



**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE
ZIGUINCHOR**

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES
OPTION : GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES, TECHNOLOGIES ET INGÉNIERIE

Présentée par

Nestor DJINTELBE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

Sujet de la thèse :

Compactification du groupe des déplacements de l'espace et utilisation de points à l'infini dans des problèmes de cinématique

Sous la direction de **Michel COSTE, Seydou MOUSSA et Marie Salomon SAMBOU**

Soutenue le **mercredi 27 octobre 2021** devant le **jury** composé de :

Président :	M. Oumar SALL	Professeur titulaire, UASZ (Sénégal)
Rapporteurs :	M. Nicolas DELANOUE	HDR, Université d'Angers (France)
	M. Guillaume MOROZ	HDR, INRIA Nancy (France)
	M. Oumar SALL	Professeur titulaire, UASZ (Sénégal)
Examineurs :	M. Amoussou Thomas GUEDENON	Professeur assimilé, UASZ (Sénégal)
	M. Daouda Niang DIATTA	Maître de conférences, UASZ (Sénégal)
Directeurs :	M. Michel COSTE	Professeur titulaire, Université de Rennes 1 (France)
	M. Seydou MOUSSA	Maître assistant, Université de Maradi (Niger)
	M. Marie Salomon SAMBOU	Professeur titulaire, UASZ (Sénégal)



THÈSE EFFECTUÉE AU SEIN DU LABORATOIRE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS (LMA) DE
L'UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR
BP : 523-ZIGUINCHOR-SÉNÉGAL

Résumé

Dans ce mémoire de thèse nous introduisons une compactification du groupe des déplacements de l'espace qui dérive de celle introduite par Study. Nous montrons qu'elle est isomorphe à une autre compactification obtenue en regardant le groupe des déplacements de l'espace comme un produit semi-direct du sous-groupe des rotations et du sous-groupe des translations et en prenant la clôture projective du sous-groupe des translations. Ensuite nous utilisons cette compactification en cinématique des robots, en considérant le bord de l'espace des configurations d'un robot. Nous étudions enfin la dégénérescence du problème géométrique direct de quelques robots parallèles à trois degrés de liberté ou quatre avec le mode Schoenflies du 4-UPU.

Mots-clés : Groupe des déplacements de l'espace, Compactification, Robotique

Compactification of the space of rigid motions and use of points at infinity for problems of robot kinematics

Abstract : We introduce a compactification of the group of rigid motions in 3-space derived from the Study model for this group. We show that compactification is isomorphic to another one obtained by considering the group of rigid motions in 3-space as a semi-direct product of the subgroup of rotations with the subgroup of translations and by taking the projective closure of the subgroup of translations. We then use this compactification in robot kinematics, by considering the boundary of the configuration space of a robot. We finally study the degeneration of the direct kinematic problem for some parallel robots with three or four degrees of freedom with the Schoenflies mode of the 4-UPU manipulator.

Keys-words : Group of rigid motions, Compactification, Robotics

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer très sincèrement toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse : Monsieur Michel COSTE, professeur émérite à l'université de Rennes I, Monsieur Marie Salomon SAMBOU, professeur à l'université Assane Seck de Ziguinchor et Monsieur Moussa SEYDOU, maître assistant à l'université de Maradi.

Au Professeur COSTE : vous avez été tout le temps disponible pour moi et vous ne cessez de m'encourager ; vous avez supporté mes difficultés à comprendre les choses et mes multiples erreurs. Merci pour votre qualité scientifique et votre qualité humaine élevées.

Au Professeur SAMBOU : durant tout mon séjour à Ziguinchor, vous étiez toujours là intervenant dans les aspects académiques (et même au-delà du cadre académique) et veillant sur l'avancement de mes travaux auxquels vous avez en même temps manifesté un grand intérêt. Merci pour votre soutien et votre affection.

Au Docteur SEYDOU : vous avez toujours accepté de vous déplacer à Ziguinchor dans le cadre de ma thèse chaque fois que Michel est là. Merci pour les riches échanges et les conseils que j'ai reçus de votre part.

Je tiens à remercier Monsieur Oumar SALL, professeur à l'université Assane Seck de Ziguinchor, d'avoir bien voulu accepter de rapporter ma thèse et de présider le jury. Je voudrais également remercier très sincèrement Messieurs Nicolas DELANOUE et Guillaume MOROZ respectivement professeur à l'université d'Angers et INRIA Nancy pour avoir accepté d'être rapporteurs.

Je voudrais également remercier Messieurs Daouda Niang DIATTA et Amoussou Thomas GUEDENON respectivement Maître de conférences et professeur assimilé à l'université Assane Seck de Ziguinchor pour avoir accepté de participer au jury de ma soutenance comme examinateurs. Je suis également reconnaissant au premier de m'avoir accueilli à Ziguinchor et d'être comme un tuteur pour moi et au second, pour l'intérêt particulier qu'il porte à ma personne et à mes travaux de thèse.

Que Madame Marie-Françoise ROY, Professeur à l'université de Rennes I, trouve ma sincère reconnaissance pour ses soutiens tant financier que moral. Vous m'avez ouvert les portes du troisième cycle. Merci de m'avoir soutenu jusque là.

Je remercie les responsables du projet PREMA (Pole of Research in Mathematics and Applications in Africa) qui, à travers la Fondation SIMONS, ont financé une partie de ma thèse. Je tiens à remercier EMS (European Mathematical Society) qui, à travers le projet SIMONS for

Africa, a financé par deux fois, mon séjour à l'Université de Rennes I. Je remercie en même les responsables de l'IRMAR (Institut de Recherche Mathématique de Rennes) qui, par leurs invitations et soutien financier ont rendu possible ces deux séjours. L'opportunité que EMS et IRMAR m'ont donnée a eu un impact considérable sur mes travaux de thèse.

Je n'oublie pas également les responsables du projet NLAGA pour leur soutien.

Mes remerciements vont également à la direction de Ziguinchor Institut Polytechnique (ZIP), lieu qui m'a abrité tout le long de la rédaction de mon travail. Merci à son directeur Docteur Souhaibou SAMBOU, à Monsieur Alassane TAMBOURA et à Monsieur Jacques DIATTA pour leur accueil.

Je voudrais exprimer ma gratitude aux membres du Laboratoire des Mathématiques et Applications et du séminaire NLAGA, dirigés par le professeur Marie Salomon SAMBOU. C'était pour moi un grand plaisir d'exposer et d'assister aux différents exposés portant sur des sujets riches et variés. Je profite de l'occasion pour remercier chaleureusement les collègues avec qui j'ai souvent eu des échanges et discussions riches autour des mathématiques : Souhaibou SAMBOU, Winnie OSSETE, Kang-Rang SETH KOUMLA, Abdoulaye DIOUF, Moustapha CAMARA, Seny DIATTA, Daouda DIACK, Mamadou Eramane BODIAN, Ibrahima HAMIDINE, Papa BADIANE, Pape Modou SARR, Marcel Sihintoe BADIANE, Christophe Lopez NANGO, Chérif Mamina COLY, Alassane AW, Yaya Youssouf YAYA, Jonathan DJELLA, Alain Agack DIEDHIOU, Mouhamadou Diaby GASSAMA, Jérémie Gaston SAMBOU, Ibou GOUDIABY, Boubacar Sidy BALDE, Ibrahima SANE, Raphaël DIATTA, Dieynaba SAMB, Amadou SEYDI, Azize MANGA, etc. .

Je remercie Monsieur Aslao KODMBAYE, chef de département des mathématiques à l'université de N'Djaména pour ses soutiens. Je remercie aussi très sincèrement Monsieur Kartoue Mady DEMDAH pour m'avoir fait connaître auprès de beaucoup de personnes qui me soutiennent aujourd'hui quand il était à l'université de N'Djaména, et pour ses encouragements jusqu'aujourd'hui.

Je remercie très sincèrement Mamadou Eramane BODIAN et Timack Ngom de m'avoir aidé à imprimer l'ensemble des documents pour les membres du jury ; leur action a été un grand secours pour moi. Je n'oublie pas les autres enseignants qui m'ont aussi beaucoup soutenu : Mansour SANE, Diène NGOM, Clément MANGA, Édouard DIOUF, Emmanuel Nicolas CABRAL etc. . Mes remerciements vont également envers Kang-Rang SETH KOUMLA, Moustapha CAMARA et Abdoulaye DIOUF pour la relecture partielle ou totale du document de la thèse.

Je suis reconnaissant à tous les étudiants avec qui j'ai habité. Vous m'avez toujours considéré comme le vôtre ; merci les gars pour la teranga sénégalaise. Un merci spécial à Sokhna DIAGNE pour les multiples aides et amitié qu'elle m'a apportés.

Je voudrais également remercier spécialement les frères et sœurs de l'église évangélique de Tilène et du Groupe Biblique Universitaire (GBU) pour les bons moments de communion fraternelle passés ensemble ; que le Seigneur vous bénisse.

J'adresse une pensée spéciale à ces compatriotes : Esther Ronel BEALOU, Dono KOUNA, Marina Mbayamdéné NOUDJIDOU, Kang-Rang SETH KOUMLA, Seydou DIALLO, Sylviane Haoua BLAGUE, Espérance Waya KODMBAYE, Yannick Adoum ALBE, Aboudoulaye Mahamadene MAHAMAT, Kadidja Cynthia KANDA, Issinago Mardochée KOIWAK, Shalom GUEDEKOUSSENG,

Yaya Youssouf Yaya, Bienvenu GAO ect. avec qui j'ai partagé régulièrement de bon moment de détente et d'échanges.

Je ne saurais terminer sans remercier ma famille et mes amis, qui ont tous aidé à façonner mon chemin et qui m'ont aidé à arriver où j'en suis, pour m'avoir motivé et encouragé. Merci à mes parents qui ont fait tant de sacrifices pour moi. Merci à tous mes frères et sœurs et surtout à mon grand frère Tamibé GONDIBÉ pour son soutien permanent, tant financier que moral. Merci à tous mes amis, en particulier, Miskal Rakseunbé KEUMO et Bertin FOOKA, pour divers services qu'ils m'ont rendus ; je leur adresse à tous un joyeux salut amical.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

« Toute ma famille et toutes les personnes qui m'ont soutenu. »

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	iv
Dédicace	vii
Table des matières	xi
Table des figures	xii
Liste des symboles	xviii
Introduction	1
0.1 Motivation	1
0.2 État de l'art	1
0.2.1 Méthodes algébriques en robotique	2
0.2.2 Compactifications de $SE_3(\mathbb{R})$	6
0.2.3 Analyse des mécanismes	8
0.3 Contribution	9
0.3.1 Une compactification de $SE_3(\mathbb{R})$	9
0.3.2 Un revêtement de la compactification de $SE_3(\mathbb{R})$	10
0.3.3 Comparaison des compactifications	11
0.3.4 Compactification et bord des espaces des configurations	11
0.3.5 Problème géométrique direct dégénéré	13
0.3.6 Bords des espaces articulaires des manipulateurs à trois degrés de liberté	13
0.3.7 PGDD du 3-RPS	14
0.3.8 PGDD pour le mode général du Tsai 3-UPU	15

0.3.9	Analyse dégénérée du 4-UPU	16
I	Préliminaires	21
1	Méthodes algébriques en robotique	22
1.1	Polynômes et idéaux des polynômes	22
1.1.1	Polynômes	22
1.1.2	Idéaux des polynômes	23
1.2	Variétés algébriques	24
1.2.1	Variétés algébriques affines	24
1.2.2	Idéaux des variétés algébriques et Nullstellensatz de Hilbert	27
1.2.3	Morphismes et applications rationnelles entre variétés algébriques affines	29
1.2.4	Variétés algébriques projectives	32
1.2.5	Dimension et Degré d'une variété algébrique	37
1.3	Éclatements des variétés algébriques	41
1.3.1	Éclatement d'une variété le long d'une sous-variété	41
1.3.2	Quelques exemples d'éclatements	42
1.4	Base de Gröbner et manipulation des idéaux des polynômes	46
1.4.1	Les ordres monomiaux	46
1.4.2	Algorithme de division en plusieurs variables	48
1.4.3	Les bases de Gröbner	50
1.4.4	L'algorithme de Buchberger	52
1.4.5	Projection et Théorie d'élimination	54
1.4.6	Somme, produit et intersection des idéaux	56
1.4.7	Composantes des variétés, quotient et saturation des idéaux	57
1.4.8	Fonction et polynôme de Hilbert	62
1.4.9	Décomposition primaire des idéaux	64
1.5	Géométrie algébrique réelle	65
1.5.1	Ensemble semi-algébrique	65
1.5.2	Décomposition cylindrique algébrique	67
2	Compactification de Study et analyse des mécanismes robotiques	70

2.1	Groupe des déplacements de l'espace euclidien	71
2.1.1	Généralité	71
2.1.2	Aspect différentiel de $SE_n(\mathbb{R})$	72
2.1.3	Restriction à la dimension 3	75
2.2	Compactification de Study de $SE_3(\mathbb{R})$	75
2.2.1	Quaternions et représentation du groupe des rotations $SO_3(\mathbb{R})$	76
2.2.2	Quaternions duaux et représentation des déplacements euclidiens $SE_3(\mathbb{R})$	82
2.2.3	Compactification de Study de $SE_3(\mathbb{R})$	85
2.2.4	Isomorphisme entre $SE_3(\mathbb{R})$ et $SO_3(\mathbb{R}[\epsilon])$	86
2.3	Architecture des robots	88
2.3.1	Définitions	88
2.3.2	Articulations	88
2.3.3	Mécanismes de type manipulateur	89
2.4	Modèles géométriques	91
2.4.1	Espace des configurations et espace articulaire	91
2.4.2	Problème géométrique direct	92
2.4.3	Application géométrique inverse	92
2.5	Singularité des manipulateurs parallèles	92
2.6	Étude de quelques robots parallèles dans la compactification de Study	93
2.6.1	Modes opératoires des robots parallèles	94
2.6.2	PGD des manipulateurs parallèles	102

II Contributions **111**

3 Compactifications et analyse dégénérée des mécanismes robotiques **112**

3.1	Éclatement de S le long du 3-plan E	112
3.2	Un revêtement de la compactification de $SE_3(\mathbb{R})$	114
3.3	Compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ vu comme $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$	114
3.4	Comparaison des compactifications	115
3.5	Bords des espaces des configurations	116
3.5.1	Utilisation de $Bl_E(S)$	117
3.5.2	Utilisation de \tilde{S}	117

3.5.3	Bords des modes opératoires du 3-R <u>P</u> S	117
3.5.4	Bords des modes opératoires du SNU 3-U <u>P</u> U	119
3.5.5	Bords des modes opératoires du Tsai 3-U <u>P</u> U	120
3.6	Problème géométrique direct dégénéré de quelques robots parallèles	121
3.6.1	Bords des espaces articulaires des manipulateurs à trois degrés de liberté	121
3.6.2	PGDD du 3-R <u>P</u> S	123
3.6.3	PGDD du SNU 3-U <u>P</u> U	126
3.6.4	PGDD du Tsai 3-U <u>P</u> U	132
3.6.5	PGDD du 4-U <u>P</u> U	134
III	Appendices	158
	Feuille de calcul Sagemath	159
A	Le 3-R <u>P</u> S	159
A.1	Détermination des modes opératoires	159
A.2	Calcul des bords des modes opératoires du 3-R <u>P</u> S	163
B	Le SNU 3-U <u>P</u> U	165
B.1	Calcul des modes opératoires du SNU 3-U <u>P</u> U	165
B.2	Calcul des bords des modes opératoires du SNU 3-U <u>P</u> U	168
C	Le Tsai 3-U <u>P</u> U	170
C.1	Calcul des modes opératoires du Tsai 3-U <u>P</u> U	170
C.2	Calcul du bord du mode opératoire général du Tsai 3-U <u>P</u> U	173
	Feuille de calcul Maple	175
A	Le 3-R <u>P</u> S	175
A.1	PGD du 3-R <u>P</u> S	175
A.2	PGDD du 3-R <u>P</u> S	182
B	Les 3-U <u>P</u> Us	186
B.1	Cas du Tsai 3-U <u>P</u> U	187
B.2	Calcul dans une tranche	188
	Bibliographie	189

Table des figures

1	Quelques manipulateurs parallèles de degré de liberté 3	8
2	PGDD pour le mode \mathcal{J}_1 du 3-R <u>P</u> S. Région jaune : 2 solutions réelles	14
3	PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 4 solutions réelles, Régions rouges : 8 solutions réelles	15
4	PGDD pour le bord opératoire général du Tsai 3- <u>U</u> PU	16
5	Le 4- <u>U</u> PU et la géométrie d'une jambe	16
6	Surface \mathcal{S} (avec ses manches) coincée entre les deux paraboloides hyperboliques. . .	18
7	PGDD au bord du mode de Schoenflies, section de l'espace de singularité image donnée par $d_2 = 2$ pour $a = d = 2, b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	19
8	PGD pour le mode de Schoenflies, courbes de singularités image. $a = d = 2, b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	19
9	Self-motion au dessus de la parabole dans le plan $d_2 = 0$	20
1.1	Éclatement de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ à l'origine.	44
1.2	Éclatement de la courbe nodale $V = \mathcal{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2)$ à l'origine.	45
1.3	Un exemple d'ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^2	66
1.4	Décomposition cylindrique algébrique $\{x^2 + y^2 + z^2 - 1\}$ -invariante	69
2.1	Quatre types d'articulations de base.	89
2.2	Manipulateurs sériels.	90
2.3	Manipulateurs parallèles.	90
2.4	Repère attaché à la base	93
2.5	3-R <u>P</u> S	94
2.6	SNU 3- <u>U</u> PU	96
2.7	Tsai 3- <u>U</u> PU	98
2.8	Le 4- <u>U</u> PU et la géométrie d'une jambe	100

2.9	Mode opératoire \mathcal{J}_1 du 3-R <u>P</u> S, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 4 solutions, région rouge : 8 solutions	103
2.10	Mode opératoire \mathcal{J}_2 du 3-R <u>P</u> S, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 4 solutions, région rouge : 8 solutions	104
2.11	Mode opératoire \mathcal{K}_6 du SNU 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0	105
2.12	Mode opératoire \mathcal{K}_2 du SNU 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0 solution réelle	106
2.13	Mode opératoire \mathcal{K}_3 du SNU 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Région blanche : 0 solution réelle, Ailleurs : 0 solution réelle	107
2.14	Mode opératoire \mathcal{K}_4 du SNU 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 4$. Régions bleues : 4 solutions réelles, Région jaune : 2 solutions réelles, Région blanche : 0 solution réelle, Ailleurs : 0 solution réelle	108
2.15	Mode opératoire \mathcal{K}_5 du SNU 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0 solution réelle	109
2.16	Mode opératoire \mathcal{K}_6 du SNU 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0 solution réelle	110
2.17	Mode général du Tsai 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 10$. Intervalle en couleur bleue : 12, Intervalle en couleur verte : 8, Intervalle en couleur rouge : 4, Intervalle en couleur jaune : 2.	110
3.1	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{J}_1 du 3-R <u>P</u> S. Région jaune : 2 solutions réelles	124
3.2	Mode opératoire \mathcal{J}_1 du 3-R <u>P</u> S, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 4 solutions réelles, Régions rouges : 8 solutions réelles	124
3.3	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{J}_2 du 3-R <u>P</u> S. Région jaune : 2 solutions réelles	125
3.4	Mode opératoire \mathcal{J}_2 du 3-R <u>P</u> S, PGD pour $r_3 = 5, 10, 20$. Régions jaunes : 4 solutions réelles, Régions rouges : 8 solutions réelles	126
3.5	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_1 du SNU 3-U <u>P</u> U. Région jaune : 2 solutions réelles	126
3.6	Mode opératoire \mathcal{K}_1 du SNU 3-U <u>P</u> U, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles	127
3.7	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_2 du SNU 3-U <u>P</u> U. Région jaune : 2 solutions réelles	127

3.8	Mode opératoire \mathcal{K}_2 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles	128
3.9	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_3 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$. Région jaune : 2 solutions réelles	128
3.10	Mode opératoire \mathcal{K}_3 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles	129
3.11	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_4 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$. Région jaune : 2 solutions réelles	129
3.12	Mode opératoire \mathcal{K}_4 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$, PGD pour $r_3 = 4, 10, 50$. Régions bleues : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	130
3.13	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_5 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$. Région jaune : 2 solutions réelles	130
3.14	Mode opératoire \mathcal{K}_5 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles	131
3.15	PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_6 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$. Région jaune : 2 solutions réelles	131
3.16	Mode opératoire \mathcal{K}_6 du SNU 3- $\underline{\text{UPU}}$, PGD pour $r_3 = 2, 8/3, 5$. Régions bleues : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	132
3.17	PGDD pour le bord du mode opératoire général du Tsai 3- $\underline{\text{UPU}}$	132
3.18	Mode opératoire général du Tsai 3- $\underline{\text{UPU}}$, Nombre de solutions réelles au PGD. Intervalle en couleur bleue : 12, Intervalle en couleur verte : 8, Intervalle en couleur rouge : 4, Intervalle en couleur jaune : 2	133
3.19	PGDD au bord du mode de Schoenflies, surface de singularités, $a = 1, b = c = 2, d = 3$	143
3.20	PGDD au bord du mode de Schoenflies, courbe de singularités image pour $d_2 = 2$, paramètres $a = 1, b = c = 2, d = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	144
3.21	PGD pour le mode de Schoenflies, courbe de singularités image, $a = 1, b = c = 2, d = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	145
3.22	PGD pour le mode de Schoenflies, courbes de singularités image obtenues par une transformation affine. $a = 1, b = c = 2, d = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	146
3.23	PGDD au bord du mode de Schoenflies, surface de singularités image, paramètres $a = 2, b = c = 3, d = 2$	148
3.24	PGDD au bord du mode de Schoenflies, courbes de singularité images $a = d = 2, b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	149

3.25 PGD pour le mode de Schoenflies, courbe de singularités image, $a = d = 2, b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	149
3.26 PGD pour le mode de Schoenflies, courbes de singularités image obtenues par une transformation affine. $a = d = 2, b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles	150
3.27 Courbes des singularités images-Self-motion	152
3.28 Fibre au dessus du point de la parabole correspondant à $d_1 = 8$ - Aucun point réel dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$	153
3.29 Fibre au dessus du point de la parabole correspondant à $d_1 = 5$ - Aucun point réel dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$	154
3.30 Fibre au dessus du sommet de la parabole ($d_1 = 0$) - Points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$	154
3.31 Fibre au dessus d'un point autour du sommet de la parabole correspondant $d_1 = 1$ - Points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$	155
3.32 Points, extrémités de l'arc de parabole qui contient le sommet - Un point réel dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$	156
3.33 Self-motion au dessus de la parabole dans le plan $d_2 = 0$	156

Liste des symboles

- $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ Espace affine de dimension n sur un corps \mathbb{K}
- $\text{Bl}_E(S)$ Variété éclatée de la quadrique de Study S le long du 3-plan E
- \dashrightarrow Utilisé pour définir une application rationnelle
- Γ_φ Graphe de φ
- \mathbb{H} Ensemble des quaternions
- $\mathbb{H}[\varepsilon]$ Ensemble des quaternions duaux
- $\mathcal{I}(V)$ Idéal d'une variété algébrique V
- $\mathbb{K}(V)$ Corps de fonctions d'une variété algébrique V
- $\mathbb{K}[V]$ Anneau de coordonnées d'une variété algébrique V
- $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_s$ Ensemble des polynômes homogènes de degré s
- $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ Anneau de polynômes à coefficients dans un corps \mathbb{K} .
- $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ Idéal engendré par f_1, \dots, f_s .
- $\mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s)$ Variété algébrique définie par les polynômes f_1, f_2, \dots, f_s
- $\mathcal{M}(\mathbb{R}[\varepsilon])$ Ensemble des matrices duales
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$
- S^n Sphère unité réelle de dimension n
- $\mathcal{V}(I)$ Variété algébrique définie par un idéal I
- $\dim_{\text{Krull}}(A)$ Dimension de Krull d'un anneau A
- $\dim(V)$ Dimension d'une variété algébrique V
- $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ Ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, groupe général linéaire
- $\text{Im } \mathbb{H}$ Ensemble des quaternions purs
- $\text{O}_n(\mathbb{R})$ Ensemble des matrices orthogonales
- $\text{Re } \mathbb{H}$ Ensemble des quaternions réels

- $SE_n(\mathbb{R})$ Groupe spécial euclidien réel de dimension n
 $SO_n(\mathbb{R})$ Groupe spécial orthogonal réel de dimension n
 \bar{V} Clôture projective de la variété V
 \bar{h} Conjugué quaternionique d'un quaternion dual h
 \bar{h}^ε Conjugué quaternionique et dual d'un quaternion dual h
 $\pi^{-1}(E)$ Diviseur exceptionnel de l'éclatement, bord de $SE_3(\mathbb{R})$ dans $Bl_E(S)$
 $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ Espace projectif de dimension n sur un corps \mathbb{K}
 $\mathbb{R}[\varepsilon]$ Ensemble des nombres duaux
 \sqrt{I} Radical d'un idéal I
 $LC(f)$ Coefficient dominant de f
 $LM(f)$ Monôme dominant de f
 $LT(f)$ Terme dominant de f
 $\text{multideg}(f)$ Multidegré du polynôme f
 \mathbb{U} Ensemble des quaternions unitaires ou normalisés
 \underline{w} $\underline{w} = w_0, w_1, w_2, w_3$
 \hat{V} Cône affine sur une variété projective V .
 \tilde{C} Transformée stricte de C
 \tilde{S} Modification de S par le revêtement $\tilde{\pi}$
 \underline{x} $\underline{x} = x_0, x_1, x_2, x_3$
 \underline{y} $\underline{y} = y_0, y_1, y_2, y_3$
 $f \xrightarrow{F} r$ Réduction de f modulo F
 FH_I Fonction de Hilbert de I
 h^ε Conjugué dual d'un quaternion dual h
 $I : J$ Quotient de l'idéal I par l'idéal J
 $I : J^\infty$ Saturation de l'idéal I par rapport à l'idéal J
 I_{hom} Idéal homogénéisé de l'idéal I
 I_s Ensemble des polynômes homogènes de I de degré s
 PH_I Polynôme de Hilbert de I
 $S(f, g)$ S -polynôme de f et g

$T_p(V)$ Espace tangent à V en p

AGI Application Géométrique Inverse

AGID Application Géométrique Inverse Dégénérée

DCA Décomposition Cylindrique Algébrique

grevlex Ordre lexicographique inverse gradué

grlex Ordre lexicographique gradué

PGD Problème Géométrique Direct

PGDD Problème Géométrique Direct Dégénéré

plex Ordre lexicographique pur

SIROPA Singularité des Robots Parallèles

SNU Seoul National University

Introduction

0.1 Motivation

Le groupe de Lie des déplacements de l'espace est un outil fondamental en cinématique, de même que son algèbre de Lie (l'espace des torseurs). C'est un groupe non compact, et il est naturel d'en chercher des compactifications. Une telle compactification, connue depuis longtemps, est donnée par le modèle de Study, comme une quadrique dans l'espace projectif réel de dimension 7 [Stu91, Stu03, HKSS97, Sel05]. Une autre compactification consiste à représenter le groupe des déplacements comme le produit semi-direct du groupe des translations avec les groupe des rotations, puis à prendre la clôture projective du sous-groupe des translations, c'est-à-dire, compactifier la partie « translations » en un espace projectif réel. Les points à l'infini de ces compactifications n'ont pas d'existence physique en tant que déplacements, mais ils peuvent se révéler très utiles dans l'analyse des mécanismes.

Dans cette thèse, nous nous proposons :

- ✓ d'étudier différentes compactifications,
- ✓ d'éclaircir les liens entre elles,
- ✓ d'évaluer l'apport des points à l'infini des compactifications dans l'étude des mécanismes (en particulier des robots parallèles avec degré de mobilité réduit).

0.2 État de l'art

Le comportement cinématique des robots (manipulateurs) est décrit par des équations algébriques, appelées équations de contraintes. Ces équations sont manipulées en utilisant les méthodes algébriques et sont interprétées géométriquement.

L'une des tâches principales de la robotique de manipulation consiste à positionner et orienter un organe terminal (objet, outil, camera, ...) dans l'espace. La situation correspondante est un élément du groupe spécial euclidien $SE_3(\mathbb{R})$. Pour réaliser leur analyse cinématique, il est utile d'introduire les compactifications de $SE_3(\mathbb{R})$.

Nous allons présenter brièvement quelques méthodes algébriques utilisées en robotique, quelques compactifications bien connues de $SE_3(\mathbb{R})$ et quelques applications déjà existantes dans la littérature.

0.2.1 Méthodes algébriques en robotique

Nous présentons ici quelques méthodes algébriques utilisées en robotique. La plupart de ces méthodes s'appuient sur le calcul de la base de Gröbner. Elles abondent dans la littérature.

0.2.1.1 Éclatement des variétés algébriques

L'éclatement est une méthode assez générale pour construire des variétés birationnelles entre elles. Il peut être utilisé pour éliminer l'indétermination des applications rationnelles, résoudre les singularités etc. .

Soient \mathbb{K} un corps, $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ une variété algébrique affine et $I \subset \mathbb{K}[X]$ l'idéal engendré par $f_0, \dots, f_{s-1} \in \mathbb{K}[X]$.

Considérons l'application rationnelle φ

$$\begin{aligned} \varphi : X &\dashrightarrow \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [f_0, \dots, f_{s-1}]. \end{aligned}$$

L'application φ est régulière sur $X \setminus \mathcal{V}(I)$ ($\mathcal{V}(I)$ est la variété algébrique définie par I) mais ne l'est pas en général sur tout X .

Définition 0.2.1.1 (Éclatement d'une variété le long d'un idéal ou d'une sous-variété). L'éclatement de X le long de I noté $\text{Bl}_I(X)$ est le graphe $\Gamma_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K})$ de φ avec la projection naturelle¹ $\pi : \text{Bl}_I(X) \longrightarrow X$ sur le premier facteur.

Si $W \subset X$ est une sous-variété affine de X , l'éclatement de X le long de W , noté $\text{Bl}_W(X)$ est l'éclatement de X le long de l'idéal radical $\mathcal{I}(W)$.

L'inverse $\pi^{-1}(W) \subset \text{Bl}_W(X)$ est une hypersurface et est appelé **diviseur exceptionnel** de l'éclatement. Il est de codimension 1 dans $\text{Bl}_W(X)$.

Soit $V \subset X$ une sous-variété de X autre que W . Si V n'intersecte pas W , alors il n'est pas affecté par l'éclatement de X le long de W . Cependant, si V intersecte W , alors l'ensemble $\tilde{V} = \overline{\pi^{-1}(V \setminus W)}$ est appelé **la transformée propre (ou stricte)** de V , et l'ensemble $\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(W) \cup \overline{\pi^{-1}(V \setminus W)}$, **la transformée totale** de V . L'application π est un morphisme projectif birationnel et $\text{Bl}_W(X) \setminus \pi^{-1}(W)$ est isomorphe à $X \setminus W$. Cela veut dire que l'éclatement laisse X inchangé excepté le fait que l'on remplace W par $\pi^{-1}(W)$.

0.2.1.2 Calcul sur les idéaux de l'anneau des polynômes

Soient \mathbb{K} un corps et I un idéal de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Définition 0.2.1.2 (Base de Gröbner). Un ordre monomial étant fixé, un sous-ensemble fini $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ de I est appelé **base de Gröbner** (ou **base standard**) si

$$\langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t) \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle.$$

1. Parfois on dira aussi que le morphisme π est l'éclatement de X le long de I .

où LT désigne le terme dominant des polynômes g_i , $1 \leq i \leq t$.

Les bases de Gröbner peuvent être utilisées pour déterminer la projection d'une variété algébrique sur un sous-espace affine ou projectif, en particulier celles calculées avec l'ordre lexicographique.

Théorème 0.2.1.3 (Théorème d'élimination, [CLO15], Chap.3, Sec.1, Th.2). Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et soit G une base de Gröbner de I , pour l'ordre lexicographique induit par l'ordre donné par $x_1 > \dots > x_n$. Alors, pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, l'ensemble

$$G_k = G \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$$

est une base de Gröbner de l'idéal d'élimination $I_k = I \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$.

D'un point de vue géométrique, le théorème d'élimination correspond à un théorème de projection pour les variétés associées : éliminer le premier bloc de variables revient à projeter les variétés associées sur le sous-espace constitué du deuxième bloc de variables.

Théorème 0.2.1.4 (Projection). Supposons \mathbb{K} algébriquement clos. Soient $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ est un espace affine de dimension n sur \mathbb{K}) et

$$\begin{aligned} \pi_k : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{A}^{n-k}(\mathbb{K}) \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (a_{k+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

la projection sur les $n - k$ dernières variables.

Soient I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et $I_k = I \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$ son k -ième idéal d'élimination. Alors

$$\overline{\pi_k(V)} = \mathcal{V}(I_k) \subset \mathbb{A}^{n-k}(\mathbb{K})$$

Nous avons souvent besoin d'enlever les composantes factices d'une variété algébrique (surtout celle décrivant les systèmes contraints). Enlever les composantes d'une variété algébrique définie par un idéal J d'une autre variété algébrique définie par un idéal I correspond à prendre la variété algébrique définie par l'idéal obtenu en saturant I par J .

Définition 0.2.1.5 (Saturation des idéaux). Soient I et J des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. La **saturation** de I par rapport à J , notée $I : J^\infty$ est un idéal contenant I défini par :

$$I : J^\infty = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid \text{il existe } m \in \mathbb{N}, fg^m \in I, \text{ pour tout } g \in J\}$$

Théorème 0.2.1.6 (Enlèvement de composantes, [DS10], Th.1.9.1). Soient \mathbb{K} un corps algébriquement clos, I et J des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Alors

$$\overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)} = \mathcal{V}(I : J^\infty)$$

Si I est radical, alors

$$\overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)} = \mathcal{V}(I : J)$$

où $I : J$ est le quotient de I par J .

Comme une autre application de la saturation d'un idéal, une manière d'homogénéiser un idéal est d'homogénéiser les générateurs et ensuite saturer par rapport à la variable d'homogénéisation.

Sur un corps algébriquement clos, le calcul de la dimension et du degré d'une variété algébrique $V = \mathcal{V}(I)$, est pratiquement donné par :

- ✓ Calculer une base de Gröbner de I pour un ordre monomial gradué tel que $>_{grlex}$ ou $>_{grevlex}$.
- ✓ Calculer le polynôme de Hilbert de $\langle LT(I) \rangle$.

On obtient donc :

Définition 0.2.1.7 (Dimension et degré de Hilbert). Soient V une variété algébrique projective et PH_V le polynôme de Hilbert² donné par $PH_V(t) = a_r t^r + \text{termes de degré } < r$.

- ✓ La dimension de V est le degré r du polynôme PH_V .
- ✓ Le degré de V est le nombre $a_r r!$.

Toute variété algébrique se décompose en une réunion finie de composantes irréductibles. Cette décomposition correspond algébriquement à l'intersection des idéaux dits idéaux primaires ou mieux, à l'intersection de leur radical.

Définition 0.2.1.8 (Décomposition primaire). Une décomposition primaire d'un idéal I est une expression de I comme intersection d'idéaux primaires

$$I = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{J}_i.$$

La décomposition est dite **minimale** si les idéaux premiers $\sqrt{\mathfrak{J}_i}$ sont tous distincts et si pour tout $i = 1, \dots, r$, $\mathfrak{J}_i \not\supseteq \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{J}_j$.

Les radicaux $\sqrt{\mathfrak{J}_i}$ sont appelés **les idéaux premiers associés**.

Une décomposition primaire des idéaux est très pratique pour simplifier les calculs (surtout pour les variétés obtenues par les contraintes cinématiques des mécanismes) car chacune des composantes peut être traitée séparément.

0.2.1.3 Géométrie semi-algébrique

En prenant en compte le fait que \mathbb{R} est ordonné, ce qui permet d'admettre les inégalités dans la définition des objets, la géométrie sur les réels devient plus riche et dans ce cas on parlera d'ensemble semi-algébrique réel.

Définition 0.2.1.9 (Ensemble et fonction semi-algébriques).

- ✓ Un ensemble semi-algébrique est un ensemble décrit par unions finies d'intersections finies d'ensembles de la forme $\{P = 0\}$ ou $\{P > 0\}$ où P est un polynôme de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

2. Voir 1.2 pour la définition du polynôme de Hilbert.

- ✓ Une fonction semi-algébrique est une fonction dont le graphe est semi-algébrique.

Le théorème suivant assure que la projection d'un ensemble semi-algébrique est un ensemble semi-algébrique.

Théorème 0.2.1.10 (Tarski-Seidenberg, [Cos00], Th.2.3 et Cor.2.4). *L'image d'un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ par la projection naturelle $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur les n premières composantes est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n .*

Les ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n peuvent être décomposés en un nombre fini de cellules disjointes homéomorphes à des pavés ouverts $]0; 1[$, $0 \leq i \leq n$ à l'aide d'un algorithme de décomposition appelé décomposition cylindrique algébrique (DCA).

La décomposition cylindrique algébrique de \mathbb{R}^n est donnée par induction sur n .

Définition 0.2.1.11 (Décomposition cylindrique algébrique). Une décomposition cylindrique algébrique de \mathbb{R}^n est une suite $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ des cellules telles pour tout i , $1 \leq i \leq n$, \mathcal{C}_i est une décomposition de \mathbb{R}^i en des cellules ayant les propriétés suivantes :

- ✓ Toute cellule $C \in \mathcal{C}_1$ est soit un singleton soit un intervalle ouvert.
- ✓ Pour tout i , $1 \leq i < n$ et toute cellule $C \in \mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}^{i+1}$, il existe un nombre fini de fonctions semi-algébriques continues

$$\xi_{C,1} < \dots < \xi_{C,l(C)} : C \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que le cylindre $C \times \mathbb{R}$ est l'union disjointe des cellules de \mathcal{C}_{n+1} qui sont :

- soit le graphe $\Gamma_{C,j}$ d'une des fonctions $\xi_{C,j}$ pour $j \in \{1, \dots, l(C)\}$:

$$\Gamma_{C,j} = \{ (x', \xi_{C,j}(x')) \in S \times \mathbb{R} \}$$

- soit une tranche $T_{C,j}$ du cylindre bornée par les graphes des fonctions $\xi_{C,j}$ et $\xi_{C,j+1}$ pour $j \in \{0, \dots, l(C)\}$ où on prend par convention $\xi_{C,0} = -\infty$ et $\xi_{C,l(C)+1} = +\infty$:

$$T_{C,j} = \{ (x', x_{j+1}) \in S \times \mathbb{R} \mid \xi_{C,j}(x') < x_{j+1} < \xi_{C,j+1}(x') \}$$

Une DCA adaptée à une famille de polynômes est une DCA telle que chacun des polynômes de la famille ait un signe constant sur chacune des cellules. Une DCA adaptée permet de dire si un ensemble semi-algébrique défini par une combinaison booléenne de conditions de signes sur les polynômes de la famille est vide ou non.

Étant donnée une famille de polynômes, il y a des algorithmes qui calculent une DCA adaptée (voir [Cos00], Page 38-39).

Notons une bonne propriété de plus des ensembles semi-algébriques suivante :

Théorème 0.2.1.12 (Łojasiewicz, [Cos00], [BCR98]). *Le nombre de composantes connexes d'un ensemble semi-algébrique est fini et chaque composante connexe est semi-algébrique.*

0.2.2 Compactifications de $SE_3(\mathbb{R})$

Un déplacement est une application

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \longmapsto Rx + d, R \in SO_3(\mathbb{R}), d \in \mathbb{R}^3$$

où $SO_3(\mathbb{R})$ est le groupe des rotations de \mathbb{R}^3 .

L'ensemble des déplacements, noté $SE_3(\mathbb{R})$, est un sous-groupe du groupe linéaire de dimension 4 $GL_4(\mathbb{R})$. Il peut s'écrire

$$SE_3(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times 3} \\ d & R \end{bmatrix} \middle| R \in SO_3(\mathbb{R}), d \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et est un groupe de Lie non compact. Les compactifications ci-dessous sont bien connues.

0.2.2.1 Compactification de Study de $SE_3(\mathbb{R})$

Nous présentons la compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ qui a été introduite par Study en 1891 [Stu91]. Le modèle de Study donne une compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ comme un sous-ensemble d'une quadrique dite de Study dans l'espace projectif réel de dimension 7.

Les quaternions donnent une paramétrisation sans singularité des rotations. Leur ensemble noté \mathbb{H} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4, d'une base $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, et un élément $q \in \mathbb{H}$ s'écrit sous la forme

$$q = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \quad \text{où} \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}.$$

Pour une paramétrisation des éléments de $SE_3(\mathbb{R})$, les quaternions duaux sont utilisés. Un quaternion dual s'écrit sous la forme

$$h = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} + \varepsilon(y_0\mathbf{1} + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}),$$

où $(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^8$ et $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$. L'algèbre des quaternions duaux est noté $\mathbb{H}[\varepsilon]$.

On obtient ainsi une paramétrisation de $SE_3(\mathbb{R})$ à l'aide des quaternions duaux unitaires (où nous notons $\underline{x} = x_0, x_1, x_2, x_3$ et $\underline{y} = y_0, y_1, y_2, y_3$) :

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1x_2 - x_0x_3) & 2(x_1x_3 + x_0x_2) \\ 2(x_1x_2 + x_0x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2x_3 - x_0x_1) \\ 2(x_1x_3 - x_0x_2) & 2(x_2x_3 + x_0x_1) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$t(\underline{x}, \underline{y}) = 2 \begin{bmatrix} x_0y_1 - x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_0y_2 - x_1y_3 - x_2y_0 + x_3y_1 \\ x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

et

$$x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0, \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (3)$$

Au lieu de décrire les déplacements par une paire des quaternions duaux unitaires, considérons les huit coefficients du quaternion dual unitaire comme les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}^7(\mathbb{R})$. Ces coordonnées homogènes vérifient donc l'équation de la quadrique S suivante dite de Study.

$$S : x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 .$$

Le 3-plan

$$E : x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0 \subset S$$

mais ses points ne correspondent pas à des déplacements. Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème 0.2.2.1 (Study, [Stu03]). Soient S la quadrique de Study d'équation

$$\sum_{i=0}^3 x_i y_i = 0$$

et $E \subset S$, le 3-plan d'équations $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Il existe une correspondance bijective, qui à tous points homogènes \underline{x} , \underline{y} appartenant à $S \setminus E$, associe le déplacement

$$u \longmapsto \frac{1}{\Delta(\underline{x})} \left(R(\underline{x})u + t(\underline{x}, \underline{y}) \right) ,$$

où $\Delta(\underline{x}) = \sum_{i=0}^3 x_i^2$, R donné par la formule (1) et t par la formule (2).

Cette compactification de Study $\alpha : SE_3(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} S \setminus E$ ci-dessus fournit une base algébrique et géométrique riche et solide pour les études en cinématique.

0.2.2.2 Compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ comme produit semi-direct $SO_3(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$

Le groupe $SE_3(\mathbb{R})$ peut également être vu comme le produit semi-direct, $SO_3(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ des groupes $SO_3(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^3 . Par conséquent, une autre compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ peut être obtenue en compactifiant chacun de ses facteurs. Le groupe des rotations $SO_3(\mathbb{R})$ est compact et est isomorphe en tant que variété réelle à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ via l'application régulière $[\underline{x}] \mapsto \frac{1}{\Delta(\underline{x})} R(\underline{x})$ où R est la matrice de rotation définie dans (1). Nous pouvons aussi compactifier \mathbb{R}^3 en $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ par $(s, t, u) \mapsto [1, s, t, u]$. On obtient donc la compactification suivante de $SE_3(\mathbb{R})$

$$\gamma : SE_3(\mathbb{R}) \cong SO_3(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) .$$

Une question que l'on peut se poser serait de savoir le lien qui existe entre ces compactifications du groupe de Lie $SE_3(\mathbb{R})$. Le besoin de répondre à cette question et d'étudier les points à l'infini de $SE_3(\mathbb{R})$ dans ces compactifications explique notre première motivation de cette thèse.

0.2.3 Analyse des mécanismes

Nous présentons ici quelques résultats établis dans les articles [SWH14, WHP08, WH11] concernant quelques plateformes mobiles de degré 3 de différentes architectures : 3-RPS, SNU 3-UPU et Tsai 3-UPU ayant tous leur base et leur plateforme mobile en forme des triangles équilatéraux (Figure 1)

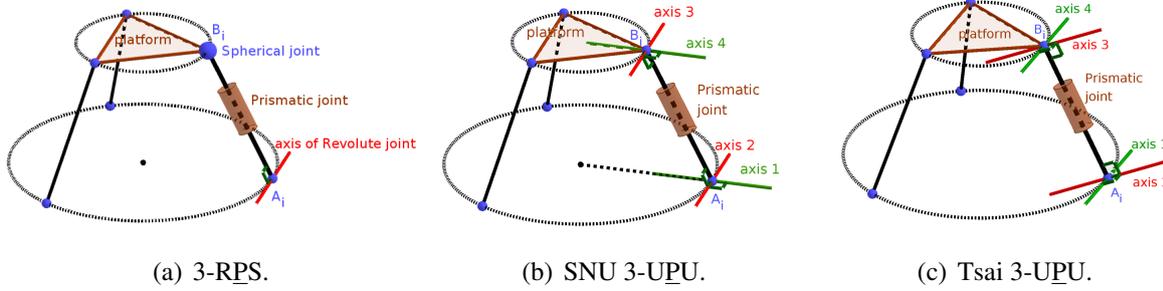


FIGURE 1 – Quelques manipulateurs parallèles de degré de liberté 3

Après avoir formé l'idéal engendré par les équations de contraintes imposées par la plateforme, l'équation de la quadrique de Study S , nous le saturons par rapport à $\Delta(\underline{x}) = \sum_{i=0}^3 x_i^2$ afin d'éliminer les composantes parasites contenues dans le 3-plan exceptionnel E . L'idéal obtenu définit l'espace des configurations de la plateforme, une sous-variété de la quadrique de Study. L'espace des configurations n'est pas toujours irréductible. Ses composantes irréductibles sont donc les modes opératoires de la plateforme. Ces modes opératoires sont définis par les idéaux primaires issus d'une décomposition primaire de l'idéal de l'espace des configurations.

Mode opératoire du 3-RPS : L'espace des configurations du 3-RPS se décompose en deux composantes irréductibles qui constituent ses modes opératoires, définies par des idéaux premiers suivants :

- ✓ $J_1 = \langle x_0, x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_2x_3 + x_3y_0 + x_2y_1 - x_1y_2, x_2^2 - x_3^2 - 2x_2y_0 + 2x_3y_1 - 2x_1y_3, x_3^2y_1 + x_2y_0y_1 - 2y_0^2y_1 - x_3y_1^2 - 2y_1^3 - 2y_1y_2^2 + x_2y_2y_3 - 2x_3y_3^2 - 2y_1y_3^2, x_3^3 - 3x_3y_0^2 - 2y_0^2y_1 - 3x_3y_1^2 - 2y_1^3 - x_1x_2y_2 + 3x_1y_0y_2 + x_3y_2^2 - 2y_1y_2^2 + 2x_1x_3y_3 - x_2y_2y_3 - 4x_3y_3^2 - 2y_1y_3^2 \rangle$
- ✓ $J_2 = \langle x_1, x_0y_0 + x_2y_2 + x_3y_3, x_2x_3 + x_3y_0 + x_2y_1 - x_0y_3, x_2^2 - x_3^2 - 2x_2y_0 + 2x_3y_1 + 2x_0y_2, x_3^2y_0 + x_2y_0^2 - 2y_0^3 - x_3y_0y_1 - 2y_0y_1^2 - 2y_0y_2^2 + 3x_3y_2y_3 + x_2y_3^2 - 2y_0y_3^2, x_3^3 - 3x_3y_0^2 - x_3^2y_1 - x_2y_0y_1 - 2x_3y_1^2 - 2x_0x_3y_2 - 2x_0y_1y_2 - x_0x_2y_3 - 3x_2y_2y_3 - 3x_3y_3^2 \rangle$

En examinant les générateurs de ces deux idéaux, il est difficile de décrire ce que sont les modes opératoires qu'ils définissent. Néanmoins, nous pouvons voir que le mode opératoire défini par l'idéal J_1 a pour partie rotation un demi-tour (car $x_0 = 0$). Dans le deuxième mode, défini par J_2 , la partie rotation est une rotation d'axe horizontal $(0, x_2, x_3)$.

Mode opératoire du Tsai 3-UPU : L'espace des configurations du Tsai 3-UPU se décompose en 5 modes opératoires définis par les idéaux premiers suivants :

- ✓ $L_0 = \langle y_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$

- ✓ $L_1 = \langle x_0, y_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $L_2 = \langle y_0, y_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $L_3 = \langle x_0, x_1, y_2, y_3 \rangle$
- ✓ $L_4 = \langle 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, 2x_0y_0 + x_2y_2 + x_3y_3, 3x_1x_2 - x_0x_3 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3, x_0x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2y_2 - 2x_3y_3, x_0^2 + 9x_1^2 - 4y_2^2 - 4y_3^2, 2x_0x_3y_1 + 3x_2^2y_2 - 4x_3y_1y_2 + 3x_2x_3y_3 - 4x_2y_1y_3, 6x_1x_3y_0 - x_2^2y_2 + 4x_2y_0y_2 - x_2x_3y_3 - 4x_3y_0y_3, 18x_1^2y_0 + 3x_1x_3y_2 + 2x_2y_2^2 - 8y_0y_2^2 - x_0x_3y_3 - 2x_3y_2y_3 - 8y_0y_3^2, 3x_3y_0y_2^2 + x_2y_1y_2^2 - 4y_0y_1y_2^2 + 6x_2y_0y_2y_3 - 2x_3y_1y_2y_3 - 3x_3y_0y_3^2 - x_2y_1y_3^2 - 4y_0y_1y_3^2, 3x_3^2y_0y_2 + x_2x_3y_1y_2 - 4x_3y_0y_1y_2 + 9x_2x_3y_0y_3 + x_2^2y_1y_3 - 2x_3^2y_1y_3 - 4x_2y_0y_1y_3, 3x_2x_3y_0y_2 + x_2^2y_1y_2 - 4x_2y_0y_1y_2 + 3x_3^2y_0y_3 + x_2x_3y_1y_3 + 4x_3y_0y_1y_3, 3x_2^2y_0y_2 - x_2x_3y_1y_2 - 4x_3y_0y_1y_2 + 3x_2x_3y_0y_3 - x_3^2y_1y_3 - 4x_2y_0y_1y_3, 3x_2^3y_2 + 3x_2x_3^2y_2 - 8x_2x_3y_1y_2 + 3x_2^2x_3y_3 + 3x_3^3y_3 - 4x_2^2y_1y_3 + 4x_3^2y_1y_3, 9x_2^2x_3y_0 - 3x_3^3y_0 + x_2^3y_1 - 3x_2x_3^2y_1 - 4x_2^2y_0y_1 - 4x_3^2y_0y_1 \rangle$

Les quatre premiers modes opératoires sont des 3-plans contenus dans la quadrique de Study et sont aussi les modes du SNU 3-UPU. Le dernier mode, le mode mystérieux, appelé **mode général** dans [WH11], défini par l'idéal L_4 n'est pas facile à analyser : il n'est ni planaire ni purement translationnel. Tout ce que nous savons de lui est juste qu'il est de dimension 3 (comme tous les autres modes) et de degré 11.

Problème géométrique direct dans le mode général : Il est expliqué dans [WH11] que le problème géométrique direct dans le mode général a 64 solutions, et qu'il existe des valeurs des longueurs de jambes qui donnent 24 solutions réelles. Contrairement aux autres manipulateurs, il est difficile de décrire les solutions aux PGD dans une tranche de l'espace articulaire (le plan articulaire formé par les deux autres variables articulaires) pour une valeur donnée d'une longueur des jambes à cause de la complexité des calculs.

Les difficultés de l'analyse rencontrées ci-dessus, notamment les difficultés de pouvoir décrire explicitement certains modes opératoires et de calculer les solutions du PGD de certains mécanismes expliquent notre deuxième motivation.

0.3 Contribution

Nous résumons ici notre contribution dans cette thèse. Cela nous a valu deux publications scientifiques [DC20, CD21].

0.3.1 Une compactification de $SE_3(\mathbb{R})$

Nous commençons par regarder les points à l'infini du groupe des déplacements $SE_3(\mathbb{R})$ dans la compactification de Study donnée par S . Le 3-plan E d'équations $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (2.15) peut être vu comme le bord de $SE_3(\mathbb{R})$ dans cette quadrique. Ce bord est composé des limites des déplacements quand la norme du vecteur de translation tend vers l'infini. Dans ce bord, toutes les

informations sur la partie rotation du déplacement sont perdues. Afin d'éviter la perte d'information sur la partie rotation du déplacement, nous éclatons la quadrique de Study S (2.14) le long de E .

Afin de décrire plus précisément l'éclatement, nous introduisons des nouvelles variables homogènes $\underline{w} = w_0, w_1, w_2, w_3$. L'éclatement de S le long de E est la projection $\pi : \text{Bl}_E(S) \rightarrow S$ où

$$\text{Bl}_E(S) = \left\{ \left(\left[\underline{x}, \underline{y} \right], [\underline{w}] \right) \in \mathbb{P}^7(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=0}^3 x_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^3 y_i w_i = 0 \right. \\ \left. x_i w_j - x_j w_i = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq 3 \right\} \quad (4)$$

et π est la restriction de la projection sur le premier facteur. Notons que $\text{Bl}_E(S)$ est birationnelle à S .

