UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
OPTION : PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Présentée par : Raphaël DIATTA

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

Sujet de thèse :

Principe des grandes déviations pour une solution d'EDS dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire et un processus de Lévy

Sous la direction de **Alassane DIEDHIOU**

Soutenue le 21- 12 - 2021 :
devant le Jury :

Président	Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	UASZ
Rapporteur	Aboubakary DIAKHABY	Professeur Titulaire	UGB
Rapporteur	Idrissa LY	Professeur Titulaire	UCAD
Rapporteur	Alassane SY	Professeur Assimilé	UADB
Examinateur	Edouard DIOUF	Professeur Assimilé	UASZ
Examinateur	Diéne NGOM	Professeur Assimilé	UASZ
Directeur	Alassane DIEDHIOU	Professeur Titulaire	UASZ

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier notre Dieu le clément et le miséricordieux de m'avoir donné le courage et la volonté de réaliser cette thèse.
Mes deuxièmes remerciements, et surtout les plus vifs, vont naturellement à mon encadreur Monsieur Alassane DIEDHIOU. Ses paroles, ses écrits, sa disponibilité, ses conseils et ses critiques, ont guidé mes réflexions et m'ont accompagné pas à pas dans mon travail. Il a fait preuve d'une disponibilité et d'une écoute constantes et m'a fait profiter de ses profondes connaissances mathématiques tout en sachant me laisser une large part d'autonomie. Il a été pour moi, depuis mon entrée à l'université, un guide intellectuel, sobre, altruiste et passionné. Je le remercie chaleureusement pour le sujet de recherche passionnant et varié qu'il m'a proposé.

Je tiens aussi à adresser mes vifs remerciements aux membres du jury qui me font l'honneur d'accepter de juger mon travail. Tout d'abord les professeurs Aboubakary DIAKHABY, Idrissa LY et Alassane SY qui ont bien voulu rapporter ce travail en dépit d'un emploi du temps chargé puis le professeur Marie Salomon SAMBOU qui était le président du jury de mon mémoire de master et a bien voulu être le président du jury de ma thèse, je lui exprime ma profonde gratitude pour ses remarques et suggestions lors de mes exposés au séminaire NLAGA enfin les professeurs Edouard DIOUF et Diéne NGOM qui m'ont honoré d'être parmi les membres du jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à tous les autres enseignants du département de mathématiques, qui, comme ceux susmentionnés, sont des modèles de compétence et qui ont nourri par leur cours et exposés remarquables mon goût pour les mathématiques, je parle également de Messieurs Oumar SALL, Mansour SANE et Clément MANGA. Leur enseignement passionné et sans égal a certainement influencé ma vocation pour la recherche.

J'associe à ces sincères remerciements tout le personnel administratif de l'UFR Sciences et Technologie de l'Université Assane SECK de Ziguinchor et également mes amis docteurs et doctorants avec qui j'ai eu à partager des moments inoubliables. Merci du rôle des uns et des autres durant toutes les années passées ensembles particulièrement lors des exposés du séminaire NLAGA.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

« ma mère Thérèse Diatta et mes sœurs. »

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'étude et d'estimation, via le principe des grandes déviations, de comportements asymptotiques des événements rares pouvant impliquer leurs modélisations par une équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire. Elle contient principalement nos résultats [14], [15] et [16] qui sont répartis dans les deuxième et troisième chapitres. Tout d'abord nous avons présenté dans le premier chapitre quelques résultats préliminaires du principe des grandes déviations et quelques notions du mouvement Brownien fractionnaire. Ensuite les autres chapitres portent sur l'étude du comportement asymptotique de solutions des équations différentielles stochastiques simples, mixtes ou réfléchies dirigées au moins par le mouvement Brownien fractionnaire. Dans chacun de ces chapitres cette étude est menée en deux étapes. La première étape consiste, en supposant que le terme de dérive est nul et que le ou les coefficients de diffusion sont égaux à l'identité, à montrer le principe des grandes déviations pour le mouvement Brownien fractionnaire, la somme d'un mouvement Brownien fractionnaire et d'un au moins des deux processus : le mouvement Brownien standard et le processus de Poisson. Ainsi sous l'indépendance de ces processus, nous avons montré ce principe des grandes déviations en appliquant les formules de Girsanov de chaque processus, le théorème de Bochner-Minlos et les inégalités de Markov et de Jensen. La seconde étape est de montrer le principe des grandes déviations pour ces solutions des équations différentielles stochastiques simples, mixtes ou réfléchies quand le terme de dérive est différent de zéro. Pour ce faire, nous utilisons le principe de contraction dont le but est, à partir de l'étape précédente, d'exhiber des fonctions déterministes continues afin de déduire le principe des grandes déviations pour les solutions.

Mots-clés : Mouvement Brownien fractionnaire- Mouvement Brownien standard- Processus de Poisson-Processus de Lévy- Principe des grandes déviations- Formules fractionnaires de Girsanov - EDS -EDS mixte- Espace polonais-Espace de Hilbert- Espace des distributions tempérées.

Table des matières

Abréviations et Notations

Tout au long de cette thèse, on utilisera de manière courante les abréviations et les notations suivantes :

Liste des abréviations

mBf :	Mouvement Brownien fractionnaire.
mB :	Mouvement Brownien standard.
PGD :	Principe des grandes déviations.
EDS :	Équation différentielle stochastique.
EDSP :	Équation différentielle stochastique perturbée.
EDSM :	Équation différentielle stochastique mixte.

Liste des notations

$\mathbb{R}$:	Ensemble des réels.
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$:	Espace de Schwartz.
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:	Espace des distributions tempérées.
$L^2(\mathbb{R}), L^2_\phi(\mathbb{R}), \mathbb{L}^2, \mathbb{M}^2$ et $\mathcal{L}^2$:	Espaces de Hilbert.
O et C :	Ouvert et fermé respectivement.
$a, c, L, M, N,$ et T :	Constantes.
$\alpha, \delta, \varepsilon, R$ et R' :	Réels tendant vers 0.
B_t^H :	Mouvement Brownien fractionnaire.
W_t :	Mouvement Brownien standard.
N_t :	Processus de Poisson.
$\bar{N}_t$:	Compensateur du processus N_t de Poisson.
R_H :	Covariance de B_t^H.
ϕ :	Dérivée seconde partielle de R_H.
f, φ et ψ :	Fonctions déterministes des processus respectivement B_t^H, W_t et $\bar{N}_t$.
γ_t, Θ_t et Ψ :	Fonctions associées aux fonctions déterministes f, φ et ψ

ω, θ et η :	Trajectoires respectivement de B_t^H, W_t et $\bar{N}_t$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
X_t, Y_t, Z_t et L_t :	Solutions des EDS.
F, G, h, z, g, m, u et l :	Trajectoires des solutions.
$\dot{g}$:	dérivée de la fonction g par rapport au temps.
I :	Bonne fonction de taux d'un processus stochastique
J :	Bonne fonction de taux d'une diffusion.
$\mathbb{P}, \mu, \nu$ et $\mathbb{Q}$:	Probabilités.
$\diamond$:	Produit de Wick.
$1_{[0,T]}$:	Fonction indicatrice sur $[0, T]$.
χ_O :	Fonction indicatrice sur un intervalle O.
$\mathbb{E}(X)$:	Espérance mathématique d'un processus X.
$\tilde{\mathbb{E}}(X)$:	Espérance mathématique d'un processus X par rapport à la nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$.

Introduction

L'étude des événements rares est un domaine important et très actif dans une variété de disciplines scientifiques. En physique des particules, les problèmes d'événements rares sont souvent liés à l'estimation des probabilités de non-absorption d'une particule évoluant dans un moyen de piégeage. En sciences de l'ingénieur, ces problèmes d'événements rares se posent dans l'analyse et la prévision des risques majeurs comme les tremblements de terre, les inondations, les risques de collision aérienne, les dispersions de radiations nucléaires. L'étude des risques majeurs peut être entreprise en utilisant deux approches principales, l'analyse statistique des données collectées et la modélisation probabiliste des processus. L'analyse statistique des valeurs extrêmes nécessite souvent une période d'observation prolongée, en raison de la très faible probabilité d'occurrence d'événements rares. L'approche probabiliste consiste tout d'abord à modéliser le caractère aléatoire du système sous-jacent, ensuite en utilisant certains outils mathématiques ou de simulation pour obtenir une estimation précise, à savoir la théorie des grands nombres, la théorie des grandes déviations, etc.

La théorie des grandes déviations est un ensemble de méthodes et de résultats asymptotiques sur les probabilités d'événements rares. Historiquement, elle est apparue dans les mathématiques d'assurance avec la probabilité de ruine, problème d'estimation au sein du modèle classique de Cramer-Lundberg. Aujourd'hui, il y a des applications de cette théorie dans presque tous les domaines des mathématiques et beaucoup de chercheurs scientifiques s'intéressent à l'étude des processus de diffusions puisque cette dernière contribue à la compréhension de plusieurs sujets scientifiques relatant des études de modélisation comportementale. L'étude des processus de diffusions des équations différentielles stochastiques(EDS) est un sujet qui a beaucoup attiré l'attention des chercheurs du fait qu'il existe de nombreuses applications auxquelles elles s'avèrent être très utiles : la télécommunication, les modèles de processus physiques (les réseaux électriques, les propagations d'impulsion nerveuses). S'agissant de l'étude via le principe des grandes déviations pour les processus de diffusions des EDS, nous citons les travaux :

- ▷ de Freidlin-Wentzell [21] et Azencott [1] pour les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien standard ;
- ▷ de Priouret-Doss [18] pour les équations différentielles stochastiques perturbées et réfléchies dirigées par un mouvement Brownien standard ;
- ▷ de Florens [20] et de Dadashi [11] en 2013 pour les équations différentielles stochastiques dirigées par un processus de Poisson ;
- ▷ de Manga et Diédhiou en 2019 [10] pour les équations différentielles stochastiques dirigées simul-

tanément par un mouvement Brownien standard et un processus de Poisson.

Presque tous les auteurs qui s'y investissent étudient le comportement asymptotique d'une solution d'EDS régie par un mouvement Brownien standard (mB) ou un processus de Poisson. Cependant cette étude pour les EDS dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) n'existe presque pas à cause des irrégularités de l'intégrale par rapport à ce dernier processus dans les espaces $\mathbb{R}^d$. C'est ce dernier fait qui nous a marqué et nous avons décidé de nous y investir et d'apporter des résultats scientifiques. Ainsi nous considérons dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ où le bruit blanc fractionnaire, le théorème de Bochner-Minlos et la différentiabilité du mBf sont applicables, d'abord les EDS et EDS réfléchies dirigées par un mBf (**P.1**) puis les EDSM et EDSM réfléchies dirigées simultanées par un mBf et mB (**P.2**) enfin les EDSM dirigées par un mBf et le processus de Levy (**P.3**) :

P. 1

$$X_t^{H,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_r^{H,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,\varepsilon})dB_r^H,\ r \leq t \in [0;T] \tag{1}$$

$$X_{\alpha,t}^{H,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_{\alpha,r}^{H,\varepsilon})ds + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_{\alpha,r}^{H,\varepsilon})dB_r^H + \alpha \sup_{0\leq r\leq t}(X_{\alpha,r}^{H,\varepsilon}),\ r \leq t \in [0;T] \tag{2}$$

$$Y_t^{H,\varepsilon} = y + \int_0^t b(Y_r^{H,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(Y_r^{H,\varepsilon})dB_r^H + L_t^\varepsilon,\ r \leq t \in [0;T] \tag{3}$$

où

⋆ B_t^H est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0;1)$;

⋆ $\alpha \in]0,1]$;

⋆ L_t^ε est un processus croissant tel que $L_t^\varepsilon = \begin{cases} 0 \ si\ t = 0 \\ \\ \int_0^t \chi_{\{Y_r^{H,\varepsilon}=0\}} dL_r^\varepsilon \ si\ t \in [0;T] \end{cases}$.

P. 2

$$X_t^{H,w,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_r^{H,w,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X_r^{H,w,\varepsilon})dW_r,\ r,t \in [0;T] \tag{4}$$

$$Y_t^{H,w,\varepsilon} = y + \int_0^t b(Y_r^{H,w,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(Y_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(Y_r^{H,w,\varepsilon})dW_r + L_t^\varepsilon,\ r,t \in [0;T] \tag{5}$$

où

⋆ B_t^H est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0;1)$;

⋆ W_t est un mouvement Brownien standard ;

⋆ L_t^ε est un processus croissant tel que $L_t^\varepsilon = \begin{cases} 0 \ si\ t = 0 \\ \\ \int_0^t \chi_{\{Y_r^{H,w,\varepsilon}=0\}} dL_r^\varepsilon \ si\ t \in [0;T] \end{cases}$.

P. 3

$$X_t^{H,N,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_r^{H,N,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,N,\varepsilon})dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, X_r^{H,N,\varepsilon})\bar{N}(dx,dr), \quad (6)$$

$$X_t^{\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_r^{\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{\varepsilon})dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X_r^{\varepsilon})dW_r + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, X_r^{\varepsilon})\bar{N}(dx,dr), \quad (7)$$

où

⋆ B_t^H est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0;1)$;

⋆ W_t est un mouvement Brownien standard ;

⋆ $\bar{N}_t$ est un compensateur du processus de Poisson.

Motivation

Les théories de Schilder et Freindlin-Wentzell [12] élaborées respectivement pour le mouvement Brownien standard et pour les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien standard par rapport au principe des grandes déviations nous ont amené à nous investir dans l'étude comportementale des EDS dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire. D'autres motivations nous proviennent des travaux de Doss-Priouret [18] pour les EDS perturbées et réfléchies. Ces travaux nous ont permis d'obtenir des résultats pour les EDS au problème **P.1**. A la fin de la rédaction de notre dernier papier du problème **P.1**, une idée d'étude via le PGD pour les EDS du problème **P.2** nous est venue en tête ; c'est ce qui a donné les résultats importants que nous allons énoncer également dans cette thèse.
Cette idée nous a permis d'étudier aussi les EDSM régies par un mBf et un compensateur du processus de Poisson et les EDSM régies par un mBf et un processus de Lévy : ce sont les EDSM du problème **P.3**.

Etudes antérieures

La théorie des grandes déviations est née de l'étude fine des sommes de variables aléatoires indépendantes. Cette théorie a été inventée et appliquée pour la première fois par le mathématicien suédois Harald Cramer en 1936 qui, motivé par le calcul optimal de prime d'assurance, s'intéresse aux comportements asymptotiques de moyennes empiriques des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) de carrés intégrables et il établissait le théorème 2.1.24 dans [12]. Ce théorème de Cramer est limité au cas de vecteurs aléatoires identiquement distribuées (i.i.d). Cependant une extension au cas non i.i.d est rendue possible grâce au théorème de Gartner-Ellis [12]. La théorie des grandes déviations admet de nombreux développements concernant des mesures sur des espaces de dimensions finies et infinies. Nous citons en particulier le théorème de Schilder donnant un principe des grandes déviations pour des mesures liées au mouvement Brownien standard. Ce théorème de Schilder a permis d'une part à Freidlin-Wentzell [21] et à Azencott [1] de généraliser ce principe pour les systèmes dynamiques stochastiques régis par un mB et d'autre part à Dosse-Priouret [18], Bo-Zhang [6] etc de généraliser ce principe pour les EDS perturbées et réfléchies contrôlées

par un mB. Récemment certains auteurs comme Manga, C., Diédhiou, A. [31] ont établi cette théorie pour les EDP dans le cas de couplage homogénéisation et grandes déviations.
Nous citons aussi pour la même théorie, les travaux de Florens [20] pour un processus de Poisson, de Zhao. H; Xu,S [46] et de Dadashi [11] pour les EDS dirigées par ce dernier processus et ceux de Coulibaly, A., Diédhiou, A. en 2019 [10] pour les EDS dirigées simultanément par un mB et le processus de Poisson .
S'inspirant des travaux de Schilder, dans le cadre des trajectoires rugueuses, Inahama [27] montre le principe des grandes déviations pour un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst limité c'est-à-dire $H \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ car pour lui, l'intégrale par rapport à un mBf n'a de sens que si elle vérifie le théorème de Young. Et vu l'irrégularité de l'intégrale par rapport au mBf, certains auteurs dans [8] et [32] prennent les représentants du mBf afin de prouver le principe des grandes déviations.

Objectif et Méthodologie

Nous nous intéressons principalement dans cette thèse à l'étude asymptotique de solutions des équations différentielles stochastiques dirigées au moins par le mouvement Brownien fractionnaire B_t^H. Cette étude va se faire grâce au principe des grandes déviations, plus particulièrement l'utilisation des estimations de Friendlin-Wentzell et la méthode d'Azencott. Pour ce faire, nous envisagerons d'abord le cas pour lequel la dérive est nulle et le ou les coefficients de diffusions sont égaux à un. C'est l'extension du travail de Inahama [27] pour un mouvement Brownien fractionnaire dans tout l'intervalle $(0; 1)$ du paramètre H et aussi l'obtention du principe des grandes déviations pour la somme de mouvement Brownien fractionnaire et l'un au moins des deux processus, le mouvement Brownien standard et le processus de Poissons indépendants. Mais notre démonstration est différente de la celle de Inahama. Elle consiste à utiliser principalement les formules fractionnaires de Girsanov associées à la dérivée seconde partielle de la fonction covariance du mouvement Brownien fractionnaire. Ce cas va nous amener à généraliser le principe pour les EDS définies aux problèmes **P.1**, **P.2** et **P.3**. Ainsi par la technique du principe de contraction nous parvenons à estimer la probabilité qu'une solution d'EDS s'approche de sa solution déterministe dans l'espace des fonctions de carré intégrables contenu dans l'espace des distributions tempérées de l'espace de Schwartz.

Plan de la thèse

Notre thèse comprend quatre chapitres :
Le premier chapitre est un rappel de quelques notions de processus stochastiques, notamment celles du mouvement Brownien fractionnaire (mBf) et du principe des grandes déviations dont nous aurons besoin pour la suite. Au regard des difficultés que présente le mBf, nous avons mis l'accent sur l'intégrale d'un processus par rapport à ce mBf et également sur les théorèmes et définitions de la théorie de grandes déviations.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude comportementale de solutions des équations différentielles stochastiques (1),(2) et (3) du problème **P.1**, dirigées uniquement par le mBf. Il est composé

de trois parties dont les deux premières constituent notre premier article [14] dans lequel nous avons prouvé d'abord le principe des grandes déviations pour le mBf ensuite nous avons obtenu de manière générale deux principaux théorèmes de PGD pour l'EDS (1). Quant à la troisième et dernière partie de ce chapitre, elle est un ensemble de résultats des EDS (2) et (3) de notre troisième article [16].
Le chapitre 3, comme le précédent, est composé de trois parties. Il est le résultat de notre deuxième article [15] et d'un papier soumis. Ce troisième chapitre traite l'étude du comportement asymptotique des EDS (4) et (5) dirigée simultanément par le mBf B_t^H et le mB W_t.
Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des EDS (6) et (7) du problème **P.3** soumis pour publication. Nous allons dans ce chapitre montrer le PGD pour la somme de deux au moins des trois processus B_t^H, W_t et $\bar{N}_t$ indépendants, définis au problème **P.3** puis par la technique du principe de contraction, nous en déduisons les estimations des probabilités de solutions d'EDS (6) et (7).

Résultats obtenus

Publiés :

R. Diatta, A. Diedhiou. Large Deviation Principle Applied for a Solution of Stochastic Differential Equation Driven by a Sub-Fractional Brownian Motion. International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences. ISSN 0972-9828 Volume 13, Number 1 (2020), pp. 11-22

R. Diatta, A. Diedhiou. Large Deviation Principle Applied for a Solution of Mixed Stochastic Differential Equation Involving Independent Standard Brownian Motion and Fractional Brownian Motion. Applied Mathematical Sciences, Vol. 14, 2020, no. 11, 511 - 530 HIKARI Ltd, www.m-hikari.com

R. Diatta, I. Sané, A. Diedhiou. Large deviation principle for reflected diffusion process fractional Brownian motion. Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications 5 (2021) No. 1, 127-137.

Soumis :

R. Diatta, A. Diedhiou. Small Limit of Mixed and Reflected Diffusion Process.

R. Diatta, A. Diedhiou. Reflected Jumps and Fractional Diffusion Process (en révision).

R. Diatta, A. Diedhiou. Mixed and Perturbed Diffusion Process.

R. Diatta, C. Manga., A.Diedhiou. Large deviation principle for a mixed fractional and jump diffusion process (accepté).

R. Diatta, A. Diedhiou. Asymptotic behavior of fractional and Levy diffusion process (accepté).

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de définir certains processus stochastiques et aussi de rappeler brièvement la théorie d'intégrale d'un processus stochastique par rapport au mouvement Brownien fractionnaire (mBf) dans $\mathbb{R}$ et notamment dans un espace des distributions tempérées . De plus, nous y résumons la théorie du principe des grandes déviations (PGD) pour un mouvement Brownien standard (mB), un processus de Poisson et le mBf et pour les équations différentielles dirigées par ces processus. L'élément fondamental dans ce chapitre est le sens de l'intégrale par rapport au mBf surtout dans un espace des distributions tempérées dans lequel la différentiabilité de mBf, le théorème de Bochner-Minlos sont applicables.

1.1 Processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $t \geq 0$ un temps.

Définition 1.1.0.1. *On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F})$ indicé par le temps t si X est une famille de variables aléatoires sur$(\Omega, \mathcal{F})$.*

Définition 1.1.0.2. ***(Mouvement Brownien standard (mB))***
Un processus stochastique est un mouvement Brownien standard[1] $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *(mB) s'il vérifie :*

$i)$ $W_0 = 0$ p.s ;

$i)$ pour tous $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ est une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(0; t-s)$ indépendante de $\mathcal{F}$;

$ii)$ pour tous $0 \leq s \leq t$, la loi de $W_t - W_s$ est identique à celle de W_{t-s}.

Définition 1.1.0.3. ***(Processus de comptage)***
Un processus de comptage $N = (N_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire réelle vérifiant :

$i)$ $N_0 = 0$ p.s ;

$ii)$ $N_t \in \mathbb{N}^* \; \forall \, t \geq 0$;

$iii)$ $t \mapsto N_t$ est croissante.

Définition 1.1.0.4. ***(Processus de Poisson)***
Un processus de Poisson[2] *N_t d'intensité $\lambda > 0$ est un processus de comptage tel que*

1. Un mouvement Brownien standard est un processus de Lévy.
2. Un processus de Poisson est un processus de Lévy.

i) N_t *est à accroissements indépendants et stationnaires ;*

ii) *pour tous* s *et* t, $N_{t+s} - N_s$ *suit la loi de Poisson de paramètre* λt.

Définition 1.1.0.5. ***(Processus de Lévy)***
Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *avec* $X_0 = 0$ *est un processus de Lévy si*

i) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $0 \leq t \leq ... \leq t_n \leq +\infty$, *les variables aléatoires* $\{X_{t_{j+1}} - X_{t_j}\}$ *sont indépendantes ;*

ii) *pour tous* $s < t$, *la variable aléatoire* $X_t - X_s$ *a même loi que* X_{t-s}.

Définition 1.1.0.6. ***(Mouvement Brownien fractionnaire (mBf))***
Un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) $B^H = (B^H_t)_{t\geq 0}$ *de paramétre* $H \in (0;1)$ *est un processus gaussien centré défini sur* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ *et vérifiant :*

i) $B^H_0 = o$ *p.s ;*

ii) $\mathbb{E}[B^H_t]^2 = |t|^{2H}$ *;*

iii) B^H_t *a des accroissements stationnaires.*

Propriétés :

$*$ Un mouvement Brownien fractionnaire B^H_t est un mouvement Brownien standard si $H = \frac{1}{2}$.

$*$ Un mouvement Brownien fractionnaire B^H_t est une semi-martingale si $H = \frac{1}{2}$.

$*$ Un mouvement Brownien fractionnaire B^H_t est un processus de Markov si $H = \frac{1}{2}$.

$*$ Un mouvement Brownien fractionnaire B^H_t est un processus à accroissements stationnaires.

$*$ Un mouvement Brownien fractionnaire est un processus à accroissements dépendants si $H \neq \frac{1}{2}$.

$*$ Un mouvement Brownien fractionnaire B^H_t est à variation non bornée p.s. sur un compact de $\mathbb{R}$.

$*$ Un mouvement Brownien fractionnaire B^H_t est à variations quadratique finie si $H \geq \frac{1}{2}$ et infinie si $H < \frac{1}{2}$.

Proposition 1.1.0.7. *Un mouvement Brownien fractionnaire* $B^H = (B^H_t)_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien centré de fonction covariance symétrique, continue et définie positive*

$$R_H(t,s) = \mathbb{E}(B^H_t B^H_s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \tag{1.1}$$

1.2 Intégrale d'un processus stochastique

1.2.1 Définitions et théorèmes

Définition 1.2.1.1. ***(Intégrale de Stieljes)***
Soit X *un processus à variation finie de trajectoire* ω *et* H *un processus mesurable tels que presque*

sûrement l'intégrale $\int_0^t H_s(\omega)dX_s(\omega)$ *existe et soit finie pour tout* $t > 0$*. Alors*

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s(\omega)dX_s(\omega), \quad \forall t > 0.$$

est appelée intégrale de Stieljes de H par X.

