

Université Assane Seck de Ziguinchor



UFR des Sciences et Technologies
Département de Mathématiques
Laboratoire Mathématiques et Applications (LMA)

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées
OPTION : Bio-mathématiques

Thème :

Contrôle optimal d'un modèle de brucellose ovine

Présenté par : **Saliou DIAW**

Sous la direction de : **Dr Diène NGOM et Dr Moustapha SENE**

Soutenu le 15 Janvier 2022 devant le jury composé de :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Edouard DIOUF	Professeur Assimilé	Président	UASZ
M.Samsidy GOUDIABY	Maitre de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Timack NGOM	Maitre de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Moustapha SENE	Maitre de Conférences Titulaire	Co-directeur	UGB
Diène NGOM	Professeur Assimilé	Co-directeur	UASZ

Année universitaire 2020-2021

DEDICACES

Ce mémoire est dédié à ma mère Khadi FALL et à mon père Abdoulaye DIAW
qui m'ont éduqué depuis ma tendre enfance.

Aux Dr Diène NGOM et Dr Moustapha SENE qui en un laps de temps ont fait
naître en moi une passion démesurée pour l'épidémiologie et la théorie du contrôle
optimal.

À ma grande sœur Noumbé DIAW qui a financé tout mon cursus universitaire.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier **Dieu** le tout puissant, qui m'a donné la force d'accomplir ce modeste travail.

Mes premiers remerciements vont à l'endroit de mon co-encadreur de mémoire Dr Diène NGOM pour avoir accepté de me proposer un sujet de mémoire. Il a mis à ma disposition des articles et des livres en accords avec mes intérêts. Il a toujours été disponible. J'ai largement profité de sa vaste culture mathématique.

Je voudrais aussi remercier Dr Moustapha SÈNE, mon co-encadreur de mémoire, pour sa patience sa disponibilité et pour avoir relu et corrigé ce mémoire. Ses conseils de rédaction ont été très précieux. Il a mis aussi à ma disposition d'intéressants documents sur la théorie du contrôle optimal pour la rédaction de ce mémoire.

Je remercie vivement les membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à l'évaluation de ce mémoire.

Mes remerciements vont à l'endroit de tous les professeurs du département de mathématiques de l'Université Assance SECK de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont dispensé.

Je remercie tous les membres de ma famille en particulier mon père Abdoulaye DIAW et ma mère Khadi FALL.

Je remercie mes grandes sœurs, mes grands frères et mes petits frères de m'avoir motivé, soutenu, conseillé et orienté. Je veux nommer : Noumbé DIAW, Yacine DIAW, Maguette DIAW, Ramatoulaye DIAW, Mar Diaw, Ndiaga DIAW, Mamadou Diallo DIAW, Birama DIAW.

Je remercie aussi tous mes camarades de promotion qui m'ont soutenu et aidé durant les moments difficiles.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidées lors de la rédaction de ce mémoire.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour leur aide dans la réalisation de ce mémoire :

Rama SECK qui m'a beaucoup appris sur les codes de contrôles. Elle a partagé avec moi ses connaissances et expériences dans ce milieu, tout en m'accordant sa confiance.

Dr Souhaibou SAMBOU, Dr Abdoulaye DIOUF et Papa BADIANE pour leur soutien constant et leur encouragement.

Ma grande sœur Noubé DIAW, de m'avoir appris les défis à relever dans le monde des affaires.

Je tiens à remercier également tous les membres du laboratoire de mathématiques et Applications de l'université Assane Seck de Ziguinchor.

Resumé

Dans ce travail, nous formulons un modèle épidémiologique pour étudier la propagation de la brucellose dans un pays. Ce modèle inclut l'effet de différentes stratégies de contrôle, telles que : les campagnes de vaccination , les campagnes de sensibilisation et les campagnes de désinfection. En utilisant la théorie du contrôle optimal, nous déterminons une stratégie de contrôle qui vise à réduire le nombre d'individus infectés, en fonction de certaines restrictions opérationnelles (par exemple, économiques, logistiques, etc). De plus, nous étudions l'existence et l'unicité du contrôle optimal. En fin, nous illustrons l'intérêt des résultats obtenus par des simulations numériques.

Table des matières

Dédicace	1
Remerciements	2
Résumé	4
Table des figures	7
Introduction	8
1 Rappels d'outils mathématiques	11
1.1 Quelques résultats sur les EDOs	11
1.1.1 Existence de solutions	12
1.1.2 Notion de flot	12
1.1.3 Ensemble invariant et notion de stabilité	13
1.1.4 Notion sur les matrices	15
1.1.5 Systèmes monotones	16
1.1.5.1 Notations et définitions	16
1.1.5.2 Caractérisation des systèmes monotones	17
1.1.5.3 Systèmes linéaires monotones et théorie des graphes	18
1.1.5.4 Théorèmes de stabilité de Hirsch	20
1.2 Théorie du contrôle optimal	20
1.2.1 Définitions et notions de bases	20
1.2.2 Existence et unicité de contrôle optimal	23
1.2.3 Principe du minimum de Pontryagin	25
2 Modèle mathématique de la brucellose ovine	27
2.1 Épidémiologie de la brucellose ovine	27
2.1.1 Étiologie de la brucellose ovine	27
2.1.1.1 Survie des brucella dans l'environnement	28
2.1.2 Manifestations cliniques, traitement et prévention	28
2.1.3 Propagation, modes de transmissions et impacts	29

2.2	Description du modèle	31
2.3	Comportement asymptotique du modèle	33
2.3.1	Modèle réduit	33
2.3.2	Propriétés du modèle réduit	33
2.3.2.1	Positivité et bornitude des solutions du modèle réduit	34
2.3.2.2	Existence et unicité de la solution du modèle réduit	35
2.3.3	Points d'équilibres du modèle réduit	35
2.3.4	Calcul du taux de reproduction de base R_0	36
2.3.5	Analyse de stabilité des points d'équilibres du modèle réduit	38
3	Contrôle optimal de la brucellose ovine	45
3.1	Enoncé du problème de contrôle optimal	45
3.1.1	Position du contrôle optimal	46
3.2	Existence et unicité du contrôle optimal	47
3.2.1	L'équation de l'état adjoint	47
3.2.2	Existence et unicité du contrôle optimal	48
3.3	Caractérisation du contrôle optimal	49
3.4	Simulations numériques	50
	Conclusion	54
	Bibliographie	56
	Bibliographie	56

Table des figures

1	Répartition géographique de la brucellose animale dans le monde Source : Organisation Mondiale de la Santé Animale 2009	10
2.1	Morphologie des brucella melitensis	28
2.2	Avortements brucelliques.	29
2.3	Diagramme de flux du modèle de brucellose ovine incorporant une transmission directe et indirecte.	32
3.1	Dynamique du système (2.1) en fonction du temps avec $k_1 = 2$, $a_1 = 0.6$, $a_2 = 1.5$	51
3.2	Dynamique du système avec contrôle en fonction du temps avec $k_1 = 2$, $a_1 = 0.6$, $a_2 = 1.5$	52

Introduction

La modélisation est d'abord descriptive et explicative : elle permet de reproduire aussi fidèlement que possible les informations connues, passées ou présentes, donc de mieux connaître les facteurs gouvernants le développement de l'épidémie. Elle est un outil capital dans l'analyse de la propagation et le contrôle de certaines épidémies. Elle acquiert de ce fait une capacité prédictive, et devient donc un instrument de la prise de décision. Cela peut servir plusieurs objectifs :

- Évaluation de l'incidence réelle de l'épidémie dans la population, ce qui permet de mieux estimer le niveau d'immunisation de la population, si l'on connaît le taux d'immunité sur des échantillons de population ;
- Appréciation des besoins en matière d'hospitalisation à court et moyen termes, pour mieux préparer l'afflux de patients à l'hôpital ;
- Prévision à court terme des besoins en ressources hospitalières pour adapter les mesures telles que le confinement, la fermeture des commerces, etc. ;
- Estimation, a priori, et évaluation, a posteriori, de l'intérêt des différentes mesures dans la limitation de la propagation de l'épidémie.[1]

L'épidémiologie est l'étude des rapports entre les maladies et les facteurs susceptibles d'exercer une influence sur leur fréquence, leur distribution, leur propagation. C'est une science ancienne, qui s'est singulièrement développée avec les grandes épidémies telles que la grippe espagnole et tout récemment la covid19 et la maladie à virus Ébola. La compréhension de la manière dont se propage une maladie est cruciale pour espérer la contrôler. C'est pourquoi que plusieurs modèles mathématiques ont été proposés dans le passé pour l'étude de certaines épidémies (VIH, Choléra, covid19...). La paternité de ces modèles revient au médecin Sir Ronald Ross ([Prix Nobel en physiologie 1902](#))[36] qui a présenté le premier modèle sur le paludisme. [W.O. Kermack](#) et [A.G. McKendrick](#) [24] ont appliqué les idées de [Ronald Ross](#) pour étudier la dynamique de la transmission des maladies infectieuses humaines. Plus précisément, [Kermack](#) et [Mckendrick](#) ont appliqué les idées de [Ross](#) pour les maladies dont la dynamique de transmission dépend de la fréquence et de l'intensité des interactions entre individus susceptibles (sains) et individus infectés et infectieux. Depuis lors, la modélisation mathématique est devenue un outil incontournable dans l'analyse de la dynamique des maladies in-

fectieuses.

En santé animale, généralement la pathologie résulte d'une interaction entre le parasite responsable de la maladie, l'hôte animale et des facteurs environnementaux. C'est le cas de la brucellose. La brucellose est une maladie animale que l'on retrouve un peu partout à travers le monde voir figure (1). Elle affecte de nombreuses espèces animales et est transmissible à l'homme. On s'intéresse spécifiquement dans ce travail à la brucellose chez les ovins.

(Bedr' et al.,[2]) ont proposé un modèle de brucellose ovine intégrant une transmission directe et une transmission indirecte. La transmission est dite directe lorsque qu'un susceptible attrape la maladie par contact avec un élément infecté et elle est dite indirecte lorsque l'infection est liée à la présence d'objets infectés dans l'environnement. La particularité de leur modèle par rapport aux modèles de brucellose existants est la prise en compte de la transmission verticale et la contamination de l'environnement par les objets infectés. Pour contrôler l'épidémie (Bedr' et al.,)[2] procèdent à des abattages des individus infectés. Cette façon de faire n'est pas rentable du point de vue économique. En effet, partant du modèle proposé par (Bedr' et al.,)[2], nous proposons un nouveau modèle dans lequel nous introduisons un paramètre de vaccination, un paramètre sur la sensibilisation des éleveurs et un paramètre sur la désinfection.

L'objectif de ce mémoire sera justement de proposer d'autres stratégies de lutte contre la brucellose ovine. Nous allons introduire ces contrôles dans le modèle de (Bedr' et al.,)[2] et nous utiliserons les outils de la théorie du contrôle pour minimiser le nombre d'infecté. Notre approche sera basée sur le principe du minimum de Pontryagin.

La suite du document est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux rappels d'outils mathématiques avec une première partie où on établira quelques résultats sur les EDOs et une deuxième partie où on élaborera des rappels sur des notions importantes en théorie du contrôle optimal utile à l'étude du modèle de contrôle de la brucellose proposé. L'objectif de ces rappels est de se familiariser avec les notions de base des EDOs et de la théorie du contrôle qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

Dans le second chapitre, nous reprenons l'analyse mathématique du modèle déjà établi. Cette analyse sera précédée d'une brève description de l'épidémiologie de la brucellose ovine. L'analyse du modèle consistera à déterminer les états d'équilibre du modèle, à calculer le taux de reproduction de base R_0 du modèle et à étudier la stabilité des états d'équilibre du modèle.

Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à l'étude du nouveau système de contrôle en intégrant la vaccination (c_1), la désinfection de l'environnement (c_2) et l'effet de sensibilisation (c_3). L'étude consistera à déterminer l'existence, l'unicité et la caractérisation des contrôles optimaux qui permettent de minimiser le

nombre d'infecté. Ainsi nous allons proposer des simulations numériques du modèle sans contrôle et du modèle contrôlé afin de mesurer l'impact des contrôles que nous avons ajoutés au modèle de (Bedr' et al.),[2]

Nous présenterons une conclusion dans laquelle nous faisons la synthèse de notre travail.