Ce qui conduit donc à une nouvelle compactification de $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\beta : \text{SE}_3(\mathbb{R}) \cong S \setminus E \longrightarrow \text{Bl}_E(S) \setminus \pi^{-1}(E) \hookrightarrow \text{Bl}_E(S)$$

où $\pi^{-1}(E)$ est *le diviseur exceptionnel*, le bord de $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ dans $\text{Bl}_E(S)$ et définit une hypersurface de dimension 5 (alors que E en a 3) dans le produit des espaces projectifs $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (avec les coordonnées homogènes \underline{y} pour le premier facteur et \underline{w} pour le second) dont l'équation est

$$w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = 0.$$

Les coordonnées homogènes \underline{w} et \underline{y} donnent respectivement les informations par rapport à la rotation (de la manière dont les quaternions déterminent une rotation) et la direction du vecteur de translation donnée par la formule (2) en remplaçant les \underline{x} par les \underline{w} correspondant. Plus précisément, la matrice de rotation et la direction de translation sont données par :

$$R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0^2 + w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & 2(w_1 w_2 - w_0 w_3) & 2(w_1 w_3 + w_0 w_2) \\ 2(w_1 w_2 + w_0 w_3) & w_0^2 - w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2(w_2 w_3 - w_0 w_1) \\ 2(w_1 w_3 - w_0 w_2) & 2(w_2 w_3 + w_0 w_1) & w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} w_0 y_1 - w_1 y_0 + w_2 y_3 - w_3 y_2 \\ w_0 y_2 - w_1 y_3 - w_2 y_0 + w_3 y_1 \\ w_0 y_3 + w_1 y_2 - w_2 y_1 - w_3 y_0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Si les \underline{w} et les \underline{y} sont normalisés respectivement par $\sum_{i=0}^3 w_i^2 = 1$ et $\sum_{i=0}^3 y_i^2 = 1$, alors le vecteur $u(\underline{w}, \underline{y})$ a pour norme 1. Cette normalisation est utile pour les calculs et conduit à une façon de décrire la compactification obtenue par éclatement au moyen d'un revêtement. La description est la suivante :

0.3.2 Un revêtement de la compactification de $\text{SE}_3(\mathbb{R})$

Soit $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ l'ensemble des $(\underline{w}, s, \underline{y})$ qui vérifient les équations et l'inégalité :

$$\begin{aligned} \|\underline{w}\|^2 &= w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1 & \|\underline{y}\|^2 &= y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \\ \underline{w} \cdot \underline{y} &= w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = 0 & s &\geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

L'ensemble \tilde{S} est un ensemble semi-algébrique réel de dimension 6 qui s'envoie dans S via l'application $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow S$ définie par

$$(\underline{w}, s, \underline{y}) \longmapsto [w_0s, w_1s, w_2s, w_3s, y_0, y_1, y_2, y_3] \quad (8)$$

L'image de $\tilde{\pi}$ est le complémentaire dans S du 3-plan $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ (qui correspond aux déplacements dont le vecteur de translation est nul). Ainsi tout déplacement de vecteur de translation non nul est l'image par $\tilde{\pi}$ de deux points $(\underline{w}, s, \underline{y})$ et $(-\underline{w}, s, -\underline{y})$ de \tilde{S} avec $s > 0$ et est l'inverse de la norme du vecteur de translation. L'image par π d'un élément $(\underline{w}, 0, \underline{y})$ de \tilde{S} est l'élément $[0, 0, 0, 0, y_0, y_1, y_2, y_3]$ du 3-plan exceptionnel E . L'élément $(\underline{w}, 0, \underline{y})$ de \tilde{S} peut être vu comme la dégénérescence du déplacement associé au point $(\underline{w}, s, \underline{y})$ de \tilde{S} quand s tend vers 0 c'est-à-dire quand la longueur du vecteur de translation tend vers l'infini. Il conserve donc les informations sur la partie rotation en les coordonnées \underline{w} et sur la direction du vecteur de translation en les coordonnées \underline{w} et \underline{y} en remplaçant \underline{x} par \underline{w} dans la formule (2).

Notons que l'application $\tilde{\pi}$ se relève à l'éclatement $\text{Bl}_E(S)$ en envoyant $(\underline{w}, s, \underline{y})$ sur $([s\underline{w}], [\underline{y}], [\underline{w}])$. En particulier, en ce qui concerne le bord, il y a quatre éléments $(\pm\underline{w}, 0, \pm\underline{y})$ qui s'envoient sur le même élément $([\underline{y}], [\underline{w}])$ du bord. Le bord de \tilde{S} est l'hypersurface dans le produit de sphères $S^3 \times S^3$ d'équation $w_0y_0 + w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 = 0$.

0.3.3 Comparaison des compactifications

Nous établissons maintenant le lien entre la compactification α de Study, la compactification β obtenue en éclatant la quadrique de Study et la compactification γ de $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ vu comme $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$. Nous avons déjà vu que S et $\text{Bl}_E(S)$ sont birationnels et que $S \setminus E$ et $\text{Bl}_E(S) \setminus \pi^{-1}(E)$ sont isomorphes. Le théorème ci-dessous montre que les compactifications β et γ sont isomorphes.

Soit σ le morphisme défini par :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^7(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ ([\underline{w}], [r, s, t, u]) &\longmapsto ([\underline{x}], [\underline{y}], [\underline{w}]) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} x_0 = w_0r & 2y_0 = -w_1s - w_2t - w_3u \\ x_1 = w_1r & 2y_1 = w_0s + w_3t - w_2u \\ x_2 = w_2r & 2y_2 = -w_3s + w_0t + w_1u \\ x_3 = w_3r & 2y_3 = w_2s - w_1t + w_0u \end{cases} \quad (9)$$

Théorème 0.3.3.1. *Les deux compactifications β et γ de $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ sont isomorphes. Plus précisément, le morphisme σ induit un isomorphisme des variétés réelles (dans le sens du [BCR98]) $\sigma : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Bl}_E(S)$ tel que $\beta = \sigma \circ \gamma$.*

0.3.4 Compactification et bord des espaces des configurations

Soit C un espace des configurations ou un mode opératoire d'un mécanisme et I l'idéal engendré par les équations définissant C . L'ensemble C est une sous-variété algébrique de la quadrique de Study

S . Considérons sa transformée stricte \tilde{C} dans l'éclatement $\pi : \text{Bl}_E(S) \rightarrow S$. C'est l'image réciproque $\pi^{-1}(C)$ de C avec toutes les composantes contenues dans $\pi^{-1}(E)$ enlevées. L'idéal de \tilde{C} est donc l'idéal obtenu après saturation de l'idéal I et les équations définissant $\text{Bl}_E(S)$ par rapport à $\Delta(\underline{x})$. Le bord de C est alors $\tilde{C} \cap \pi^{-1}(E)$. En posant $\underline{x} = 0$ dans les équations de \tilde{C} , nous obtenons des équations bihomogènes en $\underline{w}, \underline{y}$ pour le bord de C dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Étudions le bord des modes opératoires des manipulateurs déjà abordés ci-haut en les dégénéralant.

Si nous nous plaçons dans \tilde{S} , l'image inverse $\tilde{\pi}^{-1}(C)$ de C dans la modification \tilde{S} de S est obtenue en substituant les variables x_i par les variables w_i dans les générateurs de I et en ajoutant les équations de (7) dans la liste des générateurs. L'idéal I devient donc un idéal de l'anneau de polynômes à 9 indéterminées \underline{w}, s et \underline{y} .

Pour enlever de $\tilde{\pi}^{-1}(C)$ les composantes parasites entièrement contenues dans l'hyperplan défini par $s = 0$, nous saturons l'idéal I par rapport à s . Nous obtenons le nouvel idéal \tilde{I} , décrivant un sous-ensemble $\tilde{C} \subset \tilde{S}$. Les points $(\underline{w}, s, \underline{y})$ de \tilde{C} ayant $s > 0$ correspondent aux positions et orientations dans C ($(\underline{w}, s, \underline{y})$ et $(-\underline{w}, s, -\underline{y})$ donne la position et orientation). Les points $(\underline{w}, s, \underline{y})$ peuvent donc être vus comme des positions et orientations dégénérées dans l'espace des configurations ou le mode opératoire C , quand les longueurs des jambes tendent vers l'infini. L'intersection de \tilde{C} avec l'hyperplan $s = 0$ forme le bord de C , plus exactement, un revêtement du bord de C . C'est un sous-ensemble algébrique de dimension $\dim C - 1$ du bord de \tilde{S} et se calcule donc en posant $s = 0$ dans l'équation déterminant \tilde{C} .

Bord des modes opératoires du 3-RPS :

Les bords $\tilde{\mathcal{J}}_1$ de \mathcal{J}_1 et $\tilde{\mathcal{J}}_2$ de \mathcal{J}_2 sont des sous-variétés de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ décrits par les équations suivantes :

$$\checkmark \tilde{\mathcal{J}}_1 : w_0 = 0, y_1 = 0, w_2y_2 + w_3y_3 = 0, w_1y_3 + w_2y_0 = 0, w_1y_2 - w_3y_0 = 0$$

$$\checkmark \tilde{\mathcal{J}}_2 : w_1 = 0, y_0 = 0, w_2y_2 + w_3y_3 = 0, w_0y_3 - w_2y_1 = 0, w_0y_2 + w_3y_1 = 0$$

Chacun de ces deux bords $\tilde{\mathcal{J}}_1$ et $\tilde{\mathcal{J}}_2$ est isomorphe à un plan projectif. Leur intersection est une droite projective et ils s'échangent du premier vers le second par un demi-tour d'axe vertical.

Les points de $\tilde{\mathcal{J}}_1$ peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour et une translation infinie dans la direction verticale. Ceux de $\tilde{\mathcal{J}}_2$ peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par une rotation d'axe horizontal et une translation infinie dans la direction verticale. Les points de l'intersection peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour d'axe horizontal et une translation infinie dans la direction verticale.

Cette étude de l'espace des configurations du 3-RPS montre clairement que la dégénérescence à l'infini de ces deux modes opératoires donne leur description cinématique simple.

Bord du mode général du Tsai 3-UPU :

Le bord du mode opératoire du Tsai 3-UPU est donc défini par :

$$\begin{aligned} w_2y_3 + w_3y_2 = 0, w_2y_2 - w_3y_3 = 0, w_1y_1 + w_3y_3 = 0, w_0y_0 + w_3y_3 = 0, \\ y_2^2 + y_3^2 = 0, w_2^2y_0y_1 + w_3^2y_0y_1 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Il n'est pas une sous-variété irréductible de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mais se décompose en trois composantes descriptibles qui sont en réalité les modes opératoires du SNU 3-UPU.

- ✓ \mathcal{L}_5 : $w_0 = 0, y_3 = 0, y_2 = 0, y_1 = 0$. C'est un 2-plan projectif et ses points correspondent aux déplacements dont la partie rotation est un demi-tour et la partie translation est une translation infinie parallèle à l'axe du demi-tour.
- ✓ \mathcal{L}_6 : $w_1 = 0, y_3 = 0, y_2 = 0, y_0 = 0$. C'est encore un plan projectif et ses points correspondent aux demi-tours d'axe vertical suivis des déplacements similaires à ceux de \mathcal{L}_5 .
- ✓ \mathcal{L}_7 :

$$\begin{aligned} w_2^2 + w_3^2 = 0, w_2y_3 + w_3y_2 = 0, w_2y_2 - w_3y_3 = 0, w_1y_1 + w_3y_3 = 0, \\ w_0y_0 + w_3y_3 = 0, y_2^2 + y_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Le bord \mathcal{L}_7 est non réel et ses points réels sont les seuls deux points singuliers : l'un dans \mathcal{L}_5 et l'autre \mathcal{L}_6 .

On voit encore dans cet exemple comment la dégénérescence au bord peut donner des informations sur le comportement cinématique d'un mode opératoire difficile à analyser : on sait à quoi ressemblent les déplacements dans ce mode opératoire, lorsque les longueurs des jambes deviennent de plus en plus grandes.

0.3.5 Problème géométrique direct dégénéré

Nous parlons des problèmes géométriques dégénérés (PGDD) ou asymptotiques lorsque les valeurs des longueurs des jambes tendent vers l'infini. Le nombre de solutions du PGDD change en des valeurs critiques de l'application géométrique inverse dégénérée (AGID). Pour cela, nous déterminons aussi les bords des espaces articulaires.

0.3.6 Bords des espaces articulaires des manipulateurs à trois degrés de liberté

On pourrait penser à considérer simplement $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ comme une compactification de l'espace articulaire. Malheureusement nous ne pouvons pas le faire ainsi car tous les points de coordonnées homogènes $(r_1, r_2, r_3, 1)$ tendraient vers $(1, 1, 1, 0)$ qui est de dimension 0.

Nous procédons donc autrement en faisant un changement de variables $d_1 = r_1 - r_3, d_2 = r_2 - r_3$ puis nous laissons r_3 tendre vers l'infini. Plus précisément, nous plongeons $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ de variables (d_1, d_2, r_3) dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et nous prenons $\mathbb{R}^2 \times \{\infty\}$ comme le bord de l'espace articulaire.

L'AGID est donc définie du bord de l'espace des configurations (de variables homogènes \underline{w} , \underline{y}) vers le bord de l'espace articulaire (de variables articulaires d_1 , d_2). On obtient

$$\begin{aligned} d_1 &= (R(\underline{w})b_1 - A_1) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) - (R(\underline{w})b_3 - A_3) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) \\ d_2 &= (R(\underline{w})b_2 - A_2) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) - (R(\underline{w})b_3 - A_3) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) \end{aligned} \quad (12)$$

Le PGDD est donc de résoudre par rapport aux variables w_i et y_i le système composé des équations du (3.18), l'équation du bord et les équations de normalisation des coordonnées \underline{w} et \underline{y}

0.3.7 PGDD du 3-RPS

Nous considérons seulement le premier mode opératoire dégénéré. Le PGDD est donc décrit par

$$d_1 = \frac{3}{2}w_1w_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}w_1w_2 \quad d_2 = \sqrt{3}w_1w_2 \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1.$$

Ce qui donne en utilisant l'algorithme de décomposition cylindrique algébrique implémentée dans SIROPA [SIR], les régions connexes de l'espace articulaire dégénéré où il y a un nombre constant de solutions réelles au PGDD. Nous faisons aussi une comparaison avec le PGD normal pour des valeurs de plus en plus grandes de r_3 fixées.

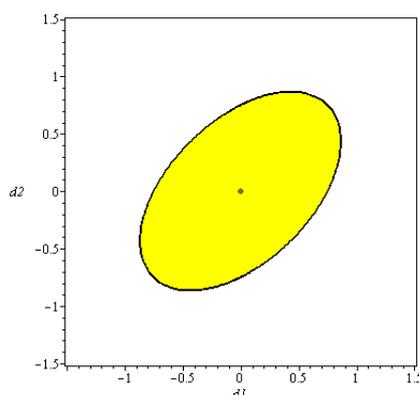


FIGURE 2 – PGDD pour le mode \mathcal{J}_1 du 3-RPS. Région jaune : 2 solutions réelles

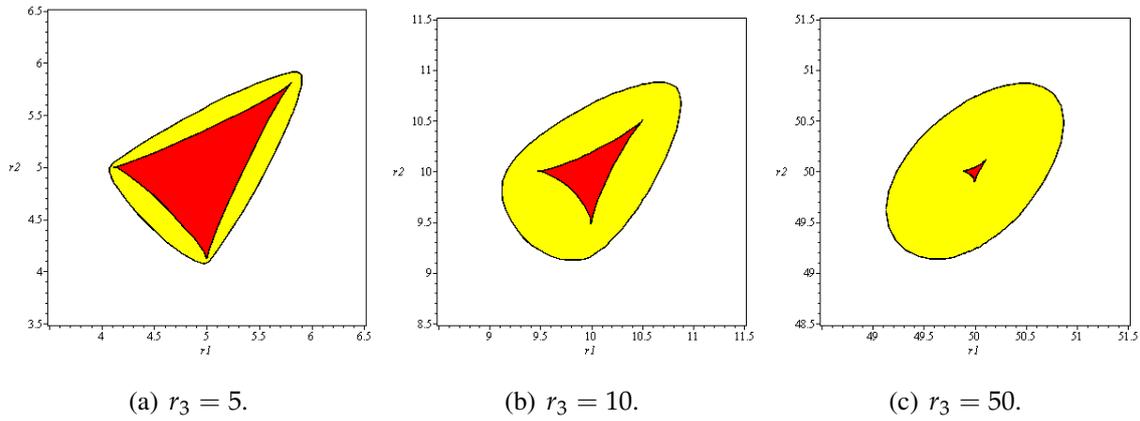


FIGURE 3 – PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 4 solutions réelles, Régions rouges : 8 solutions réelles

Dans la figure 3.1, le PGDD admet deux solutions à l'intérieur de l'ellipse donc l'équation est donnée par

$$d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 = \frac{9}{16}$$

excepté l'origine ($d_1 = d_2 = 0$), et aucune solution réelle en dehors de l'ellipse. L'ensemble des valeurs critiques est donc l'ellipse union l'origine où le PGDD a une infinité de solutions réelles.

La figure 3.2 représente l'ensemble des valeurs critiques de l'AGI pour les valeurs croissantes de r_3 : 5, 10, 50. Nous observons clairement que le deltoïde se réduit à un point lorsque r_3 tend vers l'infini donnant ainsi à la limite, l'image du PGDD (voir fig. 3.1).

Ainsi, nous voyons que le PGD pour des longueurs de jambes suffisamment grandes est une perturbation du PGDD, très simple. La singularité à l'origine vue dans le cas du PGDD n'est pas stable et donne le deltoïde que l'on voit dans la perturbation.

0.3.8 PGDD pour le mode général du Tsai 3-UPU

Nous avons déjà vu que le bord du mode général \mathcal{L}_5 se décompose en trois composantes : $\mathcal{L}_5 \cup \mathcal{L}_6 \cup \mathcal{L}_7$ qui sont les modes opératoires dégénérés du SNU 3-UPU. Le PGDD peut donc être séparément dans chacun d'eux. Nous obtenons 2 solutions dans chacun des composantes \mathcal{L}_5 et \mathcal{L}_6 . Pour $d_1 = d_2 = 0$, il y a des solutions dans \mathcal{L}_7 qui sont des poses dégénérées singulières.

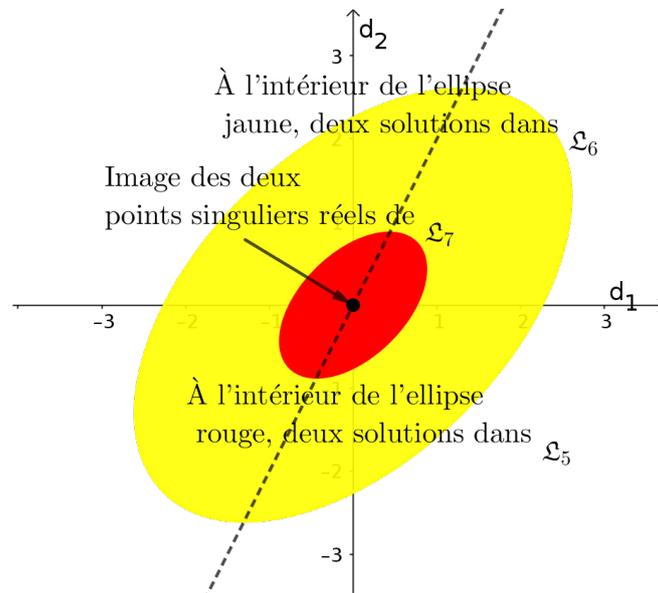


FIGURE 4 – PGDD pour le bord opératoire général du Tsai 3-UPU

Avec ces quelques exemples présentés, nous voyons clairement l'apport des points à l'infini dans l'analyse cinématique des mécanismes, rendant facile à comprendre les analyses cinématiques plutôt complexes.

0.3.9 Analyse dégénérée du 4-UPU

Considérons l'architecture suivante du 4-UPU (la description détaillée du manipulateur est faite à la section 2.6.1.4).

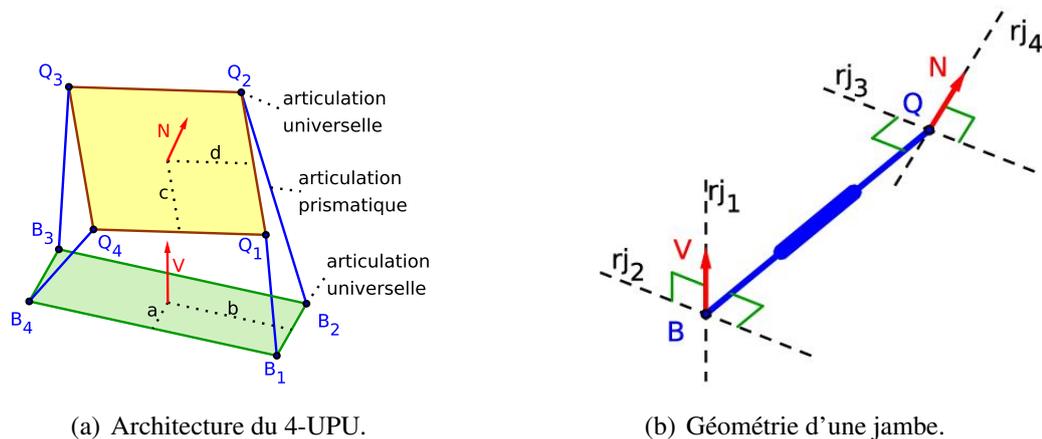


FIGURE 5 – Le 4-UPU et la géométrie d'une jambe

L'espace des configurations du 4-UPU se décompose en trois modes opératoires : le mode de Schoenflies, le mode de Schoenflies retourné et quelques modes opératoires parasites. Ces derniers dépendent de l'architecture du manipulateur ; ils n'existent que si nous avons de la condition suivante sur les paramètres : $(c - a)(b - d) \geq 0$ (voir Section 2.6.1.4).

Le bord de ces modes opératoires se détermine de la même manière que ceux des manipulateurs à trois degrés de liberté étudiés.

Pour ce qui est de l'espace articulaire, contrairement à ce qui se passe pour les robots à 3 jambes tels que le 3-RPS et les 3-UPU, la compactification de l'espace articulaire est un peu spécifique à cause de l'architecture du manipulateur (la base et la plateforme mobile sont rectangulaires). Par exemple quand la longueur r_4 tend vers l'infini, nous obtenons une relation linéaire entre les différences des longueurs des jambes $r_j - r_4$, $j = 1, \dots, 3$:

$$(r_2 - r_4) - (r_1 - r_4) - (r_3 - r_4) = 0 \quad \text{soit} \quad r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 0 ,$$

Pour contrebalancer, nous multiplions $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ par r_4 pour avoir la limite finie non nulle. Nous introduisons une nouvelle variable articulaire dégénérée e_3 qui est la limite de $r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)$ quand r_4 tend vers l'infini. Ce qui est la même chose de multiplier cette quantité par $1/s$ où s est l'inverse du vecteur de translation et de tendre s vers 0.

Le PGDD est alors décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} d_1 - u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (P_1 - P_4) - (B_1 - B_4)) &= 0 \\ d_2 - u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (P_2 - P_4) - (B_2 - B_4)) &= 0 \\ e_3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \left(\|R(\underline{w}) P_i - B_i\|^2 - \left(u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) P_i - B_i) \right)^2 \right) &= 0 \\ w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 &= 0 \\ w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1 &= 0 \\ y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Dans la suite, nous ne considérons que le mode de Schoenflies (le mode de Schoenflies retourné peut être traité de la même manière). Le mode de Schoenflies étant déterminé par $x_2 = x_1 = x_0 y_0 + x_3 y_3 = 0$. Son bord est défini dans $S^3 \times S^3$ par :

$$w_2 = w_1 = w_0 y_0 + w_3 y_3 = 0$$

Dans ce cas, le lieu de singularité dégénéré se décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 - 2(b+d)w_3 y_1 - 2(b-d)w_0 y_2 &= 0 \\ d_2 - 2(c-a)w_0 y_1 - 2(a+c)w_3 y_2 - 2(b+d)w_3 y_1 - 2(b-d)w_0 y_2 &= 0 \\ e_3 - 8(ab+cd)w_3^2 y_1 y_2 - 8(ab-cd)w_0 w_3 y_2^2 + 4(a+c)(b-d)w_0 w_3 + 4(a-c)(b-d)y_1 y_2 \\ + 4(a-c)(b+d)y_0 y_3 &= 0 \\ (ad-bc)(w_0 - w_3)(w_0 + w_3)(w_0 y_3 - w_3 y_0) \left((a-c)(b-d)w_0^2 + (a+c)(b+d)w_3^2 \right) &= 0 \\ w_0 y_0 + w_3 y_3 &= 0 \\ w_0^2 + w_3^2 - 1 &= 0 \\ y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

La projection de cette variété algébrique dans l'espace articulaire dégénéré donne pour $a = 2$, $b = c = 3$ et $d = 2$, la réunion de deux paraboloides hyperboliques d'équation respective

$$d_1^2 - d_1 d_2 + e_3 - 20 = 0, \quad d_1^2 - d_1 d_2 + e_3 + 20 = 0,$$

et d'une surface \mathcal{S} d'équation

$$\begin{aligned} & 28561d_1^8 - 114244d_1^7d_2 + 185766d_1^6d_2^2 - 157444d_1^5d_2^3 + 75361d_1^4d_2^4 - 21600d_1^3d_2^5 + 3600d_1^2d_2^6 \\ & + 97344d_1^6e_3 - 292032d_1^5d_2e_3 + 320832d_1^4d_2^2e_3 - 154944d_1^3d_2^3e_3 + 36000d_1^2d_2^4e_3 - 7200d_1d_2^5e_3 \\ & - 878800d_1^6 + 2636400d_1^5d_2 - 3075800d_1^4d_2^2 + 1757600d_1^3d_2^3 - 439400d_1^2d_2^4 + 137566d_1^4e_3^2 \\ & - 275132d_1^3d_2e_3^2 + 151966d_1^2d_2^2e_3^2 - 14400d_1d_2^3e_3^2 + 3600d_2^4e_3^2 - 1497600d_1^4e_3 + 2995200d_1^3d_2e_3 \\ & - 2246400d_1^2d_2^2e_3 + 748800d_1d_2^3e_3 + 97344d_1^2e_3^3 - 97344d_1d_2e_3^3 + 10140000d_1^4 - 20280000d_1^3d_2 \\ & + 11140000d_1^2d_2^2 - 1000000d_1d_2^3 + 250000d_2^4 - 618800d_1^2e_3^2 + 618800d_1d_2e_3^2 - 309400d_2^2e_3^2 \\ & + 28561e_3^4 + 5760000d_1^2e_3 - 5760000d_1d_2e_3 - 52000000d_1^2 + 52000000d_1d_2 - 26000000d_2^2 \\ & - 3380000e_3^2 + 100000000 = 0. \end{aligned}$$

La surface \mathcal{S} a des auto-intersections le long de deux arcs des paraboles qui peuvent être vus comme ses manches : la première parabole, dans le plan $d_2 = 0$, a pour équation $13d_1^2 + 13e_3 - 100 = 0$ et la seconde, dans le plan $d_2 = 2d_1$, pour équation $13d_2^2 - 52e_3 - 400 = 0$ (voir Fig. 6). Deux nappes de la surface \mathcal{S} viennent se croiser sur ces arcs.

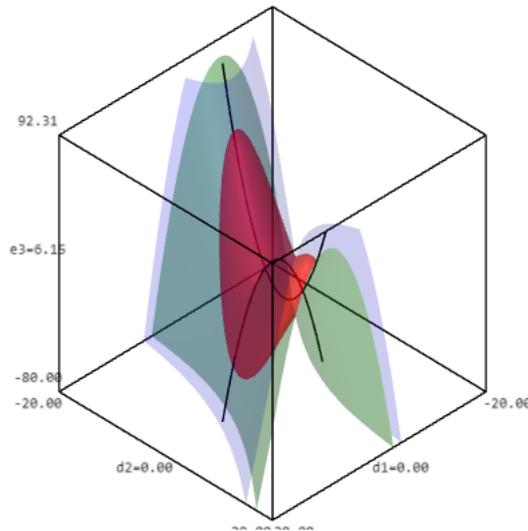


FIGURE 6 – Surface \mathcal{S} (avec ses manches) coincée entre les deux paraboloides hyperboliques.

Il est très difficile de décrire les solutions au PGDD suivant les régions de cet espace de singularité image mais globalement il y a 4 solutions réelles. Nous allons nous contenter de la description plane. La section de l'espace articulaire image donnée par le plan $d_2 = 2$ donne les courbes de singularité dégénérée suivante :

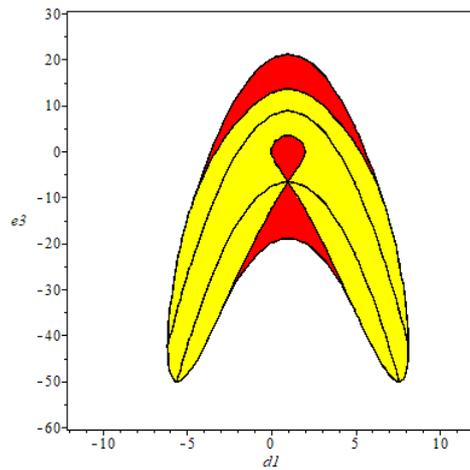


FIGURE 7 – PGDD au bord du mode de Schoenflies, section de l'espace de singularité image donnée par $d_2 = 2$ pour $a = d = 2, b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

Ci-dessous, nous avons le cas non asymptotique. Les variables articulaires r_2 et r_4 sont fixées avec une différence égale à 2 dans chaque dessin et grandissent d'un dessin à l'autre.

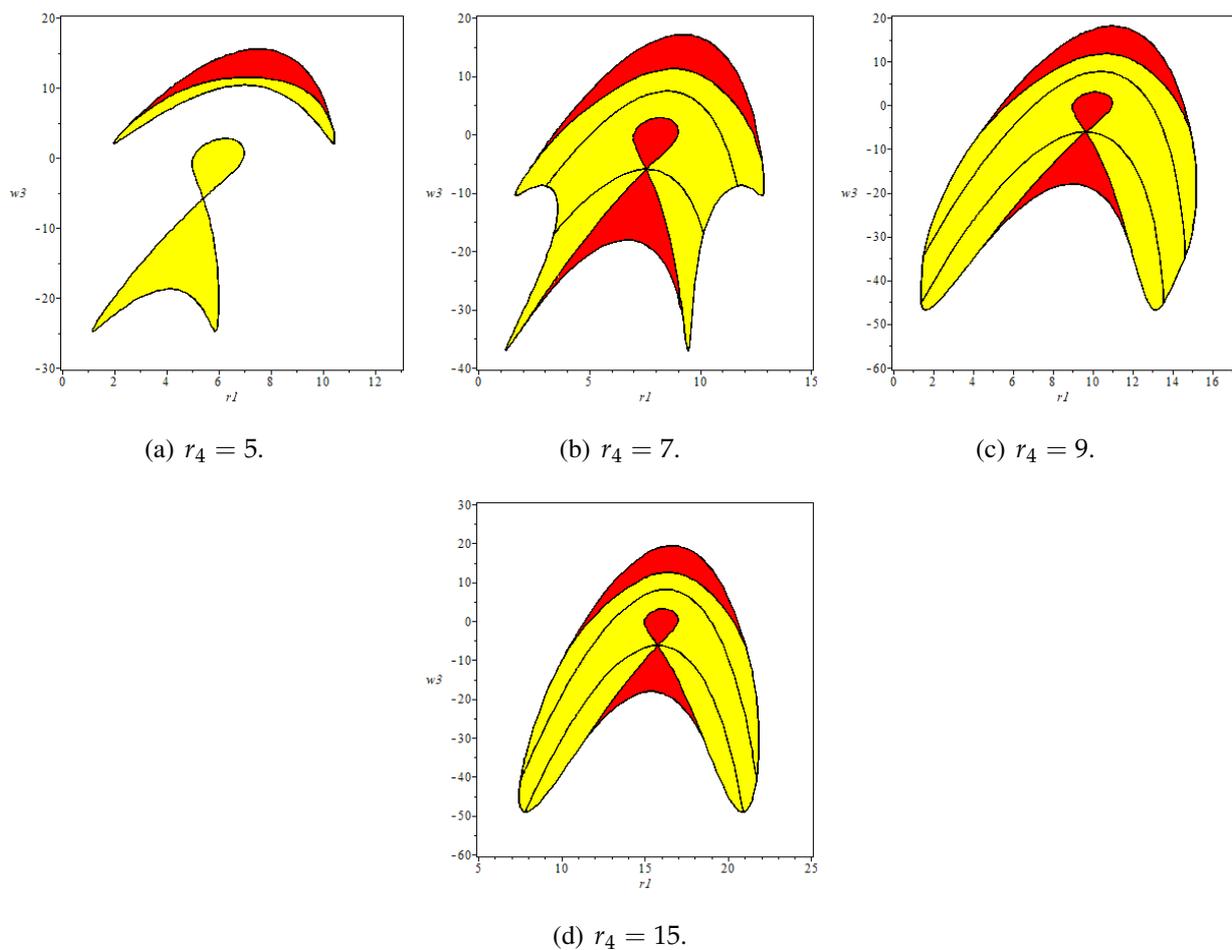


FIGURE 8 – PGD pour le mode de Schoenflies, courbes de singularités image. $a = d = 2, b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

Nous observons et nous concluons que la situation dégénérée reflète bien ce qui se passe pour des longueurs de jambes suffisamment grandes.

Le manipulateur 4-UPU admet de self-motion le long des courbes d'auto-intersection de la surface \mathcal{S} . Ci-dessous (Fig. 3.33), résumons tout ce qui se passe au dessus des différents arcs de la parabole dans le plan $d_2 = 0$.

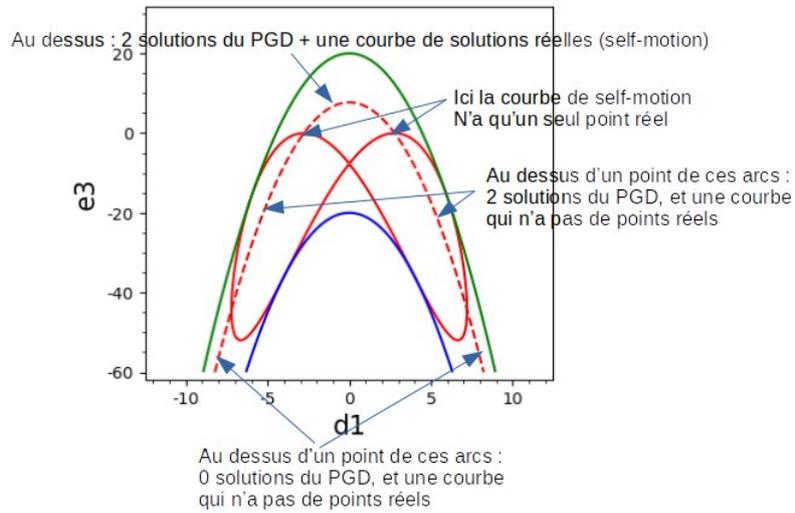


FIGURE 9 – Self-motion au dessus de la parabole dans le plan $d_2 = 0$

Première partie

Préliminaires

Méthodes algébriques en robotique

Dans ce chapitre nous exposons quelques méthodes de la géométrie algébrique appliquées en robotique. Nous axerons notre étude d'une part sur la géométrie algébrique classique où nous y développerons quelques concepts de base et méthodes et d'autre part sur la géométrie algébrique computationnelle qui s'intéresse aux méthodes symboliques basées principalement sur les bases de Gröbner.

Dans la Section 1.1, nous rappelons quelques propriétés des polynômes (à plusieurs variables) et des idéaux de leur anneau. L'objet central du chapitre (et même de cette thèse disons) est abordé dans la Section 1.2. Le comportement cinématique des mécanismes contraints comme les robots sont souvent décrits par des équations qui définissent ces objets géométriques : ce sont des variétés algébriques. La Section 1.3 est consacrée à l'éclatement des variétés algébriques, une opération géométrique d'une grande importance qui construit une variété birationnelle à la variété initiale. Dans la Section 1.4, nous aborderons les bases de Gröbner, qui sont des objets très puissants pour les calculs sur les idéaux de l'anneau des polynômes et sur lesquelles sont basées la majeure partie de nos méthodes algébriques utilisées dans cette thèse. Pour finir, la Section 1.5 parle de la géométrie algébrique réelle, qui s'intéresse aux points réels des variétés algébriques, choses qui nous intéressent particulièrement car, ce sont les points réels des variétés de contraintes (obtenues par des contraintes cinématiques des mécanismes) qui ont un sens physique.

Ce chapitre ne contient aucune contribution originale. Pour la plupart des résultats, nous donnons une référence à des littératures déjà beaucoup existantes.

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, \mathbb{K} désigne un corps.

1.1 Polynômes et idéaux des polynômes

Dans cette section, nous étudierons les propriétés des polynômes et des idéaux de l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps donné. Ce sont des objets mathématiques très importants, car ils lient l'algèbre et la géométrie.

1.1.1 Polynômes

Définition 1.1.1.1 (Monôme). Un **monôme** en les variables x_1, x_2, \dots, x_n est un produit de la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des entiers naturels. On appelle **degré** d'un tel monôme, la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

Notations 1.1.1.2. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un n -uplet d'entiers naturels. Nous noterons

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

En particulier, $x^{(0, \dots, 0)} = 1$. Le degré de x^α sera noté

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Définition 1.1.1.3 (Polynôme à plusieurs variables). Un **polynôme** f en les variables x_1, x_2, \dots, x_n à coefficients dans un corps \mathbb{K} est une combinaison linéaire finie des monômes. Avec les notations 1.1.1.2, un polynôme s'écrit sous la forme :

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha},$$

où la somme est indexée sur un nombre fini de n -uplets $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

L'ensemble des polynômes de variables x_1, x_2, \dots, x_n , muni de l'addition et de la multiplication forme un anneau commutatif, noté $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

1.1.2 Idéaux des polynômes

Définitions 1.1.2.1 (Idéal, radical d'un idéal, idéal radical). Un sous-ensemble $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est un idéal s'il satisfait aux assertions suivantes :

- ✓ $0 \in I$,
- ✓ si $f, g \in I$, alors $f + g \in I$,
- ✓ si $f \in I$ et $h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, alors $hf \in I$.

Le radical de I est l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid \exists m \in \mathbb{N}^*, f^m \in I\}$$

Un idéal I est dit **idéal radical** si $\sqrt{I} = I$.

Soient f_1, \dots, f_s des polynômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Notons

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i \mid h_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

L'ensemble $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ est un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ appelé l'**idéal engendré** par f_1, \dots, f_s .

On dit qu'un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est de **type fini** s'il existe un nombre fini de polynômes $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tels que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

On dit alors que les polynômes $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ forment une base de I .

Théorème 1.1.2.2 (Théorème de la base de Hilbert). *L'anneau $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est **noethérien**. Cela signifie qu'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

- ✓ *Tout idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est de type fini*
- ✓ *Toute suite $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \dots$*

1.2 Variétés algébriques

Dans cette section, nous allons définir l'objet géométrique de base du chapitre, les variétés algébriques qui sont des ensembles des zéros d'un polynôme ou des zéros communs de plusieurs polynômes. Nous considérons deux catégories de variétés algébriques : les variétés algébriques affines et les variétés algébriques projectives.

1.2.1 Variétés algébriques affines

Définition 1.2.1.1 (Espace affine). Soit \mathbb{K} un corps et n un entier naturel, on appelle **espace affine** de dimension n sur \mathbb{K} , noté $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, l'ensemble des points décrits par les coordonnées (a_1, a_2, \dots, a_n) où $a_i \in \mathbb{K}$:

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

L'espace $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ est appelé **droite affine du plan**, l'espace $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ est appelé **plan affine**.

Tout polynôme f de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ définit une fonction

$$f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \longmapsto f(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

appelée **fonction polynomiale** sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$; ce qui nous permettra de parler des zéros de f .

Définition 1.2.1.2 (Variété algébrique affine). Soit \mathbb{K} un corps et soient f_1, f_2, \dots, f_s des polynômes de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. On note

$$\mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq s\}.$$

Le sous-ensemble $\mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s)$ de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ est appelé un **ensemble algébrique affine** ou une **variété algébrique affine**¹

Exemples 1.2.1.3.

- ❶ Si les f_i sont de degré 1, on trouve les variétés linéaires affines de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$: droites, plans etc. .
- ❷ Prenons $n = 2, s = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, de sorte que \mathbb{K}^2 est un plan réel et $\mathcal{V}(f)$, définie par l'équation $f(x, y) = 0$, une courbe plane. Par exemple :

1. Dans la littérature, beaucoup des auteurs considèrent comme variété algébrique, un ensemble algébrique irréductible.

⚡ Si f est de degré 2 on retrouve les coniques.

⚡ Si f est de degré 3 on dit que la courbe est une cubique.

③ Dans l'espace \mathbb{K}^3 , une équation $f(x, y, z) = 0$ définit cette fois une surface.

De manière générale, toute variété algébrique définie par un seul polynôme f est appelé une **hyper-surface**².

Si un ensemble de polynômes $S \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ engendre un idéal I , la variété algébrique définie par S et les idéaux I et \sqrt{I} coïncident :

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I}).$$

D'après le théorème de la base de Hilbert, on peut prendre un ensemble fini $\{f_1, f_2, \dots, f_s\} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ qui engendre I et on a

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s) = \mathcal{V}(f_1) \cap \mathcal{V}(f_2) \cap \dots \cap \mathcal{V}(f_s).$$

Ainsi, toute variété algébrique affine est une intersection finie d'hyper-surfaces.

On montre que toute intersection quelconque et toute réunion finie des variétés algébriques affines est une variété algébrique affine :

✓ si I_1, I_2, \dots, I_s sont des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, alors

$$\bigcup_{i=1}^s \mathcal{V}(I_i) = \mathcal{V}\left(\bigcap_{i=1}^s I_i\right)$$

✓ si $\{I_j\}$ est une famille d'idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, alors

$$\bigcap_k \mathcal{V}(I_k) = \mathcal{V}\left(\sum_k I_k\right)$$

De plus, $\emptyset = \mathcal{V}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n])$ et $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = \mathcal{V}(\{0\})$. Ce sont précisément les conditions satisfaites par les fermés d'une topologie sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$. Cette topologie dans laquelle les variétés algébriques affines sont les fermés³ est appelée **topologie de Zariski**⁴ sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$. Elle est non-séparée si le corps \mathbb{K} est infini⁵, ainsi deux ouverts non vides quelconques se rencontrent : les ouverts sont très gros, et les fermés très petits. Par exemple dans $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ les fermés sont les surfaces, les courbes ou les points qui sont effectivement très petits si on les compare aux boules fermées des topologies usuelles. Dans la suite, les notions d'ouverts, de fermés, de clôture, d'irréductibilité etc. seront décrites par rapport à cette topologie.

2. Ce terme est dans la plupart de littérature utilisé dans le cas où f est non constant et où \mathbb{K} est algébriquement clos.

3. Remarquons que les fermés de la topologie de Zariski sont aussi des fermés de la topologie euclidienne de \mathbb{R}^n .

4. La topologie de Zariski fournit le langage le plus naturel pour exprimer de nombreuses propriétés des variétés algébriques.

5. La topologie de Zariski sur un corps fini est discrète.

L'intersection de toutes les variétés algébriques contenant $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ est la plus petite variété algébrique contenant X , notée \overline{X} . C'est la clôture de X (dans la topologie de Zariski), appelée **clôture de Zariski** de X .

Si $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, alors la topologie de Zariski sur X est la topologie induite par la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ donc les fermés sont $X \cap V$ où $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ est une variété algébrique. En particulier, si X est une variété algébrique affine, les fermés sont les variétés algébriques affines contenues dans X et les ouverts sont appelés les ouverts de Zariski ou les **variétés quasi-affines** de X . Les ouverts du type $X \setminus \mathcal{V}(f)$, pour $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, sont appelés les **ouverts fondamentaux** ou **distingués** de X et forment une base de la topologie. Plus précisément, tout ouvert U de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ est réunion finie d'ouverts fondamentaux; ce qui est l'assertion duale de celle sur les intersections d'hypersurfaces.

Définition 1.2.1.4. Un espace topologique non vide X est dit irréductible si l'une des conditions équivalentes suivantes est vraie

- ✓ X n'est pas réunion de deux fermés propres (c'est-à-dire différentes de X), autrement dit, si $X = U \cup V$ avec U et V des fermés, alors $X = U$ ou $X = V$;
- ✓ L'intersection d'une famille finie d'ouverts non vides de X est non vide;
- ✓ La réunion d'une famille finie de fermés propres de X est propre;
- ✓ Tout ouvert non vide de X est partout dense;

Un sous-ensemble d'un espace topologique est dit irréductible, s'il est irréductible par rapport à la topologie induite. Ainsi, nous allons nous restreindre aux variétés algébriques induites par la topologie de Zariski et parler donc des variétés algébriques irréductibles.

Si une variété algébrique V n'est pas irréductible, on dit qu'elle est réductible et donc on peut le décomposer en parties irréductibles comme ci-dessous.

Théorème-définition 1.2.1.5 (Écriture en composantes irréductibles, [Per95], Chap.1, Th.-déf.3.6). Soit V un ensemble algébrique non vide. On peut écrire V de manière unique (à permutation près) sous la forme $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ avec V_i des variétés algébriques irréductibles et $V_i \not\subset V_j$ pour $i \neq j$. Les V_i sont appelées les **composantes irréductibles** de V .

Remarque 1.2.1.6.

- ❶ En réalité, la notion d'espace irréductible n'a d'utilité que pour les topologies non séparées comme la topologie de Zariski. Ainsi, dans un espace topologique séparé X , les composantes irréductibles sont les singletons⁶.
- ❷ Un espace irréductible est connexe.

6. En effet, si x et y sont deux points distincts de X , on peut trouver deux ouverts disjoints U_x et U_y contenant respectivement x et y . Leur complémentaire $X_x = X \setminus U_y$ et $X_y = X \setminus U_x$ qui sont des fermés ne contiennent respectivement que x et y et sont donc distincts de X . Mais comme de plus $X = X_x \cup X_y$, X n'est donc pas irréductible.

1.2.2 Idéaux des variétés algébriques et Nullstellensatz de Hilbert

La géométrie algébrique établit une correspondance entre des objets algébriques (idéaux des anneaux de polynômes) et des objets géométriques (variétés algébriques). L'épine dorsale de cette correspondance est le Nullstellensatz de Hilbert. Commençons par définir une application qui associe à un ensemble de points, un idéal de l'anneau de polynômes.

Définition 1.2.2.1 (Idéal d'une variété algébrique). Soit V une partie de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$. On appelle idéal de V et on note $\mathcal{I}(V)$ l'ensemble suivant de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } (a_1, \dots, a_n) \in V\}$$

qui est un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Nous avons déjà défini deux applications :

$$\mathcal{V} : \{\text{idéaux de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} \longrightarrow \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\}$$

$$\mathcal{I} : \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\} \longrightarrow \{\text{idéaux de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$$

Ces applications ne sont pas inverses l'une de l'autre. En effet, \mathcal{I} a une inverse à gauche \mathcal{V} , c'est-à-dire pour toute variété algébrique V , nous avons $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$; mais non à droite, car pour tout idéal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, nous n'avons pas en général $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$, nous n'avons que $I \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Voici les deux problèmes qui empêchent l'égalité.

- ❶ Lorsque \mathbb{K} n'est pas algébriquement clos, par exemple lorsque $K = \mathbb{R}$ et $I = \langle x^2 + y^2 + 1 \rangle$, nous avons $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{I}(\emptyset) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \neq I$.
- ❷ Lorsqu'une puissance f^m , $m \geq 2$ d'un polynôme s'annule sur une partie V de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, alors f lui-même s'annule sur V . Par exemple, si $I = \langle x^3 \rangle$, nous avons $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{I}(\{0\}) = \langle x \rangle \neq I$. De même, si $I = \langle x^m, y^n \rangle$, avec m et n des entiers supérieurs ou égaux à 2, alors $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{I}(\{(0,0)\}) = \langle x, y \rangle \neq I$.

Ainsi, la question de savoir comment exprimer $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ en fonction de I fait l'objet d'un théorème dû à Hilbert appelé **Nullstellensatz** ou **Théorème des zéros**.

Théorème 1.2.2.2 (Nullstellensatz de Hilbert, [Per95], Chap.I, th.4.1 et th.4.3). Soit K un corps algébriquement clos et I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

- ❶ (**Nullstellensatz faible**⁷) Si I est un idéal propre (i.e $I \neq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ou $1 \notin I$). Alors $\mathcal{V}(I)$ est non vide.
- ❷ (**Nullstellensatz**) Alors

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

7. Remarquons que le Nullstellensatz faible généralise le théorème fondamental de l'algèbre.

Dans le Nullstellensatz de Hilbert, si on se restreint aux idéaux radicaux, nous obtenons l'égalité désirée et par conséquent, les applications \mathcal{I} et \mathcal{V} deviennent inverses l'une de l'autre et définissent donc une bijection entre l'ensemble des idéaux radicaux et l'ensemble algébrique affine. Le Nullstellensatz a donc permis d'établir un dictionnaire entre la géométrie et l'algèbre dont les éléments de base peuvent être résumés dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.2.3 (Correspondance idéal-variété, [CLO15], chap.4, sec.2, th.7). *Soit \mathbb{K} un corps.*

❶ *Les applications*

$$\mathcal{V} : \{\text{idéaux de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} \rightarrow \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\}$$

et

$$\mathcal{I} : \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\} \rightarrow \{\text{idéaux de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$$

renversent les inclusions, c'est-à-dire si $I_1 \subset I_2$ sont des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, alors $\mathcal{V}(I_2) \subset \mathcal{V}(I_1)$ et, de même, si $V_1 \subset V_2$ sont des variétés algébriques, alors $\mathcal{I}(V_2) \subset \mathcal{I}(V_1)$.

❷ *Pour toute variété algébrique affine V ,*

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V.$$

❸ *Tout idéal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ satisfait*

$$\mathcal{V}(\sqrt{I}) = \mathcal{V}(I).$$

❹ *Si \mathbb{K} est algébriquement clos et si nous nous restreignons aux idéaux radicaux, les applications*

$$\mathcal{I} : \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\} \rightarrow \{\text{idéaux radicaux de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$$

et

$$\mathcal{V} : \{\text{idéaux radicaux de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} \rightarrow \{\text{variétés algébriques affines de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\}$$

sont bijectives et sont inverses l'une de l'autre.

Basé sur ce dictionnaire, nous pouvons traduire quelques propriétés géométriques en propriétés algébriques lorsque le corps de base est algébriquement clos. Voici quelques premiers exemples :

❶ $\{\text{variétés algébriques affines irréductibles de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\} \leftrightarrow \{\text{idéaux premiers de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$ ⁸

❷ $\{\text{points de } \mathbb{A}^n(\mathbb{K})\} \leftrightarrow \{\text{idéaux maximaux de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$ ⁹

Dans la suite, nous établirons également une correspondance entre le quotient des idéaux et la différence des ensembles algébriques, l'élimination des variables et la projection des ensembles algébriques, la décomposition primaire minimale des idéaux et la décomposition en composantes irréductibles des variétés algébriques etc. .

8. Un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est dit premier si pour tous $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $fg \in I$ implique $f \in I$ ou $g \in I$.

9. Un idéal propre I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est dit maximal si pour tout idéal J tel que $I \subset J$, on a $J = I$ ou $J = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

1.2.3 Morphismes et applications rationnelles entre variétés algébriques affines

On peut définir les morphismes entre les variétés algébriques comme il est d'usage en mathématique de définir entre les objets mathématiques des morphismes qui préservent quelques structures de l'objet. Par exemple, en algèbre linéaire, on peut définir les applications linéaires entre deux espaces vectoriels ; elles préservent les opérations comme la somme des vecteurs et le produit d'un vecteur par un scalaire. De même, on définit les applications continues entre les espaces topologiques, les fonctions analytiques réelles entre les variétés analytiques, les applications différentiables entre les variétés différentiables réelles, les fonctions holomorphes entre les variétés complexes, les homomorphismes pour les groupes etc. . Les morphismes que l'on définit entre les variétés algébriques sont dits des applications régulières, données par des polynômes.

1.2.3.1 Applications polynomiales

Définition 1.2.3.1 (Fonction régulière). Soit $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ une variété algébrique affine. Une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **régulière** s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tel que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in V$.

Le polynôme P n'est pas en général déterminé de manière unique par la fonction régulière $f : P$ et $Q \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ représentent la même fonction régulière sur V si, et seulement si, $P - Q$ s'annule sur tous les éléments de V (c'est-à-dire $P - Q \in \mathcal{I}(V)$).

L'ensemble des fonctions régulières sur V forme un anneau et même une algèbre sur \mathbb{K} ; les opérations d'addition, de multiplication et de multiplication par les éléments de \mathbb{K} sont définies en effectuant les opérations sur la valeur des fonctions en chaque point $x \in V$. Cet anneau est noté $\mathbb{K}[V]$ et est appelé **anneau de coordonnées** de V .