Définition 1.2.1.2. *On définit l'intégrale stochastique d'un processus prévisible localement borné H par une semi-martingale* $X_t = M_t + A_t$ *par*

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s.$$

Théorème 1.2.1.3. ***(Intégrale de Young** [23])*
Soit H et X deux processus tels que $X \in C^\alpha$ *et* $H \in C^\beta$*.*
Si $\alpha + \beta > 1$ *alors l'intégrale* $\int_0^t H_s dX_s$ *est appelée intégrale de Young et existe comme intégrale de Stieljes pour tout* $t > 0$*.*

Définition 1.2.1.4. ***(Intégrale de Russo-Valloi** [23])*
Soit X et Y deux processus continus, définis sur $[0, T]$*. Alors l'intégrale symétrique ou l'intégrale au sens de Russo-Vallois est définie par*

$$\int_0^t Y_s d^o X_s = \mathbb{P} - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_0^t \frac{(Y_{s+\varepsilon} + Y_s)((X_{s+\varepsilon} - X_s)}{2\varepsilon} ds.$$

Définition 1.2.1.5. ***(Intégrale de Newton-Côtes** [38])*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, soit X et Y deux processus continus sur* $[0, T]$ *et soit* $m \geq 0$ *un entier. L'intégrale de Newton-Côtes de* $f(Y)$ *par rapport à X est définie par :*

$$\int_0^t f(Y_u)d^{NC,m}X_u = \mathbb{P} - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_0^t (\int_0^1 (Y_s + \beta(Y_{s+\varepsilon} - Y_s)\mu_m(d\beta))) \frac{(X_{u+\varepsilon} - X_u)}{\varepsilon} du$$

pourvu que la limite existe. Où par convention $\mu_1 = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ *et pour*

$$m \geq 2, \mu_m = \sum_{j=0}^{2(m-1)} (\int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{2(m-1)u - k}{j - k} du) \frac{\delta_j}{\delta_m - 2}$$

où δ *est la mesure de Dirac.*

1.2.2 Intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien fractionnaire (mBf)

Le but de cette partie est de donner un sens à l'intégrale stochastique $\int_0^t f(s, w)dB_s^H$ afin de l'utiliser par la suite. Comme le mouvement Brownien fractionnaire n'est ni une semi-martingale ni un processus de Markov, on ne peut pas lui appliquer le calcul stochastique classique d'Itô. Le fait que le mouvement Brownien fractionnaire admet une variation quadratique pour $H > \frac{1}{2}$, une $\frac{1}{H}$ variation forte, α Holdélienne et est intégrable au sens de Newton-Côte, on a les théorèmes suivants :

Théorème 1.2.2.1. *(voir [23])*
Si $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à p variation finie tel que $p > \frac{1}{2}$ alors $\int_0^t f(s,w)dB_s^H$ est définie au sens de l'intégrale de Young.

Théorème 1.2.2.2. *(voir [23])*
L'intégrale symétrique $\int_0^t f(B_s^H)d^o B_s^H$ existe pour $f \in C^5(\mathbb{R})$ si et seulement si $H \in (\frac{1}{6}, 1)$.

Théorème 1.2.2.3. *(voir [23])*
Soit $m \geq 1$ un entier. L'intégrale de Newton-Cotes $\int_0^t f(B_s^H)d^{NC,m}B_s^H$ existe pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^{4m+1} si et seulement si $H \in (\frac{1}{4m+1}, 1)$. Dans ce cas, on a pour toute fonction dérivable F de f,

$$F(B_t^H) = F(B_0^H) + \int_0^t f(B_s^H)d^{NC,m}B_s^H.$$

Remarque 1.2.2.4. *L'intégrale de Newton-Côtes nous permet de donner un sens à l'intégrale $\int_0^t f(s,w)dB_s^H$ dans $\mathbb{R}$ pour $H \in (0;1)$.*

D'autre part, il existe aussi une construction d'intégrale par rapport à mouvement Brownien fractionnaire permettant comme le cas précédent, de traiter tous les indices de Hurst $H \in (0;1)$. Elle est due à Christian Bender [4] et utilise entre autre les notions de $\mathbb{S}$-transformation, de produit de Wick et d'intégrale de Pettis (bruit blanc) sur l'espace de distributions d'Hida (voir aussi [42]).
Étant donné que le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, espace des fonctions à distributions tempérées de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, est un espace d'Hida, on considère l'espace mesurable $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R})))$ et on note par $\langle .,. \rangle$ la dualité entre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et $(.,.)$ le produit linéaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 1.2.2.5. *Un processus $\langle ., f \rangle : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ défini par $\langle ., f \rangle(\omega) = \langle \omega, f \rangle$ est un processus gaussien de covariance $|f|_.^2$.*

Théorème 1.2.2.6. ***(de Bochner-Minlos** (voir [3] et [25]))*
Soit ξ une fonction définie sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifiant :

- *ξ est continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$;*
- *ξ est positive sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$;*
- *$\xi(0) = 1$,*

c'est-à-dire que ξ est une fonction caractéristique. Alors il existe une unique probabilité μ_ξ sur $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R})))$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\xi(f) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \exp\{i\langle \omega, f \rangle\}d\mu_\xi = \exp\{-\frac{1}{2}|f|_.^2\}.$$

Définition 1.2.2.7. *Une fonction $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est appelée processus stochastique ou $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$-processus ou processus de Hida.*

Définition 1.2.2.8. *La $\mathbb{S}$-transformation de $\xi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, notée $\mathbb{S}(\xi)$ est définie comme une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ et est donnée par, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\mathbb{S}(\xi)(f) = \langle\langle \xi, \exp\{\langle ., f\rangle - \frac{1}{2}|f|_.^2\}\rangle\rangle = \mathbb{E}[\xi \exp\{\langle ., f\rangle - \frac{1}{2}|f|_.^2\}]$$

où $\langle\langle ., .\rangle\rangle$ est le crochet de la dualité entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.2.2.9. *(voir [42])*
Un mouvement Brownien fractionnaire $B_t^H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est différentiable comme processus de Hida et

$$\frac{dB_t^H}{dt} = w_t^H$$

où $w_t^H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est appelé bruit blanc fractionnaire.

Définition 1.2.2.10. *Un processus stochastique $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est intégrable au sens de bruit blanc (Pettis) si*

* *$\mathbb{S}X(f)$ est mesurable pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}X(f) \in L^1(I)$;*
* *il existe $\xi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $\int_I \mathbb{S}X_t(f)dt = \mathbb{S}\xi$ et on définit alors $\int_I X_t dt = \xi$.*

Théorème 1.2.2.11. *(voir [42])*
On suppose que $\xi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ satisfait :

* *$\mathbb{S}\xi(f)$ est mesurable pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;*
* *il existe des constantes positives k, a et p telles que*

$$\int_I |\mathbb{S}\xi_t(f)|dt \leq k \exp(a|f|_p^2).$$

Alors ξ est Pettis intégrable ou intégrable au sens de bruit blanc.

Exemple : $B_t^H = \int_0^t dB_s^H = \int_0^t w_s^H ds$ existe au sens de bruit blanc.

Théorème 1.2.2.12. *(voir [42])*
Soit $(\Phi, \xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ appelé produit de Wick de Φ et ξ noté $\Phi \diamond \xi$ tel que

$$\mathbb{S}(\Phi \diamond \xi)(f) = \mathbb{S}\Phi(f).\mathbb{S}\xi(f)$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.2.2.13. *$\int_0^t B_s^H \diamond w_s^H ds$ existe au sens de bruit blanc.*
En effet $\int_0^t B_s^H \diamond w_s^H ds = \int_0^t B_s^H \diamond dB_s^H = \frac{1}{2}(B_t^H)^2 - \frac{1}{2}t^{2H}$.

Théorème 1.2.2.14. *(**Intégrale d'Itô fractionnaire** voir [42])*
Un processus $\xi : [0,T] \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est intégrable au sens d'Itô fractionnaire pourvu que $\xi \diamond w^H$ est intégrable au sens de bruit blanc et on écrit

$$\int_0^t \xi_s dB_s^H = \int_0^t \xi_s \diamond w_s^H ds.$$

Théorème 1.2.2.15. *(voir [42])*
Une intégrale fractionnaire d'Itô pour $\xi : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ existe ssi

* *$\mathbb{S}\xi(f)$ est mesurable pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;*
* *il existe des constantes positives k, a et p telles que*

$$\int_I |\mathbb{S}\xi_t(f)|dt \leq k \exp(a|f|_p^2).$$

Alors ξ est Pettis intégrable ou intégrable au sens de bruit blanc.

Remarque 1.2.2.16. $\int_0^t F(B_s^H)dB_s^H$ *existe pour* $F(B_t^H) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 1.2.2.17. *Soit $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, le processus coordonné B_t^H à valeur dans $\mathbb{R}$ défini comme $B^H(\omega, t) = \omega(t)$ est un mouvement Brownien fractionnaire continu en 0 dont la covariance est donnée par*

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}] = \int_0^t \int_0^s \phi(r,u)dudr$$

où $\phi(t,s) = \dfrac{\partial^2 \mathbb{E}(B_t^H B_s^H)}{\partial t \partial s} = H(2H-1)|t-s|^{2H-2}$.

Définition 1.2.2.18. *Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $g_n \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$ et aussi*

$$\langle \omega, g \rangle := \lim_{n\to+\infty} \langle \omega, g_n \rangle.$$

Définition 1.2.2.19. *Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions étagées. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ de Hilbert est défini comme la fermeture de $\mathcal{E}$ respectivement au produit scalaire*

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle = \int_0^t \int_0^s \phi(r,u)dudr$$

et pour toutes fonctions f et $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle f1_{[0,t]}, g1_{[0,s]} \rangle = \int_0^t \int_0^s f(r)g(u)\phi(r,u)dudr, \quad |f|_{.,t}^2 = \langle f1_{[0,t]}, f1_{[0,s]} \rangle = \int_0^t \int_0^s f(r)f(u)\phi(r,u)dudr.$$

Considérons $L_\phi^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, |f|_{\phi,t}^2 = \int_0^t \int_0^s f(r)f(u)\phi(r,u)dudr < +\infty\}$ espace de Hilbert des fonctions de carrées intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}_\phi^H$ la probabilité du mouvement Brownien fractionnaire B^H dont la dérivée seconde de la covariance est ϕ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Définition 1.2.2.20. *Soit $f \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, par approximation des fonctions de $\mathcal{E}$, on définit pour $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$*

i) $\langle \omega, f1_{[0,t]}\rangle = \int_0^t f_s dB_s^H$ *un processus gaussien ;*

ii) $\exp^\diamond\{\langle \omega, f\rangle\} = \exp\{\langle \omega, f\rangle - \frac{1}{2}|f|^2_\phi\}$ *le produit de Wick exponentielle.*

Théorème 1.2.2.21. *(**Lemme du thorème de Bochner-Minlos** voir [25]) Pour toutes $f \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ et $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a*

$*$ $\mathbb{E}[\langle \omega, f\rangle] = 0$ *et* $\mathbb{E}[\langle \omega, f\rangle^2] = |f|^2_\phi$

$*$ $\mathbb{E}[\exp\{\langle \omega, f\rangle\}] = \exp\{\frac{1}{2}|f|^2_\phi\}$.

Théorème 1.2.2.22. *(**Formule fractionnaire I de Girsanov** (voir [5] et[26]))*
Soit $\xi \in L^p(\mathbb{P}^H_\phi)$ pour $p > 1$ et $f \in Ł^2_\phi(\mathbb{R})$. Soit γ défini par $\gamma_t = \int_0^t f(r)\phi(s,r)dr$.
Alors l'application $\omega \to \xi(\omega + \gamma)$ appartient à $L^q(\mathbb{P}^H_\phi)$ pour tout $q < p$. et

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \xi(\omega + \gamma) d\mathbb{P}^H_\phi(\omega) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \xi(\omega). \exp^\diamond\{\langle \omega, f\rangle\} d\mathbb{P}^H_\phi(\omega).$$

Corollaire 1.2.2.23. *Soit $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $f \in L^2_\phi(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^H_\phi}[\xi(B_t^H + \int_0^t \gamma(s)ds)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^H_\phi}[\xi(B_t^H). \exp\{\int_0^t f(s)dB_s^H - \frac{1}{2}|f|^2_\phi\}].$$

Théorème 1.2.2.24. *(**Formule fractionnaire II de Girsanov** (voir [5] et[26]))*
Soit $T > 0$ et γ et g deux fonctions continues telles que $supp\gamma \subset [0,T]$, $suppg \subset [0,T]$ et $\langle g, f\rangle_\phi = (\gamma, f)_{L^2(\mathbb{R})} \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\int_0^t g(r)\phi(s,r)dr = \gamma_t, 0 \le s \le t \le T$. On définit une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}^H_\phi$ par

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}^H_\phi}{d\mathbb{P}^H_\phi} = \exp^\diamond\{\langle \omega, f\rangle\} = \exp\{\langle \omega, f\rangle - \frac{1}{2}|f|^2_\phi\}.$$

Alors $\tilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t \gamma_s ds$ est un mouvement Brownien fractionnaire sous $\tilde{\mathbb{P}}^H_\phi$.

1.3 Équations différentielles stochastiques(EDS) dirigées par un mBf

Nous donnons dans cette section les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions de certaines EDS dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ afin de discerner les difficultés d'existence et d'unicité de solutions.

1.3.1 EDS dont le coefficient de diffusion est égal à l'identité

On considère l'équation différentielle stochastique (voir Ouknine [37]) :

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int_0^t b(X_r)dr,\ 0 \leq t \leq T \tag{1.2}$$

où $b\ :\ [0,T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne et B_t^H est un mouvement Brownien fractionnaire(mBf) unidimensionnel. On suppose que

$$(\mathcal{H}_b) \begin{cases} b_1)\ si\ H \leq \dfrac{1}{2}\ et\ |b(x,t)| \leq c(1+|x|) \\ \\ b_2)\ si\ H > \dfrac{1}{2}\ et\ b\ est\ Holder\ continue\ d'odre\ 1 > \alpha > 1 - \dfrac{1}{2H}\ en\ x\ et\ \gamma > H - \dfrac{1}{2}\ en\ t \\ |b(x,t) - b(y,s)| \leq c(|x-y|^{\alpha} + |t-s|^{\gamma}) \end{cases}$$

Théorème 1.3.1.1. *(de* ***Ouknine*** *[37])*
Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_b)$ l'équation (1.2) a une unique solution faible.

Théorème 1.3.1.2. *(de* ***Ouknine*** *[37])*
Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions uniformément mesurables et bornées telles que
$\lim_{n\to+\infty} b_n(x,t) = b(x,t)$ *pour presque tous* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.
Alors l'EDS (1.2) admet une solution.

Théorème 1.3.1.3. *(de* ***Ouknine*** *[37])*
On suppose que b satisfait $(\mathcal{H}_{b_1})$. Alors l'EDS (1.2) admet une unique solution forte.

1.3.2 EDS avec l'intégrale de Wiener contre le mBf

On considère l'EDS (voir Mishura [34]) :

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_r)dr + \int_0^t f(r)dB_r^H,\ 0 \leq t \leq T \tag{1.3}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, $x_0 \in \mathbb{R}$ et$f \in L^2(\mathbb{R})$.On pose $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ et $h(t,x) = g(t)b(t,x)$ vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H}_{bh})$ suivante :
il existe une constante c telle que pour tous $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,
$|b(x,t)| \leq c(1+|x|)$ et $|h(x,t)| \leq c(1+|x|)$.

Théorème 1.3.2.1. *(de* ***Mishura [34]****) On suppose que b et h vérifient $(\mathcal{H}_{bh})$. Alors l'EDS (1.3) admet une unique solution forte dans $\mathbb{R}$.*

1.3.3 EDS avec l'intégrale au sens du bruit blanc

Soit l'EDS dirigée par un mBf (voir [4] ou [42]) où l'intégrale est définie au sens du bruit blanc :

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_r)dr + \int_0^t \sigma(X_r)dB_r^H,\ 0 \leq t \leq T. \tag{1.4}$$

On suppose que $b, \sigma : [0,T] \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et qu'il existe des constantes a et k telles que pour tous x et $y \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a l'hypothèse $(\mathcal{H}_\mathbb{S})$

$(\mathcal{H}_{\mathbb{S}1})$ **Mesurabilité :** b et σ sont faiblement mesurables pour chaque processus $X : [0,T] \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ faiblement mesurable ;

$(\mathcal{H}_{\mathbb{S}2})$ **Lispschitz condition :** pour tout $t \in [0,T]$ et pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$|\mathbb{S}b(t,x)(f) - \mathbb{S}b(t,y)(f)| \leq k(1+|f|^2)|\mathbb{S}x(f) - \mathbb{S}y(f)|$
$|\mathbb{S}\sigma(t,x)(f) - \mathbb{S}\sigma(t,y)(f)| \leq k(1+|f|)|\mathbb{S}x(f) - \mathbb{S}y(f)|$;

$(\mathcal{H}_{\mathbb{S}3})$ **Croissance linéaire :** pour tout $t \in [0,T]$ et pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
$|\mathbb{S}b(t,x)(f)| + |\mathbb{S}\sigma(t,x)(f)| \leq \exp\{c|f|^2(1+|\mathbb{S}x(f)|)\}$.

Définition 1.3.3.1. ***(solution faible)***
L'application $X : [0,T] \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est appelée solution faible de L'EDS (1.4) si elle satisfait

i) X est faiblement mesurable ;

ii) b, et σ sont intégrables respectivement par rapport à dr et dB_r^H au sens du bruit blanc ;

iii) pour tous $t \in [0,T]$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{S}X_t(f) = \mathbb{S}x_0(f) + \int_0^t \mathbb{S}b(X_r)(f)dr + \int_0^t \mathbb{S}\sigma(X_r) \diamond w_r^H(f)dr.$$

Théorème 1.3.3.2. ***(de David Siska [42])***
Sous $(\mathcal{H}_\mathbb{S})$ et si $x_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors l'EDS (1.4) a une solution faible.

1.4 Principe des grandes déviations (PGD)

Cette partie constitue une brève notion de la théorie des grandes déviations [12]. Nous y rappelons les principaux outils et méthodes dont nous avons besoin puis nous faisons une synthèse des résultats de cette théorie pour les processus aléatoires que nous allons utiliser dans nos travaux.

1.4.1 Définitions et théorèmes généraux

Soit $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de variables aléatoires définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans E un espace polonais [3] muni de sa tribu borélienne.

3. Espace polonais est un espace métrique, complet et séparable.

Définition 1.4.1.1. ***(Fonction de taux)***
Une fonction de taux est une application $I : E \to [0; +\infty]$ semi-continue inférieurement, c'est-à-dire dont les ensembles de niveau $\{x \in E, I(x) \leq \alpha\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sont des parties fermés de E.

Définition 1.4.1.2. ***(Bonne fonction de taux)***
Une bonne fonction de taux est une fonction de taux dont les ensembles de niveaux sont compacts.

Remarque 1.4.1.3. *La compacité des ensembles de niveaux garantit que sur tout ensemble fermé, une bonne fonction de taux atteint son minimum.*

Définition 1.4.1.4. ***(Principe de grandes déviations (PGD))***
On dit qu'une famille $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de mesures de probabilité $\mathbb{P}^\varepsilon$ satisfait un principe des grandes déviations de vitesse ε et de (bonne) fonction de taux I de E si

i) ***Borne supérieure :*** *pour tout fermé $C \in E$,*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}^\varepsilon(X_t^\varepsilon \in C) \leq -\inf_{x\in C} I(x)$$

ii) ***Borne inférieure :*** *pour tout ouvert $O \in E$,*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}^\varepsilon(X_t^\varepsilon \in O) \geq -\inf_{x\in O} I(x).$$

Remarque 1.4.1.5. $*$ *En tant que limite, la fonction de taux I est unique dès lorsque X^ε suit un principe de grandes déviations.*

$*$ *La notion de principe des grandes déviations dépend de la structure topologique de l'espace E.*

Théorème 1.4.1.6. ***(Principe de contraction)***
Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques séparables complets, $F : E_1 \to E_2$ une fonction continue et $(\mathbb{P}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ [4] une famille de mesures de probabilité sur E satisfaisant un principe des grandes déviations de bonne fonction de taux I. Alors la suite de mesures de probabilité images $(\mathbb{P}^\varepsilon o F^{-1})_{\varepsilon>0}$ vérifie un principe des grandes déviations gouverné par une bonne fonction de taux $J : E_2 \to [0; +\infty]$ définie par

$$J(y) = \inf\{I(x) : x \in E_1, y = f(x)\}.$$

Remarque 1.4.1.7. *Le principe de contraction permet de transférer un principe des grandes déviations d'un espace à un autre.*

1.4.2 PGD pour une solution d'EDS dirigée par un mouvement Brownien standard (mB)

Dans cette section nous rappelons l'étude asymptotique de comportement d'un mouvement Brownien standard et des solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement

4. On peut dire que la famille loi $(\mathbb{P}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait un PGD au lieu de $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait un PGD.

Brownien standard faite par certains auteurs [21] et [22] dans $\mathbb{R}$, utilisant le principe des grandes déviations.
Étudiant le comportement asymptotique d'un mouvement Brownien standard, Schilder [22] en 1966 évaluait la probabilité pour qu'une déviation de ce dernier soit loin de sa trajectoire nulle lorsque le temps tend vers infini. Et cette étude lui a permis d'établir, dans l'espace $\mathbb{H}$ des fonctions absolument continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées sont de carrés intégrables munis de la norme $\|\varphi\| = (\int_0^t |\varphi|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$, le théorème suivant :

Théorème 1.4.2.1. ***(de Schilder [22])***
Soit $E = C_0([0;1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ nulles en 0. On note $X_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} W_t$ où W_t est un mouvement Brownien standard défini dans l'espace des probabilités $(\Omega, F, \mathbb{P})$. Alors la famille $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations sur E de vitesse ε et de bonne fonction de taux I_w donnée par :

$$I_w(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |\dot{\varphi}(t)|^2 dt \; si \; \varphi \in \mathbb{H} \\ \\ +\infty \; sinon. \end{cases}$$

Plusieurs théorèmes en relation avec ce théorème de Schilder ont été établis pour étudier, par le PGD, des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien standard. Nous en énonçons les plus importants :
On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t^\varepsilon = b_\varepsilon(X_t^\varepsilon)dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma_w(X_t^\varepsilon)dW_t, t \in [0, T]. \tag{1.5}$$

où W_t est un mouvement Brownien standard, unidimensionnel défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ et telle qu'on ait l'hypothèse (H_ε) :

$(H_{\varepsilon 1})$ b_ε tend vers b uniformément sur $\mathbb{R}$;

$(H_{\varepsilon 2})$ b et σ_w : $[0; T] \times \mathbb{R}$ sont uniformément lipschitziens et bornés en norme par M ;

$(H_{\varepsilon 3})$ $a = \sigma_w \times \sigma *_w$ est semi défini positif,

et $g(t) = x_0 + \int_0^t [b(g_s) + \sigma_w(g_s).\dot{\varphi}_s]ds = W_{x_0}(\varphi)$ où W_{x_0} est une application continue introduite par Azencott.

Théorème 1.4.2.2. ***(de Freidlin-Wentzell [21])***
Sous (H_ε), la famille (X_t^ε) (1.5) satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux J_w définie par :

$$J_w(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t a^{-1}(g_s)|\dot{g}_s - b(g_s)|^2 ds \; si \; g \in \mathbb{H} \\ \\ +\infty \; sinon. \end{cases}$$

Théorème 1.4.2.3. ***(d'Azencott [1])***
Sous (H_ε) et g, et pour tout $R > 0, \rho > 0$, il existe $\varepsilon > 0, \alpha > 0, r > 0$ tels que

$$\mathbb{P}\{\|X^\varepsilon - g\| > \rho, \|\varepsilon W - \varphi\| < \alpha\} \leq e^{-\frac{R}{\varepsilon}}.$$

Alors la famille $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux

$$J_w(g) = \inf\{I_w(\varphi), g = W_{x_0}(\varphi)\}.$$

1.4.3 PGD pour une solution d'EDS dirigée par un compensateur du processus de Poisson

Nous énonçons les résultats du principe des grandes déviations de Florens [20] pour un processus de Poisson N_t et de Dadashi en 2013 [11] pour une solution d'EDS dirigées par un compensateur du processus de Poisson. Soit E un espace polonais. On considère dans E la fonction I_ν définie par :

$$I_\nu(\psi) = \begin{cases} \displaystyle\int_E (\psi \ln \psi + 1 - \psi) d\nu \; si \; \psi \in E \; et \; existe \\ \\ +\infty \; sinon. \end{cases}$$

où ν est la mesure aléatoire de Lévy.

Théorème 1.4.3.1. ***(de Florens [20])*** *La famille $(\varepsilon N_t)_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations sur E avec la bonne fonction de taux I_ν.*

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante dirigée par un compensateur $\bar{N}_t$ du processus de Poisson,

$$dX_t = b(X_t)dt + \int_{\mathbb{R}^*} K(x, X_t)\bar{N}(dx, dt) \tag{1.6}$$

Soit $(\mathcal{G}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions mesurables à valeurs dans E et soit $\mathbb{M}$ un espace de toutes les mesures ν^ε sur $(E, \mathcal{B}(E))$ telles que $\nu^\varepsilon(C) < +\infty$ pour tout compact C dans E. On définit

$$E_T = [0, T] \times E \; et \; L^n = \{\psi : E_T \to [0; +\infty), I_\nu(\psi) \leq n\}.$$

La condition suivante sera suffisante à établir pour le principe des grandes déviations de la famille $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par

$$X_t^\varepsilon = \mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon \bar{N}_t) \tag{1.7}$$

quand $\varepsilon \to 0$.