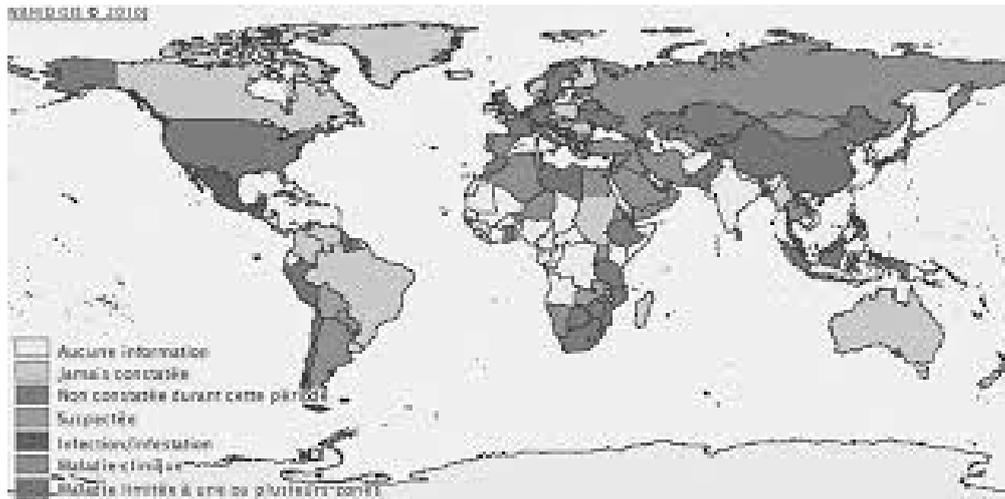


FIGURE 1 – Répartition géographique de la brucellose animale dans le monde
Source : Organisation Mondiale de la Santé Animale 2009

Chapitre 1

Rappels d'outils mathématiques

1.1 Quelques résultats sur les EDOs

Considérons I un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ et x une fonction d'une variable réelle à valeur dans \mathbb{R}^n dérivable, on note \dot{x} sa dérivée.

Définition 1.1.1 (Équation différentielle)

Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. On appelle équation différentielle du premier ordre associée à f l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

L'inconnue de cette équation est une fonction d'une seule variable et l'équation traduit une relation entre l'inconnue (notée ici x), sa variable (notée ici t) et sa dérivée première (\dot{x}). Si la fonction f ne dépend pas explicitement de la variable t , c'est-à-dire si f est définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n on parle d'équation différentielle autonome. Dans le cas contraire on dit que c'est une équation non autonome.

Définition 1.1.2 (solution locale)

Une solution de l'équation différentielle (1.1) est la donnée d'un couple (J, x) où J est un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} contenu dans I et x est une fonction de J à valeur dans \mathbb{R}^n dérivable sur J et vérifiant les conditions suivantes :

- i) $(t, x(t)) \in I \times \Omega$, pour tout $t \in J$;
- ii) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, pour tout $t \in J$.

On parle aussi de solution locale.

Définition 1.1.3 (prolongement de solution)

Soient (J_1, x_1) et (J_2, x_2) deux solutions de (1.1). On dit que (J_2, x_2) prolonge (J_1, x_1) si $J_1 \subset J_2$ et pour tout $t \in J_1$, $x_1(t) = x_2(t)$.

Définition 1.1.4 (solution maximale)

On dit qu'une solution (J, x) est maximale si elle n'admet aucun prolongement (J', x') avec J inclus strictement dans J' .

Définition 1.1.5 (solution globale)

Une solution globale de (1.1) est une solution définie sur I tout entier, i.e. (I, x) est une solution globale de $\dot{x} = f(t, x)$ où $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1.6

Il existe un lien entre les deux définitions précédentes. En effet, si (I, x) est une solution globale de (1.1), alors c'est une solution maximale. La réciproque étant fautive en général.

Définition 1.1.7 (problème de Cauchy)

Étant donné un point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution (J, x) de (1.1). On appelle problème de Cauchy le système :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

formé d'une équation différentielle et de la donnée d'une condition initiale.

1.1.1 Existence de solutions**Théorème 1.1.8 (Cauchy-Peano-Arzéla) [22]**

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et supposons $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue en (t_0, x_0) . Alors il existe une solution du problème de Cauchy associée à l'équation différentielle (1.1) relative à la condition initiale (t_0, x_0) .

Théorème 1.1.9 [22]

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. On considère l'équation différentielle (1.1). Pour tout point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, il existe une unique solution locale $x : I \rightarrow \Omega$ vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in I$, où I est un intervalle ouvert contenant t_0 .

1.1.2 Notion de flot**Définition 1.1.10 (flot) [5]**

Un flot sur \mathbb{R}^n est une application continue

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) \end{aligned}$$

vérifiant

- $\phi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$;
- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ pour $t, s \in \mathbb{R}$

Définition 1.1.11 (flot associé à une EDO) [5]

On appelle flot de l'équation différentielle (1.1) et à un instant t_0 , l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) &\longmapsto \phi_t(x_0) = x(t, t_0, x_0) \end{aligned}$$

où $\phi_t(x_0)$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x_0) = f(\phi_t(x_0)) \\ \phi_{t_0} = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Remarque 1.1.12

Dans le cas des systèmes autonomes, le temps n'a pas de rôle intrinsèque, on pourra se limiter aux données initiales en $t = 0$. Pour un point $x \in \Omega$, notons $\phi(\cdot, x)$ la solution maximale (J, x) de l'équation (1.1) valant x en $t = 0$. Autrement dit, $\phi(\cdot, x)$ est la solution du système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi(t, x) = f(\phi(t, x)) \\ \phi(0, x) = x \end{cases} \quad (1.4)$$

Définition 1.1.13 (Orbite) [5]

Soit (J, x) une solution de (1.1). l'orbite de la solution (J, x) est définie par :

$$\{x(t), t \in J\}.$$

1.1.3 Ensemble invariant et notion de stabilité

Définition 1.1.14

On dit qu'un ensemble M est invariant pour le système (1.1), si pour tout $x_0 \in M$ on a $\phi_t(x_0) \in M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où ϕ_t est le flot associé au système.

M est positivement invariant (respectivement négativement invariant) si $\phi_t(x) \in M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (respectivement, $t \in \mathbb{R}_-$) et pour tout $x \in M$.

Définition 1.1.15 (point d'équilibre)

Un point $x_e \in \Omega$ est dit point d'équilibre pour le système (1.1) si $f(x_e) = 0$.

Définition 1.1.16 (Attractivité locale) [19]

Un point x_e est dit localement attractif (ou que le système (1.1) est attractif en x_e) s'il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de x_e tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, x) = x_e$$

pour tout $x \in U$. x_e est localement attractif signifie que x_e attire les trajectoires du système dans son voisinage.

Définition 1.1.17 (Attractivité globale) [19]

Soit \mathcal{B} l'ensemble des points $x \in \Omega$ pour lesquels

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, x) = x_e$$

- \mathcal{B} est appelé bassin d'attraction de x_e .
- Un équilibre est globalement attractif si $\mathcal{B} = \Omega$.

x_e est globalement attractif signifie que x_e attire les trajectoires issues de tous les points situés sur l'ensemble de définition Ω du système.

Définition 1.1.18 (stabilité d'un point d'équilibre)

Soit $x_e \in \Omega$ un point d'équilibre du système (1.1). On dit que x_e est un point d'équilibre stable du système (1.1) ou que le système (1.1) est stable en x_e si pour tout ϵ positif, il existe un nombre réel positif δ tel que pour tout $x \in \Omega$ avec $\|x(0) - x_e\| < \delta$, on a

$$\|f(x(0)) - x_e\| < \epsilon.$$

Remarque 1.1.19

Si le système n'est pas stable en x_e , on dit qu'il est instable en x_e . Un point est donc stable si toutes les solutions qui lui sont proches au départ restent proches de ce point pour tout temps futur. Sinon ce point est instable.

Définition 1.1.20 (Stabilité asymptotique)

- x_e est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif (localement).
- x_e est un point globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

Remarque 1.1.21

L'attractivité n'implique pas la stabilité. Cependant, la notion d'attractivité reste vraie pour les systèmes linéaires $\dot{x} = Ax$.

Définition 1.1.22 (Arnold, 1974) [4]

Soit un système autonome $\dot{x} = f(x)$, f de classe C^1 et x_e un point d'équilibre, on appelle système linéarisé en x_e le système linéaire.

$$\dot{x} = Df(x_e) x,$$

où $Df(x_e)$ est la dérivée de f en x_e .

1.1.4 Notion sur les matrices**Définition 1.1.23 (Rayon spectral)**

Soit A une matrice carrée. On appelle spectre de A , l'ensemble des valeurs propres de A noté $\sigma(A)$. On appelle rayon spectral, le nombre réel $\rho(A)$ défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Remarque 1.1.24

On dit qu'une matrice A est stable si ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives. On dit aussi que la matrice est de Hurwitz.

Définition 1.1.25

On appelle matrice coopérative ou matrice de Metzler, toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients extra-diagonaux sont positifs. C'est-à-dire

$$a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$$

Théorème 1.1.26 [32]

Soit A une matrice positive, alors le rayon spectral $\rho(A)$ est une valeur propre de A et il existe un vecteur propre qui lui est associé.

Théorème 1.1.27 [32]

Si A est une matrice de Metzler, les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) La matrice de Metzler A est asymptotiquement stable.
- ii) La matrice de Metzler A est inversible et $-A^{-1} \geq 0$.
- iii) Il existe $c > 0$ tel que $Ac \ll 0$.
- iv) Il existe $c \gg 0$ tel que $Ac \ll 0$
- v) Si $c \gg 0$, alors l'équation $Ax + c = 0$ admet une solution $x \gg 0$.

Définition 1.1.28

Soit A une matrice de Metzler inversible. On appelle décomposition régulière de A , toute décomposition de la forme

$$A = F + V$$

où $F \geq 0$ et V est une matrice de Metzler asymptotiquement stable.

Théorème 1.1.29 [32]

Soit une matrice de Metzler inversible A . Pour toute décomposition régulière de A de la forme $A = F + V$, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- i) A est une matrice de Metzler asymptotiquement stable.
- ii) $\rho(-FV^{-1}) < 1$.

1.1.5 Systèmes monotones

1.1.5.1 Notations et définitions

Définition 1.1.30 (Hirsch, 1984) [20]

Un espace ordonné est constitué d'un espace topologique X et d'une relation d'ordre (partielle) $R \subset X \times X$ qui est un sous espace fermé. On note :

$$x \leq y \text{ si } (x, y) \in R$$

$$x < y \text{ si } x \leq y \text{ et } x \neq y$$

$$x \ll y \text{ si } (x, y) \in \text{Int}(R)$$

où $\text{Int}(R)$ signifie l'intérieur de l'ensemble R .

Définition 1.1.31 (Hirsch, 1984) [20]

Un espace ordonné X est dit fortement ordonné s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- Si $U \subset X$ est un ouvert et $x \in U$, alors il existe $a, b \in U$ tels que :

$$a \ll x \ll b$$
- Si $U \subset X$ est un ouvert, alors il existe $a, b \in U$ tels que $a \ll b$:

$$\exists x \in U \text{ tel que } a \ll x \ll b$$

Définition 1.1.32 (Hirsch and Smith, 2006) [21]

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit monotone si :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Strictement monotone si :

$$x < y \implies f(x) < f(y)$$

fortement monotone si :

$$x < y \implies f(x) \ll f(y)$$

antimonotone si :

$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

strictement antimonotone si :

$$x < y \implies f(x) > f(y)$$

Définition 1.1.33 (Fonda et al., 2005) [16]

Soit un système dynamique (ou un champs de vecteurs) défini sur un espace ordonné dont le flot associé est $\phi_t : x \rightarrow \phi_t(x)$

Ce système (ou champs de vecteur) est dit monotone si ϕ_t est monotone quelque soit $t \geq 0$, i.e.

$$\forall t \geq 0, x \leq y \rightarrow \phi_t(x) \leq \phi_t(y)$$

fortement monotone si ϕ_t est fortement monotone, i.e.

$$\forall t \geq 0, x \leq y \rightarrow \phi_t(x) \ll \phi_t(y)$$

1.1.5.2 Caractérisation des systèmes monotones

Théorème 1.1.34 (Brauer et al., 2008) [9]

Soit un champ de vecteur X de classe \mathcal{C}^1 sur un ensemble ouvert convexe $\Omega = \mathbb{R}^n$. On considère l'ordre associé à l'orthant positif \mathbb{R}_+^n . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le champ X est monotone.
2. Le champ est tel que pour $x \in \mathbb{R}^n$, la jacobienne $DX(x)$ associée est une matrice de Metzler.

Corollaire 1.1.35

Un champ monotone dont l'origine 0 est un point fixe laisse invariant l'orthant positif et son intérieur.

Proposition 1.1.36 [Smith, 2008][39]

On considère un système monotone dans $\mathbb{R}^n, x' = f(x)$ où f est de classe \mathcal{C}^1 . Soit $a \ll b$ tels que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$, alors $[a, b]$ est positivement invariant. Les trajectoires issues de a et b sont convergentes. Si de plus il existe un unique équilibre $p \in [a, b]$ alors p est globalement asymptotiquement stable sur $[a, b]$.

1.1.5.3 Systèmes linéaires monotones et théorie des graphes

Les systèmes linéaires monotones sont caractérisés par leur propriété d'invariance.

Définition 1.1.37 (Berman and Plemmons, 1994) [7]

Une application linéaire monotone est dite positive si et seulement si elle est à valeur dans l'orthant positif \mathbb{R}_+^n .