L'application $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[V]$, qui à un polynôme P associe la fonction $P|_V$ qu'il définit sur V est un homomorphisme surjectif d'anneaux de noyau $\mathcal{I}(V)$. Nous avons, d'après le premier théorème d'isomorphisme,

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(V).$$

Avec cet isomorphisme, on peut traduire les propriétés géométriques exprimées en fonction de $\mathcal{I}(V)$ en propriétés exprimées en fonction de $\mathbb{K}[V]$. Ainsi nous avons :

- ✓ V est irréductible, équivaut à $\mathcal{I}(V)$ est premier, équivaut à $\mathbb{K}[V]$ intègre.
- ✓ Si \mathbb{K} est algébriquement clos, pour tout $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\mathcal{V}(I)$ est fini, équivaut à l'espace vectoriel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / I$ est de dimension finie.

Définition 1.2.3.2 (Application régulière). Soient $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ et $W \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ deux variétés algébriques affines. Une application $\phi : V \rightarrow W$ est appelée **application polynomiale** ou **application régulière** s'il existe des polynômes $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tels que $\phi(a_1, \dots, a_n) = (F_1(a_1, \dots, a_n), \dots, F_n(a_1, \dots, a_n))$ pour tout point $(a_1, \dots, a_n) \in V$.

Pour vérifier qu'une liste donnée de polynômes F_1, \dots, F_n définit une application régulière $V \rightarrow W$, il est nécessaire de vérifier que $(F_1(a_1, \dots, a_n), \dots, F_n(a_1, \dots, a_n))$ satisfait les équations définissant W pour tout point $(a_1, \dots, a_n) \in V$.

Exemples 1.2.3.3.

- ❶ Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ une variété algébrique affine. Pour tout $m < n$, la projection $\pi : V \rightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ définie par $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ est une application régulière.
- ❷ Soient la cubique gauche définie par $V = \mathcal{V}(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ et l'ensemble algébrique affine $W = \mathcal{V}(y^3 - z^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$. Alors la projection $\pi_1 : \mathbb{A}^3(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ définie par $\phi_1(x, y, z) = (y, z)$ donne une application régulière $\pi_1 : V \rightarrow W$ car tout point de $\pi_1(V) = \left\{ (a^2, a^3) \mid a \in \mathbb{K} \right\}$ satisfait l'équation définissant W .

Définition 1.2.3.4 (Variétés algébriques affines isomorphes). Une application régulière $\pi : V \rightarrow W$ est un isomorphisme s'il existe une application régulière $\phi : W \rightarrow V$ telle que $\phi \circ \pi = \text{id}_V$ et $\pi \circ \phi = \text{id}_W$. On dit que V et W sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $V \rightarrow W$.

Intuitivement, les ensembles algébriques affines isomorphes devraient partager des propriétés telles que l'irréductibilité, la dimension, etc. . De plus, les sous-ensembles algébriques affines de V devraient correspondre aux sous-ensembles algébriques affines de W , etc. .

Exemple 1.2.3.5. Soit la parabole $V = \mathcal{V}(y - x^2)$. L'application régulière $f : V \rightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ définie par $f(x, y) = x$ admet pour inverse l'application régulière $f : \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \rightarrow V$ définie par $g(x) = (x, x^2)$. L'application f est donc un isomorphisme.

1.2.3.2 Applications rationnelles

Comme nous venons de définir les fonctions et les applications régulières, nous allons également définir les fonctions rationnelles, prenant leurs valeurs sur \mathbb{K} et les applications rationnelles qui sont définies entre deux variétés algébriques. Nous ne définissons les fonctions rationnelles que sur les variétés algébriques affines irréductibles car l'irréductibilité garantit que tous les sous-ensembles ouverts non vides d'une variété V sont denses dans V de sorte qu'une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert soit réellement définie « presque partout ».

Soit $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ une variété algébrique affine irréductible.

Définition 1.2.3.6. Le **corps de fonctions** de V est le corps de fractions de l'anneau de coordonnées $\mathbb{K}[V]$ noté $\mathbb{K}(V)$.

Par exemple, si $V = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, alors $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et $\mathbb{K}(V) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. C'est donc le corps de fractions de l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Rappelons que

$$\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \mid f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], g \neq 0 \right\}$$

Définition 1.2.3.7 (Fonction rationnelle). Une **fonction rationnelle** sur V est un élément du corps de fonctions $\mathbb{K}(V)$, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme f/g où f et g sont des fonctions régulières.

Il peut y avoir de nombreux choix différents pour f et g qui définissent la même fonction rationnelle f/g . Ainsi, une fonction rationnelle est une classe d'équivalence f/g où $f, g \in \mathbb{K}[V]$ et

$$f/g \sim f'/g' \iff fg' = f'g.$$

Définition 1.2.3.8. Une fonction rationnelle $\varphi \in \mathbb{K}(V)$ est régulière en un point p de V s'il existe des fonctions régulières $f, g \in \mathbb{K}[V]$ tel que $\varphi = \frac{f}{g}$ et $g(x) \neq 0$.

L'ensemble des points en lesquels l'application φ est régulière est appelé **domaine de définition** de φ .

Notons que le domaine de définition d'une fonction rationnelle $\varphi \in \mathbb{K}(V)$ est un ouvert de Zariski non vide de V .

Soient $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ et $W \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ deux variétés algébriques affines irréductibles.

Définition 1.2.3.9 (Application rationnelle). Une **application rationnelle** $\varphi : V \dashrightarrow W$ est un m -uplet des fonctions rationnelles $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathbb{K}(V)$ tel que pour tout point $x \in V$, en lesquels toutes les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sont régulières, le point $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \in W$.

L'utilisation du symbole \dashrightarrow à la place du symbole \rightarrow est due au fait que l'application φ peut ne pas être une application de V vers W au sens habituel car elle peut ne pas être définie partout sur V . L'application rationnelle φ est bien définie sur un ouvert U de V qui est son domaine de définition.

Le domaine de définition d'une application rationnelle est l'intersection des domaines de définition de chaque composante qui sont des fonctions rationnelles. Ce domaine de définition est aussi un sous-ensemble non vide de V car intersection des ouverts de Zariski non vides.

Définition 1.2.3.10 (Application rationnelle dominante). Une application rationnelle $\varphi : V \dashrightarrow W$ est dite dominante si son image¹⁰ est dense dans W i.e l'adhérence de son image est égale à W .

Étant données deux applications rationnelles $\varphi : V \dashrightarrow W$ et $\psi : W \dashrightarrow Z$, l'application $\psi \circ \varphi$ est définie s'il existe un point $p \in V$ tel que φ soit définie en p et ψ en $\varphi(p)$.

Définition 1.2.3.11 (Application birationnelle).

- ✓ Une application rationnelle dominante $\varphi : V \dashrightarrow W$ est **birationnelle** s'il existe une application rationnelle dominante $\psi : W \dashrightarrow V$ telle $\psi \circ \varphi = \text{Id}_V$ et $\varphi \circ \psi = \text{Id}_W$
- ✓ Deux variétés algébriques irréductibles V et W sont dites birationnellement équivalentes s'il existe une application birationnelle $\varphi : V \dashrightarrow W$. Alors il existe un ouvert non vide X de V et un ouvert non vide Y de W tels que φ induise un isomorphisme birégulier de X sur Y .

10. L'image de φ est l'ensemble $\{\varphi(x), x \text{ appartient au domaine de définition de } \varphi\}$.

Exemple 1.2.3.12. Considérons la cubique cuspidale $W = \mathcal{V}(y^2 - x^3)$; elle est birationnelle à $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$. En effet on a les applications rationnelles suivantes.

$$W \dashrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) : (x, y) \mapsto y/x$$

$$\mathbb{A}^1(\mathbb{K}) \dashrightarrow W : t \mapsto (t^2, t^3)$$

Les variétés algébriques affines birationnelles se ressemblent « presque partout ». Par exemple, la cubique cuspidale, ressemble à la droite affine sauf en son point singulier qui est l'origine.

1.2.4 Variétés algébriques projectives

La géométrie affine peut se révéler insuffisante pour bien comprendre des problèmes de nature géométrique. Nous considérons un nouvel espace appelé espace projectif qui est obtenu de l'espace affine en ajoutant « un point à l'infini dans chaque direction ». L'ajout de points supplémentaires a pour but d'éviter les cas particuliers où un point « disparaît à l'infini ». Dans cet espace agrandi, de nombreux problèmes deviennent plus simples et plus clairs. Par exemple, dans un espace affine, deux droites parallèles ne s'intersectent pas mais elles s'intersectent en un point à l'infini dans un plan projectif.

Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$ définie par

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$. La classe d'équivalence de l'élément est souvent notée $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ ou $x = [x_0, \dots, x_n]$. Notons 0 l'origine $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$.

Définition 1.2.4.1 (Espace projectif). Soit n un entier naturel. L'espace projectif de dimension n sur \mathbb{K} noté $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ (ou encore \mathbb{P}^n s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps \mathbb{K}) est l'ensemble quotient

$$\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} / \sim = \left\{ [x_0, x_1, \dots, x_n] \mid (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\}.$$

Notons que les éléments de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ correspondent aux droites passant par l'origine dans $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^n / \sim = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} / \text{« points antipodaux »}$. Aussi, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ a une topologie naturelle, la topologie quotient de celle de $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et on vérifie alors qu'il est compact et connexe. Comme dans le cas affine, on peut définir les variétés algébriques projectives comme les ensembles des zéros communs des polynômes mais pas de n'importe lesquels. En effet, la valeur d'un polynôme $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ en un point homogène $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ n'est pas, en général bien définie. On obtient des résultats différents selon les coordonnées homogènes que l'on choisit. Pour éviter des problèmes de ce type, nous utiliserons des **polynômes homogènes** lorsque nous travaillons dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Un polynôme est dit homogène si tous ses monômes de coefficients non nuls ont le même degré. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{\deg f} f(x_0, x_1, \dots, x_n)$; ce qui implique, donc, que f

s'annule au point (x_0, x_1, \dots, x_n) de \mathbb{K}^{n+1} si, et seulement si, $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Nous dirons que $[x_0, \dots, x_n]$ est un zéro de f , et noterons $f(x_0, \dots, x_n) = 0$.

Définition 1.2.4.2 (Variété algébrique projective). Soit \mathbb{K} un corps et soient f_1, \dots, f_s des polynômes homogènes de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. On note

$$\mathcal{V}(f_1, \dots, f_s) = \{[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid f_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq s\}.$$

Le sous-ensemble $\mathcal{V}(f_1, f_2, \dots, f_s)$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est appelé **variété algébrique projective** définie par f_1, \dots, f_s .

Les hypersurfaces sont habituellement classifiées selon le degré du polynôme qui les définit. Ainsi, si le polynôme f est de degré 2 dans $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, $\mathcal{V}(f)$ est appelée **hypersurface quadrique** ou **quadrique** tout court. De même, les hypersurfaces définies par les polynômes de degré 3, 4 et 5 sont appelées cubiques, quartiques et quintiques, respectivement.

Les polynômes homogènes linéaires, c'est-à-dire de degré 1 définissent une variété appelée **variété linéaire**.

On définit également sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ une topologie (topologie de Zariski) dont les fermés sont les variétés algébriques projectives (voir [Har77] pour plus de détail). Ainsi toutes les parties de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ seront munies de la topologie induite par celle de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Un sous-ensemble non vide ouvert d'une variété projective est appelé **variété algébrique quasi-projective**.

Notons aussi que les notions d'irréductibilité et des composantes irréductibles des ensembles algébriques projectifs sont définies comme dans le cadre affine.

Nous allons maintenant décrire la correspondance entre les variétés algébriques et les idéaux dans le cadre projectif. Les idéaux utilisés dans ce cadre sont des **idéaux homogènes**. Un idéal de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ est dit homogène s'il est engendré par des polynômes homogènes. Notons que tout polynôme $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = f_0 + f_1 + \dots$ où les f_i sont des polynômes homogènes de degré i et sont appelés **composantes homogènes de f** . Ainsi, nous voyons qu'un idéal $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ est homogène si, et seulement si, pour tout polynôme $f \in I$, les composantes homogènes de f sont dans I . Par le théorème de la base de Hilbert, I est engendré par un nombre fini de polynômes f_1, \dots, f_s . Et alors, on peut définir une variété algébrique projective à partir de l'idéal homogène I : $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_s)$.

Comme le cas affine, on définit de même l'idéal d'une variété algébrique projective qui est un idéal homogène.

Définition 1.2.4.3 (Idéal d'une variété algébrique projective). Soit V une partie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. On appelle idéal de V et on note $\mathcal{I}(V)$ l'ensemble suivant de $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n] \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } [a_0, \dots, a_n] \in V\}$$

qui est un idéal homogène et radical de $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Dans le cadre affine, nous avons énoncé la version faible et forte du Nullstellensatz de Hilbert. Il est naturel de se demander si ces théorèmes s'étendent aux variétés projectives et aux idéaux homogènes. La réponse est malheureusement non. En effet, en plus des idéaux propres, le Nullstellensatz faible ne marche pas aussi pour certains idéaux homogènes. En effet, considérons l'idéal $I = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Alors l'ensemble $\mathcal{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est déterminé par les équations $x_0 = \dots = x_n = 0$ qui n'ont pas de solutions dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ puisque les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sont non toutes nulles. L'idéal I est souvent appelé **idéal irrelevant**. On a donc le théorème suivant

Théorème 1.2.4.4 (Nullstellensatz projectif, [Per95], Chap.2, th.5.4). *Soient \mathbb{K} un corps algébriquement clos, I un idéal homogène de $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ et $V = \mathcal{V}(I)$.*

❶ (Version faible)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(I) = \emptyset &\iff \exists r \text{ telque } \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle^r \subset I \\ &\iff \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \subset \sqrt{I} \end{aligned}$$

❷ (Version forte)

Si $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Comme dans le cas affine, nous avons une correspondance bijective entre les variétés algébriques projectives et les idéaux homogènes radicaux I , à condition d'exclure les cas $\sqrt{I} = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ et $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle$.

1.2.4.1 Cartes affines et clôture projective

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, nous pouvons voir l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ comme l'espace affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ auquel on a ajouté « quelque chose à l'infini » appelé **hyperplan à l'infini** : $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0$ où

$$U_0 = \{[a_0, a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid a_0 \neq 0\} \text{ et } H_0 = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus U_0 = \mathcal{V}(x_0)$$

On identifie H_0 à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ en ignorant la première coordonnée et U_0 à $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ via l'homéomorphisme

$$\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), [a_0, a_1, \dots, a_n] = \left[1, \frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right] \mapsto \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right)$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$

Plus généralement, pour $0 \leq i \leq n$ nous pouvons définir U_i, H_i et φ_i en remplaçant x_0 par x_i . Les U_i sont donc appelés **les cartes affines** de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et ils recouvrent $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$$

Ainsi en considérant l'isomorphisme ci-dessus, nous voyons que $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est recouvert par $n + 1$ copies de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$.

Remarque 1.2.4.5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est une variété différentiable lisse, respectivement variété différentiable complexe. En particulier $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est le compactifié d’Alexandroff de la droite affine qui est un cercle et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une sphère appelée la sphère de Riemann.

L’homéomorphisme φ défini ci-dessus a pour inverse l’application

$$\psi : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow U_0, (b_1, \dots, b_n) \mapsto [1 : b_1 : \dots : b_n]$$

Les concepts algébriques qui sont derrière φ et ψ sont respectivement la **déshomogénéisation** et l’**homogénéisation** des polynômes. Rappelons que, pour un polynôme homogène $Q \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, le polynôme $Q(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est appelé le déshomogénéisé de Q par rapport à x_0 . Inversement, pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, le polynôme $P_{hom} = x_0^{\deg(P)} P(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est un polynôme homogène de degré $\deg(P)$ et est appelé l’homogénéisé de P par rapport à x_0 .

On peut avoir besoin de regarder la version projective d’une variété algébrique affine : c’est comme chercher sa compactification, la plus petite variété projective la contenant.

Définition 1.2.4.6 (L’homogénéisation d’un idéal). Soit I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. L’homogénéisé de I , noté I_{hom} est l’idéal homogène de $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ défini par

$$I_{hom} = \langle P_{hom} \mid P \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rangle$$

où P_{hom} est l’homogénéisé de P .

Définition 1.2.4.7 (Clôture projective). Soit $V \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, une variété affine. La **clôture projective** de V est la variété projective, notée \bar{V} , définie par

$$\bar{V} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(V)_{hom})$$

où $\mathcal{I}(V)_{hom} \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est l’homogénéisé de l’idéal affine $\mathcal{I}(V) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Et nous avons $\bar{V} \cap U_0 = \bar{V} \cap \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) = V$.

Définition 1.2.4.8 (Cône affine). Un cône affine sur une variété projective $V = \mathcal{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est une variété affine $\hat{V} = \mathcal{V}(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$.

Le cône affine est en fait un cône dans $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{K})$: l’ensemble des droites représentés par les points de V dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Maintenant nous allons aborder les notions d’applications régulières et des applications rationnelles dans le cadre projectif.

1.2.4.2 Applications régulières

Soient $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et $W \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ deux variétés algébriques projectives.

Définition 1.2.4.9 (Application régulière). Une application $\varphi : V \rightarrow W$ est appelée **application régulière** si pour tout $x \in V$, il existe un ouvert de Zariski $U \subset V$ contenant x et des polynômes homogènes de même degré $F_0, F_1, \dots, F_m \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ tels que pour tout $y = [y_0, y_1, \dots, y_n]$, $\varphi(y) = [F_0(y_0, y_1, \dots, y_n), F_1(y_0, y_1, \dots, y_n), \dots, F_m(y_0, y_1, \dots, y_n)] \neq [0, 0, \dots, 0]$

Définition 1.2.4.10 (Variétés algébriques projectives isomorphes). Une application régulière $\varphi : V \rightarrow W$ entre deux variétés projectives est un isomorphisme s'il existe une application régulière $\phi : W \rightarrow V$ tel que $\phi \circ \varphi = \text{id}_V$ et $\varphi \circ \phi = \text{id}_W$. On dit que V et W sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $V \rightarrow W$.

1.2.4.3 Applications rationnelles

Contrairement au cas affine, nous n'avons pas besoin des fractions rationnelles dans la définition d'une application rationnelle. En effet, si $\varphi : V \rightarrow W$ avec

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = [R_0(x_0, x_1, \dots, x_n), \dots, R_m(x_0, x_1, \dots, x_n)]$$

où les R_i sont des fonctions rationnelles, alors on peut multiplier les fonctions rationnelles par le ppcm des dénominateurs des R_i pour obtenir $\varphi = [H_0, \dots, H_m]$ où les H_i sont des polynômes homogènes de même degré. Comme dans le cas affine, la non définition en certains points est liée aux dénominateurs, dans le cas projectif ces points sont les points qui annulent l'application φ et ils forment un fermé de V dans la topologie de Zariski.

Définition 1.2.4.11 (Application rationnelle). Une application rationnelle $\varphi : V \dashrightarrow W$ est une classe d'équivalence des couples (U, γ) où U est un ouvert dense de V et $\gamma : U \rightarrow W$ est une application régulière, avec $(U, \gamma) \sim (V, \delta)$ si, et seulement si, $\gamma|_{U \cap V} = \delta|_{U \cap V}$.

Une application rationnelle $\varphi : V \dashrightarrow W$ qui a une inverse rationnelle $\varphi^{-1} : W \dashrightarrow V$ est appelée une équivalence birationnelle, au quel cas, on dit que V et W sont birationnelles. Si φ et φ^{-1} sont toutes régulières, alors φ est un isomorphisme et U et V sont isomorphes.

1.2.4.4 Produit des ensembles algébriques projectifs

Le produit de deux variétés algébriques affines est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{A}^{m+n}(\mathbb{K})$. Dans le cadre projectif, il est difficile de définir le produit, car $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \not\cong \mathbb{P}^{m+n}(\mathbb{K})$. Cependant, le produit $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est défini à l'aide du plongement de Segre :

$$S_{m,n} : \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}(\mathbb{K})$$

$$[x_0, \dots, x_m] \times [y_0, \dots, y_n] \mapsto [x_0y_0, \dots, x_0y_n, x_1y_0, \dots, x_1y_n, \dots, x_my_0, \dots, x_my_n].$$

Soit $\Sigma_{m,n}$ l'image de $S_{m,n}$; alors $\Sigma_{m,n}$ est fermée. Et $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ en tant que variété projective est définie comme $\Sigma_{m,n}$.

Le produit de deux variétés projectives $V \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ et $W \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est l'image de $V \times W$ dans

$\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Ces variétés algébriques de $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sont définies par des polynômes à deux paquets de variables homogènes $[x_0, x_1, \dots, x_m]$ et $[y_0, y_1, \dots, y_n]$. Pour que la valeur en les deux paquets des coordonnées homogènes d'un tel polynôme soit bien définie, ce polynôme doit être homogène en les variables x_i et homogène en les y_j , mais les degrés en les x_i et les y_j peuvent être différents. Il est appelé **polynôme bihomogène**. Tout polynôme $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n]$ est dit bihomogène de bidegré (p, q) si chaque terme de f a pour degré p par rapport aux x_i et pour degré q par rapport aux y_j :

$$f = \sum_{|\alpha|=p, |\beta|=q} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

tel que $f(\lambda(x_0, x_1, \dots, x_m), y_0, y_1, \dots, y_n) = \lambda^p f(x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n)$ et $f(x_0, x_1, \dots, x_m, \lambda(y_0, y_1, \dots, y_n)) = \lambda^q f(x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n)$.

Si h_1, \dots, h_s sont des polynômes bihomogènes, alors l'ensemble

$$\mathcal{V}(h_1, \dots, h_s) \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

est une variété algébrique définie par ces polynômes. En particulier, si $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n]$ est un polynôme non constant de bidegré (p, q) , alors $\mathcal{V}(f) \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est une **hypersurface de bidegré (p, q)** .

De même, si $J \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n]$ est engendré par les polynômes bihomogènes, alors $\mathcal{V}(J) \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est également une variété algébrique.

1.2.5 Dimension et Degré d'une variété algébrique

1.2.5.1 Dimension d'une variété algébrique.

Intuitivement, la dimension d'une variété algébrique V est « le nombre maximal de degrés de liberté » que peut avoir un point se « déplaçant » dans V ([EM07]).

Définition 1.2.5.1 (Dimension topologique). La dimension topologique (ou simplement la dimension) d'une variété algébrique affine (projective) $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$), notée $\dim(V)$ est la longueur maximale d d'une suite

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_d$$

de sous-variétés affines (projectives) non vides et irréductibles de V .

Si $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$ est la décomposition de V en composantes irréductibles, alors

$$\dim(V) = \max(\dim(V_1), \dots, \dim(V_r)).$$

La **dimension locale** de V en un point p est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles contenant p .

Si \mathbb{K} est algébriquement clos et toutes les composantes de V ont la même dimension, on dit que V est **équidimensionnelle** ou est de **dimension pure**.

Si $W \subset V$, la **codimension** de W dans V est : $\dim(V) - \dim(W)$.

Exemples 1.2.5.2.

- ❶ Si \mathbb{K} est algébriquement clos, les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sont de dimension $n - 1$; donc de codimension 1. Par exemple

$$\mathcal{V}(x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \subset \mathbb{P}^7(\mathbb{C})$$

est une quadrique de dimension 6.

- ❷ Pour les variétés linéaires, il y a une notion plus intuitive de la dimension venant de l'algèbre linéaire. Un seul polynôme homogène de degré 1 (autrement dit forme linéaire) définit un **hyperplan** ; il est de dimension $n - 1$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Un ensemble de r polynômes homogènes linéairement indépendants ou un idéal engendré par ces polynômes définit une variété algébrique projective de dimension $n - r$.
- ❸ Une variété algébrique formée des points isolés est de dimension 0. Une variété algébrique de dimension 1 est une courbe et une variété de dimension 2 est une surface.
- ❹ Le produit $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est de dimension $m + n$ car il contient un ouvert isomorphe à $\mathbb{A}^m(\mathbb{K}) \times \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, donc à $\mathbb{A}^{m+n}(\mathbb{K})$.
- ❺ Des variétés birationnellement isomorphes ont même dimension. En particulier, l'éclatement d'une variété quasi-projective le long d'une sous-variété a la même dimension que cette variété.

Théorème 1.2.5.3 (Dimension et nombre d'équations). Soient \mathbb{K} un corps algébriquement clos et $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ une variété algébrique quasi-projective et I un idéal homogène engendré par les polynômes homogènes f_1, \dots, f_s de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

- ✓ Si V est de dimension pure n , alors chaque composante irréductible de $V \cap \mathcal{V}(I)$ est de dimension supérieure ou égale à $n - s$
- ✓ Si V est une variété algébrique projective de dimension n et que $s \leq n$, alors l'intersection $V \cap \mathcal{V}(I)$ n'est pas vide.

L'équivalent algébrique de cette dimension est la dimension de Krull.

Définition 1.2.5.4 (Dimension de Krull). La dimension de Krull (ou simplement la dimension) d'un anneau A , notée $\dim_{\text{Krull}}(A)$ est la longueur maximale d d'une suite

$$I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_d$$

d'idéaux premiers de A .

Si I est un idéal propre de A , alors la dimension de I est la dimension de A/I .

Ces définitions équivalentes sont compatibles avec la correspondance algèbre-géométrie comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.2.5.5 ([EM07], Chap.1, Pro.1.46). Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos. Pour tout idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$,

$$\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I) = \dim(\mathcal{V}(I))$$

1.2.5.2 Espace tangent, dimension et singularité des variétés algébriques

Soit $p \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. La différentielle de f au point p est

$$d_p f(u_1, \dots, u_n) = u_1 \partial_{x_1} f(p) + \dots + u_n \partial_{x_n} f(p).$$

Définition 1.2.5.6 (Espace tangent). Soient V une variété affine, $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'idéal de V , $p \in V = V(\mathcal{I})$. L'espace vectoriel tangent à V en p , noté $T_p(V)$ est l'intersection des noyaux des différentielles des f_i , $i = 1, \dots, s$ en p :

$$T_p(V) = \bigcap_{i=1}^s \ker(d_p f_i)$$

L'espace tangent $T_p(V)$ est donc aussi le noyau de la matrice jacobienne J associée à f_1, \dots, f_s

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Notons J_p la matrice jacobienne J évaluée en p .

Si V est irréductible, un point p de V est dit **régulier** ou **non-singulier** si la dimension de l'espace tangent à V en p , notée $\dim T_p(V)$ est égal à la dimension de V ; dans le cas contraire, il est dit **singulier**. Dans le cas où V est réductible, p est dit régulier si $\dim T_p(V)$ est égale à la dimension maximale des composantes irréductibles de V passant par p . Ainsi donc, p est singulier s'il appartient à plus d'une composante irréductible ou à une seule composante et est un point singulier de cette composante. Le **lieu de singularité** (respectivement le **lieu de régularité**) de V est l'ensemble noté $\text{Sing}(V)$ (respectivement $\text{Reg}(V)$) de tous les points singuliers (respectivement réguliers) de V . La variété V est dite **lisse** si, et seulement si, l'ensemble $\text{Sing}(V)$ est vide.

La procédure pour déterminer la dimension et les points singuliers d'une variété algébrique $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ peut se résumer alors comme suit :

- ❶ Choisir un système de générateurs f_1, \dots, f_s engendrant $\mathcal{I}(V)$.
- ❷ Calculer la matrice jacobienne J associée à f_1, \dots, f_s .
- ❸ Trouver les points qui annulent tous les mineurs d'ordres $(k+1) \times (k+1)$ de J (où $k \geq 0$ un entier) et qui sont solutions du système d'équations $f_1 = f_2 = \dots = f_s = 0$. Ces points sont les points p tels que $\text{rang}(J_p) \leq k$, donc par conséquent $\dim T_p V \geq n - k$. Pour tout $p \in V$, l'opération se répète jusqu'à ce que l'on trouve le plus petit k tel que $\dim T_p V \geq n - k$.
- ❹ Ainsi $\dim V = n - k$ et $\text{Sing}(V) = \{p \in V \mid \dim T_p V > n - k\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de V qui annulent tous les mineurs d'ordre $k \times k$ de J .

Définition 1.2.5.7 (Point critique-Valeur critique). Soient $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ une variété affine, $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'idéal de V et $g = (g_1, \dots, g_t)$ définissant une application

polynomiale $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^k(\mathbb{K})$. Considérons la matrice

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_t}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_t}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Soit $x \in \text{Reg}(V)$. Le point x est un **point critique** de l'application g restreinte à $\text{Reg}(V)$ si, et seulement si, K est de rang inférieur ou égal à $n + k - t$. Le point $g(x)$, image du point critique x est appelé **valeur critique** de g .

Le théorème ci-dessous montre que, l'ensemble des valeurs critiques est contenu dans un fermé de Zariski strict de l'espace d'arrivée.

Théorème 1.2.5.8 (Théorème de Sard). *Soit $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ une variété et g une application polynomiale de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{A}^k(\mathbb{K})$. Alors, l'image de l'ensemble des points critiques de la restriction de g à V est contenue dans une hypersurface stricte de $\mathbb{A}^k(\mathbb{K})$.*

1.2.5.3 Degré d'une variété algébrique

Le degré d'une variété algébrique V exprime d'une certaine manière la « complexité » apparente de celle-ci. Plus le degré est élevé et plus il faut s'attendre à une variété « tordue » ([EM07]). Une définition géométrique de cette notion est la suivante :

Définition 1.2.5.9 (Degré d'une variété algébrique). Soient I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et l_1, \dots, l_d des formes linéaires génériques où d est la dimension de Krull de $\mathcal{A} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$. Le degré de \mathcal{A} , noté $\text{deg}(\mathcal{A})$ est la dimension du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\langle I, l_1, \dots, l_d \rangle$.

Ce degré est donc le nombre des points de $\mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(l_1, \dots, l_d)$. Le degré d'une hypersurface est égal au degré de l'équation qui le définit. La signification géométrique du degré d'une variété algébrique projective est mieux comprise par le théorème de Bézout ci-dessous.

Théorème 1.2.5.10 (Théorème de Bézout, [Har77]). *Soit $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ une variété projective de dimension $\dim V > 0$ et f un polynôme homogène de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tels que aucune composante connexe de V ne soit contenue dans $\mathcal{V}(f)$. Alors*

$$\text{deg}(V \cap \mathcal{V}(f)) = \text{deg}(V) \cdot \text{deg}(f)$$

L'application classique du théorème de Bézout est de montrer que deux courbes projectives planes C_1 et C_2 n'ayant aucune composante irréductible commune, de degrés respectifs d_1 et d_2 s'intersectent en $d_1 d_2$ points comptés avec multiplicités .

1.3 Éclatements des variétés algébriques

L'éclatement est une méthode assez générale pour construire des variétés birationnelles entre elles. Il peut être utilisé pour éliminer l'indétermination des applications rationnelles, résoudre les singularités etc. .

Soient V et W des variétés quasi-projectives.

Le graphe Γ_φ d'une application rationnelle $\varphi : V \dashrightarrow W$ est l'adhérence de Zariski dans $V \times W$ du graphe de $\varphi|_U$ où $U \subset V$ est un ouvert :

$$\Gamma_\varphi = \overline{\{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\}} \subset V \times W$$

Notons que cela est indépendant du choix de U et que Γ_φ est birationnellement équivalent à V . En particulier, si l'application φ est régulière sur V , alors Γ_φ est le graphe ordinaire :

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x))\} \subset V \times W$$

1.3.1 Éclatement d'une variété le long d'une sous-variété

1.3.1.1 Cas affine

Dans ce qui suit, nous verrons comment éclater une variété algébrique le long d'une sous-variété algébrique. Il sera défini comme l'éclatement d'une variété algébrique le long de l'idéal de cette sous-variété.

Soit $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ une variété algébrique affine et $I \subset \mathbb{K}[X]$ l'idéal engendré par $f_0, \dots, f_{s-1} \in \mathbb{K}[X]$.

Considérons l'application rationnelle φ

$$\begin{aligned} \varphi : X &\dashrightarrow \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [f_0, \dots, f_{s-1}]. \end{aligned}$$

L'application φ est régulière sur $X \setminus \mathcal{V}(I)$ mais ne l'est pas en général sur tout X .

Définition 1.3.1.1 (Éclatement d'une variété le long d'un idéal ou d'une sous-variété). L'éclatement de X le long de I noté $\text{Bl}_I(X)$ est le graphe $\Gamma_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K})$ de φ avec la projection naturelle¹¹ $\pi : \text{Bl}_I(X) \longrightarrow X$ sur le premier facteur.

Si $W \subset X$ est une sous-variété affine de X , l'éclatement de X le long de W , noté $\text{Bl}_W(X)$ est l'éclatement de X le long de l'idéal radical $\mathcal{I}(W)$.

L'inverse $\pi^{-1}(W) \subset \text{Bl}_W(X)$ est une hypersurface et est appelé **diviseur exceptionnel** de l'éclatement. Il est de codimension 1 dans $\text{Bl}_W(X)$.

Soit $V \subset X$ une sous-variété de X autre que W . Si V n'intersecte pas W , alors il n'est pas

11. Parfois on dira aussi que le morphisme π est l'éclatement de X le long de I .

affecté par l'éclatement de X le long de W . Cependant, si V intersecte W , alors l'ensemble $\tilde{V} = \overline{\pi^{-1}(V \setminus W)}$ est appelé **la transformée propre (ou stricte)** de V , et l'ensemble $\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(W) \cup \overline{\pi^{-1}(V \setminus W)}$, **la transformée totale** de V . L'application π est un morphisme projectif birationnel et $\text{Bl}_W(X) \setminus \pi^{-1}(W)$ est isomorphe à $X \setminus W$. Cela veut dire que l'éclatement laisse X inchangé excepté le fait que l'on remplace W par $\pi^{-1}(W)$.

1.3.1.2 Cas général (quasi-projectif)

Soient $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et $Y \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ des variétés quasi-projectives. Alors les clôtures projectives \overline{X} et \overline{Y} sont projectives. Soit $I \subset \mathbb{K}[\overline{X}]$ un idéal homogène engendré par $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[\overline{X}]$ de même degré.

On définit de même une application rationnelle φ

$$\begin{aligned} \varphi : \overline{X} &\dashrightarrow \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K}) \\ x &\longmapsto [f_0(x), \dots, f_{s-1}(x)]. \end{aligned}$$

Définition 1.3.1.2 (Éclatement d'une variété projective le long d'un idéal homogène ou d'une sous-variété).

- ✓ L'éclatement de \overline{X} le long de I noté $\text{Bl}_I(\overline{X})$ est la projection $\pi : \text{Bl}_I(\overline{X}) \longrightarrow \overline{X}$ où $\text{Bl}_I(\overline{X}) \subset \overline{X} \times \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K})$ est la variété éclatée de \overline{X} le long de I qui est le graphe Γ_φ de φ .
Si $\overline{W} \subset \overline{X}$ est une sous-variété projective de \overline{X} , l'éclatement de \overline{X} le long de \overline{W} , noté $\text{Bl}_{\overline{W}}(\overline{X})$ est l'éclatement de \overline{X} le long de l'idéal homogène radical $\mathcal{I}(\overline{W})$.
- ✓ L'éclatement de X le long de I , noté $\text{Bl}_I(X)$ est la projection $\pi : \text{Bl}_I(X) \longrightarrow \overline{X}$ où $\text{Bl}_I(X) = \text{Bl}_I(\overline{X}) \cap (X \times \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K}))$ est la variété éclatée de X le long de I .
Si $W \subset X$ est une sous-variété quasi-projective de X , la variété éclatée de X le long de W , est $\text{Bl}_W(X) = \text{Bl}_{\overline{W}}(\overline{X}) \cap (X \times \mathbb{P}^{s-1}(\mathbb{K}))$.

Pour bien appréhender cette notion, nous allons donner quelques exemples. Ainsi nous allons commencer par les cas les plus simples et les plus intuitifs.

1.3.2 Quelques exemples d'éclatements

Éclatement de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ en $\mathbf{0}$. Considérons l'application rationnelle φ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) &\dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

avec les x_i non tous nuls.

Le graphe Γ_φ de φ est

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\varphi &= \left\{ ((x_1, \dots, x_n), [y_1, \dots, y_n]) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in [y_1, \dots, y_n] \right\} \\
 &= \left\{ ((x_1, \dots, x_n), [y_1, \dots, y_n]) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \mid \text{rang} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \leq 1 \right\} \\
 &= \mathcal{V} \left(\left\{ \text{mineurs d'ordre 2 de} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \right\} \right) \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \\
 &= \mathcal{V}(x_i y_j - x_j y_i \mid 1 \leq i < j \leq n) \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}). \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

L'éclatement de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ en $0 = (0, \dots, 0)$ est $\text{Bl}_0(\mathbb{A}^n(\mathbb{K})) = \Gamma_\varphi$ avec la projection

$$\pi : \text{Bl}_0(\mathbb{A}^n(\mathbb{K})) \longrightarrow \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$$

sur le premier facteur.

Le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est obtenu en posant $x = 0$ dans 1.1. Ainsi,

$$\pi^{-1}(0) = \left\{ (0, y) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \right\} \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}).$$

En d'autres termes, l'éclatement de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ laisse tous les points inchangés excepté le point 0 qui a été remplacé par $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ qui est le diviseur exceptionnel, correspondant à la pente des droites passant par 0 dans $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$.

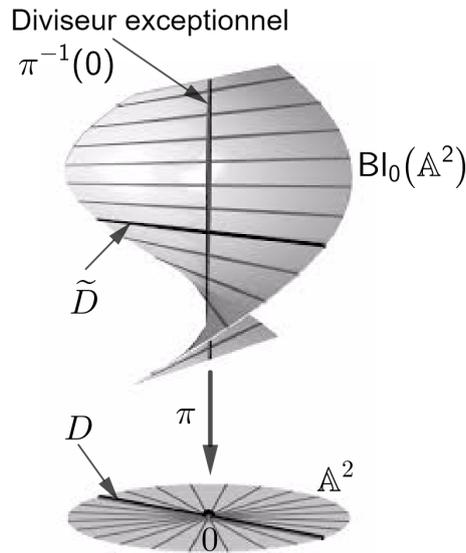
Pour représenter géométriquement cette notion, nous allons étudier l'éclatement de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ en 0. L'éclatement de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ en $0 = (0, 0)$ est $\text{Bl}_0(\mathbb{A}^2(\mathbb{K})) = \mathcal{V}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ où y_1 et y_2 sont les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ avec la projection

$$\pi : \text{Bl}_0(\mathbb{A}^2(\mathbb{K})) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$$

sur le premier facteur.

Une représentation graphique animée mieux accessible se trouve sur ce lien <https://sites.math.rutgers.edu/courses/535/535-f16/pictures/blowup.html>. Pour faire la représentation graphique, nous allons procéder comme suit :

Soit D une droite de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ passant par l'origine. Considérons la transformée stricte \tilde{D} de D dans $\text{Bl}_0(\mathbb{A}^2(\mathbb{K}))$. Par construction, au-dessus du complémentaire de l'origine, chaque point $(x, y) \in \tilde{D} \subset D \times \mathbb{P}^{n-1}$ doit avoir la coordonnée y égale au point projectif correspondant à D . Il en est de même pour la clôture \tilde{D} , et donc la transformée stricte \tilde{D} rencontre le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ exactement au point correspondant à D . En d'autres termes, le diviseur exceptionnel paramétrise les directions dans $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ en 0; deux droites passant par l'origine avec des directions distinctes se verront être séparées après éclatement. On peut imaginer l'éclatement de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ comme une hélice s'enroulant autour de la droite centrale $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ (en fait, elle s'enroule autour du diviseur exceptionnel une fois, pour qu'on faille penser au sommet de l'hélice comme collé au bas). L'image (non annotée) et la description de la figure 1.1 sont issues de [Gat19].


 FIGURE 1.1 – Éclatement de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ à l'origine.

Pour éclater $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ en un point p différent de l'origine, on décale l'origine vers p par la transformation $x \mapsto x - p$ et on obtient

$$\text{Bl}_p(\mathbb{A}^n(\mathbb{K})) = \mathcal{V}((x_i - p_i)y_j - (x_j - p_j)y_i \mid 1 \leq i, j \leq n) \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$

Éclatement d'une courbe affine à l'origine. Soit $V = \mathcal{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ une courbe nodale. Nous allons éclater V en $0 = (0, 0)$. Nous avons vu que l'éclatement de $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ en 0 est $\text{Bl}_0(\mathbb{A}^2(\mathbb{K})) = \mathcal{V}(x_1y_2 - x_2y_1) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ où y_1 et y_2 sont les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ avec la projection $\pi : \text{Bl}_0(\mathbb{A}^2(\mathbb{K})) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$. La variété éclatée de V est donnée par

$$x_2^2 - x_1^3 - x_1^2 = 0, \quad x_1y_2 = x_2y_1.$$

Puisque $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est recouvert par deux ouverts affines, $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = U_1 \cup U_2$, nous allons calculer l'éclatement séparément sur les deux cartes affines.

Dans la carte affine $U_1 = \{(y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \mid y_1 \neq 0\}$, posons $y_1 = 1$. Nous obtenons donc

$$x_2^2 - x_1^3 - x_1^2 = 0, \quad x_2 = x_1y_2$$

dans $\mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \times \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ avec les coordonnées (x_1, x_2, y_2) . En faisant une substitution par $x_2 = x_1y_2$ dans la première équation, et en faisant une factorisation, nous obtenons

$$x_1^2(y_2^2 - x_1 - 1) = 0, \quad x_2 = x_1y_2.$$

Ainsi, $\pi^{-1}(V)$ admet deux composantes irréductibles dans la carte affine U_1 : la composante définie par $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et y_2 arbitraire, qui est le générateur exceptionnel $\pi^{-1}(V)$ et celle définie par $\mathcal{V}(y_2^2 - x_1 - 1, x_2 - x_1y_2)$ qui est \tilde{V} , la transformée stricte de V . On a

$$\tilde{V} \cap E_1 = \mathcal{V}(x_1, x_2, y_2^2 - x_1 - 1, x_2 - x_1y_2).$$

Ainsi \tilde{V} et E_1 se rencontrent aux points $y_2 = \pm 1$ correspondant aux deux tangentes à V en O . Dans la carte affine $U_2 = \{(y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \mid y_2 \neq 0\}$, posons $y_2 = 1$. Nous obtenons donc

$$x_2^2 - x_1^3 - x_1^2 = 0, \quad x_1 = x_2 y_1$$

dans $\mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \times \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ avec les coordonnées (x_1, x_2, y_1) . En faisant une substitution par $x_1 = x_2 y_1$ dans la première équation, et en faisant une factorisation, nous obtenons

$$x_2^2 (1 - y_1^2 (x_2 y_1 + 1)) = 0, \quad x_1 = x_2 y_1.$$

Donc, $\pi^{-1}(V)$ admet deux aussi composantes irréductibles dans la carte affine U_2 : la composante définie par $x_2 = 0, \quad x_1 = 0$ et y_1 arbitraire, qui est le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(V)$ et celle définie par $\mathcal{V}(1 - y_1^2(x_2 y_1 + 1), x_1 - x_2 y_1)$ qui est \tilde{V} la transformée stricte de V . On a

$$\tilde{V} \cap E_2 = \mathcal{V}(x_1, x_2, 1 - y_1^2(x_2 y_1 + 1), x_1 - x_2 y_1)$$

Ainsi \tilde{V} et E_2 se rencontrent aux points $y_1 = \pm 1$ correspondant aux deux tangentes à V en O . L'image (non annotée) de la figure 1.2 est issue de [Gat19].

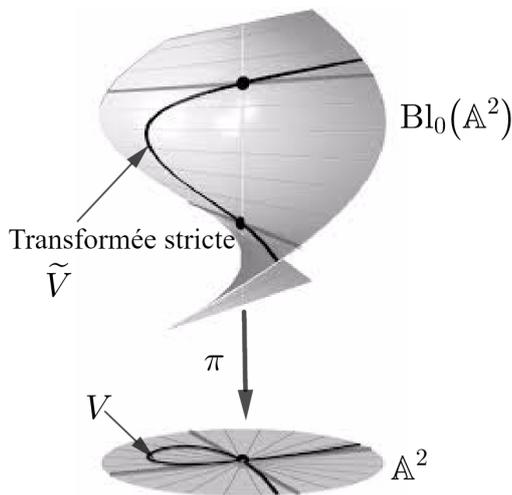


FIGURE 1.2 – Éclatement de la courbe nodale $V = \mathcal{V}(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2)$ à l'origine.

Éclatement de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ en un point p . Soit $\varphi : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ la projection de centre un point $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ et $\Gamma_\varphi \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ le graphe de φ . Comme dans le cas affine, l'éclatement de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ en p est la projection $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ où $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})} = \Gamma_\varphi$ est la variété éclatée de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ en p . Comme précédemment, π est un isomorphisme de $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})} \setminus \pi^{-1}(p)$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus \{p\}$ et la fibre $\pi^{-1}(p)$ au dessus de p , isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

Éclatement d'une surface projective en un point. Soient $C \subset \mathbb{P}^3$ la surface quadrique définie par $C = \mathcal{V}(x_0 x_3 - x_1 x_2)$ et $p = [0, 0, 0, 1] \in C$. Considérons la projection depuis p suivante

$$\begin{aligned} \varphi_p : C &\dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \\ [x_0, x_1, x_2, x_3] &\longmapsto [x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

L'éclatement de C en p est la variété

$$\text{Bl}_p(C) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid \begin{array}{l} y_0x_1 - y_1x_0 = 0 \\ x_0x_3 - x_1x_2 = 0, y_0x_2 - y_2x_0 = 0, x_3y_0 - y_2x_1 = 0 \\ y_1x_2 - y_2x_1 = 0 \end{array} \right\}$$

contenue dans $C \times \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ avec la projection $\pi : \text{Bl}_p(C) \longrightarrow C$ où $x = [x_0, x_1, x_2, x_3]$, $y = [y_0, y_1, y_2]$, la première équation est l'équation de C , la seconde vient de $\varphi_p(x) = y$ et la dernière vient du graphe de la restriction de φ_p à $C \setminus \{p\}$.

Dans ces équations, si on fait $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, il ne reste plus que $y_0 = 0$, ce qui donne une droite projective : le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

1.4 Base de Gröbner et manipulation des idéaux des polynômes

Dans cette section, nous poursuivons l'établissement des dictionnaires entre l'algèbre et la géométrie commencé ci-haut. Nous étudierons d'une part quelques méthodes géométriques liées aux variétés et d'autre part les versions algébriques correspondantes de façon algorithmique et computationnelle en utilisant la méthode des bases de Gröbner. La méthode des bases de Gröbner fournit un outil essentiel pour le calcul symbolique avec des idéaux polynomiaux. Cette méthode est implémentée dans tous les principaux systèmes de calcul formel tels que Maple, Sagemath, etc. et s'avère très utile pour étudier les idéaux issus des systèmes contraints tels que les mécanismes robotiques par exemple. Cette implémentation nous permettra d'effectuer diverses opérations et calculs algébriques avec des idéaux de polynômes tels que :

- ✓ l'élimination des variables ;
- ✓ le test d'appartenance à un idéal ;
- ✓ la somme, le produit, le radical et l'intersection des idéaux ;
- ✓ le quotient et la saturation d'un idéal ;
- ✓ la décomposition primaire d'un idéal ;
- ✓ les fonctions et polynômes de Hilbert ;
- ✓ etc. .

1.4.1 Les ordres monomiaux

Pour un polynôme à une seule variable, nous pouvons toujours arranger ses termes par ordre décroissant ou par ordre croissant ; et ainsi parler de son monôme dominant, son coefficient dominant et son terme dominant. Pour les polynômes à plusieurs variables nous avons d'abord besoin d'écrire un ordre sur les monômes.

Définition 1.4.1.1 (Ordre monomial). Un **ordre monomial** OM sur $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est une relation d'ordre total $>_{OM}$ sur \mathbb{N}^n satisfaisant les deux conditions suivantes :

- ❶ si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $\alpha >_{OM} \beta$, alors $\alpha + \gamma >_{OM} \beta + \gamma$, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$,
- ❷ toute partie non vide de \mathbb{N}^n a un plus petit élément pour $>_{OM}$.

Vue l'identification des monômes avec les éléments de \mathbb{N}^n , un ordre sur \mathbb{N}^n définit un ordre sur les monômes $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. En d'autres termes, si $\alpha >_{OM} \beta$ alors $x^\alpha >_{OM} x^\beta$.

Il existe plusieurs ordres monomiaux mais nous allons considérer seulement les trois plus importants.

Pour simplifier, nous définissons l'ordre suivant sur les variables : $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, sauf indication contraire.

Définitions 1.4.1.2 (Quelques ordres monomiaux). Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$.

- ❶ **Ordre lexicographique pur**¹² : $\alpha >_{plex} \beta$ si, et seulement si, pour le premier indice i où α et β diffèrent on a $\alpha_i > \beta_i$.
- ❷ **Ordre lexicographique gradué**¹³ : $\alpha >_{grlex} \beta$ si, et seulement si,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{ ou } (|\alpha| = |\beta| \text{ et } \alpha >_{lex} \beta).$$

- ❸ **Ordre lexicographique inverse gradué** : $\alpha >_{grevlex} \beta$ si, et seulement si,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

ou $(|\alpha| = |\beta| \text{ et le premier indice } i \text{ en partant de la droite où } \alpha \text{ et } \beta \text{ diffèrent, on a } \alpha_i < \beta_i)$.

Il est montré dans [CLO15] (Chap.2, Section 2, Proposition 4), que les ordres monomiaux que nous considérons sont des ordres monomiaux et que toute suite décroissante des monômes stationne. Ce qui nous permet de garantir que diverses algorithmes se terminent, comme nous le verrons plus tard. Avec ces ordres, nous sommes maintenant à mesure de parler de monômes dominants, de termes dominants, etc. pour un polynôme de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ donné.

Définitions 1.4.1.3 (Terme dominant, monôme dominant, coefficient dominant). Supposons qu'un ordre monomial $>_{OM}$ soit fixé. Étant donné un polynôme $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$,

- ❶ le **multidegré** de f , noté $\text{multideg}(f)$ est :

$$\text{multideg}(f) = \max_{>_{OM}} \{ \alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0 \},$$

12. L'ordre lexicographique est analogue à l'ordre des mots utilisés dans les dictionnaires (d'où le nom). Nous pouvons voir les coefficients d'un n -uplet $\alpha \in \mathbb{N}^n$ comme analogue aux lettres dans un mot. Les lettres sont classées par ordre alphabétique $a > b > \dots > y > z$.

13. Ou ordre lexicographique avec priorité au degré.

- ② le **monôme dominant** de f , noté $\text{LM}(f)$ ¹⁴ est : $\text{LM}(f) = x^{\text{multideg}(f)}$,
- ③ le **coefficient dominant** de f , noté $\text{LC}(f)$ est : $\text{LC}(f) = a_{\text{multideg}(f)}$,
- ④ le **terme dominant** de f , noté $\text{LT}(f)$ est : $\text{LT}(f) = \text{LC}(f)\text{LM}(f)$.

1.4.2 Algorithme de division en plusieurs variables

L'objectif de cette section est de définir un algorithme de division pour les polynômes à plusieurs variables qui généralise l'algorithme de division pour les polynômes à une seule variable. Rappelons que dans $\mathbb{K}[x]$ la division d'un polynôme f par un polynôme non nul g donne la décomposition de f sous la forme $f = gq + r$, où q et r sont uniques, $r = 0$ ou $\text{deg}(r) < \text{deg}(g)$.

Dans le cas de plusieurs variables, si un ordre monomial OM est donné, on peut diviser un polynôme f par un polynôme g . On peut même diviser f par une liste de polynômes $\{f_1, \dots, f_s\}$: on dit que l'on réduit f par $\{f_1, \dots, f_s\}$.

Théorème 1.4.2.1 (Algorithme de division en plusieurs variables, [CLO15], Chap.2, Sec.2, Th.3).

Soit $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ un ensemble de polynômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ muni d'un ordre monomial $>_{OM}$. Tout polynôme f de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ peut s'écrire sous la forme

$$f = u_1 f_1 + \dots + u_s f_s + r,$$

où u_1, \dots, u_s, r sont des polynômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, tels que $r = 0$ ou r est une somme des termes non divisibles par $\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_s)$. De plus, si $u_i f_i \neq 0$, alors $\text{multideg}(u_i f_i) \leq \text{multideg}(f)$.

Le polynôme r est un reste de la division de f par F ; on note

$$f \xrightarrow{F} r.$$

Définition 1.4.2.2 (Forme normale). Un polynôme r est dit être en **forme normale** et on note¹⁵ NF , par rapport à une liste $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ de polynômes non nuls, si $r = 0$ ou si aucun des termes de r n'est divisible par les $\text{LT}(f_i)$ pour $i = 1, \dots, s$. On dit aussi que le polynôme r ne peut être réduit modulo F .

L'algorithme 1 suivant permet de calculer les polynômes u_i et r .

Dans cet algorithme p représente la dividende intermédiaire à chaque étape.

Voici comment l'algorithme fonctionne :

- ✓ si $\text{LT}(f_i)$ divise $\text{LT}(p)$, l'algorithme procède à la division comme dans le cas d'une seule variable,
- ✓ si $\text{LT}(f_i)$ ne divise pas $\text{LT}(p)$, l'algorithme rajoute $\text{LT}(p)$ au reste.

14. Les notations $\text{LM}(f)$, $\text{LC}(f)$, $\text{LT}(f)$ vient de l'anglais : LM : Leading Monomial, LC : Leading Coefficient, LM : Leading Terme.

15. La notation NF , vient du terme anglais « normal form ».

Algorithme 1 ALGORITHME DE DIVISION DES POLYNÔMES À PLUSIEURS VARIABLES

ENTRÉE: $F = \{f_1, \dots, f_n\}, f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

SORTIE: $u_1, \dots, u_n, r \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tels que $f = u_1 f_1 + \dots + u_n f_n + r$ ($r = 0$ ou r est une somme de termes non divisibles par $LT(f_1), \dots, LT(f_n)$).