Condition : Il existe une application mesurable $\mathcal{G}^0 : \mathbb{M} \to E$ telle que les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) si pour $n \in \mathbb{N}, \psi_\varepsilon$ et $\psi \in L^n$ telles que $\psi_\varepsilon \to \psi$ quand $\varepsilon \to 0$, alors

$$\mathcal{G}^0(I_\nu(\psi_\varepsilon)) \to \mathcal{G}^0(I_\nu(\psi))$$

ii) Soit p une fonction à valeurs aléatoires telle que p_ε converge au sens de distribution vers p quand $\varepsilon \to 0$, alors

$$\mathcal{G}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}\, p_\varepsilon) \to \mathcal{G}^0(I_\nu(p))$$

Théorème 1.4.3.2. ***(de Dadashi** [11])*
On suppose que la condition précédente est vérifiée. Alors la famille $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$(1.7) satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux J_N donnée par

$$J_N(p) = \inf\{I_\nu(\psi), p = \mathcal{G}^0(\psi)\}$$

1.4.4 Principe des grandes déviations pour un mBf

Nous rappelons dans cette sous section, les études faites dans [8], [27] et [32] du PGD pour un mouvement Brownien fractionnaire. En effet dans le cadre de la théorie des trajectoires rugueuses, Inahama [27] a établi le théorème suivant du PGD pour un mouvement Brownien fractionnaire :

Théorème 1.4.4.1. ***(d'Inahama** [27])*
Soit $\mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}$ la loi de εB_t^Htel que $\frac{1}{4} < H < \frac{1}{2}$. Lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ alors $\{\mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations avec la fonction de taux I donnée par

$$I_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|k\|^2_{\mathcal{H}^H} \text{ si } x > k \in \mathcal{H}^H \\ \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

où $\mathcal{H}^H$ est un espace de Cameron-Martin.

Chen [8] et Meerschaert [32] ont prouvé les formes exactes des grandes déviations pour les temps locaux d'un mBf et les temps locaux d'intersection des mBfs et les processus de Riemann-Liouville.

Théorème 1.4.4.2. ***(de Meerschaert** [32])*
Soit $Z^H = Z_t^H, t \geq 0$ un mBf de temps local α-stable à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $2H < \alpha$. Alors pour tout borélien $D \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup t^{-\frac{2H(\alpha-1)}{\alpha-2H}} \log \mathbb{P}\{t^{-\frac{2H(\alpha-1)}{\alpha-2H}} Z_t^H \in D\} \leq -\inf_{x\in\bar{D}} A^*(x)$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \inf t^{-\frac{2H(\alpha-1)}{\alpha-2H}} \log \mathbb{P}\{t^{-\frac{2H(\alpha-1)}{\alpha-2H}} Z_t^H \in D\} \leq -\inf_{x\in\dot{D}} A^*(x)$$

où $\bar{D}$ et $\dot{D}$ désignent respectivement le fermé et l'intérieur de D. et

$$A^*(x) = \frac{\alpha + 2H}{2\alpha}\left(\frac{\alpha - 2H}{2\alpha B}\right)^{\frac{\alpha-2H}{\alpha+2H}} x^{\frac{2\alpha}{\alpha+2H}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

et B une constante.

1.5 Conclusion

Pour la suite de nos investigations, nous avons mis dans ce bloc de préliminaires un certain nombre de définitions et de théorèmes utiles à notre sujet de thèse, en particulier la théorie du PGD pour un mBf avec le paramètre de Hurst H limité à cause de diverses difficultés liées au sens de l'intégrale fractionnaire dans certains espaces. La théorie des grandes déviations repose essentiellement sur trois techniques : l'estimation de Freidlin-Wentzell, la méthode d'Azencott et la méthode de Laplace par la convergence faible d'un processus donné. Étant donné que la théorie des grandes déviations pour un mBf est obtenue pour $H \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$, nous l'étendons dans un espace des distributions tempérées pour tout l'intervalle $(0; 1)$ de H afin d'étudier les EDS présentant un mBf, par cette théorie aux chapitres suivants.

Chapitre 2

Principe des grandes déviations (PGD) pour une solution d'EDS et d'EDS réfléchie dirigée par un mBf

Résumé : Dans ce chapitre qui est notre premier travail de cette thèse, nous étudions le comportement asymptotique de solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire d'indice de Hurst H dans tout intervalle $]0;1[$ de H.
Notre méthode consiste d'abord à regarder le cas où la dérive est nulle et le coefficient de diffusion est égale à 1 puis nous généralisons l'étude dans le cas où la dérive est non nulle. Cette étude se fera via le principe des grandes déviations.

2.1 Introduction

La théorie des grandes déviations a une place importante dans l'étude de systèmes dynamiques perturbés par un bruit de faible intensité. En particulier il nous permet de déterminer la fonction de taux et de décrire la vitesse de convergence d'un processus stochastique vers sa limite déterministe. Dans la littérature, il y a plusieurs méthodes que certains auteurs ont établies à des processus pour déterminer la fonction de taux des grandes déviations. Ainsi Inahama [27] a montré, dans le cadre de la théorie des trajectoires rugueuses que le mouvement Brownien fractionnaire (mBf) satisfait le principe des grandes déviations pour l'indice de Hurst $H \in (\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ parce que pour lui l'intégrale par rapport à un mouvement fractionnaire n'a de sens que si elle vérifie le théorème de Young. De plus Chen, X., Li, W. V., Round, J. et Shao, Q.[8] ont établi un principe des grandes déviations pour le temps local du mouvement Brownien fractionnaire.
Mais à notre connaissance, dans la littérature nulle part n'est mentionnée l'étude via le principe des grandes déviations pour les EDS dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire dans tout l'intervalle $(0;1)$ du paramètre H de Hurst.
Notre objectif dans ce chapitre est d'élargir les travaux faits pour les EDS dirigées par un mB de Freidlin-Wentzell [21] aux EDS dirigées par un mBf.
Pour ce faire, nous nous donnons un mouvement Brownien fractionnaire
$B^H = \{B_t^H, t \in [0;T]\}$ de paramètre de Hurst $H \in (0;1)$ et de fonction de covariance

$$R_H(t,s) = \mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) = \int_0^t \int_0^s \phi(r,u)dudr = \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]}\rangle_\phi \quad (2.1)$$

avec

$$\phi(t,s) = \frac{\partial^2 \mathbb{E}(B_t^H B_s^H)}{\partial t \partial s} = H(2H-1)|t-s|^{2H-2}. \tag{2.2}$$

où $\langle .,. \rangle_\phi$ est le produit scalaire suivant ϕ.

Considérons dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la solution $X_t^{H,\varepsilon}$ de l'équation différentielle stochastique dirigée par B_t^H :

$$X_t^{H,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_r^{H,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,\varepsilon})dB_r^H, \qquad r \leq t \in [0;T]. \tag{2.3}$$

où

- ⋆ $x_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une variable aléatoire ;
- ⋆ b et σ_H : $[0,T] \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sont des fonctions mesurables, intégrables au sens du bruit blanc [3], [4] et [42] et vérifiant l'hypothèse (H_{bH}) : il existe des constantes L et M telles que

$$\begin{cases} |b(h)-b(z)| \leq L|h-z|,\ |\sigma_H(h)-\sigma_H(z)| \leq L|h-z|\ pour\ tous\ h,z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\ \\ |b(h)| \leq M, |\sigma_H(h)| \leq M\ pour\ tout\ h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution d'une telle équation ont été prouvées dans [36] et [42].

Nous considérons ensuite dans le même espace l'équation précédente à laquelle nous ajoutons le terme perturbatif $\alpha \sup\limits_{0\leq r\leq t} (X_{\alpha,r}^{H,\varepsilon})$ ou le terme réfléchi L_t^ε pour obtenir respectivement les équations (2) et (3) du problème **P.1**.

Doney et Zhang [17] ont obtenu l'existence et l'unicité des solutions de ces équations différentielles stochastiques.

Vue les difficultés de l'intégrale par rapport au mBf dans $\mathbb{R}$ que nous avons rencontrées, nous considérons pour la suite l'espace de probabilité du bruit blanc $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R})),\mathbb{P})$. C'est dans cet espace que nous parvenons à étudier le comportement asymptotique de ces équations stochastiques.

La suite de ce chapitre s'organise comme suit :

la section 2.2 a pour but de déterminer le PGD de la solution de l'équation (1) lorsque le terme de dérive b est nul et le coefficient de diffusion σ_H est égal à 1 ;

la section 2.3 et section 2.4 consistent à étudier le comportement respectivement de (1), (2) et (3) lorsque la dérive est non nulle, via au principe de contraction.

2.2 PGD pour un mouvement Brownien fractionnaire (mBf)

Dans cette section nous considérons le processus εB_t^H de probabilité $\mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}$ et on définit

$$L_\phi^2(\mathbb{R})\ ^1 = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\ et\ s,t \in [0;T], |f|_{\phi,t}^2 = \langle f1_{[0,t]}, f1_{[0,s]} \rangle_\phi = \int_0^t \int_0^s f(r)f(u)\phi(r,u)dudr < +\infty\}$$

1. L'espace $L_\phi^2(\mathbb{R})$ muni d'une norme est un espace polonais et est dense dans l'espace des distributions tempérées.

l'espace de fonctions continues $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ de carrés intégrables, muni de la norme $||.||_{L^2_\phi}$ telle que pour tout $z \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, $\quad ||z||_{L^2_\phi} = \sup_{0\leq r\leq t} |z(r)|$.

Théorème 2.2.0.1. *([15])*
Pour $H \in (0;1)$, la famille $(\varepsilon B_t^H)_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations de vitesse ε^2 et avec la bonne fonction de taux $I_\phi : L^2_\phi(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ définie par

$$I_\phi(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}|f|^2_{\phi,t} = \frac{1}{2}\langle f1_{[0,t]}, f1_{[0,s]}\rangle_\phi = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s f(r)f(u)\phi(r,u)dudr \ si \ f \in L^2_\phi(\mathbb{R}) \\ +\infty \ sinon. \end{cases} \tag{2.4}$$

Autrement dit :

* I_ϕ *est semi-continue inférieurement ;*
* $\{f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^*_+, I_\phi(f) \leq a\}$ *est un sous-ensemble compact de* $L^2_\phi(\mathbb{R})$ *;*
* *pour tout fermé C de* $L^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B_t^H \in C) \leq -\frac{1}{2}|f|^2_\phi$$

* *pour tout ouvert O de* $L^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B_t^H \in O) \geq -\frac{1}{2}|f|^2_\phi .$$

Démonstration. **Semi-continuité inférieurement** Soit $f_\varepsilon \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ tel que f_ε converge simplement vers $f \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} I_\phi(f_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}|f_\varepsilon|^2_\phi &= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_0^s f_\varepsilon(r)f_\varepsilon(u)\phi(r,u)dudr \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(r)f_\varepsilon(u)\phi(r,u)dudr \qquad (\textit{Lemme de Fatou}) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s (\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(r))(\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u))\phi(r,u)dudr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s f(r)f(u)\phi(r,u)dudr \\ &= \frac{1}{2}|f|^2_\phi \\ I_\phi(f) &\leq \lim_{\varepsilon\to 0} I_\phi(f_\varepsilon). \end{aligned}$$

D'où I_ϕ est semi-continue inférieurement.

Compacité de $\{f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^*_+, I_\phi(f) \leq a\}$ **:** $I_\phi(f) < +\infty$ pour toute $f \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, donc il existe $a \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $I_\phi(f) \leq a$, on déduit que l'ensemble de niveau

$\{f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), I_\phi(f) \leq a\}$ est compact.
D'où $\{f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^*_+, I_\phi(f) \leq a\}$ est un compact de $L^2_\phi(\mathbb{R})$.
On conclut que I_ϕ est une bonne fonction de taux.

Borne inférieure : Soit O un ouvert de $L^2_\phi(\mathbb{R})$ et $\gamma_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(r)\phi(r,s)dr$ pour $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, d'après la formule fractionnaire II de Girsanov

$$\begin{cases} d\mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi = \exp\{\frac{1}{\varepsilon}\langle \omega, f_\varepsilon\rangle + \frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\}d\tilde{\mathbb{P}}^{H,\varepsilon}_\phi \\ \omega = \tilde{\omega} - \frac{1}{\varepsilon}\gamma_\varepsilon \end{cases} \quad \textit{pour tout } \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

on a :

$$\begin{aligned} d\mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) &= \exp\{\frac{1}{\varepsilon}\langle \omega, f_\varepsilon\rangle + \frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\}d\tilde{\mathbb{P}}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \\ &= \exp\{\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\omega}, f_\varepsilon\rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle \gamma_\varepsilon, f_\varepsilon\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\}d\tilde{\mathbb{P}}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \\ &= \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\} \times \exp\{\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\omega}, f_\varepsilon\rangle\}d\tilde{\mathbb{P}}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \\ \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) &= \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\} \times \tilde{\mathbb{E}}[\chi_O \exp\{\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\omega}, f_\varepsilon\rangle\}], \end{aligned}$$

puis en utilisant l'inégalité de Markov, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) &\geq \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\} \times \tilde{\mathbb{P}}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \\ \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) &\geq -\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi + \log \tilde{\mathbb{P}}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \\ \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) &\geq -\frac{1}{2}|f|^2_\phi. \qquad \textit{car} \quad \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \tilde{\mathbb{P}}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) = 0. \end{aligned}$$

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \geq -\frac{1}{2}|f|^2_\phi.$$

Borne supérieure : Soit C un fermé de $L^2_\phi(\mathbb{R})$ on sait que $\mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in C) \leq \mathbb{E}[\chi_{\{\varepsilon B^H_t \in C\}} \exp\{\langle \omega, f_\varepsilon\rangle\}]$ pour $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'après la formule fractionnaire I de Girsanov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in C) &\leq \mathbb{E}[\chi_{\{\varepsilon B^H_t \in C\}} \exp\{\langle \omega, f_\varepsilon\rangle\}] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\chi_{\{\varepsilon B^H_t \in C\}} \exp\{\langle \omega + \gamma_\varepsilon, f_\varepsilon\rangle\}] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\chi_{\{\varepsilon B^H_t \in C\}} \exp\{\langle \omega, f_\varepsilon\rangle\} \exp\{\langle \omega, f_\varepsilon\rangle - \frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\}] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\chi_{\{\varepsilon B^H_t \in C\}} \exp\{2\langle \omega, f_\varepsilon\rangle - \frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\}] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\chi_{\{\varepsilon B^H_t \in C\}} \exp\{2\langle \omega, f_\varepsilon\rangle\}] \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\} \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\chi_{\{\varepsilon B^H_t \in C\}} \exp\{2\langle \tilde{\omega}, f_\varepsilon\rangle - 2\langle \gamma_\varepsilon, f_\varepsilon\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}] \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|^2_\phi\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{\mathbb{E}}[\chi_{\{\varepsilon B_t^H \in C\}} \exp\{2\langle\tilde{\omega}, f_\varepsilon\rangle - \frac{2}{\varepsilon^2}|f_\varepsilon|_\phi^2\}] \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|_\phi^2\} \\
\mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H \in C) &\leq \tilde{\mathbb{E}}[\exp\{2\langle\tilde{\omega}, f_\varepsilon\rangle - \frac{2}{\varepsilon^2}|f_\varepsilon|_\phi^2\}] \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|_\phi^2\} \\
&= 1 \times \exp\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|_\phi^2\} \\
\log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H \in C) &\leq -\frac{1}{2\varepsilon^2}|f_\varepsilon|_\phi^2.
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H \in C) \leq -\frac{1}{2}|f|_\phi^2.
$$

□

Corollaire 2.2.0.2. *Si $f(t) = 1_{[0,t]}$ alors $(\varepsilon B_t^H)_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviation de bonne fonction de taux*

$$
I_\phi(1_{[0,t]}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \; si \; s \neq t \in [0,T] \\ \frac{1}{2}t^{2H} \; si \; s = t \in [0,T] \\ +\infty \; sinon \; . \end{cases} \tag{2.5}
$$

Démonstration. Même démonstration que le théorème précédent, il suffit de remplacer f_t par $1_{[0,t]}$ et ainsi dans ce cas, on a :

$$
\begin{aligned}
|1_{[0,t]}|_\phi^2 &= \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]}\rangle_\phi = R_H(t,s) \\
\Rightarrow I_\phi(1_{[0,t]}) &= \frac{1}{2}|1_{[0,t]}|_\phi^2 = \frac{1}{2}R_H(t,s).
\end{aligned}
$$

□

2.3 PGD pour une solution d'EDS dirigée par un mBf

Ici nous nous intéressons au comportement asymptotique d'une solution d'équation différentielle stochastique contrôlée par un mouvement Brownien fractionnaire. Pour ce faire nous considérons dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la solution $X_t^{H,\varepsilon}$ de l'EDS (2.3) et on note sa loi de probabilité par $\mu^{H,\varepsilon} = \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F_H^{-1}$ telle que $F_H(f) = z$, l'unique solution continue de l'équation différentielle déterministe :

$$
F_H(f_t) = z(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r)) f_r \phi(r,s) dr, \; s,t \in [0;T] \tag{2.6}
$$

où f est la fonction continue induite par le PGD du mouvement Brownien fractionnaire B_t^H de loi $\mathbb{P}_\phi^H$ et de la dérivée seconde ϕ (2.2) de sa fonction covariance .

Lemme 2.3.0.1. *Soient σ_H et f deux fonctions bornées. Alors il existe des constantes K et N telles que*

* $|f(t)\phi(t,s)| \leq c$ *pour tous* $s,t \in [0,T]$
* $|\sigma_H(z(t))\phi(t,s)| \leq N$ *pour tous* $s,t \in [0,T]$ *et* $z \in L^2_\phi(\mathbb{R})$.

Démonstration. f est bornée, donc il existe $\delta > 0$ tel que $|f| \leq \delta$. On a, pour $s,t \in [0;T]$

$$\begin{aligned}|f(t)\phi(s,t)| &= |f(t)||\phi(s,t)| \\ &= |f|H(2H-1)|t-s|^{2H-2} \leq \delta H|(2H-1)|T^{2H} = c.\end{aligned}$$

σ_H est bornée, donc il existe M tel que $|\sigma_H(z(t))| \leq M \; \forall \, z \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, on a pour $s,t \in [0;T]$

$$\begin{aligned}|\sigma_H(z(t))\phi(s,t)| &= |\sigma_H(z(t))||\phi(s,t)| \\ &= |\sigma_H|H(2H-1)|t-s|^{2H-2} \leq MH|(2H-1)|T^{2H} = N.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.0.2. *La fonction* $F_H : [0;T] \times L^2_\phi(\mathbb{R}) \to L^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R})$ *définie en (2.6) est une fonction continue sur un compact de* $L^2_\phi(\mathbb{R})$.

Démonstration. Notons $F_H(f_1) = z_1$ et $F_H(f_2) = z_2$ avec
$F_H(f) = z(t) = x_0 + \int_0^t \sigma_H(z(r))f_r\phi(r,s)dr + \int_0^t b(z(r))dr$

$$\begin{aligned}z_2(t) - z_1(t) &= \int_0^t [\sigma_H(z_2(r))f_2(r) - \sigma_H(z_1(r))f_1(r)]\phi(r,s)dr + \int_0^t [b(z_2(r)) - b(z_1(r)]dr \\ &= \int_0^t [\sigma_H(z_2(r)) - \sigma_H(z_1(r))]f_2(r)\phi(r,s)dr + \int_0^t [f_2(r) - f_1(r)]\sigma_H(z_1(r))\phi(r,s)dr \\ &\quad + \int_0^t [b(z_2(r)) - b(z_1(r)]dr.\end{aligned}$$

Sous le fait que les coefficients sont lipschitziens, f et φ sont des fonctions continues et d'après le lemme 2.3.0.1 et l'inégalité de Gronwall, on a :

$$\begin{aligned}|z_2(t) - z_1(t)| &\leq L\int_0^t |z_2(r) - z_1(r)||f_2(r)\phi(r,s)|dr + \int_0^t |f_2(r) - f_1(r)||\sigma_H(z_1(r))\phi(r,s)|dr \\ &\quad + L\int_0^t |z_2(r) - z_1(r)|dr \\ &| \leq Lc\int_0^t |z_2(r) - z_1(r)|dr + \delta NT + L\int_0^t |z_2(r) - z_1(r)|ds \\ &= L(c+1)\int_0^t |z_2(s) - z_1(s)|ds + \delta NT\end{aligned}$$

$$\sup_{0\leq r\leq t} |z_2(r) - z_1(r)| \leq L(c+1)\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |z_2(r) - z_1(r)|dr + \delta NT$$

$\|F_H(f_2) - F_H(f_1)\|_{L^2_\phi} =\leq \delta NTe^{L(c+1)}$. F_H est donc continue. □

Le fait que εB^H_t obéit un PGD (2.4) et F_H est continue, nous permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 2.3.0.3. *La famille $(X_t^{H,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ de l'EDS (2.3) satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux $J_H : L^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ définie par*

$$J_H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}} \text{ si } z \in L^2_\phi(\mathbb{R}) \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.7}$$

En autre :

* J_H *est semi-continue inférieurement ;*
* $\{h \in L^2_\phi(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^*_+, J_H(h) \leq a\}$ *est un sous-ensemble compact de* $L^2_\phi(\mathbb{R})$ *;*
* *pour tout fermé* $C \subset L^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,\varepsilon}[X_t^{H,\varepsilon} \in C] \leq -\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}};$$

* *pour tout ouvert* $O \subset L^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,\varepsilon}[X_t^{H,\varepsilon} \in O] \geq -\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}}.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $J_H(z) = \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}}$.
D'après (2.6) $z(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r))f_r\phi(r,s)dr$, donc

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= b(z(t)) + \sigma_H(z(t))f_t\phi(t,s) \\
f_t &= \frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}(t) - b(z(t))] = \sigma_H^{-1}(z(t))[\dot{z}(t) - b(z(t))]\phi^{-1}(t,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J_H(z) &= \inf\{\frac{1}{2}|f|^2_\phi, F(f) = z\} \\
&= \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z(t))[\dot{z}(t) - b(z(t))]\phi^{-1}(t,s)|^2_\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s (\sigma_H^{-1}(z(r))[\dot{z}_r - b(z(r))]\phi^{-1}(r,u))(\sigma_H^{-1}(z_u)[\dot{z}_u - b(z_u)]\phi^{-1}(r,u))\phi(r,u)dudr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s (\sigma_H^{-1}(z(r))[\dot{z}_r - b(z(r))])(\sigma_H^{-1}(z_u)[\dot{z}_u - b(z_u)])\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&= \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}}
\end{aligned}$$

donc

$$J_H(z) = \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}}.$$

Semi-continuité inférieurement de J_H : Soit $z_\varepsilon \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ tel que $z_\varepsilon \longrightarrow z \in L^2_\phi(\mathbb{R})$.

On a :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} J_H(z_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon)[\dot{z_\varepsilon} - b(z_\varepsilon)]|^2_{\phi^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_0^s \sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(r))[\dot{z_\varepsilon}(r) - b(z_\varepsilon(r))]\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(u))[\dot{z_\varepsilon}(u) - b(z_\varepsilon(u))]\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \lim_{\varepsilon\to 0}[\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(r))[\dot{z_\varepsilon}(r) - b(z_\varepsilon(r))]\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(u))[\dot{z_\varepsilon}(u) - b(z_\varepsilon(u))]\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \{\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(r))[\dot{z_\varepsilon}(r) - b(z_\varepsilon(r))]\}\{\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(u))[\dot{z_\varepsilon}(u) - b(z_\varepsilon(u)]\}\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \sigma_H^{-1}(z(r))[\dot{z}(r) - b(z(r))]\sigma_H^{-1}(z(u))\dot{z}(u) - b(z(u)) - \chi_{\{z(u)=0\}}(z(u))\dot{l}]\phi^{-1}(r,u))dudr \\
&= \frac{1}{2}[|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{h} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}}.
\end{aligned}
$$

$J_H(z) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} J_H(z_\varepsilon)$. J_H est donc semi-continue inférieurement.

Compacité de $\{z \in L^2_\phi(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^*_+, J_H(z) \leq a\}$:

$J_H(z) < +\infty$ pour tout $z \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, donc il existe $a > 0$ tel que $J_H(z) \leq a$, on en déduit que $\{z \in L^2_\phi(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}^*_+, J_H(z) \leq a\}$ est un sous-ensemble compact de $L^2_\phi(\mathbb{R})$ et J_H est une bonne fonction de taux.

Borne supérieure- Borne inférieure :

Pour terminer la preuve, nous montrons la borne supérieure et la borne inférieure par le principe de contraction.