Sous-linéarité et équilibres (Hirsch and Smith, 2006)[21]

Définition 1.1.38

Une application $T : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ est sous-linéaire si :

$$\text{pour tout } \lambda/0 < \lambda < 1, x > 0 \Rightarrow \lambda T(x) \leq T(\lambda x)$$

Strictement sous-linéaire si :

$$0 < \lambda < 1, x > 0 \Rightarrow \lambda T(x) < T(\lambda x)$$

Fortement sous-linéaire si :

$$0 < \lambda < 1, x \gg 0 \Rightarrow \lambda T(x) \ll T(\lambda x)$$

Proposition 1.1.39

Soit T une application \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$x \gg y \gg 0 \Rightarrow DT(x) < DT(y)$$

Alors T est sous-linéaire si $T(0) > 0$. On l'appelle aussi stricte antimonotonie de DT .

Remarque 1.1.40

La condition est nécessaire mais pas suffisante.

Proposition 1.1.41

Soit X un champs de vecteur de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}^n , dont son flot ϕ conserve l'ordre dans \mathbb{R}_+^n pour tout $t > 0$, qui est monotone et strictement sous-linéaire dans \mathbb{R}_+^n . Alors le flot associé est monotone et strictement sous-linéaire. De plus, si X est fortement monotone et strictement sous-linéaire, alors le flot $\phi(t)$ est fortement monotone et fortement sous-linéaire.

Proposition 1.1.42 (Hirsch, 1984) [20]

Soit X un champs de vecteur de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}^n , dont le flot ϕ conserve l'ordre dans \mathbb{R}_+^n pour tout $t > 0$, qui est fortement monotone et strictement sous-linéaire dans \mathbb{R}_+^n . Supposons que toutes les trajectoires sont bornées. Alors X ne peut pas avoir deux équilibres positifs dans $\text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$.

Matrice irréductible et théorie des graphes

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Pour caractériser ce type de matrice, on associe à $A \in M_n(\mathbb{R})$ un graphe de n sommets notés S_1, \dots, S_n .

Définition 1.1.43 (Bretto et al., 2012) [10]

- Un graphe orienté $g = (S, U)$ est un couple constitué par un ensemble $S = S_1, \dots, S_n$ et une partie U de $S \times S$.
- Les éléments de S s'appellent sommets (ou nœuds).

Définition 1.1.44 (Bretto et al., 2012) [10]

Un arc $S_i \rightsquigarrow S_j$ d'un graphe relie S_i à S_j si $a_{ij} \neq 0$.

Définition 1.1.45 (Bretto et al., 2012) [10]

Un chemin du graphe :

$$S_i \rightsquigarrow S_{i_1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow S_{i_p} \rightsquigarrow S_j$$

allant de S_i à S_j est une suite d'arcs, si elle existe telle que :

$$S_i \rightsquigarrow S_{i_1}, S_{i_1} \rightsquigarrow S_{i_2}, \dots, S_{i_p} \rightsquigarrow S_j$$

Soient des arcs du graphe.

On remarque qu'un arc est donc un chemin

Définition 1.1.46

Un graphe est dit fortement connexe s'il existe au moins un chemin allant de tout sommet S_i à tout sommet S_j où $i, j \in 1, \dots, n$.

Théorème 1.1.47 (Caractérisation d'une matrice irréductible (Bretto et al., 2012)) [10]

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dit irréductible si et seulement si son graphe associé est fortement connexe.

Théorème 1.1.48

Soit un système $x' = X(x)$ où le vecteur champs X est de classe \mathcal{C}^1 sur un ensemble ouvert convexe.

Si la jacobienne $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)$ associée au système est une matrice de Metzler irréductible alors, le champs X est fortement monotone.

1.1.5.4 Théorèmes de stabilité de Hirsch

Dans cette partie, nous énonçons les théorèmes de stabilité de Hirsch que nous utiliserons dans le chapitre suivant. Les preuves de ces théorèmes sont détaillées dans (Hirsch, 1984)[20].

On considère un flot monotone ϕ du système (1.1) dans un espace fortement ordonné X et $K \subset X$ un attracteur pour ϕ .

Théorème 1.1.49 (Hirsch, 1984) [20]

K contient un point équilibre.

Théorème 1.1.50 [Hirsch, 1984][20]

Si K contient un seul point d'équilibre p alors, toute trajectoire attirée par K converge vers p .

Il s'en suit le théorème suivant :

Théorème 1.1.51 [Hirsch, 1984][20]

Soit un champ de vecteur C^1 dans \mathbb{R}_+^n dont le flot ϕ conserve l'ordre dans \mathbb{R}_+^n . On suppose que l'origine est un point d'équilibre et que toutes les trajectoires dans \mathbb{R}_+^n sont bornées. On suppose aussi que le jacobien $DF : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est strictement anti-monotone dans le sens où :

$$\text{si } x > y \text{ alors } DF(x) < DF(y).$$

Alors soit toutes les trajectoires dans \mathbb{R}_+^n convergent vers l'origine, soit il existe un unique équilibre $p \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$ et que toute trajectoire dans $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ converge vers p .

1.2 Théorie du contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal est un problème d'optimisation dynamique dépendant d'un paramètre appelé contrôle. Il consiste à déterminer le meilleur contrôle (paramètre) u qui minimise le coût d'une trajectoire associée (ou état associée) x_u . Dans cette partie on étudie le problème de contrôlabilité et avec quelques rappels de définitions et notions de bases.[40]

1.2.1 Définitions et notions de bases

On rappelle les définitions et résultats de contrôlabilité suivant.

Définition 1.2.1

Soient deux réels $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ avec $t_0 < t_1$, une fonction vectorielle $f : [t_0, t_1] \times$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^n$. On appelle système contrôlé le système d'équation différentielle ordinaire (EDO) appelé problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont respectivement l'état associé et le contrôle du système (1.5).

Définition 1.2.2

Soit \mathbf{U}_{ad} l'ensemble des fonctions admissibles pour le contrôle u et un ensemble de cible pour $x(t_1)$. On appelle problème de contrôle optimal le problème qui consiste à trouver parmi toutes les fonctions (x, u) satisfaisantes le système (1.5) et qui minimise la fonction J appelée fonction coût et définie par :

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t)) dt + h(x(t_1))$$

avec $g : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions données.

Ainsi, un problème de contrôle optimal se pose sous la forme du problème de minimisation sous contrainte suivante :

$$\begin{cases} \min J(x, u) := J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t)) dt + h(x(t_1)) \\ \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x^0, \quad u \in \mathbf{U}_{ad} \end{cases} \quad (1.6)$$

Définition 1.2.3 (Système linéarisé)

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), c(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

où f est une fonction de classe C^p , $p \geq 1$. Le système linéarisé le long de la trajectoire x est définie par :

$$\begin{cases} \frac{dy_v(t)}{dt} = A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))$, $B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))$.

Définition 1.2.4 (Application entrée-sortie)

Soit $t_1 > 0$; l'application entrée-sortie en temps t_1 du système contrôlé (1.5) initialisé en x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_{t_1} : \mathbf{U}_{ad} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto x(t_1) \end{aligned}$$

avec \mathbf{U}_{ad} est l'ensemble des contrôles admissibles, i.e l'ensemble des contrôles u tel que la trajectoire associée est bien définie sur $[t_0, t_1]$.

Définition 1.2.5 (Ensemble accessible)

L'ensemble accessible en temps t_1 pour le système (1.7), noté $\text{Acc}(x_0, t_1)$ est l'ensemble des extrémités au temps t_1 . C'est l'ensemble des destinations possibles en temps t_1 du système partant de x_0 au temps $t = t_0$. Autrement dit c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps t_1 . C'est l'ensemble des destinations possibles en temps t_1 du système (1.7) en faisant varier le contrôle u .

Théorème 1.2.6

Considérons le système de contrôle (1.7) où la fonction $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et les contrôles u appartiennent à l'ensemble \mathbf{U}_{ad} . On suppose que :

- Il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par b sur $[t_0, t_1]$,

$$\text{i.e } \exists b > 0, \forall u \in \mathbf{U}_{ad}, \forall t \in [t_0, t_1], \|x(t)\| \leq b,$$

- Pour tout (t, x) l'ensemble des vecteurs vitesses $v(t, x) = \{f(t, x(t), u(t))/u \in \mathbb{R}^m\}$, est convexe.

Alors l'ensemble $\text{Acc}(x_0, t_1)$ est compact et varie continûment en t sur $[t_0, t_1]$.

Définition 1.2.7

Le système (1.7) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si $\mathbb{R}^n = \cup_{t_1 \geq 0} \text{Acc}(x_0, t_1)$. Il est contrôlable en temps t_1 si $\mathbb{R}^n = \text{Acc}(x_0, t_1)$.

Théorème 1.2.8

On considère le système (1.7) avec $f(x_0, u_0) = 0$. Notons par $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$ et supposons que $\text{rang}(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n$. Alors le système est localement contrôlable en x_0 .

Définition 1.2.9 (Contrôle singulier)

Soit u un contrôle défini sur $[t_0, t_1]$ tel que sa trajectoire associée x issue de $x(t_0) = x_0$ est définie sur $[t_0, t_1]$. On dit que le contrôle u (ou la trajectoire x) est singulier sur $[t_0, t_1]$ si la différentielle de Fréchet $dE_{t_1}(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est régulier.

Définition 1.2.10 (Ensemble convexe, fonction convexe)

Soit X un espace vectoriel et D un sous ensemble non vide de X .

- On dit que D est convexe si $\forall x, y \in D$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$.
- Soit $D \subset X$ un ensemble convexe et $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que h est une fonction convexe sur D si

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y), \forall x, y \in D \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

On dit que h est une fonction strictement convexe sur D si

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y), \forall x, y \in D \quad \text{avec} \quad x \neq y \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Définition 1.2.11

Soit X un espace vectoriel normé, $D \subset X$ un sous ensemble non vide. Supposons que D est non bornée (i.e il existe au moins une suite $(x_k) \subset D$ tel que $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$). Soit $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que h est coercive sur D si pour toute suite $(x_k) \subset D$ tel que $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$ on a $h(x_k) \rightarrow +\infty$.

1.2.2 Existence et unicité de contrôle optimal

On étudie dans cette section des conditions d'existence et d'unicité d'un contrôle optimal pour le problème de contrôle optimal (1.6).

Théorème 1.2.12

Considérons le système de contrôle $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$, où f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n , les contrôles $u(t)$ sont à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, et ou éventuellement on a des contraintes d'inégalités sur l'état $\alpha_1 \leq 0, \dots, \alpha_r \leq 0$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des fonctions continues (fonction coût) sur \mathbb{R}^n .

Soient M_0 et M_1 deux compacts de \mathbb{R}^n tels que M_1 est accessible depuis M_0 . Soit \mathbf{U}_{ad} l'ensemble des contrôles à valeurs dans Ω joignant M_0 à M_1 . Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, et h une fonction continue sur \mathbb{R}^n . On considère le coût :

$$J(u) = h(t(u), x(t(u))) + \int_0^{t(u)} g(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.9)$$

où $t(u)$ est tel que $x(t(u)) \in M_1$. On suppose que :

i) il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in \mathbf{U}_{ad}$ est uniformément bornée par b sur $[0, t(u)]$, i.e

$$\exists b > 0 \mid \forall u \in \mathbf{U}_{ad}, \forall t \in [0, t(u)], \|x(t)\| \leq b,$$

ii) pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, l'ensemble des vecteurs vitesses augmentées $\hat{v}(t, x) = \{(f(t, x, u), g(t, x, u))/u \in \Omega\}$ est convexe.

Alors, il existe un contrôle optimal u sur $[0, t(u)]$ tel que la trajectoire associée joint M_0 à M_1 en temps $t(u)$ et en coût minimal.

Proposition 1.2.13

Soit $X = \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et convexe.

1) Supposons que g est continue sur D avec en plus, g est coercive si D est non bornée. Alors il existe au moins une solution du problème de minimisation (1.6).

2) Si en plus g est strictement convexe alors la solution du problème de minimisation est unique.

Remarque 1.2.14

Pour un problème de contrôle optimal à temps final fixé, on impose $t(u) = t_1$. En particulier, on suppose que la cible M_1 est accessible depuis M_0 en temps t_1 .

Définition 1.2.15

Une solution du problème (1.6) est appelée un contrôle optimal.

Théorème 1.2.16 (Fleming et Rishel)

On suppose que l'ensemble des contrôles admissibles pour le problème (1.5) est composé de fonction Lebesgue intégrable sur $t_0 \leq t \leq t_1$ à valeur dans \mathbb{R} .

On suppose que $f(t, x(t), u(t))$ est convexe par rapport à u et qu'il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ et $\beta > 1$ telles que

$$g(t, x, u) = \gamma(t, x) + \beta(t, x)u,$$

$$|g(t, x, u)| \leq \alpha_1(1 + |x| + |u|),$$

$$|g(t, x_1, u) - g(t, x, u)| \leq \alpha_2(x_1 - x)(1 + |u|)$$

$$f(t, x, u) \geq \alpha_3|u|^\beta - \alpha_4,$$

Pour tout $t_0 \leq t \leq t_1$, $x, x_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe un contrôle optimal u^* minimisant $J(u)$, avec $J(u^*)$ fini.