1. $u_0 := 0, \dots, u_s := 0; r := 0; p := f$
2. **TANT QUE** $p \neq 0$ **FAIRE**
3. **SI** il existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tels que $LT(f_i)$ divise $LT(p)$, **ALORS**
4. choisir le plus petit i
5. $u_i := u_i + \frac{LT(p)}{LT(f_i)}$
6. $p := p - \frac{LT(p)}{LT(f_i)} f_i$
7. **SINON**
8. $r := r + LT(p)$
9. $p := p - LT(p)$
10. **FIN DU SI**
11. **FIN DU TANT QUE**

Exemple 1.4.2.3. Soient $f = x^2y + xy^2 + y^2, f_1 = xy - 1, f_2 = y^2 - 1$. On considère l'ordre lexicographique avec $x > y$. Nous allons effectuer la division de f par $F = \{f_1, f_2\}$

On résume les différentes étapes de calcul dans le tableau ci-dessous.

$x^2y + xy^2 + y^2$	$xy - 1$	$y^2 - 1$	reste
$x^2y - x$	$x + y$	1	$x + y + 1$
$xy^2 + x + y^2$			
$xy^2 - y$			
$x + y^2 + y$			
$y^2 + y$			
$y^2 - 1$			
$y + 1$			
1			
0			

Contrairement à l'algorithme d'Euclide, les quotients u_1, \dots, u_s et le reste r ne sont pas uniques. Ils le sont si un ordre de division dans la liste $\{f_1, \dots, f_s\}$ est imposé. Nous pouvons voir un exemple dans [CLO15] (Chap.2, Section 3, exemple 4) où le reste r et les polynômes u_1, \dots, u_s changent si on change l'ordre (ou le classement) des polynômes dans F .

Dans le cas d'une seule variable, le polynôme f appartient à l'idéal $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ si, et seulement si, le reste r de la division de f par le PGCD de f_1, \dots, f_s est nul, ce qui n'est pas vrai pour cet algorithme multivarié. En effet, de l'expression $f = u_1 f_1 + \dots + u_s f_s + r$, nous pouvons voir que $f - r \in I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$; donc si $r = 0$ alors $f \in I$. Cependant la réciproque n'est pas toujours vraie (voir [CLO15], Chapitre 2, Section 3, exemple 5). Dans le cas où $r \neq 0$ mais $f \in I$, nous pouvons

dire que f_1, \dots, f_s n'est pas un « bon » système de générateurs pour I (c'est-à-dire un système de générateurs G de l'idéal I pour lequel le reste de la division par G est unique, peu importe l'ordre utilisé sur les diviseurs, et que l'on ait ainsi, $f \in I$ si, et seulement, $f \xrightarrow{G} 0$). Les bases de Gröbner permettent de remédier à cette situation.

1.4.3 Les bases de Gröbner

Une base de Gröbner d'un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est un ensemble de générateurs de I , vérifiant certaines propriétés supplémentaires. Elle a le grand avantage de ramener l'étude des idéaux polynomiaux à l'étude des idéaux monomiaux, plus faciles à appréhender car les opérations sur les polynômes deviennent souvent plus simples si on les restreint aux monômes.

Les bases de Gröbner furent introduites par un mathématicien autrichien Bruno Buchberger dans sa thèse soutenue en 1965. Il nomme ces bases ainsi en l'honneur de son directeur de thèse Wolfgang Gröbner. Il donne un algorithme appelé algorithme de Buchberger, qui calcule les bases de Gröbner.

Définition 1.4.3.1 (Idéal monomial). Un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est dit **monomial** s'il est engendré par des monômes, i.e s'il existe une partie A de \mathbb{N}^n , telle que

$$I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle$$

Théorème 1.4.3.2 (Lemme de Dickson). Soit $I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle$ un idéal monomial de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Alors il existe $\alpha(1), \dots, \alpha(s)$ tels que

$$I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle.$$

Si I est un idéal non nul de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, on note $\text{LT}(I)$ l'ensemble des termes dominants des éléments de I : $\text{LT}(I) = \{\text{LT}(f) \mid f \in I\}$. On note $\langle \text{LT}(I) \rangle$ l'idéal engendré par les éléments de $\text{LT}(I)$; on l'appelle l'**idéal des termes dominants** de I et il est un idéal monomial.

Définition 1.4.3.3 (Base de Gröbner). Un ordre monomial étant fixé, un sous-ensemble fini $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ d'un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est appelé **base de Gröbner** (ou **base standard**) si

$$\langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t) \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle.$$

Cela signifie que, un sous-ensemble $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ d'un idéal I est une base de Gröbner si, et seulement si, le terme dominant de n'importe quel élément de I est divisible par celui d'un des g_i , $i = 1, \dots, t$.

Proposition 1.4.3.4 (Existence d'une base de Gröbner, [CLO15], Chap.2, Sec.5, Cor.6). Un ordre monomial étant fixé, tout idéal non nul de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ possède une base de Gröbner. De plus, toute base de Gröbner d'un idéal forme une base de cet idéal.

Exemple 1.4.3.5. Fixons l'ordre lexicographique sur les monômes de $\mathbb{Q}[x, y, z, w]$, avec $x > y > z > w$. Soit $I = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$, avec $g_1 = x - y^2w$, $g_2 = y - zw$, $g_3 = z - w^3$ et $g_4 = w^3 - w$.

Montrons que $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ est une base de Gröbner de l'idéal I .

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $f \in I$ tel que

$$\text{LT}(f) \notin \langle \text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2), \text{LT}(g_3), \text{LT}(g_4) \rangle = \langle x, y, z, w^3 \rangle.$$

Alors x, y, z et w^3 ne divisent pas $\text{LT}(f)$. Par suite f est un polynôme d'une seule variable w telle que $\text{LT}(f)$ n'est pas divisible par w^3 .

Par ailleurs, comme $f \in I$, on a

$$f = h_1(x - y^2w) + h_2(y - zw) + h_3(z - w^3) + h_4(w - w^3)$$

avec $h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{Q}[x, y, z, w]$. Alors pour tout $a \in \mathbb{Q}$, on a :

$$f(a^9, a^4, a^3, a) = h_4(a^9, a^4, a^3, a)(a^3 - a).$$

Comme x, y et z n'apparaissent pas dans f et comme \mathbb{Q} est infini, on obtient $f = h_4(w^9, w^4, w^3, w)(w^3 - w)$. Par suite $w^3 - w$ divise f , ce qui contredit le fait que w^3 ne divise pas $\text{LT}(f)$. Ainsi G est une base de Gröbner de I .

Proposition 1.4.3.6 (Unicité du reste, [CLO15], Chap.2, Sec.6, prop.1). *Soit I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et soit $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ une base de Gröbner de I . Soit f un polynôme de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Il existe un unique $r \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ qui satisfait aux deux assertions suivantes :*

- ❶ *les termes de r ne sont pas divisibles par $\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t)$,*
- ❷ *il existe $g \in I$, tel que $f = g + r$.*

*En particulier, r est le reste de la division de f par G , peu importe l'ordre dans lequel on divise par les éléments de G . De plus r est l'unique réduction sous forme normale du polynôme f modulo G , on l'appelle également la **forme normale** de f modulo G .*

Démonstration. Divisons le polynôme f par $\{g_1, \dots, g_t\}$, d'après le théorème 1.4.2.1, il existe des polynômes u_1, \dots, u_t et r , tels que $f = u_1g_1 + \dots + u_tg_t + r$, où r satisfait à l'assertion ❶. En posant, $g = u_1g_1 + \dots + u_tg_t$, le polynôme r satisfait aussi l'assertion ❷.

Montrons l'unicité de r . Supposons qu'il existe r et r' satisfaisant les deux assertions : $f = g + r = g' + r'$. Alors $r - r' = g' - g \in I$.

Ainsi, si $r - r' \neq 0$, on a $\text{LT}(r - r') \in \langle \text{LT}(I) \rangle = \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t) \rangle$. Par suite r est divisible par certain $\text{LT}(g_i)$. Or ceci est impossible puisque aucun terme de r et r' n'est divisible par $\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t)$. Donc $r - r'$ doit être nul, ce qui montre l'unicité.

La dernière assertion de la proposition est une conséquence de l'unicité du reste. □

La proposition 1.4.3.6 montre qu'une base de Gröbner d'un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est un « bon » système de générateurs de I que nous recherchions car le comportement indésirable de l'algorithme de division dans $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ vu dans la sous-section 1.4.2 ne se produit pas lorsque nous divisons par les éléments d'une base de Gröbner. La proposition peut donc être utilisée pour déterminer si un polynôme appartient à un idéal ou non ; aussi appelé **problème d'appartenance à un idéal**.

Corollaire 1.4.3.7 (Appartenance d'un polynôme à un idéal). Soit I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et soit $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ une base de Gröbner de I . Un polynôme f de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est un élément de I , si, et seulement si, le reste de la division de f par G est égal à 0.

Démonstration. Si le reste est nul, alors $f \in I$. Inversement, étant donné $f \in I$, on a une décomposition $f = f + 0$ satisfaisant les deux assertions de la proposition 1.4.3.6. Par suite, 0 est le reste de la division de f par G . \square

1.4.4 L'algorithme de Buchberger

On fixe pour toute cette section, un ordre monomial sur l'ensemble des monômes. Nous avons vu dans la section précédente que tout idéal non nul de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ possède une base finie avec de bonnes propriétés (base de Gröbner). L'objectif dans cette section est de donner un algorithme permettant de calculer une base de Gröbner à partir d'une famille génératrice finie (ou une base) de cet idéal. Pour transformer un système de générateurs en une base de Gröbner, la notion de S -polynôme est introduite. Les S -polynômes sont utilisés dans les calculs afin d'annuler les termes dominants.

Soient f et g deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Notons $\alpha = \text{multideg}(f)$ et $\beta = \text{multideg}(g)$. Le plus petit commun multiple de $\text{LM}(f)$ et $\text{LM}(g)$ noté $\text{ppcm}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))$ est le monôme $J = x^\gamma$ où $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, avec $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Définition 1.4.4.1 (Le S -polynôme). On appelle S -polynôme de f et g le polynôme

$$S(f, g) = \frac{J}{\text{LT}(f)}f - \frac{J}{\text{LT}(g)}g.$$

Le théorème suivant dit critère de Buchberger permet de vérifier si une base donnée d'un idéal est une base de Gröbner.

Théorème 1.4.4.2 (Critère de Buchberger, [CLO15], Chap.2, Sec.6, Th.6). Soit $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ une base d'un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ❶ G est une base de Gröbner de I ,
- ❷ pour tout couple (i, j) , avec $i \neq j$, $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$.

Une conséquence importante du théorème 1.4.4.2 est l'**algorithme de Buchberger** qui permet de construire une base de Gröbner d'un idéal I . L'algorithme de Buchberger utilise les S -polynômes et l'algorithme de division pour calculer une base de Gröbner de I : étant donné un ensemble de générateurs de l'idéal I , il crée tous les S -polynômes de paires de ces générateurs, puis les réduit modulo l'ensemble initial de générateurs. Il répète ces étapes jusqu'à ce que tous les S -polynômes soient réduits à zéro et on obtient donc un nouvel ensemble de générateurs plus grand.

Cet algorithme s'arrête après un nombre fini d'étapes, car d'après le lemme de Dickson (1.4.3.2), la suite croissante d'idéaux monomiaux qui intervient dans cette construction est stationnaire. Une

Algorithme 2 ALGORITHME DE BUCHBERGER

ENTRÉE: Un ensemble de polynôme $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ qui engendre un idéal I .

SORTIE: Une base de Gröbner $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ de I avec $F \subset G$.

1. $G = F$
2. $M = \{\{f_i, f_j\} : f_i, f_j \in G, f_i \neq f_j\}$
3. **TANT QUE** $M \neq \emptyset$ **FAIRE**
4. prendre $\{p, q\}$ dans M
5. $M := M - \{p, q\}$
6. $S := S(p, q)$
7. $r := NF(S, G)$
8. **SI** $(r \neq 0)$ **ALORS**
9. $M := M \cup \{\{g, r\} \text{ pour tout } g \in G\}$
10. $G := G \cup \{r\}$
11. **FIN DU SI**
12. **FIN DU TANT QUE**

démonstration détaillée se trouve dans ([CLO15], Chapitre 2, Section 7, Théorème 2).

L'algorithme de Buchberger produit une base de Gröbner qui est souvent de très grande taille par rapport à ce que l'on souhaiterait. En particulier, la famille de départ est contenue dans la base de sortie. Il est donc nécessaire d'éliminer la redondance, c'est-à-dire, éliminer les générateurs inutiles.

Théorème 1.4.4.3. *Soit G une base de Gröbner d'un idéal I et soit un polynôme $p \in G$ tel que $LT(p) \in \langle LT(G - \{p\}) \rangle$. Alors $G - \{p\}$ est aussi une base de Gröbner de I .*

Démonstration. Nous savons que $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$. Si $LT(p) \in \langle LT(G - \{p\}) \rangle$, alors $\langle LT(G - \{p\}) \rangle = \langle LT(G) \rangle$. Par définition, il s'ensuit que $G - \{p\}$ est une base de Gröbner de I . \square

En ajustant les constantes afin de réduire les coefficients dominant à 1, en enlevant tous les p tels que $LT(p) \in \langle LT(G - \{p\}) \rangle$ et en remplaçant G par $G - \{p\}$ après chaque retrait d'un tel p , on obtient une base de Gröbner **minimale**.

Définition 1.4.4.4. *Une base de Gröbner minimale d'un idéal I est une base de Gröbner G de I telle que :*

- ❶ $LC(p) = 1$ pour tout $p \in G$,
- ❷ pour tout $p \in G$, $LT(p) \notin \langle LT(G - \{p\}) \rangle$.

Pour un idéal, on peut avoir plusieurs bases de Gröbner minimales. Heureusement nous pourrons choisir une base de Gröbner minimale qui sera « meilleure » que toutes les autres. La définition est la suivante :

Définition 1.4.4.5. Une base de Gröbner réduite d'un idéal I est une base de Gröbner G de I telle que

- ❶ $\text{LC}(p) = 1$ pour tout $p \in G$,
- ❷ pour tout $p \in G$ aucun monôme de p n'appartient à $\langle \text{LT}(G - \{p\}) \rangle$.

Exemple 1.4.4.6. Dans l'exemple précédent, nous avons déterminé une base de Gröbner $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{x^2 - 2y^2, xy - 3, 3x - 2y^3, \frac{2}{3}y^4 - 3\}$ de l'idéal $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 - 2y^2, xy - 3 \rangle$. Les générateurs f_1 et f_2 peuvent être éliminés de la base G parce que leurs termes dominants $\text{LT}(f_1) = x^2$ et $\text{LT}(f_2) = xy$ sont divisibles par le terme dominant $\text{LT}(f_3) = 3x$ du générateur f_3 . Donc $G = \{3x - 2y^3, \frac{2}{3}y^4 - 3\}$ est encore une base de Gröbner de l'idéal $I = \langle f_1, f_2 \rangle$. Enfin la base de Gröbner réduite pour l'idéal I est $G = \{x - \frac{2}{3}y^3, y^4 - \frac{3}{2}\}$.

Proposition 1.4.4.7 (Unicité de la base réduite, [CLO15], Chap.2, Sec.7, Th.5). Tout idéal non nul admet une unique base de Gröbner réduite pour un ordre monomial donné.

Une conséquence de l'unicité de la base de Gröbner réduite est qu'elle peut être utilisée pour montrer l'égalité de deux idéaux. Il suffit de calculer la base de Gröbner réduite de chacun d'eux suivant un ordre monomial donné.

C'est cette base de Gröbner réduite qui est calculée par les systèmes de calcul formel (Sage, Maple, Macaulay, Mathematica, Gb, CoCoA, Singular, etc.).

L'algorithme de Buchberger se révèle en pratique, très insuffisant pour traiter des applications conséquentes. Les algorithmes $FGLM$ [FGLM93], F_4 [Fau99], F_5 [Fau02] ont permis de lever trois obstructions fondamentales :

- ✓ Le concept de changement de base : l'idée est de calculer d'abord une base pour un ordre « facile » puis de changer efficacement d'ordre en tirant partie du fait qu'on a déjà une base de Gröbner, c'est l'algorithme $FGLM$.
- ✓ L'algorithme F_4 permet d'éviter les choix arbitraires des S -polynômes et ramène le problème de calculer une base de Gröbner à la mise sous forme échelonnée d'une matrice.
- ✓ L'algorithme F_5 permet sous certaines hypothèses de régularité du système initial d'éviter tous les calculs inutiles ; autrement dit l'algorithme ne génère que des matrices dont le rang est plein (donc de tailles optimales).

Ces algorithmes sont implantés dans beaucoup de systèmes de calcul formel.

Maintenant, nous allons développer quelques méthodes algébriques basées sur les bases de Gröbner.

1.4.5 Projection et Théorie d'élimination

Les bases de Gröbner peuvent être utilisées pour déterminer la projection d'une variété algébrique sur un sous-espace affine ou projectif, en particulier celles calculées avec l'ordre lexicographique.

Cette projection n'est pas en général une variété algébrique, mais sa clôture de Zariski l'est et on peut calculer les équations définissant cette variété en utilisant l'opération algébrique d'élimination polynomiale.

Définition 1.4.5.1 (Idéal d'élimination). Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Le k -ième idéal d'élimination I_k est l'idéal de $\mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$ défini par

$$I_k = I \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n].$$

Les éléments de I_k sont des conséquences du système d'équations

$$f_1 = \dots = f_s = 0,$$

après élimination des variables x_1, \dots, x_k .

Notons que $I_0 = I$ et que les idéaux d'élimination dépendent de l'ordre des variables. Le résultat suivant montre comment extraire d'une base de Gröbner de I une base de Gröbner de I_k .

Théorème 1.4.5.2 (Théorème d'élimination, [CLO15], Chap.3, Sec.1, Th.2). Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et soit G une base de Gröbner de I , pour l'ordre lexicographique induit par l'ordre donné par $x_1 > \dots > x_n$. Alors, pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, l'ensemble

$$G_k = G \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$$

est une base de Gröbner de l'idéal d'élimination I_k .

Démonstration. Fixons k entre 0 et n . Puisque $G_k \subset I_k$ par construction, il suffit de montrer que $\langle \text{LT}(G_k) \rangle = \langle \text{LT}(I_k) \rangle$ par définition d'une base de Gröbner.

L'inclusion $\langle \text{LT}(G_k) \rangle \subset \langle \text{LT}(I_k) \rangle$ est immédiate. Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que pour tout polynôme f de I_k , le terme dominant $\text{LT}(f)$ est divisible par un $\text{LT}(g)$ où $g \in G_k$.

Supposons donc $f \in I_k$. Comme G est une base de Gröbner de I et que $I_k \subset I$, alors $\text{LT}(f)$ est divisible par $\text{LT}(g)$ où $g \in G$. Le polynôme f est dans I_k , il ne possède donc que des variables x_{k+1}, \dots, x_n . Comme $\text{LT}(f) \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$, alors $\text{LT}(g) \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$.

D'après l'ordre lexicographique choisi, tout monôme de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$ est plus grand que tous les monômes de $\mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$. De $\text{LT}(g) \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$, on en déduit que g est un polynôme de $\mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$; ainsi $g \in G_k$. \square

Exemple 1.4.5.3. Soit $I = \langle x + y + z - p_1, x^2 + y^2 + z^2 - p_2, x^3 + y^3 + z^3 - p_3, x^4 + y^4 + z^4 - p_4 \rangle$ un idéal de $\mathbb{K}[x, y, z, p_1, p_2, p_3, p_4]$.

La base de Gröbner par rapport à l'ordre plex induit par $x > y > z > p_1 > p_2 > p_3 > p_4$ est $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ où

$$\begin{aligned} f_1 &= x + y + z - p_1 \\ f_2 &= p_1^2 - 2p_1y - 2p_1z + 2y^2 + 2yz - p_2 \\ f_3 &= -p_1^3 + 3p_1^2z - 6p_1z^2 + 6z^3 + 3p_1p_2 - 3p_2z - 2p_3 \\ f_4 &= p_1^4 - 6p_1^2p_2 + 8p_1p_3 + 3p_2^2 - 6p_4 \end{aligned}$$

On a donc les 1-ier, 2-ième et 3-ième idéaux d'élimination suivants :

$$\begin{aligned} I_1 &= I \cap \mathbb{K}[y, z, p_1, p_2, p_3, p_4] = \langle f_2, f_3, f_4 \rangle \\ I_2 &= I \cap \mathbb{K}[z, p_1, p_2, p_3, p_4] = \langle f_3, f_4 \rangle \\ I_3 &= I \cap \mathbb{K}[p_1, p_2, p_3, p_4] = \langle f_4 \rangle = \langle p_1^4 - 6p_1^2 p_2 + 8p_1 p_3 + 3p_2^2 - 6p_4 \rangle. \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons étudier la géométrie de l'élimination, c'est-à-dire, donner un sens géométrique au théorème de l'élimination. Ainsi d'un point de vue géométrique, le théorème d'élimination correspond à un théorème de projection pour les variétés associées : éliminer le premier bloc de variables revient à projeter les variétés associées sur le sous-espace constitué du deuxième bloc de variables.

Théorème 1.4.5.4 (Projection). *Supposons \mathbb{K} algébriquement clos. Soit*

$$\begin{aligned} \pi_k : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{A}^{n-k}(\mathbb{K}) \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (a_{k+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

la projection sur les $n - k$ dernières variables.

Soient I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $V = \mathcal{V}(I)$ et $I_k = I \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$ son k -ième idéal d'élimination. Alors

$$\overline{\pi_k(V)} = \mathcal{V}(I_k) \subset \mathbb{A}^{n-k}(\mathbb{K}).$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathcal{V}(I_k) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\pi_k(V)))$.

Soit $f \in I_k \subset I$. Alors $f \in \mathcal{I}(V) \subset \mathcal{I}(\pi_k(V))$; soit $I_k \subset \mathcal{I}(\pi_k(V))$, donc $\pi_k(V) \subset \mathcal{V}(I_k)$.

Puisque $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\pi_k(V)))$ est la plus petite variété contenant $\pi_k(V)$, alors $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\pi_k(V))) \subset \mathcal{V}(I_k)$.

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{I}(\pi_k(V))$. Alors $f(a_{k+1}, \dots, a_n) = 0$ pour tout $(a_{k+1}, \dots, a_n) \in \pi_k(V)$.

Considérons comme un élément de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, nous avons $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in V$. Donc $f \in \mathcal{I}(V)$ et d'après le Nullstellensatz de Hilbert, il existe un entier naturel k tel que $f^k \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Puisque f ne dépend pas de x_1, \dots, x_k , alors f^k non plus ne dépend de x_1, \dots, x_k . Donc $f^k \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$ et par suite, $f^k \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n] = I_k$. Donc $f \in \sqrt{I_k}$, soit $\mathcal{I}(\pi_k(V)) \subset \sqrt{I_k}$. Donc $\mathcal{V}(\sqrt{I_k}) = \mathcal{V}(I_k) \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(\pi_k(V)))$. D'où $\overline{\pi_k(V)} = \mathcal{V}(I_k)$. \square

Exemple 1.4.5.5. Les éliminations effectuées à l'exemple 1.4.5.3 correspondent à la projection de la variété algébrique affine $\mathcal{V}(I)$ où $I = \langle x + y + z - p_1, x^2 + y^2 + z^2 - p_2, x^3 + y^3 + z^3 - p_3, x^4 + y^4 + z^4 - p_4 \rangle$ un idéal de $\mathbb{K}[x, y, z, p_1, p_2, p_3, p_4]$, sur le sous-espace constitué des variables p_1, p_2, p_3 et p_4 . C'est donc une hypersurface d'équation $p_1^4 - 6p_1^2 p_2 + 8p_1 p_3 + 3p_2^2 - 6p_4 = 0$.

1.4.6 Somme, produit et intersection des idéaux

Définition 1.4.6.1 (Somme, produit et intersection des idéaux). Soient I et J des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. La somme, le produit et l'intersection de I et J sont des idéaux définis par :

- Somme de I et J :

$$I + J = \{f + g \mid f \in I \text{ et } g \in J\}.$$

- Produit de I et J :

$$I.J = \langle \{f.g \mid f \in I \text{ et } g \in J\} \rangle.$$

- Intersection de I et J :

$$I \cap J = \{f \mid f \in I \text{ et } f \in J\}.$$

Proposition 1.4.6.2 ([CLO15], Chap.4, Sec.3, Pro.2, Cor.3). *Soient I et J deux idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Alors $I + J$ est le plus petit idéal contenant I et J . En particulier, si $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ et $J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, alors*

$$I + J = \langle f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t \rangle.$$

Étant donné les générateurs des I et J , nous considérons le problème de comment calculer les générateurs de $I \cap J$. Cela nous aidera plus tard dans le calcul des générateurs du quotient et de la saturation des idéaux.

Théorème 1.4.6.3 (Calcul d'intersection, [CLO15], Chap.4, Sec.3, Th.11). *Soient I et J deux idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Et soit $K = tI + (1 - t)J$ un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t]$ ¹⁶. Alors*

$$I \cap J = K \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

Le théorème ci-dessus montre que $I \cap J$ est un idéal d'élimination et fournissent avec le théorème d'élimination un algorithme de calcul d'intersections d'idéaux ci-dessous.

Soient $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ et $J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

- 1 Considérer l'idéal

$$tI + (1 - t)J = \langle tf_1, \dots, tf_s, (1 - t)g_1, \dots, (1 - t)g_t \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t].$$

- 2 Calculer une base de Gröbner par rapport à l'ordre plex induit par $t > x_1, > \dots, > x_n$.
- 3 Appliquer le théorème d'élimination : d'après le théorème d'élimination, les éléments de cette base qui ne contiennent pas la variable t forment une base, notamment une base de Gröbner, de $I \cap J$.

1.4.7 Composantes des variétés, quotient et saturation des idéaux

Nous avons souvent besoin d'enlever les composantes factices d'une variété algébrique (surtout celles décrivant les systèmes contraints). L'ensemble obtenu n'est pas aussi toujours¹⁷ une variété

16. On ajoute donc une nouvelle variable t .

17. Par exemple, dans $\mathbb{K}[x, y, z]$, considérons les idéaux $I = \langle xz, yz \rangle$ et $J = \langle z \rangle$. Les variétés $V = \mathcal{V}(I)$ et $W = \mathcal{V}(J)$ sont respectivement la réunion du plan (x, y) avec l'axe des côtes z et le plan (x, y) . W étant une composante de V , si nous l'enlevons à V , il reste que l'axe des côtes sans origine qui n'est pas une variété algébrique et le passage à la clôture de Zariski rajoute l'origine, c'est-à-dire, nous obtenons $\mathcal{V}(x, y)$.

algébrique. Nous avons donc aussi besoin de considérer sa clôture algébrique. Pour déterminer la clôture de Zariski de cette différence des variétés algébriques, nous allons définir deux constructions sur les idéaux qui sont : le **quotient** et la **saturation** des idéaux.

Définition 1.4.7.1 (Quotient des idéaux). Soient I et J des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Le quotient de I par J , noté $I : J$ est un idéal contenant I défini par :

$$I : J = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid fg \in I, \text{ pour tout } g \in J\}.$$

Exemples 1.4.7.2. Soient $I = \langle x^2y - xy, x^3y - xy^2 \rangle$ et $J = \langle xy \rangle$ des idéaux de $\mathbb{K}[x, y]$.

$$\begin{aligned} I : J &= \left\{ f \in \mathbb{K}[x, y] \mid f \cdot xy \in \langle x^2y - xy, x^3y - xy^2 \rangle \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathbb{K}[x, y] \mid f \cdot xy = h_1 \cdot (x^2y - xy) + h_2 \cdot (x^3y - xy^2) \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathbb{K}[x, y] \mid f = h_1 \cdot (x - 1) + h_2 \cdot (x^2 - y) \right\} \\ &= \langle x - 1, x^2 - y \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $I : J$ est un idéal, nous pouvons calculer une de ses bases. Le théorème suivant traite le cas du quotient d'un idéal par un idéal engendré par un seul élément.

Théorème 1.4.7.3 (Une base d'un quotient, [CLO15], Chap.4, Sec.4, Th.14). Soit I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et f un élément de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Si $\{g_1, \dots, g_s\}$ est une base de $I \cap \langle f \rangle$, alors $\{g_1/f, \dots, g_s/f\}$ est une base de $I : \langle f \rangle$

Proposition 1.4.7.4 ([CLO15], Chap.4, Sec.4, Pro.13). Soient I et J_i , $1 \leq i \leq s$ des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Alors

$$I : \left(\sum_{i=1}^s J_i \right) = \bigcap_{i=1}^s (I : J_i).$$

En particulier, si $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, alors

$$I : \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \bigcap_{i=1}^s (I : \langle f_i \rangle).$$

En s'inspirant du théorème 1.4.7.3 traitant du calcul d'une base du quotient d'un idéal par un idéal principal, de la proposition 1.4.7.4 et de l'algorithme de calcul d'intersection d'idéaux, nous donnons l'algorithme suivant permettant de calculer le quotient de $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ par $J = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$, idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ comme suit :

- ❶ Pour tout i , $1 \leq i \leq s$, calculer une base de $I : \langle g_i \rangle$; c'est-à-dire calculer une base $\{h_1, \dots, h_s\}$ de $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \cap \langle g_i \rangle$ en utilisant l'algorithme de calcul d'intersection d'idéaux ci-haut.
- ❷ Diviser chaque élément de la base h_j par g_i pour obtenir une base de $I : \langle g_i \rangle$ (Théorème 1.4.7.3).
- ❸ Calculer une base de $I : J$ en utilisant l'algorithme de calcul d'intersection $s - 1$ fois en commençant par le calcul d'une base de $I : \langle g_1, g_2 \rangle = (I : \langle g_1 \rangle) \cap (I : \langle g_2 \rangle)$, puis d'une base de $I : \langle g_1, g_2, g_3 \rangle = (I : \langle g_1, g_2 \rangle) \cap (I : \langle g_3 \rangle)$ et ainsi de suite.

Exemple 1.4.7.5. Soit $I = \langle x - y^2, x^2 \rangle$ et $J = \langle xy, y^2 \rangle$ des idéaux de $\mathbb{K}[x, y]$. On considère l'ordre lexicographique avec $x > y$. Calculons le quotient $I : J$ suivant les étapes de notre algorithme :

❶ D'après la proposition 1.4.7.4,

$$I : J = (I : \langle xy \rangle) \cap (I : \langle y^2 \rangle).$$

❷ Calculons $I : \langle xy \rangle$ et $I : \langle y^2 \rangle$. Pour cela, appliquons le théorème 1.4.7.3.

Comme nous avons calculé dans l'exemple ci-dessus,

$$I \cap \langle xy \rangle = \langle xy^2, x^2y - xy^3 \rangle.$$

Donc d'après le théorème 1.4.7.3,

$$I : \langle xy \rangle = \left\langle \frac{xy^2}{xy}, \frac{x^2y - xy^3}{xy} \right\rangle = \langle y, x - y^2 \rangle.$$

Aussi, un calcul fait avec Sagemath donne $\{tx - y^2, t^2y^2 - y^2, y^4, xy^2\}$ comme une base de Gröbner de $tI + (1 - t)\langle y^2 \rangle$. Par conséquent,

$$I \cap \langle y^2 \rangle = \langle tx - y^2, t^2y^2 - y^2, y^4, xy^2 \rangle \cap \mathbb{K}[x, y] = \langle y^4, xy^2 \rangle.$$

Et par suite,

$$I : \langle y^2 \rangle = \left\langle \frac{y^4}{y^2}, \frac{xy^2}{y^2} \right\rangle = \langle y^2, x \rangle.$$

❸ Ainsi nous avons

$$I : J = (I : \langle xy \rangle) \cap (I : \langle y^2 \rangle) = \langle y, xy - y^2 \rangle \cap \langle y^2, x \rangle.$$

En utilisant Sagemath, nous obtenons $\{y^2, x, ty\}$ comme une base de Gröbner de $t\langle y, xy - y^2 \rangle + (1 - t)\langle y^2, x \rangle$. Mais puisque

$$\langle y, xy - y^2 \rangle \cap \langle y^2, x \rangle = \langle y^2, x, ty \rangle \cap \mathbb{K}[x, y] = \langle y^2, x \rangle,$$

nous obtenons donc

$$I : J = \langle y^2, x \rangle.$$

Définition 1.4.7.6 (Saturation des idéaux). Soient I et J des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. La **saturation** de I par rapport à J , notée $I : J^\infty$ est un idéal contenant I défini par :

$$I : J^\infty = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid \text{il existe } m \in \mathbb{N}, fg^m \in I, \text{ pour tout } g \in J\}.$$

Puisque pour tout $m \in \mathbb{N}$, $J^{m+1} \subset J^m$ et que si on a deux idéaux J_1 et J_2 tels que $J_1 \subset J_2$, alors $I : J_2 \subset I : J_1$, on construit une suite croissante des quotients suivante :

$$I = I : J^0 \subset I : J^1 \subset I : J^2 \subset \dots \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

Puisque $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est noethérien, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$I : J^m = I : J^{m+i} \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Un tel m satisfait

$$I : J^\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I : J^i = I : J^m$$

et est appelé **degré de saturation**.

Nous voyons donc que le calcul de $I : J^\infty$ est juste une itération du calcul de quotient.

Comme pour le quotient des idéaux, nous allons également donner un algorithme de calcul d'une base de saturation des idéaux et son degré de saturation.

Remarquons d'abord que pour tous idéaux I, J et K de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, on a

$$(I : J) : K = I : (J.K).$$

En effet,

$$\begin{aligned} (I : J) : K &= \{f \mid fg \in I : J \text{ pour tout } g \in K\} \\ &= \{f \mid (fg)h \in I \text{ pour tous } g \in K, h \in J\} \\ &= \{f \mid fk \in I \text{ pour tout } k \in J.K\} \\ &= I : (J.K). \end{aligned}$$

Posons $I^{(0)} = I$ et effectuons successivement les calculs de quotients $I^{(i+1)} = I^{(i)} : J, i \in \mathbb{N}$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= I : J \\ I^{(2)} &= (I : J) : J = I : J^2 \\ I^{(3)} &= (I : J^2) : J = I : J^3 \\ &\dots \\ I^{(i)} &= I : J^i. \end{aligned}$$

Nous vérifions à chaque étape si $I^{(i+1)} = I^{(i)}$ en calculant leur base de Gröbner réduite par rapport à un même ordre monomial donné et en utilisant l'unicité de telle base de Gröbner. Si m est le premier i qui réalise cette égalité, alors $I^{(m)} = I : J^\infty$ et m est le degré de saturation.

Exemple 1.4.7.7. Soient $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ et $J = \langle x_0^2 + x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 \rangle$ des idéaux de

$$\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3] \text{ où}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_0x_1^2y_0 + x_0x_3^2y_0 - x_0^2x_1y_1 - x_1x_2^2y_1 + x_1^2x_2y_2 + x_2x_3^2y_2 - x_0^2x_3y_3 - x_2^2x_3y_3 \\ f_2 &= -4x_0^2x_1y_1 - 3x_0^2x_2y_2 - x_0^2x_3y_3 + 4x_0x_1^2y_0 + 3x_0x_2^2y_0 + x_0x_3^2y_0 + x_1^2x_2y_2 + 3x_1^2x_3y_3 \\ &\quad - x_1x_2^2y_1 - 3x_1x_3^2y_1 + 2x_2^2x_3y_3 - 2x_2x_3^2y_2 \\ f_3 &= 2x_0x_2x_3y_0 + 2x_1x_2x_3y_1 - x_0^2x_3y_2 - x_1^2x_3y_2 + x_2^2x_3y_2 - x_3^3y_2 - x_0^2x_2y_3 - x_1^2x_2y_3 \\ &\quad - x_2^3y_3 + x_2x_3^2y_3 \end{aligned}$$

$$f_4 = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Calculons $I : J^\infty$ en utilisant l'algorithme ci-dessus.

Nous avons $I^{(1)} = I : J = \langle x_3y_2^2 + x_3y_3^2, x_2y_3 + x_3y_2, x_2y_2 - x_3y_3, x_1y_1 + x_3y_3, x_0y_0 + x_3y_3 \rangle$.

Les bases de Gröbner de $I^{(0)} = I$ et $I^{(1)} = I : J$ par rapport à l'ordre lexicographique avec $x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > y_0 > y_1 > y_2 > y_3$ sont respectivement

$$G_0 = \{x_0^2x_1y_1 + x_0^2x_3y_3 + x_1^3y_1 + x_1^2x_3y_3 + x_1x_2^2y_1 + x_1x_3^2y_1 + x_2^2x_3y_3 + x_3^3y_3, \dots\}$$

$$G_1 = \{x_0y_0 + x_3y_3, x_1y_1 + x_3y_3, x_2y_2 - x_3y_3, x_2y_3 + x_3y_2, x_3y_2^2 + x_3y_3^2\}.$$

Mais puisque le terme dominant du premier élément de G_0 ne divise aucun des termes dominants des éléments de G_1 , alors $I^{(0)} \neq I^{(1)}$.

Nous avons ensuite

$$I^{(2)} = I : J^2 = \langle y_0y_1y_2^2 + y_0y_1y_3^2, x_3y_2^2 + x_3y_3^2, x_2y_3 + x_3y_2, x_2y_2 - x_3y_3, x_1y_1 + x_3y_3, x_0y_0 + x_3y_3 \rangle.$$

La base de Gröbner réduite de $I^{(2)}$ étant

$$G_2 = \{x_0y_0 + x_3y_3, x_1y_1 + x_3y_3, x_2y_2 - x_3y_3, x_2y_3 + x_3y_2, x_3y_2^2 + x_3y_3^2, y_0y_1y_2^2 + y_0y_1y_3^2\},$$

on a clairement $I^{(1)} \neq I^{(2)}$.

Ensuite, nous avons $I^{(3)} = I : J^3 = \langle y_0y_1y_2^2 + y_0y_1y_3^2, x_3y_2^2 + x_3y_3^2, x_2y_3 + x_3y_2, x_2y_2 - x_3y_3, x_1y_1 + x_3y_3, x_0y_0 + x_3y_3 \rangle = I^{(2)}$.

Ainsi, nous avons $I : J^\infty = I^{(2)}$ et 2 est donc le degré de saturation.

Si J est un idéal principal, il existe une manière beaucoup plus facile de calculer $I : J^\infty$ s'appuyant sur le calcul d'élimination.

Proposition 1.4.7.8 (Saturation par élimination, [CLO15], Chap.4, Sec.4, Th.14). *Soit I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. On considère l'idéal $\langle I, 1 - tf \rangle$ de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t]$, où t est une nouvelle variable additionnelle. Alors*

$$I : f^\infty = \langle I, 1 - tf \rangle \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

Exemple 1.4.7.9. Considérons les polynômes f_1, f_2, f_3 et f_4 donnés dans l'exemple 1.4.7.7 et calculons la base de Gröbner réduite de l'idéal $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, 1 - t(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \rangle$ par rapport à l'ordre plex avec $t > x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > y_0 > y_1 > y_2 > y_3$. Elle est donnée par :

$G = \{f_i, 1 \leq i \leq 18\}$, où

$$\begin{aligned}
f_1 &= tx_0^2 + tx_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 - 1, \quad f_2 = tx_0x_3^2y_2 + tx_1^2x_2y_0 + tx_2^3y_0 + tx_2x_3^2y_0 - x_2y_0, \\
f_3 &= tx_0x_3y_3 - tx_1^2y_0 - tx_2^2y_0 - tx_3^2y_0 + y_0, \quad f_4 = tx_3^2y_0^2y_3^3 + tx_3^2y_1^2y_3^3 - y_0^2y_1^2y_3, \\
f_5 &= tx_1^2x_2^2y_0 + tx_1^2x_3^2y_0 + tx_2^4y_0 + 2tx_2^2x_3^2y_0 + tx_3^4y_0 - x_2^2y_0 - x_3^2y_0, \\
f_6 &= tx_1^2y_0^2 + tx_2^2y_0^2 + tx_3^2y_0^2 + tx_3^2y_3^2 - y_0^2, \quad f_7 = tx_1^2y_0y_2^2 + tx_1^2y_0y_3^2 - y_0y_2^2 - y_0y_3^2, \\
f_8 &= tx_1x_3^2y_0^2y_2 + tx_2^3y_0^2y_1 + tx_2x_3^2y_0^2y_1 - tx_3^3y_1y_2y_3 - x_2y_0^2y_1, \\
f_9 &= tx_1x_3y_0^2y_3 - tx_2^2y_0^2y_1 - tx_3^2y_0^2y_1 - tx_3^2y_1y_3^2 + y_0^2y_1, \\
f_{10} &= tx_2^4y_0y_1 + 2tx_2^2x_3^2y_0y_1 + tx_3^4y_0y_1 - x_2^2y_0y_1 - x_3^2y_0y_1, \\
f_{11} &= tx_2^2y_0^2y_1^2 + tx_3^2y_0^2y_1^2 + tx_3^2y_0^2y_3^2 + tx_3^2y_1^2y_3^2 - y_0^2y_1^2, \quad f_{12} = tx_3^2y_0^2y_2y_3^2 + tx_3^2y_1^2y_2y_3^2 - y_0^2y_1^2y_2, \\
f_{13} &= x_1y_1 + x_3y_3, \quad f_{14} = x_2y_2 - x_3y_3, \quad f_{15} = x_2y_3 + x_3y_2, \quad f_{16} = x_0y_0 + x_3y_3, \\
f_{17} &= x_3y_2^2 + x_3y_3^2, \quad f_{18} = y_0y_1y_2^2 + y_0y_1y_3^2
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$I : J^\infty = \langle f_i, 1 \leq i \leq 18 \rangle \cap \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3] = \langle f_i, 13 \leq i \leq 18 \rangle$$

On retrouve donc exactement le résultat de l'exemple 1.4.7.7.

Maintenant, nous allons énoncer le théorème principal de cette partie : le dictionnaire pour la saturation des idéaux.

Théorème 1.4.7.10 (Enlèvement de composantes, [DS10], Th.1.9.1). *Soient \mathbb{K} un corps algébriquement clos, I et J des idéaux de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Alors*

$$\overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)} = \mathcal{V}(I : J^\infty).$$

Si I est radical¹⁸, alors

$$\overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)} = \mathcal{V}(I : J).$$

Comme une autre application de la saturation d'un idéal, une manière d'homogénéiser un idéal est d'homogénéiser les générateurs et ensuite saturer par rapport à la variable d'homogénéisation.

1.4.8 Fonction et polynôme de Hilbert

Dans cette section, nous discuterons de la fonction et du polynôme de Hilbert et verrons comment les calculer. Nous verrons ainsi que la connaissance du polynôme de Hilbert d'un idéal I nous permettra de déterminer la dimension et le degré d'une variété algébrique définie par I . Dans toute la suite de cette section, nous supposons notre corps de base \mathbb{K} algébriquement clos. Nous traiterons essentiellement le cas des variétés projectives et ferons le lien avec le cas affine dans les derniers paragraphes.

18. En général, on a : $\overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)} \subset \mathcal{V}(I : J)$

Soit I un idéal homogène de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Considérés comme des \mathbb{K} –espaces vectoriels, $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ et I sont de dimension infinie. Pour obtenir quelque chose de dimension finie, nous allons nous restreindre à l’ensemble des polynômes homogènes de degré égal à s .

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_s$ l’ensemble des polynômes homogènes de degré s , $I_s = I \cap \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_s$ l’ensemble des polynômes homogènes de I de degré s . Notons que $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_s$ est un \mathbb{K} –espace vectoriel de dimension C_{n+s}^s et que I_s est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_s$.

Définition 1.4.8.1 (Fonction de Hilbert). Soit I un idéal homogène de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. La fonction de Hilbert de I , notée FH_I , est définie pour tout entier $s \geq 0$ par

$$FH_I(s) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_s / I_s = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_s - \dim_{\mathbb{K}} I_s.$$

Soit I un idéal homogène non nul de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Rappelons que l’ensemble des termes dominants $LT(I)$ de I est défini par $LT(I) = \{LT(f) \mid f \in I\}$. L’idéal engendré par l’ensemble $LT(I)$ est appelé idéal des termes dominants et est noté $\langle LT(I) \rangle$.

Proposition 1.4.8.2 ([CLO15], Chap.9, Sec.3, Pro.9). Soit I un idéal homogène de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ et $>_{OG}$ un ordre monomial gradué ($>_{grlex}$ ou $>_{grevlex}$). Alors l’idéal monomial $\langle LT(I) \rangle$ a la même fonction de Hilbert que l’idéal homogène I :

$$FH_I = FH_{\langle LT(I) \rangle}.$$

Nous voyons ainsi que l’utilisation d’un ordre monomial gradué réduit le calcul de la fonction de Hilbert d’un idéal à celui d’un idéal monomial.

Proposition 1.4.8.3 (Polynôme de Hilbert [EM07], Chap.3, Pro.3.6). Soit I un idéal homogène de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Pour s assez grand, la fonction $s \mapsto FH_I(s)$ coïncide avec un polynôme, noté PH_I et appelé **polynôme de Hilbert** de I . Il est donné par

$$PH_I(s) = \sum_{i=0}^d b_i C_s^{d-i}, \tag{1.2}$$

où $C_s^k = \frac{s(s-1) \cdots (s-k+1)}{k!}$, les b_i sont des entiers et b_0 est strictement positif.

Définitions 1.4.8.4. Soit $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ une variété algébrique. Le polynôme de Hilbert de V , noté PH_V est le polynôme de Hilbert de l’anneau de coordonnées homogènes $\mathbb{K}[V]$.

Sur un corps algébriquement clos, le calcul de la dimension et du degré d’une variété algébrique $V = \mathcal{V}(I)$, est pratiquement donné par :

- ✓ Calculer une base de Gröbner de I pour un ordre monomial gradué tel que $>_{grlex}$ ou $>_{grevlex}$.
- ✓ Calculer le polynôme de Hilbert de $\langle LT(I) \rangle$.

On obtient donc :

Définition 1.4.8.5 (Dimension et degré de Hilbert). Soient V une variété algébrique projective et PH_V le polynôme de Hilbert défini par $PH_V(t) = a_r t^r + \text{termes de degré } < r$.

- ✓ La dimension de V est le degré r du polynôme PH_V .
- ✓ Le degré de V est le nombre $a_r r!$ ¹⁹.

On peut aussi définir la fonction de Hilbert pour les idéaux non homogènes $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Dans ce cas, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{\leq s}$ des polynômes de degré au plus s et son sous-espace vectoriel $I_{\leq s}$ composé des polynômes de I de degré au plus s . On définit donc

$$FH_I(s) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_{\leq s} / I_{\leq s} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_{\leq s} - \dim_{\mathbb{K}} I_{\leq s}.$$

On peut aussi voir que si $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est un idéal et $I_{hom} \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ son homogénéisation par rapport à x_0 , alors pour tout $s \geq 0$, on a

$$FH_I(s) = FH_{I_{hom}}(s).$$

([CLO15], Chap.9, Sec.3, Th.12 (ii)).

1.4.9 Décomposition primaire des idéaux

Nous avons vu que toute variété algébrique se décompose en une réunion finie de composantes irréductibles (Théorème-définition 1.2.1.5). Nous verrons que cette décomposition correspond à l'intersection des idéaux dits **idéaux primaires** ou mieux, à l'intersection de leur radical.

Définition 1.4.9.1 (Idéal primaire). Un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est dit primaire si pour tous polynômes f et g de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $fg \in I$ implique que soit $f \in I$ soit il existe un entier $m > 0$ tel que $g^m \in I$.

Il existe ainsi une relation simple entre les idéaux premiers et les idéaux primaires comme le montre l'énoncé suivant.

Théorème 1.4.9.2 ([CLO15], Chap.4, Sec.8, Lem.2). *Si I est un idéal primaire, alors son radical \sqrt{I} est premier et est le plus petit idéal premier contenant I .*

Le théorème suivant prouve que tout idéal est intersection d'idéaux primaires.

Théorème 1.4.9.3 (Lasker-Noether, [CLO15], Chap.4, Sec.8, Th.4). *Tout idéal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ peut s'écrire comme une intersection finie des idéaux primaires.*

Le fait que tout idéal se décompose en un nombre fini d'idéaux primaires est très important dans le sens que ces idéaux primaires peuvent être manipulés séparément.

19. C'est aussi l'entier b_d de (1.2).

Définition 1.4.9.4 (Décomposition primaire). Une décomposition primaire d'un idéal I est une expression de I comme intersection d'idéaux premiers

$$I = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{J}_i.$$

La décomposition est dite **minimale** si les idéaux premiers $\sqrt{\mathfrak{J}_i}$ sont tous distincts et si pour tout $i = 1, \dots, r$, $\mathfrak{J}_i \not\supseteq \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{J}_j$.

Les radicaux $\sqrt{\mathfrak{J}_i}$ sont appelés **les idéaux premiers associés**.

Contrairement aux cas des variétés algébriques (ou des idéaux radicaux), une décomposition primaire minimale n'est pas unique. Mais il peut s'avérer utile, dans certains cas d'avoir une unicité de décomposition.

Théorème 1.4.9.5 (Unicité de la décomposition, [CLO15], Chap.4, Sec.8, Th.9). Soit $\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{J}_i$ une décomposition primaire de I . Si aucun radical $\sqrt{\mathfrak{J}_i}$ n'est strictement contenu dans un autre radical $\sqrt{\mathfrak{J}_j}$, alors la décomposition primaire est unique.

Une décomposition primaire est très pratique pour simplifier le calcul si la variété doit être intersectée avec d'autres variétés, car chacune des composantes peut être traitée séparément.

1.5 Géométrie algébrique réelle

Dans cette section, nous nous intéresserons au cas où le corps de base est \mathbb{R} . Ainsi nous travaillerons avec des ensembles algébriques réels définis comme des sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

En prenant en compte le fait que \mathbb{R} est ordonné, ce qui permet d'admettre les inégalités dans la définition des objets, la géométrie sur les réels devient plus riche et dans ce cas on parlera d'ensemble semi-algébrique réel. Les grands sujets de ce domaine sont traités dans [BCR98], [BPR16], [Cos00].

1.5.1 Ensemble semi-algébrique

Nous avons vu dans la section 1.4.5 que l'image d'une variété algébrique par une application polynomiale, en particulier une projection n'est pas toujours une variété algébrique, sauf si on considère son adhérence de Zariski. Par conséquent, la projection d'un ensemble algébrique réel n'est pas algébrique réel. Nous décrirons l'image d'une variété en élargissant notre notion d'ensemble algébrique réel aux ensembles semi-algébriques.

Définition 1.5.1.1 (Ensemble semi-algébrique). Un ensemble semi-algébrique est un sous-ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n défini par une combinaison booléenne (obtenue par disjonction, conjonction et négation) d'équations et d'inégalités polynomiales à coefficients réels. En

d'autres termes, les ensembles semi-algébriques forment la plus petite famille \mathcal{S}_n des sous-ensembles de \mathbb{R}^n satisfaisant les propriétés suivantes :

- ✓ (P_1) Les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\}$ où $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, sont dans \mathcal{S}_n .
- ✓ (P_2) Les éléments de \mathcal{S}_n sont stables par réunion finie, intersection finie et passage aux complémentaires.

On peut toujours obtenir un ensemble semi-algébrique comme l'union des ensembles qui s'écrivent sous la forme (voir [Cos00]) :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_i(x) > 0, i = 1, \dots, k\}$$

où $P, Q_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples d'ensembles semi-algébriques.

Exemples 1.5.1.2.

- ❶ Les ensembles algébriques réels sont des ensembles semi-algébriques. En effet, dans \mathbb{R} , $P_1 = \dots = P_n = 0$ équivaut à $P_1^2 + \dots + P_n^2 = 0$ et par conséquent, chaque ensemble algébrique réel est de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\}$.
- ❷ Les ensembles semi-algébriques de \mathbb{R} sont les réunions finies des intervalles ouverts (possible-ment non bornés) et des singletons.
- ❸ La projection sur le plan (b, c) de l'ensemble $\{(b, c, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + bx + c = 0\}$ a pour image l'ensemble semi-algébrique $\{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 - 4c \geq 0\}$.
- ❹ L'ensemble défini par

$$\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right) \wedge (x^2 + 4x + y^2 - 2y \geq -4) \wedge (x^2 - 4x + y^2 - 2y \geq -4) \\ \wedge ((x^2 + y^2 - 2y \neq 8) \vee (y > -1))$$

est un ensemble semi-algébrique représenté ci-dessous tiré de [GK07].

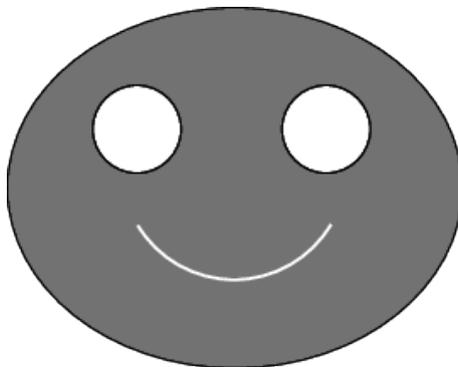


FIGURE 1.3 – Un exemple d'ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^2

Nous avons une propriété très importante de stabilité des ensembles semi-algébriques qui dit qu'ils sont stables par projection.

Théorème 1.5.1.3 (Tarski-Seidenberg, [Cos00], Th.2.3 et Cor.2.4). *L'image d'un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ par la projection naturelle $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur les n premières composantes est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n .*

Définition 1.5.1.4 (Fonction semi-algébrique). Soit S un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$. L'application f est dite **semi-algébrique** si son graphe

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in S\}$$

est un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^{n+m} .