F_H est continue et le processus εB_t^H de loi de probabilité $\mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}$ a pour PGD de la bonne fonction de taux $I_\phi(f) = \dfrac{1}{2}|f|^2_\phi$, d'après le principe de contraction, on a :

− pour tout fermé $C \in L^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mu^{H,\varepsilon}[X_t^{H,\varepsilon} \in C] &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F_H^{-1}[X_t^{H,\varepsilon} \in C] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_H^{-1}(X_t^{H,\varepsilon} \in C)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_H^{-1}(X_t^{H,\varepsilon}) \in F_H^{-1}(C)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H \in F_H^{-1}(C)] \\
&\leq -\inf_{f\in F_H^{-1}(C)} I_\phi(f) \\
&= -\inf_{F_H(f)\in C}\{\inf I_\phi(f), f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), F_H(f) = z\} = -J_H(z).
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mu^{H,\varepsilon}[X_t^{H,\varepsilon} \in C] \leq -J_H(z).
$$

− pour tout ouvert $O \in L^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mu^{H,\varepsilon}[X_t^{H,\varepsilon} \in O] = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F_H^{-1}[X_t^{H,\varepsilon} \in O]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_H^{-1}(X_t^{H,\varepsilon} \in O)] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_H^{-1}(X_t^{H,\varepsilon}) \in F_H^{-1}(O)] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H \in F_H^{-1}(O)] \\
&\geq - \inf_{f\in F_H^{-1}(O)} I_\phi(f) \\
&= - \inf_{F_H(f)\in O} \{\inf I_\phi(f), f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), F_H(f) = z\} \\
&= -J_H(z).
\end{aligned}
$$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,\varepsilon}[X_t^{H,\varepsilon} \in O] \geq -J_H(z).$$

□

2.4 PGD pour une solution d'EDS réfléchie dirigée par un mBf

Considérons dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ les deux équations différentielles stochastiques respectivement perturbée et réfléchie :

$$X_{\alpha,t}^{H,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_{\alpha,r}^{H,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_{\alpha,r}^{H,\varepsilon})dB_r^H + \alpha \sup_{0\leq r\leq t} (X_{\alpha,r}^{H,\varepsilon}),\ r,t \in [0;T] \tag{2.8}$$

$$Y_t^{H,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(Y_r^{H,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(Y_r^{H,\varepsilon})dB_s^H + L_t^\varepsilon,\ r,t \in [0;T] \tag{2.9}$$

où

- ⋆ $\alpha \in [0;1]$;
- ⋆ $x_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une variable aléatoire ;
- ⋆ L_t^ε est un processus non décroissant défini par :

$$L_t^\varepsilon = \begin{cases} 0 \ si\ t = 0 \\ \displaystyle\int_0^t \chi_{\{Y_r^{H,\varepsilon}=0\}}(Y_r^{H,\varepsilon})dL_r^\varepsilon,\ si\ t \in]0;T]. \end{cases} \tag{2.10}$$

On note par $\mu_\alpha^{H,\varepsilon}$ et $\mathbb{Q}^{H,\varepsilon}$ les mesures de probabilités respectivement des processus solutions $X_{\alpha,t}^{H,\varepsilon}$ et $Y_t^{H,\varepsilon}$ telles que $\mu_\alpha^{H,\varepsilon} = \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F_\alpha^{-1}$ et $\mathbb{Q}^{H,\varepsilon} = \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F_{H,l}^{-1}$ où F_α et $F_{H,l}$ sont des fonctions déterministes associées à f induite par le PGD de εB_t^H de mesure de probabilité $\mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}$ et telles que $F_\alpha(f) = z_\alpha$ et $F_{H,l}(f) = z_l$, les solutions continues des équations différentielles déterministes :

$$z_\alpha(t) = x_0 + \int_0^t b(z_\alpha(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z_\alpha(r))f_r\phi(r,s)dr + \alpha \sup_{0\leq r\leq t} (z_\alpha(r)),\ s,t \in [0;T] \tag{2.11}$$

$$z_l(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r))f_r\phi(r,s)dr + l_t,\ s,t \in [0;T] \tag{2.12}$$

où $l_t = \int_0^t \chi_{\{z(r)=0\}}(z(r))dl_r$ est une fonction continue croissante.
Pour $\Lambda \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, on définit un opérateur $\Gamma : L^2_\phi(\mathbb{R}) \to L^2_\phi(\mathbb{R})$ par

$$\Gamma\Lambda_t = \Lambda_t - \inf_{0\leq s\leq t}(\Lambda(s)\wedge 0) \qquad \textit{pour } t \in [0;T]. \tag{2.13}$$

vérifiant l'inégalité suivante :

$$\sup_{0\leq r\leq t}|\Gamma\Lambda_1(r) - \Gamma\Lambda_2(r)| \leq 2\sup_{0\leq r\leq t}|\Lambda_1(r) - \Lambda_2(r)|. \tag{2.14}$$

Par le principe de réflection (voir [6] et [12]), la solution de l'équation (2.9) est donnée par

$$\begin{cases} Y_t^{H,\varepsilon} = \Gamma Z_t^{H,\varepsilon} \\ L_t^\varepsilon = Y_t^{H,\varepsilon} - Z_t^{H,\varepsilon} = \Gamma Z_t^{H,\varepsilon} - Z_t^{H,\varepsilon} \end{cases} \tag{2.15}$$

où $Z^{H,\varepsilon}$ est une solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Z_t^{H,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(\Gamma Z_r^{H,\varepsilon})dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma Z_r^{H,\varepsilon})dB_r^H,\ r,t \in [0;T] \tag{2.16}$$

$F_{H,l}$ peut être aussi écrite comme

$$\begin{cases} F_{H,l}(f_t) = \Gamma\Lambda(f_t) \\ l_t = F_{H,l}(f_t) - \Lambda(f_t) = \Gamma\Lambda(f_t) - \Lambda(f_t). \end{cases} \tag{2.17}$$

où Λ est une unique solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\Lambda(f_t) = x_0 + \int_0^t b(\Gamma\Lambda(f_r))dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_r))f_r\phi(r,s)dr,\ s,t \in [0;T]. \tag{2.18}$$

Proposition 2.4.0.1. *Les fonctions F_α, $F_{H,l}$ et l : $[0,T] \times L^2_\phi(\mathbb{R}) \to L^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R})$ (2.12) sont continues sur un compact de $L^2_\phi(\mathbb{R})$.*

Démonstration. **Continuité de F_α :** D'après (2.11),

$$F_\alpha(f_t) = z_\alpha(t) = x_0 + \int_0^t \sigma_H(z_\alpha(r))f_r\phi(r,s)dr + \int_0^t b(z_\alpha(r))dr + \alpha\sup_{0\leq r\leq t}(z_\alpha(r))$$

on a :

$$\begin{aligned} z_\alpha^2(t) - z_\alpha^1(t) &= \int_0^t [\sigma_H(z_\alpha^2(r))f_2(r) - \sigma_H(z_\alpha^1(r))f_1(r)]\phi(r,s)dr + \int_0^t [b(z_\alpha^2(r)) - b(z_\alpha^1(r)]dr \\ &\quad + \alpha(\sup_{0\leq r\leq t}(z_\alpha^2(r)) - \sup_{0\leq r\leq t}(z_\alpha^1(r))) \\ &= \int_0^t [\sigma_H(z_\alpha^2(r)) - \sigma_H(z_\alpha^1(r))]f_2(r)\phi(r,s)dr + \int_0^t [f_2(r) - f_1(r)]\sigma_H(z_\alpha^1(r)) \end{aligned}$$

$$\times \phi(r,s)dr + \int_0^t [b(z_\alpha^2(r)) - b(z_\alpha^1(r)]dr + \alpha(\sup_{0\le r\le t}(z_\alpha^2(r)) - \sup_{0\le r\le t}(z_\alpha^1(r)))$$

$$|z_\alpha^2(t) - z_\alpha^1(t)| \le L\int_0^t |z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)||f_2(r)\phi(r,s)|dr + \int_0^t |f_2(r) - f_1(r)||\sigma_H(z_\alpha^1(r))\phi(r,s)|dr$$
$$+ L\int_0^t |z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|dr + \alpha|\sup_{0\le r\le t}(z_\alpha^2(r)) - \sup_{0\le r\le t}(z_\alpha^1(r))|$$
$$\le Lc\int_0^t |z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|dr + \delta NT + L\int_0^t |z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|ds + \alpha\sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|$$
$$= L(c+1)\int_0^t |z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|dr + \alpha\sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)| + \delta NT.$$

$$\sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)| \le L(c+1)\int_0^t \sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|dr + \alpha\sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)| + \delta NT$$

$$(1-\alpha)\sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)| \le L(c+1)\int_0^t \sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|dr + \delta NT.$$

$$\sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)| \le \frac{L(c+1)}{1-\alpha}\int_0^t \sup_{0\le r\le t}|z_\alpha^2(r) - z_\alpha^1(r)|dr + \frac{\delta NT}{1-\alpha}$$

$$\|F_\alpha(f_2) - F_\alpha(f_1)\|_{L^2_\phi} \le \frac{\delta NT}{1-\alpha} e^{(\frac{L(c+1)}{1-\alpha})T}.$$

F_α est donc continue si $\alpha \in (0;1)$.

Continuité de $F_{H,l}$: D'après le système (2.17) $F_{H,l}(f) = \Gamma\Lambda(f_1)$, posons $F_{H,l}(f_1) = \Gamma\Lambda(f_1)$ et $F_{H,l}(f_2) = \Gamma\Lambda(f_2)$ avec $\Lambda(f_r) = x_0 + \int_0^t b(\Gamma\Lambda(f_r))dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_r))f_r\phi(r,s)dr$. Donc on a :

$$|F_{H,l}(f_1(t)) - F_{H,l}(f_2(t))| = |\Gamma\Lambda(f_1(t)) - \Gamma\Lambda(f_2(t))|$$
$$\sup_{0\le r\le t}|F_{H,l}(f_1(r)) - F_{H,l}(f_2(r))| = \sup_{0\le r\le t}|\Gamma\Lambda(f_1(r)) - \Gamma\Lambda(f_2(r))| \le 2\sup_{0\le r\le t}|\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))|.$$

selon (2.14) et avec

$$\Lambda(f_1(t)) - \Lambda(f_2(t)) = \int_0^t [b(\Gamma\Lambda(f_1(r))) - b(\Gamma\Lambda(f_2(r)))]dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_1(r)))f_1(r)\phi(r,s)dr$$
$$- \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))f_2(r)\phi(r,s)dr$$
$$= \int_0^t [b(\Gamma\Lambda(f_1(r))) - b(\Gamma\Lambda(f_2(r)))]dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_1(r)))f_1(r)\phi(r,s)dr$$
$$- \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))f_1(r)\phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))f_1(r)\phi(r,s)dr$$
$$- \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))f_2(r)\phi(r,s)dr$$

$$= \int_0^t [b(\Gamma\Lambda(f_1(r))) - b(\Gamma\Lambda(f_2(r)))]dr + \int_0^t [\sigma_H(\Gamma\Lambda(f_1(r))) - \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))] f_1(r)\phi(r,s)dr$$
$$+ \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))\phi(r,s)[f_1(r) - f_2(r)]dr.$$

$$\begin{aligned}
&|\Lambda(f_1(t)) - \Lambda(f_2(t))| \\
&\leq \int_0^t |b(\Gamma\Lambda(f_1(r))) - b(\Gamma\Lambda(f_2(r)))|dr + \int_0^t |\sigma_H(\Gamma\Lambda(f_1(r))) - \sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))||f_1(r)\phi(r,s)|dr \\
&\qquad + \int_0^t |\sigma_H(\Gamma\Lambda(f_2(r)))\phi(r,s)||f_1(r) - f_2(r)|dr \\
&\leq L\int_0^t |\Gamma\Lambda(f_1(r)) - \Gamma\Lambda(f_2(r))|dr + Lc\int_0^t |\Gamma\Lambda(f_1(r)) - \Gamma\Lambda(f_2(r))|dr + N\int_0^t |f_1(r) - f_2(r)|dr \\
&\leq L(1+c)\int_0^t |\Gamma\Lambda(f_1(r)) - \Gamma\Lambda(f_2(r))|dr + N\delta T.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))| &\leq L(1+c)\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Gamma\Lambda(f_1(r)) - \Gamma\Lambda(f_2(r))|dr + N\delta T \\
&\leq 2L(1+c)\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \varphi(f_2(r))|dr + N\delta T \\
&\leq 2L(1+c)\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \varphi(f_2(r))|dr + N\delta T. \\
\sup_{0\leq r\leq t} |F_{H,l}(f_1(r)) - F_{H,l}(f_2(r))| &\leq 2\sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))| \\
&\leq 4L(1+c)\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))|dr + N\delta T(*) \\
\|F_{H,l}(f_1(t)) - F_{H,l}(f_2(t))\|_{L^2_\phi} &\leq N\delta T e^{4L(1+c)T}.
\end{aligned}$$

$F_{H,l}$ est continue.

Continuité de l : D'après (2.17), $l_t = \Gamma\Lambda(f_t) - \Lambda(f_t)$, donc en utilisant (2.14), on a :

$$\begin{aligned}
l_1(t) - l_2(t) &= \Gamma\Lambda(f_1(t)) - \Lambda(f_1(t)) - \Gamma\Lambda(f_2(t)) + \Lambda(f_2(t)) \\
|l_1(t) - l_2(t)| &\leq |\Gamma\Lambda(f_1(t)) - \Gamma\Lambda(f_2(t))| + |\Lambda(f_1(t)) - \Lambda(f_2(t))| \\
\sup_{0\leq r\leq t} |l_1(r) - l_2(r)| &\leq \sup_{0\leq r\leq t} |\Gamma\Lambda(f_1(r)) - \Gamma\Lambda(f_2(r))| + \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))| \\
&\leq 2\sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))| + \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))| \\
&\leq 3\sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))| \\
&\leq 6L(1+c)\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda(f_1(r)) - \Lambda(f_2(r))|dr + N\delta T(voir\ (*)) \\
\|l_1(t) - l_2(t)\|_{L^2_\phi} &\leq N\delta T e^{6L(1+c)T}.
\end{aligned}$$

l est donc continue.

□

Théorème 2.4.0.2. *Pour $\alpha \in (0;1)$, alors la famille $(X^{H,\varepsilon}_{\alpha,t})_{\varepsilon>0}$(2.8) satisfait le principe des grandes déviations avec une bonne fonction $J_\alpha : L^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ donnée par :*

$$J_\alpha(h) = \begin{cases} \inf\{\inf I_\phi(f), f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), F_\alpha(f) = z_\alpha\} \text{ si } z_\alpha \in L^2_\phi(\mathbb{R}) \\ \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.19}$$

Démonstration. Même démonstration que le théorème (2.7). □

Théorème 2.4.0.3. *La famille $(Y^{H,\varepsilon}_t, L^\varepsilon_t)_{\varepsilon>0}$ de l'EDS (2.9) satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux $J_l : L^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ définie par*

$$J_l(z,l) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z}_l - b(z) - \chi_{\{z=0\}}(z)\dot{l}]|^2_{\phi^{-1}} \text{ si } z,l \in L^2_\phi(\mathbb{R}) \\ \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.20}$$

Démonstration. Montrons d'abord que $J_l(z,l) = \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z(t))[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}_t]|^2_{\phi^{-1}}$.

Or $z_l(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r))f_r\phi(r,s)dr + l_t$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_l(t) &= b(z(t)) + \sigma_H(z(t))f_t\phi(t,s) + \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}_t \\
f_t &= \frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}_t].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_l(z,l) &= \inf_{f\in F^{-1}_{H,l}(C)} I(f) = \frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}_t]|^2_\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s (\frac{1}{\sigma_H(z(r))\phi(r,u)}[\dot{z}_l(r) - b(z(r)) - \chi_{\{z(r)=0\}}(z(r))\dot{l}_r]) \\
&\qquad \times (\frac{1}{\sigma_H(z_(u))\phi(r,u)}[\dot{z}_l(u) - b(z(u)) - \chi_{\{z(u)=0\}}(z(u))\dot{l}_u])\phi(r,u)dudr. \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s (\sigma_H^{-1}(z(r))[\dot{z}_l(r) - b(z(r)) - \chi_{\{z(r)=0\}}(z(r))\dot{l}_r]) \\
&\qquad \times (\sigma_H^{-1}(z_u)[\dot{z}_l(u) - b(z(u)) - \chi_{\{z_u=0\}}(z(u))\dot{l}_u])\phi^{-1}(r,u)dudr
\end{aligned}$$

$$J_l(z,l) = \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z(t))[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}_t]|^2_{\phi^{-1}}.$$

$$J_l(z,l) = \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z}_l - b(z) - \chi_{\{z=0\}}(z)\dot{l}]|^2_{\phi^{-1}}\ .$$

Semi-continuité inférieurement de J_l : Soit z_ε, et $l_\varepsilon \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ tels que $z_\varepsilon \longrightarrow z, l_\varepsilon \longrightarrow l \in L^2_\phi(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} J(z_\varepsilon, l_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon)[\dot{z}_{l,\varepsilon} - b(z_\varepsilon) - \chi_{\{z_\varepsilon=0\}}(z_\varepsilon)\dot{l}_\varepsilon]|^2_{\phi^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_0^t\int_0^s \sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(r))[\dot{z}_{l,\varepsilon}(r) - b(z_\varepsilon(r)) - \chi_{\{z_\varepsilon(r)=0\}}(z_\varepsilon(r))\dot{l}_\varepsilon] \\
&\qquad \times \sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(u))[\dot{z}_{l,\varepsilon}(u) - b(z_\varepsilon(u)) - \chi_{\{z_\varepsilon(u)=0\}}(z_\varepsilon(u))\dot{l}_\varepsilon]\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \lim_{\varepsilon\to 0}[\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(r))[\dot{z}_{l,\varepsilon}(r) - b(z_\varepsilon(r)) - \chi_{\{z_\varepsilon(r)=0\}}(z_\varepsilon(r))\dot{l}_\varepsilon] \\
&\qquad \times \sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(u))[\dot{z}_{l,\varepsilon}(u) - b(z_\varepsilon(u)) - \chi_{\{z_\varepsilon(u)=0\}}(z_\varepsilon(u))\dot{l}_\varepsilon]\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \{\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(r))[\dot{z}_{l,\varepsilon}(r) - b(z_\varepsilon(r)) - \chi_{\{z_\varepsilon(r)=0\}}(z_\varepsilon(r))\dot{l}_\varepsilon]\} \\
&\qquad \times \{\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon(u))[\dot{z}_{l,\varepsilon}(u) - b(z_\varepsilon(u)) - \chi_{\{z_\varepsilon(u)=0\}}(z_\varepsilon(u))\dot{l}_\varepsilon]\phi^{-1}(r,u)dudr\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \sigma_H^{-1}(z(r))[\dot{z}_l(r) - b(z(r)) - \chi_{\{z(r)=0\}}(z(r))\dot{l}]\} \\
&\qquad \times \sigma_H^{-1}(z(u))\dot{z}_l(u) - b(z(u)) - \chi_{\{z(u)=0\}}(z(u))\dot{l}]\phi^{-1}(r,u))dudr\} \\
&= \frac{1}{2}[|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z}_l - b(z) - \chi_{\{z=0\}}(z)\dot{l}]|^2_{\phi^{-1}}\ .
\end{aligned}$$

$J_l(z,l) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} J_l(z_\varepsilon, l_\varepsilon)$.

J_l est donc semi-continue inférieurement.

Compacité : $J_l(z,l) < +\infty$ pour tout $z, l \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, donc il existe $a > 0$ tel que $J_l(z,l) \leq a$, on en déduit que l'ensemble $\{z, l \in L^2_\phi(\mathbb{R}), J_l(z,l) \leq a\}$ est un compact de $L^2_\phi(\mathbb{R})$.

On conclut que J_l est une bonne fonction de taux.

Borne inférieure : Pour tout ouvert O de $L^2_\phi(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{Q}^{\varepsilon,H}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O]] = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O]] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon)] \in F_{H,l}^{-1}(O)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H \in F_{H,l}^{-1}(O)] \\
&\geq -\inf_{f\in F_{H,l}^{-1}(O)} I_\phi(f) = -\inf_{F_{H,l}\in O}\{\inf I_\phi(f) = \frac{1}{2}|f|^2_\phi, f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), F_{H,l}(f_t) = z_l(t)\} \\
&= -J_l(z,l).
\end{aligned}$$

Borne supérieure : Pour tout fermé C de $L^2_\phi(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{Q}^{\varepsilon,H}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in C] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in C]] = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in C]] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F_{H,l}^{-1}[(Y_t^{H,\varepsilon}, L_t^\varepsilon)] \in F_{H,l}^{-1}(C)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H \in F_{H,l}^{-1}(C)] \\
&\leq -\inf_{f\in F_{H,l}^{-1}(C)} I_\phi(f) = -\inf_{F_{H,l}\in C}\{\inf I_\phi(f) = \frac{1}{2}|f|_\phi^2, f \in L_\phi^2(\mathbb{R}), F_{H,l}(f_t) = z_l(t)\} = -J_l(z,l).
\end{aligned}$$

□

2.5 conclusion

Nous avons étudié le comportement asymptotique d'une équation différentielle stochastique simple perturbée ou réfléchie dirigée par un mouvement brownien fractionnaire grâce au principe des grandes déviations. Cette étude est réalisée à partir de deux cas : dans le premier cas où le terme de dérive est nul, nous avons montré la limite supérieure du PGD en utilisant la formule fractionnaire de Girsanov I et la limite inférieure par la formule fractionnaire de Girsanov II et l'inégalité de Marko. Dans le second cas où le terme dérive est non nul, le principe de contraction et l'étude du cas précédent nous ont permis de généraliser le PGD pour la solution de EDS, EDSP ou EDS réfléchie dirigée par un mouvement brownien fractionnaire pour tout $H \in (0;1)$.

Chapitre 3

Principe des grandes déviation (PGD) pour une solution d'EDS mixte (EDSM) et d'EDS mixte et réfléchie

Résumé :
Dans ce chapitre, nous établissons le principe des grandes déviations (PGD) d'une solution de l'équation différentielle stochastique mixte (EDSM) contrôlée par un mouvement Brownien standard (mB) et un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) indépendants dans tout l'intervalle $(0;1)$ du paramètre H de Hurst. Sur ce, nous montrons d'abord ce principe lorsque la dérive est égale à zéro et les coefficients de diffusion sont égaux à un, puis nous le généralisons dans le cas où la dérive est différente de zéro.
L'obstacle majeur auquel nous sommes confronté dans cette étude est le sens de l'intégrale fractionnaire qui a plusieurs aspects dans certains espaces, mais grâce à l'espace des distributions tempérées, nous parvenons à contourner cet obstacle et à établir le principe de grandes déviations.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation différentielle stochastique dépendant du temps et impliquant d'un mouvement Brownien standard W_t et d'un mouvement Brownien fractionnaire B_t^H d'indice $H \in (0;1)$ de Hurst indépendants, définis sur l'espace de probabilité du bruit blanc $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R})), \mathbb{P})$:

$$X_t^{H,w,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(X_r^{H,w,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X_r^{H,w,\varepsilon})dW_r,\ r,t \in [0;T] \quad (3.1)$$

où

- $\star$ x_0 est une variable aléatoire mesurable à valeur dans l'espace de distribution tempérée $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, espace dual de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec lequel $\mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ est un borélien
- $\star$ b, σ_w et σ_H : $[0;T] \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sont des fonctions mesurables telles que leurs intégrales contre les deux mouvements Brownien sont définies comme l'intégrale du bruit blanc [3], [42] et ils vérifient les hypothèses suivantes :
  pour tout $t \in [0;T]$ et pour $h, z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, il existe des constantes M et L telles que :
  $i)$ $|b(h)| \le M, |\sigma(h)| \le M$;
  $ii)$ $|b(h) - b(z)| \le L|h - z|, |\sigma(h) - \sigma(z)| \le L|h - z|$.

L'existence et l'unicité d'une telle équation ont été prouvées dans [35]. De plus, Mishkra, Y. et Shevechenko, G. [34] ont obtenu le taux moyen carré de convergence par l'approximation d'Euler de la solution de cette équation avec $H \in (\frac{1}{2}; 1)$.
L'intégrale $\int_0^t \sigma_w(X_r^{H,w})dW_r$ est interprétée comme une intégrale stochastique d'Itô dans tous les espaces, spécialement dans l'espace du bruit blanc et l'intégrale $\int_0^t \sigma_H(X_r^{H,w})dB_r^H$ est considérée dans l'espace du bruit blanc comme dans [4] et [42] pour $H \in (0; 1)$.
Nous augmentons ensuite à cette équation, un processus continu non décroissant L_t^ε défini par

$$L_t^\varepsilon = \begin{cases} 0 \; si \; t = 0 \\ \int_0^t \chi_{\{X_r^{H,w,\varepsilon}=0\}}(X_r^{H,w,\varepsilon})dL_r^\varepsilon \; si \; t \in [0; T] \end{cases} \tag{3.2}$$

pour obtenir

$$Y_t^{H,w,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(Y_r^{H,w,\varepsilon})dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(Y_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(Y_r^{H,w,\varepsilon})dW_r + L_t^\varepsilon, \; r, t \in [0; T] \tag{3.3}$$

L'existence et l'unicité de la solution de cette équation sans le terme $\varepsilon \int_0^t \sigma_w(Y_r^{H,w,\varepsilon})dW_r$ ont été prouvées dans [17] et elles ont été aussi obtenues dans [40] pour l'EDS dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire avec réflection.
Cependant dans la théorie des grandes déviations pour l'EDS dirigée par un mouvement Brownien standard, beaucoup d'auteurs ont établi le principe des grandes déviations pour les diffusions avec réflection. Parmi eux, nous citons les travaux de Bo, L., Zhang, T. [6] et Doss, H., Priouret, P. [18].
Concernant la solution réfléchie d'une EDS dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire, nous avons montré dans [14] qu'elle satisfait le PGD.
Le but de ce chapitre est d'établir le principe des grandes déviations à des solutions de ces équations stochastiques. Pour ce faire nous supposons dans un premier cas, le cas où la dérive est nulle et les coefficients de diffusion sont égaux à l'identité et par l'indépendance de ces deux mouvements Browniens, nous construisons la borne inférieure et la borne supérieure grâce aux formules de Girsanov et l'inégalité de Markov. Nous ne pouvons pas étendre cette approche quand ces mouvements Brownien sont dépendants. Par le principe de contraction, nous réussissons à étudier ces équations stochastiques.
Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : nous montrons le principe des grandes déviations pour une somme de processus fractionnaire et standard indépendants dans la section 3.2 et celui d'une solution de l'EDS (3.1) et d'une solution de l'EDS réfléchie (3.3) dirigée par ces derniers dans les sections respectivement 3.3 et 3.4.
Et afin, avant de conclure, nous établissons ce principe dans la dernière section pour une diffusion réfléchie.