1.2.3 Principe du minimum de Pontryagin

Dans ce paragraphe on étudie les conditions nécessaires pour un contrôle optimal. On commence par rappeler quelques notions fondamentales.

Définition 1.2.17 (Hamiltonien)

On appelle Hamiltonien du problème (1.6) l'application

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x(t), q(t), u(t)) \longmapsto H(t, x(t), q(t), u(t)) = g(x(t), u(t)) + \langle q, f(x(t), u(t)) \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire.

Définition 1.2.18 (Équation de l'état adjoint)

Soit $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbf{U}_{ad} \subseteq \mathbb{R}^m$ un contrôle et $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'état associée c'est à dire

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

On appelle état adjoint associée au contrôle u et l'état x l'unique solution $q : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ du système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), q(t), u(t)) \\ q(t_1) = h'(x(t_1)). \end{cases} \quad (1.10)$$

Théorème 1.2.19 (Principe du minimum de Pontryagin)

Soit $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbf{U}_{ad} \subseteq \mathbb{R}^m$ contrôle optimal (u min de J).

Soit x et q l'état et l'état adjoint associée à u alors $\forall t \in]t_0, t_1[$, $u(t)$ réalise le minimum de l'application : $u \longmapsto H(t, x(t), q(t), u(t))$ sur \mathbf{U}_{ad} avec t, x, q fixé, u variant.

Remarque 1.2.20

1 Le problème adjoint est un problème de Cauchy avec inconnue q avec $q(t_1)$ donné. Alors si on connaît u on peut calculer x et ensuite q , ce qui nous donne $\nabla J(u)$, ou J est dérivable.

2 Le principe du minimum de Pontryagin est un résultat constructif dans le sens ou il permet de déterminer explicitement les expressions des trajectoires optimales et des contrôles leur donnant naissance.

3 En l'absence de contrainte sur le contrôle $U_{ad} = \mathbb{R}$ alors la condition de minimisation devient : $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

4 Le couple (q, q_0) est nécessairement non trivial, i.e ces deux quantités ne peuvent s'annuler en même temps, sinon l'Hamiltonien $H(t, x(t), u(t), q(t))$ n'est pas défini.

5 Le choix de $q_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. Le choix de $q_0 \geq 0$ conduit alors au principe du minimum.

Dans ce chapitre, nous avons fait le rappel des définitions, théorèmes et propositions nécessaires à l'étude de contrôlabilité et qualitative des systèmes. Le modèle proposé dans [Aïnseba et al. \(2010\)\[2\]](#) est un système monotone d'équations différentielle dans le plan. Ces rappels nous permettrons de faire l'analyse mathématique de ce dernier dans le chapitre qui suit.

Chapitre 2

Modèle mathématique de la brucellose ovine

2.1 Épidémiologie de la brucellose ovine

Présente depuis des décennies et très répandue dans des pays en voie de développement, la brucellose est une maladie hautement contagieuse des animaux d'élevage dont l'impact économique sur le développement des industries animales est considérable. Elle est considérée comme la zoonose la plus répandue dans le monde, elle représente une menace pour la santé de l'homme. La brucellose touche de nombreuses espèces animales domestiques ou sauvages notamment : les ovins, les caprins, les bovins, les camélidès, les équidés et les porcs. Dans notre étude on s'intéresse à la brucellose animale, en particulier celle ovine.

2.1.1 Étiologie de la brucellose ovine

La brucellose ovine est classiquement provoquée par une bactérie connue sous le nom de *brucella melitensis*. Cette dernière est un virus isolé pour la première fois en 1887 par David Bruce à partir du sang d'un individu infecté. En 1905, Zanitt a réalisé une expérience sur de nombreuses chèvres à Malte. Il a découvert que tous les sujets étaient infectés et a ainsi révélé l'origine de la brucellose au sein de la population humaine (Sibille, 2006).[38] Les brucella sont des bacilles à Gram négatif, aérobies, à tropisme intracellulaire et non sporulés. La figure (2.1) donne un aperçu de leur morphologie au microscope. Elles se trouvent essentiellement chez les animaux qui jouent le rôle de réservoir mais peuvent également être présentes dans l'environnement et les produits alimentaires.



FIGURE 2.1 – Morphologie des brucella melitensis

2.1.1.1 Survie des brucella dans l'environnement

Au delà du seul réservoir animal, il convient également de considérer sa survie dans l'environnement. Les brucella peuvent survivre :

- dans l'eau plusieurs mois à une température entre 4 et 8° ; 2 ans à 0°
- dans les tissus en milieux congelés pendant plusieurs années,
- dans l'urine durant 30 jours et 200 jours dans les exsudats utérins,
- dans les avorton durant 75 jours. ([Ganiere et al., 2004](#))[17]

2.1.2 Manifestations cliniques, traitement et prévention

La brucellose animale est essentiellement une maladie de la reproduction. Elle est généralement bénigne et l'animal infecté ne présente que peu de signes cliniques. Elle peut être suspectée sur la base de signes cliniques tels que les avortements mais la réalisation de tests sérologies est nécessaire pour sa confirmation ([Sibille, 2006](#)).[38]

- Chez le mâle, la brucellose se manifeste par l'élargissement du scrotum, du testicule (tuméfaction des testicules) et parfois une baisse de fertilité.

- Chez la femelle, on note une stérilité temporaire, des avortements parfois suivis de rétentions placentaires.

lorsque la gestation est menée à terme, cette dernière peut aboutir à la naissance d'agneaux faibles ou mort nés. La figure (2.2) en est une illustration.



FIGURE 2.2 – Avortements brucelliques.

Source :<https://www.engormix.com/ovinos/articulos/analisis-puntos-criticos-produccion30384.htm>

Aucun traitement contre la brucellose ovine n'est disponible. La conduite à tenir serait de détecter les animaux atteints et de les éliminer. Vue l'indisponibilité de traitements contre la brucellose ovine, des dispositifs de surveillance sont nécessaires pour stopper sa propagation. Cette surveillance peut être organisée en deux axes :

- Prophylaxie obligatoire : il s'agit de prélever les mâles de plus de 6 mois, 25% des femelles en âge de reproduire, ainsi que les animaux nouvellement infectés.

- Déclaration des avortements et réalisation de dépistages sérologiques de chaque avortement (Refai, 2002).[35]

2.1.3 Propagation, modes de transmissions et impacts

Les bactéries du genre brucella peuvent survivre durant plusieurs mois hors de l'organisme, dans le milieu extérieur, en particulier dans les conditions naturelles (lait, fromage, fécis, sol, eau, mur des étables). C'est ce qui favorise la propagation

de la maladie. Cette dernière s'effectue par des matières virulentes (fœtus, lait, sécrétions vaginales, urines,...) qui contaminent l'environnement ([Ganiere et al., 2004](#)).[17]

Les voies de transmission de la brucellose sont multiples puisqu'elles peuvent concerner le contact, l'ingestion mais aussi l'inhalation. Ainsi, la transmission peut être :

* Directe et Indirecte

* Respiratoire et verticale

L'infection s'étend dans les troupeaux pendant deux périodes préférentielles : l'accouplement et la période des mises en bas. En effet, les moutons et les vaches susceptibles peuvent être contaminés pendant la période de reproduction par contact avec les infectés. Il s'agit du mode de transmission directe. De plus, les femelles infectées éjectent du placenta et le fœtus dans l'environnement pendant les périodes d'agnelage (mises en bas). Il s'agit du mode de transmission indirecte. Par ailleurs, la transmission d'une mère infectée à ses nouveaux nés est aussi prise en compte dans la description du modèle que nous étudions. Il s'agit de la transmission verticale ([Aïnseba et al., 2010](#)).[2] La brucellose engendre des pertes énormes sur le plan économique à travers la faible production animale. Ses impacts sur la reproduction animale ainsi que sur la santé publique sont considérables.

- Impact économique et importance sur les productions animales.

La brucellose animale occasionne des pertes économiques sévères, résultant à la fois des effets directs sur les animaux et indirects sur les industries animales. Les pertes économiques sont importantes pour les éleveurs d'ovins, de vaches laitières, caprins... ([mixte FAO/OMS d'experts de la brucellose, 1986](#)).[25]

- Impact sur la reproduction animale.

L'importance de la brucellose tient à la faible capacité de reproduction qu'elle engendre en raison des avortements, de l'infertilité et de la rétention placentaire ([Sibille, 2006](#)).[38]

- Impact sur la santé publique.

La *Brucella melitensis* est l'agent responsable de la plupart des cas cliniques sévères de la brucellose humaine. La maladie peut entraîner la mort ; le plus souvent elle se traduit par un état délirant aigu ou chronique ayant des conséquences sévères sur le développement économique et social ([Zinsstag et al., 2005](#)).[42]

La brucellose ovine engendre des conséquences désastreuses, elle persiste aujourd'hui dans les pays en voie de développement. En 2010, [Aïnseba et al.](#),[2] ont proposé un modèle de brucellose ovine dans le but de mieux comprendre la manière dont se propage la maladie et mettre en place une politique d'éradication de

cette maladie.

2.2 Description du modèle

Un modèle mathématique est basé sur des hypothèses. Dans ce modèle nous avons les deux hypothèses de base suivantes :

- $b \geq m > 0$ avec b le taux de natalité et m le taux de mortalité.
- La population est décomposé en deux classes, les sains ou susceptibles et les infectés.

Soient $C(t)$ la fraction de contaminant dans l'environnement à l'instant t , $I(t)$ le nombre de sujets infectés à l'instant t , $S(t)$ le nombre de sujets susceptibles d'attraper la maladie à l'instant t et $N(t)$ la population total à l'instant t .

Sachant que la population est essentiellement composée de susceptibles et d'infectés, On a :

$$N(t) = I(t) + S(t), \forall t \geq 0$$

Nous avons aussi la description des paramètres du modèle :

- * p est la proportion de nouveaux nés infectés d'une mère infectée. c'est le paramètre de transmission verticale. p varie de 5% à 10%
- * b représente le taux de natalité et m le taux de mortalité.
- * K est la capacité limite du milieu
- * a_1 est le taux d'infection directe, donc a_1SI est la proportion de sujets susceptibles infectés suite à un contact avec d'autres sujets infectés :c'est la transmission directe.
- * a_2 est le taux d'infection indirect, donc a_2SC est la proportion de sujets susceptibles infectés suite à un contact avec des objets contaminés qui se trouve dans l'environnement.
- * k_1 est le taux de contamination des objets par les sujets infectés, alors $k_1I(1-C)$ représente la fraction des nouveaux contaminants dans l'environnement.
- * k_2 est le taux d'élimination des bactéries brucella dans l'environnement.

On suppose que les sujets infectés et les sujets susceptibles ont les mêmes paramètres démographiques.

Une représentation schématique du modèle est donnée par le diagramme de flux ci-après (2.3) et le modèle proposé s'écrit alors :

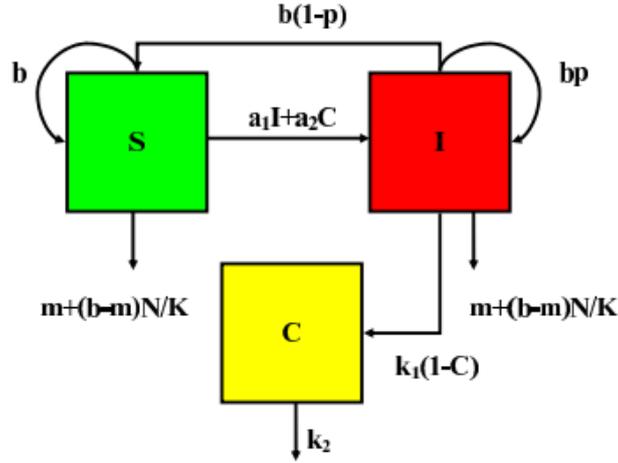


FIGURE 2.3 – Diagramme de flux du modèle de brucellose ovine incorporant une transmission directe et indirecte.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = bS - \left(m + \frac{(b-m)}{K}N\right)S + (1-p)bI - a_1SI - a_2SC \\ \frac{dI}{dt} = pbI - \left(m + \frac{(b-m)}{K}N\right)I + a_1SI + a_2SC \\ \frac{dC}{dt} = k_1I(1-C) - k_2C. \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec $b \geq m$, $p \in [0, 1]$ et $b, m, K, a_1, a_2, k_1, k_2 > 0$.
Il s'en suit que le nombre total d'individu

$$N(t) = I(t) + S(t)$$

satisfait l'équation logistique :

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b-m)N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \quad (2.2)$$

2.3 Comportement asymptotique du modèle

2.3.1 Modèle réduit

En utilisant l'équation logistique (2.2), on peut supposer sans perte de généralité que

$$N(t) = K, \forall t \geq 0.$$

En remplaçant $S(t)$ par $K - I(t)$ et N par K dans l'équation I du système (2.1), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = -(1-p)bI + a_1(K-I)I + a_2(K-I)C \\ \frac{dC}{dt} = k_1I(1-C) - k_2C. \end{cases} \quad (2.3)$$

Soit $i(t)$ la proportion d'individus infectés de la population à l'instant t .
En considérant

$$i(t) = \frac{I(t)}{K}, \forall t > 0,$$

on obtient un système d'équations différentielles ordinaires sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -(1-p)bi + a_1K(1-i)i + a_2(1-i)C \\ \frac{dC}{dt} = k_1Ki(1-C) - k_2C. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3.2 Propriétés du modèle réduit

Dans cette partie, nous montrons que le modèle (2.4) est bien posé du point de vue biologique. Pour ce faire, nous allons successivement montrer la positivité, la bornitude, l'existence et l'unicité de la solution du modèle.

