_{1[1]})\sharp x_{1[0]}S(x_2))(S(a_2)\sharp 1)\\
&= a_1\sharp x_{1[0]}\varepsilon(x_{1[1]})S(x_2)(S(a_2)\sharp 1)\\
&= a_1\sharp x_1S(x_2)(S(a_2)\sharp 1)\\
&= a_1\sharp\varepsilon(x)1(S(a_2)\sharp 1)\\
&= \varepsilon(x)(a_1\sharp 1)(S(a_2)\sharp 1)\\
&= \varepsilon(x)\sum a_1(1_{[1]1} \rightharpoonup S(a_2) \leftharpoonup S(1_{[1]2}))\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)(a_1(1_{[1]1} \rightharpoonup S(a_2) \leftharpoonup S(1_{[1]2}))\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)(a_1(\varepsilon(1_{[1]1})S(a_2) \leftharpoonup S(1_{[1]2}))\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)(a_1S(a_2) \leftharpoonup S(\varepsilon(1_{[1]1})1_{[1]2}))\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)(a_1S(a_2) \leftharpoonup S(1_{[1]})\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)a_1S(a_2)\varepsilon(S(1_{[1]}))\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)a_1S(a_2)(\varepsilon\circ S)(1_{[1]})\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)a_1S(a_2)\varepsilon(1_{[1]})\sharp 1_{[0]}1\\
&= \varepsilon(x)a_1S(a_2)\sharp 1_{[0]}\varepsilon(1_{[1]})1\\
&= \varepsilon(x)a_1S(a_2)\sharp 1\\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(a)1\sharp 1\\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(a).
\end{aligned}$$

∘ *A-t-on $\sum S(a_1\sharp x_1)(a_2\sharp x_2) = \varepsilon(x)\varepsilon(a)$?*

$$\begin{aligned}
\sum S(a_1\sharp x_1)(a_2\sharp x_2) &= \sum(1\sharp S(x_1))(S(a_1)\sharp 1)(a_2\sharp x_2)\\
&= \sum 1(S(x_1)_{[1]1} \rightharpoonup S(a_1) \leftharpoonup S(S(x_{1))_{[1]2}}))\sharp S(x_1)_{[0]}1)(a_2\sharp x_2)\\
&= (S(x_1)_{[1]1} \rightharpoonup S(a_1) \leftharpoonup S(S(x_{1))_{[1]2}}))\sharp S(x_1)_{[0]}1)(a_2\sharp x_2)\\
&= \varepsilon(S(x_1)_{[1]1})S(a_1) \leftharpoonup S(S(x_{1))_{[1]2}}))\sharp S(x_1)_{[0]}1)(a_2\sharp x_2)\\
&= \varepsilon(S(x_{1[1]1}))S(a_1) \leftharpoonup S(S(x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})1)(a_2\sharp x_2)\\
&= (\varepsilon\circ S)(x_{1[1]1})S(a_1) \leftharpoonup S(S(x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})1)(a_2\sharp x_2)\\
&= \varepsilon(x_{1[1]1})S(a_1) \leftharpoonup S(S(x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})1)(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1) \leftharpoonup S(S(\varepsilon(x_{1[1]1})x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})1)(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1) \leftharpoonup S(S(x_{1[1]}))\sharp S(x_{1[0]})1)(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)\varepsilon(S(S(x_{1[1]})))\sharp S(x_{1[0]})(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)(\varepsilon\circ S)(S(x_{1[1]})))\sharp S(x_{1[0]})(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)\varepsilon(S(x_{1[1]}))\sharp S(x_{1[0]})(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)(\varepsilon\circ S)(x_{1[1]})\sharp S(x_{1[0]})(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)\varepsilon(x_{1[1]})\sharp S(x_{1[0]})(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)\sharp S(x_{1[0]}\varepsilon(x_{1[1]}))(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)(1\sharp S(x_1))(a_2\sharp x_2)\\
&= S(a_1)(\sum 1(S(x_1)_{[1]1} \rightharpoonup a_2 \leftharpoonup S(S(x_1)_{[1]2})\sharp S(x_1)_{[0]}x_2)\\
&= S(a_1)(1(S(x_{1[1]1}) \rightharpoonup a_2 \leftharpoonup S(S(x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})x_2)\\
&= S(a_1)1\varepsilon(S(x_{1[1]1}))a_2 \leftharpoonup S(S(x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)1(\varepsilon\circ S)(x_{1[1]1})a_2 \leftharpoonup S(S(x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)1\varepsilon(x_{1[1]1})a_2 \leftharpoonup S(S(x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)1a_2 \leftharpoonup S(S(\varepsilon(x_{1[1]1})x_{1[1]2}))\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)a_2 \leftharpoonup S(S(x_{1[1]}))\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)a_2\varepsilon(S(S(x_{1[1]})))\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)a_2(\varepsilon\circ S)S(x_{1[1]})\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)a_2\varepsilon(S(x_{1[1]}))\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)a_2(\varepsilon\circ S)(x_{1[1]})\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)a_2\varepsilon(x_{1[1]})\sharp S(x_{1[0]})x_2\\
&= S(a_1)a_2\sharp S(x_{1[0]}\varepsilon(x_{1[1]}))x_2\\
&= \varepsilon(a)1\sharp S(x_1)x_2\\
&= \varepsilon(a)1\sharp\varepsilon(x)1\\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(a)1\sharp 1\\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(a).\blacksquare
\end{aligned}$$

Corollaire 3.3.11 *Soit A une algèbre de H-dimodule déformée. Si (H,σ) est une algèbre de Hopf coquasitriangulaire cocommutative, alors $A\sharp H$ est une algèbre de H-dimodule déformée.*

CONCLUSION

Si H est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative, les conditions de l'article sont satisfaites.
D'après l'article, une algèbre de H-dimodule déformée est une généralisation de l'algèbre de H-dimodule usuelle. On a déduit que le produit semi-direct d'algèbres de H-dimodules déformées est une généralisation du produit semi-direct d'algèbres de H-dimodules.

THE BIBLIOGRAPHY

[1] E. Abe. Hopf Algebras, Cambridge University Press, 1977.

[2] S. Caenepeel, F. Oystaeyen, and Y.H. Zhang. Quantum Yang-Baxter module algebras. *K-theory*, 8(3) :231–255, 1994.

[3] F.W. Long. The Brauer group of dimodule algebras. *Journal of Algebra*, 30(1-3) :559–601, 1974.

[4] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings.* Number 82. American Mathematical Soc., 1993.

[5] M.E. Swedler. *Hopf algebras.* Benjamin, New York, 1969.

[6] L. Y. Zhang and W. T. Tong. Quantum yang-baxter h-module algebras and their braided products. *Communications in Algebra*, 31(5) :2471–2495, 2003.