3.2 PGD pour une somme d'un mB et d'un mBf

Notre objectif dans cette section est de montrer que le processus mixte :

$$\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \tag{3.4}$$

de mesure de probabilité $\mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}$ obéit le principe des grandes déviations pour $H \in (0;1)$, paramètre de Hurst du mouvement Brownien fractionnaire B_t^H de mesure de probabilité $\mathbb{P}_\phi^H$ où W_t est un mouvement Brownien standard (mB). On suppose que
(H_w) : **pour tout** $H \in (0,1)$ **les processus** B_t^H **et** W_t **sont indépendants**.
Ainsi on note $\mathbb{P}^{w,\varepsilon}$ la probabilité de la famille (εW_t) et on définit les espaces de fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de carrés intégrables :

$$L^2(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), |\varphi|^2 = \langle \varphi 1_{[0,t]}, \varphi 1_{[0,t]} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^t \varphi^2(r)dr < +\infty\}$$

$$L_\phi^2(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), |f|_\phi^2 = \langle f 1_{[0,t]}, f 1_{[0,s]} \rangle_\phi = \int_0^t \int_0^s f(r)f(u)\phi(r,u)dudr < +\infty\} \; et$$

$$\mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}) \times L_\phi^2(\mathbb{R}), \tag{3.5}$$

muni de la norme $||.||_{\mathbb{L}_\phi^2}$ telle que $||h||_{\mathbb{L}_\phi^2} = \sup\limits_{0 \le r \le t} |h(r)|$ pour tout $h \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$.

Théorème 3.2.0.1. *Sous (H_w), la famille $(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t)_{\varepsilon > 0}$ satisfait le principe des grandes déviations de vitesse ε^2 avec la bonne fonction de taux $I_{\phi,w} : \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ donnée par :*

$$I_{\phi,w}(f;\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2] & si\ (f,\varphi) \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}) \\ +\infty \ sinon. \end{cases} \tag{3.6}$$

Autrement dit :

- $*$ *$I_{\phi,w}$ est une bonne fonction de taux ;*
- $*$ *pour tout fermé $C \subset \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in C) \le -\frac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2];$$

- $*$ *pour tout ouvert $O \subset \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in O) \ge -\frac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2].$$

Démonstration. — Montrons que $I_{\phi,w}$ est une bonne fonction de taux, c'est-à-dire que $I_{\phi,w}$ est semi-continue inférieurement et $\{(f,\varphi) \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}) \; et \; a \in \mathbb{R}_+^*, I_{\phi,w}(f,\varphi) \le a\}$ est un sous-ensemble compact.

Semi-continue inférieurement : Soit $(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$ tel que $(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ convergent vers $(f, \varphi) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\phi,w}(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}[|f_\varepsilon|^2_\phi + |\varphi_\varepsilon|^2] = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_0^t \int_0^s f_\varepsilon(r) f_\varepsilon(u)\phi(r,u)dudr + \int_0^t \varphi_\varepsilon^2 dr] \\
&\geq \frac{1}{2}[\int_0^t \int_0^s \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(r) f_\varepsilon(u)\phi(r,u)dudr + \int_0^t \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon^2 dr] \\
&= \frac{1}{2}[\int_0^t \int_0^s (\lim_{\varepsilon\to 0} f_n(r))(\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u))\phi(r,u)dudr + \int_0^t \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon^2 dr] \\
&= \frac{1}{2}[\int_0^t \int_0^s f(r) f(u)\phi(r,u)dudr + \int_0^t \varphi^2 dr] = \frac{1}{2}[|f|^2_\phi + |\varphi|^2]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; I_{\phi,w}(f,\varphi) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} I_{\phi,w}(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon).$$

Donc $I_{\phi,w}$ est semi-continue inférieurement.

Compacité : $I_{\phi,w}(f,\varphi) < +\infty$ pour tout $(f,\varphi) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$, donc il existe $a \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $I_{\phi,w}(f,\varphi) \leq a$, on en déduit que l'ensemble $\{(f,\varphi) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R}) \; et \; a \in \mathbb{R}^*_+, I_{\phi,w}(f;\varphi) \leq a\}$ est compact.
D'où $\{(f,\varphi) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R}) \; et \; a \in \mathbb{R}^*_+, I_{\phi,w}(f;\varphi) \leq a\}$ est un compact de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$.
On conclut que $I_{\phi,w}$ est une bonne fonction de taux pour le PGD du processus $\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t$.

− Borne inférieure et borne supérieure

Comme les processus B^H_t et W_t de probabilités respectivement $\mathbb{P}^H_\phi$ et $\mathbb{P}^w$ sont indépendants, on a :

(borne inférieure) pour tout ouvert O de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t \in O) &= \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \times \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in O) \\
\varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t \in O) &= \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) + \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in O) \\
\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t \in O) &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) + \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in O)
\end{aligned}$$

or d'après le théorème 2.2.1., $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in O) \geq -\frac{1}{2}|f|^2_\phi$ et d'après le théorème de Schilder (voir [12] ou [13]) $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in O) \geq -\frac{1}{2}|\varphi|^2$
D'où

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t \in O) \geq -\frac{1}{2}[|f|^2_\phi + |\varphi|^2];$$

(borne supérieure) pour tout fermé C de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t \in C) &= \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in C) \times \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in C) \\
\varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t \in C) &= \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in C) + \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in C) \\
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B^H_t + \varepsilon W_t \in C) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,\varepsilon}_\phi(\varepsilon B^H_t \in C) \\
&\quad + \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in C)
\end{aligned}$$

or d'après le théorème 2.2.1. et le théorème de Schilder (voir [12] ou [13]) on a respectivement
$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_{\phi}^{H,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H \in C) \leq -\frac{1}{2}|f|_{\phi}^2$ et
$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{w,\varepsilon}(\varepsilon W_t \in C) \leq -\frac{1}{2}|\varphi|^2$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in C) \leq -\frac{1}{2}[|f|_{\phi}^2 + |\varphi|^2]$$

□

3.3 PGD pour une solution d'EDS dirigée par un mB et un mBf indépendants

Notre travail ici consiste à construire le principe des grandes déviations pour la solution $X_t^{H,w,\varepsilon}$ définie en (3.1) quand le terme de dérive $b \neq 0$. On note la loi de probabilité de $X_t^{H,w,\varepsilon}$ par
$\mu^{H,w,\varepsilon} = \mathbb{Q}^{\varepsilon} \circ F_{H,w}^{-1}$ où

$\star$ $\mathbb{Q}^{\varepsilon} = \begin{cases} \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon} \\ \mathbb{P}_{\phi}^{H,\varepsilon} \end{cases}$

$\star$ $F_{H,w}$ est une fonction déterministe associée à des solutions continues des équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} F_{H,w}(f,\varphi)(t) = h(t) = x_0 + \int_0^t b(h(r))dr + \int_0^t \sigma_H(h(r)) f_r \phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_w(h(r))\varphi_r dr \\ F_{H,w}(f,0)(t) = F_H(f) = z(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r)) f_r \phi(r,s)dr \\ F_{H,w}(0,\varphi)(t) = F_w(\varphi) = g(t) = x_0 + \int_0^t b(g(r))dr + \int_0^t \sigma_w(g(r))\varphi_r dr \\ F_{H,w}(0,0)(t) = m(t) = x_0 + \int_0^t b(m(r))dr \end{cases} \tag{3.7}$$

pour lesquelles $f \in L_{\phi}^2(\mathbb{R})$ et $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ sont induites par le PGD de mBf et de Bm et de plus b, σ_w et σ_H vérifient aussi les hypothèses suivantes :
il existe L et M telles que pour tous $h, z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

- $|b(h) - b(z)| \leq L|h - z|$;
- $|\sigma(h) - \sigma(z)| \leq L|h - z|$;
- $|b(z)| \leq M, |\sigma(z)| \leq M$.

Le fait que εB_t^H, εW_t et $\varepsilon(B_t^H + W_t)$ satisfont le PGD nous permet d'évaluer la loi de probabilité $\mu^{H,w,\varepsilon}$ de $X_t^{H,w,\varepsilon}$ (3.1).

Proposition 3.3.0.1. *On suppose que $F_{H,w}(0;0)(t) = m(t)$ (3.7). Alors pour $R > 0$ et $\delta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - m(t)\|_{\mathbb{L}_{\phi}^2} > \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}_{\phi}^2} < \alpha\} < -R. \tag{3.8}$$

Démonstration. Pour $R > 0$, $\delta > 0$ et $F_{H,w}(0;0)(t) = m(t)$, on a :

$$\begin{aligned}
|X_t^{H,w,\varepsilon} - m(t)| &\leq \int_0^t |b(X_r^{H,w,\varepsilon}) - b(m(r))|dr + |\varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H \\
&\quad + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X_r^{H,w,\varepsilon})dW_r| \\
&\leq L \int_0^t |X_r^{H,w,\varepsilon} - m(r)|dr + \varepsilon M|B_t^H + W_t| \\
\|X_t^{H,w,\varepsilon} - m(t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} &\leq \varepsilon M \sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t|e^{LT}. \\
\mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - m(t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta\} &\leq \mu_\phi^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}\} \\
&\leq 4\exp\{-\frac{\delta^2 e^{-2LT}}{2\varepsilon^2 M^2(t^{2H}+t)T^2}\}(voir[44],\ page\ 43) \\
\mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - m(t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} &\leq \mu^{H,w,\varepsilon}\{\|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} \\
&\leq 4\exp\{-\frac{\delta^2 e^{-2LT}}{2\varepsilon^2 M^2(t^{2H}+t)T^2}\}.
\end{aligned}$$

Posons $R = \dfrac{\delta^2 e^{-2LT}}{2M^2(t^{2H}+t)T^2}$, alors

$$\begin{aligned}
\mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - m(t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} &\leq 4\exp\{-\frac{R}{\varepsilon^2}\} \\
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - m(t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} &< -R.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.0.2. *On suppose que $F_w(\varphi) = g$ (3.7) et $\Psi_t = \int_0^t \varphi_r dr$ pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Alors pour $R' > 0$, $\delta > 0$ et sous (H_w) il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - F_w(\varphi_t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R'. \tag{3.9}$$

Démonstration. Pour $R' > 0$, $\delta > 0$, $F_w(\varphi_t) = g(t)$ et $I_{\phi,w}(f,\varphi) \leq a$, on a :

$$\begin{aligned}
|X_t^{H,w,\varepsilon} - g(t)| &\leq \int_0^t |b(X_r^{H,w,\varepsilon}) - b(g(r))|dr + |\varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H \\
&\quad + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X_r^{H,w,\varepsilon})dW_r - \int_0^t \sigma_w(X_r^{H,w,\varepsilon})\varphi_r dr| \\
&\leq L \int_0^t |X_r^{H,w,\varepsilon} - g(r)|dr + \varepsilon M|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| \\
\|X_t^{H,w,\varepsilon} - g(t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} &\leq \varepsilon M \sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t|e^{LT} \\
\mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - F_w(\varphi_t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta\} &\leq \mu^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}\}
\end{aligned}$$

$$\leq \exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\}\tilde{\mu}^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T}|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}\}.$$

$$\begin{aligned}
\mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - F_w(\varphi_t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} &\leq \exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\} \\
&\times\tilde{\mu}^{H,w,\varepsilon}\{\|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&= \exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\}\tilde{\mu}^{H,w,\varepsilon}\{\|\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&\leq 4\exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\} \times \exp\{-\frac{R}{\varepsilon^2}\} \\
&= 4\exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi) + R}{\varepsilon^2}\} \\
&= 4\exp\{-\frac{R'}{\varepsilon^2}\}
\end{aligned}$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}\{\|X_t^{H,w,\varepsilon} - F_w(\varphi_t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R'.$$

□

Proposition 3.3.0.3. *La fonction* $F_{H,w} : [0,T] \times \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R})$ *est une fonction continue sur tout compacte de* $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$.

Démonstration. (3.7) $\Rightarrow F_{H,w}(f,\varphi)(t) = h(t)$ pour tout $(f,\varphi) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$.
Posons $F_{H,w}(f_1,\varphi_1) = h_1$ et $F_{H,w}(f_2,\varphi_2) = h_2$ avec
$h(t) = x + \int_0^t b(h(r))dr + \int_0^t \sigma_H(h(r))f_r\phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_w(h(r))\varphi_r.$

$$\begin{aligned}
F_{H,w}(f_1,\varphi_1)(t) - F_{H,w}(f_2,\varphi_2)(t) &= h_1(t) - h_2(t) \\
&= \int_0^t (b(h_1(r)) - b(h_2(r)))dr + \int_0^t \sigma_H(h_1(r))f_1(r)\phi(r,s)dr \\
&- \int_0^t \sigma_H(h_2(r))f_2(r)\phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_w(h_1(r))\varphi_1(r) - \int_0^t \sigma_w(h_2(r))\varphi_2(r).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|F_{H,w}(f_1,\varphi_1)(t) - F_{H,w}(f_2,\varphi_2)(t)| &\leq \int_0^t |b(h_1(r)) - b(h_2(r))|dr \\
&+ \int_0^t |\sigma_H(h_1(r)) - \sigma_H(h_2(r))||f_1(r)\phi(r,s)|dr + \int_0^t |\sigma_H(h_2(r))\phi(r,s)||f_1(r) - f_2(r)|dr \\
&+ \int_0^t |\sigma_w(h_1(r)) - \sigma_w(h_2(r))||\varphi_1(r)|dr + \int_0^t |\sigma_w(h_2(r))||\varphi_1(r) - \varphi_1(r)|dr \\
&\leq L\int_0^t |h_1(r) - h_2(r)|dr + Lk\int_0^t |h_1(r) - h_2(r)|dr + N\int_0^t |f_1(r) - f_2(r)|dr \\
&+ L\delta\int_0^t |h_1(r) - h_2(r)|dr + M\int_0^t |\varphi_1(r) - \varphi_2(r)|dr \\
&\leq L(1 + c + \delta)\int_0^t |h_1(r) - h_2(r)|dr + \alpha(N+M)T
\end{aligned}$$

$\|F_{H,w}(f_1,\varphi_1) - F_{H,w}(f_2,\varphi_2)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} \leq \alpha(N+M)Te^{L(1+c+\delta)T}.$

$F_{H,w}$ est continue. □

Proposition 3.3.0.4. *On suppose h et g définie en (3.7). Alors pour $H \in (0,1)$, la fonction $J_h : L^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ définie par*

$$J_h(h,g) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(h)}[\dot{h} - b(h)] - \frac{\sigma_w(h)}{\sigma_H(g)\sigma_w(g)}[\dot{g} - b(g)]|^2_{\phi^{-1}} & si\ h \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})\ et\ g \in L^2(\mathbb{R}) \\ +\infty\ sinon \end{cases} \tag{3.10}$$

est une bonne fonction de taux c'est-à-dire que :

⋆ *J_h est semi-continue inférieurement ;*

⋆ *l'ensemble $\{h \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*_+ / J_h(h,g) \le a\}$ est un compact de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Montrons d'abord que
$J_h(h,g) = \frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(h)}[\dot{h} - b(h)] - \frac{\sigma_w(h)}{\sigma_H(g)\sigma_w(g)}[\dot{g} - b(g)]|^2_{\phi^{-1}}$

$$(3.7) \Rightarrow \begin{cases} \dot{h}(t) = b(h(t)) + \sigma_H(h(t))f_t\phi(s,t) + \sigma_w(h(t))\varphi_t \\ \dot{g}(t) = b(g(t)) + \sigma_w(g(t))\varphi_t \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f_t = \frac{1}{\sigma_H(h(t))\phi(s,t)}[\dot{h}(t) - b(h(t)) - \sigma_w(h(t))\varphi_t] \\ \varphi_t = \frac{1}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}(t) - b(g(t))] \end{cases}$$
$$\Rightarrow f_t = \frac{1}{\sigma_H(h(t))\phi(s,t)}[\dot{h}(t) - b(h(t)) - \frac{\sigma_w(h(t))}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}(t) - b(g(t))]]$$
$$or\ J_h(h,g) = \inf_{h\in\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})}\{\inf I(f) = \frac{1}{2}|f|^2_\phi, f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), F_{H,w}(f,\varphi) = h(t)\}$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow J_h(h,g) &= \frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(h(t))\phi(s,t)}[\dot{h}(t) - b(h(t)) - \frac{\sigma_w(h(t))}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}(t) - b(g(t))]]|^2_\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s(\frac{1}{\sigma_H(z(r))\phi(u,r)}[\dot{h}_r - b(z(r)) - \frac{\sigma_w(z(r))}{\sigma_w(g(r))}[\dot{g}_r - b(g(r))]]) \\ &\quad \times (\frac{1}{\sigma_H(h_u)\phi(u,r)}[\dot{h}_u - b(h_u) - \frac{\sigma_w(h_u)}{\sigma_w(g_u)}[\dot{g}_u - b(g_u)]])\phi(r,u)dudr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s(\frac{1}{\sigma_H(z(r))}[\dot{h}_r - b(z(r)) - \frac{\sigma_w(z(r))}{\sigma_w(g(r))}[\dot{g}_r - b(g(r))]]) \\ &\quad \times (\frac{1}{\sigma_H(h_u)}[\dot{h}_u - b(h_u) - \frac{\sigma_w(h_u)}{\sigma_w(g_u)}[\dot{g}_u - b(g_u)]])\phi^{-1}(r,u)dudr.\end{aligned}$$

$J_h(h,g) = \frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(h)}[\dot{h} - b(h)] - \frac{\sigma_w(h)}{\sigma_H(g)\sigma_w(g)}[\dot{g} - b(g)]|^2_{\phi^{-1}}$

Semi-continue inférieurement de J_h : Soit $h_\varepsilon \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$ et $g_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ tels que $h_\varepsilon \to h \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$ et $g_\varepsilon \to g \in L^2(\mathbb{R})$. On a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_h(h_\varepsilon, g_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(h_\varepsilon)}[\dot{h}_\varepsilon - b(h_\varepsilon)] - \frac{\sigma_w(h_\varepsilon)}{\sigma_H(g_\varepsilon)\sigma_w(g_\varepsilon)}[\dot{g}_\varepsilon - b(g_\varepsilon)]|^2_{\phi^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_0^s \Big(\frac{1}{\sigma_H(h_\varepsilon(r))}[\dot{h}_\varepsilon(r) - b(h_\varepsilon(r)) - \frac{\sigma_w(h_\varepsilon(r))}{\sigma_w(g_\varepsilon(r))}[\dot{g}_\varepsilon(r) - b(g_\varepsilon(r))]]\Big) \\
&\quad \times \Big(\frac{1}{\sigma_H(h_\varepsilon(u))}[\dot{h}_\varepsilon(u) - b(h_\varepsilon(u)) - \frac{\sigma_w(h_\varepsilon(u))}{\sigma_w(g_\varepsilon(u))}[\dot{g}_\varepsilon(u) - b(g_\varepsilon(u))]]\Big)\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma_H(h_\varepsilon(r))}[\dot{h}_\varepsilon(r) - b(h_\varepsilon(r)) - \frac{\sigma_w(h_\varepsilon(r))}{\sigma_w(g_\varepsilon(r))}[\dot{g}_\varepsilon(r) - b(g_\varepsilon(r))]]\Big) \\
&\quad \times \Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma_H(h_\varepsilon(u))}[\dot{h}_\varepsilon(u) - b(h_\varepsilon(u)) - \frac{\sigma_w(h_\varepsilon(u))}{\sigma_w(g_\varepsilon(u))}[\dot{g}_\varepsilon(u) - b(g_\varepsilon(u))]]\Big)\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \Big(\frac{1}{\sigma_H(z(r))}[\dot{h}(r) - b(z(r)) - \frac{\sigma_w(z(r))}{\sigma_w(g(r))}[\dot{g}(r) - b(g(r))]]\Big) \\
&\quad \times \Big(\frac{1}{\sigma_H(h(u))}[\dot{h}(u) - b(h(u)) - \frac{\sigma_w(h(u))}{\sigma_w(g(u))}[\dot{g}(u) - b(g(u))]]\Big)\phi^{-1}(r,u)dudr \\
&= \frac{1}{2}\Big|\frac{1}{\sigma_H(h)}[\dot{h} - b(h)] - \frac{\sigma_w(h)}{\sigma_H(g)\sigma_w(g)}[\dot{g} - b(g)]\Big|^2_{\phi^{-1}} = J_h(h,g)
\end{aligned}
$$

$J_h(h,g) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} J_h(h_\varepsilon, g_\varepsilon)$.

J_h est donc semi-continue inférieurement.

Compacité : Il est évident que $0 \leq J_h(h,g) < +\infty$ pour tous $h \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ donc il existe $a \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $J_h(h,g) \leq a$ et donc on en déduit que l'ensemble $\{h \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R})\ et\ a \in \mathbb{R}^*_+ /\ J_h(h,g) \leq a\}$ de niveau est un compact de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$.

La semi-continuité inférieurement et la compacité montrent que J_h est une bonne fonction de taux.

□

Théorème 3.3.0.5. *Supposons h et g définies en (3.7). Alors la famille $(X_t^{H,w,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux J_h (3.10).*

Démonstration. Étant donné que J_h est une bonne fonction de taux, il reste à démontrer les bornes supérieure et inférieure. $F_{H,w}$ est continue et le processus εB_t^H de mesure de probabilité $\mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}$ admet le PGD avec la bonne fonction de taux $I_\phi(f) = \frac{1}{2}|f|^2_\phi$, d'après le principe de contraction, pour tout ouvert O et pour tout fermé C de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$, on a :

$$
\begin{aligned}
-J_h(h,g) &= -\inf_{h\in O}\{\inf I_\phi(f) = \frac{1}{2}|f|^2_\phi, f \in L^2_\phi(\mathbb{R}), F_{H,w}(f,\varphi) = h\} \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H \in F^{-1}_{H,w}(O)] = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F^{-1}_{H,w}(X_t^{H,w,\varepsilon}) \in F^{-1}_{H,w}(O)] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon}[F^{-1}_{H,w}(X_t^{H,w,\varepsilon} \in O)] = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F^{-1}_{H,w}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in O] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in O] \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in C] \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_\phi^{H,\varepsilon} \circ F^{-1}_{H,w}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in C]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_{\phi}^{H,\varepsilon}[F_{H,w}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon} \in C)] \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_{\phi}^{H,\varepsilon}[F_{H,w}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon}) \in F_{H,w}^{-1}(C)] \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}_{\phi}^{H,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H \in F_{H,w}^{-1}(C)] \\
&\leq -\inf_{h\in C}\{\inf I_\phi(f) = \frac{1}{2}|f|_\phi^2, f \in L_\phi^2(\mathbb{R}), F_{H,w}(f,\varphi) = h\} \\
&= -J_h(h,g).
\end{aligned}
$$

□

Théorème 3.3.0.6. *Supposons z et g définies en (3.7), alors sous (H_w) la famille $(X_t^{H,w,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne de taux*
$J_{H,w} : \mathbb{L}_{\phi^{-1}}^2(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ donnée par

$$
J_{H,w}(z,g) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|_{\phi^{-1}}^2 + \frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g} - b(g)]|^2 \ si\ (z,g) \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}) \\ +\infty \ sinon. \end{cases} \tag{3.11}
$$

Autrement dit :

* *$J_{H,w}$ est une bonne fonction ;*
* *pour tout fermé $C \subset \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$,*

$$
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in C] \leq -J_{H,w}(z,g);
$$

* *pour tout ouvert $O \subset \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$,*

$$
\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in O] \geq -J_{H,w}(z,g).
$$

Démonstration. $J_{H,w}$ est la somme de deux bonnes fonctions de taux
$J_H = \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|_{\phi^{-1}}^2$ et $J_w = \frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g} - b(g)]|^2$, donc $J_{H,w}$ est une bonne fonction de taux.
Démontrons la borne supérieure et la borne inférieure par le principe de contraction.
Puisque le processus $\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t$ de loi de probabilité $\mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}$ a le PGD de fonction de taux $I_{\phi,w}$ et $F_{H,w}$ est continue, on a :

borne supérieure Soit C un fermé de $\mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in C] &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon} \circ F_{H,w}^{-1}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in C] \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon} \in C)]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon}) \in F_{H,w}^{-1}(C)] \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[\varepsilon(B_t^H + W_t) \in F_{H,w}^{-1}(C)] \\
&\leq - \inf_{(f,\varphi)\in F_{H,w}^{-1}(C)} I_{\phi,w}(f,\varphi) \\
&= - \inf_{(z,g)\in C} \{\inf I_{\phi,w}(f,\varphi), (f,\varphi) \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}), F_H(f) = z, F_w(\varphi) = g\} \\
&= -J_{H,w}(z,g).
\end{aligned}$$

Donc $\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in C] \leq -J_{H,w}(z,g)$.

borne inférieure Soit O un ouvert de $\mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in O] &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon} \circ F_{H,w}^{-1}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in O] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon} \in O)] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon}) \in F_{H,w}^{-1}(O)] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H + W_t) \in F_{H,w}^{-1}(O)] \\
&\geq - \inf_{(f,\varphi)\in F_{H,w}^{-1}(O)} I_{\phi,w}(f,\varphi) \\
&= - \inf_{(z,g)\in O} \{\inf I_{\phi,w}(f,\varphi), (f,\varphi) \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}), F_H(f) = z, F_w(\varphi) = g\} \\
&= -J_{H,w}(z,g).
\end{aligned}$$

Donc $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^{H,w,\varepsilon}[X_t^{H,w,\varepsilon} \in O] \geq -J_{H,w}(z,g)$.