2.3.2.1 Positivité et bornitude des solutions du modèle réduit

On considère le système réduit (2.4) :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -(1-p)bi + a_1iK(1-i) + a_2(1-i)C \\ \frac{dC}{dt} = k_1Ki(1-C) - k_2C. \end{cases}$$

Soient un champ

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto X(t) = (i(t), C(t)) \end{aligned}$$

et la fonction dérivable

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (i, C) &\longmapsto (-(1-p)bi + a_1K(1-i)i + a_2(1-i)C, k_1K(1-C) - k_2C.) \end{aligned}$$

Sur $[0, 1] \times [0, 1]$, le système réduit (2.4) peut alors s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$X'(t) = f(X(t)).$$

Soit $(i, C) \in [0, 1] \times [0, 1]$ Nous allons maintenant chercher le linéarisé du système (2.4) au point (i, C) . Soit $L(i, C)$ la jacobienne de f au point (i, C) .

$$L(i, C) = \begin{pmatrix} -(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki - a_2C & a_2(1-i) \\ k_1K(1-C) & -k_1Ki - k_2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les éléments extra diagonaux de la matrice $L(i, C)$ sont tous positifs ou nuls, on en déduit que $L(i, C)$ est une matrice de Metzler. Donc le champ f est monotone sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Le champ f est monotone sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et l'origine est un point fixe, alors le système (2.4) laisse invariant l'orthant positif $[0, 1] \times [0, 1]$ et son intérieur d'après la proposition (1.1.36). En effet on a :

$$\begin{aligned} \text{soient } x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ y - x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Int}([0, 1] \times [0, 1]) \text{ alors } x \ll y \\ f(x) &= f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(y) &= f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-p)b \\ -k_2 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Donc $[0, 1] \times [0, 1]$ est positivement invariant. Par suite les solutions de (2.4) qui partent d'une condition initiale dans $[0, 1] \times [0, 1]$ restent positives et bornées dans $[0, 1] \times [0, 1]$.

2.3.2.2 Existence et unicité de la solution du modèle réduit

Nous avons vu que le système réduit (2.4) peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$X'(t) = f(X(t)).$$

Comme f est C^1 sur $[0, 1] \times [0, 1]$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour toute condition initiale $(i_0, C_0) \in \mathbb{R}_+^2$ au temps initial t_0 , il existe une unique solution X vérifiant

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} i_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \text{ et } X'(t) = f(X(t)) \forall t \geq 0.$$

2.3.3 Points d'équilibres du modèle réduit

Dans cette partie nous allons déterminer les différents équilibres du système (2.4). Les équilibres du système s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = 0 \\ \frac{dC}{dt} = 0. \end{cases}$$

- Il est clair que $(0,0)$ est un équilibre de l'équation (2.4) et il correspond à l'équilibre sans maladie du système (2.1).

- Recherche d'un équilibre endémique :

Tout point d'équilibre $(\bar{i}, \bar{C}) \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus (0, 0)$ doit satisfaire :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -(1-p)\bar{b}\bar{i} + a_1K(1-\bar{i})\bar{i} + a_2(1-\bar{i})\bar{C} \\ \frac{dC}{dt} = k_1K\bar{i}(1-\bar{C}) - k_2\bar{C}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Prenons la deuxième équation du système (2.6)

$$k_1K\bar{i}(1-\bar{C}) - k_2\bar{C} = 0$$

$$\bar{C}(k_1K\bar{i} + k_2) = k_1K\bar{i}$$

donc,

$$\bar{C} = \frac{k_1K\bar{i}}{k_1K\bar{i} + k_2}. \quad (2.6)$$

Comme $\bar{i} \in]0, 1]$, et $k_1 > 0, k_2 > 0, K > 0$, alors \bar{C} est strictement positif ($\bar{C} > 0$). Maintenant considérons la première équation du système (2.4)

$$-(1-p)b\bar{i} + a_1K(1-\bar{i})\bar{i} + a_2(1-\bar{i})\bar{C} = 0.$$

En remplaçant $\bar{C} > 0$ par sa valeur on a :

$$-(1-p)b\bar{i} + a_1K(1-\bar{i})\bar{i} + a_2(1-\bar{i})\frac{k_1K\bar{i}}{k_1K\bar{i} + k_2} = 0.$$

On factorise par \bar{i} , comme $\bar{i} \neq 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} -(1-p)b + a_1K(1-\bar{i}) + a_2(1-\bar{i})\frac{k_1K\bar{i}}{k_1K\bar{i} + k_2} &= 0 \\ a_1K(1-\bar{i}) + a_2(1-\bar{i})\frac{k_1K\bar{i}}{k_1K\bar{i} + k_2} &= (1-p)b. \end{aligned} \quad (2.7)$$

On observe que le premier membre d'égalité de (2.4) est monotone strictement décroissante par rapport à \bar{i} . Il s'en suit qu'il existe un équilibre positif et cet équilibre existe si et seulement si cette condition est vérifiée :

$$a_1K + a_2\frac{k_1}{k_2}K > (1-p)b$$

2.3.4 Calcul du taux de reproduction de base R_0

Pour toute maladie, un enjeu sanitaire majeur est de savoir si elle peut se propager dans la population, à quelle vitesse et avec quelle ampleur ?

La réponse à cette question est liée à la valeur du nombre de reproduction de base R_0 qui nous renseigne sur le nombre moyen de cas secondaire que peut engendrer l'introduction d'un infecté dans une population saine. Nous proposons dans cette section le calcul R_0 en se basant sur la méthode développée dans ([Van Den Driessche and Walmough\(2002\)](#)),[41]

Considérons le système (2.4) $(\bar{i}, \bar{C})=(0,0)$, l'équilibre sans maladie correspondant. Le système (2.4) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{i} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \mathcal{F}(i,C) - \nu(i,C).$$

Avec

$$\mathcal{F}(i,C) = \begin{pmatrix} a_1K(1-i)i + a_2(1-i)C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nu(i,C) = \begin{pmatrix} (1-p)bi \\ k_2C - k_1Ki(1-C) \end{pmatrix}$$

\mathcal{F} et ν sont différentiables et on a :

$$\mathcal{DF}(i,C)=\begin{pmatrix} a_1K - 2a_1Ki - a_2C & a_2(1-i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D}\nu(i,C)=\begin{pmatrix} (1-p)b & 0 \\ -k_1K(1-C) & k_1Ki + k_2 \end{pmatrix}.$$

A l'équilibre sans maladie (0,0), on a :

$$\mathcal{DF}(0,0)=\begin{pmatrix} a_1K & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D}\nu(0,0)=\begin{pmatrix} (1-p)b & 0 \\ -k_1K & +k_2 \end{pmatrix}.$$

Puisqu'on a deux classes infectées i et C , on pose :

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} a_1K & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{V}=\begin{pmatrix} (1-p)b & 0 \\ -k_1K & +k_2 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{V})=k_2(1-p)b \neq 0$, donc \mathbf{V} est inversible et on a :

$$\mathbf{V}^{-1}=\frac{1}{k_2(1-p)b} \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ k_1K & (1-p)b \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathbf{FV}^{-1} est appelée la matrice de génération et on définit R_0 comme étant le rayon spectrale de \mathbf{FV}^{-1} .

On a :

$$\mathbf{FV}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{a_1K}{(1-p)b} + \frac{a_2k_1K}{k_2(1-p)b} & \frac{a_2}{k_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminons le rayon spectrale de \mathbf{FV}^{-1} .

Soit λ une valeur propre de \mathbf{FV}^{-1} , λ vérifie,

$$\det(\mathbf{FV}^{-1} - \lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} \frac{a_1K}{(1-p)b} + \frac{a_2k_1K}{k_2(1-p)b} - \lambda & \frac{a_2}{k_2} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\lambda \left[\lambda - \frac{a_1 K}{(1-p)b} + \frac{a_2 k_1 K}{k_2(1-p)b} \right] = 0.$$

Ce qui nous permet de dire :

$$\lambda=0 \text{ ou } \lambda = \frac{a_1 K}{(1-p)b} + \frac{a_2 k_1 K}{k_2(1-p)b}.$$

Par conséquent,

$$R_0 = \left(\frac{a_1 K}{(1-p)b} + \frac{a_2 k_1 K}{k_2(1-p)b} \right) = R_0^{\text{direct}} + R_0^{\text{indirect}}.$$

2.3.5 Analyse de stabilité des points d'équilibres du modèle réduit

Théorème 2.3.1

Supposons que $R_0 \leq 1$. Alors l'équilibre sans maladie $(0,0)$ de l'équation différentielle (2.4) est globalement asymptotiquement stable sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

preuve 2.3.2

Supposons que $R_0 \leq 1$.

Alors

$$\frac{a_1 K}{(1-p)b} + \frac{a_2 k_1 K}{k_2(1-p)b} \leq 1.$$

En réduisant au même dénominateur, on se retrouve avec l'expression suivante :

$$\frac{a_1 k_2 K + a_2 k_1 K}{k_2(1-p)b} \leq 1.$$

Ce qui nous donne l'inégalité

$$a_1 K + a_2 \frac{k_1}{k_2} K \leq (1-p)b.$$

Or, si $a_1 K + a_2 \frac{k_1}{k_2} K > (1-p)b$ alors il existe un équilibre endémique du système (2.4). Alors $R_0 \leq 1$ implique que le seul équilibre possible dans le compact $[0, 1] \times [0, 1]$ est l'équilibre sans maladie $(0, 0)$.

• Montrons que cet équilibre est globalement asymptotiquement stable : on sait que $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ qui est fortement ordonné. On a déjà démontré que le système

(2.4) est monotone sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Donc d'après le théorème (1.1.50), toute trajectoire attirée par $[0, 1] \times [0, 1]$ converge vers l'équilibre sans maladie $p = (0, 0)$. Par conséquent, l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Théorème 2.3.3

Supposons que $R_0 > 1$ et $a_2 = 0$. Alors chaque solution de l'équation différentielle (2.4) avec une valeur initiale $(i_0, C_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ telle que $i_0 > 0$ converge vers l'équilibre endémique (\bar{i}, \bar{C}) qui est un équilibre stable. De plus, chaque solution de l'équation (2.4) avec une valeur initiale $(i_0, C_0) \in \{0\} \times [0, 1]$ converge vers l'équilibre sans maladie $(0, 0)$.

preuve 2.3.4

Supposons que $R_0 > 1$ et $a_2 = 0$.

Comme $a_2 = 0$, l'inégalité $R_0 > 1$ équivaut à :

$$= \frac{a_1 K}{(1-p)b} > 1.$$

Considérons le système (2.4) sous sa forme : $X'(t) = f(X(t))$.

• Soit $(i_0, C_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ avec $i_0 > 0$ et posons $\alpha = \min(i_0, \bar{i})$, avec (\bar{i}, \bar{C}) l'équilibre endémique. l'ensemble $[\alpha, 1] \times [0, 1]$ est un compact de \mathbb{R}^2 . On pose $x =$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha = \min(i_0, \bar{i}) < 1 \text{ et } 0 < 1) \iff x \ll y$$

$$f(y) = f(1, 1) = \begin{pmatrix} -(1-p)b \\ -k_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (1-p)b \\ k_2 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$f(x) = f(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} -(1-p)b\alpha + a_1 K(1-\alpha)\alpha \\ k_1 K\alpha \end{pmatrix}$$

$$\forall \alpha > 0, k_1 > 0, K > 0 \text{ donc } k_1 K\alpha > 0.$$

On pose :

$$g(i) = -(1-p)bi + a_1 K(1-i)i$$

$$g(i) = i(-(1-p)b + a_1 K(1-i))$$

on a $i > 0$, on pose

$$j(i) = -(1-p)b + a_1 K(1-i)$$

$$(1-p)b > 0, \forall p \in [0, 1[, b > 0.$$

Tout équilibre endémique (\bar{i}, \bar{C}) du système (2.4) vérifie :

$$a_1 K(1-\bar{i})(k_2 + k_1 K\bar{i}) + a_2 k_1 K(1-\bar{i}) = (1-p)b(k_2 + k_1 K\bar{i}).$$

Comme $a_2 = 0$, alors

$$a_1 K(1 - \bar{i})(k_2 + k_1 K \bar{i}) = (1 - p)b(k_2 + k_1 K \bar{i}).$$

En outre, $(k_2 + k_1 K \bar{i}) \neq 0$. Alors,

$$a_1 K(1 - \bar{i}) = (1 - p)b.$$

De manière équivalente :

$$a_1 K(1 - \bar{i}) - (1 - p)b = 0.$$

Ainsi,

$$j(i) = 0$$

j est dérivable et $j'(i) = -a_1 K \leq 0$. Donc j est décroissante. Rappelons que $\alpha = \min(i_0, i)$ alors $j(\alpha) \geq 0$. Par conséquent,

$$g(\alpha) = \alpha \times j(\alpha) \geq 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = f(\alpha, 1) \geq 0.$$

Par suite $f(x) \times f(y) \leq 0$, d'après la proposition (1.1.36), on a : l'ensemble $[\alpha, 1] \times [0, 1]$ est positivement invariant. Comme $[\alpha, 1] \times [0, 1]$ est compact, positivement invariant et contient l'unique équilibre non nul, d'après le théorème (1.1.50), toute trajectoire de conditions initiales dans $[\alpha, 1] \times [0, 1]$ converge vers cet équilibre, en particulier la trajectoire de conditions initiales $\begin{pmatrix} i_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$ avec $i_0 > 0$ converge vers l'équilibre endémique.