Exemples 1.5.1.5.

- ❶ Toute fonction polynomiale (ou rationnelle) d'un semi-algébrique vers un semi-algébrique est semi-algébrique.
- ❷ Soient S l'ensemble semi-algébrique défini par $S = \{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 - 4c > 0\}$ et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(b, c) = \frac{1}{2} \left(b + \sqrt{b^2 - 4c} \right)$. Le graphe de f donné par $\Gamma_f = \left\{ (b, c, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + bx + c = 0, b^2 - 4c > 0, x > \frac{b}{2} \right\}$ est semi-algébrique, donc f est une fonction semi-algébrique.

Proposition 1.5.1.6 ([Cos00], Cor.2.4). *Les images et images réciproques des ensembles semi-algébriques par des applications semi-algébriques sont semi-algébriques.*

Démonstration. Soit S un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n , T un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^m , $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ et Γ_f le graphe de f . Soient $\pi_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\pi_n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ des projections respectives sur \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n .

On a $f(S) = \pi_m(\Gamma_f)$. Puisque Γ_f est semi-algébrique et que les semi-algébriques sont stables par projections, donc $f(S)$ est un semi-algébrique de \mathbb{R}^m .

On a $f^{-1}(B) = \pi_n((\mathbb{R}^n \times T) \cap \Gamma_f)$. Puisque $(\mathbb{R}^n \times T) \cap \Gamma_f$ est un semi-algébrique, alors $f^{-1}(B)$ l'est. \square

1.5.2 Décomposition cylindrique algébrique

Une décomposition d'un ensemble semi-algébrique S est une partition finie de S en sous-ensembles semi-algébriques. Les ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n peuvent être décomposés en un nombre fini de **cellules** disjointes, homéomorphes à des pavés ouverts $]0; 1[^i$, $0 \leq i \leq n$. Une telle décomposition, appelée **décomposition cylindrique algébrique** (DCA) existe toujours. La DCA sera adaptée à une famille de polynômes telle que le signe de chacun des polynômes soit constant sur chacune des cellules. Elle permettra de décider si une composante est vide ou contient au moins un point, d'éliminer les quantificateurs, etc. .

La décomposition cylindrique algébrique de \mathbb{R}^n est donnée par induction sur n :

Définition 1.5.2.1 (Décomposition cylindrique algébrique). Une décomposition cylindrique algébrique de \mathbb{R}^n est une suite $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ des cellules telles pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, \mathcal{C}_i est une décomposition de \mathbb{R}^i en des cellules ayant les propriétés suivantes :

- ✓ Toute cellule $C \in \mathcal{C}_1$ est soit un singleton soit un intervalle ouvert.
- ✓ Pour tout $i, 1 \leq i < n$ et toute cellule $C \in \mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}^{i+1}$, il existe un nombre fini de fonctions semi-algébriques continues

$$\xi_{C,1} < \dots < \xi_{C,l(C)} : C \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que le cylindre $C \times \mathbb{R}$ est l'union disjointe des cellules de \mathcal{C}_{n+1} qui sont :

- soit le graphe $\Gamma_{C,j}$ d'une des fonctions $\xi_{C,j}$ pour $j \in \{1, \dots, l(C)\}$:

$$\Gamma_{C,j} = \{(x', \xi_{C,j}(x')) \in S \times \mathbb{R}\}$$

- soit une tranche $T_{C,j}$ du cylindre bornée par les graphes des fonctions $\xi_{C,j}$ et $\xi_{C,j+1}$ pour $j \in \{0, \dots, l(C)\}$ où on prend par convention $\xi_{C,0} = -\infty$ et $\xi_{C,l(C)+1} = +\infty$:

$$T_{C,j} = \{(x', x_{j+1}) \in S \times \mathbb{R} \mid \xi_{C,j}(x') < x_{j+1} < \xi_{C,j+1}(x')\}.$$

Notons que toute cellule d'une décomposition cylindrique algébrique est semi-algébriquement homéomorphe à un pavé ouvert $]0; 1[^i$ (par convention $]0; 1[^0$ est un point) [Cos00].

Une **décomposition cylindrique algébrique adaptée** à une famille finie d'ensembles semi-algébriques $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ est une décomposition cylindrique de \mathbb{R}^n telle que chaque \mathcal{C}_i est une réunion de cellules.

Définition 1.5.2.2. Étant donnée une famille $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, un sous-ensemble S de \mathbb{R}^n est dit \mathcal{P} -invariant si tout polynôme $P \in \mathcal{P}$ a un signe constant ($> 0, < 0, = 0$) sur S .

On utilisera une décomposition cylindrique algébrique pour construire une décomposition algébrique cylindrique adaptée à une famille \mathcal{P} des polynômes de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Une décomposition cylindrique algébrique adaptée à \mathcal{P} est donc une décomposition cylindrique algébrique de \mathbb{R}^i pour laquelle toute cellule $C \in \mathcal{C}_k$ est \mathcal{P} -invariante. On appellera cette décomposition, **décomposition algébrique \mathcal{P} -invariante**.

Ci-dessous, nous avons un exemple de la décomposition cylindrique algébrique adaptée à une sphère. L'image étant issue de [Cos00].

L'algorithme de décomposition cylindrique \mathcal{P} -invariante prend en entrée une famille $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ des polynômes et rend des cellules de la décomposition où pour chaque cellule, on a un point test et les signes de P_i . Nous avons ci-dessous une brève description des étapes du fonctionnement de l'algorithme :

- ✓ [Étape de projection] On construit récursivement les ensembles des polynômes, dits ensembles de projection. On part d'une famille de polynômes de $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ et on construit les ensembles de polynômes de $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_i], i = n - 1, \dots, 1$.

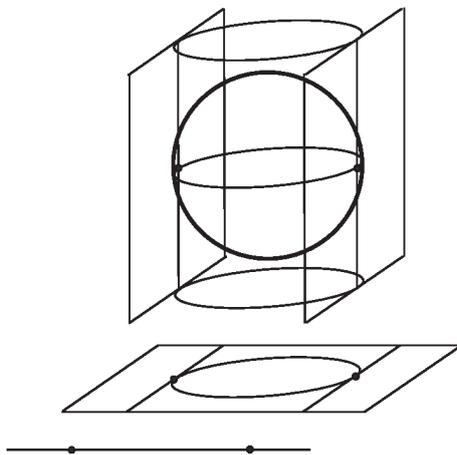


FIGURE 1.4 – Décomposition cylindrique algébrique $\{x^2 + y^2 + z^2 - 1\}$ -invariante

- ✓ [Étape de remontée] On construit au moins un point par cellule de la décomposition algébrique cylindrique \mathcal{P} -invariante : pour ce faire, on construit les partitions de \mathbb{R}^i , $i = 1, \dots, n$ en isolant les racines réelles de chacun des polynômes des ensembles de projection dans $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_i]$ instantiées en des points représentatifs des cellules partitionnant \mathbb{R}^{i-1} .

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 1.5.2.3 ([Cos00], [BCR98]). *Pour toute famille \mathcal{P} des polynômes de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, il existe une décomposition algébrique cylindrique adaptée à \mathcal{P} .*

Topologiquement parlant, les ensembles semi-algébriques ont de bonnes propriétés comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.5.2.4 (Łojasiewicz, [Cos00], [BCR98]). *Le nombre de composantes connexes d'un ensemble semi-algébrique est fini et chaque composante connexe est semi-algébrique.*

Le théorème 1.5.2.4 ci-dessus se montre à l'aide de la décomposition cylindrique algébrique.

Le logiciel de calcul formel Maple (et en particulier la bibliothèque Siropa) peut calculer les décompositions cylindriques algébriques partielles, où la \mathcal{P} -invariance est assurée sur les cellules ouvertes de la décomposition, ce qui est particulièrement utile quand on a un système d'équations dépendant de paramètres. On peut donc décomposer l'espace des paramètres en des cellules telles que le nombre de solutions réelles du système soit constant sur chaque cellule ouverte.

Compactification de Study et analyse des mécanismes robotiques

Le groupe de Lie des déplacements de l'espace est un outil fondamental en cinématique, de même que son algèbre de Lie (l'espace des torseurs). C'est un groupe non compact, et il est naturel d'en chercher des compactifications.

Les compactifications les plus importantes (du point de vue de la géométrie algébrique) sont des sous-ensembles des espaces projectifs ou des produits des espaces projectifs, à cause de la richesse de ces espaces (compacité et connexité).

Une compactification, connue depuis longtemps, est donnée par le modèle de Study, comme une quadrique dans l'espace projectif de dimension 7. Elle est bien adaptée aux méthodes algébriques utilisées en robotique [HS10] et a été utilisée dans plusieurs papiers.

Le but de ce chapitre est de décrire la compactification de Study du groupe des déplacements de l'espace (existant déjà dans [Stu91, Stu03, HKSS97, Sel05]) et de montrer l'utilité de cette compactification avec l'analyse de quelques manipulateurs parallèles. Nous montrons ainsi comment elle est très utile pour la modélisation algébrique des problèmes abordés en robotique tels le calcul des modes opératoires, le problème géométrique direct etc. et à leur résolution avec les systèmes de calcul formel comme Sagemath et Maple. Cela fait intervenir plusieurs méthodes de la géométrie algébrique étudiées au chapitre 1. Les résultats que nous obtenons ici ne sont pas nouveaux ; ils ont été déjà obtenus dans [SWH14, WHP08, WH11].

Dans la section 2.1, nous présentons les structures algébriques et différentiables de l'ensemble des déplacements de l'espace euclidien, notamment son caractère de groupe de Lie et aussi de l'algèbre de Lie qui lui est associée. La compactification de Study de ce groupe de Lie est abordée dans la section 2.2 ; elle est réalisée à l'aide des quaternions duaux. Dans la section 2.3, nous définissons les termes liés à l'architecture des robots, nécessaires à la compréhension des questions abordées dans ce chapitre. Nous consacrons la section 2.4 à la description des problèmes géométriques ; un des problèmes majeurs de la cinématique des robots parallèles est le problème géométrique direct. La section 2.5 décrit la singularité des robots parallèles. Dans la section 2.6, la plus importante du chapitre, nous étudions de manière détaillée les modes opératoires et le problème géométrique direct de quelques robots parallèles. Nous signalons dans cette section quelques problèmes auxquels nous apporterons une contribution dans la suite de cette thèse.

2.1 Groupe des déplacements de l'espace euclidien

L'une des tâches principales de la robotique de manipulation consiste à positionner et orienter un organe terminal (objet, outil, camera, ...) dans l'espace. La situation correspondante est un élément du groupe des déplacements euclidiens. Un déplacement infinitésimal, ou une vitesse, de cette situation est un élément de l'algèbre de Lie associé à ce groupe de Lie.

2.1.1 Généralité

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$. Les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment un groupe appelé **groupe général linéaire** et noté $GL_n(\mathbb{R})$. L'ensemble de celles de déterminant égal à 1, noté $SL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe spécial linéaire**. Les matrices orthogonales (de déterminant égal à ± 1), forment un groupe noté $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Ces matrices définissent des **isométries**, c'est-à-dire des applications de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n qui conservent la distance entre les points. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux isométries dont les matrices ont pour déterminant égal à 1. Leur ensemble constitue un sous-groupe du groupe $O_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe spécial orthogonal** et noté $SO_n(\mathbb{R})$. Ses matrices représentent les rotations¹ de \mathbb{R}^n .

$$SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = A A^T = I_n, \det A = 1 \right\}$$

Nous définissons ici un **espace euclidien** de dimension n comme un espace vectoriel réel \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Un **déplacement euclidien** \mathcal{D} est donc une application entre deux espaces euclidiens (\mathbb{R}^n), préservant la position et l'orientation des corps rigides.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ax + d, \end{aligned}$$

où A est une matrice de rotation de taille $n \times n$ et d un vecteur de \mathbb{R}^n .

Si $d = \vec{0}$, \mathcal{D} est une **rotation pure** et si $A = 0_{n \times n}$, \mathcal{D} est une **translation pure**.

Un déplacement euclidien n'est pas une transformation linéaire pour la simple raison que la translation T de la somme de deux vecteurs, x et y par d est $T(x + y) = x + y + d$, et n'est pas la somme de la translation de chaque vecteur séparément qui est $T(x) + T(y) = x + y + 2d$; mais une application affine. Donc les déplacements euclidiens de \mathbb{R}^n ne peuvent pas être représentés par les matrices de transformations de taille $n \times n$. Cet obstacle est enlevé en plongeant \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n+1} comme un hyperplan $H : x_0 = 1$, de dimension n .

L'identification de \mathbb{R}^n avec H change chaque vecteur de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$ de dimension n en un vecteur $\mathfrak{x} = [1, x_1, \dots, x_n]$ de dimension $n + 1$, aussi écrit comme $\mathfrak{x} = [1, x]$. Un

1. Les rotations forment la composante connexe de l'identité dans le groupe orthogonal i.e. le groupe des matrices orthogonales. Cette connexité garantit la continuité des mouvements.

déplacement euclidien \mathcal{D} , de \mathbb{R}^n devient la transformation linéaire de \mathbb{R}^{n+1} donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

La matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times n} \\ d & A \end{bmatrix}$ de taille $(n+1) \times (n+1)$ est appelée matrice d'une **transformation homogène** représentant le déplacement \mathcal{D} . Le terme « homogène » se réfère au fait que le vecteur des coordonnées $[1, x]$ peut être interprété comme les coordonnées homogènes d'un espace projectif de dimension n . Les matrices M définissent donc les déplacements et l'ensemble des déplacements forment donc un sous-groupe du groupe $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, appelé **groupe spécial euclidien** et noté $\text{SE}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{SE}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \mid M = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times n} \\ d & A \end{bmatrix}, A \in \text{SO}_n(\mathbb{R}), d \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Pour étudier la position d'un corps par rapport à un autre, nous attachons un repère à chacun d'eux, le corps fixe ayant pour repère \mathcal{F} avec un système de coordonnées et le corps mobile, le repère \mathcal{M} ayant aussi un système de coordonnées. Nous utilisons donc l'application \mathcal{D} , qui transforme les coordonnées d'un point exprimées dans \mathcal{M} en celles exprimées dans \mathcal{F} , pour représenter sa position et son orientation par rapport à \mathcal{F} comme suit :

$$x \mapsto X = Ax + d, \quad (2.2)$$

où x est le vecteur des coordonnées d'un point dans \mathcal{M} (i.e le vecteur définissant un point dans \mathcal{M}) et X le vecteur des coordonnées du même point mais exprimées dans \mathcal{F} . Dans la pratique, les corps mobiles sont de dimension $n = 2$ ou $n = 3$.

2.1.2 Aspect différentiel de $\text{SE}_n(\mathbb{R})$

Dans cette sous-section, nous décrivons $\text{SE}_n(\mathbb{R})$ comme une variété différentiable, et même comme un groupe de Lie et parlerons également de son algèbre de Lie qui est son espace tangent en l'identité.

Définition 2.1.2.1 (Groupe de Lie). Un groupe de Lie est un ensemble G qui est muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété, les deux étant compatibles au sens où la multiplication $G \times G \rightarrow G$ et l'inversion $G \rightarrow G$ sont des applications différentiables.

Exemple 2.1.2.2 ($\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie). Le groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ muni de la structure C^∞ d'ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ est un groupe de Lie. En effet, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par la non-annulation du déterminant, donc c'est bien une variété. De plus :

- ✓ La multiplication $(M, N) \mapsto MN$ de deux matrices M et N de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est une fonction polynomiale en les coefficients de M et N , donc C^∞ .

✓ L'inversion d'une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$

$$M \mapsto M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{Com}(M)^T$$

où $\text{Com}(M)^T$ est la transposée de la comatrice de M , est une fonction analytique, donc en particulier C^∞ .

Le théorème suivant permet de produire plein de nouveaux exemples de groupes de Lie.

Théorème 2.1.2.3 (Cartan, Von-Neumann, [Gal01], page 397). *Tout sous-groupe fermé H d'un groupe de Lie G est un sous-groupe de Lie. Plus précisément, il existe une structure de groupe de Lie sur H (nécessairement unique) qui fait de H une sous-variété de G .*

Exemples 2.1.2.4.

- ❶ Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie puisqu'il est un sous-groupe fermé du groupe de Lie $GL_n(\mathbb{R})$.
- ❷ De même, le groupe $SE_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie car il est isomorphe à un sous-groupe du groupe de Lie $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

Pour toute variété qui peut être plongée dans \mathbb{R}^n , on peut définir l'espace tangent en un de ses points p comme l'ensemble des vecteurs tangents en p aux courbes (de classe C^1) tracées sur la variété et contenant p . Ce qui s'écrit ci-dessous pour un groupe de Lie G en son élément neutre.

Définition 2.1.2.5 (Espace tangent à un groupe de Lie en son élément neutre). Soit G un groupe de Lie. L'espace tangent à G en son élément neutre e est²

$$T_e G = \left\{ \gamma'(0) \mid \gamma :]-\epsilon; \epsilon[\rightarrow G, \text{ de classe } C^1, \text{ avec } \gamma(0) = e \right\}.$$

Si H un sous-groupe fermé du groupe de Lie $G = GL_n(\mathbb{R})$, alors H est une sous-variété différentiable de $GL_n(\mathbb{R})$, et son espace tangent $T_{I_n} H$ en la matrice identité I_n coïncide avec l'ensemble

$$\mathfrak{h} = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in H \}.$$

De manière générale, l'exponentielle des matrices envoie l'espace tangent $T_e G$ dans son groupe de Lie G , en particulier sur sa composante connexe.

Exemples 2.1.2.6.

- ❶ Puisque le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est défini par l'équation $UU^T = I_n$, la différentielle de l'application de $U \mapsto UU^T$ en l'identité I_n est $M \mapsto M + M^T$. Son noyau est donc $\mathfrak{o}_n = T_{I_n} O_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{o}_n = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M + M^T = 0 \right\}$$

2. Si la variété n'est pas plongée dans \mathbb{R}^n , la dérivée $\gamma'(0)$ n'a pas de sens.

De même, nous avons aussi l'espace tangent au groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ en l'identité :

$$\mathfrak{so}_n = T_{I_n}SO_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M + M^T = 0 \right\}$$

Ce sont donc l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n \times n$.

Pour $n = 3$, soit $\Omega(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Une matrice 3×3 antisymétrique A_Ω est associée au vecteur Ω de sorte que pour tout vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on ait :

$$\Omega^T \wedge X^T = A_\Omega X^T \text{ où } A_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

et \wedge est le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Dans [MT97], page 87 et suivantes, il y est expliqué que l'exponentielle $\exp(A_\Omega)$ est la matrice de rotation d'axe la droite vectorielle engendrée par Ω , orientée par Ω , et d'angle $\|\Omega\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ainsi, toute rotation de \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire, tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$, et même plus généralement, tout élément de $SO_n(\mathbb{R})$ est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique.

- ② Comme nous avons vu que l'ensemble $SE_3(\mathbb{R})$ des déplacements $x \mapsto Ax + d$ se plonge comme un sous-groupe de $GL_4(\mathbb{R})$ et par conséquent s'écrit sous la forme (Section 2.1.1) :

$$SE_3(\mathbb{R}) = \left\{ M \in GL_4(\mathbb{R}) \mid M = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times 3} \\ d & A \end{bmatrix}, A \in SO_3(\mathbb{R}), d \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

alors l'espace tangent \mathfrak{se}_3 à $SE_3(\mathbb{R})$ en l'identité est

$$\mathfrak{se}_3(\mathbb{R}) = \left\{ M \in GL_4(\mathbb{R}) \mid M = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 3} \\ d & A_\Omega \end{bmatrix}, A_\Omega \in \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}), d \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Les matrices de $\mathfrak{se}_3(\mathbb{R})$ envoient le point P de \mathbb{R}^3 dont le vecteur de coordonnées est x , sur le vecteur $\tau(P) = \Omega \wedge \overrightarrow{OP} + d$. Le champ de vecteur τ est un **torseur** (voir [LFA01] pour le détail sur cette notion) et Ω est la résultante du torseur.

Il est expliqué dans ([Cos03], page 2) que tout élément de $SE_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, tout déplacement de l'espace affine euclidien est l'exponentielle d'un torseur. Ainsi, l'espace tangent $\mathfrak{se}_3(\mathbb{R})$ à $SE_3(\mathbb{R})$ en l'identité est l'espace des torseurs.

Définition 2.1.2.7 (Algèbre de Lie). Soit \mathbb{K} , un corps commutatif. Une \mathbb{K} -algèbre de Lie \mathfrak{a} est un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une application \mathbb{K} -bilinéaire

$$[\cdot; \cdot] : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}, \quad (a, b) \mapsto [a; b] = ab - ba$$

appelée crochet de Lie et vérifiant les axiomes suivants pour tous a, b et c de \mathfrak{a} :

- ✓ $[a; b] = -[b; a]$ (anti-commutativité)
- ✓ $[a; [b; c]] + [b; [c; a]] + [c; [a; b]] = 0$ (identité de Jacobi)

Exemple 2.1.2.8. Soient M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Leur commutateur est défini par

$$[\cdot; \cdot] : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad (M, N) \mapsto [M; N] = MN - NM.$$

Il est bien R -bilinéaire et vérifie les conditions pour être un crochet de Lie. Donc $M_n(\mathbb{R})$ muni du commutateur est une algèbre de Lie.

Sur tout groupe de Lie, l'espace tangent au groupe en l'élément identité a la structure d'une algèbre de Lie (voir [III1], page 23). Ainsi, les ensembles $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{se}_n(\mathbb{R})$ sont les algèbres de Lie associées aux groupes de Lie $SO_n(\mathbb{R})$ et $SE_n(\mathbb{R})$ respectivement. Et en particulier, l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}_3(\mathbb{R})$ représente l'espace des torseurs.

2.1.3 Restriction à la dimension 3

Dans cette partie et jusqu'à la fin du chapitre, nous ne considérons désormais que les déplacements de l'espace euclidien (dimension 3). Le groupe de Lie $SE_3(\mathbb{R})$ est donc de dimension 6 correspondant à trois degrés de liberté en rotation et trois degrés de liberté en translation dans l'espace. Nous noterons R la matrice de rotation et t le vecteur de translation.

Ainsi, la position relative de deux corps rigides dans un espace de dimension 3 est définie par un déplacement \mathcal{D} qui précise les coordonnées $X = (X_1, X_2, X_3)$ dans le repère de base \mathcal{F} en fonction des coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ d'un point du corps mobile exprimées dans son repère \mathcal{M} . Elle est donc donnée par

$$X = Rx + t. \tag{2.3}$$

R est une matrice 3×3 de rotation et $t = (t_1, t_2, t_3)$ le vecteur de translation.

En utilisation la transformation homogène, l'équation (2.3) devient

$$\mathcal{X} = Mx, \tag{2.4}$$

où M prend la forme

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ t_2 & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ t_3 & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

où les r_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ sont les coefficients de la matrice R , $\mathcal{X} = [1, X_1, X_2, X_3]$ et $x = [1, x_1, x_2, x_3]$.

Le groupe de Lie $SE_3(\mathbb{R})$ n'étant pas compact (à cause du vecteur de translation qui part à l'infini), dans les sections qui suivront nous décrirons une de ses compactifications, donnée par Study.

2.2 Compactification de Study de $SE_3(\mathbb{R})$

Dans cette section, nous allons donner une paramétrisation du groupe des déplacements euclidiens de l'espace à l'aide des quaternions duaux puis en déduire une de ses compactifications qui permet

de décrire ses éléments comme des points dans un espace projectif de dimension 7 et précisément sur une quadrique dite de Study.

2.2.1 Quaternions et représentation du groupe des rotations $SO_3(\mathbb{R})$

Il existe plusieurs manières de paramétrer le groupe $SO_3(\mathbb{R})$; on utilise généralement les angles d'Euler, les angles de Bryant, les angles aéronautiques, les paramètres d'Euler, les quaternions unitaires etc. . Nous allons dans la suite utiliser les paramétrisations à l'aide des quaternions.

Les quaternions furent introduits par William Rowan Hamilton en 1840, mais les éléments de base se trouvaient déjà chez L. Euler ([Eul76]). Hamilton voulait étendre les nombres complexes à des dimensions supérieures à 2. Il ne trouve rien en dimension 3, mais la dimension 4 le conduit aux quaternions.

2.2.1.1 Définition et propriétés

Un quaternion est représenté par un quadruplet de nombres réels tels comme $P = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $p_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, 3$. L'ensemble des quaternions est noté \mathbb{H} . L'élément p_0 de P est appelé **partie scalaire** ou **partie réelle** de P et les composantes restants forment le vecteur, $p = (p_1, p_2, p_3)$. Un quaternion est dit **pur** ou **vectoriel** si sa partie scalaire est nulle. L'ensemble des quaternions réels (respectivement purs) est noté $\text{Re } \mathbb{H}$ (respectivement $\text{Im } \mathbb{H}$).

L'ensemble \mathbb{H} s'identifie à \mathbb{R}^4 avec les opérations que nous définissons ci-dessous. Soient $P = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ et $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}$.

La somme de deux quaternions est définie composante par composante, c'est-à-dire

$$P + Q = (p_0 + q_0, p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3).$$

La multiplication de deux quaternions est définie par

$$\begin{aligned} PQ = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, & p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2, \\ p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1, & p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'ensemble $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ est un corps non commutatif.

En effet, $(\mathbb{H}, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $(0, 0, 0, 0)$ et l'opposé de l'élément (a, b, c, d) est l'élément $(-a, -b, -c, -d)$.

On vérifie (par un calcul long) que la multiplication définie ci-dessus est associative.

On vérifie aussi aisément que $(1, 0, 0, 0)$ est l'élément neutre pour la multiplication " \cdot " et que " \cdot " est distributive par rapport à " $+$ ".

De plus, soit (a, b, c, d) un élément non nul de \mathbb{H} , alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Soit (a', b', c', d') un élément de \mathbb{H} tel que

$$a' = \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad b' = \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad c' = \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad d' = \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

On vérifie donc que $(a, b, c, d)(a', b', c', d') = (a', b', c', d')(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$ et donc tout élément non nul de \mathbb{H} est inversible.

Enfin, nous avons par exemple,

$$(0, 0, 1, 0)(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, 0) \quad \text{et} \quad (0, 0, 0, 1)(0, 0, 1, 0) = (0, -1, 0, 0),$$

d'où la non-commutativité de la multiplication.

Soit \mathbb{H}' l'ensemble des quaternions de la forme $(a, b, 0, 0)$. L'ensemble $(\mathbb{H}', +, \cdot)$ est un sous-corps de \mathbb{H} et l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{H}' \\ a + ib &\longmapsto (a, b, 0, 0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dans $(\mathbb{H}', +, \cdot)$ qui permet d'écrire \mathbb{C} comme un sous-corps de \mathbb{H} et les opérations $+$ et \cdot sur \mathbb{H} prolongent les opérations connues sur \mathbb{C} .

Donc nous écrirons les éléments de \mathbb{H}' sous la forme $a + ib$. En particulier $0, 1$ et i s'écrivent respectivement sous la forme $(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$. Et par analogie, les éléments j et k sont notés respectivement $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$. La famille $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ forme donc une base de \mathbb{H} vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Alors P peut s'écrire sous la forme $P = p_0\mathbf{1} + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$. Les éléments de cette base vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -\mathbf{1} \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} \\ \mathbf{ji} = -\mathbf{ij}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{jk}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{ki} \end{aligned} \tag{2.7}$$

En utilisant (2.7), la multiplication des quaternions s'effectue très facilement. Les calculs faits à (2.7) montrent que \mathbb{H} est stable pour la multiplication. Ainsi $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ est une \mathbb{R} -algèbre (associative) non commutative de dimension 4. Elle s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices 2×2 à coefficients complexes) et nous avons

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{pmatrix}.$$

On peut donc cette fois-ci vérifier facilement l'associativité de la multiplication.

Par analogie avec la conjugaison d'un nombre complexe, le quaternion conjugué de P est le quaternion

$$\bar{P} = p_0\mathbf{1} - p_1\mathbf{i} - p_2\mathbf{j} - p_3\mathbf{k}$$

tel que

$$P\bar{P} = \bar{P}P = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Il est facile de vérifier que la conjugaison quaternionique est un anti-automorphisme involutif de \mathbb{H} : elle est \mathbb{R} -linéaire, involutive et renverse les produits c'est-à-dire, pour tous quaternions P_1 et P_2 ,

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{P_2} \overline{P_1}.$$

Soient $P = p_0 \mathbf{1} + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}$ et $P' = p'_0 \mathbf{1} + p'_1 \mathbf{i} + p'_2 \mathbf{j} + p'_3 \mathbf{k}$ deux quaternions. Posons :

$$\langle P, P' \rangle = p_0 p'_0 + p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + p_3 p'_3$$

L'application $(P, P') \mapsto \langle P, P' \rangle$ est un produit scalaire : le produit scalaire standard de \mathbb{R}^4 .

En particulier

$$\langle P, P \rangle = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = P \overline{P}.$$

et on en déduit la norme de P suivante :

$$\|P\|^2 = P \overline{P}.$$

On peut montrer facilement que la norme définit un homomorphisme de (\mathbb{H}, \cdot) vers (\mathbb{R}_+, \times) i.e. pour tous quaternions P et P' ,

$$\|PP'\| = \|P\| \|P'\| \quad (2.8)$$

Le calcul des différents produits scalaires et normes comme définis ci-dessus montre que $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une base orthonormée.

Avec cette norme, \mathbb{H} devient un espace vectoriel euclidien de dimension 4 sur \mathbb{R} .

L'inverse d'un quaternion est défini à l'aide de la norme par

$$P^{-1} = \frac{\overline{P}}{\|P\|^2}.$$

Un quaternion P est dit **unitaire** ou **normalisé** si $\|P\| = 1$; dans ce cas, $P^{-1} = \overline{P}$. L'ensemble des quaternions unitaires est un groupe et est noté \mathbb{U} .

Remarque 2.2.1.1.

❶ Pour tout quaternion pur p , $p^2 = -\|p\|^2$.

❷ Une interprétation géométrique de \mathbb{U} peut être donnée comme suit :

Soit $t = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ un élément de \mathbb{U} . Alors t vérifie $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Si l'on identifie \mathbb{H} à \mathbb{R}^4 , alors les éléments de \mathbb{U} sont les éléments de la sphère unité

$$\mathcal{S}^3 = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}$$

de \mathbb{R}^4 , ce qui munit \mathcal{S}^3 d'une structure de groupe.

Orientons l'espace vectoriel $\text{Im } \mathbb{H}$ en décidant que la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est directe.

Soient $u = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}$ et $u' = p'_1 \mathbf{i} + p'_2 \mathbf{j} + p'_3 \mathbf{k}$ deux quaternions purs. On identifie naturellement les quaternions purs u et u' avec les vecteurs $\vec{u} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\vec{u}' = (p'_1, p'_2, p'_3)$ de \mathbb{R}^3 ($\text{Im } \mathbb{H}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel isomorphe à \mathbb{R}^3). Nous avons alors le produit de u et u' suivant :

$$\begin{aligned} uu' &= (p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) (p'_1 \mathbf{i} + p'_2 \mathbf{j} + p'_3 \mathbf{k}) \\ &= (-p_1 p'_1 - p_2 p'_2 - p_3 p'_3) \mathbf{1} + (p_2 p'_3 - p_3 p'_2) \mathbf{i} + (p_3 p'_1 - p_1 p'_3) \mathbf{j} + (p_1 p'_2 - p_2 p'_1) \mathbf{k} \\ &= -\langle \vec{u}, \vec{u}' \rangle \mathbf{1} + \vec{u} \wedge \vec{u}', \end{aligned}$$

De ce qui précède, nous voyons que uu' est un quaternion pur (respectivement réel) si, et seulement si, les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux (respectivement colinéaires).

2.2.1.2 Représentation des rotations

Lemme 2.2.1.2. Soit $t \in \mathbb{U}$. Il existe $\theta \in [0; \pi]$ et u un quaternion pur et unitaire tel que

$$t = (\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u.$$

De plus, si $t \neq \pm 1$, θ et u sont déterminés de manière unique.

Démonstration. Puisque $t \in \mathbb{U}$, $t = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Si $b = c = d = 0$, alors $a^2 = 1$. Si $a = 1$, on prend $\theta = 0$; si $a = -1$, on prend $\theta = \pi$.

Supposons maintenant que $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$. Il existe donc un unique $\theta \in]0; \pi[$ tel que $a = \cos \theta$ et $b^2 + c^2 + d^2 = \sin^2 \theta$. Posons $u = \frac{1}{\sin \theta} (b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})$. Ainsi u est entièrement déterminé par cette définition, donc est unique et $\|u\| = 1$. Nous avons alors $t = (\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u$. \square

Théorème 2.2.1.3. Soit $t = (\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u$ avec $\theta \in [0; \pi]$ et u un quaternion pur et unitaire. Soit f_t l'application définie par

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ p &\longmapsto f_t(p) = tp\bar{t} \end{aligned}$$

L'application f_t appelée conjugaison par t est linéaire, bijective et est une isométrie (pour la norme définie ci-haut). De plus, f_t laisse stable les sous-espaces vectoriels \mathbb{R} et $\text{Im } \mathbb{H}$.

Démonstration. La linéarité de f_t apparait très clairement : soient $p_1, p_2 \in \mathbb{H}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors nous avons :

$$f_t(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = t(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)\bar{t} = \lambda_1 t p_1 \bar{t} + \lambda_2 t p_2 \bar{t} = \lambda_1 f_t(p_1) + \lambda_2 f_t(p_2)$$

D'autre part, on a par (2.8), pour tout quaternion p ,

$$\|f_t(p)\| = \|tp\bar{t}\| = \|t\| \|p\| \|\bar{t}\| = \|p\|$$

car t (et donc \bar{t}) est de norme 1. On en déduit que f_t conserve la norme. Pour tout quaternion p , on a $\bar{t}(tp\bar{t})t = p$. Il s'ensuit que f_t est surjectif.

Donc f_t est une application bijective car c'est un endomorphisme surjectif, donc à fortiori injectif. Et puisque l'inverse de t est \bar{t} , on a $f_t^{-1} = f_{\bar{t}}$.

Pour tout nombre réel, on a

$$f_t(x) = tx\bar{t} = xt\bar{t} = x\|t\|^2 = x$$

d'où f_t stabilise \mathbb{R}

Aussi, pour tout quaternion pur p ,

$$\begin{aligned} f_t(p) + \overline{f_t(p)} &= t\bar{p} + \overline{t\bar{p}} \\ &= t\bar{p} + \bar{\bar{t}}\bar{p} \\ &= t\bar{p} + t\bar{p} \\ &= f_t(p + \bar{p}) \\ &= f_t(0) = 0 \end{aligned}$$

On voit donc que $f_t(p)$ est un quaternion pur, ce qui prouve que $\text{Im } \mathbb{H}$ est stable par f_t . Cela signifie que f_t applique $\text{Im } \mathbb{H}$ sur $\text{Im } \mathbb{H}$. \square

Lemme 2.2.1.4. Soit $t = (\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u$ avec $\theta \in [0; \pi]$ et u un quaternion pur et unitaire. La restriction de f_t à $\text{Im } \mathbb{H}$ est une rotation.

Démonstration. L'application f_t étant une isométrie, sa restriction à $\text{Im } \mathbb{H}$ est encore une isométrie.

Calculons la matrice de $f_t|_{\text{Im } \mathbb{H}}$ dans la base canonique $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\text{Im } \mathbb{H}$.

Pour tout quaternion unitaire $t = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, on obtient les coefficients de la première colonne en calculant :

$$\begin{aligned} f_t(\mathbf{i}) = t\bar{\mathbf{i}} &= (x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})\mathbf{i}(x_0\mathbf{1} - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}) \\ &= (x_0\mathbf{i} - x_1\mathbf{1} - x_2\mathbf{k} + x_3\mathbf{j})(x_0\mathbf{1} - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}) \\ &= (x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\mathbf{i} + 2(x_1x_2 + x_0x_3)\mathbf{j} + 2(x_1x_3 - x_0x_2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Par un calcul similaire, nous obtenons les deux autres colonnes

$$\begin{aligned} f_t(\mathbf{j}) = t\bar{\mathbf{j}} &= 2(x_1x_2 - x_0x_3)\mathbf{i} + (x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)\mathbf{j} + 2(x_2x_3 + x_0x_1)\mathbf{k} \\ f_t(\mathbf{k}) = t\bar{\mathbf{k}} &= 2(x_1x_3 - x_0x_2)\mathbf{i} + 2(x_2x_3 + x_0x_1)\mathbf{j} + (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

La matrice R de l'application f_t se présente donc sous la forme (en posant $\underline{x} = x_0, x_1, x_2, x_3$).

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1x_2 - x_0x_3) & 2(x_1x_3 + x_0x_2) \\ 2(x_1x_2 + x_0x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2x_3 - x_0x_1) \\ 2(x_1x_3 - x_0x_2) & 2(x_2x_3 + x_0x_1) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Le calcul du déterminant de la matrice $R(\underline{x})$ donne

$$\det R(\underline{x}) = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 = 1.$$

On vient donc de montrer que la restriction de f_t à $\text{Im } \mathbb{H}$ est un élément de $\text{SO}(\text{Im } \mathbb{H})$. Mais comme $\text{Im } \mathbb{H}$ et \mathbb{R}^3 sont isomorphes, on peut donc voir $\text{SO}(\text{Im } \mathbb{H})$ comme $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. \square

Théorème 2.2.1.5. Soit $t = (\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u$ avec $\theta \in [0; \pi]$ et u un quaternion pur et unitaire. La restriction de l'application f_t à $\text{Im } \mathbb{H}$ est la rotation d'angle 2θ et d'axe dirigé par u .

Démonstration. Puisque $t = (\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u$, on a :

$$\begin{aligned}
 f_t(u) &= tu\bar{t} \\
 &= [(\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u] u [(\cos \theta) \mathbf{1} - (\sin \theta) u] \\
 &= [(\cos \theta) u - (\sin \theta) \mathbf{1}] [(\cos \theta) \mathbf{1} - (\sin \theta) u] \\
 &= (\cos \theta)^2 u + (\sin \theta)^2 u \\
 &= u.
 \end{aligned}$$

Comme le vecteur u est invariant par f_t , on en déduit donc qu'il est l'axe de la rotation f_t . Soient \mathcal{H} un hyperplan de $\text{Im } \mathbb{H}$ orthogonal à u et v un vecteur unitaire de \mathcal{H} . Alors on a

$$\begin{aligned}
 f_t(v) &= tv\bar{t} \\
 &= [(\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u] v [(\cos \theta) \mathbf{1} - (\sin \theta) u] \\
 &= [(\cos \theta) v + (\sin \theta) uv] [(\cos \theta) \mathbf{1} - (\sin \theta) u] \\
 &= (\cos \theta)^2 v - (\sin \theta)^2 uvu + \cos \theta \sin \theta (uv - vu).
 \end{aligned}$$

Or nous avons, pour tous quaternions purs u et v , $vu = -uv$ (formule du produit vectoriel). Et comme $u^2 = -1$, donc $uvu = v$. Aussi, puisque u et v sont orthogonaux, alors, $vu = -\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \mathbf{1} + \vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} = -uv$.

De ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned}
 f_t(v) &= (\cos \theta)^2 v - (\sin \theta)^2 v + 2(\cos \theta \sin \theta) uv \\
 &= (\cos 2\theta) v + (\sin 2\theta) \vec{u} \wedge \vec{v}.
 \end{aligned}$$

Donc le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathcal{H}$ forme une base orthonormée directe de $\text{Im } \mathbb{H}$. Donc f_t est une rotation d'angle 2θ .

Nous venons donc de montrer que la restriction f_t à $\text{Im } \mathbb{H}$ où $t = (\cos \theta) \mathbf{1} + (\sin \theta) u$ est un quaternion unitaire et u un quaternion pur et unitaire est la rotation d'angle 2θ et d'axe dirigé par u . \square

Théorème 2.2.1.6. *L'application F définie par*

$$\begin{aligned}
 F : \mathbb{U} &\longrightarrow \text{SO}(\text{Im } \mathbb{H}) \\
 t &\longmapsto f_{t|_{\text{Im } \mathbb{H}}}
 \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupe surjectif et son noyau est $\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$.

Démonstration. Posons $\tilde{f}_t = f_{t|_{\text{Im } \mathbb{H}}}$. Nous avons $F(\mathbf{1}) = \text{Id}$ et pour tous éléments t_1, t_2 de \mathbb{U} et p de $\text{Im } \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}
 F(t_1 t_2)(p) &= \tilde{f}_{t_1 t_2}(p) \\
 &= (t_1 t_2) p \overline{(t_1 t_2)} \\
 &= t_1 (t_2 p \overline{t_2}) \overline{t_1} \\
 &= \tilde{f}_{t_1}(\tilde{f}_{t_2}(p)) \\
 &= F(t_1) \circ F(t_2)(p)
 \end{aligned}$$

F est donc un morphisme du groupe \mathbb{U} dans le groupe $\text{SO}(\text{Im } \mathbb{H})$.

Soit $g \in \text{SO}(\text{Im } \mathbb{H})$. Si g n'est pas l'identité, alors c'est une rotation d'axe dirigé et orienté par un vecteur unitaire u , identifié à un quaternion pur et unitaire, et d'angle θ . Il existe donc $t \in \mathbb{U}$, $t = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \mathbf{1} + \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) u$ tel que $g = \tilde{f}_t = F(t)$. L'application F est donc surjective.

Soit $t \in \text{Ker } F$. Alors $F(t) = \text{Id}$. Donc pour tout $p \in \text{Im } \mathbb{H}$, $F(t)(p) = p$, c'est-à-dire, $t\bar{t} = p$, soit $tp = pt$. Soit $t = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$; pour $p = \mathbf{i}$, on a :

$$tp = pt \implies x_2 = x_3 = 0$$

De même pour $p = \mathbf{j}$, on a :

$$tp = pt \implies x_1 = x_3 = 0$$

Ainsi $t = x_0\mathbf{1}$ et puisque t est unitaire, $\|t\|^2 = x_0^2 = 1$. Donc $x_0 = \pm 1$ et par suite $t = \pm \mathbf{1}$. Alors le noyau de F est $\text{Ker } F = \{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$ et F n'est donc pas une application injective. \square

De ce qui précède, nous avons donc construit une représentation des éléments de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ par les éléments de \mathbb{U} . Et donc toute rotation de \mathbb{R}^3 peut se représenter par deux quaternions unitaires t et $-t$ correspondant à deux points antipodaux sur la sphère unité \mathcal{S}^3 .

2.2.2 Quaternions duaux et représentation des déplacements euclidiens $\text{SE}_3(\mathbb{R})$

Nous venons de voir que les quaternions représentent de manière satisfaisante les rotations avec les angles et les axes déterminés facilement. Malheureusement, ils ne peuvent pas représenter les déplacements de l'espace (composition des rotations et des translations). Les quaternions duaux ont été donc introduits pour combler cela, tout en conservant l'avantage de la représentation des rotations par les quaternions.

Dans cette sous-section, quelques propriétés nécessaires des quaternions duaux seront étudiées et ensuite seront utilisées pour déterminer la représentation du groupe $\text{SE}_3(\mathbb{R})$. Ils donnent une paramétrisation du groupe des déplacements euclidiens sans singularités.

2.2.2.1 Les nombres duaux

Un nombre dual s'écrit sous la forme $a = x + \varepsilon y$ avec x et y des réels appelés respectivement **partie réelle** et **partie duale** de a et $\varepsilon \neq 0$ vérifie $\varepsilon^2 = 0$.

Les nombres duaux vérifient les relations suivantes : si a_1 et a_2 sont des nombres duaux,

- $0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0$; $x_1\varepsilon = \varepsilon x_1$,
- $a_1 + a_2 = (x_1 + \varepsilon y_1) + (x_2 + \varepsilon y_2) = x_1 + x_2 + \varepsilon(y_1 + y_2)$,
- $a_1 a_2 = (x_1 + \varepsilon y_1)(x_2 + \varepsilon y_2) = x_1 x_2 + \varepsilon(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Si $a = x + \varepsilon y$ avec $x > 0$ alors il existe un unique nombre dual $b = w + \varepsilon z$ avec $w > 0$ tel que $b^2 = a$.

Le conjugué d'un nombre dual $a = x + \varepsilon y$ est le nombre dual

$$a^\varepsilon = x - \varepsilon y$$

tel que

$$aa^\varepsilon = a^\varepsilon a = x^2$$

et son inverse est défini, pour $x \neq 0$, par

$$a^{-1} = \frac{x - \varepsilon y}{x^2}.$$

Ainsi le nombre dual $a = \varepsilon y$ (correspondant à $x = 0$) n'admet pas d'inverse. Donc l'ensemble des nombres duaux est un anneau et non un corps. Notons $\mathbb{R}[\varepsilon]$ cet anneau.

On appelle **vecteur dual**, un vecteur dont les composantes sont des nombres duaux. De même, une **matrice duale** est une matrice dont les coefficients sont des nombres duaux. Elle peut donc s'écrire sous la forme $A + \varepsilon B$ où A et B sont des matrices réelles. Notons $\mathcal{M}(\mathbb{R}[\varepsilon])$ l'ensemble des matrices duales.

2.2.2.2 Quaternions duaux

Les quaternions duaux sont des extensions des quaternions définis sur l'anneau des nombres duaux.

Un quaternion dual h s'écrit donc sous la forme

$$h = X + \varepsilon Y$$

où X et Y sont des quaternions et sont respectivement appelés **partie primale** et **partie duale** de h . Il peut aussi être vu comme un 8-uplet $(x_0, y_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3)$ de nombres réels. Ainsi les quaternions duaux sont les éléments d'un espace vectoriel de dimension 8 sur \mathbb{R} noté $\mathbb{H}[\varepsilon]$ dont $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \varepsilon\mathbf{1}, \varepsilon\mathbf{i}, \varepsilon\mathbf{j}, \varepsilon\mathbf{k})$ est la base canonique. $\mathbb{H}[\varepsilon]$ est une algèbre associative.

Un quaternion dual h peut être conjugué de trois manières différentes.

$$\bar{h} = \bar{X} + \varepsilon\bar{Y} \quad (\text{conjugaison quaternionique})$$

$$h^\varepsilon = X - \varepsilon Y \quad (\text{conjugaison duale})$$

$$\bar{h}^\varepsilon = \bar{X} - \varepsilon\bar{Y} \quad (\text{deux premières combinées})$$

La norme d'un quaternion dual h est définie pour tout quaternion $X \neq 0$ par

$$\|h\| = \sqrt{h\bar{h}},$$

où le produit sous le radical est un nombre dual donné par

$$\begin{aligned} h\bar{h} &= (X + \varepsilon Y)(\bar{X} + \varepsilon\bar{Y}) \\ &= X\bar{X} + \varepsilon(X\bar{Y} + Y\bar{X}) \end{aligned}$$

$\|\cdot\|$ est définie par analogie au norme des quaternions, mais n'est pas une norme sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{H}[\varepsilon]$. Cependant les relations $\overline{h_1 h_2} = \overline{h_2} \overline{h_1}$ et $\|h_1 h_2\| = \|h_1\| \|h_2\|$ sont vraies.

Un quaternion dual h est dit unitaire si $\|h\| = 1$, ce qui signifie que $X\overline{X} = 1$ et $X\overline{Y} + Y\overline{X} = 0$.

L'ensemble des quaternions duaux unitaires est noté $\mathbb{U}[\varepsilon]$. Ainsi $\mathbb{U}[\varepsilon]$ est une variété algébrique de dimension 6 sur \mathbb{R} et dans $\mathbb{H}[\varepsilon]$, définie par les deux équations

$$X\overline{X} = 1, \quad X\overline{Y} + Y\overline{X} = 0. \quad (2.10)$$

$\mathbb{U}[\varepsilon]$ est un groupe pour la multiplication des quaternions duaux, parce que le produit des quaternions duaux unitaires est encore un quaternion dual unitaire, l'élément symétrique est le quaternion dual unitaire conjugué \overline{h} et les autres axiomes du groupe peuvent être facilement vérifiés.

Maintenant, nous allons montrer que les quaternions duaux unitaires donnent une paramétrisation du groupe des déplacements euclidiens. Pour décrire l'action d'un quaternion dual unitaire sur un élément v de \mathbb{R}^3 , on transforme ce dernier en le quaternion dual $1 + \varepsilon v$. Soit \mathbb{V} l'ensemble des quaternions duaux de la forme $V = 1 + \varepsilon v$. Soient k un quaternion unitaire et g_k l'application définie par

$$\begin{aligned} g_k : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{H}[\varepsilon] \\ V &\longmapsto g_k(V) = kV\overline{k}^\varepsilon \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} g_k(V) &= kV\overline{k}^\varepsilon = (X + \varepsilon Y)(1 + \varepsilon v)(\overline{X} - \varepsilon \overline{Y}) \\ &= (X + \varepsilon Xv + \varepsilon Y)(\overline{X} - \varepsilon \overline{Y}) \\ &= X\overline{X} - \varepsilon X\overline{Y} + \varepsilon Xv\overline{X} + \varepsilon Y\overline{X} \\ &= 1 + \varepsilon(Xv\overline{X} + Y\overline{X} - X\overline{Y}) \\ &= 1 + \varepsilon v', \end{aligned}$$

où $v' = Xv\overline{X} + Y\overline{X} - X\overline{Y}$.

Nous avons : $\overline{Y\overline{X} - X\overline{Y}} = \overline{Y\overline{X}} - \overline{X\overline{Y}} = X\overline{Y} - Y\overline{X} = -(Y\overline{X} - X\overline{Y})$. Donc $Y\overline{X} - X\overline{Y}$ est un quaternion pur, par suite v' est un quaternion pur.

Comme nous avons vu dans la sous-section 2.2.1, $Xv\overline{X}$ représente le vecteur Rv , image du vecteur v par la rotation R , le quaternion dual $1 + \varepsilon v'$ encapsule le vecteur $Rv + t$, où t est donné par le vecteur $Y\overline{X} - X\overline{Y}$. Il s'ensuit que g_k représente un déplacement euclidien de l'espace.

Pour $X = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ et $Y = y_0\mathbf{1} + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$, les coordonnées du vecteur de translation sont calculées comme suit

$$\begin{aligned} t = Y\overline{X} - X\overline{Y} &= (y_0\mathbf{1} + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})(x_0\mathbf{1} - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}) \\ &\quad - (x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})(y_0\mathbf{1} - y_1\mathbf{i} - y_2\mathbf{j} - y_3\mathbf{k}) \\ &= 2(x_0y_1 - y_0x_1 - y_2x_3 + y_3x_2)\mathbf{i} + 2(x_0y_2 - y_0x_2 - y_3x_1 + y_1x_3)\mathbf{j} \\ &\quad + 2(x_0y_3 - y_0x_3 - y_1x_2 + y_2x_1)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ce qui donne, en notant aussi $\underline{y} = y_0, y_1, y_2, y_3$:

$$t(\underline{x}, \underline{y}) = 2 \begin{bmatrix} x_0 y_1 - y_0 x_1 - y_2 x_3 + y_3 x_2 \\ x_0 y_2 - y_0 x_2 - y_3 x_1 + y_1 x_3 \\ x_0 y_3 - y_0 x_3 - y_1 x_2 + y_2 x_1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

En utilisant les expressions (2.5) et (2.9), la matrice homogène représentant les déplacements dans $SE_3(\mathbb{R})$ est

$$M(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1 x_2 - x_0 x_3) & 2(x_1 x_3 + x_0 x_2) \\ t_2 & 2(x_1 x_2 + x_0 x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) \\ t_3 & 2(x_1 x_3 - x_0 x_2) & 2(x_2 x_3 + x_0 x_1) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

où les t_i sont les coordonnées du vecteur de translation.

En omettant la condition de normalisation $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ en supposant juste que $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, on obtient la représentation matricielle de $SE_3(\mathbb{R})$

$$M(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{\Delta(\underline{x})} \begin{bmatrix} \Delta(\underline{x}) & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1 x_2 - x_0 x_3) & 2(x_1 x_3 + x_0 x_2) \\ t_2 & 2(x_1 x_2 + x_0 x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) \\ t_3 & 2(x_1 x_3 - x_0 x_2) & 2(x_2 x_3 + x_0 x_1) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

où $\Delta(\underline{x}) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Cette paramétrisation des matrices des déplacements euclidiens est appelée **paramétrisation de Study** et les paramètres $x_i, y_i, i, j = 0, \dots, 3$ sont appelés **paramètres de Study** et satisfont donc les relations

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0, \quad x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$

où la dernière équation provient de l'équation $X\bar{Y} + Y\bar{X} = 0$ du (2.10). Soit l'application

$$G : \mathbb{U}[\varepsilon] \longrightarrow SE_3(\mathbb{R}) \\ k \longmapsto G(k) = g_k$$

Puisque $\overline{k_2^\varepsilon k_1^\varepsilon} = \overline{k_1 k_2}^\varepsilon$, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{U}[\varepsilon]$, nous avons, pour tout $V \in \mathbb{V}$, $G(k_1 k_2)(V) = g_{k_1}(g_{k_2})(V)$, et l'application G est un morphisme surjectif du groupe $\mathbb{U}[\varepsilon]$ dans le groupe des déplacements euclidiens $SE_3(\mathbb{R})$ (la composition des déplacements correspond à la multiplication des quaternions duaux) et son noyau est $\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$.