Montrons que $J_{H,w}(z,g) = \frac{1}{2}[|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|_{\phi^{-1}}^2 + |\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g} - b(g)]|^2]$

On sait que $J_{H,w}(z,g) = \inf_{z\in O}\{\inf I_{\phi,w}(f,\varphi), (f,\varphi) \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}), F_{H,w}(f,\varphi) = h\}$

or $I_{\phi,w}(f,\varphi) = \frac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2]$,

$z(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r)) f_r \phi(r,s) dr$ et $g(t) = x_0 + \int_0^t b(g(r))dr + \int_0^t \sigma_w(g(r))\varphi_r dr$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \dot{z} = b(z(t)) + \sigma_H(z(t)) f_t \phi(t,s) \ et\ \dot{g} = b(g(t)) + \sigma_H(g(t))\varphi_t \\
&\Rightarrow f_t = \sigma_H^{-1}(z(t))[\dot{z} - b(z(t))]\phi^{-1}(t,s) \ et\ \varphi_t = \sigma_w^{-1}(g(t))[\dot{g} - b(g(t))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J_{H,w}(z,g) &= \frac{1}{2}[|\sigma_H^{-1}(z(t))[\dot{z} - b(z(t))]\phi^{-1}(t,s)|_\phi^2 + |\sigma_w^{-1}(g(t))[\dot{g} - b(g(t))]|^2] \\
&= \frac{1}{2}[\int_0^t \int_0^s \sigma_H^{-1}(z(r))[\dot{z} - b(z(r))]\phi^{-1}(r,u)\sigma_H^{-1}(z_u)[\dot{z} - b(z_u)]\phi^{-1}(r,u)\phi(u,r) du dr \\
&\quad + \int_0^t (\sigma_w^{-1}(g(r))[\dot{g} - b(g(r))])^2 dr] \\
&= \frac{1}{2}[\int_0^t \int_0^s \sigma_H^{-1}(z(r))[\dot{z} - b(z(r))]\sigma_H^{-1}(z(u))[\dot{z} - b(z(u))]\phi^{-1}(r,u) du dr
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t (\sigma_w^{-1}(g(r))[\dot{g} - b(g(r))])^2 dr]$$
$$= \frac{1}{2}[|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|^2_{\phi^{-1}} + |\sigma_w^{-1}(g(t))[\dot{g} - b(g(t))]|^2].$$

□

3.4 PGD pour une solution d'EDSM réfléchie

Ici, nous prouvons le principe de grandes déviations pour la solution $(Y_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^{\varepsilon})$ de l'équation différentielle mixte et réfléchie $Y_t^{H,w,\varepsilon}$(3.3). Pour $\Lambda \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$, on définit un opérateur
$\Gamma : \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$ par

$$\Gamma\Lambda_t = \Lambda_t - \inf_{0\leq s\leq t}(\Lambda(s) \wedge 0) \qquad pour\ t \in [0;T]. \tag{3.12}$$

vérifiant l'inégalité :
$\sup_{0\leq r\leq t} |\Gamma\Lambda_1(r) - \Gamma\Lambda_2(r)| \leq 2 \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda_1(r) - \Lambda_2(r)|$ (ref ([6]; [18])).
Par le principe de réflection ([6]; [18]), la solution (3.3) est donnée par

$$\begin{cases} Y_t^{H,w,\varepsilon} = \Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} \\ L_t^{\varepsilon} = \Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} - Z_t^{H,w,\varepsilon} \end{cases} \tag{3.13}$$

où $Z^{H,w,\varepsilon}$est une solution de l'équation différentielle stochastique :

$$Z_t^{H,w,\varepsilon} = x_0 + \int_0^t b(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon})dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H + \int_0^t \sigma_w(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon})dW_r,\ s,t \in [0;T] \tag{3.14}$$

et nous notons la loi de probabilité de $Y_t^{H,w,\varepsilon}$ par $\nu^{H,w,\varepsilon} = \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon} \circ F_{H,w,l}^{-1}$ où $F_{H,w,l}$ est une fonction déterministe associée à f et φ par les solutions continues des équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} F_{H,w,l}(f,\varphi)(t) = h_l(t) = h(t) + l(h(t)) \\ F_{H,w,l}(f,0)(t) = F_{H,l}(f)(t) = z_l(t) = z(t) + l(z(t)) \\ F_{H,w,l}(0,\varphi)(t) = F_{w,l}(\varphi)(t) = g_l(t) = g(t) + l(g(t)) \end{cases} \tag{3.15}$$

avec h, z, g et m sont les solutions définies en (3.7) et $l(h(t)) = \int_0^t \chi_{\{h(r)=0\}} dl_r$ est une fonction continue non décroissante.
Similaire à (3.13), nous pouvons écrire $F_{H,w,l}$ comme

$$\begin{cases} F_{H,w,l}(f,\varphi)(t) = \Gamma\Lambda_t(f,\varphi) \\ \\ l(f,\varphi)(t) = \Gamma\Lambda_t(f,\varphi) - \Lambda_t(f,\varphi). \end{cases} \tag{3.16}$$

où Λ est une solution continue du système d'équations différentielles déterministes suivant :

$$\begin{cases} \Lambda_t(f,\varphi) = x_0 + \int_0^t b(\Gamma\Lambda_r(f,\varphi))dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f,\varphi))f_r\phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f,\varphi))\varphi_r dr \\ \Lambda_t(0,\varphi) = x_0 + \int_0^t b(\Gamma\Lambda_r(0,\varphi))dr + \int_0^t \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(0,\varphi))\varphi_r dr \\ \Lambda_t(0,0) = x_0 + \int_0^t b(\Gamma\Lambda_r(0,0))dr \end{cases} \tag{3.17}$$

pour lequel $f \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ et $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ sont induites respectivement par les PGD du mouvement Brownien fractionnaire B_t^H et du mouvement Brownien standard W_t.

Proposition 3.4.0.1. *Supposons que $\Lambda_t(0;0)$ défini en (3.17), alors pour $R > 0$ et $\delta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0;0)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R. \tag{3.18}$$

Démonstration. Pour $R > 0$ et $\delta > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0;0)| &\leq \int_0^t |b(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon}) - b(\Gamma\Lambda_r(0;0))|dr \\ &+ |\varepsilon \int_0^t \sigma_H(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon})dW_r| \\ &\leq L\int_0^t |\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_r(0;0)|dr + \varepsilon M|B_t^H + W_t|. \\ \sup_{0\leq r\leq t} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0;0)| &\leq L\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_r(0;0)|dr + \varepsilon M \sup_{0\leq r\leq t} |B_t^H + W_t| \\ &\leq 2L\int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |Z_r^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_r(0;0)|dr + \varepsilon M \sup_{0\leq r\leq t} |B_t^H + W_t| \\ \|Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0;0)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} &\leq \varepsilon M \sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t| e^{2LT} \\ \nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0;0)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta\} &\leq \nu^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t| > \frac{\delta e^{-2LT}}{\varepsilon M}\} \\ &\leq 4\exp\{-\frac{\delta^2 e^{-4LT}}{2\varepsilon^2 M^2(t^{2H}+t)T^2}\}. \\ \nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0;0)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} &> \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \\ &\leq \nu^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t| > \frac{\delta e^{-2LT}}{\varepsilon M}, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \\ &\leq 4\exp\{-\frac{\delta^2 e^{-4LT}}{2\varepsilon^2 M^2(t^{2H}+t)T^2}\}. \end{aligned}$$

Posons $R = \dfrac{\delta^2 e^{-4LT}}{M^2(t^{2H}+t)T^2}$, *alors*

$$\nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0;0)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \leq 4\exp\{-\frac{R}{\varepsilon^2}\}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0;0)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R.$$

□

Théorème 3.4.0.2. *Supposons $F_{w,l}$ définie en (3.15) et $\Psi_t = \int_0^t \varphi_r dr$ pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour $R' > 0$, $\delta > 0$ et sous (H_w), il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Y_t^{H,w,\varepsilon} - F_{w,l}(t)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} + \|L_t^\varepsilon - l_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R'. \tag{3.19}$$

Démonstration. Pour $R' > 0$, $\delta > 0$ et $\Psi_t = \int_0^t \varphi_r dr$ alors par (3.13) et (3.17) nous avons :

$$\begin{aligned}
|Y_t^{H,w,\varepsilon} - F_{w,l}(\varphi)(t)| + |L_t^\varepsilon - l_t| &= |\Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0,\varphi)| \\
&\quad + |\Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} - Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0,\varphi) + \Lambda_t(0,\varphi)| \\
&\le |\Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0,\varphi)| + |\Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0,\varphi)| + |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0,\varphi)|. \\
\sup_{0\le t\le T} |Y_t^{H,w,\varepsilon} - F_{H,w,l}(0,\varphi)(t)| + \sup_{0\le t\le T} |L_t^\varepsilon - l_t| & \\
&\le \sup_{0\le t\le T} |\Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0,\varphi)| + \sup_{0\le t\le T} |\Gamma Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_t(0,\varphi)| \\
&\quad + \sup_{0\le t\le T} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0,\varphi)| \\
&\le 2\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0,\varphi)| + 2\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0,\varphi)| + \sup_{0\le t\le T} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0,\varphi)| \\
&\le 5\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0,\varphi)|.
\end{aligned}$$

Donc la preuve de ce théorème est réduite à montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0;\varphi)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta', \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R'.$$

avec $\delta = 5\delta'$. Alors

$$\begin{aligned}
|Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0;\varphi)| &\le \int_0^t |b(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon}) - b(\Gamma\Lambda_r(0;\varphi))|dr + |\varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^{H,w,\varepsilon})dB_r^H \\
&\quad + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon})dW_r - \int_0^t \sigma_w(\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon})\varphi_r dr| \\
&\le L\int_0^t |\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_r(0;\varphi)|dr + \varepsilon M|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t|. \\
\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0;\varphi)| &\le L\int_0^t \sup_{0\le r\le t} |\Gamma Z_r^{H,w,\varepsilon} - \Gamma\Lambda_r(0;\varphi)|dr + \varepsilon M \sup_{0\le t\le T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| \\
&\le 2L\int_0^t \sup_{0\le r\le t} |Z_r^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_r(0;\varphi)|dr + \varepsilon M \sup_{0\le t\le T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t|.
\end{aligned}$$

$$\|Z_t^{H,w\varepsilon} - \Lambda_t(0;\varphi)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} \le \varepsilon M \sup_{0\le t\le T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| e^{2LT}.$$

$$
\begin{aligned}
\nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w,\varepsilon} - \Lambda_t(0;\varphi)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta'\} &\leq \nu^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| > \frac{\delta' e^{-2LT}}{\varepsilon M}\} \\
&\leq \exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\} \times \tilde{\nu}^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| > \frac{\delta' e^{-LT}}{\varepsilon M}\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w\varepsilon} - \Lambda_t(0;\varphi)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta', \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&\leq \exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\} \\
&\quad \times \tilde{\nu}^{H,w,\varepsilon}\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t| > \frac{\delta' e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&= \exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\} \times \tilde{\nu}^{H,w,\varepsilon}\{\|\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \frac{\delta' e^{-2LT}}{\varepsilon M}, \|\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&\leq 4\exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi)}{\varepsilon^2}\} \times \exp\{-\frac{R}{\varepsilon^2}\} \\
&= 4\exp\{-\frac{I_{\phi,w}(f,\varphi) + R}{\varepsilon^2}\} = 4\exp\{-\frac{R'}{\varepsilon^2}\}
\end{aligned}
$$

$$
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}\{\|Z_t^{H,w\varepsilon} - \Lambda_t(0;\varphi)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} > \delta', \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t\|_{\mathbb{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R'.
$$

□

Proposition 3.4.0.3. *Supposons z, l et g définies en (3.15), alors sous (H_w) la fonction $J_{H,w,l} : \mathbb{L}^2_{\phi^{-1}}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ donnée par :*

$$
J_{H,w,l}(z,l,g) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z}_l - b(z) - \chi_{\{z=0\}}(z)\dot{l}]|^2_{\phi^{-1}} + \frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g}_l - b(g) - \chi_{\{g=0\}}(g)\dot{l}]|^2 \\ \qquad\qquad \text{si } (z,l) \in L^2_\phi(\mathbb{R}) \text{ et } (g,l) \in L^2(\mathbb{R}) \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \tag{3.20}
$$

est une bonne fonction de taux.

Démonstration. **Semi-continue inférieurement de** $J_{H,w,l}$:

Soient $(z_\varepsilon, l_\varepsilon) \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ et $(g_\varepsilon, l_\varepsilon) \in L^2(\mathbb{R})$ telles qu'elles convergent respectivement vers $(z,l) \in L^2_\phi(\mathbb{R})$ et $(g,l) \in L^2(\mathbb{R})$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} J_{H,w,l}(h_\varepsilon, g_\varepsilon, l_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon)[\dot{z}_l^\varepsilon - b(z_\varepsilon) - \chi_{\{z_\varepsilon=0\}}(z_\varepsilon)\dot{l}_\varepsilon]|^2_{\phi^{-1}} \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g_\varepsilon)[\dot{g}_l^\varepsilon - b(g_\varepsilon) - \chi_{\{g_\varepsilon=0\}}(g_\varepsilon)\dot{l}_\varepsilon]|^2 \\
&\geq \frac{1}{2}|\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_H^{-1}(z_\varepsilon)[\dot{z}_l^\varepsilon - b(z_\varepsilon) - \chi_{\{z_\varepsilon=0\}}(z_\varepsilon)\dot{l}_\varepsilon]|^2_{\phi^{-1}} \\
&\quad + \frac{1}{2}|\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_w^{-1}(g_\varepsilon)[\dot{g}_l^\varepsilon - b(g_\varepsilon) - \chi_{\{g_\varepsilon=0\}}(g_\varepsilon)\dot{l}_\varepsilon]|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z}_l - b(z) - \chi_{\{z=0\}}(z)\dot{l}]|^2_{\phi^{-1}} + \frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g}_l - b(g) - \chi_{\{g=0\}}(g)\dot{l}]|^2 \\
&= J_{H,w,l}(z,l,g).
\end{aligned}
$$

$$J_{H,w,l}(z,l,g) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} J_{H,w,l}(z_\varepsilon, l_\varepsilon, g_\varepsilon).$$

Donc $J_{H,w,l}$ est semi-continue inférieurement.

Compacité de $\{\ (z,l) \in L^2_\phi(\mathbb{R}),\ (g,l) \in L^2(\mathbb{R})\ et\ a \in \mathbb{R}^*_+ / J_{H,w,l}(z,l,g) \leq a\}$.

$J_{H,l,w}(z,l,g) < +\infty$ pour tout $(z,l) \in L^2_\phi(\mathbb{R})$, et $(g,l) \in L^2(\mathbb{R})$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $J_{H,l,w}(z,l,g) \leq a$, on en déduit que $\{\ (z,l) \in L^2_\phi(\mathbb{R}),\ (g,l) \in L^2(\mathbb{R})\ et\ a \in \mathbb{R}^*_+ / J_{H,w,l}(z,l,g) \leq a\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$.

□

Proposition 3.4.0.4. *Les fonctions $F_{H,l,w}$ et l définies en (3.15) sont des fonctions continues sur le compact $\{\ (z,l) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R}),\ (g,l) \in L^2(\mathbb{R})\ et\ a \in \mathbb{R}^*_+ / J_{H,w,l}(z,l,g) \leq a\}$ de $\mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$.*

Démonstration. — Posons $F_{H,l,w}(f_1,\varphi_1) = \Gamma\Lambda(f_1,\varphi_1)$ et $F_{H,l,w}(f_2,\varphi_2) = \Gamma\Lambda(f_2,\varphi_2)$ pour tout $(f,\varphi) \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T} |F_{H,w}(f_1,\varphi_1)(t) - F_{H,w}(f_2,\varphi_2)(t)| &= \sup_{0\leq t\leq T} |\Gamma\Lambda_t(f_1,\varphi_1) - \Gamma\Lambda_t(f_2,\varphi_2)| \\ &\leq 2 \sup_{0\leq t\leq T} |\Lambda_t(f_1,\varphi_1) - \Lambda_t(f_2,\varphi_2)|\end{aligned}$$

avec

$$\Lambda_t(f,\varphi) = x_0 + \int_0^t b(\Gamma\Lambda_r(f,\varphi))dr + \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f,\varphi))f_r\phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f,\varphi))\varphi_r dr.$$

$$\begin{aligned}\Lambda_t(f_1,\varphi_1) - \Lambda_t(f_2,\varphi_2) &= \int_0^t [b(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1)) - b(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))]dr \\ &+ \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1))f_1(r)\phi(r,s)d - \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))f_2(r)\phi(r,s)dr \\ &+ \int_0^t \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1))\varphi_r dr - \int_0^t \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))\varphi_r dr \\ &= \int_0^t [b(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1)) - b(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))]dr + \int_0^t [\sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1)) - \sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))]f_1(r)\phi(r,s)dr \\ &+ \int_0^t \sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))\phi(r,s)[f_1(r) - f_2(r)]dr \\ &+ \int_0^t [\sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1)) - \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))]\varphi_1(r)dr + \int_0^t \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))[\varphi_1(r) - \varphi_2(r)]dr.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\Lambda_t(f_1,\varphi_1) - \Lambda_t(f_2,\varphi_2)| &\leq \int_0^t |b(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1)) - b(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))|dr \\ &+ \int_0^t |\sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1)) - \sigma_H(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))||f_1(r)\phi(r,s)|dr \\ &+ \int_0^t |\sigma(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))\phi(r,s)||f_1(r) - f_2(r)|dr \\ &+ \int_0^t [\sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_1,\varphi_1)) - \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))]\varphi_1(r)dr + \int_0^t \sigma_w(\Gamma\Lambda_r(f_2,\varphi_2))[\varphi_1(r) - \varphi_2(r)]dr\end{aligned}$$

$$\leq L \int_0^t |\Gamma\Lambda_r(f_1, \varphi_1) - \Gamma\Lambda_r(f_2, \varphi_2)|dr + Lc \int_0^t |\Gamma\Lambda_r(f_1, \varphi_1) - \Gamma\Lambda_r(f_1, \varphi_1)|dr$$
$$+ N \int_0^t |f_1(r) - f_2(r)|dr + Lc \int_0^t |\Gamma\Lambda_r(f_1, \varphi_1) - \Gamma\Lambda_r(f_2, \varphi_2)|dr + N \int_0^t |\varphi_1(r) - \varphi_2(r)|dr$$
$$\leq L(1+2c) \int_0^t |\Gamma\Lambda_r(f_1, \varphi_1) - \Gamma\Lambda_r(f_2, \varphi_2)|dr + 2N\delta T.$$
$$\sup_{0\leq t\leq T} |\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_2, \varphi_2)| \leq L(1+2c) \int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Gamma\Lambda_r(f_1, \varphi_1) - \Gamma\Lambda_r(f_2, \varphi_2)|dr + 2N\delta T$$
$$\leq 2L(1+2c) \int_0^t \sup_{0\leq r\leq t} |\Lambda_r(f_1, \varphi_1) - \Lambda_r(f_2, \varphi_2)|dr + 2N\delta T.$$
$$\|\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_2, \varphi_2)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} \leq 2N\delta T e^{2L(1+2c)T}$$
$$\|F_{H,l,w}(f_1, \varphi_1) - F_{H,l,w}(f_2, \varphi_2)\|_{\mathbb{L}^2_\phi} \leq 2N\delta T e^{2L(1+2c)T}.$$

D'où $F_{H,l,w}$ est continue.

— D'après (3.16) $l_t(f, \varphi) = \Gamma\Lambda_t(f, \varphi) - \Lambda_t(f, \varphi)$, donc

$$\begin{aligned}
l_t(f_1, \varphi_1) - l_t(f_2, \varphi_2) &= \Gamma\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_1, \varphi_2) - \Gamma\Lambda_t(f_2, \varphi_2) + \Lambda_t(f_2, \varphi_2) \\
|l_t(f_1, \varphi_1) - l_t(f_2, \varphi_2)| &\leq |\Gamma\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Gamma\Lambda_t(f_2, \varphi_2)| + |\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_2, \varphi_2)| \\
\sup_{0\leq t\leq T} |l_t(f_1, \varphi_1) - l_t(f_2, \varphi_2)| &\leq \sup_{0\leq t\leq T} |\Gamma\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Gamma\Lambda_t(f_2, \varphi_2)| + \sup_{0\leq t\leq T} |\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_2, \varphi_2)| \\
&\leq 2 \sup_{0\leq t\leq T} |\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_2, \varphi_2)| + \sup_{0\leq t\leq T} |\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_2, \varphi_2)| \\
&\leq 3 \sup_{0\leq t\leq T} |\Lambda_t(f_1, \varphi_1) - \Lambda_t(f_2, \varphi_2)| \\
&\leq 3\delta
\end{aligned}$$

parce que $\Lambda \in \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$. D'où l est continue.

□

Théorème 3.4.0.5. *Sous* (H_w), *la famille* $(Y_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon)_{(\varepsilon>0)}$ *de probabilité* $\nu^{H,w,\varepsilon}$ *satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux* $J_{H,w,l}$ *définie en (3.20).*
Autrement dit :

∗ *pour tout fermé* $C \subset \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}[(Y_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in C] \leq -J_{H,l,w}(z, l, g)$$

∗ *pour tout ouvert* $O \subset \mathbb{L}^2_\phi(\mathbb{R})$,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}[(Y_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] \geq -J_{H,l,w}(z, l, g)$$

Démonstration. $J_{H,w,l}$ est une bonne fonction de taux, donc démontrons la borne supérieure et la borne inférieure.

Puisque $F_{H,w,l}$ est continue et le processus $\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t$ de loi de probabilité $\mathbb{P}_\phi^{H,w,\varepsilon}$ admet le PGD avec la bonne fonction de taux $I_{\phi,w}(f,\varphi) = \frac{1}{2}|f|_\phi^2 + \frac{1}{2}|\varphi|^2$, d'après le principe de contraction, nous avons pour tout ouvert O et pour tout fermé C de $\mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})$:

$$
\left\{\begin{array}{l}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon} o F_{H,w,l}^{-1}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] \\
z_l(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r)) f_r \phi(r,s)dr + l(h(t)) \\
g_l(t) = x_0 + \int_0^t b(g(r))dr + \int_0^t \sigma_w(g(r))\varphi_r dr + l(g(t))
\end{array}\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w,l}^{-1}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O]] \\
\dot{z}_l(t) = b(z(t)) + \sigma_H(z(t)) f_t \phi(t,s) + \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l} \\
\dot{g}_l(t) = b(g(t)) + \sigma_w(g(t))\varphi_t + \chi_{\{g(t)=0\}}(g(t))\dot{l}
\end{array}\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w,l}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in F_{H,w,l}^{-1}[O]] \\
f_t = \frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}] \\
\varphi_t = \frac{1}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}_l(t) - b(g(t)) - \chi_{\{g(t)=0\}}(g(t))\dot{l}]
\end{array}\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in O] = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in F_{H,w,l}^{-1}[O]] \\
f_t = \frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}] \\
\varphi_t = \frac{1}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}_l(t) - b(g(t)) - \chi_{\{g(t)=0\}}(g(t))\dot{l}]
\end{array}\right.
$$

$$
\geq - \left\{\begin{array}{l}
\inf_{(z_l,g_l)\in\mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R})} \{\inf I_{\phi,w}(f,\varphi) = \frac{1}{2}|f|_\phi^2 + \frac{1}{2}|\varphi|^2, (f,\varphi) \in \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}), F_{H,l}(f) = z_l, F_{w,l}(\varphi) = g_l\} \\
f_t = \frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}] \\
\varphi_t = \frac{1}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}_l(t) - b(g(t)) - \chi_{\{g(t)=0\}}(g(t))\dot{l}]
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_l(t) - b(z(t)) - \chi_{\{z(t)=0\}}(z(t))\dot{l}]|_\phi^2 + \\
&\qquad\qquad \frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}_l(t) - b(g(t)) - \chi_{\{g(t)=0\}}(g(t))\dot{l}]|^2) \\
&= -(\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z}_l - b(z) - \chi_{\{z=0\}}(z)\dot{l}]|_{\phi^{-1}}^2 + \frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g}_l - b(g) - \chi_{\{g=0\}}(g)\dot{l}]|^2) \\
&= -J_{H,w,l}(z,l,g) \\
&\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in F_{H,w,l}^{-1}[C]] = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w,l}^{-1}(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in F_{H,w,l}^{-1}[C]] \\
&= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}[F_{H,w,l}^{-1}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in C]] = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon} o F_{H,w,l}^{-1}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in C] \\
&= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sup \varepsilon^2 \log \nu^{H,w,\varepsilon}[(X_t^{H,w,\varepsilon}, L_t^\varepsilon) \in C].
\end{aligned}
$$

□

3.5 Conclusion

Notre étude de comportement asymptotique d'une solution d'équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement Brownien standard et un mouvement Brownien fractionnaire via le principe des grandes déviations se fait en deux phases : la première consiste à montrer que la somme d'un mouvement Brownien standard et d'un mouvement Brownien fractionnaire suit un principe des grandes déviations.

Grâce à cette première phase et le rôle du principe des contraction nous parvenons à montrer à la seconde phase que les équations considérées dans l'introduction de ce chapitre obéissent à un principe des grandes déviations.