- Supposons maintenant que $\begin{pmatrix} i_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \in \{0\} \times [0, 1]$ Si $i = 0$ et $a_2 = 0$, l'équation en i du système (2.4) est équivalent à : $i = \frac{d}{dt}i = 0$, ce qui implique que i est constante sur $\{0\} \times [0, 1]$ donc $i = 0$. On sait que quelque soit la condition initiale $(i_0, C_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a $0 \leq C \leq 1$. Donc $\{0\} \times [0, 1]$ est positivement invariant sur $\{0\} \times [0, 1]$ qui est un compact de \mathbb{R}^2 f est monotone dans $\{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ et \mathbb{R}^2 est fortement ordonné. De plus, le seul équilibre, possible dans $\{0\} \times [0, 1]$ est l'équilibre sans maladie $(0, 0)$. D'après le théorème (1.1.50), toute trajectoire attirée par $\{0\} \times [0, 1]$ converge vers l'équilibre sans maladie $(0, 0)$

Théorème 2.3.5

On suppose que $R_0 > 1$. Alors chaque solution de l'équation différentielle (2.4) avec comme conditions initiales $(i_0, C_0) \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{0, 0\}$ converge vers l'équilibre endémique qui est localement asymptotiquement stable.

preuve 2.3.6

Supposons que $R_0 > 1$ et $a_2 > 0$.

- $f(1, 1) = \begin{pmatrix} -(1-p)b \\ -k_2c \end{pmatrix} < 0$, alors $]0, 1[\times]0, 1[$ attire les solutions qui partent de $i = 1$ et $C = 1$.
- On a déjà établi que le système (2.4) laisse invariant l'ensemble $[0, 1] \times [0, 1]$ et son intérieur $]0, 1[\times]0, 1[$.
- Le linéarisé du système en tout point $(i, C) \in]0, 1[\times]0, 1[$ est :

$$L(i, C) = \begin{pmatrix} -(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki - a_2C & a_2(1-i) \\ k_1K(1-C) & -(k_2 + k_1Ki) \end{pmatrix}$$

$\forall (i, C) \in]0, 1[\times]0, 1[$, $(1-i) > 0$ et $(1-C) > 0$ on note le jacobien $L(i, C)$ comme suit :

$$L(i, C) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Comme $k_1 > 0, K > 0, a_2 > 0$, alors $k_1K(1-C) > 0$ et $a_2(1-i) > 0$, les composantes hors diagonales de la jacobienne étant strictement positives, on en conclut que la jacobienne est une matrice de Metzler.

$$\begin{aligned} \forall (i, C) \in [0, 1[\times]0, 1[, \\ a_2(1-i) \neq 0 \\ k_1K(1-C) \neq 0 \\ \forall \\ k_1 > 0, k_2 > 0, K > 0 \text{ et } i \in [0, 1[\\ \\ -(k_2 + k_1Ki) \neq 0. \end{aligned}$$

Soient S_1 et S_2 les sommets du graphe associés à la jacobienne en tout point $L(i, C)$. $-a_{12} = a_2(1-i) \neq 0$ alors, l'arc $S_1 \curvearrowright S_2$ relie S_1 et S_2 , $-a_{21} = k_1K(1-C) \neq 0$ alors, l'arc $S_2 \curvearrowright S_1$ relie S_2 et S_1 . Comme un chemin est un arc, on a :

$$S_1 \curvearrowright S_2 \curvearrowright S_1.$$

Le graphe associé à $L(i, C)$ ne comporte que deux sommets et il existe un chemin allant du sommet S_1 à S_2 puis du sommet S_2 au sommet S_1 , donc le graphe est fortement connexe. D'où le jacobien $L(i, C)$ est irréductible. Comme $L(i, C)$ est une matrice de Metzler irréductible, alors le champs f est fortement monotone.

- Soient,

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} i_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \in [0, 1[\times]0, 1[\text{ tels que } : i_1 > i_2 \text{ et } C_1 > C_2.$$

Ceci revient à dire que :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} i_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Montrons que $L(i_1, C_1) > L(i_2, C_2)$ Les linéarisés du système aux points (i_1, C_1) et $(i_2, C_2) \in [0, 1[\times [0, 1[$ sont :

$$L(i_1, C_1) = \begin{pmatrix} -(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki_1 - a_2C_1 & a_2(1-i_1) \\ k_1K(1-C_1) & -(k_2 + k_1Ki_1) \end{pmatrix}$$

et

$$L(i_2, C_2) = \begin{pmatrix} -(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki_2 - a_2C_1 & a_2(1-i_2) \\ k_1K(1-C_2) & -(k_2 + k_1Ki_2) \end{pmatrix}$$

on sait que :

$$i_1 > i_2 \text{ et } C_1 > C_2.$$

On en déduit que :

$$2a_1Ki_1 > 2a_1Ki_2 \text{ et } a_2C_1 > a_2C_2.$$

En sommant les termes de gauche d'un coté et ceux de droite, on obtient l'inéquation suivante :

$$2a_1Ki_1 + a_2C_1 > 2a_1Ki_2 + a_2C_2.$$

Comme $(1-p)b > 0$ en le sommant de part et d'autres l'inégalité reste la même.

$$(1-p)b + 2a_1Ki_1 + a_2C_1 > (1-p)b + 2a_1Ki_2 + a_2C_2.$$

En multipliant l'inéquation par -1 , on a :

$$-((1-p)b + 2a_1Ki_1 + a_2C_1) < -((1-p)b + 2a_1Ki_2 + a_2C_2).$$

Sachant que $a_1K > 0$ est positif, en l'ajoutant de part et d'autres, on a :

$$-(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki_1 - a_2C_1 < -(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki_2 + a_2C_2.$$

On sait que $i_1 < 1$ et $i_2 < 1$. De plus, par hypothèse $i_1 > i_2$. Alors,

$$1 - i_1 < 1 - i_2$$

comme $a_2 > 0$, en le multipliant de part et d'autre dans l'équation précédente, on obtient :

$$a_2(1-i_1) < a_2(1-i_2).$$

On sait que $C_1 < 1$ et $C_2 < 1$. De plus, $C_1 > C_2$. Alors,

$$1 - C_1 < 1 - C_2$$

En outre, $k_1K > 0$. Donc

$$k_1K(1 - C_1) < k_1K(1 - C_2).$$

On sait que $i_1 > i_2$. De plus, $k_1K > 0$. Alors,

$$k_1Ki_1 > k_1Ki_2.$$

Comme $k_2 > 0$, On peut l'ajouter au membre de gauche et celui de droite.

$$k_1Ki_1 + k_2 > k_1Ki_2 + k_2.$$

En multipliant chaque membre par -1 , l'inéquation devient la suivante :

$$-(k_1Ki_1 + k_2) < -(k_1Ki_2 + k_2).$$

On en déduit que pour tout $\begin{pmatrix} i_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \in [0, 1[\times [0, 1[$ tels que : $\begin{pmatrix} i_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \gg \begin{pmatrix} i_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} -(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki_1 - a_2C_1 &< -(1-p)b + a_1K - 2a_1Ki_2 + a_2C_2 \\ a_2(1 - i_1) &< a_2(1 - i_2) \\ k_1K(1 - C_1) &< k_1K(1 - C_2) \\ -(k_1Ki_1 + k_2) &< -(k_1Ki_2 + k_2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$L(i_1, C_1) < L(i_2, C_2), \forall \begin{pmatrix} i_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \in [0, 1[\times [0, 1[.$$

On en conclut que le champ f est strictement antimonotone.

Le champ f est de classe \mathcal{C}^1 , fortement monotone et strictement antimonotone. $[0, 1[\times [0, 1[$ est positivement invariant. De plus, on a déjà démontré que toutes les solutions du système sont bornées et que l'origine, $(0, 0)$ est un équilibre. Donc d'après le théorème (1.1.51), soit toutes les trajectoires de l'équation (2.4) tendent vers l'origine $(0, 0)$, soit il existe un équilibre $p \in \text{int}([0, 1[\times [0, 1[)$ et que toutes les trajectoires dans $[0, 1[\times [0, 1[\setminus \{0, 0\}$ tendent vers p .

Rappelons qu'on a supposé que $R_0 > 1, a_2 > 0$ et que les solutions du système ont pour valeurs initiales $\begin{pmatrix} i_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \in [0, 1[\times [0, 1[\setminus \{0, 0\}$ Le linéarisé du système au point $(0, 0)$ est :

$$L(0, 0) = \begin{pmatrix} a_1K - (1-p)b & a_2 \\ k_1K & -k_2 \end{pmatrix}$$

$a_2 > 0, k_1 K > 0$, donc $L(0, 0)$ est une matrice de Metzler

$$\det(L(0, 0)) = -k_2 (a_1 K - (1 - p)b) - a_2 k_1 K.$$

On sait que $k_2(1 - p) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\det(L(0, 0))}{k_2(1 - p)b} &= -\frac{a_1 K}{(1 - p)b} - 1 - \frac{a_2 k_1 K}{k_2(1 - p)b} \\ &= -\left(\frac{a_1 K}{(1 - p)b} + \frac{a_2 k_1 K}{k_2(1 - p)b}\right) - 1 \\ &= R_0 - 1. \end{aligned}$$

Sachant que $R_0 > 1$, alors $-R_0 < -1$ on ajoute -1 sur chaque membre de l'équation.

$$-1 - R_0 < -2.$$

Donc

$$-1 - R_0 \neq 0.$$

Ce qui revient à dire que :

$$\frac{\det(L(0, 0))}{k_2(1 - p)b} \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\det(L(0, 0)) \neq 0.$$

D'où le linéarisé au point $(0, 0)$ est inversible et on a :

$$-(L(0, 0))^{-1} = \frac{1}{k_2(1 - p)b} \begin{pmatrix} -k_2 & -a_2 \\ -k_1 K & a_1 K - (1 - p)b \end{pmatrix}$$

comme $-k_2 < 0$ et $-a_2 < 0$, alors $-(L(0, 0))^{-1}$ n'est pas positive ou nulle, alors est instable d'après le théorème (1.1.27). Par suite l'équilibre $(0, 0)$ est instable. D'où sur $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{0, 0\}$, l'unique équilibre existant est celui endémique (\bar{i}, \bar{C}) et toutes les trajectoires dans $[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{0, 0\}$ tendent vers $\begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{C} \end{pmatrix}$.

Chapitre 3

Contrôle optimal de la brucellose ovine

Dans cette partie nous décrivons le modèle de contrôle optimal. Nous présentons aussi les études sur l'existence et l'unicité d'un problème de contrôle optimal, nous parlerons de la caractérisation du contrôle optimal et en fin nous illustrons l'intérêt des résultats obtenus par des simulations numériques.

3.1 Enoncé du problème de contrôle optimal

Le modèle considéré (2.1) est développé par Aïnseba et Al dans [2]. Le modèle décrit la dynamique d'évolution des susceptibles (S), des infectés (I), et de la concentration de contaminants (C) dans l'environnement. L'objectif est d'inclure dans le modèle des contrôles, la vaccination (c_1), l'effet de sensibilisation (c_3), et la désinfection de l'environnement (c_2) afin de limiter au mieux la contamination. On obtient alors le modèle contrôlé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = bS - \left(m + \frac{(b-m)}{K}N\right)S + (1-p)bI - a_1(1-c_3)SI - a_2(1-c_2)SC - c_1S \\ \frac{dI}{dt} = pbI - \left(m + \frac{(b-m)}{K}N\right)I + a_1(1-c_3)SI + a_2(1-c_2)SC \\ \frac{dC}{dt} = k_1I(1-C) - k_2c_2C \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où c_1 est le taux de vaccination aux temps t, c_2 est le pourcentage de décontamination au temps t et c_3 est l'effet de la sensibilisation des éleveurs pour contrôler

la dynamique de l'infection.