2.2.3 Compactification de Study de $SE_3(\mathbb{R})$

Nous avons jusqu'ici montré que les quaternions duaux unitaires fournissent une correspondance surjective (un quaternion dual unitaire et son opposé représentent un même déplacement) entre les 8-uplets des nombres réels $(x_0, \dots, x_3, y_0, \dots, y_3)$ avec $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 +$

$x_3y_3 = 0$ et le groupe des déplacements euclidiens. Au lieu de décrire les déplacements par une paire de quaternions d'unitaires, considérons ces huit coefficients comme les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}^7(\mathbb{R})$ (les coordonnées $(x_0, \dots, x_3, y_0, \dots, y_3)$ et $(-x_0, \dots, -x_3, -y_0, \dots, -y_3)$ représentent le même point de coordonnées $\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = [x_0, \dots, x_3, y_0, \dots, y_3]$ dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{R})$). Ces coordonnées homogènes vérifient donc l'équation de la quadrique S suivante dite de Study.

$$S : x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0. \quad (2.14)$$

Le 3-plan

$$E : x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad (2.15)$$

appelé générateur exceptionnel se trouve sur la quadrique de Study mais ses points ne correspondent pas à des déplacements, car tous les paramètres d'Euler $x_i, i = 0, \dots, 3$ seraient nuls, une situation n'ayant aucun sens physique. L'équation de S est une forme quadratique de signature $(4, 4)$, ce qui montre que S est de type hyperbolique et contient des sous-espaces projectifs de dimensions maximales 3 (espaces générateurs). Ces 3-plans se classent en deux familles de dimension 6 et ont bien des significations cinématiques. Par exemple, l'idéal $\langle y_0, y_1, y_2, y_3 \rangle$ définit un 3-plan appartenant à une des deux familles et ses éléments sont des rotations de centre l'origine. Cette famille contient également le générateur exceptionnel E . L'idéal $\langle y_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$ définit un 3-plan appartenant à l'autre famille ; les éléments sont des translations. Des propriétés plus détaillées de S peuvent se trouver dans ([Sel05], chapitre 10).

Le théorème suivant établit une correspondance bijective entre les déplacements de l'espace et les points de la quadrique de Study.

Théorème 2.2.3.1 (Study [Stu03]). Soient S la quadrique de Study d'équation

$$\sum_{i=0}^3 x_i y_i = 0$$

et $E \subset S$, le 3-plan d'équations $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Il existe une correspondance bijective, qui à tous points homogènes $\underline{x}, \underline{y}$ appartenant à $S \setminus E$, associe le déplacement

$$u \longmapsto \frac{1}{\Delta(\underline{x})} \left(R(\underline{x})u + t(\underline{x}, \underline{y}) \right),$$

où $\Delta(\underline{x}) = \sum_{i=0}^3 x_i^2$, $R(\underline{x})$ donné par la formule (2.9) et $t(\underline{x}, \underline{y})$ par la formule (2.11).

Cette compactification de Study $\alpha : \text{SE}_3(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} S \setminus E$ ci-dessus fournit une base algébrique et géométrique riche et solide pour les études en cinématique.

2.2.4 Isomorphisme entre $\text{SE}_3(\mathbb{R})$ et $\text{SO}_3(\mathbb{R}[\epsilon])$

Définition 2.2.4.1. Soit $D = R + \epsilon M$, avec R et M des matrices 3×3 à coefficients réels, une matrice duale. Alors le groupe spécial orthogonal dual est

$$\text{SO}_3(\mathbb{R}[\epsilon]) = \left\{ D \in \mathcal{M}(\mathbb{R}[\epsilon]) \mid DD^T = I_3, \det(D) = 1 \right\}$$

Lemme 2.2.4.2. *Un élément $D = R + \varepsilon M$ appartient à $SO_3(\mathbb{R}[\varepsilon])$ si, et seulement si, $R \in SO_3(\mathbb{R})$ et MR^\top est une matrice antisymétrique.*

Démonstration. On a :

$$I_3 = DD^\top = (R + \varepsilon M)(R + \varepsilon M)^\top = RR^\top + \varepsilon(RM^\top + MR^\top).$$

Nous avons donc $RR^\top = I_3$ et $RM^\top + MR^\top = 0$.

Puisque $RR^\top = I_3$, alors R est une matrice orthogonale; donc $(\det(R))^2 = 1$. Mais puisque $\det(D) = 1$, alors $\det(R) = 1$ et par suite $R \in SO_3(\mathbb{R})$.

De plus, puisque $RM^\top + MR^\top = 0$, alors $(MR^\top)^\top = -MR^\top$; donc MR^\top est une matrice antisymétrique.

Inversement, si $R \in SO_3(\mathbb{R})$, alors $RR^\top = I_3$ et $\det(R) = 1$.

Comme de plus, MR^\top est une matrice antisymétrique, $RR^\top + \varepsilon(RM^\top + MR^\top) = I_3$ et $\det(RR^\top + \varepsilon(RM^\top + MR^\top)) = 1$. D'où $DD^\top = I_3$, $\det(DD^\top) = 1$ et par suite, $\det(D) = 1$. \square

Rappelons que toute matrice antisymétrique 3×3 est la matrice du produit vectoriel $x \mapsto x \wedge t$ pour tout vecteur t ; notons cette matrice par

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } t = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

On a $R + \varepsilon M = (I_3 + \varepsilon MR^\top)R = (I_3 + \varepsilon \Omega_t)R$. Ainsi, tout élément de $SO_3(\mathbb{R}[\varepsilon])$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(I_3 + \varepsilon \Omega_t)R \quad \text{où } R \in SO_3(\mathbb{R}) \text{ et } t \in \mathbb{R}^3.$$

Théorème 2.2.4.3. *Soit $\Phi : SO_3(\mathbb{R}[\varepsilon]) \rightarrow SE_3(\mathbb{R})$ une application qui à $(I_3 + \varepsilon \Omega_t)R \in SO_3(\mathbb{R}[\varepsilon])$ associe $x \mapsto Rx + t \in SE_3(\mathbb{R})$. L'application Φ est un isomorphisme de groupe.*

Démonstration. Soient $(I_3 + \varepsilon \Omega_t)R$ et $(I_3 + \varepsilon \Omega_u)S$ deux éléments de $SO_3(\mathbb{R}[\varepsilon])$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \Phi[(I_3 + \varepsilon \Omega_t)R(I_3 + \varepsilon \Omega_u)S] &= \Phi[RS + \varepsilon(\Omega_t RS + R\Omega_u S)] \\ &= \Phi[RS + \varepsilon(\Omega_t RS + \Omega_{Ru} RS)] \\ &= \Phi[(I_3 + \varepsilon \Omega_{Ru+t})RS] \\ &= x \mapsto (RS)x + Ru + t \\ &= R(x \mapsto Sx + u) + t \\ &= \Phi[(I_3 + \varepsilon \Omega_t)R] \circ \Phi[(I_3 + \varepsilon \Omega_u)S] \end{aligned}$$

Donc Φ est un morphisme de groupe.

Soient $(I_3 + \varepsilon \Omega_t)R$ et $(I_3 + \varepsilon \Omega_u)S$ deux éléments de $SO_3(\mathbb{R}[\varepsilon])$ tels que $\Phi[(I_3 + \varepsilon \Omega_t)R] =$

$\Phi [(I_3 + \epsilon\Omega_u)S]$. Alors $(R - S)x + t - u = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, soit $R = S$ et $t = u$. Donc $(I_3 + \epsilon\Omega_t)R = (I_3 + \epsilon\Omega_u)S$ et par suite Φ est injectif.

Il est clair que pour tout $x \mapsto Rx + t \in \text{SE}_3(\mathbb{R})$, il existe $(I_3 + \epsilon\Omega_t)R \in \text{SO}_3(\mathbb{R}[\epsilon])$ tel que $\Phi [(I_3 + \epsilon\Omega_t)R] = Rx + t$; donc Φ est surjectif. L'application Φ est donc isomorphisme de groupe. \square

2.3 Architecture des robots

2.3.1 Définitions

La **cinématique** étudie la géométrie des mouvements d'un corps rigide (par exemple un robot) analytiquement par rapport à un système de coordonnées de référence fixé, sans tenir compte des forces ou moments qui causent ce mouvement. Les concepts essentiels sont la position et l'orientation.

Un **robot** est un mécanisme piloté par une unité de commande qui réalise automatiquement une variété des tâches telle que la manipulation des matériaux, des pièces, des outils ou dispositifs spécialisés au cours des mouvements variables.

Une **chaîne cinématique** est un ensemble de segments liés par des liaisons mécaniques. On appelle **chaîne cinématique simple** toute chaîne cinématique où chaque segment a une ou deux liaisons seulement. On appelle **chaîne cinématique complexe** toute chaîne cinématique contenant un segment (ou plusieurs segments) ayant trois liaisons ou plus.

Un **manipulateur** est un robot utilisé pour la manipulation par opposition aux robots mobiles autonomes (appelé aussi robots holonomes). On note qu'il existe aussi des manipulateurs mobiles. Dans toute cette thèse, nous ne nous intéresserons qu'aux manipulateurs.

2.3.2 Articulations

En robotique, on utilise souvent l'appellation **articulation** pour une liaison mécanique entre deux segments. Nous ne nous intéressons qu'à des articulations les plus utilisées qui sont des articulations prismatique, rotoïde, sphérique et universelle.

Articulation rotoïde : Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée **R**, réduisant le mouvement entre deux segments à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre deux segments est donnée par l'angle autour de cet axe.

Articulation prismatique : Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée **P**, réduisant le mouvement entre deux segments à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre deux segments est mesurée par la distance le long de cet axe.

Articulation sphérique : Articulation de type rotule notée **S**, réduisant le mouvement entre deux segments à trois rotations d'axes concourants.

Articulation universelle : Articulation à joint de Cardan noté **U**, réduisant le mouvement entre deux

segments à deux rotations d'axes perpendiculaires.

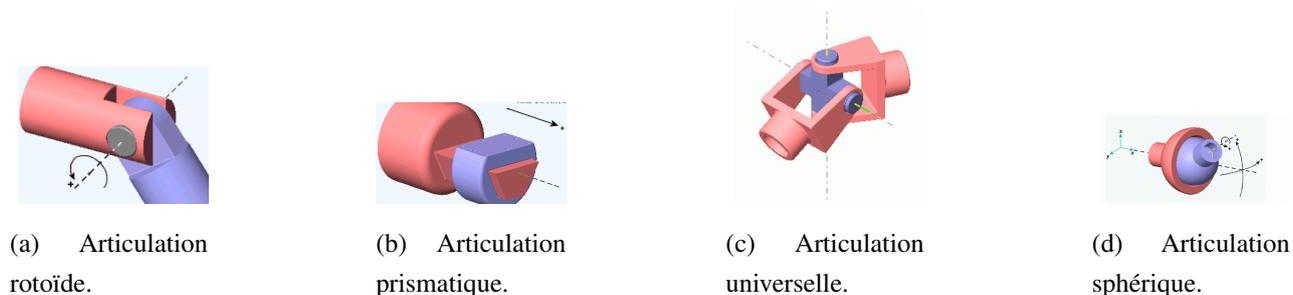


FIGURE 2.1 – Quatre types d'articulations de base.

On appelle **degré de liberté** d'un système mécanique (que l'on note ddl) les mouvements indépendants qui restent possibles. Le ddl d'une articulation entre deux segments correspond au nombre de translations et de rotations indépendantes entre ces deux segments. Ainsi une articulation rotoïde et une articulation prismatique ont un seul ddl , alors qu'une articulation universelle et une articulation sphérique en ont respectivement 2 et 3.

2.3.3 Mécanismes de type manipulateur

Les robots manipulateurs forment une branche spécifique de la robotique. Ils sont composés de deux corps dont un fixe appelé base (ou socle) et l'autre mobile appelé organe terminal (ou effecteur), reliés entre eux par une chaîne cinématique équipée d'actionneurs (ou moteurs). Leur fonction est de déplacer ou modifier des objets. Ces robots manipulateurs se subdivisent en deux classes³ : les **manipulateurs sériels** et les **manipulateurs parallèles**.

Pour décrire la structure mécanique d'une chaîne cinématique d'un manipulateur, nous utilisons communément la liste de ces articulations à partir de la base. Par exemple, la notation RPR indique que partant de la base, la première articulation est une articulation rotoïde qui sera suivie d'une prismatique elle-même suivie d'une rotoïde qui sera connectée à l'organe terminal. De plus, pour différencier une articulation active (articulation qui peut être contrôlée directement par l'utilisateur, par exemple un moteur) d'une articulation passive, la notation de l'articulation active sera soulignée. Ainsi une articulation prismatique dont nous pouvons contrôler la longueur grâce à un moteur sera notée P.

2.3.3.1 Manipulateurs d'architecture sérielle

Un manipulateur sériel est un manipulateur formé par une chaîne cinématique simple contenant une base fixe (souvent appelée socle) et un organe terminal qui ont chacun une seule liaison. Le terme sériel vient du fait que tous les segments dont il est composé, sont reliés successivement les uns aux

3. On parle aussi des manipulateurs hybrides qui sont constitués des manipulateurs parallèles et sériels en combinaison.

autres à partir de son socle jusqu'à l'organe terminal. Ces segments sont motorisés et articulés entre eux deux à deux par une liaison à un degré de liberté (rotoïde ou prismatique).



(a) Robot STÄUBLI
RX 90(6 ddl).



(b) Robot ARC Mate
100 IB (6 ddl).

FIGURE 2.2 – Manipulateurs sériels.

2.3.3.2 Manipulateurs d'architecture parallèle

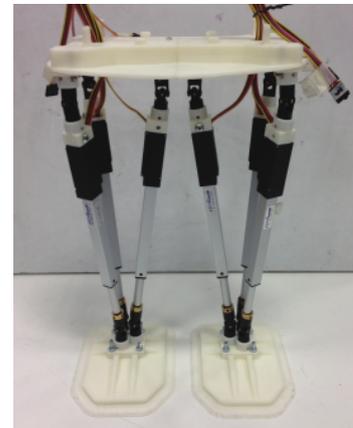
Un manipulateur parallèle est un mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la **base** (fixe) par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes. L'organe terminal est souvent appelé **plateforme** (mobile)⁴ (mais en aucun cas elle ne doit être considérée comme une plaque plate). On appelle jambe une chaîne cinématique indépendante reliant l'organe terminal à la base.



(a) Une plateforme de Gough-Stewart : simulateur de vol Air France B777.



(b) Robot parallèle Delta.



(c) Cassino bipède.

FIGURE 2.3 – Manipulateurs parallèles.

Un groupe d'articulations M_i ($i = 1, \dots, s$) est situé sur la base. Un autre groupe m_i ($i = 1, \dots, s$) est situé sur la plateforme qui est mobile par rapport au repère de référence lié à la base. Un couple

4. C'est un abus de langage, car normalement la plateforme est destinée à recevoir l'organe terminal.

d'articulations (M_i, m_i) ($i = 1, \dots, s$) est relié par une jambe équipée d'un seul moteur permettant de déplacer l'articulation correspondante de la plateforme.

On dit qu'un manipulateur est **pleinement parallèle** s'il a autant de jambes que de degrés de liberté pour l'organe terminal.

Dans toute cette thèse, notre étude ne portera que sur les manipulateurs parallèles.

2.4 Modèles géométriques

La conception et la commande des mécanismes nécessitent le calcul des certains modèles mathématiques tels que les modèles de transformations entre l'**espace des configurations** (espace dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'**espace articulaire** (espace dans lequel est définie la configuration articulaire du mécanisme). Nous distinguons parmi ces modèles, les modèles géométriques qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement, les modèles cinématiques qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement, les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du mécanisme qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

Nous nous intéressons ici particulièrement au calcul des modèles géométriques direct et inverse des manipulateurs, mais aussi brièvement au modèles cinématiques ; les aspects dynamiques n'étant pas étudiés dans ce travail.

2.4.1 Espace des configurations et espace articulaire

Les systèmes mécaniques sont généralement décrits par des paramètres satisfaisant des équations dites **équations de contraintes**. L'**espace des configurations** C est donc l'ensemble de toutes les configurations satisfaisant les contraintes. L'**espace de travail** W est l'ensemble des positions et des orientations accessibles par un repère lié à l'organe terminal du manipulateur. L'espace de travail est donc un sous-espace de l'espace de travail. Pour les manipulateurs que nous étudions dans cette thèse, les deux espaces coïncident. Un **mode opératoire** est une partie de l'espace des configurations à laquelle est associé un type spécifique de mouvements.

L'**espace articulaire** est l'ensemble des positions articulaires motorisées permettant d'assembler le manipulateur. Les coordonnées associées sont appelées coordonnées articulaires.

Dans le cas où le nombre m représentant les degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre n d'articulations du manipulateur, celui-ci est **redondant** et le nombre $(n - m)$ représente le degré de redondance.

2.4.2 Problème géométrique direct

Le modèle géométrique direct d'un mécanisme permet de trouver la position et l'orientation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires (connues). Il permet donc de passer de l'espace articulaire à l'espace des configurations. Il est donné par la relation suivante :

$$X = f(q),$$

où $X \in C$ est une configuration et q le vecteur des variables articulaires. Pour les manipulateurs parallèles, la résolution du modèle géométrique direct est un problème complexe. C'est pourquoi, nous préférons le terme Problème Géométrique Direct (PGD) à la place de modèle géométrique direct. En général, la solution PGD n'est pas unique. Pour une configuration articulaire précise, le manipulateur pourra avoir plusieurs modes d'assemblage (différentes solutions du PGD). Les méthodes de résolution du PGD des manipulateurs parallèles diffèrent suivant l'architecture du manipulateur et le type de ses articulations.

2.4.3 Application géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse permet de trouver l'ensemble des variables articulaires pour une position et une orientation données de l'organe terminal. Ainsi, on dispose d'une relation du type

$$q = g(X) \text{ où } g = f^{-1},$$

avec f^{-1} est l'application réciproque de f .

La relation g définit une application (au sens propre) de l'espace des configurations vers l'espace articulaire. C'est pourquoi, nous préférons le terme Application Géométrique Inverse (AGI) au lieu de modèle géométrique inverse. Pour les manipulateurs parallèles, la résolution ne pose généralement pas de problèmes.

2.5 Singularité des manipulateurs parallèles

Les manipulateurs d'architectures parallèles comportent des configurations dites singulières pour lesquelles le comportement du manipulateur se dégrade. Le manipulateur est donc exposé à un comportement inhabituel comme une perte de degré de liberté. Ce comportement inhabituel peut également se traduire par un gain de degré de liberté ; la plateforme peut donc effectuer un mouvement alors que les articulations motorisées sont verrouillées. On parle dans ce cas d'auto-mouvement (self-motion en anglais) du manipulateur. L'AGI étant une application différentiable d'un espace articulaire vers un espace des configurations, ses points critiques, c'est-à-dire les points en lesquels le rang de la différentielle peut chuter sont exactement les points en lesquels le manipulateur admet une singularité.

2.6 Étude de quelques robots parallèles dans la compactification de Study

Dans cette section, nous montrons l'utilité de la compactification de Study dans l'étude de quelques manipulateurs parallèles. Nous aborderons les calculs de leur mode opératoire et de leur PGD. Les résultats que nous obtenons ici ne sont pas nouveaux ; ils ont été déjà obtenus dans [SWH14, WHP08, WH11]. Les manipulateurs parallèles que nous considérons ici ont chacun une plateforme mobile reliée à une base fixe par trois jambes de longueurs variables contrôlées par des articulations prismatiques actives \underline{P} . La base et la plateforme mobile sont en forme de triangle équilatéral. Les jambes leur sont attachées via des articulations centrées en des sommets A_i et B_i . À cause de la spécificité des articulations ; la plateforme mobile a donc des degrés de liberté restreints. Pour la modélisation algébrique, nous utilisons le repère suivant attaché à la base (Fig. 2.4).

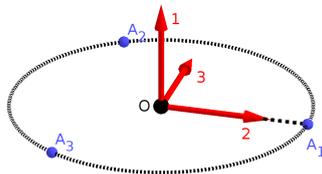


FIGURE 2.4 – Repère attaché à la base

Dans ce repère, les sommets de la base ont pour coordonnées suivantes :

$$A_1 : [0, k_1, 0]^T \quad A_2 : [0, -k_1/2, \sqrt{3}k_1/2]^T \quad A_3 : [0, -k_1/2, -\sqrt{3}k_1/2]^T ,$$

où k_1 est le rayon du cercle circonscrit à la base. Nous attachons également un repère similaire à la plateforme mobile dans lequel les sommets du triangle ont pour coordonnées b_i suivantes :

$$b_1 : [0, k_2, 0]^T \quad b_2 : [0, -k_2/2, \sqrt{3}k_2/2]^T \quad b_3 : [0, -k_2/2, -\sqrt{3}k_2/2]^T ,$$

où k_2 est le rayon du cercle circonscrit à la plateforme mobile. Les coordonnées B_i des sommets du triangle dans le repère fixe sont obtenues en utilisant la paramétrisation de Study avec les coordonnées homogènes $(\underline{x}, \underline{y})$ pour le changement de repère :

$$B_i = \frac{1}{\Delta(\underline{x})} \left(R(\underline{x})b_i + t(\underline{x}, \underline{y}) \right) .$$

Nous formons l'idéal homogène engendré par les équations de contraintes imposées par la plateforme et l'équation de la quadrique de Study S . Ensuite, nous saturons l'idéal par rapport à $\Delta(\underline{x}) = \sum_{i=0}^3 x_i^2$ (voir Section 1.4.7) afin d'éliminer les composantes parasites contenues dans le 3-plan exceptionnel E . L'idéal obtenu définit l'espace des configurations de la plateforme, une sous-variété de la quadrique de Study. L'espace des configurations n'est pas toujours irréductible (nous le verrons dans les exemples qui vont suivre). Ses composantes irréductibles sont donc les modes opératoires

de la plateforme. Ces modes opératoires sont définis par les radicaux des idéaux primaires (qui sont des idéaux premiers) issus d'une décomposition primaire (voir Section 1.4.9) de l'idéal de l'espace des configurations. Pour les besoins de calcul, nous prendrons $k_1 = 1$ et $k_2 = \frac{1}{2}$. Les manipulateurs parallèles qui seront étudiés dans la suite sont 3-RPS, SNU 3-UPU et Tsai 3-UPU.

2.6.1 Modes opératoires des robots parallèles

Dans cette partie, nous allons examiner les espaces des configurations des mécanismes précités et décrire leurs modes opératoires.

2.6.1.1 Le 3-RPS

Dans cette architecture, chaque jambe est reliée à la base par une articulation rotoïde (R) passive donc l'axe de rotation est tangent au cercle circonscrit à la base et reliée à la plateforme par une articulation sphérique passive (S) autorisant toutes les rotations autour de son centre. La jambe ($A_i B_i$) est donc perpendiculaire à l'axe de la rotation en A_i (voir Fig. 2.5).

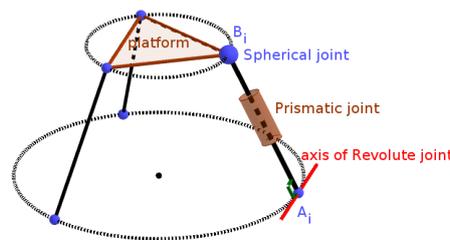


FIGURE 2.5 – 3-RPS

Soit a_i un vecteur directeur (qu'on peut prendre unitaire) de l'axe de rotation. Les a_i ont pour coordonnées suivantes

$$a_1 : [0, 0, 1]^T, a_2 : [0, -\sqrt{3}k_2/2, -k_2/2]^T, a_3 = [0, -\sqrt{3}k_2/2, k_2/2]^T. \quad (2.16)$$

On obtient donc les équations de contraintes suivantes :

$$\overrightarrow{A_i B_i} \cdot a_i = 0. \quad (2.17)$$

Ce qui conduit après développement à

$$\begin{aligned} x_0 x_1 + x_2 x_3 + x_3 y_0 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_0 y_3 &= 0 \\ 4x_0 x_1 + \sqrt{3}x_2^2 - 2x_2 x_3 - \sqrt{3}x_3^2 - 2x_3 y_0 - 2\sqrt{3}x_2 y_0 + 2\sqrt{3}x_3 y_1 - 2x_2 y_1 + 2x_0 y_3 - \\ 2\sqrt{3}x_1 y_3 + 2\sqrt{3}x_0 y_2 + 2x_1 y_2 &= 0 \\ 4x_0 x_1 - \sqrt{3}x_2^2 - 2x_2 x_3 + \sqrt{3}x_3^2 - 2x_3 y_0 + 2\sqrt{3}x_2 y_0 - 2\sqrt{3}x_3 y_1 - 2x_2 y_1 + 2x_0 y_3 + \\ 2\sqrt{3}x_1 y_3 - 2\sqrt{3}x_0 y_2 + 2x_1 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Formons l'idéal engendré par les équations de contraintes et l'équation de la quadrique de Study puis saturons-le par rapport à l'idéal du 3-plan exceptionnel E afin d'éliminer les composantes parasites contenues dans le 3-plan E . On obtient donc l'espace des configurations du 3-RPS défini par l'idéal J_C suivant

$$\begin{aligned}
 J_C = \langle & x_0x_1, x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_2x_3 + x_3y_0 + x_2y_1 - x_1y_2 - x_0y_3, \\
 & x_2^2 - x_3^2 - 2x_2y_0 + 2x_3y_1 + 2x_0y_2 - 2x_1y_3, x_1^2y_1 + x_1x_2y_2 + x_1x_3y_3, \\
 & x_3^3 - 3x_3y_0^2 - x_3^2y_1 - x_2y_0y_1 - 2x_3y_1^2 - x_1x_2y_2 - 2x_0x_3y_2 + 3x_1y_0y_2 - 2x_0y_1y_2 \\
 & - x_0x_2y_3 + 2x_1x_3y_3 - x_1y_1y_3 - 3x_2y_2y_3 - 3x_3y_3^2, x_3^2y_0y_1 + x_2y_0^2y_1 - 2y_0^3y_1 - x_3y_0y_1^2 \\
 & - 2y_0y_1^3 + x_1x_3y_1y_2 + x_1y_1^2y_2 - 2y_0y_1y_2^2 + x_1y_2^3 - x_1x_2y_1y_3 + x_1y_0y_1y_3 + 3x_3y_1y_2y_3 \\
 & + x_2y_1y_3^2 - 2y_0y_1y_3^2 - 3x_1y_2y_3^2, x_1x_3^2y_1 + x_1x_2y_0y_1 - 2x_1y_0^2y_1 - x_1x_3y_1^2 - 2x_1y_1^3 \\
 & + x_1x_3y_2^2 - 2x_1y_1y_2^2 + x_1x_2y_2y_3 - 2x_1x_3y_3^2 - 2x_1y_1y_3^2 \rangle. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

L'idéal des configurations J_C n'est pas premier, donc l'espace des configurations n'est pas irréductible. Faisons la décomposition primaire de J_C qui donnera les composantes irréductibles de l'espace des configurations correspondant aux modes opératoires du 3-RPS.

La décomposition primaire de l'espace des configurations ainsi obtenu (après saturation) est très coûteuse en temps. Nous allons considérer l'espace des configurations J_{CE} avec les mauvais points de la quadrique de Study puis les enlever après décomposition.

Le polynôme de Hilbert (voir Section 1.4.8) de l'idéal de configuration étant égal à

$$p_{J_{CE}} = \frac{8}{3}t^3 + \frac{16}{3}t$$

et ayant pour degré égal à 3, donc l'espace des configurations du 3-RPS est de dimension 3.

La décomposition primaire de l'idéal des configurations J_{CE} donne trois idéaux primaires dont un contient le 3-plan E et ne définit pas un mode opératoire, et les deux autres donnés ci-dessous :

- ✓ $J_1 = \langle x_0, x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, x_2x_3 + x_3y_0 + x_2y_1 - x_1y_2, x_2^2 - x_3^2 - 2x_2y_0 + 2x_3y_1 - 2x_1y_3, x_3^2y_1 + x_2y_0y_1 - 2y_0^2y_1 - x_3y_1^2 - 2y_1^3 - 2y_1y_2^2 + x_2y_2y_3 - 2x_3y_3^2 - 2y_1y_3^2, x_3^3 - 3x_3y_0^2 - 2y_0^2y_1 - 3x_3y_1^2 - 2y_1^3 - x_1x_2y_2 + 3x_1y_0y_2 + x_3y_2^2 - 2y_1y_2^2 + 2x_1x_3y_3 - x_2y_2y_3 - 4x_3y_3^2 - 2y_1y_3^2 \rangle$
- ✓ $J_2 = \langle x_1, x_0y_0 + x_2y_2 + x_3y_3, x_2x_3 + x_3y_0 + x_2y_1 - x_0y_3, x_2^2 - x_3^2 - 2x_2y_0 + 2x_3y_1 + 2x_0y_2, x_3^2y_0 + x_2y_0^2 - 2y_0^3 - x_3y_0y_1 - 2y_0y_1^2 - 2y_0y_2^2 + 3x_3y_2y_3 + x_2y_3^2 - 2y_0y_3^2, x_3^3 - 3x_3y_0^2 - x_3^2y_1 - x_2y_0y_1 - 2x_3y_1^2 - 2x_0x_3y_2 - 2x_0y_1y_2 - x_0x_2y_3 - 3x_2y_2y_3 - 3x_3y_3^2 \rangle$

Les deux idéaux primaires J_1 et J_2 sont radicaux ; donc ils sont premiers et définissent des composantes irréductibles (voir Section 1.2.2). En examinant les générateurs de ces deux idéaux, il est difficile de décrire ce que sont les modes opératoires qu'ils définissent. Néanmoins, nous pouvons voir que le mode opératoire défini par l'idéal J_1 a pour partie rotation un demi-tour (car $x_0 = 0$) (voir section 2.2.1.2, lemme 2.2.1.2). Dans le deuxième mode, défini par J_2 , la partie rotation est une rotation d'axe horizontal $(0, x_2, x_3)$ (car $x_1 = 0$ et x_1 correspond à l'axe vertical). Dans la suite, nous verrons que

l'étude du bord de ces deux modes opératoires permet de ressortir beaucoup plus d'information sur eux.

Notons aussi (même si ce n'est pas visible sur les générateurs des idéaux) que les deux modes opératoires s'échangent par l'involution consistant à multiplier à droite avec le quaternion \mathbf{i} , c'est-à-dire composer à droite avec le demi-tour d'axe vertical passant par l'origine. Cet échange est observé sur les paramètres de Study par la transformation $x_0 \mapsto x_1, x_1 \mapsto -x_0, x_2 \mapsto x_3, x_3 \mapsto -x_2, y_0 \mapsto y_1, y_1 \mapsto -y_0, y_2 \mapsto y_3, y_3 \mapsto -y_2$.

L'idéal $J_1 + J_2$ définit un mode opératoire de transition qui est l'intersection de ces modes et dont la partie rotation est un demi-tour d'axe horizontal (obtenue par $x_0 = x_1 = 0$).

2.6.1.2 Le SNU 3-UPU

Dans les architectures 3-UPU, chaque jambe est attachée à la base et à la plateforme par une articulation universelle U. Nous étudierons deux architectures différentes du 3-UPU : le manipulateur SNU 3-UPU, construit au Seoul National University (SNU) et le manipulateur Tsai 3-UPU, appelé aussi robot parallèle 3-UPU translationnel, discuté par Tsai dans [Tsa96]. Dans l'architecture SNU 3-UPU, l'axe de rotation de l'articulation universelle U qui est fixé rigidement sur la base (resp. la plateforme) pointe vers le centre de son cercle circonscrit. Les deux axes de rotation fixés rigidement sur la jambe sont parallèles, et tous deux orthogonaux à la jambe. Les axes de rotation sont numérotés suivant la chaîne cinématique de la base à la plateforme (Fig. 2.6)

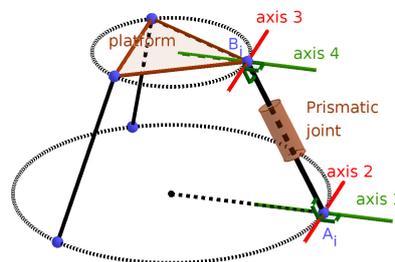


FIGURE 2.6 – SNU 3-UPU

Les contraintes s'expriment par le fait que pour chaque jambe i l'axe 1, l'axe 4 et la droite $(A_i B_i)$ sont coplanaires. Les équations de contraintes sont donc données par l'annulation des déterminants, pour chaque jambe, des vecteurs directeurs de l'axe 1, l'axe 4, et la droite $(A_i B_i)$.

Soient S_{1i} et t_{4i} , $i = 1, 2, 3$, les vecteurs des axes 1 et axes 4 respectivement pour chaque jambe i . Donc, leurs coordonnées dans leur repère respectif sont les mêmes que celles des A_i et b_i . Les coordonnées des t_{4i} par rapport au repère fixe sont

$$T_{4i} = R \cdot t_{4i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ainsi, on obtient les équations de contraintes Eq_i suivantes :

$$\det(S_{1i}, T_{4i}, \overrightarrow{A_i B_i}) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

Après quelques manipulations du type : $Eq_1 \leftarrow Eq_1, Eq_2 \leftarrow (Eq_1 + Eq_2), Eq_3 \leftarrow (Eq_1 - Eq_3)/\sqrt{3}$, on obtient les équations de contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} x_0x_1^2y_0 + x_0x_3^2y_0 - x_0^2x_1y_1 - x_1x_2^2y_1 + x_1^2x_2y_2 + x_2x_3^2y_2 - x_0^2x_3y_3 - x_2^2x_3y_3 &= 0 \\ 4x_0^2x_1y_1 + 3x_0^2x_2y_2 + x_0^2x_3y_3 + 4x_0x_1^2y_0 - 3x_0x_2^2y_0 - x_0x_3^2y_0 - x_1^2x_2y_2 - 3x_1^2x_3y_3 + \\ x_1x_2^2y_1 + 3x_1x_3^2y_1 - 2x_2^2x_3y_3 + 2x_2x_3^2y_2 &= 0 \\ 2x_0x_2x_3y_0 + 2x_1x_2x_3y_1 - x_0^2x_3y_2 - x_1^2x_3y_2 + x_2^2x_3y_2 - x_3^3y_2 - x_0^2x_2y_3 - x_1^2x_2y_3 - x_2^3y_3 + \\ x_2x_3^2y_3 &= 0 \end{aligned}$$

L'idéal engendré par les équations de contraintes, l'équation de la quadrique de Study et saturé par rapport à l'idéal du 3-plan E qui est l'idéal des configurations définit l'espace des configurations. Il est donné par

$$K_C = \langle x_3y_2 + x_2y_3, x_2y_2 - x_3y_3, x_1y_1 + x_3y_3, x_0y_0 + x_3y_3, x_2^2y_3 + x_3^2y_3, y_0y_1y_2^2 + y_0y_1y_3^2 \rangle \quad (2.19)$$

En calculant la décomposition primaire de l'idéal des configurations, on obtient sept modes opératoires définis par les idéaux primaires suivants :

- ✓ $K_0 = \langle y_0, y_1, y_2, y_3 \rangle$
- ✓ $K_1 = \langle y_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $K_2 = \langle x_0, y_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $K_3 = \langle y_0, y_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $K_4 = \langle x_0, x_1, y_2, y_3 \rangle$
- ✓ $K_5 = \langle x_0, y_1, y_2, y_3 \rangle$
- ✓ $K_6 = \langle y_0, x_1, y_2, y_3 \rangle$

plus un huitième, non réel, défini par l'idéal

$$K_7 = \langle x_2^2 + x_3^2, y_2^2 + y_3^2, x_3y_2 + x_2y_3, x_2y_2 - x_3y_3, x_1y_1 + x_3y_3, x_0y_0 + x_3y_3 \rangle.$$

Tous les idéaux $K_i, i = 0, \dots, 6$ définissent des 3-plans contenus dans la quadrique de Study. Les modes opératoires ont donc trois degrés de liberté. Nous donnons ci-dessous la description de toutes les composantes correspondant aux différents modes opératoires du SNU 3-UPU :

- ✓ $\mathcal{K}_0 = \mathcal{V}(K_0)$: toutes les poses obtenues par rotations autour de l'origine à partir de la position initiale.
- ✓ $\mathcal{K}_1 = \mathcal{V}(K_1)$: toutes les poses obtenues par translations.
- ✓ $\mathcal{K}_2 = \mathcal{V}(K_2)$: toutes les poses obtenues par la composée du demi-tour d'axe vertical passant par l'origine suivis d'une translation autour de l'axe du demi-tour.
- ✓ $\mathcal{K}_3 = \mathcal{V}(K_3)$: toutes les poses obtenues par un déplacement dans le plan de la base.
- ✓ $\mathcal{K}_4 = \mathcal{V}(K_4)$: toutes les poses obtenues par un retournement de la plateforme puis un déplacement dans le plan de la base.

- ✓ $\mathcal{K}_5 = \mathcal{V}(K_5)$: toutes les poses obtenues par un demi-tour d'axe passant par l'origine suivi d'une translation dans la direction de l'axe du demi-tour.
- ✓ $\mathcal{K}_6 = \mathcal{V}(K_6)$: toutes les poses obtenues par un demi-tour d'axe vertical passant par l'origine suivi d'un déplacement du mode \mathcal{K}_5 . Dans ce mode, la partie rotation est une rotation d'axe vertical.

Remarque 2.6.1.1. Les points réels du mode non réel $\mathcal{K}_7 = \mathcal{V}(K_7)$ correspondent aux poses obtenues par une translation le long de l'axe vertical passant par l'origine, possiblement composées avec le demi-tour autour de l'axe.

L'espace des configurations est stable par l'involution consistant à composer à droite avec le demi-tour d'axe vertical passant par l'origine. Les modes $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$ et \mathcal{K}_7 sont stables par cette involution qui échange les modes \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 et aussi les modes \mathcal{K}_5 et \mathcal{K}_6 .

2.6.1.3 Le Tsai 3-UPU

Les seules différences qui existent entre les architectures Tsai 3-UPU et SNU 3-UPU résident dans le fait que, pour la première, les axes 1 et 4 sur chaque jambe sont tangents aux cercles circonscrits à la base et à la plateforme respectivement (Fig. 2.7) alors que pour la seconde, comme nous l'avons déjà vu, ces axes sont pointés vers le centre des cercles circonscrits (Fig. 2.6)

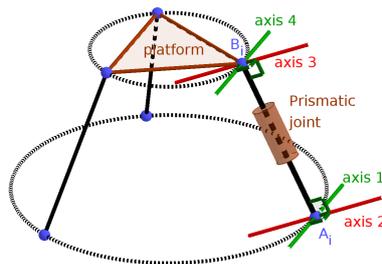


FIGURE 2.7 – Tsai 3-UPU

Nous avons donc

$$\begin{aligned} t_{41} &= [0, 1, 0]^T, \quad t_{42} = [0, -1/2, -\sqrt{3}/2]^T, \quad t_{43} = [0, -1/2, \sqrt{3}/2]^T \\ S_{11} &= [0, 1/2, 0]^T, \quad S_{12} = [0, -1/4, -\sqrt{3}/4]^T, \quad S_{13} = [0, -1/4, \sqrt{3}/4]^T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les équations de contraintes étant données par

$$\det \left(S_{1i}, T_{4i}, \overrightarrow{A_i B_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Notons Eq_i les équations correspondantes.

Après quelques manipulations : $Eq_1 \leftarrow Eq_1, Eq_2 \leftarrow (Eq_1 + Eq_2), Eq_3 \leftarrow (Eq_1 - Eq_3)/\sqrt{3}$, on obtient les équations de contraintes qui sont :

$$\begin{aligned} x_0^3 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 + x_0 x_2^3 + 3x_0^2 x_1 x_3 + 3x_1^3 x_3 + 3x_1 x_2^2 x_3 + x_0 x_2 x_3^2 + 3x_1 x_3^3 - 4x_0 x_1^2 y_0 - \\ 4x_0 x_2^2 y_0 + 4x_0^2 x_1 y_1 + 4x_1 x_3^2 y_1 + 4x_0^2 x_2 y_2 + 4x_2 x_3^2 y_2 - 4x_1^2 x_3 y_3 - 4x_2^2 x_3 y_3 = 0 \end{aligned}$$

$$x_0^3x_2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_2^3 + 3x_0^2x_1x_3 + 3x_1^3x_3 + 3x_1x_2^2x_3 + x_0x_2x_3^2 + 3x_1x_3^3 + 8x_0x_1^2y_0 + 2x_0x_2^2y_0 + 6x_0x_3^2y_0 - 8x_0^2x_1y_1 - 6x_1x_2^2y_1 - 2x_1x_3^2y_1 - 2x_0^2x_2y_2 + 6x_1^2x_2y_2 + 4x_2x_3^2y_2 - 6x_0^2x_3y_3 + 2x_1^2x_3y_3 - 4x_2^2x_3y_3 = 0$$

$$3x_0^2x_1x_2 + 3x_1^3x_2 + 3x_1x_2^3 - x_0^3x_3 - x_0x_1^2x_3 - x_0x_2^2x_3 + 3x_1x_2x_3^2 - x_0x_3^3 - 4x_0x_2x_3y_0 - 4x_1x_2x_3y_1 + 2x_0^2x_3y_2 + 2x_1^2x_3y_2 - 2x_2^2x_3y_2 + 2x_3^3y_2 + 2x_0^2x_2y_3 + 2x_1^2x_2y_3 + 2x_2^3y_3 - 2x_2x_3^2y_3 = 0$$

Comme dans les cas précédents, l'idéal de contraintes L_C est obtenu par la saturation de l'idéal engendré par les équations de contraintes et l'équation de la quadrique de Study par l'idéal du 3-plan exceptionnel :

$$\begin{aligned} L_C = \langle & 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, 2x_0y_0 + x_2y_2 + x_3y_3, 3x_1x_2 - x_0x_3 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3, \\ & x_0x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2y_2 - 2x_3y_3, 2x_0x_3y_1 + 3x_2^2y_2 - 4x_3y_1y_2 + 3x_2x_3y_3 - 4x_2y_1y_3, \\ & 6x_1x_3y_0 - x_2^2y_2 + 4x_2y_0y_2 - x_2x_3y_3 - 4x_3y_0y_3, x_0^2x_3 + 9x_1^2x_3 - 4x_3y_2^2 - 4x_3y_3^2, \\ & 3x_3y_0y_2^2 + x_2y_1y_2^2 - 4y_0y_1y_2^2 + 6x_2y_0y_2y_3 - 2x_3y_1y_2y_3 - 3x_3y_0y_3^2 - x_2y_1y_3^2 - 4y_0y_1y_3^2, \\ & 3x_3^2y_0y_2 + x_2x_3y_1y_2 - 4x_3y_0y_1y_2 + 9x_2x_3y_0y_3 + x_2^2y_1y_3 - 2x_3^2y_1y_3 - 4x_2y_0y_1y_3, \\ & 3x_2x_3y_0y_2 + x_2^2y_1y_2 - 4x_2y_0y_1y_2 + 3x_3^2y_0y_3 + x_2x_3y_1y_3 + 4x_3y_0y_1y_3, 3x_2^2y_0y_2 \\ & - x_2x_3y_1y_2 - 4x_3y_0y_1y_2 + 3x_2x_3y_0y_3 - x_3^2y_1y_3 - 4x_2y_0y_1y_3, 3x_2^3y_2 + 3x_2x_3^2y_2 \\ & - 8x_2x_3y_1y_2 + 3x_2^2x_3y_3 + 3x_3^3y_3 - 4x_2^2y_1y_3 + 4x_3^2y_1y_3, \\ & 9x_2^2x_3y_0y_3 - 3x_3^3y_0y_3 + x_2^3y_1y_3 - 3x_2x_3^2y_1y_3 - 4x_2^2y_0y_1y_3 - 4x_3^2y_0y_1y_3 \rangle \quad (2.21) \end{aligned}$$

La décomposition primaire de L_C donne cinq idéaux primaires qui définissent chacun un mode opératoire de l'espace des configurations du Tsai 3-UPU :

- ✓ $L_0 = \langle y_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $L_1 = \langle x_0, y_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $L_2 = \langle y_0, y_1, x_2, x_3 \rangle$
- ✓ $L_3 = \langle x_0, x_1, y_2, y_3 \rangle$
- ✓ $L_4 = \langle 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, 2x_0y_0 + x_2y_2 + x_3y_3, 3x_1x_2 - x_0x_3 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3, x_0x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2y_2 - 2x_3y_3, x_0^2 + 9x_1^2 - 4y_2^2 - 4y_3^2, 2x_0x_3y_1 + 3x_2^2y_2 - 4x_3y_1y_2 + 3x_2x_3y_3 - 4x_2y_1y_3, 6x_1x_3y_0 - x_2^2y_2 + 4x_2y_0y_2 - x_2x_3y_3 - 4x_3y_0y_3, 18x_1^2y_0 + 3x_1x_3y_2 + 2x_2y_2^2 - 8y_0y_2^2 - x_0x_3y_3 - 2x_3y_2y_3 - 8y_0y_3^2, 3x_3y_0y_2^2 + x_2y_1y_2^2 - 4y_0y_1y_2^2 + 6x_2y_0y_2y_3 - 2x_3y_1y_2y_3 - 3x_3y_0y_3^2 - x_2y_1y_3^2 - 4y_0y_1y_3^2, 3x_3^2y_0y_2 + x_2x_3y_1y_2 - 4x_3y_0y_1y_2 + 9x_2x_3y_0y_3 + x_2^2y_1y_3 - 2x_3^2y_1y_3 - 4x_2y_0y_1y_3, 3x_2x_3y_0y_2 + x_2^2y_1y_2 - 4x_2y_0y_1y_2 + 3x_3^2y_0y_3 + x_2x_3y_1y_3 + 4x_3y_0y_1y_3, 3x_2^2y_0y_2 - x_2x_3y_1y_2 - 4x_3y_0y_1y_2 + 3x_2x_3y_0y_3 - x_3^2y_1y_3 - 4x_2y_0y_1y_3, 3x_2^3y_2 + 3x_2x_3^2y_2 - 8x_2x_3y_1y_2 + 3x_2^2x_3y_3 + 3x_3^3y_3 - 4x_2^2y_1y_3 + 4x_3^2y_1y_3, 9x_2^2x_3y_0 - 3x_3^3y_0 + x_2^3y_1 - 3x_2x_3^2y_1 - 4x_2^2y_0y_1 - 4x_3^2y_0y_1 \rangle$

Nous voyons donc que l'espace des configurations est composé de cinq modes opératoires donc les quatre premiers sont des 3-plans contenus dans la quadrique de Study et correspondent aux modes

$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ et \mathcal{K}_4 du SNU 3-UPU. Le dernier mode, le mode mystérieux, appelé **mode général** dans [WH11], défini par l'idéal L_4 n'est pas facile à analyser : il n'est ni planaire, ni purement translationnel. Tout ce que nous savons de lui est juste qu'il est de dimension 3 (comme tous les autres modes) et de degré 11 car son polynôme de Hilbert est donné par :

$$\frac{11}{6}t^3 + 3t^2 + \frac{7}{6}t + 2.$$

Nous verrons plus loin comment récupérer des informations partielles sur ce mode, via la dégénérescence.

2.6.1.4 Le 4-UPU

Nous considérons la géométrie du 4-UPU comme décrite dans [CKM15]. Le manipulateur ayant 4 jambes identiques, elles sont reliées à la base rectangulaire horizontale de sommets $B_1 = [a, b, 0]^T$, $B_2 = [-a, b, 0]^T$, $B_3 = [-a, -b, 0]^T$, $B_4 = [a, -b, 0]^T$ et à la plateforme mobile rectangulaire de sommets $P_1 = [c, d, 0]^T$, $P_2 = [-c, d, 0]^T$, $P_3 = [-c, -d, 0]^T$, $P_4 = [c, -d, 0]^T$ dans un repère orthonormal attaché à la plateforme (voir fig. 2.8 (a)). Les nombres réels a, b, c et d sont supposés être strictement positifs. Les coordonnées des sommets de la plateforme dans le repère de la base sont données par $Q_i = RP_i + t, i = 1, \dots, 4$ où R et t sont donnés respectivement par (2.9) et (2.11). Les vecteurs $V = [0, 0, 1]^T$ et $N = RV$ sont des vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à la base et à la plateforme (voir fig. 2.8 (b)).

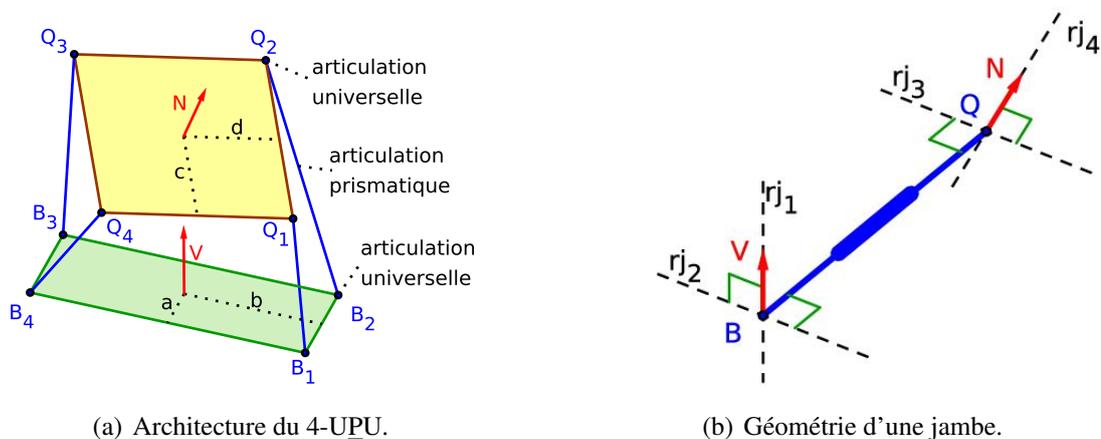


FIGURE 2.8 – Le 4-UPU et la géométrie d'une jambe

Pour chaque jambe $i, i = 1, \dots, 4$, les articulations universelles en B_i se décomposent en deux articulations rotoïdes $r_{j_{i,1}}$ et $r_{j_{i,2}}$ d'axes perpendiculaires et celles en Q_i en $r_{j_{i,3}}$ et $r_{j_{i,4}}$ également d'axes perpendiculaires. L'axe de $r_{j_{i,1}}$ est vertical (donc parallèle à V), l'axe de $r_{j_{i,4}}$ est orthogonal à la plateforme (donc parallèle à N) et les axes de $r_{j_{i,2}}$ et $r_{j_{i,3}}$ sont parallèles, tous deux orthogonaux à V , à N et au vecteur $\overrightarrow{B_i Q_i}$ (voir fig. 2.8 (b)).

La disposition des axes conduit aux contraintes que les vecteurs V, N et $\overrightarrow{B_i Q_i}, i = 1, \dots, 4$

doivent être coplanaires, ce qui donne

$$\det(V, N, Q_i - B_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.22)$$

En ajoutant l'équation de la quadrique de Study aux quatre équations ci-dessus données par l'équation (2.22), on obtient les équations de contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} (c - a)x_0x_1 + (a + c)x_2x_3 + (d - b)x_0x_2 - (b + d)x_1x_3 + 2(x_0y_0 + x_3y_3) &= 0 \\ (a - c)x_0x_1 - (a + c)x_2x_3 + (d - b)x_0x_2 - (b + d)x_1x_3 + 2(x_0y_0 + x_3y_3) &= 0 \\ (a - c)x_0x_1 - (a + c)x_2x_3 + (b - d)x_0x_2 + (b + d)x_1x_3 + 2(x_0y_0 + x_3y_3) &= 0 \\ (c - a)x_0x_1 + (a + c)x_2x_3 + (b - d)x_0x_2 + (b + d)x_1x_3 + 2(x_0y_0 + x_3y_3) &= 0 \\ x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Après avoir saturé l'idéal de contraintes par l'idéal du 3-plan $\Delta(\underline{x})$, on obtient l'idéal des configurations M_C dont la décomposition donne trois idéaux suivants qui définissent différents modes opératoires du 4-UPU.

- ✓ $M_0 = \langle x_2, x_1, x_0y_0 + x_3y_3 \rangle$
- ✓ $M_1 = \langle x_3, x_0, x_1y_1 + x_2y_2 \rangle$
- ✓ $M_2 = \langle x_1y_1 + x_2y_2, x_0y_0 + x_3y_3, (b + d)y_0y_2 + (b - d)y_1y_3, (b - d)x_0y_1 - (b + d)x_3y_2, (b + d)x_1y_0 - (b - d)x_2y_3, (b - d)x_0x_2 + (b + d)x_1x_3, (a + c)y_0y_1 - (a - c)y_2y_3, (a + c)x_3y_1 + (a - c)x_0y_2, (a + c)x_2y_0 + (a - c)x_1y_3, (a - c)x_0x_1 - (a + c)x_2x_3, (ab - cd)(x_1^2 + x_2^2) - (bc - ad)(x_1^2 - x_2^2), (ab + cd)(x_0^2 + x_3^2) - (bc + ad)(x_0^2 - x_3^2), (ab - cd)(y_1^2 + y_2^2) + (bc - ad)(y_1^2 - y_2^2), (ab + cd)(y_0^2 + y_3^2) + (bc + ad)(y_0^2 - y_3^2), (ab - cd)(x_2y_1 - x_1y_2) + (bc - ad)(x_2y_1 + x_1y_2), (ab + cd)(x_3y_0 - x_0y_3) + (bc + ad)(x_3y_0 + x_0y_3) \rangle$

Ci-dessous nous décrivons brièvement les différents modes opératoires définis par les trois idéaux ci-dessus.