Certains auteurs comme Shevchenko [41], ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire et un processus de Poisson. Du coup nous avons eu l'idée d'établir au chapitre suivant le principe des grandes déviations pour cette solution.

Chapitre 4

Principe des grandes déviations (PGD) pour une solution d'EDS mixte dirigée par un mBf et un processus de Lévy indépendants

Résumé : Nous mettons dans ce chapitre nos derniers résultats qui sont soumis récemment pour publication. Ces résultats sont issus de l'étude comportementale de solutions des équations différentielles stochastiques mixtes dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) avec sauts d'une part et d'autre part celles dirigées simultanément par un mBf et un processus de Lévy. Comme dans le chapitre précédent sur l'espace des distributions tempérées, nous envisageons d'abord le cas où le coefficient de dérive est nul et les coefficients de diffusion deviennent des identités avant de généraliser l'étude de ces équations lorsque le coefficient de dérive est non nul.

4.1 Introduction

Soient $B^H = \{B^H_t, t \in [0,T]\}$ un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in (0,1)$, $W = \{W_t, t \in [0,T]\}$ un mouvement Brownien standard et
$\bar{N} = \{\bar{N}_t, t \in [0,T]\}$ un compensateur du processus de Poisson, trois processus indépendants définis sur l'espace de probabilité du bruit blanc $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R})), \mathbb{P})$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
Considérons dans cet espace les équations différentielles stochastiques mixtes dépendant du temps dirigées par deux au moins de ces trois processus :

$$X^{H,N,\varepsilon}_t = x_0 + \int_0^t b(X^{H,N,\varepsilon}_r)dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X^{H,N,\varepsilon}_r)dB^H_r + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, X^{H,N,\varepsilon}_r)\bar{N}(dx,dr), \quad (4.1)$$

$$X^{\varepsilon}_t = x_0 + \int_0^t b(X^{\varepsilon}_r)dr + \varepsilon \int_0^t \sigma_H(X^{\varepsilon}_r)dB^H_r + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X^{\varepsilon}_r)dW_r + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, X^{\varepsilon}_r)\bar{N}(dx,dr), \quad (4.2)$$

$r, t \in [0;T]$, où

- ⋆ $x_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une variable aléatoire mesurable et $x \in \mathbb{R}^*$;
- ⋆ b, σ_H et σ_w : $[0;T] \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sont des fonctions mesurables telles leurs intégrales respectivement par rapport à dr, dB^H_r et dW_r sont définies comme intégrale du bruit blanc (voir [4] et [42]) ;
- ⋆ K : $[0;T] \times \mathbb{R}^* \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \times \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une fonction mesurable et son intégrale par rapport à $\bar{N}(dx,dr)$ est aussi définie comme l'intégrale du bruit blanc [30].

On suppose que ces quatre fonctions aléatoires satisfont les hypothèses suivantes :
pour $x \in \mathbb{R}^*, z$ et $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, il existe des constantes M et L telles que

- $|b(v)| \leq M, |\sigma(v)| \leq M$ et $|K(x,v)| \leq M$;
- $|b(v) - b(z)| \leq L|v-z|, |\sigma(v) - \sigma(z)| \leq L|v-z|$ et $|K(x,v) - K(x,z)| \leq L|v-z|$.

L'existence et l'unicité de solutions de telles équations ont été prouvées dans [41]. De plus, dans [28], les auteurs considèrent une classe d'équations différentielles fonctionnelles neutres à retard fini pilotées simultanément par un mouvement brownien fractionnaire et un processus ponctuel de Poisson dans l'espace Hilbertien et prouvent un résultat d'existence et d'unicité. Cependant, notre objectif dans ce chapitre est d'étudier et d'estimer le comportement asymptotique des solutions d'équations (4.1) et (4.2) à l'aide du principe des grandes déviations [21]. Par ailleurs, dans la littérature, plusieurs auteurs ont établi le principe des grandes déviations pour les équations dirigées par un processus de Poisson et celles dirigées simultanément par un processus de Poisson et un mouvement Brownien standard. Parmi ces auteurs, on peut citer les travaux de Florens [20] et Leonard [29] pour un processus de Poisson, Buldhiraja [7] et Dadashi [19] pour l'EDS dirigée par ce processus et les travaux de Zhao, H., Xu, S [46], Yand, H and al [45] et Coulibaly, A and al [10] pour les EDS dirigées simultanément par un processus de Poisson et un mouvement Brownien standard. En effet, Zhao, H., Xu, S [46] et X. Yand [45] ont établi un principe des grandes déviations pour l'équation d'évolution stochastique combinée à la fois par un mouvement Brownien standard et un processus de saut de Poisson dans un espace de Hilbert donné en utilisant la méthode de convergence faible. Concernant l'étude par le principe des grandes déviations pour les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) et celles régies simultanément par ce processus et un mouvement Brownien standard, nous avons obtenu les résultats dans nos articles [14] et [15] en utilisant les méthodes de Freidlin-Wentzell [21] et d'Azencotte [1] dans un l'espace de distribution tempérée $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
A notre connaissance, aucun article ne présente l'étude via le principe des grandes déviations pour les équations différentielles stochastiques contrôlées simultanément par le mBf et le processus de Lévy. Nous y investissons et par conséquent c'est ce qui nous a permis d'écrire cette partie. L'approche que nous avons adoptée est différente de celle utilisée par d'autres auteurs. Comme dans notre article [15], nous procédons en supposant l'indépendance du mBf, du mouvement brownien standard et du processus de Poisson.
Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 4.2, nous rappelons quelques définitions et théorèmes surtout du processus de saut de Poisson, la section 4.3 contient nos principaux résultats, ces résultats sont réalisés en deux phases : la première est lorsque la dérive (b) est nulle et que les coefficients de diffusion sont égaux à 1 et la seconde est lorsque la dérive est différente de 0.

4.2 Pléliminaires et définitions

On considère l'espace de probabilité $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R})), \mathbb{P})$ sur lequel on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire et on définit l'espace de fonctions continues de carrés intégrables :

$$L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) := \{\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}), I_{\dot{\nu}}(\psi) = \langle 1 \otimes \dot{\nu}, \lambda(\psi) 1_{[0,t]} \rangle = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \lambda(\psi(x,r)) \nu(dx) dr < +\infty\}$$

avec $t, s \in [0;T]$, où $\lambda(\psi) = \psi e^{\psi} - e^{\psi} + 1$.

Définition 4.2.0.1. *Pour ω et $\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, les processus $\langle \omega, f 1_{[0,t]} \rangle = \int_0^t f(r) dB_r^H$ et $\langle \theta, \varphi 1_{[0,t]} \rangle = \int_0^t \varphi(r) dW_r$ sont des processus Gaussiens de covariances respectivement $\langle f, f \rangle_\phi = |f|_\phi^2$ et $|\varphi|^2$ pour tous $f \in L_\phi^2(\mathbb{R})$ et $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$.*

Théorème 4.2.0.2. *Soit ν une mesure de Lévy . Il existe un élément noté $1 \otimes \dot{\nu}$ [1] dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ tel que*

$$\langle 1 \otimes \dot{\nu}, \psi 1_{[0,t]} \rangle = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \psi(x,r) \nu(dx) dr, \; t \in [0;T]$$

pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$, où dx désigne la mesure de Lebesgue [30].

Définition 4.2.0.3. *Pour tout $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$, l'intégrale stochastique de $\psi \in L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ par rapport à $\bar{N}$ est définie par :*

$$\langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \psi 1_{[0,t]} \rangle := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \psi(x,r) \bar{N}(dx, dr) \tag{4.3}$$

(voir[30]).

Théorème 4.2.0.4. ***(Formule de Girsanov pour** $\bar{N}$ [39]) Soit $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ tel que pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$,*

$$\frac{d\tilde{\nu}}{d\nu} = \exp\{\langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \psi \rangle - \langle 1 \otimes \dot{\nu}, e^{\varphi} - 1 - \psi \rangle\} \tag{4.4}$$

alors le processus défini par $\langle \tilde{\eta} - 1 \otimes \dot{\nu}, \chi_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} \rangle = \langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \chi_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} \rangle - (e^{\psi} - 1) 1 \otimes \dot{\nu}$ est une martingale sous $\tilde{\nu}$.

4.3 PGD pour une solution d'EDS dirigée par un mBf et processus de Lévy indépendants

Considérons les processus $\varepsilon B_t^H + \varepsilon \bar{N}_t$ et $\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t, \; t \in [0;T]$ obtenus respectivement des équations (4.1) et (4.2) lorsque nous supposons que le coefficient de dérive est nul ($b = 0$) et les coefficients de diffusion sont égaux à l'identité. On suppose que
(H_w^N) : **pour tout** $H \in (0,1)$ **les processus** B_t^H**,** W_t **et** $\bar{N}_t$ **sont indépendants**.
On note $\mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}$ et $\mathbb{P}^{\varepsilon}$ les mesures de probabilités respectivement de $\varepsilon B_t^H + \varepsilon \bar{N}_t$ et $\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t$ et

$$\mathcal{L}_\phi^2 = \mathbb{L}_\phi^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) = L_\phi^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \; et \; \mathcal{M}_\phi^2 = L_\phi^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$$

1. $\dot{\nu}$ est appelé dérivée de Randon-Nikodim.

les espaces de fonctions continues de carrés intégrables. On désigne par $||.||_{\mathcal{L}^2_\phi}$ la norme sur $\mathcal{L}^2_\phi$ définie par $||v||_{\mathcal{L}^2_\phi} = \sup\limits_{0\leq r\leq t} |v(r)|$ pour tout $v \in \mathcal{L}^2_\phi$ et on définit pour tout
$\Phi = (f, \psi, \psi) \in \mathcal{L}^2_\phi$,

$$I(\Phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}|f|^2_\phi + \frac{1}{2}|\varphi|^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi) \; pour \; \Phi \in \mathcal{L}^2_\phi \\ +\infty \; sinon. \end{cases} \tag{4.5}$$

Proposition 4.3.0.1. *La fonction $I : \mathcal{L}^2_\phi \to [0, +\infty]$ définie en (4.5) est une bonne fonction de taux c'est-à-dire :*

∗ *I est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{L}^2_\phi$;*

∗ *$\{\Phi \in \mathcal{L}^2_\phi$ and $a \in \mathbb{R}^*_+, I(\Phi) \leq a\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{L}^2_\phi$.*

Démonstration. Montrons que I est semi-continue inférieurement.
Soit $\Phi_\varepsilon = (f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \in \mathcal{L}^2_\phi$ tel que $\Phi_\varepsilon \longrightarrow (f, \varphi, \psi) = \Phi \in \mathcal{L}^2_\phi$. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} I(\Phi_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0} I(f_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{1}{2}|f_\varepsilon|^2_\phi + \frac{1}{2}|\varphi_\varepsilon|^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi_\varepsilon)] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_0^s f_\varepsilon(r)f_\varepsilon(u)\phi(r,u)dudr + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \varphi^2_\varepsilon(r)dr + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^*}\lambda(\psi_\varepsilon(x,r))\nu(dx)dr \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(r)f_\varepsilon(u)\phi(r,u)dudr + \frac{1}{2}\int_0^t \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi^2_\varepsilon(r)dr + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^*}\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(\psi_\varepsilon(x,r))\nu(dx)dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s f(r)f(u)\phi(r,u)dudr + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi^2(r)dr + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^*}\lambda(\psi(x,r))\nu(dx)dr \\
&= \frac{1}{2}|f|^2_\phi + \frac{1}{2}|\varphi|^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi) = I(\Phi)
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I(\Phi_\varepsilon) \geq I(\Phi)$.

Donc I est semi-continue inférieurement.
Terminons la démonstration en montrant que $\{\Phi \in \mathcal{L}^2_\phi$ *et* $a \in \mathbb{R}^*_+, I(\Phi) \leq a\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{L}^2_\phi$.
Pour tout $\Phi \in \mathcal{L}^2_\phi$, $0 \leq I(\Phi) < +\infty$, donc il existe $a \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $I(\Phi) \leq a$, on en déduit que l'ensemble $\{\Phi \in \mathcal{L}^2_\phi$ *et* $a \in \mathbb{R}^*_+, I(\Phi) \leq a\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{L}^2_\phi$.
I est une bonne fonction de taux.

□

Théorème 4.3.0.2. *Sous (H^N_w), la famille $(\varepsilon B^H_t + \varepsilon \bar{N}_t)_{(\varepsilon>0)}$ satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux $I_{\phi,\dot{\nu}} : \mathcal{M}^2_\phi \to [0, +\infty]$ définie par*

$$I_{\phi,\dot{\nu}}(f, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{2}|f|^2_\phi + I_{\dot{\nu}}(\psi) & pour \; (f, \psi) \in \mathcal{M}^2_\phi \\ +\infty \; sinon. \end{cases} \tag{4.6}$$

Théorème 4.3.0.3. *Sous (H_w^N), la famille $(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t)_{(\varepsilon>0)}$ satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux I définie en (4.5), c'est-à-dire :*

$*$ *pour tout fermé $C \subset \mathcal{L}_\phi^2$,*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t \in C) \leq -[\frac{1}{2}|f|_\phi^2 + \frac{1}{2}|\varphi|^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi)];$$

$*$ *pour tout ouvert $O \subset \mathcal{L}_\phi^2$,*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t \in O) \geq -[\frac{1}{2}|f|_\phi^2 + \frac{1}{2}|\varphi|^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi)].$$

Démonstration. Soit $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ une trajectoire du processus $\bar{N}_t$,
$\langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon 1_{[0,t]} \rangle = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \psi_\varepsilon(x,r) \bar{N}(dx,dr)$ l'action entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ et de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ pour $\psi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}$ la mesure de probabilité de la famille $(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t)_{(\varepsilon>0)}$.

Borne inférieure Soit O un ouvert de $\mathcal{L}_\phi^2$, puisque les familles $(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t)_{(\varepsilon>0)}$ et $(\bar{N}_t)_{(\varepsilon>0)}$ sont indépendantes, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t \in O) &= \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in O) \times \nu^\varepsilon(\varepsilon \bar{N}_t \in O) \\
\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t \in O) &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in O) \\
&\quad + \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^\varepsilon(\varepsilon \bar{N}_t \in O)
\end{aligned}$$

avec $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in O) \geq -\frac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2]$ et d'après la formule de Girsanov de $\bar{N}_t$

$$\begin{cases} d\nu^\varepsilon = \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1 \otimes \dot{\nu}, e^{\psi_\varepsilon} - 1 - \psi_\varepsilon \rangle\} d\tilde{\nu}^\varepsilon \\ \langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \chi_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}} \rangle = \langle \tilde{\eta} - 1 \otimes \dot{\nu}, \chi_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}} \rangle + \frac{1}{\varepsilon}(e^{\psi_\varepsilon} - 1) 1 \otimes \dot{\nu} \end{cases},$$

on a :

$$\begin{aligned}
d\nu^\varepsilon(\varepsilon \bar{N}_t \in O) &= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1 \otimes \dot{\nu}, e^{\psi_\varepsilon} - 1 - \psi_\varepsilon \rangle\} d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon \bar{N}_t \in O) \\
&= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu} - \frac{1}{\varepsilon}(e^{\psi_\varepsilon} - 1) 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle (e^{\psi_\varepsilon} - 1) 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1 \otimes \dot{\nu}, e^{\psi_\varepsilon} - 1 - \psi_\varepsilon \rangle\} d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon \bar{N}_t \in O) \\
&= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \eta - 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle e^{\psi_\varepsilon} 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle (e^{\psi_\varepsilon} - 1) 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1 \otimes \dot{\nu}, e^{\psi_\varepsilon} - 1 \rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1 \otimes \dot{\nu}, \psi_\varepsilon \rangle\} \times d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon \bar{N}_t \in O)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \eta - 1\otimes\dot{\nu} - \frac{1}{\varepsilon}(e^{\psi_\varepsilon}-1)1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle e^{\psi_\varepsilon}1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1\otimes\dot{\nu}, e^{\psi_\varepsilon}-1\rangle\} d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) \\
&= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\eta} - 1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1\otimes\dot{\nu}, e^{\psi}\psi_\varepsilon - e^{\psi_\varepsilon}+1\rangle\} d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) \\
&= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1\otimes\dot{\nu}, \lambda(\psi_\varepsilon)\rangle\} \times \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\eta} - 1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle\} \times d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O). (\S)
\end{aligned}
$$

$$
\nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) = \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}I_{\dot{\nu}}(\psi_\varepsilon)\} \times \tilde{\mathbb{E}}[\chi_{\{\varepsilon\bar{N}_t\in O\}} \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\eta} - 1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle\}]. \tag{4.7}
$$

En appliquant l'inégalité de Jensen et le lemme du théorème de Bochner-Minlos à (4.7) , on a :

$$
\begin{aligned}
\nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) &\geq \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}I_{\dot{\nu}}(\psi_\varepsilon)\} \times \tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) \times \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\tilde{\mathbb{E}}[\langle \tilde{\eta} - 1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle]}{\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O)}\} \\
&= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}I_{\dot{\nu}}(\psi_\varepsilon)\} \times \tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) \times 1. \\
&\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) \geq -I_{\dot{\nu}}(\psi) + \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) \\
&\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in O) \geq -I_{\dot{\nu}}(\psi).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon\bar{N}_t \in O) \geq -(\frac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2] + I_{\dot{\nu}}(\psi)).
$$

Borne supérieure : Soit C un fermé de $\mathcal{L}_\phi^2$.
Puisque les familles $(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t)_{(\varepsilon>0)}$ et $(\bar{N}_t)_{(\varepsilon>0)}$ sont indépendantes, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon\bar{N}_t \in C) &= \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in C) \times \nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in C) \\
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon\bar{N}_t \in C) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in C) \\
&\quad + \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in C).
\end{aligned}
$$

Avec $\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,w,\varepsilon}(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t \in C) \leq -\frac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2]$ et d'après (§)

$$
\begin{aligned}
d\nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in C) &= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\eta} - 1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle - \frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1\otimes\dot{\nu}, e^{\psi_\varepsilon}\psi_\varepsilon - e^{\psi_\varepsilon} - 1\rangle\} d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\tilde{\bar{N}}_t \in C) \\
&= \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}\langle 1\otimes\dot{\nu}, \lambda(\psi_\varepsilon)\rangle\} \times \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\langle \tilde{\eta} - 1\otimes\dot{\nu}, \psi_\varepsilon\rangle\} d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\tilde{\bar{N}}_t \in C) \\
&\leq \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}I_{\dot{\nu}}(\psi_\varepsilon)\} d\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\tilde{\bar{N}}_t \in C) \\
\nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N} \in C) &\leq \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}I_{\dot{\nu}}(\psi_\varepsilon)\}\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\tilde{\bar{N}}_t \in C) \\
\nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in C) &\leq \exp\{-\frac{1}{\varepsilon^2}I_{\dot{\nu}}(\psi_\varepsilon)\}\tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\tilde{\bar{N}}_t \in C)
\end{aligned}
$$

$$
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in C) \leq -I_{\dot{\nu}}(\psi) + \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\tilde{\bar{N}}_t \in C)
$$

$$
\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^\varepsilon(\varepsilon\bar{N}_t \in C) \leq -I_{\dot{\nu}}(\psi)
$$

$$car \lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \tilde{\nu}^\varepsilon(\varepsilon\tilde{\bar{N}}_t \in C) = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t \in c) \leq -(\frac{1}{2}[|f|_\phi^2 + |\varphi|^2] + I_{\bar{\nu}}(\psi))$$

□

Sous l'hypothèse (H_w^N) de l'indépendance de ces trois processus, considérons maintenant les équations (4.1) et (4.2) en supposant que la dérive est non nulle. On note respectivement les mesures de probabilités des solutions $X_t^{H,N,\varepsilon}$ de (4.1) et X_t^ε de (4.2) par $\mu^{H,N,\varepsilon} = \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon} \circ F_{H,N}^{-1}$ et $\mu^\varepsilon = \mathbb{P}^\varepsilon \circ F^{-1}$ où :

- ⋆ $\mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}$ et $\mathbb{P}^\varepsilon$ sont les mesures de probabilités des processus respectivement $\varepsilon B_t^H + \varepsilon \bar{N}_t$ et $\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t$,
- ⋆ F est la fonction déterministe solution du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} F_t(f,\varphi,\psi) = v(t) = x_0 + \int_0^t b(v(r))dr + \int_0^t \sigma_H(v(r))f_r\phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_w(v(r))\varphi(r)dr \\ \qquad\qquad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x,v(r))(e^{\psi(x,r)}-1)\nu(dx)dr \\ F_t(f,0,\psi) = F_{H,N}(f_t,\psi_t) = u(t) = x_0 + \int_0^t b(u(r))dr + \int_0^t \sigma_H(u(r))f_r\phi(r,s)dr \\ \qquad\qquad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x,u(r))(e^{\psi(x,r)}-1)\nu(dx)dr \\ F_t(f,0,0) = F_H(f_t) = z(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r))f_r\phi(r,s)dr \\ F_t(0,\varphi,0) = F_w(\varphi_t) = g(t) = x_0 + \int_0^t b(g(r))dr + \int_0^t \sigma_w(g(r))\varphi(r)dr \\ F_t(0,0,\psi) = F_N(\psi_t) = p(t) = x_0 + \int_0^t b(p(r))dr + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x,p(r))(e^{\psi(x,r)}-1)\nu(dx)dr \\ F_t(0,0,0) = x_0 + \int_0^t b(F_r(0,0,0))dr \end{cases} \tag{4.8}$$

pour lequel $(f,\varphi,\psi) \in \mathcal{L}_\phi^2$ est engendré par le PGD de $\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t$.

Proposition 4.3.0.4. *On suppose $F_t(0;0;0)$ défini en (4.8). Alors pour tout $R > 0$ et $\delta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \varepsilon^2 \log \mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0;0;0)\|_{\mathcal{L}_\phi^2} > \delta, \|B_t^H + W_t + \bar{N}_t\|_{\mathcal{L}_\phi^2} < \alpha\} < -R. \tag{4.9}$$

Démonstration. Pour $R > 0$, $\delta > 0$ on a :

$$\begin{aligned} |X_t^\varepsilon - F_t(0;0;0)| &\leq \int_0^t |b(X_r^\varepsilon) - b(F_r(0;0;0))|dr + |\varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^\varepsilon)dB_r^H \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X_r^\varepsilon)dW_r + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x,X_r^\varepsilon)d\bar{N}(dx,dr)| \\ &\leq L\int_0^t |X_r^\varepsilon - F_r(0;0;0)|dr + \varepsilon M|B_t^H + W_t + \bar{N}_t| \end{aligned}$$

$$|X_t^\varepsilon - F_t(0;0;0)|_{\mathcal{L}_\phi^2} \leq \varepsilon M \sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t + \bar{N}_t| e^{LT}$$

$$\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0;0;0)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta\} \leq \mu^\varepsilon\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t + \bar{N}_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}\}$$
$$\leq 4\exp\{-\frac{\delta^2 e^{-2LT}}{2\varepsilon^2 M^2(t^{2H}+2t)T^2}\}(voir\ [15]).$$
$$\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0;0;0)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t + \bar{N}_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\}$$
$$\leq \mu^\varepsilon\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + W_t + \bar{N}_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|B_t^H + \bar{N}_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\}$$
$$\leq 4\exp\{-\frac{\delta^2 e^{-2LT}}{2\varepsilon^2 M^2(t^{2H}+2t)T^2}\}.$$

Posons $R = \dfrac{\delta^2 e^{-2LT}}{2M^2(t^{2H}+2t)T^2}$, donc

$$\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0;0;0)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t + \bar{N}_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} \leq 4\exp\{-\frac{R}{\varepsilon^2}\}$$
$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0;0;0)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t + \bar{N}_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R.$$

□

Théorème 4.3.0.5. *On suppose F défini en (4.8),* $\Psi_t = \int_0^r \varphi_r dr$ *et* $\Theta_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} (e^{\psi(x,r)} - 1)\nu(dx)dr$ *pour* $(0, \varphi, \psi) \in \mathcal{L}^2_\phi$*. Alors pour* $R' > 0$*,* $\delta > 0$ *et sous* (H_w^N)*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0,\varphi,\psi)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}(\Psi_t + \Theta)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} < -R'. \tag{4.10}$$