3.1.1 Position du contrôle optimal

Définition 3.1.1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ comme suit :
 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x = (S, I, C) \in \mathbb{R}^3$ et $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, où x désigne l'ensemble des compartiments et c le contrôle on a :

$$f(t, x, c) = (f_1(t, x, c), f_2(t, x, c), f_3(t, x, c))$$

avec f_1, f_2 et f_3 définies respectivement par :

$$f_1(t, x, c) = bS - (m + \frac{b-m}{K}N)S + (1-p)bI - a_1(1-c_3)SI - a_2(1-c_2)SC - c_1S$$

$$f_2(t, x, c) = pbI - (m + \frac{b-m}{K}N)I + a_1(1-c_3)SI + a_2(1-c_2)SC$$

et

$$f_3(t, x, c) = k_1I(1-C) - k_2c_2C.$$

On définit les fonctions suivantes :

$$g(t, x, c) = K_4S + K_5I + K_6C + \frac{1}{2}(\alpha_1c_1^2 + \alpha_2c_2^2)$$

et

$$h(x) = K_1I + K_2C + K_3S,$$

avec $g : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 .

Le modèle contrôlé est donné par le système différentiel suivant, appelé équation de l'état associée :

$$\mathcal{M}_c \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), c(t)) \\ x(t_0) = x(0) \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour minimiser le nombre des infectés et la concentration des contaminants dans l'environnement, on résout le problème suivant :

$$\mathcal{P} \quad \begin{cases} \min J(x, c) = \int_0^{t_f} g(t, x(t), c(t))dt + h(x(t_f)) \\ \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), c(t)) \\ c(t) \in \mathbf{U}_{ad}, t \in [0, t_f]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Avec U_{ad} l'ensemble des contrôles admissibles.

3.2 Existence et unicité du contrôle optimal

L'objectif consiste à étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème de contrôle optimal. Pour cela on applique le principe de Pontryagin. On détermine d'abord l'Hamiltonien du problème.

Définition 3.2.1

Soit $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'Hamiltonien du problème, on a :

$$H(t, x, q, c) = g(t, x, c) + \langle q, f(t, x, c) \rangle$$

i.e, pour $x = (S, I, C)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ et $q = (q_1, q_2, q_3)$

$$H(t, x, q, c) = g(t, x, c) + \langle q_1, f_1(t, x, c) \rangle + \langle q_2, f_2(t, x, c) \rangle + \langle q_3, f_3(t, x, c) \rangle.$$

3.2.1 L'équation de l'état adjoint

Définition 3.2.2

Soit $x : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'état associé du problème, $c : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$ le contrôle optimal et $q : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'état adjoint du problème. Alors q est l'unique solution du système différentiel suivant :

$$\mathcal{Q} \quad \begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), q(t), c(t)) \\ q(t_f) = h'(x(t_f)) \end{cases} \quad (3.4)$$

c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dq_1}{dt} = -K_4 - q_1b + q_1(m + \frac{(b-m)}{K}N) + q_1a_1(1-c_3)I + q_1a_2(1-c_2)C \\
 \qquad \qquad \qquad + q_1c_1 - q_2a_1(1-c_3)I - q_2a_2(1-c_2)C \\
 \frac{dq_2}{dt} = -K_5 - q_1(1-p)b + q_1a_1(1-c_3)S + q_2pb + q_2(m + \frac{(b-m)}{K}N) \\
 \qquad \qquad \qquad - q_2a_1(1-c_3)S - q_3k_1(1-C) \\
 \frac{dq_3}{dt} = -K_6 + q_1a_2(1-c_2)S - q_2a_2(1-c_2)S + q_3(k_1I + k_2c_2) \\
 q_1(t_f) = K_3 \\
 q_2(t_f) = K_1 \\
 q_3(t_f) = K_2.
 \end{array} \right. \tag{3.5}$$

3.2.2 Existence et unicité du contrôle optimal

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal pour le système (3.1).

Nous remarquons que l'ensemble des contrôles admissibles \mathbf{U}_{ad} est, par définition fermé et borné. Il est aussi convexe car $[c_{1min}, c_{1max}] \times [c_{2min}, c_{2max}] \times [c_{3min}, c_{3max}]$ est convexe dans \mathbb{R}^3 . Il est évident qu'il existe un triplet admissible $(c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ pour le problème.

Théorème 3.2.3 (Principe du minimum de Pontryagin)

Soit $x(t)$ l'état associé du système, c'est à dire $x(t)$ solution de \mathcal{M}_c et $q(t)$ l'état adjoint. Alors le contrôle optimal $c(t)$ est la solution du problème suivant :

min $F(c)$, avec $F(c)=H(t, x(t), q(t), c(t))$.

preuve 3.2.4

Nous avons F continue, car l'Hamiltonien est de classe C^1 . Par ailleurs la matrice hessienne $H_F(c)$ de F en c a pour valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, 0$. i.e

$$H_F(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que $H_F(c)$ est semi-définie positive pour tout $c \in \mathbb{R}^3$.

Par conséquent F est convexe.

Vérifions que F est coercive :

en effet soit $c = (c_1, c_2, c_3)$ on a :

$$\begin{aligned} F(c) &= \frac{1}{2}(\alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2 + c_3^2) - \frac{1}{2}c_3^2 + \langle q, f(t, x, c) \rangle + K_4 S + K_5 I + K_6 C \\ &\geq \frac{1}{2} \min\{\alpha_1, \alpha_2, 1\} \|c\|^2 - \frac{1}{2} \|c_3\|^2 \\ &+ \langle q, f(t, x, c) \rangle + K_4 S + K_5 I + K_6 C \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\|c\| \rightarrow \infty} F(c) = +\infty$$

d'où F est coercive.

F étant continue, convexe et coercive alors elle admet un unique minimum. D'où l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal \bar{c} solution du problème (P).

3.3 Caractérisation du contrôle optimal

D'après ce qui précède le contrôle optimal \bar{c} est un point critique de F . C'est à dire $\nabla F(c) = 0$. Ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 c_1 - q_1 S = 0 & (1) \\ \alpha_2 c_2 + a_2 S C (q_1 - q_2) - q_3 C k_2 = 0 & (2) \\ a_1 S I (q_1 - q_2) = 0. & (3) \end{cases} \quad (3.6)$$

De l'équation (3) on obtient $q_1 = q_2$. Ceci combiné aux équations (1) et (2) donne respectivement :

$$\bar{c}_1 = \frac{q_1 S}{\alpha_1} \text{ et } \bar{c}_2 = \frac{q_3 k_2 C}{\alpha_2}.$$

Ainsi, le contrôle optimal est donné par :

$$\bar{c}_1 = \min\left(1, \max\left(0, \frac{q_1 S}{\alpha_1}\right)\right),$$

$$\bar{c}_2 = \min(1, \max(0, \frac{q_3 k_2 C}{\alpha_2})).$$

Par ailleurs puisque $q_1 = q_2$ en remplaçant \bar{c}_1 et \bar{c}_2 par leurs valeurs le système (\mathcal{Q}) se réduit au système suivant :

$$\mathcal{Q}_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = -K_5 - k_1(1 - \bar{C})q_3 \\ \dot{q}_3 = -K_6 + k_1 \bar{I}q_3 + \frac{k_2^2}{\alpha_2} \bar{C}q_3^2 \\ q_1(t_f) = K_3. \\ q_3(t_f) = K_2. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

3.4 Simulations numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques du modèle sans contrôle et le modèle contrôlé présentés et étudiés ci-dessus. Dans le modèle contrôlé, nous avons défini l'état associée du système, l'état adjoint du système et les expressions des paramètres du contrôle au stade optimal. L'algorithme décrivant la méthode d'approximation pour obtenir le contrôle optimal est l'algorithme inspiré de ceux utilisés par [H. Laarabi et al.](#), [26] ainsi [M. Barro et al.](#),. L'algorithme utilisé ici est une variation numérique de la méthode d'Euler direct avec un pas h . Nous écrivons la méthode d'Euler direct pour l'état associée du système et l'état adjoint. Les valeurs des paramètres utilisés sont tirées de la littérature et sont données ci-dessous : $p = 0.05$; $b = 0.1$; $m = 0.06$; $K = 1.82 \times 10^5$; $a_1 = \text{choisir}$; $a_2 = \text{choisir}$; $k_1 = \text{choisir}$; $k_2 = 1.82$.

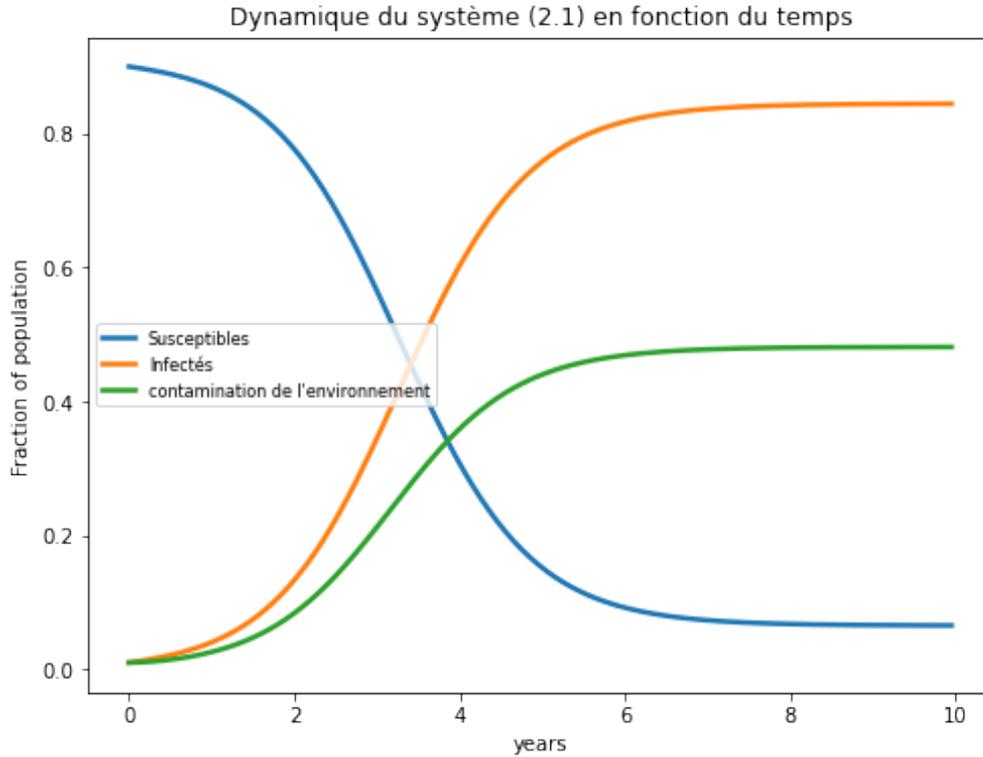


FIGURE 3.1 – Dynamique du système (2.1) en fonction du temps avec $k_1 = 2$, $a_1 = 0.6$, $a_2 = 1.5$

La figure (3.1) présente la dynamique de la maladie sans contrôle, c'est à dire pour $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

On constate que pour les cinq premières années :

* Plus le temps passe, plus la fraction du nombre infectés augmente. On passe de 0,1 à 0,9 en cinq ans.

* Plus le temps passe, plus la fraction du nombre d'animaux susceptibles diminue. On passe de 0,9 à 0,1 en cinq ans.

* La fraction de l'environnement contaminé augmente considérablement. Ce taux passe de 0,1 à 0,4 et est en phase avec l'augmentation du nombre d'animaux infectés.

A la fin de la cinquième années, tous les dynamiques se stabilisent.

Regardons la dynamique de la maladie avec contrôle.

Notons qu'on prend en compte les deux modes de transmissions.

La figure (3.2) présente la dynamique de la maladie avec contrôle pour $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 = 0$.