- ✓ L'idéal M_0 définit une variété algébrique irréductible de dimension 4 (car de polynôme de Hilbert $\frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{23}{12}t^2 + \frac{7}{3}t + 1$); il y a donc quatre degrés de liberté dans ce mode opératoire. De plus, puisque $x_2 = x_1 = 0$, alors la partie rotation du mouvement est une rotation d'axe vertical. C'est donc un mouvement de Schoenflies (trois degrés de liberté en translation et un degré de liberté en rotation).
- ✓ L'idéal M_1 définit également une variété algébrique irréductible de dimension 4 et donc également un mouvement de degré de liberté 4. Aussi, puisque nous avons $x_3 = x_0 = 0$, alors la partie rotation du mouvement est un demi-tour d'axe horizontal : la plateforme se trouve donc retournée, puis effectue un mouvement de Schoenflies (translation et rotation d'axe vertical). C'est donc un mouvement de Schoenflies retourné.
- ✓ Le troisième idéal définit un mode opératoire qui dépend de l'architecture du 4-UPU : il peut disparaître (c'est-à-dire n'avoir que des points complexes non réels) tout comme se décomposer en d'autres modes suivant le signe de la quantité $(c - a)(b - d)$. Si la quantité $(c - a)(b - d)$

est positive, l'idéal M_2 se décompose en deux idéaux premiers réels quand on adjoint la racine carrée de $(c - a)(b - d)(a + c)(b + d)$ et donne deux modes opératoires supplémentaires à 3 degrés de liberté. Il a été étudié largement dans [CKM15] et y est appelé modes opératoires Extra.

2.6.2 PGD des manipulateurs parallèles

Dans cette sous-section, nous allons traiter le PGD des manipulateurs parallèles abordés précédemment. Rappelons le PGD pour les manipulateurs que nous considérons ici : étant données les longueurs des jambes r_1 , r_2 et r_3 de ces manipulateurs, quelles sont les poses (positions et orientations) possibles de la plateforme? Les longueurs r_i de la jambe étant contrôlées par une articulation prismatique motorisée, ce sont donc des variables articulaires et constituent donc l'espace articulaire de ces manipulateurs. Comme nous l'avons déjà indiqué ci-haut (voir section 2.4.3), pour les manipulateurs que nous considérons ici, les r_i se calculent facilement à partir des coordonnées \underline{x} et \underline{y} de la quadrique de Study à l'aide de la relation

$$r_i^2 = \left\| \overrightarrow{A_i B_i} \right\|^2, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (2.23)$$

Rappelons aussi, l'application qui à un point de l'espace des configurations de la plateforme associe un point de l'espace articulaire $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ est l'application géométrique inverse (AGI). Elle joue un rôle très important dans la détermination des solutions au PGD. En effet, le nombre de solutions au PGD change en des valeurs critiques de l'AGI, les images des points singuliers de l'AGI. Ces singularités jouent un rôle prépondérant dans la cinématique des robots parallèles.

Nous utiliserons la librairie Maple SIROPA [SIR] pour représenter le nombre de solutions réelles en fonction des variables articulaires r_1 , r_2 , ainsi que les valeurs critiques de l'AGI. Cela se fait en étudiant les régions de l'espace articulaire (r_1, r_2, r_3) où le nombre de solutions réelles au MGD est fixe. Les régions auxquelles on s'intéresse sont des ensembles semi-algébriques (voir section 1.5.1). On considérera donc une tranche de l'espace articulaire pour une valeur donnée d'une longueur des jambes et on déterminera sa décomposition cylindrique algébrique adaptée (voir section 1.5.2) au PGD.

2.6.2.1 PGD du 3-RPS

Dans cette partie, nous allons étudier le PGD du 3-RPS séparément dans chaque mode opératoire. Nous utiliserons juste la paramétrisation de la partie rotation du déplacement (2.9). Cette procédure nous aidera à réduire le nombre de variables dans les calculs.

Soit (s, u, v) , où s est pris de manière arbitraire, les coordonnées du vecteur de translation t . De la relation (2.17), nous allons déterminer u et v et substituer leur expression dans les B_i . Le PGD est alors donné par les équations obtenues à partir de la relation (2.23) et la condition de normalisation. Puisque les paramètres x_0 , x_1 , x_2 et x_3 et leur opposé représentent la même la solution, le nombre des solutions réelles au PGD doit être divisé par deux.

❶ **Mode opératoire \mathcal{J}_1** : Rappelons que la partie rotation du premier mode opératoire est un demi-tour (donné par $x_0 = 0$). Sa matrice R est donc

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

La relation (2.17) conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x_2x_3 + u &= 0 \\ \sqrt{3}x_2^2 - \sqrt{3}x_3^2 + 2x_2x_3 + 2u + 2\sqrt{3}v &= 0 \\ -\sqrt{3}x_2^2 + \sqrt{3}x_3^2 + 2x_2x_3 + 2u - 2\sqrt{3}v &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En résolvant par rapport à u et v , nous obtenons

$$u = -x_2x_3, \quad v = -\frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2). \quad (2.26)$$

En Substituant u et v par leur expression dans les coordonnées des B_i et en utilisant la relation de contraintes de distance (2.23), nous obtenons les équations du PGD

$$\begin{aligned} 4r_1^2 - x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 - 4x_2^4 + 8x_2^2x_3^2 - 4x_3^4 - 8x_1x_3s - 4x_1^2 - 8x_2^2 + 8x_3^2 - 4s^2 - 4 &= 0 \\ 4r_2^2 - 2\sqrt{3}x_1^2x_2x_3 + 4\sqrt{3}x_2^3x_3 - 4\sqrt{3}x_3^3x_2 - x_1^4 - x_1^2x_2^2 - 3x_1^2x_3^2 - x_2^4 - 10x_2^2x_3^2 - x_3^4 \\ - 4\sqrt{3}x_1x_2s - 8\sqrt{3}x_2x_3 + 4x_1x_3s - 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2 - 4s^2 - 4 &= 0 \\ 4r_3^2 + 2\sqrt{3}x_1^2x_2x_3 - 4\sqrt{3}x_2^3x_3 + 4\sqrt{3}x_3^3x_2 - x_1^4 - x_1^2x_2^2 - 3x_1^2x_3^2 - x_2^4 - 10x_2^2x_3^2 - x_3^4 \\ + 4\sqrt{3}x_1x_2s + 8\sqrt{3}k_2x_2x_3 + 4x_1x_3s - 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2 - 4s^2 - 4 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Considérons la tranche de l'espace articulaire donnée par $r_3 = 5$ et représentons l'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD. L'ensemble des valeurs critiques est une courbe, la courbe de singularité image, obtenue par projection (voir section 1.4.5) de la surface de singularité image sur le plan (r_1, r_2) de l'espace articulaire.

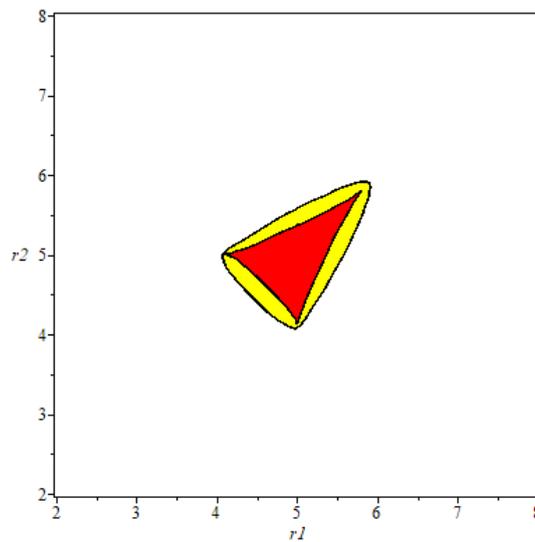


FIGURE 2.9 – Mode opératoire \mathcal{J}_1 du 3-RPS, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 4 solutions, région rouge : 8 solutions

Comme mentionné ci-haut, nous avons utilisé DCA (voir Section 1.5.2) pour étudier l'espace articulaire. Le PGD admet donc 4 solutions dans la région jaune (à l'intérieur du petit ovale et à l'extérieur du deltoïde) et 8 solutions dans la région rouge (à l'intérieur du deltoïde).

② **Mode opératoire \mathcal{J}_2** : La matrice R est donnée par

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_0^2 - x_2^2 - x_3^2 & -2x_0x_3 & 2x_0x_2 \\ 2x_0x_3 & x_0^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ -2x_0x_2 & 2x_2x_3 & x_0^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Et $\Delta(\underline{x}) = x_0^2 + x_2^2 + x_3^2$.

En procédant de la même manière que dans le premier cas, nous obtenons les équations du PGD suivantes :

$$\begin{aligned} 4r_1^2 - x_0^4 - 4x_0^2x_3^2 - 4x_2^4 + 8x_2^2x_3^2 - 4x_3^4 - 8x_0x_2x_3 + 4x_0^2 - 8x_2^2 + 8x_3^2 - 4s^2 - 4 &= 0 \\ 4r_2^2 + 2\sqrt{3}x_0^2x_2x_3 + 4\sqrt{3}x_2^3x_3 - 4\sqrt{3}x_3^3x_2 - x_0^4 - x_0^2x_3^2 - 3x_0^2x_2^2 - x_2^4 - 10x_2^2x_3^2 - x_3^4 \\ + 4\sqrt{3}x_0x_3s - 8\sqrt{3}x_2x_3 + 4x_0x_2s + 4x_0^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2 - 4s^2 - 4 &= 0 \\ 4r_3^2 - 2\sqrt{3}x_0^2x_2x_3 - 4\sqrt{3}x_2^3x_3 + 4\sqrt{3}x_3^3x_2 - x_0^4 - x_0^2x_3^2 - 3x_0^2x_2^2 - x_2^4 - 10x_2^2x_3^2 - x_3^4 \\ - 4\sqrt{3}x_0x_3s + 8\sqrt{3}x_2x_3 + 4x_0x_2s + 4x_0^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2 - 4s^2 - 4 &= 0 \\ x_0^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ci-dessous, nous avons l'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD pour $r_3 = 5$.

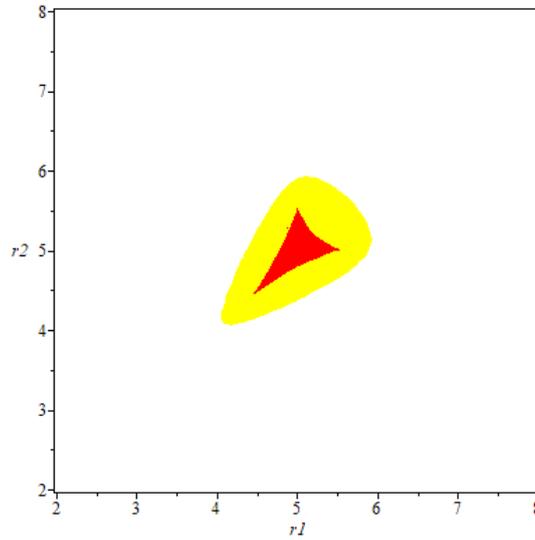


FIGURE 2.10 – Mode opératoire \mathcal{J}_2 du 3-RPS, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 4 solutions, région rouge : 8 solutions

2.6.2.2 PGD du SNU 3-UPU

Nous allons étudier le PGD de cette plateforme dans chacune (sauf dans $\mathcal{K}_0 = \mathcal{V}(y_0, y_1, y_2, y_3)$ où il y a aucune solution réelle au PGD) des composantes de son espace des configurations. Pour ce

faire, nous allons utiliser la relation (2.23). Puisqu'il y a 3 jambes, nous obtenons trois équations qui, ajoutées à l'équation de la quadrique de Study et aux conditions de normalisation forment l'équation du PGD.

- ① $\mathcal{K}_1 = \mathcal{V}(y_0, x_3, x_2, x_1)$. La matrice de rotation R et le vecteur de translation t sont donnés à partir de (2.9) et (2.11) par

$$R(\underline{x}) = x_0^2 I_3 \quad \text{et} \quad t(\underline{x}, \underline{y}) = -2x_0 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T.$$

où I_3 est la matrice unité d'ordre 3. Nous prenons $x_0 = 1$ comme condition de normalisation. Ce qui conduit aux équations du PGD suivantes :

$$4r_1^2 - 16y_1^2 - 16y_2^2 - 16y_3^2 - 8y_3 - 1 = 0$$

$$4r_2^2 - 4\sqrt{3}y_2 - 16y_1^2 - 16y_2^2 - 16y_3^2 + 4y_3 - 1 = 0$$

$$4r_3^2 + 4\sqrt{3}y_2 - 16y_1^2 - 16y_2^2 - 16y_3^2 + 4y_3 - 1 = 0$$

Et nous avons l'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD pour $r_3 = 5$.

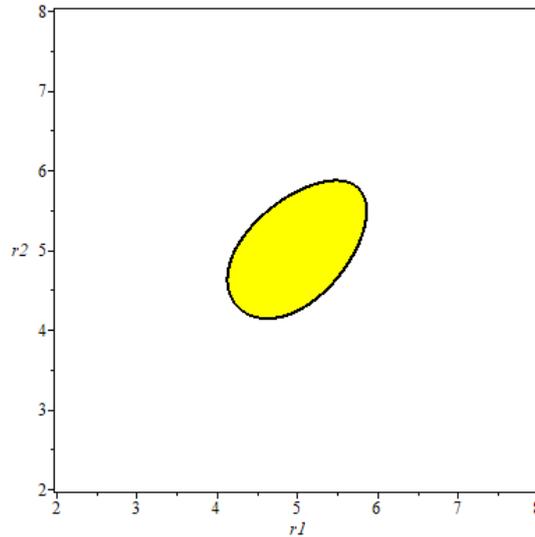


FIGURE 2.11 – Mode opératoire \mathcal{K}_6 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0

- ② $\mathcal{K}_2 = \mathcal{V}(y_1, x_3, x_2, x_0)$. La matrice de rotation R et le vecteur de translation t se réécrivent à partir des expressions (2.9) et (2.11)

$$R(\underline{x}) = x_1^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad t(\underline{x}, \underline{y}) = 2x_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ y_3 \\ -y_2 \end{bmatrix}.$$

Et on obtient les équations du PGD suivantes (l'égalité $x_1 = 1$ étant pris comme condition de normalisation) :

$$4r_1^2 - 16y_0^2 - 16y_2^2 - 16y_3^2 - 24y_2 - 9 = 0$$

$$4r_2^2 + 12\sqrt{3}y_3 - 16y_0^2 - 16y_2^2 - 16y_3^2 + 12y_2 - 9 = 0$$

$$4r_3^2 - 12\sqrt{3}y_3 - 16y_0^2 - 16y_2^2 - 16y_3^2 + 12y_2 - 9 = 0$$

L'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD pour $r_3 = 5$ sont donnés comme suit :

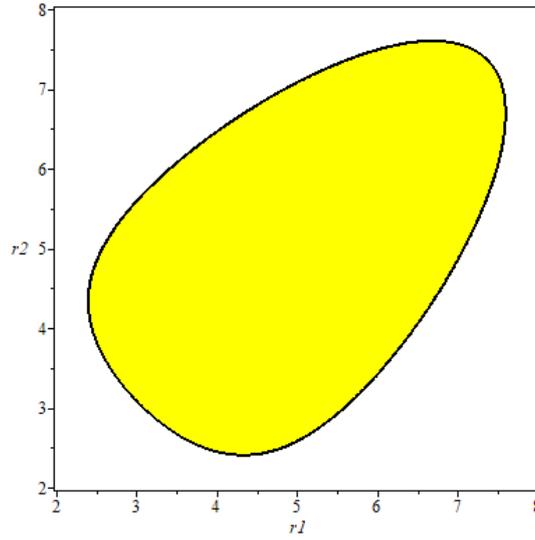


FIGURE 2.12 – Mode opératoire \mathcal{K}_2 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0 solution réelle

⑤ $\mathcal{K}_3 = \mathcal{V}(y_0, y_1, x_2, x_3)$. À partir des expressions (2.9) et (2.11), la matrice de rotation R et le vecteur de translation t s'écrivent :

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_0^2 + x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_0^2 - x_1^2 & -2x_0x_1 \\ 0 & 2x_0x_1 & x_0^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad t(\underline{x}, \underline{y}) = -2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_0y_2 - x_1y_3 \\ x_0y_3 + x_1y_2 \end{bmatrix}.$$

Les équations du PGD s'écrivent donc comme suit :

$$4r_1^2 - 5x_0^4 + 8x_0^3y_3 - 10x_0^2x_1^2 - 8x_0^2x_1y_2 - 16x_0^2y_2^2 - 16x_0^2y_3^2 + 8x_0x_1^2y_3 - 5x_1^4 - 8x_1^3y_2 - 16x_1^2y_2^2 - 16x_1^2y_3^2 + 12x_0^2 - 16x_0y_3 + 4x_1^2 - 16x_1y_2 - 8 = 0$$

$$4r_2^2 + 4\sqrt{3}x_0^3y_2 + 4\sqrt{3}x_1y_3x_0^2 + 4\sqrt{3}x_0y_2x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1^3y_3 - 5x_0^4 - 4x_0^3y_3 - 10x_0^2x_1^2 + 4x_1y_2x_0^2 - 16x_0^2y_2^2 - 16x_0^2y_3^2 - 4x_0y_3x_1^2 - 5x_1^4 + 4x_1^3y_2 - 16x_1^2y_2^2 - 16x_1^2y_3^2 - 8\sqrt{3}x_0y_2 + 8\sqrt{3}x_1y_3 + 12x_0^2 + 8x_0y_3 + 4x_1^2 + 8x_1y_2 - 8 = 0$$

$$4r_3^2 - 4\sqrt{3}x_0^3y_2 - 4\sqrt{3}x_1y_3x_0^2 - 4\sqrt{3}x_0y_2x_1^2 - 4\sqrt{3}x_1^3y_3 - 5x_0^4 - 4x_0^3y_3 - 10x_0^2x_1^2 + 4x_1y_2x_0^2 - 16x_0^2y_2^2 - 16x_0^2y_3^2 - 4x_0y_3x_1^2 - 5x_1^4 + 4x_1^3y_2 - 16x_1^2y_2^2 - 16x_1^2y_3^2 + 8\sqrt{3}x_0y_2 - 8\sqrt{3}x_1y_3 + 12x_0^2 + 8x_0y_3 + 4x_1^2 + 8x_1y_2 - 8 = 0$$

$$x_0^2 + x_1^2 - 1 = 0$$

Et nous avons l'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD pour $r_3 = 5$.

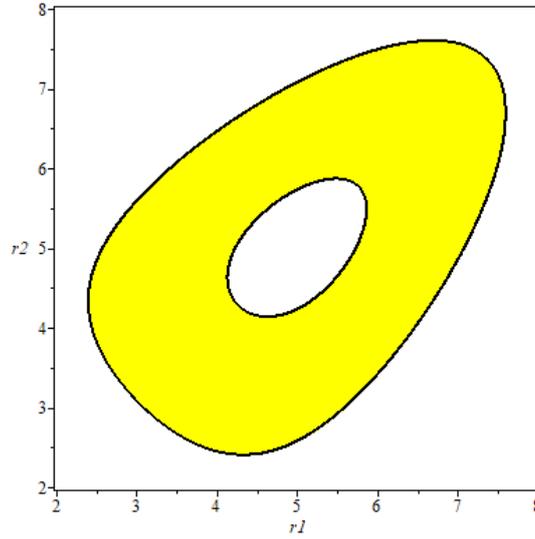


FIGURE 2.13 – Mode opératoire \mathcal{K}_3 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Région blanche : 0 solution réelle, Ailleurs : 0 solution réelle

- ④ $\mathcal{K}_4 = \mathcal{V}(y_3, y_2, x_1, x_0)$. Des expressions (2.9) et (2.11), on écrit la matrice de rotation R et le vecteur de translation t :

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -x_2^2 - x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ 0 & 2x_2x_3 & -x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad t(\underline{x}, \underline{y}) = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ x_2y_0 - x_3y_1 \\ x_2y_1 + x_3y_0 \end{bmatrix}.$$

On obtient donc les équations du PGD comme suit :

$$4r_1^2 - 5x_2^4 + 8x_2^3y_1 - 10x_2^2x_3^2 - 8x_2^2x_3y_0 - 16x_2^2y_0^2 - 16x_2^2y_1^2 + 8x_2x_3^3y_1 - 5x_3^4 - 8x_3^3y_0 - 16x_3^2y_0^2 - 16x_3^2y_1^2 + 4x_2^2 + 16x_2y_1 + 12x_3^2 + 16x_3y_0 - 8 = 0$$

$$4r_2^2 - 4\sqrt{3}x_2^3y_0 - 4\sqrt{3}x_3y_1x_2^2 - 4\sqrt{3}x_2y_0x_3^2 - 4\sqrt{3}x_3^3y_1 - 5x_2^4 - 4x_2^3y_1 - 10x_2^2x_3^2 + 4x_3y_0x_2^2 - 16x_2^2y_0^2 - 16x_2^2y_1^2 - 4x_2y_1x_3^2 - 5x_3^4 + 4x_3^3y_0 - 16x_3^2y_0^2 - 16x_3^2y_1^2 - 4\sqrt{3}x_2x_3 + 8\sqrt{3}x_2y_0 - 8\sqrt{3}x_3y_1 + 10x_2^2 - 8x_2y_1 + 6x_3^2 - 8x_3y_0 - 8 = 0$$

$$4r_3^2 + 4\sqrt{3}x_2^3y_0 + 4\sqrt{3}x_3y_1x_2^2 + 4\sqrt{3}x_2y_0x_3^2 + 4\sqrt{3}x_3^3y_1 - 5x_2^4 - 4x_2^3y_1 - 10x_2^2x_3^2 + 4x_3y_0x_2^2 - 16x_2^2y_0^2 - 16x_2^2y_1^2 - 4x_2y_1x_3^2 - 5x_3^4 + 4x_3^3y_0 - 16x_3^2y_0^2 - 16x_3^2y_1^2 + 4\sqrt{3}x_2x_3 - 8\sqrt{3}x_2y_0 + 8\sqrt{3}x_3y_1 + 10x_2^2 - 8x_2y_1 + 6x_3^2 - 8x_3y_0 - 8 = 0$$

$$x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Et nous avons l'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD. Dans le souci de visualiser un peu clairement les régions à 8 solutions réelles, nous prenons $r_3 = 4$ au lieu de 5 comme dans les autres cas.

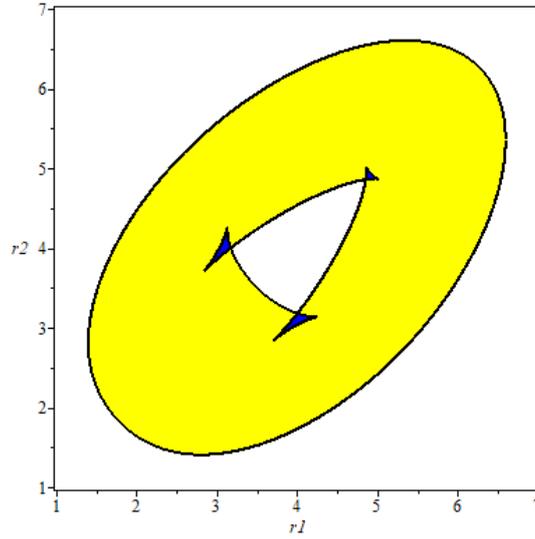


FIGURE 2.14 – Mode opératoire \mathcal{K}_4 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 4$. Régions bleues : 4 solutions réelles, Région jaune : 2 solutions réelles, Région blanche : 0 solution réelle, Ailleurs : 0 solution réelle

- ⑤ $\mathcal{K}_5 = \mathcal{V}(y_3, y_2, y_1, x_0)$. La matrice de rotation R et le vecteur de translation se déduisent des expressions (2.9) et (2.11) :

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$t(\underline{x}, \underline{y}) = 2y_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

On a ci-dessous les équations du PGD :

$$4r_1^2 - 5x_1^4 - 10x_1^2x_2^2 - 10x_1^2x_3^2 - 8x_1^2x_3y_0 - 16x_1^2y_0^2 - 5x_2^4 - 10x_2^2x_3^2 - 8x_2^2x_3y_0 - 16x_2^2y_0^2 - 5x_3^4 - 8x_3^3y_0 - 16x_3^2y_0^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 12x_3^2 + 16x_3y_0 - 8 = 0$$

$$4r_2^2 - 4\sqrt{3}x_1^2y_0x_2 - 4\sqrt{3}x_2^3y_0 - 4\sqrt{3}x_2y_0x_3^2 - 5x_1^4 - 10x_1^2x_2^2 - 10x_1^2x_3^2 + 4x_3y_0x_1^2 - 16x_1^2y_0^2 - 5x_2^4 - 10x_2^2x_3^2 + 4x_3y_0x_2^2 - 16x_2^2y_0^2 - 5x_3^4 + 4x_3^3y_0 - 16x_3^2y_0^2 - 4\sqrt{3}x_2x_3 + 8\sqrt{3}x_2y_0 + 4x_1^2 + 10x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_3y_0 - 8 = 0$$

$$4r_3^2 + 4\sqrt{3}x_1^2y_0x_2 + 4\sqrt{3}x_2^3y_0 + 4\sqrt{3}x_2y_0x_3^2 - 5x_1^4 - 10x_1^2x_2^2 - 10x_1^2x_3^2 + 4x_3y_0x_1^2 - 16x_1^2y_0^2 - 5x_2^4 - 10x_2^2x_3^2 + 4x_3y_0x_2^2 - 16x_2^2y_0^2 - 5x_3^4 + 4x_3^3y_0 - 16x_3^2y_0^2 + 4\sqrt{3}x_2x_3 - 8\sqrt{3}x_2y_0 + 4x_1^2 + 10x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_3y_0 - 8 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Et nous avons l'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD pour $r_3 = 5$.

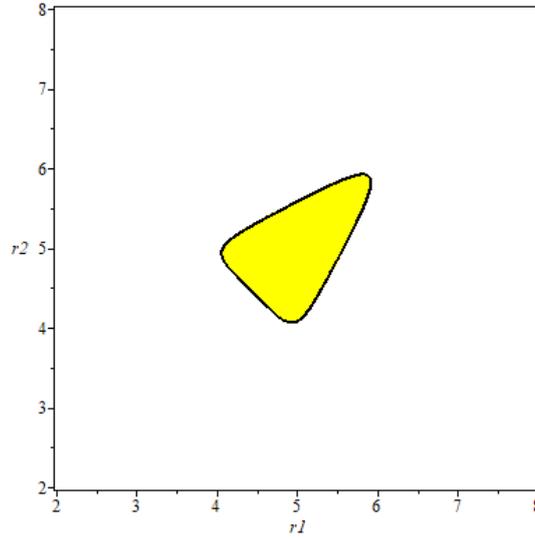


FIGURE 2.15 – Mode opératoire \mathcal{K}_5 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0 solution réelle

- ⑥ $\mathcal{K}_6 = \mathcal{V}(y_3, y_2, y_0, x_1)$. Des expressions (2.9) et (2.11), on écrit la matrice de rotation R et le vecteur de translation t :

$$R(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_0^2 - x_2^2 - x_3^2 & -2x_0x_3 & 2x_0x_2 \\ 2x_0x_3 & x_0^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ -2x_0x_2 & 2x_2x_3 & x_0^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$t(\underline{x}, \underline{y}) = 2y_1 \begin{bmatrix} -x_0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Les équations définissant le PGD sont les suivantes :

$$4r_1^2 - 5x_0^4 - 10x_0^2x_2^2 + 8x_0^2x_2y_1 - 10x_0^2x_3^2 - 16x_0^2y_1^2 - 5x_2^4 + 8x_2^3y_1 - 10x_2^2x_3^2 - 16x_2^2y_1^2 + 8x_2x_3^2y_1 - 5x_3^4 - 16x_3^2y_1^2 + 12x_0^2 + 4x_2^2 + 16x_2y_1 + 12x_3^2 - 8 = 0$$

$$4r_2^2 - 4\sqrt{3}x_0^2y_1x_3 - 4\sqrt{3}x_3y_1x_2^2 - 4\sqrt{3}x_3^3y_1 - 5x_0^4 - 10x_0^2x_2^2 - 4x_2y_1x_0^2 - 10x_0^2x_3^2 - 16x_0^2y_1^2 - 5x_2^4 - 4x_2^3y_1 - 10x_2^2x_3^2 - 16x_2^2y_1^2 - 4x_2y_1x_3^2 - 5x_3^4 - 16x_3^2y_1^2 - 4\sqrt{3}x_2x_3 - 8\sqrt{3}x_3y_1 + 12x_0^2 + 10x_2^2 - 8x_2y_1 + 6x_3^2 - 8 = 0$$

$$4r_3^2 + 4\sqrt{3}x_0^2y_1x_3 + 4\sqrt{3}x_3y_1x_2^2 + 4\sqrt{3}x_3^3y_1 - 5x_0^4 - 10x_0^2x_2^2 - 4x_2y_1x_0^2 - 10x_0^2x_3^2 - 16x_0^2y_1^2 - 5x_2^4 - 4x_2^3y_1 - 10x_2^2x_3^2 - 16x_2^2y_1^2 - 4x_2y_1x_3^2 - 5x_3^4 - 16x_3^2y_1^2 + 4\sqrt{3}x_2x_3 + 8\sqrt{3}x_3y_1 + 12x_0^2 + 10x_2^2 - 8x_2y_1 + 6x_3^2 - 8 = 0$$

$$x_0^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

L'ensemble des valeurs critiques du AGI et le nombre des solutions réelles au PGD pour $r_3 = 5$ sont :

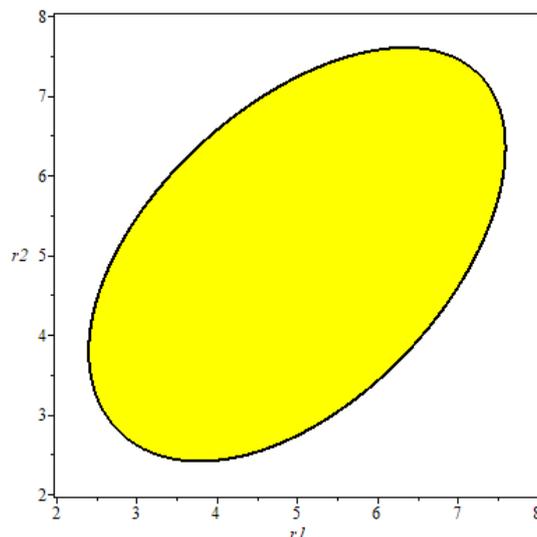


FIGURE 2.16 – Mode opératoire \mathcal{K}_6 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5$. Région jaune : 2 solutions réelles, Ailleurs : 0 solution réelle

2.6.2.3 PGD du Tsai 3-UPU

Ici nous empruntons la même démarche que pour la résolution du PGD du SNU 3-UPU. Les quatre premiers modes opératoires du Tsai 3-UPU étant les mêmes que ceux du SNU 3-UPU, nous ne nous intéresserons qu’au dernier, \mathcal{L}_5 , le mode général.

Contrairement aux cas précédents, nous n’avons pas pu décrire les solutions aux PGD dans une tranche de l’espace articulaire pour une valeur donnée de r_3 à cause de la complexité des calculs. Nous verrons dans la suite que la dégénérescence permet de résoudre simplement ce problème.

Pour $r_3 = 10$, nous allons donc décrire les solutions au PGD sur la droite donnée par $r_1 = r_3 + k$ et $r_2 = r_3 + 2k$ où $k \in \mathbb{R}$ de l’espace articulaire. Nous obtenons donc le résultat ci-dessous.

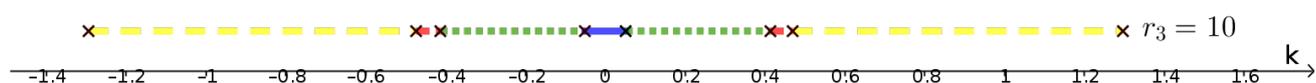


FIGURE 2.17 – Mode général du Tsai 3-UPU, PGD pour $r_3 = 10$. Intervalle en couleur bleue : 12, Intervalle en couleur verte : 8, Intervalle en couleur rouge : 4, Intervalle en couleur jaune : 2.

Deuxième partie

Contributions

Compactifications et analyse dégénérée des mécanismes robotiques

Nous introduisons dans cette partie une compactification du groupe des déplacements de l'espace euclidien qui dérive de celle de Study et nous montrons qu'elle est isomorphe à une autre obtenue en prenant la clôture projective du sous-groupe des translations du groupe des déplacements. Nous donnons également les compactifications des espaces des configurations, des modes opératoires et des espaces articulaires des mécanismes robotiques parallèles. Le but d'introduire ces compactifications est d'étudier la dégénérescence du bord des espaces de configuration et des modes opératoires afin d'y obtenir des informations partielles sur le comportement cinématique des robots difficiles à analyser. Elles sont également utilisées pour l'étude de la dégénérescence du problème géométrique direct qui est beaucoup plus simple que le problème géométrique classique et donne une image assez fidèle du comportement du robot pour des longueurs des jambes suffisamment grandes. L'utilité des points aux bords pour les problèmes de la cinématique des robots est illustrée dans [CM15] et aussi dans [HSS13] pour un autre type de points à l'infini.

Pour ce faire, dans la section 3.1, nous modifions la compactification de Study en éclatant la quadrique de Study S le long du 3-plan E ; nous introduisons un revêtement de cette compactification dans la section 3.2. Nous donnons dans la section 3.3 une autre compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ (vue comme le produit semi-direct des groupes de rotations et des translations) en prenant la clôture projective du sous-groupe des translations puis dans la section 3.4, nous montrons qu'elle est isomorphe à la nouvelle compactification dérivant de celle de Study. La section 3.5 étudie les compactifications des espaces de configurations et des modes opératoires de quelques robots parallèles ainsi que leur comportement cinématique aux bords de leur espace des configurations et modes opératoires. Nous terminons dans la section 3.6 par l'étude de la dégénérescence des problèmes géométriques directs de ces robots.

3.1 Éclatement de S le long du 3-plan E

Le 3-plan E d'équations $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (2.15) peut être vu comme le bord de $SE_3(\mathbb{R})$ dans la quadrique de Study S . Ce bord est composé des limites des déplacements quand la norme du vecteur de translation tend vers l'infini. Dans ce bord, toutes les informations sur la partie rotation du déplacement sont perdues. Afin d'éviter la perte d'information sur la partie rotation du déplacement,

nous allons éclater la quadrique de Study S (2.14) le long de E . Ce qui conduit donc à une nouvelle compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ dans laquelle le bord de $SE_3(\mathbb{R})$ est de dimension 5 alors que E est de dimension 3 et où les informations sur la partie rotation y sont conservées.

Rappelons que l'éclatement d'une variété V donne une nouvelle variété qui est birationnelle à V (Section 1.3 du chapitre 1).

Afin de décrire plus précisément l'éclatement, nous introduisons des nouvelles variables homogènes $\underline{w} = w_0, w_1, w_2, w_3$. L'éclatement de S le long de E est la projection $\pi : Bl_E(S) \rightarrow S$ où

$$Bl_E(S) = \left\{ \left(\left[\underline{x}, \underline{y} \right], [\underline{w}] \right) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=0}^3 x_i y_i = 0, \sum_{i=0}^3 y_i w_i = 0 \right. \\ \left. x_i w_j - x_j w_i = 0 \text{ for } 0 \leq i < j \leq 3 \right\} \quad (3.1)$$

et π est la restriction de la projection sur le premier facteur.

$Bl_E(S)$ est une variété compacte de dimension 6. La restriction de π à $Bl_E(S) \setminus \pi^{-1}(E)$ est un isomorphisme sur $S \setminus E$ et donc $SE_3(\mathbb{R})$ peut être identifié avec $Bl_E(S) \setminus \pi^{-1}(E)$ et $\pi^{-1}(E)$ apparaît comme le bord de $SE_3(\mathbb{R})$ dans $Bl_E(S)$. Notons par

$$\beta : SE_3(\mathbb{R}) \cong S \setminus E \longrightarrow Bl_E(S) \setminus \pi^{-1}(E) \hookrightarrow Bl_E(S)$$

la compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ ainsi obtenue.

L'image inverse $\pi^{-1}(E)$ de E dans l'éclatement, c'est-à-dire le diviseur exceptionnel, est l'hyper-surface dans le produit des espaces projectifs $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (avec les coordonnées homogènes \underline{y} pour le premier facteur et \underline{w} pour le second) dont l'équation est

$$w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = 0. \quad (3.2)$$

Cette équation (3.2) ressemble à l'équation de la quadrique de Study (2.14) mais elles ne sont pas les mêmes car cette dernière est de bidegré (1, 1) et décrit une variété de dimension 5. Les coordonnées homogènes \underline{w} et \underline{y} donnent respectivement les informations par rapport à la rotation (de la manière dont les quaternions déterminent une rotation) et la direction du vecteur de translation par la formule (2.11) en remplaçant les \underline{x} par les \underline{w} correspondant. Plus précisément, la matrice de rotation et la direction de translation sont données par :

$$R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0^2 + w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & 2(w_1 w_2 - w_0 w_3) & 2(w_1 w_3 + w_0 w_2) \\ 2(w_1 w_2 + w_0 w_3) & w_0^2 - w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2(w_2 w_3 - w_0 w_1) \\ 2(w_1 w_3 - w_0 w_2) & 2(w_2 w_3 + w_0 w_1) & w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} w_0 y_1 - w_1 y_0 + w_2 y_3 - w_3 y_2 \\ w_0 y_2 - w_1 y_3 - w_2 y_0 + w_3 y_1 \\ w_0 y_3 + w_1 y_2 - w_2 y_1 - w_3 y_0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Si les \underline{w} et les \underline{y} sont normalisés respectivement par $\sum_{i=0}^3 w_i^2 = 1$ et $\sum_{i=0}^3 y_i^2 = 1$, alors le vecteur $u(\underline{w}, \underline{y})$ a pour norme 1. Cette normalisation est utile pour les calculs et conduit à une façon de décrire la compactification obtenue par éclatement au moyen d'un revêtement. Cette description va être détaillée dans le paragraphe suivant.

3.2 Un revêtement de la compactification de $SE_3(\mathbb{R})$

Soit $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ l'ensemble des $(\underline{w}, s, \underline{y})$ qui vérifie les équations et l'inégalité :

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1 & \|y\|^2 &= y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \\ w \cdot y &= w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = 0 & s &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'ensemble \tilde{S} est un ensemble semi-algébrique réel de dimension 6 qui s'envoie dans S via l'application $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow S$ définie par

$$(\underline{w}, s, \underline{y}) \longmapsto [w_0 s, w_1 s, w_2 s, w_3 s, y_0, y_1, y_2, y_3] \quad (3.6)$$

L'image de $\tilde{\pi}$ est le complémentaire dans S du 3-plan $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ (qui correspond aux déplacements dont le vecteur de translation est nul). Ainsi, tout déplacement de vecteur de translation non nul est l'image par $\tilde{\pi}$ de deux points $(\underline{w}, s, \underline{y})$ et $(-\underline{w}, s, -\underline{y})$ de \tilde{S} avec $s > 0$ et est l'inverse de la norme du vecteur de translation. L'image par $\tilde{\pi}$ d'un élément $(\underline{w}, 0, \underline{y})$ de \tilde{S} est l'élément $[0, 0, 0, 0, y_0, y_1, y_2, y_3]$ du 3-plan exceptionnel E . L'élément $(\underline{w}, 0, \underline{y})$ de \tilde{S} peut être vu comme la dégénérescence du déplacement associé au point $(\underline{w}, s, \underline{y})$ de \tilde{S} quand s tend vers 0, c'est-à-dire quand la longueur du vecteur de translation tend vers l'infini. Il conserve donc les informations sur la partie rotation en les coordonnées \underline{w} et sur la direction du vecteur de translation en les coordonnées \underline{w} et \underline{y} en remplaçant \underline{x} par \underline{w} dans la formule (2.11).

Notons que l'application $\tilde{\pi}$ se relève à l'éclatement $\text{Bl}_E(S)$ en envoyant $(\underline{w}, s, \underline{y})$ sur $([s\underline{w}], [\underline{y}], [\underline{w}])$. En particulier, en ce qui concerne le bord, il y a quatre éléments $(\pm\underline{w}, 0, \pm\underline{y})$ qui s'envoient sur le même élément $([\underline{y}], [\underline{w}])$ du bord. Le bord de \tilde{S} est l'hypersurface dans le produit de sphères $S^3 \times S^3$ d'équation $w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = 0$.

Rappelons que la compactification β est obtenue en remplaçant le 3-plan E par l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dans le cas du revêtement, le 3-plan E a été remplacé par la sphère unité réelle S^3 . Or S^3 est le revêtement double de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$: les points x et $-x$ de S^3 donnent le même point dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

3.3 Compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ vu comme $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$

Rappelons de la section 2.1 du chapitre 2 que :

- ✓ L'ensemble $SE_3(\mathbb{R})$ est une variété différentiable de dimension 6 (6 degrés de liberté),
- ✓ $SE_3(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie puisqu'il se plonge comme un ensemble fermé de $GL_4(\mathbb{R})$.

Aux propriétés ci-dessus s'ajoute le fait que le groupe $SE_3(\mathbb{R})$ peut également être vu comme le produit semi-direct, $SO_3(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ des groupes $SO_3(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^3 . Par conséquent, une autre compactification de $SE_3(\mathbb{R})$ peut être obtenue en compactifiant chacun de ses facteurs. Le groupe des rotations $SO_3(\mathbb{R})$ est compact et est isomorphe en tant que variété réelle à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ via l'application régulière $[\underline{x}] \mapsto \frac{1}{\Delta(\underline{x})}R(\underline{x})$ où R est la matrice de rotation définie dans (2.9). Nous pouvons aussi compactifier \mathbb{R}^3 et nous obtenons $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. On obtient donc la compactification suivante de $SE_3(\mathbb{R})$

$$\gamma : SE_3(\mathbb{R}) \cong SO_3(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) .$$

3.4 Comparaison des compactifications

Dans cette section, nous allons montrer que la compactification γ de $SE_3(\mathbb{R})$ vu comme $SO_3(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ est isomorphe à la compactification β obtenue en éclatant la quadrique de Study.

Soit σ le morphisme défini par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}^7(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ ([\underline{w}], [r, s, t, u]) &\longmapsto ([\underline{x}, \underline{y}], [\underline{w}]) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} x_0 = w_0 r & 2y_0 = -w_1 s - w_2 t - w_3 u \\ x_1 = w_1 r & 2y_1 = w_0 s + w_3 t - w_2 u \\ x_2 = w_2 r & 2y_2 = -w_3 s + w_0 t + w_1 u \\ x_3 = w_3 r & 2y_3 = w_2 s - w_1 t + w_0 u \end{cases} . \quad (3.7)$$

Théorème 3.4.0.1. *Les deux compactifications β et γ de $SE_3(\mathbb{R})$ sont isomorphes. Plus précisément, le morphisme σ induit un isomorphisme des variétés réelles (dans le sens du [BCR98]) $\sigma : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Bl}_E(S)$ tel que $\beta = \sigma \circ \gamma$.*

Démonstration. L'application σ est une application régulière bien définie. En effet, les formules (3.7) sont homogènes de bidegré (1, 1) et, puisque

$$\begin{aligned} (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)r &= w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \\ (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)s &= 2(-w_1 y_0 + w_0 y_1 - w_3 y_2 + w_2 y_3) \\ (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)t &= 2(-w_2 y_0 + w_3 y_1 + w_0 y_2 - w_1 y_3) \\ (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)u &= 2(-w_3 y_0 - w_2 y_1 + w_1 y_2 + w_0 y_3) , \end{aligned} \quad (3.8)$$

si tous les x_i et tous les y_i sont nuls, alors tous les w_i sont nuls ou $r = s = t = u = 0$, ce qui est impossible pour les coordonnées homogènes. De la formule (3.7) et de la description (3.1) du $\text{Bl}_E(S)$, il apparaît clair que l'image de σ est contenue dans $\text{Bl}_E(S)$. Afin de montrer que σ est un isomorphisme des variétés algébriques réelles de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ vers $\text{Bl}_E(S)$, nous montrons que le morphisme régulier

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{P}^7(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \supset \text{Bl}_E(S) &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \\ ([\underline{x}, \underline{y}], [\underline{w}]) &\longmapsto ([\underline{w}], [r, s, t, u]), \end{aligned}$$

défini par les formules homogènes de bidegré $(1, 1)$

$$\begin{aligned}
 r &= w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \\
 s &= 2(-w_1y_0 + w_0y_1 - w_3y_2 + w_2y_3) \\
 t &= 2(-w_2y_0 + w_3y_1 + w_0y_2 - w_1y_3) \\
 u &= 2(-w_3y_0 - w_2y_1 + w_1y_2 + w_0y_3) ,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

est l'inverse de σ . Le morphisme τ est bien défini sur $\text{Bl}_E(S)$. En effet les r, s, t, u données par les formules (3.9) ne peuvent pas s'annuler simultanément sur $\text{Bl}_E(S)$. Des formules (3.9) et de la proportionnalité des \underline{x} et \underline{w} ($w_ix_j = w_jx_i$), nous obtenons :

$$w_i r = (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)x_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, 3 \tag{3.10}$$

Par conséquent, si $r = 0$ alors $x_i = 0$ pour $i = 0, \dots, 3$.

Des formules (3.9) et $\sum_{i=0}^3 w_i y_i = 0$, nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned}
 -w_1s - w_2t - w_3u &= 2(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)y_0 \\
 w_0s + w_3t - w_2u &= 2(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)y_1 \\
 -w_3s + w_0t + w_1u &= 2(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)y_2 \\
 w_2s - w_1t + w_0u &= 2(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)y_3
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Par conséquent, si $s = t = u = 0$, alors $y_i = 0$ pour $i = 0, \dots, 3$. Comme les x_i et y_i ne peuvent s'annuler, cela montre que l'application τ est bien définie.

De plus, des équations (3.8), nous voyons que $\tau \circ \sigma$ est l'identité de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, alors que les équations (3.10) et (3.11) montrent que $\sigma \circ \tau$ est l'identité de $\text{Bl}_E(S)$.

Il ne reste qu'à montrer que $\beta = \sigma \circ \gamma$; cela est équivalent à montrer que $\gamma = \tau \circ \beta$. La dernière égalité apparait claire en comparant les formules (2.11) du vecteur de translation en fonction des paramètres de Study et les formules (3.9) pour τ , en prenant en compte le fait que les \underline{x} et les \underline{y} sont proportionnels sur $\beta(\text{SE}_3(\mathbb{R}))$. Ce qui conclut la preuve du théorème 3.4.0.1. \square

Dans la suite, nous utiliserons la compactification β de $\text{SE}_3(\mathbb{R})$, puisqu'elle est adaptée aux paramètres de Study, et les paramètres de Study sont très pratiques pour les calculs en cinématique.

3.5 Bords des espaces des configurations

Soit C un espace des configurations ou un mode opératoire d'un mécanisme. L'ensemble C est une sous-variété algébrique de la quadrique de Study S . Nous allons décrire le bord de C dans les compactifications de $\text{SE}_3(\mathbb{R})$, modifications de S , obtenues ci-haut (Sections 3.1 et 3.2). Par la suite, nous étudierons le bord des modes opératoires des manipulateurs déjà abordés ci-dessus en utilisant que la compactification $\text{Bl}_E(S)$. Un exemple d'utilisation de \tilde{S} se trouve dans [CD21].

3.5.1 Utilisation de $\text{Bl}_E(S)$

Considérons sa transformée stricte \tilde{C} dans l'éclatement $\pi : \text{Bl}_E(S) \rightarrow S$. C'est l'image réciproque $\pi^{-1}(C)$ de C avec toutes les composantes contenues dans $\pi^{-1}(E)$ enlevées. L'idéal de \tilde{C} est donc l'idéal obtenu après saturation de l'idéal engendré par les équations définissant C et les équations définissant $\text{Bl}_E(S)$ par rapport à $\Delta(\underline{x})$. Le bord de C est alors $\tilde{C} \cap \pi^{-1}(E)$. En posant $\underline{x} = 0$ dans les équations de \tilde{C} , nous obtenons des équations bihomogènes en $\underline{w}, \underline{y}$ pour le bord de C dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

3.5.2 Utilisation de \tilde{S}

Considérons un espace des configurations ou un mode opératoire $C \subset S$ d'un mécanisme comme précédemment et I l'idéal engendré par les équations de C . L'image inverse $\tilde{\pi}^{-1}(C)$ de C dans la modification \tilde{S} de S est obtenue en substituant les variables x_i par les variables w_i dans les générateurs de I et en ajoutant les équations de (3.5) dans la liste des générateurs. L'idéal I devient donc un idéal de l'anneau de polynômes à 9 indéterminées \underline{w}, s et \underline{y} .

Pour enlever de $\tilde{\pi}^{-1}(C)$ les composantes parasites entièrement contenues dans l'hyperplan défini par $s = 0$, nous saturons l'idéal I par rapport à s . Nous obtenons le nouvel idéal \tilde{I} , décrivant un sous-ensemble $\tilde{C} \subset \tilde{S}$. Les points $(\underline{w}, s, \underline{y})$ de \tilde{C} ayant $s > 0$ correspondent aux positions et orientations dans C ($(\underline{w}, s, \underline{y})$ et $(-\underline{w}, s, -\underline{y})$ donnent les mêmes position et orientation). Les points $(\underline{w}, s, \underline{y})$ peuvent donc être vus comme des positions et orientations dégénérées dans l'espace des configurations ou le mode opératoire C , quand les longueurs des jambes tendent vers l'infini. L'intersection de \tilde{C} avec l'hyperplan $s = 0$ forme le bord de C , plus exactement, un revêtement du bord de C . C'est un sous-ensemble algébrique de dimension $\dim C - 1$ du bord de \tilde{S} et se calcule donc en posant $s = 0$ dans l'équation déterminant \tilde{C} .

3.5.3 Bords des modes opératoires du 3-RPS

Nous allons calculer le bord pour chacun des modes opératoires de l'espace des configurations du 3-RPS séparément.

Considérons le mode opératoire \mathcal{J}_1 défini par l'idéal J_1 . Le bord de \mathcal{J}_1 se calcule comme indiqué

ci-dessus. Il est défini dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 0 \\
 w_1y_3 + w_2y_0 - w_3y_1 &= 0 \\
 w_1y_2 - w_2y_1 - w_3y_0 &= 0 \\
 w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 &= 0 \\
 w_2y_0y_2 + w_2y_1y_3 - w_3y_1y_2 + w_3y_0y_3 &= 0 \\
 w_2y_1^2 + w_2y_2^2 + w_3y_0y_1 + w_3y_2y_3 &= 0 \\
 w_2y_0y_1 - w_2y_2y_3 - w_3y_1^2 - w_3y_3^2 &= 0 \\
 y_0^2y_1 + y_1^3 + y_1y_2^2 + y_1y_3^2 &= 0
 \end{aligned}$$

et se décompose en deux composantes définies dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ par :

$$w_0 = 0, y_1 = 0, y_2w_2 + y_3w_3 = 0, y_3w_1 + y_0w_2 = 0, y_2w_1 - y_0w_3 = 0$$

et

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 0 \\
 w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 &= 0 \\
 w_1y_3 + w_2y_0 - w_3y_1 &= 0 \\
 w_1y_2 - w_2y_1 - w_3y_0 &= 0 \\
 w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 &= 0 \\
 w_1y_0 - w_2y_3 + w_3y_2 &= 0 \\
 y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 0 \\
 w_2y_0y_2 + w_2y_1y_3 - w_3y_1y_2 + w_3y_0y_3 &= 0 \\
 w_2y_1^2 + w_2y_2^2 + w_3y_0y_1 + w_3y_2y_3 &= 0 \\
 w_2y_0y_1 - w_2y_2y_3 - w_3y_1^2 - w_3y_3^2 &= 0
 \end{aligned}$$

La deuxième composante n'a pas de points réels dans le produit des espaces projectifs $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Ainsi le bord \mathfrak{J}_1 de \mathcal{J}_1 est la sous-variété de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ décrit par les équations suivantes :

$$w_0 = 0, y_1 = 0, w_2y_2 + w_3y_3 = 0, w_1y_3 + w_2y_0 = 0, w_1y_2 - w_3y_0 = 0 \quad (3.12)$$

En procédant de la même manière, on obtient le bord \mathfrak{J}_2 de \mathcal{J}_2 qui est la sous-variété de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ décrit par :

$$w_1 = 0, y_0 = 0, w_2y_2 + w_3y_3 = 0, w_0y_3 - w_2y_1 = 0, w_0y_2 + w_3y_1 = 0. \quad (3.13)$$

Chacun de ces deux bords \mathfrak{J}_1 et \mathfrak{J}_2 est isomorphe à un plan projectif. Pour \mathfrak{J}_1 , nous pouvons choisir les coordonnées projectives $[w_1, w_2, w_3]$, et alors prendre $y_0 = w_1, y_2 = w_3, y_3 = -w_2$. De même, pour \mathfrak{J}_2 , où nous pouvons choisir les coordonnées projectives $[w_0, w_2, w_3]$, et alors prendre $y_1 = w_0, y_2 = -w_3, y_3 = w_2$. L'intersection de \mathfrak{J}_1 et \mathfrak{J}_2 est une droite projective ayant pour coordonnées

homogènes $[w_2, w_3]$. Les composantes \mathfrak{J}_1 et \mathfrak{J}_2 s'échangent en composant par un demi-tour d'axe vertical. Ceci se traduit par la transformation $w_1 \mapsto -w_0, w_2 \mapsto w_3, w_3 \mapsto -w_2$ de \mathfrak{J}_1 vers \mathfrak{J}_2 . Les points de \mathfrak{J}_1 peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour et une translation infinie dans la direction verticale. Ceux de \mathfrak{J}_2 peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par une rotation d'axe horizontal et une translation infinie dans la direction verticale. Les points de l'intersection peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour d'axe horizontal et une translation infinie dans la direction verticale.