Démonstration. Pour $R' > 0$, $\delta > 0$, $F_t(0,\varphi,\psi) = u(t)$ et $I(\Phi) \leq a$ on a :

$$|X_t^\varepsilon - F_t(0,\varphi,\psi)| \leq \int_0^t |b(X_r^\varepsilon) - b(u(r))|dr + |\varepsilon \int_0^t \sigma_H(X_r^\varepsilon)dB_r^H + \varepsilon \int_0^t \sigma_w(X_r^\varepsilon)dW_r$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, X_r^\varepsilon) d\bar{N}(dx,dr) - \int_0^t \sigma_w(u(r))\varphi_r dr$$
$$- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x,u(r))(e^{\psi(x,r)} - 1)\nu(dx)dr|$$
$$\leq L\int_0^t |X_r^\varepsilon - u(r)|dr + \varepsilon M|\int_0^t dB_r^H + \int_0^t dW_r + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} d\bar{N}(dx,dr)$$
$$- \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \varphi_r dr - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} (e^{\psi(x,r)} - 1)\nu(dx)dr|$$
$$\leq L\int_0^t |X_r^\varepsilon - u(r)|dr + \varepsilon M|B_t^H + W_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}(\Psi_t + \Theta_t)|.$$
$$\|X_t^\varepsilon - F_t(0,\varphi,\psi)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} \leq \varepsilon M \sup_{0\leq t\leq T} |B_t^H + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}(\Psi_t + \Theta_t)|e^{LT}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon M \sup_{0\le t\le T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}\Theta| e^{LT} \\
&\le \varepsilon M \sup_{0\le t\le T} [|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}\Theta_t|] e^{LT}.
\end{aligned}
$$

$$
\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0,\varphi,\psi)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta\} \le \mu^\varepsilon\{\sup_{0\le t\le T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}\Theta_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}\}.
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0,\varphi,\psi)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}\Theta_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&\le \mu^\varepsilon\{\sup_{0\le t\le T} |B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}\Theta_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}\Theta_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&= \mu^\varepsilon\{\sup_{0\le t\le T} |\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t + \tilde{\bar{N}}_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t + \tilde{\bar{N}}_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&\le \exp\{-\frac{1}{\varepsilon} I(\Phi)\}\tilde{\mu}^\varepsilon\{\sup_{0\le t\le T} |\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t + \tilde{\bar{N}}_t| > \frac{\delta e^{-LT}}{\varepsilon M}, \|\tilde{B}_t^H + \tilde{W}_t + \tilde{\bar{N}}_t\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} \\
&\le \exp\{-\frac{1}{\varepsilon} I(\Phi)\} \times \exp\{-\frac{1}{\varepsilon} R\} = \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}(I(\Phi) + R)\} = \exp\{-\frac{1}{\varepsilon} R'\}. \\
&\mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0,\varphi,\psi)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t - \frac{1}{\varepsilon}\Psi_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}\Theta\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} \le \exp\{-\frac{1}{\varepsilon} R'\} \\
&\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^\varepsilon\{\|X_t^\varepsilon - F_t(0,\varphi,\psi)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} > \delta, \|B_t^H + W_t + \bar{N}_t - \frac{1}{\varepsilon}(\Psi_t + \Theta)\|_{\mathcal{L}^2_\phi} < \alpha\} \le -R'.
\end{aligned}
$$

□

Proposition 4.3.0.6. *La fonction $F : [0,T] \times \mathcal{L}^2_\phi \to \mathcal{L}^2_{\phi^{-1}}$ définie en (4.8) est une fonction continue sur un compact de $\mathcal{L}^2_\phi$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $F(f,\varphi,\psi) = v$ est continue pour tout $(f,\varphi,\psi) \in \mathcal{L}^2_\phi$. Soit $v_1 = F(f_1,\varphi_1,\psi_1)$ et $v_2 = F(f_2,\varphi_2,\psi_2)$ avec

$$
\begin{aligned}
v(t) &= x_0 + \int_0^t b(v(r))dr + \int_0^t \sigma_H(v(r)) f_r \phi(r,s) dr + \int_0^t \sigma_w(v(r))\varphi_r dr \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, v(r))(e^{\psi(x,r)} - 1)\nu(dx)dr \\
v_1(t) - v_2(t) &= \int_0^t (b(v_1(r)) - b(v_2(r)))dr + \int_0^t \sigma_H(v_1(r)) f_1(r)\phi(r,s)dr \\
&\quad - \int_0^t \sigma_H(v_2(r)) f_2(r)\phi(r,s)dr + \int_0^t \sigma_w(v_1(r))\varphi_1(r) - \int_0^t \sigma_w(v_2(r))\varphi_2(r) \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, v_1(r))(e^{\psi_1(x,r)} - 1)\nu(dx)dr - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} K(x, v_2(r))(e^{\psi_2(x,r)} - 1)\nu(dx)dr.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|F_t(f_1,\varphi_1,\psi_1) - F_t(f_2,\varphi_2,\psi_2)| &\le \int_0^t |b(v_1(r)) - b(v_2(r))|dr + \int_0^t |\sigma_H(v_1(r)) - \sigma_H(v_2(r))| \\
&\quad \times |f_1(r)\phi(r,s)|dr + \int_0^t |\sigma_H(v_2(r))\phi(r,s)||f_1(r) - f_2(r)|dr \\
&\quad + \int_0^t |\sigma_w(v_1(r)) - \sigma_w(v_2(r))||\varphi_1(r)|dr + \int_0^t |\sigma_w(v_2(r))||\varphi_1(r) - \varphi_2(r)|dr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^*}|K(x,v_1(r))-K(x,v_2(r))||e^{\psi_1(x,r)}-1|\nu(dx)dr\\
&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|K(x,v_2(r))||e^{\psi_1(x,r)}-e^{\psi_2(x,r)}|\nu(dx)dr\\
\leq{}& L\int_0^t|v_1(r)-v_2(r)|dr+Lc\int_0^t|v_1(r)-v_2(r)|dr+N\int_0^t|f_1(r)-f_2(r)|dr\\
&+L\delta\int_0^t|v_1(r)-v_2(r)|dr+M\int_0^t|\varphi_1(r)-\varphi_2(r)|dr\\
&+L\delta\int_0^t|v_1(r)-v_2(r)|dr+M\int_0^t\int_{\mathbb{R}^*}|e^{\psi_1(x,r)}-e^{\psi_2(x,r)}|dr\\
\leq{}& L(1+c+2\delta)\int_0^t|v_1(r)-v_2(r)|dr+\delta(N+2M)T
\end{aligned}
$$

$$\|F(f_1,\varphi_1,\psi_1)-F(f_2,\varphi_2,\psi_2)\|_{\mathcal{L}^2_\phi}\leq\alpha(N+2M)Te^{L(1+c+2\delta)T}.$$

Donc F est continue. □

Théorème 4.3.0.7. *Supposons z et p définies en (4.8), alors sous (H_w^N), la famille $(X_t^{H,N,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ satisfait le PGD avec la bonne fonction de taux $J_{H,N}:\mathcal{M}^2_{\phi^{-1}}\to[0,+\infty]$ donnée par :*

$$
J_{H,N}(z,p)=\begin{cases}\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot z-b(z)]|^2_{\phi^{-1}}+\inf\limits_{\psi\in L^2(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})}\{I_{\dot\nu}(\psi),F_N(\psi)=p\}\\ \qquad\qquad\qquad\textit{pour } (z,p)\in\mathcal{M}^2_\phi\\ +\infty \textit{ sinon.}\end{cases}\tag{4.11}
$$

Autrement dit :

- $*$ $J_{H,N}$ est une bonne fonction de taux ;
- $*$ pour tout fermé $C\subset\mathcal{M}^2_\phi$,

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\varepsilon^2\log\nu^{H,N,\varepsilon}(X^{H,N,\varepsilon}\in C)\leq-J_{H,N}(z,p);$$

- $*$ pour tout ouvert $O\subset\mathcal{M}^2_\phi$,

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\varepsilon^2\log\nu^{H,N,\varepsilon}(X^{H,N,\varepsilon}\in O)\geq-J_{H,N}(z,p).$$

Démonstration. Il est évident que $J_{H,N}$ est une bonne fonction de taux car étant la somme de deux bonnes fonctions de taux.
Montrons la borne inférieure et la borne supérieure et donnons la forme explicite de $J_{H,N}$.
Puisque $F_{H,N}$ est continue et le processus $\varepsilon B_t^H+\varepsilon\bar N_t$ de mesure de probabilité $\mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}$ obéit le PGD avec la bonne fonction de taux $I_{\phi,\dot\nu}(f,\psi)=\frac{1}{2}|f|^2_\phi+I_{\dot\nu}(\psi)$ (4.6), d'après le principe de contraction

on a pour tout ouvert O et pour tout fermé C :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,N,\varepsilon}[X_t^{H,N,\varepsilon} \in O] = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon} \circ F_{H,N}^{-1}[X_t^{H,N,\varepsilon} \in O] \\ z(t) = x_0 + \int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r)) f_r \phi(r,s) dr \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,N,\varepsilon}[X_t^{H,N,\varepsilon} \in O] = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}[F_{H,N}^{-1}(X_t^{H,N,\varepsilon} \in O)] \\ \dot{z}(t) = b(z(t)) + \sigma_H(z(t)) f_t \phi(t,s) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,N,\varepsilon}[X_t^{H,N,\varepsilon} \in O] = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}[F_{H,N}^{-1}(X_t^{H,N,\varepsilon}) \in F_{H,N}^{-1}(O)] \\ f_t = \dfrac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}(t) - b(z(t))] \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,N,\varepsilon}[X_t^{H,N,\varepsilon} \in O] = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}[(\varepsilon B_t^H + \varepsilon \bar{N}_t) \in F_{H,N}^{-1}(O)] \\ f_t = \dfrac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}(t) - b(z(t))] \end{cases} \\
\geq - &\begin{cases} \inf_{(z,p)\in\mathcal{M}_\phi^2} \{\inf I_{\phi,\dot{\nu}}(f,\psi) = \frac{1}{2}|f|_\phi^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi) \ pour\ (f,\psi) \in \mathcal{M}_\phi^2,\ F_H(f) = z, F_N(\psi) = p\} \\ f_t = \dfrac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}(t) - b(z(t))] \end{cases} \\
&= -(\frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}(t) - b(z(t))]|_\phi^2 + \inf_{\psi\in L^2(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})} \{I_{\dot{\nu}}(\psi), F_N(\psi) = p\}) \\
&= -(\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|_{\phi^{-1}}^2 + \inf_{\psi\in L^2(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})} \{I_{\dot{\nu}}(\psi), F_N(\psi) = p\}) = -J_{H,N}(z,p) \\
\geq &\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}[(\varepsilon B_t^H + \varepsilon \bar{N}_t) \in F_{H,N}^{-1}(C)] \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}[F_{H,N}^{-1}(X_t^{H,N,\varepsilon}) \in F_{H,N}^{-1}(C)] = \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon}[F_{H,N}^{-1}(X_t^{H,N,\varepsilon} \in C)] \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^{H,N,\varepsilon} \circ F_{H,N}^{-1}[X_t^{H,N,\varepsilon} \in C] = \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \nu^{H,N,\varepsilon}[X_t^{H,N,\varepsilon} \in C].
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.3.0.8. *Supposons que z, g et p définies en (4.8) et on pose $J_N(P) = \inf_{\psi\in L^2(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})} \{I_{\dot{\nu}}(\psi), F_N(\psi) = p\}$, alors sous (H_w^N), la famille $(X_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe des grandes déviations avec la bonne fonction de taux $J_{H,w,N} : \mathcal{L}_{\phi^{-1}}^2 \to [0,+\infty]$ donnée par :*

$$J_{H,w,N}(z,g,\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|_{\phi^{-1}}^2 + \frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g} - b(g)]|^2 + J_N(p), \\ \qquad\qquad pour\ (z,g,p) \in \mathcal{L}_\phi^2 \\ +\infty\ sinon, \end{cases} \tag{4.12}$$

c'est-à-dire, pour tout fermé $C \subset \mathcal{L}_\phi^2$ et pour tout ouvert $O \subset \mathcal{L}_\phi^2$ tel que $(z,g,p) \in \mathcal{L}_\phi^2$ on a :

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^\varepsilon(X_t^\varepsilon \in C) \leq -J_{H,w,N}(z,g,p) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu^\varepsilon(X_t^\varepsilon \in O).$$

Démonstration. Étant donné que $J_{H,w,N} = J_H + J_w + J_N$ [2] est la somme de trois bonnes fonctions de taux, donc $J_{H,w,N}$ est une bonne fonction de taux. Puisque F continues et le processus $\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t$ de probabilité $\mathbb{P}^\varepsilon$ obéit le PGD de fonction de taux $I(\Phi) = \dfrac{1}{2}|f|_\phi^2 + \dfrac{1}{2}|\varphi|^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi)$ (4.5), sous les contraintes

$$\begin{cases} z(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t b(z(r))dr + \int_0^t \sigma_H(z(r)) f_r \phi(r,s) dr \\ \\ g(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t b(g(r))dr + \int_0^t \sigma_w(g(r)) \varphi_r dr \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_t = b(z(t)) + \sigma_H(z(t)) f_t \phi(t,s) \\ \\ \dot{g}_t = b(g(t)) + \sigma_w(g(t)) \varphi_t \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f_t = \dfrac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_t - b(z(t))] \\ \\ \varphi_t = \dfrac{1}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}_t - b(g(t))] \end{cases}$$

on a, d'après le principe de contraction, pour tout ouvert $O \in \mathcal{L}_\phi^2$ et pour tout fermé $C \in \mathcal{L}_\phi^2$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \varepsilon^2 \log \nu^\varepsilon [X_t^\varepsilon \in O] = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon \circ F^{-1}[X_t^\varepsilon \in O] \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon [F^{-1}[X_t^\varepsilon \in O]] \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon [F^{-1}(X_t^\varepsilon) \in F^{-1}[O]] \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon [(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t) \in F^{-1}[O]] \\
&\geq - \inf_{(z,g,p) \in \mathcal{L}_\phi^2} \{\inf I(\Phi) = \frac{1}{2}|f|_\phi^2 + \frac{1}{2}|\varphi|^2 + I_{\dot{\nu}}(\psi),\ F_H(f) = z, F_w(\varphi) = g, F_N(\psi) = p\} \\
&= -(\frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_H(z(t))\phi(t,s)}[\dot{z}_t - b(z(t))]|_\phi^2 + \frac{1}{2}|\frac{1}{\sigma_w(g(t))}[\dot{g}_t - b(g(t))]|^2 + \inf_{\psi \in L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})} \{I_{\dot{\nu}}(\psi), F_N(\psi) = p\}) \\
&= -(\frac{1}{2}|\sigma_H^{-1}(z)[\dot{z} - b(z)]|_{\phi^{-1}}^2 + \frac{1}{2}|\sigma_w^{-1}(g)[\dot{g} - b(g)]|^2 + \inf_{\psi \in L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})} \{I_{\dot{\nu}}(\psi), F_N(\psi) = p\}) \\
&= -J_{H,w,N}(z,g,p) \\
&\geq \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \varepsilon^2 \log \mathbb{P}^\varepsilon [(\varepsilon B_t^H + \varepsilon W_t + \varepsilon \bar{N}_t) \in F^{-1}(C)] \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup \varepsilon^2 \log \mu^\varepsilon [X_t^\varepsilon \in C].
\end{aligned}$$

□

2. On ne peut pas déterminer l'expression explicite de J_N.

4.4 Conclusion

En définitive ce chapitre regroupe les deux études comportementales des EDSM dirigées par un mBf et un processus de Lévy, réalisées dans l'espace des distributions tempérées. Nous avons mené ces études comme dans les chapitres précédents en deux cas sous la condition de l'indépendance de ces trois processus. Le premier cas consistant à annuler la dérive et à égaliser les coefficients de diffusions à l'identité est le résultat pour lequel les processus $B_t^H + \bar{N}_t$ et $B_t^H + W_t + \bar{N}_t$ satisfont le PGD sans restriction de l'intervalle $(0;1)$ du paramètre H de Hurst. Dans ce cas, les résultats sont obtenus grâce à l'application des formules de Girsanov pour chaque processus B_t^H, W_t et $\bar{N}_t$, le lemme du théorème de Bochner-Minlos et l'inégalité de Markov. Nous avons prouvé le PGD du compensateur de Poisson par une approche différente de celle de Florens [20]. Par les résultats de ce cas et l'utilisation du principe de contraction, nous parvenons à montrer le PGD lorsque la dérive de l'EDS est non nulle en nous fondant sur les estimations de Freidlin-Wentzell. Ces études se font dans l'espace des distributions tempérées à unidimensionnel. Et du coup, il serait très intéressant de regarder l'étude dans les espaces plus grands et à multidimensionnel.

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

5.1 Conclusion

Au terme de cette recherche, nous avons étudié, via le principe des grandes déviations, certains classes d'équations différentielles stochastiques (EDS) simples, réfléchies et mixtes (EDSM) dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) et simultanément par un mBf et au moins l'un des deux processus mB et processus de Poisson. Au regard des difficultés du mouvement Brownien fractionnaire que révèlent certains auteurs dans $\mathbb{R}^d$, notre étude est réalisée dans l'espace des distributions tempérées, dual de l'espace de Schwartz, l'espace dans lequel certaines notions du mouvement Brownien fractionnaire à savoir sa différentiabilité, le théorème de Bochner-Minlos, les bruits blancs etc sont applicables. Nous parvenons à montrer que les solutions de ces équations satisfont le principe des grandes déviations en procédant en deux étapes : la première consiste à estimer la probabilité d'une solution lorsqu'elle s'approche d'une fonction déterministe quand l'équation s'écrit sans la dérive et que le ou les coefficients de diffusions deviennent des identités.
En effet sous l'indépendance et l'utilisation des formules de Girsanov des processus B_t^H, W_t et $\bar{N}_t$ et les inégalités de Markov et Jensen, nous arrivons à obtenir les fonctionnelles des grandes déviations des fonctions aléatoires B_t^H, $B_t^H + W_t$, $B_t^H + \bar{N}_t$ ou $B_t^H + W_t + \bar{N}_t$. Notre méthode est différente de celles utilisées pour obtenir les PGD de B_t^H par Inahama [27], de W_t par Schilder et de $\bar{N}_t$ par Florens [20].
Pour la seconde étape, laquelle la dérive est non nulle, sous le rôle fondamental du principe de contraction, nous avons estimé les probabilités des solutions de ces équations lorsqu'elles s'approchent de solutions déterministes quand ces fonctions aléatoires s'approchent aussi des fonctions déterministes de carrés intégrables.

5.2 Perspectives

Nous avons fait l'étude des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire ou simultanément par un mBf et un processus de Lévy dans un espace des distributions tempérées à unidimensionnel. Il serait alors plus intéressant de généraliser nos travaux dans cet espace à multidimensionnel et également d'envisager cette étude quand la solution s'approche d'une variable aléatoire ou quand le système déterministe admet une infinité de solutions.

Nous pouvons aussi nous inspirer de cette thèse pour étudier le comportement asymptotique des équations différentielles stochastiques rétrogrades fractionnaires généralisées et les équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades anticipées.
Le couplage homogénéisation et grandes déviations investi par Manga. C et DIEDHIOU. A [31] pour les EDS dirigées par un mouvement Brownien standard serait notre objet d'étude pour les EDS dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire.

Bibliographie

[1] Azencott, R.(1980). *Grandes deviations et applications. Ecole d'Ete de probabilite de Saint-Flour VIII, 1978. Lecture Notes in Math. 779 1-176.Springer,New York.*

[2] Bai, L., Mai, J (2015). Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and Poisson point process. Bernoulli 21(1), 303–334

[3] Becker, R., Mhlanga, F. (2013). *Application of white noise calculus to the computation of Greeks. Communication on Stochastic Analysis. Vot 7 No.4, 493-510.*

[4] Bender, C. (2003) . *An Ito formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter, Stochastic Process. Appl. 104 , no. 1, 81-106. MR 2003m :60137.*

[5] Biagini, F., Hu, Y., ∅ksendal, Bo, L., Zhang, T. (2006). *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications.Springer.*

[6] Bo, L., Zhang, T. (2009) . *Large deviation for perturbed reflected diffusion processes. Stochastics, 81(6),531-543.of a fractional Browni.*

[7] Budhiraja, A., Chen, J., Dupuis, Paul. (2012). *Large Deviations for Stochastic Partial Differential Equations Driven by a Poisson Random Measure.arXiv :1203.4020v2 [math.PR]*

[8] Chen, X., Rosinski, W. V. Li, J.,Shao, Q. *Large deviations for local times and intersection local times of fractional Brownian motions and Riemann-Liouville processes. Ann. Probab. 39 (2011), no. 2, 729-778.*

[9] Chunhao, C.Weilin, X.*Parameter estimation for mixed sub-fractional. Nankai university and Zhejiarg university.*

[10] Coulibaly, A., Manga, C., Diedhiou, A. *On Some Stochastic Differential EquationsWith Jumps Subject To Small Positives Coefficients.AIMS Mathematics, 1(x) : xxx–xxx*

[11] Dadashi, H (2013). *Large Deviation Principle for Mild Solutions of Stochastic Evolution Equations with Multiplicative L ´evy Noise. arXiv :1309.1935v1 [math.PR]*

[12] Dembo, A, and Zeitouni, O. (1998). *Large deviation thechnic and applications, second ed ; Springer-verlage, New York.*

[13] Deuschel, J, and D, Stroock, D.W. (1989). *Large deviations, Academic Press.*

[14] Diatta, R., Diedhiou, A. *Large Deviation Principle Applied for a Solution of Stochastic Differential Equation Driven by a Sub-Fractional Brownian Motion. International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences. ISSN 0972-9828 Volume 13, Number 1 (2020), pp. 11-22*

[15] Diatta, R., Diedhiou, A. (2020). *Large deviation principle applied for a solution of mixed stochastic differential equation involving independent standart Brownian motion and Fractional Brownian motion, Applied Mathematical Sciences, vol, 14, no 11, 511-530.*

[16] Diatta, R., Sané, I., Diedhiou, A. *Large deviation principle for reflected diffusion process fractional Brownian motion. Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications 5 (2021) No. 1, 127-137.*

[17] Doney, R., Zhang, T. (2005) . *Perturbed Skorohod equations and perturbed reflected diffusion processes, Ann. Poincarré-PR ; 41, 107-121.*

[18] Doss, H., Priouret, P. (1983) . *Petites perturbations de systèmes dynamiques avec reflection. Lecteur Notes in Math. No. 986, Springer, New York.*

[19] Duncan,T.E., Hu, Y., Pasik-Duncan,B. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I.Theory.SIAM J. Control Optim.38(2000),582-612.*

[20] Florens, D., Pham, H. (1998).*Large deviation probabilities in estimation of Poisson.Stochastic Processes and their Applications 76- 117-139*

[21] Freidlin, M. I., Wentzell, A. D.(1998)] . *Random perturbations of dynanmical systems second ed., Springer-Verlag. New York.*

[22] Gentz, B. *Large deviations and Wentzell–Freidlin theory. Weierstraß -Institut für Angewandte Analysis and Stochastik.*

[23] Gradinaru, Nourdin, Russo, Vallois. *m-order integrals and Itô's formula for nonsemimartingale processes ; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index. (2005) Poincar Probab. Statist. 41*

[24] Gram, N., ∅ ksendal, B. *Introduction to white noise, Hida-Milliavin calculus and application. ArXiv :1903.02936v2 [math.OC] 7apr 2019.*

[25] Holden, H.,∅ksendal, B., Ubé, J., Zhang, T. *Stochastic Partial Diferential Equations- A Modelling, White Noise Functional Approach, Second Edition, Birkhauser, Boston, 2009.*

[26] Hu, Y., ∅ksendal, B. (2003). *Fractional white noise calculus and applications to finance, Infin, Dimens : Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 6, no. 1, 1-32. MR 2004c :60194.*

[27] Inahama, Y.*Laplace approximation for rough differential equation driven by fractional Brownian motion. The Annals of Probability 2013, Vol .41, No. 1,170-205.*

[28] Lakhel, H., Hajji, S. (2013). *Neutral stochastic functional differential equation driven by fractional Brownian motion and Poisson point processes.Afrika Matematika ·*

[29] Leonard, C. (2000). *Large deviations for Poisson random measures and processes with independent increments.Stochastic Processes and their Applications. 85, 93-121.*

[30] Lokka, A., Proske, F.(2002). *Infinite dimensional analysis of pure jump Levy processes on the Poisson space. Preprint university of Oslo, 14*

[31] Manga, C., Diédhiou, A. (2015) *Application of homogenization and large deviations to a parabolic semilinear equation. J. Math. Anal. Appl. 342 (2008) 146–160*

[32] Meerschaert, M. M., Nane, E. X. Y. *Large deviations for local time fractional Brownian motion and applications. J. Math. Anal. Appl. 346 (2008), no. 2, 432–445.*

[33] Mendy, I., Yode, A.F. *Parameter estimation of sub-fractional Ornstein-Uhlenbeck types process, (2010), Preprint.*

[34] Mishura,Y., Shevchenko, G. *Differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index* $H > \frac{1}{2}$. *ArXiv :11030615V1 [math.PR]3 mai 2011.*

[35] Nualart, D., Guerra, J. (2008) . *Stochastc differential equation driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion. ArXiv : 081.4963V1 [math.PR] 3 Jan 2008.*

[36] Nualart, D. *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications Contemporary Mathematics 336, 3-40, 2003.*

[37] Nualart, D., Ouknine, Y. *Regularization of differential equation by fractional noise.Support by the DGESS grant BFM 2000-0598.*

[38] Nourdin, I. *A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one. 2007. <hal-00012961v5>*

[39] ∅ksendal, B., Sulem, A.(2005). *Applied stochastic control of jump diffusions. Vol. 498. Berlin :Springer.*

[40] Randrianomenjanahary, R., Rakotoniriana, D. (2020). *Large deviation forperturbed reflected diffusion processes driven by fractional Brownian motion in Holderian norm, Advance in Mathematics : Scientic Journal 9, no, 839-858.*

[41] Shevchenko, G. (2018).*Mixed fractional stochastic differential equations with jumps. An International Journal of Probability and Stochastic Processes*

[42] Siska, D. (2004). *Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion - a white noise distribution theory approach.MSc Thesis, The University of Edinburgh.*

[43] Sowers, R. *Large deviation.Departement of mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign.*

[44] Wang,W., Chen, Z. *An introduction to continuity, extrema and related topics for general Gaussian processes, Institute of Mathematical Statstics, Haywart, CA, 1990.*

[45] Yang, X., Zhang, J. Z.T. (2012). *Large Deviations for SPDEs of Jump Type arXiv :1211.0466v1 [math.PR] 2 Nov 2012*

[46] Zhao, H., Xu, S. (2016). *Freidlin-Wentzell's Large Deviations for Stochastic Evolution Equations with Poisson Jumps.Advances in Pure Mathematics, 6, 676-694*