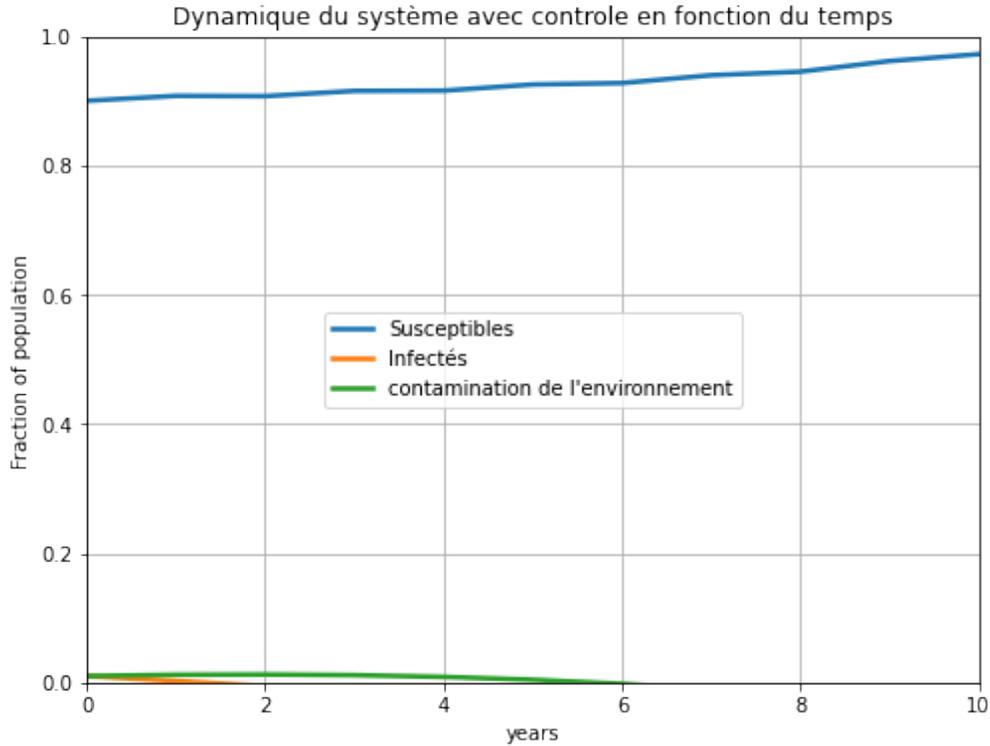


FIGURE 3.2 – Dynamique du système avec contrôle en fonction du temps avec $k_1 = 2$, $a_1 = 0.6$, $a_2 = 1.5$

On constate que :

- * Plus le temps passe, plus la fraction des susceptibles augmente.
- * Plus le temps passe, plus la fraction des infectés diminue de façon progressive et à tendance à disparaître.
- * Plus le temps passe, plus la fraction de l'environnement contaminé diminue. A partir de la cinquième années l'environnement n'est plus contaminé.

Nous voyons que la maladie est présent durant les deux premières années et tend vers l'extinction . Ainsi aucune matière virulente n'est présent dans l'environnement. Cela veut dire que aucun animal n'est infectés dans le troupeau et on se retrouve avec une population ovine composée à 100% de susceptibles. Donc nous avons ici un signe d'extinction de la maladie.

À la lumière de ces résultats, nous pouvons constater qu'avec la campagne de vaccination et une désinfection de l'environnement durant les deux premières années, la brucellose ovine disparaît dans l'environnement. Nous en concluons que la contamination de l'environnement peut jouer un rôle important dans la persistance de la maladie mais aussi dans la maîtrise de l'épidémie.

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude mathématique et du contrôle optimal du modèle de la brucellose ovine intégrant une transmission direct et une transmission indirect proposé dans (Aïnseba et al.,2010)[2]. Théorie et pratique ont été allié pour s'assurer de l'authenticité des hypothèses émises et théorèmes énoncés.

Dans le premier chapitre, nous avons fait l'essentiel des rappels sur les équations différentielles ordinaires, les systèmes monotones et la théorie du contrôle optimal. L'essentielle du travail de ce mémoire a été fait dans la deuxième et troisième chapitre. Nous avons fait l'étude, l'analyse mathématique et le contrôle optimal du modèle de la brucellose ovine.

Dans la première section du chapitre 2, nous avons étudié l'agent pathogène responsable de la brucellose : la brucellose melitensis. Nous avons découvert qu'elle peut vivre plus de deux ans dans le milieu extérieur, en dehors de l'organisme. Nous avons décrit les différents modes de transmissions de la brucellose et estimé son impact sur la santé publique, l'économie, la production et la reproduction animal ainsi que les pertes importantes qu'elle engendre pour les éleveurs.

Dans la deuxième section consacré à la mise en œuvre du modèle, les hypothèses sur lesquelles se sont basées les auteurs pour établir le modèle ont été données. Les paramètres du modèle ont été aussi décrit et bien détaillés dans cette même partie.

Dans la troisième section nous avons étudié le comportement asymptotique du modèle. Nous avons simplifié le modèle proposé et montré les propriétés du modèle(existence, unicité, la positivité et la bornitude des solutions) du système réduit dans le but de justifier que le problème est bien posé. Nous avons déterminé les équilibres du modèle réduit. L'équilibre sans maladie existe toujours et on peut espérer avoir un équilibre endémique si la condition

$$a_1K + a_2\frac{k_1}{k_2}K > (1 - p)b$$

est vérifié. Ensuite nous avons donné l'expression du taux de reproduction de base R_0 . Il s'écrit sous la forme $R_0 = R_0^{direct} + R_0^{indirect}$ où R_0^{direct} constitue la contribution de transmission direct et $R_0^{indirect}$ celle de la transmission indirecte. Nous

avons démontré en utilisant les théorèmes de stabilité dans (Hirsch, 1984)[20] que :

- Si $R_0 \leq 1$, l'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.
- Si $R_0 = R_0^{direct} < 1$ c'est à dire que l'on tient en compte que la transmission direct ($a_2 = 0$), alors l'équilibre endémique est stable.
- Si $R_0 < 1$ et que le taux d'infection indirecte $a_2 = 0$ est strictement positif, alors l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à la formulation du modèle de contrôle optimal de la brucellose ovine. Nous avons fait l'énoncé du problème de contrôle optimal au niveau du premier section d'où l'objectif est d'inclure dans le modèle des contrôles tels que la vaccination, l'effet de sensibilisation et la désinfection de l'environnement afin de limiter au mieux la contamination.

Dans la deuxième section nous avons parlé de l'état adjoint du système et le principe du minimum de Pontryagin (un problème de minimisation pour réduire le nombre infectés) qui nous a permis de montrer l'existence et l'unicité des solutions du contrôle optimal.

La troisième section constitue la caractérisation du contrôle optimal où nous cherchons à déterminer les contrôles grâce au gradient de l'Hamiltonien déjà défini.

Nous avons proposé des simulations numériques pour le modèle sans contrôle et le modèle avec contrôle.

La brucellose est une maladie présente depuis des décennies et persiste toujours dans les pays en voie de développement. Ses conséquences sont lourdes et désastreuses. Pallier ce problème que représente cette maladie est un enjeu majeur pour ces pays. La simulation du modèle sans contrôle montre que la contamination de l'environnement joue un rôle déterminant dans la persistance de la brucellose. Cependant une désinfection de l'environnement et une campagne de vaccination, résulterait une extinction de la brucellose. Ainsi nous arrivons à réduire le nombre d'individus infectés.

Avec la campagne de vaccination et la campagne de désinfection, nous arrivons à limiter le nombre infectés dans l'environnement. Ainsi on voit qu'une stratégie de contrôle serait mieux que d'abattre les animaux. Notons que la diffusion spatiale et la chronologie de l'infection ne sont pas prises en compte dans l'élaboration de ce modèle.

La prise en compte de ces aspects dans l'élaboration des deux modèles (sans contrôle et avec contrôle) de la brucellose pourrait susciter de nouveaux travaux d'une importance capitale et d'enjeu majeurs.

Bibliographie

- [1] http://covid-ete.ouvaton.org/Rapport7_resume.html
- [2] Bedr'Eddine Aïnseba, Chahrazed Benosman and Pierre Magal, A model for ovine brucellosis incorporating direct and indirect transmission. *Journal of Biological Dynamics* . Vol. 4, No. 1, January 2010, 2–11
- [3] R. Anderson and R. May, *Infectious diseases of humans. dynamics and control*, Oxford Science Publications,(1991)
- [4] V Arnold. *Equations différentielles ordinaires*, éditions mir, moscow. Champs de vecteurs, groupes à un paramètre, difféomorphismes, ots, systèmes linéaires, stabilités des positions d'équilibre, théorie des oscillations, équations différentielles sur les variétés, Traduit du russe par Djilali Embarek, 1974.
- [5] Sylvie Benzoni. *Equations différentielles ordinaires*. 2007.
- [6] E. Beretta, T. Hara, W. Ma, and Y. Takeuchi, Global asymptotic stability of an SIR epidemic model with distributed time delay, *Nonlinear Analysis*, 47 (2001), pp. 4107–4115.
- [7] Abraham Berman and Robert J Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. SIAM, 1994.
- [8] G. Birkhoff and G. Rota, *Ordinary differential equations* :, Ginn, Boston, (1982)
- [9] F. Brauer, *Mathematical epidemiology : Past, present, and future*, *Infectious Disease Modelling*, 2 (2017), pp. 113–127
- [10] Alain Bretto, Alain Faisant, and François Hennecart. *Éléments de théorie des graphes*. Springer, 2012.

- [11] P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Collection Grenoble sciences, (1996)
- [12] O.Diekmann and J.A.P.Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Mdel Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, Chichester, UK,2000.
- [13] T. Erneux, *Applied delay differential equations. surveys and tutorials in the applied mathematical sciences.*, Springer, (2009).
- [14] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais, and J.J Morgan, *A mathematical model for indirectly transmitted diseases*, *Math. Biosci.*206(2007), pp.233-248
- [15] W. H. Fleming and R. W. Rishel, *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer, New York, NY, USA,, (1975).
- [16] A Fonda, Pavel Drabek, et al. *Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations ; Volume 2*. Elsevier, page 239-357, 2005.
- [17] J.P. Ganiere, *la brucellose animale*, Ecoles Nationales Vétérinaires Françaises, Merial, 2004, pp. 1-47
- [18] , J. Hale and S. L. Verduyn, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, (1993).
- [19] Kenneth B Hannsgen. *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations (ta burton)*. *SIAM Review*, 29(4) :652-654, 1987.
- [20] Morris W Hirsch, editor. *The dynamical systems approach to differential equations*. Number 1. *Bulletin of the American Mathematical Society* 11, 1984.
- [21] Morris W Hirsch and Hal Smith. *Monotone dynamical systems*. In *Handbook of differential equations : ordinary differential equations*, volume 2, pages 239-357. Elsevier, 2006.
- [22] John H Hubbard and Beverly H West. *Differential equations : a dynamical systems approach : higher-dimensional systems*, volume 18. Springer Science et Business Media, 2012.
- [23] B. Ivorra, D. Ngom, and A. M. Ramos, *Be-codis*, *A mathematical model to predict the risk of human diseases spread between countries validation*

and application to the 2014-2015 ebola virus disease epidemic, *Bulletin of Mathematical Biology*, 17 (2015), pp. 1668–1704.

- [24] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics., *Proceeding of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 115 (1927), pp. 700-721.
- [25] Comité mixte FAO/OMS d'experts de la brucellose. Série de rapports techniques. Technical Report numéro 740, Organisation mondiale de la santé (OMS), Genève, 1986.
- [26] H. Laarabi, A. Abta, and K. Hattaf Optimal control of a delayed SIRS epidemic model with vaccination and treatment, *Acta Biotheor*, 63 (2015), pp. 87– 97.
- [27] V. Lakshmikantham, S. Leela, and A. A. Martynyuk, *Stability analysis of nonlinear systems*, Marcel Dekker, New York, (1989), pp. 2324–9757.
- [28] J. P. Lasalle, *The stability of dynamical systems*, SIAM and Philadelphia, (1976).
- [29] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal control applied to biological models*, (2007).
- [30] D. L. Lukes, *Differential equations : Classical to controlled,, Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New York, NY, USA " 162 (1982).
- [31] K. E. Mott, I. Nuttall, P. Desjeux, and P. Cattand, New geographical approaches to control of some parasitic zoonoses, *Bulletin of the World Health Organization*, 73 (1995), p. 247
- [32] Kumpati S Narendra and Robert Shorten. Hurwitz stability of metzler matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6) :1484-1487, 2010.
- [33] P. L. Neto and M. A. Navarro-Silva, Development, longevity, gonotrophic cycle and oviposition of aedes albopictus skuse (diptera : Culicidae) under cycle temperatures, *Neotropical Entomology*, 33 (2004), pp. 29–33.
- [34] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes (international series of monographs in pure and applied mathematics)*, Interscience Publishers, (1962).

- [35] M. Refai, Incidence and control of brucellosis in the near east region, *Vet. Microbiol.* 90(2002), pp. 81-110
- [36] R. Ross, *The prevention of malaria*, John Murray, (1911).
- [37] F. Routh, J. Zinsstag, D. Orkhon, and G. Chimed-Ochir, Human health benefits from livestock vaccination for brucellosis, *Bull. World Health Organ.* 81(2003), pp.867-876.
- [38] C.M. Sibille, *Contribution à l'étude épidémiologique de la brucellose dans la province de l'Arkhangai.(Mongolie)*, Ph.D. thesis, University of toulouse, 2006
- [39] Hal L Smith. *Monotone Dynamical Systems : An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems : An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*. Number 41. American Mathematical Soc., 2008.
- [40] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), (2013. Notes de cours).
- [41] P. Van den Driessche and J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Math.Biosci.*180(2002), pp.29-48.
- [42] Jakob Zinsstag, Felix Roth, Dontor Orkhon, G Chimed-Ochir, M Nansalmaa, J Kolar, and Penelope Vounatsou. A model of animal-human brucellosis transmission in mongolia. *Preventive veterinary medicine*, 69(1-2) :77-95, 2005.