Cette étude de l'espace des configurations du 3-RPS montre que les dégénérescences à l'infini de ces deux modes opératoires ont une description cinématique simple.

3.5.4 Bords des modes opératoires du SNU 3-UPU

En utilisant la méthode décrite ci-haut (voir 3.5.1), le bord de l'espace des configurations est la sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ définie par les équations bihomogènes suivantes :

$$\begin{aligned} w_2 y_3 + w_3 y_2 = 0, w_2 y_2 - w_3 y_3 = 0, w_1 y_1 + w_3 y_3 = 0, w_0 y_0 + w_3 y_3 = 0, \\ w_3 y_2^2 + w_3 y_3^2 = 0, y_0 y_1 y_2^2 + y_0 y_1 y_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Il se décompose en les composantes suivantes :

- ✓ $\mathfrak{K}_0 : y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$
- ✓ $\mathfrak{K}_1 : y_0 = 0, w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0$
- ✓ $\mathfrak{K}_2 : w_0 = 0, y_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0$
- ✓ $\mathfrak{K}_3 : y_0 = 0, y_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0$
- ✓ $\mathfrak{K}_4 : w_0 = 0, w_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$
- ✓ $\mathfrak{K}_5 : w_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$
- ✓ $\mathfrak{K}_6 : y_0 = 0, w_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$
- ✓ $\mathfrak{K}_7 : w_2^2 + w_3^2 = 0, w_2 y_3 + w_3 y_2 = 0, w_2 y_2 - w_3 y_3 = 0, w_1 y_1 + w_3 y_3 = 0, w_0 y_0 + w_3 y_3 = 0, y_2^2 + y_3^2 = 0$

Les composantes du bords \mathfrak{K}_0 et \mathfrak{K}_7 peuvent être éliminées car la première est vide (puisque les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sont non toutes nulles) et la dernière est complexe et ses points réels sont contenus dans les six autres composantes. Nous donnons ci-dessous la description de ces six autres modes opératoires dégénérés.

- ✓ \mathfrak{K}_1 est un 2-plan projectif avec coordonnées homogènes $[y_1, y_2, y_3]$. Ses éléments peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par une translation infinie.
- ✓ \mathfrak{K}_2 est un 2-plan projectif avec coordonnées homogènes $[y_0, y_2, y_3]$. Ses éléments peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour d'axe vertical et une translation infinie.

- ✓ \mathfrak{K}_3 est le produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ de coordonnées homogènes $[w_0, w_1] \times [y_2, y_3]$. Ses éléments peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par une rotation d'axe vertical et une translation horizontale infinie. La plateforme reste donc dans le plan de la base, et on se trouve dans la situation du 3-RPR plan [Cos12].
- ✓ \mathfrak{K}_4 est le produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ de coordonnées homogènes $[w_2, w_3] \times [y_0, y_1]$. Ses éléments peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour d'axe horizontal et une translation horizontale infinie. C'est donc les positions et orientations dégénérées du 3-RPR avec la plateforme renversée.
- ✓ \mathfrak{K}_5 est un 2-plan projectif avec coordonnées homogènes $[w_1, w_2, w_3]$. Ses éléments peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour et une translation infinie parallèle à l'axe du demi-tour.
- ✓ \mathfrak{K}_6 est un 2-plan projectif avec coordonnées homogènes $[w_0, w_2, w_3]$. Ses éléments peuvent être vus comme des positions et orientations dégénérées obtenues par un demi-tour d'axe vertical suivi d'un « déplacement » comme dans \mathfrak{K}_5 . La partie rotation de ce déplacement (composée des deux demi-tours) est une rotation d'axe horizontal.

3.5.5 Bords des modes opératoires du Tsai 3-UPU

Puisque les quatre premiers modes opératoires du Tsai 3-UPU sont les mêmes que ceux du SNU 3-UPU, nous ne nous intéresserons qu'au dernier, le mode général. Le bord du mode opératoire général du Tsai 3-UPU est donc défini par :

$$w_2y_3 + w_3y_2 = 0, w_2y_2 - w_3y_3 = 0, w_1y_1 + w_3y_3 = 0, w_0y_0 + w_3y_3 = 0, \\ y_2^2 + y_3^2 = 0, w_2^2y_0y_1 + w_3^2y_0y_1 = 0 \quad (3.15)$$

Le bord du mode opératoire général ci-dessus n'est pas une sous-variété irréductible de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mais se décompose en trois composantes

- ✓ \mathfrak{L}_5 défini par les équations $w_0 = 0, y_3 = 0, y_2 = 0, y_1 = 0$. Nous remarquons que \mathfrak{L}_5 est aussi le bord du mode opératoire \mathfrak{K}_5 du SNU 3-UPU.
- ✓ \mathfrak{L}_6 défini par les équations $w_1 = 0, y_3 = 0, y_2 = 0, y_0 = 0$. Nous remarquons aussi que \mathfrak{L}_6 est le bord du mode opératoire \mathfrak{K}_6 du SNU 3-UPU.
- ✓ \mathfrak{L}_7 défini par les équations

$$w_2^2 + w_3^2 = 0, w_2y_3 + w_3y_2 = 0, w_2y_2 - w_3y_3 = 0, w_1y_1 + w_3y_3 = 0, \\ w_0y_0 + w_3y_3 = 0, y_2^2 + y_3^2 = 0 \quad (3.16)$$

Le bord \mathfrak{L}_7 est non réel et est aussi le bord \mathfrak{K}_7 du SNU 3-UPU. Ses points réels sont seulement deux points singuliers : l'un dans \mathfrak{L}_5 et l'autre \mathfrak{L}_6 .

On voit dans cet exemple comment la dégénérescence au bord peut donner des informations sur le comportement cinématique d'un mode opératoire difficile à analyser : on sait à quoi ressemblent les déplacements dans ce mode opératoire, lorsque les longueurs des jambes deviennent de plus en plus grandes.

3.6 Problème géométrique direct dégénéré de quelques robots parallèles

Dans cette section nous considérons le **problème géométrique direct dégénéré** (PGDD) de quelques manipulateurs parallèles à trois ou quatre degrés de liberté. Nous parlons de PGDD lorsque les longueurs des jambes tendent vers l'infini. Pour résoudre ce type de problème, nous avons besoin de considérer les bords des espaces des configurations et des espaces articulaires. Nous savons déjà comment déterminer les bords des espaces des configurations dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (voir section 3.5). Nous allons aussi déterminer les bords des espaces articulaires.

3.6.1 Bords des espaces articulaires des manipulateurs à trois degrés de liberté

On pourrait penser à considérer simplement $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ comme une compactification de l'espace articulaire. Malheureusement nous ne pouvons pas le faire ainsi car tous les points de coordonnées homogènes $(r_1, r_2, r_3, 1)$ tendraient vers $(1, 1, 1, 0)$ qui est de dimension 0.

En effet, pour $r_3 \neq 0$, on a

$$[r_1, r_2, r_3, 1] = \left[\frac{r_1}{r_3}, \frac{r_2}{r_3}, 1, \frac{1}{r_3} \right].$$

Quand les longueurs des jambes tendent vers l'infini, leurs différences restent bornées. Par conséquent les rapports $\frac{r_1}{r_3}, \frac{r_2}{r_3}$ tendent vers 1. D'où $[r_1, r_2, r_3, 1]$ tend vers $[1, 1, 1, 0]$ lorsque r_3 tend vers l'infini. Nous allons donc éclater le point $[1, 1, 1, 0]$ qui représente le bord de l'espace articulaire dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dans la carte affine $r_3 \neq 0$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, nous avons les coordonnées affines $\left(\frac{r_1}{r_3}, \frac{r_2}{r_3}, \frac{1}{r_3} \right) \in \mathbb{R}^3$ qui tendent vers $(1, 1, 0)$ et après translation pour se ramener au point $(0, 0, 0)$, deviennent

$$\left(\frac{r_1 - r_3}{r_3}, \frac{r_2 - r_3}{r_3}, \frac{1}{r_3} \right) \in \mathbb{R}^3,$$

donc proportionnelles à

$$(r_1 - r_3, r_2 - r_3, 1)$$

Faisons donc le changement de variables $d_1 = r_1 - r_3$, $d_2 = r_2 - r_3$ et passons à la limite quand r_3 tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} d_1 &= \lim_{r_3 \rightarrow \infty} (r_1 - r_3) \\ d_2 &= \lim_{r_3 \rightarrow \infty} (r_2 - r_3) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Plus précisément, nous plongeons $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ de variables (d_1, d_2, r_3) dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et nous prenons $\mathbb{R}^2 \times \{\infty\}$ comme le bord de l'espace articulaire.

Nous pouvons donc maintenant décrire l'**application géométrique inverse dégénérée** (AGID) définie du bord de l'espace des configurations (de variables homogènes $\underline{w}, \underline{y}$) vers le bord de l'espace articulaire (de variables articulaires d_1, d_2). Nous pouvons procéder de deux manières :

Première approche : Comme les jambes deviennent parallèles au vecteur de translation lorsque leurs longueurs tendent vers l'infini, les limites des différences des longueurs des jambes sont, au signe près, les différences des produits scalaires des vecteurs $A_i R(\underline{w}) \cdot b_i$ avec le vecteur unitaire $u(\underline{w}, \underline{y})$ donnant la direction de la translation infinie :

$$\begin{aligned} d_1 &= (R(\underline{w})b_1 - A_1) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) - (R(\underline{w})b_3 - A_3) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) \\ d_2 &= (R(\underline{w})b_2 - A_2) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) - (R(\underline{w})b_3 - A_3) \cdot u(\underline{w}, \underline{y}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le PGDD est donc de résoudre par rapport aux variables w_i et y_i le système composé des équations du 3.18 et les équations de normalisation des coordonnées \underline{w} et \underline{y}

Dans la discussion des solutions du PGDD, nous devons prendre en compte le fait que les signes de d_1 et d_2 dépendent de l'orientation de u . Une étude du PGDD pour un manipulateur parallèle plan (3-RPR) a été faite dans [Cos12].

Deuxième approche : Nous nous plaçons dans \tilde{S} en effectuant un changement de variables du genre $y_j = sy_j, j = 0, \dots, 4$, et pour tout $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} r_i &= \|A_i B_i\| \\ &= \frac{1}{s} \|s R(\underline{w}) b_i + u(\underline{w}, \underline{y}) - s a_i\| \\ &= \frac{1}{s} \sqrt{\|u(\underline{w}, \underline{y})\|^2 + 2s u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_i - a_i) + s^2 \|R(\underline{w}) b_i - a_i\|^2} \\ &= \frac{1}{s} \sqrt{1 + 2s u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_i - a_i) + s^2 \|R(\underline{w}) b_i - a_i\|^2} \end{aligned}$$

car $u(\underline{w}, \underline{y})$ est unitaire.

Au voisinage de 0, à l'ordre 2, nous avons :

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{2} \left[2s u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_i - a_i) + s^2 \|R(\underline{w}) b_i - a_i\|^2 \right] - \frac{1}{8} \left(2s u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_i - a_i) \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{s} + u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_i - a_i) + \frac{s}{2} \left(\|R(\underline{w}) b_i - a_i\|^2 - \left(u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_i - a_i) \right)^2 \right) + o(s) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ainsi, pour tout $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} r_j - r_3 &= u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (b_j - b_3) - (a_j - a_3)) + \frac{s}{2} \left(\|R(\underline{w}) b_j - a_j\|^2 - \|R(\underline{w}) b_3 - a_3\|^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_3 - a_3) \right)^2 - \left(u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) b_j - a_j) \right)^2 \right) + o(s) \end{aligned}$$

et par suite, nous avons

$$\lim_{s \rightarrow 0} (r_j - r_3) = u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (b_j - b_3) - (a_j - a_3)) .$$

Ainsi, comme dans (3.18), nous avons obtenu les limites d_j de la différence des longueurs des jambes r_i :

$$d_j = u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (b_j - b_3) - (a_j - a_3)), \quad j = 1, 2. \quad (3.20)$$

3.6.2 PGDD du 3-RPS

Dans cette sous-section, nous étudierons le PGDD du 3-RPS et nous comparerons le nombre des solutions et le lieu des valeurs critiques au PGD pour des longueurs des jambes devenant de plus en plus grandes. Nous ferons donc les études dans chacun des bords des deux modes opératoires de l'espace des configurations.

- ❶ Bord \mathfrak{J}_1 : Comme décrit ci-dessus (voir section 3.5.3), \mathfrak{J}_1 est un 2-plan projectif ayant pour coordonnées homogènes $[w_1, w_2, w_3]$. La direction de translation et la matrice de rotation sont données à partir de (3.3) et (3.4) par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & 2w_1w_2 & 2w_1w_3 \\ 2w_1w_2 & -w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2w_2w_3 \\ 2w_1w_3 & 2w_2w_3 & -w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Nous normalisons les coordonnées homogènes de sorte que $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$.

Le PGDD consiste donc à résoudre le système d'équations suivant issu de (3.18) et de l'équation de normalisation, pour les variables w_1, w_2, w_3 :

$$d_1 = \frac{3}{2}w_1w_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}w_1w_2 \quad d_2 = \sqrt{3}w_1w_2 \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1.$$

Notons que les solutions opposées du système donnent la même solution au PGDD.

Comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises dans la résolution du PGD classique, nous allons utiliser encore l'algorithme de DCA (1.5.2) implémentée dans SIROPA [SIR] (une librairie de Maple) pour définir les régions connexes de l'espace articulaire dégénéré où il existe un nombre constant de solutions réelles au PGDD. Nous allons comparer en même temps le PGD pour des valeurs de plus en plus grandes de r_3 fixées.

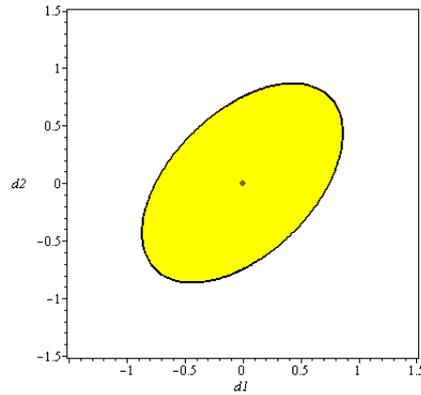


FIGURE 3.1 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{J}_1 du 3-RPS. Région jaune : 2 solutions réelles

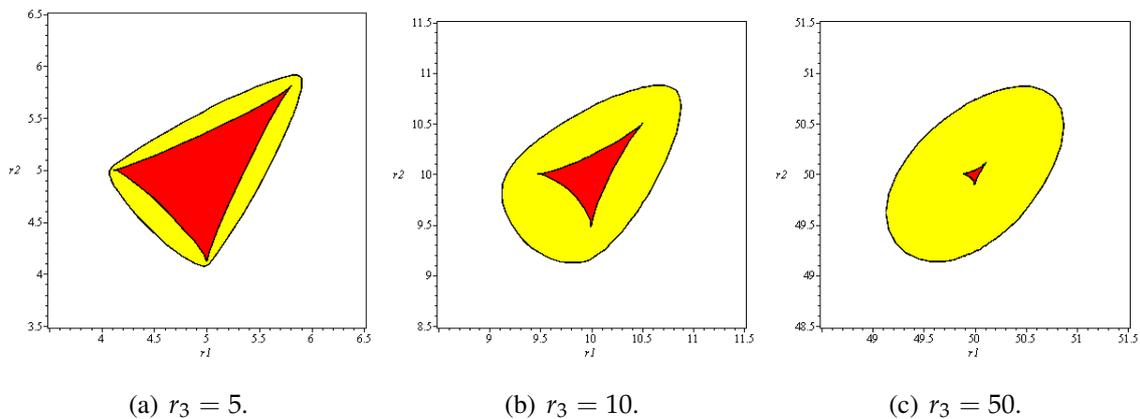


FIGURE 3.2 – Mode opératoire \mathcal{J}_1 du 3-RPS, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 4 solutions réelles, Régions rouges : 8 solutions réelles

Dans la figure 3.1, le PGDD admet deux solutions à l'intérieur de l'ellipse dont l'équation est donnée par

$$d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 = \frac{9}{16}$$

excepté l'origine ($d_1 = d_2 = 0$), et aucune solution réelle en dehors de l'ellipse. L'ensemble des valeurs critiques est donc l'ellipse union l'origine où le PGDD a une infinité de solutions réelles : une solution est donnée par $w_2 = w_3 = 0$ (demi-tour d'axe vertical) et une droite projective de solutions $w_1 = 0$ (toutes les rotations d'axe horizontal). Cette droite projective de solutions est l'intersection des bords \mathfrak{J}_1 et \mathfrak{J}_2 , et cette intersection est en fait un **auto-mouvement dégénéré** de la plateforme pour le cas non dégénéré.

La figure 3.2 représente l'ensemble des valeurs critiques de l'AGI pour les valeurs croissantes de r_3 : 5, 10, 50. Nous observons clairement que le deltoïde se réduit à un point lorsque r_3 tend vers l'infini donnant ainsi à la limite, l'image du PGDD (voir fig. 3.1).

On observe aussi une différence de solutions entre les deux cas (4 pour le PGD et 2 pour le PGDD dans la région jaune). Dans le cas des solutions du PGD, les configurations sont

symétriques par rapport au plan de la base. Puisque le vecteur u est toujours pointé vers le haut, les solutions au PGD où la plateforme est sous le plan de la base donne à la limite les valeurs opposés de d_1 et d_2 dans la formule (3.18).

Ainsi, nous voyons que le PGD pour des longueurs de jambes suffisamment grandes est une perturbation du PGDD, très simple. La singularité à l'origine vue dans le cas du PGDD n'est pas stable et donne le deltoïde que l'on voit dans la perturbation.

- ② Bord \mathfrak{J}_2 : Le bord \mathfrak{J}_1 étant un 2-plan projectif de coordonnées homogènes $[w_0, w_2, w_3]$, la direction de translation et la matrice de rotation sont données à partir de (3.3) et (3.4) par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} -w_0^2 - w_2^2 - w_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0^2 - w_2^2 - w_3^2 & -2w_0w_3 & 2w_0w_2 \\ 2w_0w_3 & w_0^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2w_2w_3 \\ -2w_0w_2 & 2w_2w_3 & w_0^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Comme dans le premier cas, nous obtenons les équations du PGDD suivantes :

$$d_1 = -\frac{3}{2}w_0w_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}w_0w_3 \quad d_2 = \sqrt{3}w_0w_3 \quad w_0^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1 = 0.$$

En utilisant la même démarche que pour le premier cas, nous obtenons que le PGDD a aussi deux solutions réelles pour (d_1, d_2) à l'intérieur de l'ellipse d'équation

$$d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2 = \frac{9}{16}$$

excepté l'origine où il y a une infinité de solutions réelles. Ci-dessous, nous donnons la comparaison de l'ensemble des valeurs critiques de l'AGID et le nombre des solutions réelles pour la situation dégénérée avec la situation pour les longueurs de jambes de plus en plus grandes fixées de r_3 . La différence des solutions s'explique de la même manière que dans le cas précédent.

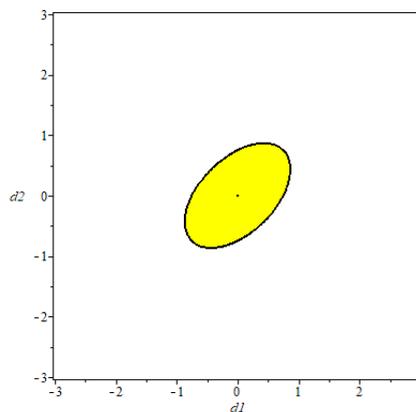


FIGURE 3.3 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{J}_2 du 3-RPS. Région jaune : 2 solutions réelles

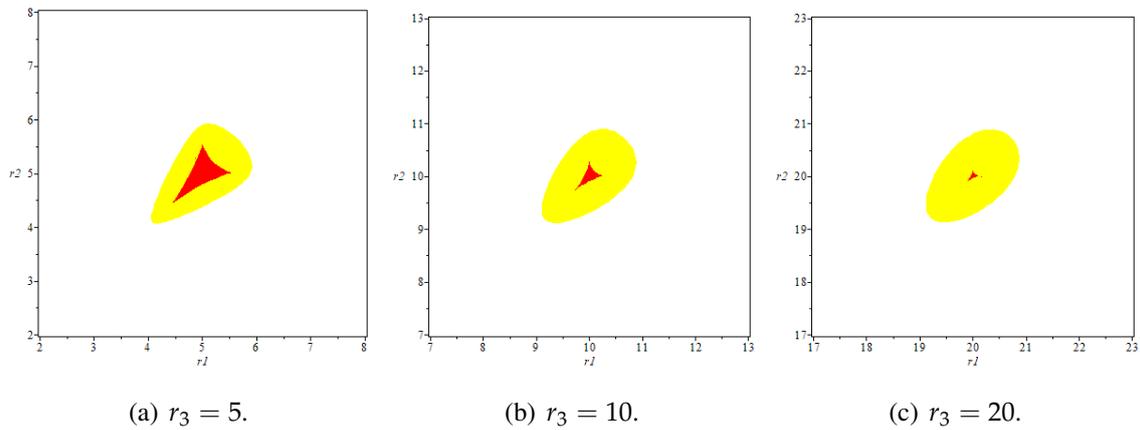


FIGURE 3.4 – Mode opératoire \mathcal{J}_2 du 3-RPS, PGD pour $r_3 = 5, 10, 20$. Régions jaunes : 4 solutions réelles, Régions rouges : 8 solutions réelles

3.6.3 PGDD du SNU 3-UPU

Nous allons étudier le PGDD dans chaque bord des modes opératoires de l'espace des configurations du SNU 3-UPU. Et nous les comparerons aux situations où les longueurs de jambes deviennent de plus en plus grandes.

- ❶ Bord \mathfrak{K}_1 : $y_0 = 0, w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0$. Nous normalisons les coordonnées homogènes $[y_1, y_2, y_3]$ telles que $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ et prenons $w_0 = 1$. La direction de la translation et la matrice de rotation sont données par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = [-y_1, -y_2, -y_3]^T, \quad R(\underline{w}) = I_3 \quad (3.25)$$

Les équations du PGDD sont :

$$4d_1 = \sqrt{3}y_2 + 3y_3 \quad 2d_2 = \sqrt{3}y_2 \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0.$$

Le PGDD a donc deux solutions réelles à l'intérieur de l'ellipse d'équation $d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2 - 9/16 = 0$

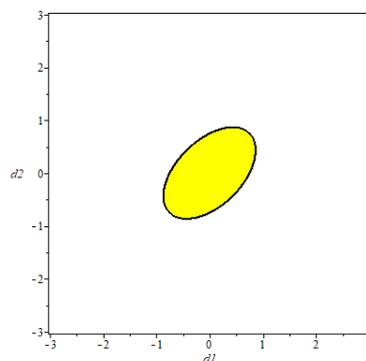


FIGURE 3.5 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_1 du SNU 3-UPU. Région jaune : 2 solutions réelles

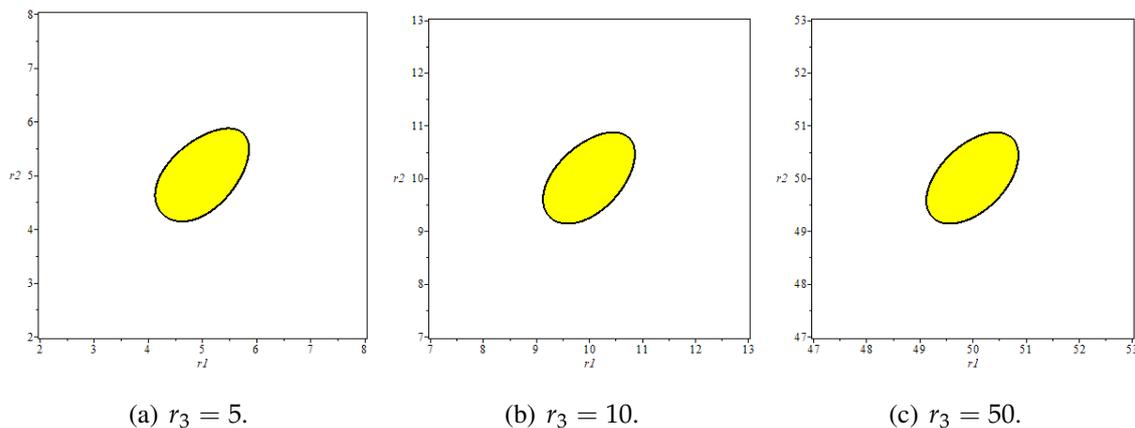


FIGURE 3.6 – Mode opératoire \mathcal{K}_1 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles

- ② Bord \mathfrak{K}_2 : $w_0 = 0, y_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0$. Les coordonnées homogènes $[y_0, y_2, y_3]$ sont normalisées : $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ et nous prenons $w_1 = 1$. La direction de la translation et la matrice de rotation sont données par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} -y_0 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{bmatrix}, \quad R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Les équations du PGDD sont :

$$4d_1 = 9y_2 - 3\sqrt{3}y_3 \quad 2d_2 = -3\sqrt{3}y_3 \quad y_0^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0.$$

Le PGDD a donc deux solutions réelles à l'intérieur de l'ellipse d'équation $d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2 - 81/16 = 0$

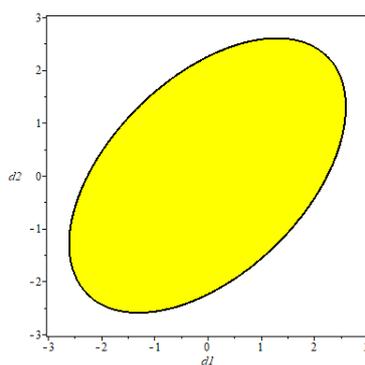


FIGURE 3.7 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_2 du SNU 3-UPU. Région jaune : 2 solutions réelles

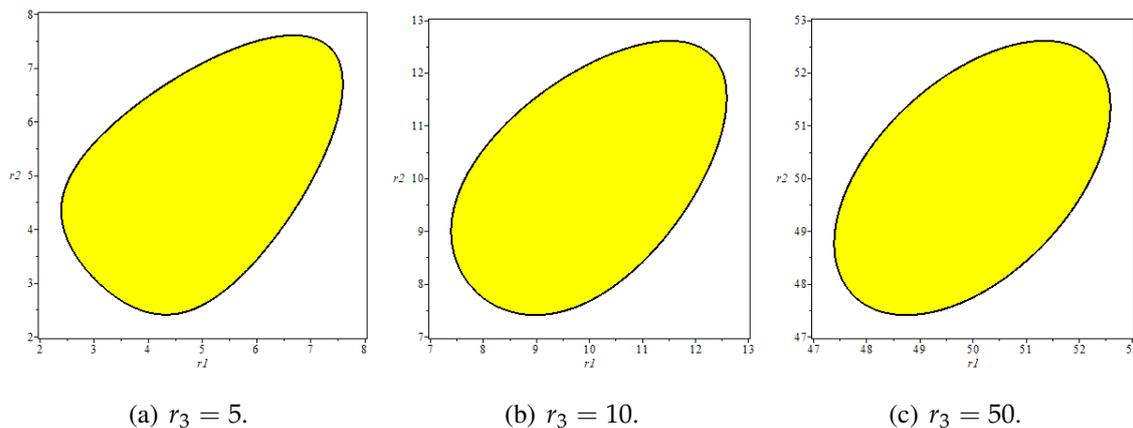


FIGURE 3.8 – Mode opératoire \mathcal{K}_2 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles

- ③ Bord \mathfrak{K}_3 : $y_0 = 0, y_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0$. Nous normalisons les coordonnées homogènes $[w_0, w_1] \times [y_2, y_3]$: $w_0^2 + w_1^2 = 1$ et $y_2^2 + y_3^2 = 1$. La direction de la translation et la matrice de rotation sont données par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_0 y_2 + w_1 y_3 \\ -w_0 y_3 - w_1 y_2 \end{bmatrix}, R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0^2 + w_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_0^2 - w_1^2 & -2w_0 w_1 \\ 0 & 2w_0 w_1 & w_0^2 - w_1^2 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Les équations du PGDD sont :

$$\begin{aligned} 4d_1 &= 3w_0 y_3 + 9w_1 y_2 + \sqrt{3}w_0 y_2 - 3\sqrt{3}w_1 y_3 \\ 2d_2 &= \sqrt{3}w_0 y_2 - 3\sqrt{3}w_1 y_3 \\ w_0^2 + w_1^2 - 1 &= 0 \\ y_2^2 + y_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

L'ensemble des valeurs critiques de l'AGID est la réunion de deux ellipses concentriques d'équations respectives : $d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 - 81/16 = 0$ et $d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 - 9/16 = 0$. Le PGDD a donc deux solutions réelles dans l'anneau compris entre la grande ellipse et la petite (région jaune sur la figure).

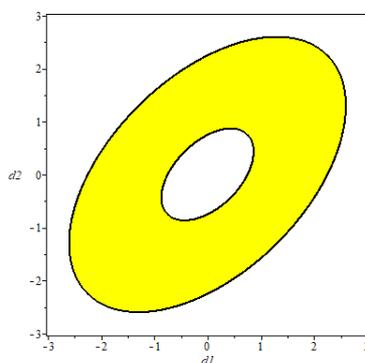


FIGURE 3.9 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_3 du SNU 3-UPU. Région jaune : 2 solutions réelles

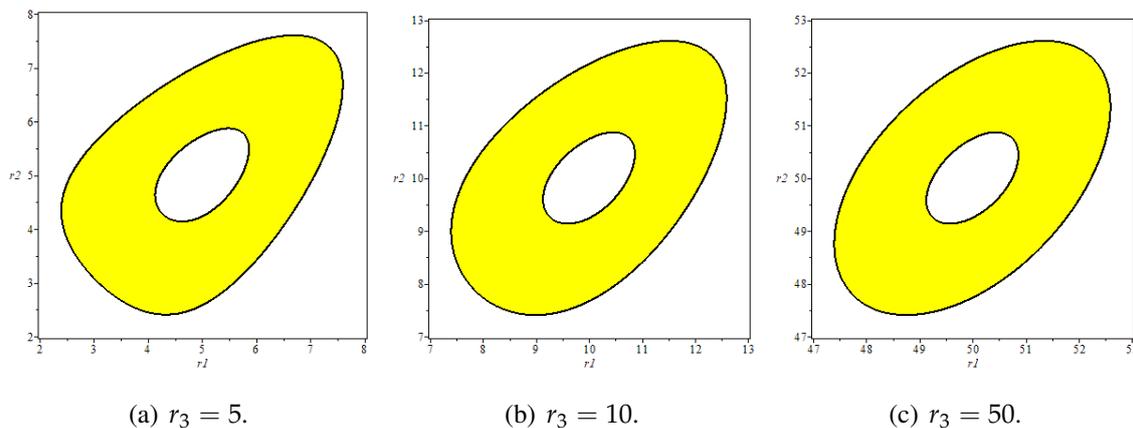


FIGURE 3.10 – Mode opératoire \mathcal{K}_3 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles

- ④ Bord \mathfrak{K}_4 : $w_0 = 0, w_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$. Nous normalisons les coordonnées homogènes $[w_2, w_3] \times [y_0, y_1]$: $w_2^2 + w_3^2 = 1$ et $y_0^2 + y_1^2 = 1$. La direction de la translation et la matrice de rotation sont données par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 y_0 - w_3 y_1 \\ w_2 y_1 + w_3 y_0 \end{bmatrix}, R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} -w_2^2 - w_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_2^2 - w_3^2 & 2w_2 w_3 \\ 0 & 2w_2 w_3 & -w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Les équations du PGDD sont :

$$\begin{aligned} 4d_1 &= -9w_2 y_1 - 3w_3 y_0 - \sqrt{3}w_2 y_0 + 3\sqrt{3}w_3 y_1 \\ 2d_2 &= 3\sqrt{3}w_3 y_1 + \sqrt{3}w_2 y_0 \\ w_2^2 + w_3^2 - 1 &= 0 \\ y_0^2 + y_1^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

L'ensemble des valeurs critiques de l'AGID est la réunion de deux ellipses concentriques d'équations respectives : $d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 - 81/16 = 0$ et $d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 - 9/16 = 0$. Le PGDD a donc également deux solutions réelles dans l'anneau compris entre la grande ellipse et la petite (région jaune sur la figure).

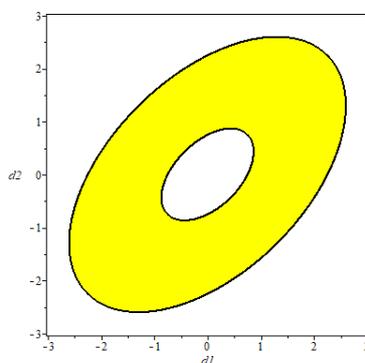


FIGURE 3.11 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_4 du SNU 3-UPU. Région jaune : 2 solutions réelles

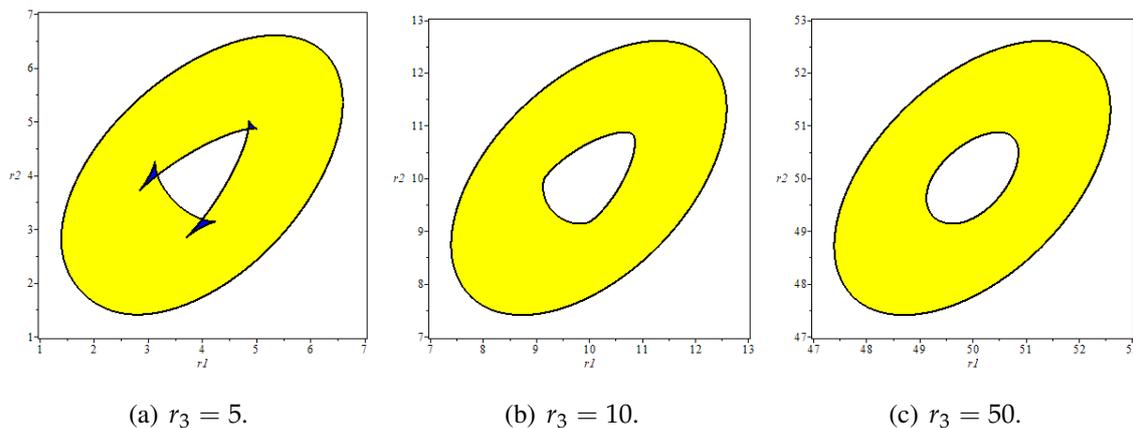


FIGURE 3.12 – Mode opératoire \mathcal{K}_4 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 4, 10, 50$. Régions bleues : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

- ⑤ Bord \mathfrak{R}_5 : $w_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$. Les coordonnées homogènes $[w_1, w_2, w_3]$ sont normalisées : $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ et nous prenons $y_0 = 1$. La direction de la translation et la matrice de rotation sont données par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & 2w_1w_2 & 2w_1w_3 \\ 2w_1w_2 & -w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2w_2w_3 \\ 2w_1w_3 & 2w_2w_3 & -w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Les équations du PGDD sont :

$$4d_1 = 3w_3 - \sqrt{3}w_2 \quad 2d_2 = -\sqrt{3}w_2 \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1 = 0.$$

Le PGDD a donc deux solutions réelles à l'intérieur de l'ellipse d'équation $d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2 - 9/16 = 0$

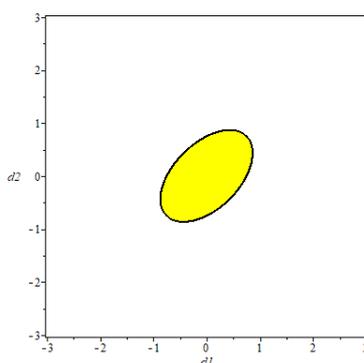


FIGURE 3.13 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{R}_5 du SNU 3-UPU. Région jaune : 2 solutions réelles

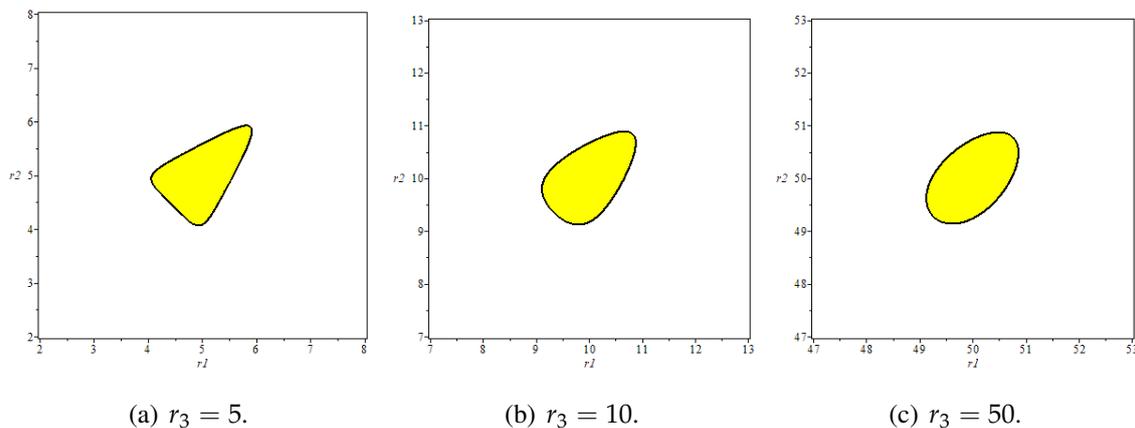
(a) $r_3 = 5$.(b) $r_3 = 10$.(c) $r_3 = 50$.

FIGURE 3.14 – Mode opératoire \mathcal{K}_5 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 5, 10, 50$. Régions jaunes : 2 solutions réelles

- ⑥ Bord \mathfrak{K}_6 : $w_1 = 0, y_0 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$. Les coordonnées homogènes $[w_1, w_2, w_3]$ sont normalisées : $w_0^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$ et nous prenons $y_1 = 1$. La direction de la translation et la matrice de rotation sont données par :

$$u(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} -w_0 \\ -w_3 \\ w_2 \end{bmatrix}, R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0^2 - w_2^2 - w_3^2 & -2w_0w_3 & 2w_0w_2 \\ 2w_0w_3 & w_0^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2w_2w_3 \\ -2w_0w_2 & 2w_2w_3 & w_0^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Les équations du PGDD sont :

$$4d_1 = -9w_2 + 3\sqrt{3}w_3 \quad 2d_2 = 3\sqrt{3}w_3 \quad w_0^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1 = 0.$$

Le PGDD a donc deux solutions réelles à l'intérieur de l'ellipse d'équation $d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2 - 81/16 = 0$

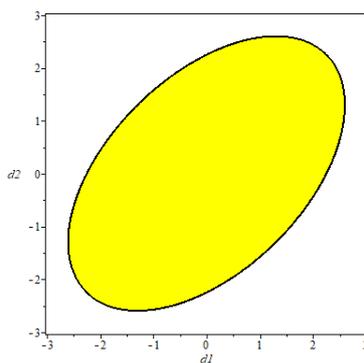


FIGURE 3.15 – PGDD pour le mode opératoire dégénéré \mathfrak{K}_6 du SNU 3-UPU. Région jaune : 2 solutions réelles

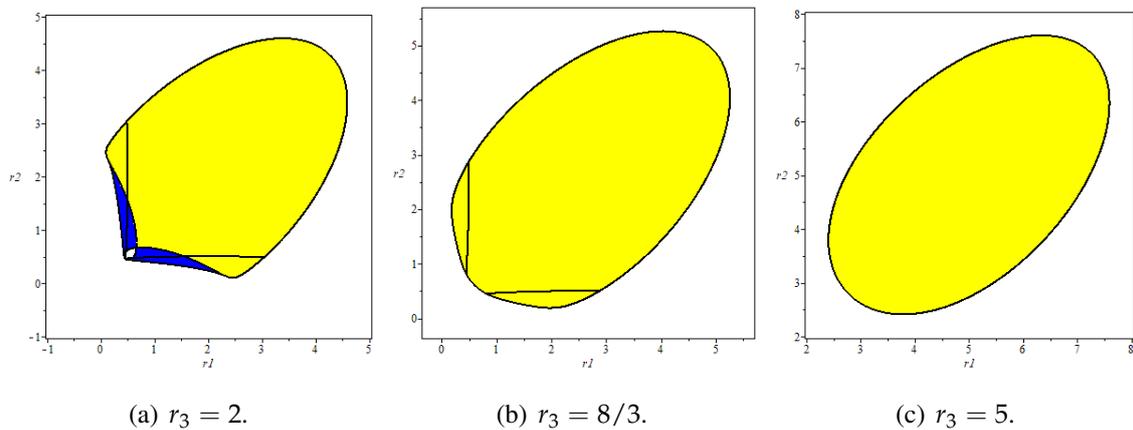


FIGURE 3.16 – Mode opératoire \mathcal{K}_6 du SNU 3-UPU, PGD pour $r_3 = 2, 8/3, 5$. Régions bleues : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

3.6.4 PGDD du Tsai 3-UPU

Ici, nous étudierons le mode général \mathcal{L}_5 , très peu d'informations sont connues sur lui ; les autres modes étant déjà traités puisqu'ils sont les mêmes que ceux du SNU 3-UPU. Il est expliqué dans [WH11] que le PGD pour ce mode a 64 solutions complexes et qu'il existe des valeurs des longueurs de jambes pour lesquelles on peut avoir 24 solutions réelles. Nous allons montrer que nous pouvons obtenir plus d'informations sur le PGD en le dégénéralant.

Nous avons déjà vu que le bord du mode général \mathcal{L}_5 se décompose en trois composantes : $\mathfrak{L}_5 \cup \mathfrak{L}_6 \cup \mathfrak{L}_7$ qui sont les modes opératoires dégénérés du SNU 3-UPU. Nous avons vu que le PGDD admet 2 solutions dans chacune des composantes \mathfrak{L}_5 et \mathfrak{L}_6 correspondant respectivement aux bords \mathfrak{R}_5 et \mathfrak{R}_7 du SNU 3-UPU (3.6.3 ⑤ et 3.6.3 ⑥). Pour $d_1 = d_2 = 0$, il y a des solutions dans \mathfrak{L}_7 qui sont des poses dégénérées singulières. Nous avons la figure suivante

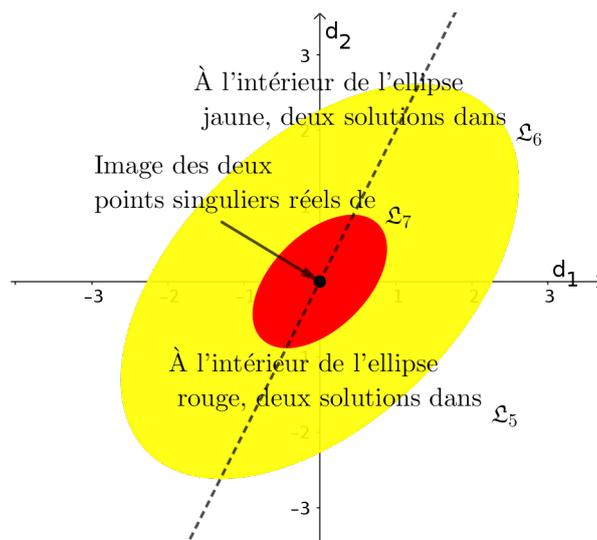


FIGURE 3.17 – PGDD pour le bord du mode opératoire général du Tsai 3-UPU

Nous n'avons pas ici pu comparer la situation dégénérée plane ci-dessus avec la situation pour les valeurs de r_3 de plus en plus grandes fixées à cause de la complexité des calculs. Ce qui montre une fois de plus l'intérêt de la dégénérescence à l'infini. Néanmoins nous allons comparer le nombre de solutions réelles au PGDD sur les droites d'équations $d_1 = k$, $d_2 = 2k$ dans l'espace articulaire dégénéré ($r_3 = \infty$) avec le cas $r_1 = r_3 + k$, $r_2 = r_3 + 2k$ pour des valeurs de plus en plus grandes de r_3 dans l'espace articulaire réel. On peut voir sur la figure 3.18 une stabilité remarquable, perturbée par l'évolution des quatre solutions singulières pour $k = 0$.

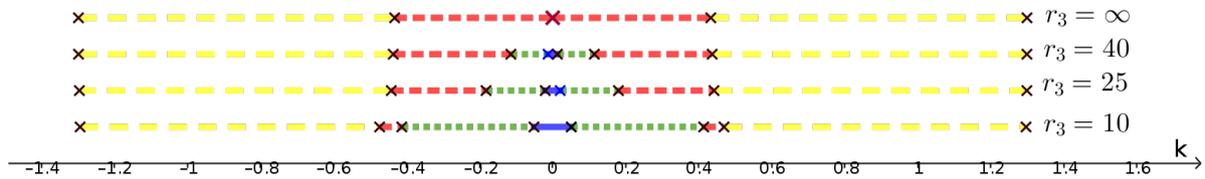


FIGURE 3.18 – Mode opératoire général du Tsai 3-UPU, Nombre de solutions réelles au PGD. Intervalle en couleur bleue : 12, Intervalle en couleur verte : 8, Intervalle en couleur rouge : 4, Intervalle en couleur jaune : 2

Les solutions au PGD viennent en paires, obtenues par le fait de la symétrie de la plateforme par rapport au plan de la base. La comparaison des solutions au PGD pour $k = 0, 3$ et les valeurs variables de r_3 (y compris le cas dégénéré) est faite dans la table 3.1. Nous avons seulement retenu une solution pour chaque paire.

	$r_3 = \infty$	$r_3 = 40$	$r_3 = 25$	$r_3 = 10$		
x_0	0	-0.016	-0.022	-0.033	0.061	-0.015
x_1	0.721	0.684	0.651	0.551	0.846	0.981
x_2	-0.693	-0.717	-0.736	-0.780	-0.185	0.147
x_3	0.000	-0.134	-0.186	-0.294	0.497	-0.125
\tilde{y}_0	1	0.998	0.996	0.985	0.966	0.957
\tilde{y}_1	0	-0.023	-0.033	-0.060	0.069	-0.015
\tilde{y}_2	0	-0.048	-0.068	-0.123	0.184	-0.046
\tilde{y}_3	0	0.018	0.036	0.104	-0.167	-0.285
x_0	0.973	0.973	0.973	0.971		
x_1	0	0.003	0.004	0.011		
x_2	0.000	-0.008	-0.013	-0.031		
x_3	0.231	0.231	0.232	0.238		
\tilde{y}_0	0	0.003	0.005	0.011		
\tilde{y}_1	1	1.000	0.999	0.995		
\tilde{y}_2	0	-0.001	-0.004	-0.021		
\tilde{y}_3	0	-0.024	-0.038	-0.092		

TABLE 3.1 – Solutions au PGD pour $k = 0, 3$ (les coordonnées \mathbf{y} normalisées en $\tilde{\mathbf{y}}$)

La première ligne de la table 3.1 correspond à la composante \mathcal{L}_5 et la seconde à la composante \mathcal{L}_6 . Les deux solutions supplémentaires pour $r_3 = 10$ viennent de l'évolution de la solution singulière ($\mathbf{w} = [0, 1, 0, 0]^T$, $\mathbf{y} = [1, 0, 0, 0]^T$) dans \mathcal{L}_7 , responsable de la partie orange dans Fig. 3.18.

Avec l'exemple de l'étude du Tsai 3-UPU et en particulier de celui de son mode général, nous avons montré que la dégénérescence d'un mode opératoire dont l'analyse cinématique est plutôt complexe, peut donner un mode dont le comportement cinématique est très facile à comprendre. De plus, comme nous venons de le voir, le PGDD donne des informations précises sur le PGD réel, pour des longueurs de jambes suffisamment grandes.

3.6.5 PGDD du 4-UPU

Pour décrire le PGDD du 4-UPU, nous allons commencer par compactifier son espace articulaire et par conséquent déterminer son bord. Rappelons que dans le cas des mécanismes à trois degrés de liberté étudiés précédemment, nous avons travaillé avec la limite des différences des longueurs des jambes $r_1 - r_3$ et $r_2 - r_3$, mais dans le cas du 4-UPU, nous obtenons une relation linéaire entre les différences des longueurs des jambes. On ne peut donc se contenter de travailler avec la différence des jambes. Pour contrebalancer, nous multiplions $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ par r_4 pour avoir la limite finie non nulle. Nous notons cette limite e_3 , qui est donc une variable articulaire dégénérée. Nous considérons la géométrie du 4-UPU comme décrite à la section 2.6.1.4 (Fig. 2.8).

3.6.5.1 Bord de l'espace articulaire du 4 UPU

Désignons par r_i , $i = 1, \dots, 4$, la longueur des jambes du manipulateur. L'espace articulaire est donné par $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4$. Pour déterminer le bord de l'espace articulaire, nous pouvons procéder de deux manières : par éclatements successifs ou par utilisation des espaces projectifs à poids.

Première approche : éclatements successifs

Puisque $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4$, alors $[r_1, r_2, r_3, r_4, 1] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ et par suite, si $r_4 \neq 0$, on a :

$$[r_1, r_2, r_3, r_4, 1] = \left[\frac{r_1}{r_4}, \frac{r_2}{r_4}, \frac{r_3}{r_4}, 1, \frac{1}{r_4} \right]$$

ce qui tend vers $[1, 1, 1, 1, 0] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ quand r_4 tend vers l'infini. Le point $[1, 1, 1, 1, 0] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ représente donc le bord de l'espace articulaire. Ce bord étant trop petit, nous allons l'éclater dans $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$.

Dans la carte affine $r_4 \neq 0$, le point $[1, 1, 1, 1, 0] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ devient le point $(1, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ et après translation en $(0, 0, 0, 0)$, nous obtenons

$$\left(\frac{r_1 - r_4}{r_4}, \frac{r_2 - r_4}{r_4}, \frac{r_3 - r_4}{r_4}, \frac{1}{r_4} \right)$$

qui est proportionnel, à la limite, à

$$(r_1 - r_4, r_2 - r_4, r_3 - r_4, 1)$$

Posons $h_i = r_i - r_4$, $i = 1, 2, 3$ et $m_0 = \frac{1}{r_4}$. Si r_4 tend vers l'infini, on obtient à la limite le 2-plan suivant de \mathbb{R}^4 :

$$h_2 - h_1 - h_3 = 0, \quad m_0 = 0$$

Comme le nouveau bord est de dimension 2 et puisque l'on voudrait un bord de dimension 3, nous allons encore éclater le 2-plan dans \mathbb{R}^4 .

Soit $(h_1, h_2, h_3, m_0) \times [t, u] \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, alors t, u et $m_0, h_2 - h_1 - h_3$ sont proportionnels et on a :

$$m_0 u - t(h_1 - h_2 + h_3) = 0$$

Dans la carte affine (h_1, h_2, u, m_0) , nous pouvons prendre $t = 1$ et nous avons

$$u = \frac{h_1 - h_2 + h_3}{m_0} = r_4 [(r_1 - r_4) - (r_2 - r_4) + (r_3 - r_4)] = r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)$$

Nous avons donc

$$(h_1, h_2, u, m_0) \rightarrow \left(r_1 - r_4, r_2 - r_4, r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4), \frac{1}{r_4} \right)$$

Ainsi, quand r_4 tend vers l'infini, nous obtenons les limites suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= \lim_{r_4 \rightarrow \infty} (r_1 - r_4) \\ d_2 &= \lim_{r_4 \rightarrow \infty} (r_2 - r_4) \\ e_3 &= \lim_{r_4 \rightarrow \infty} r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Les variables $d_i, i = 1, 2$ et e_3 sont donc les variables articulaires asymptotiques.

Deuxième approche : espace projectif à poids

L'espace articulaire étant donné par $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4$, après changement linéaire des variables nous obtenons $(r_1 - r_4, r_2 - r_4, r_1 - r_2 + r_3 - r_4, r_4) \in \mathbb{R}^4$ puis $[r_1 - r_4, r_2 - r_4, r_1 - r_2 + r_3 - r_4, r_4, 1] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$. Puisque quand r_4 tend vers l'infini, les différences $r_1 - r_4$ et $r_2 - r_4$ restent bornées et $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ tend vers 0, nous choisissons $(0, 0, -1, 1, 1)$ comme poids, et par conséquent, nous obtenons, pour $\lambda \neq 0$,

$$\lambda[r_1 - r_4, r_2 - r_4, r_1 - r_2 + r_3 - r_4, r_4, 1] = \left[\lambda^0(r_1 - r_4), \lambda^0(r_2 - r_4), \lambda^{-1}(r_1 - r_2 + r_3 - r_4), \lambda^1 r_4, \lambda^1 \right] \quad (3.34)$$

Par suite, si $\lambda = \frac{1}{r_4}$, nous obtenons

$$\left[r_1 - r_4, r_2 - r_4, r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4), 1, \frac{1}{r_4} \right]$$

De ce qui précède, nous voyons que, contrairement à ce qui se passe pour les robots à 3 jambes, la compactification n'est pas immédiate à cause de l'architecture du 4-UPU (en particulier, le fait que la base et la plateforme mobile soient rectangulaires). Quand r_4 tend vers l'infini, nous obtenons une relation linéaire entre les différences des longueurs des jambes $r_j - r_4, j = 1, \dots, 3$:

$$(r_2 - r_4) - (r_1 - r_4) - (r_3 - r_4) = 0 \quad \text{soit} \quad r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$d_2 - d_1 - d_3 = 0.$$

Pour cela, nous introduisons la quantité e_3 qui est la limite de $r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)$ lorsque r_4 tend vers l'infini.

Nous pouvons maintenant étudier le PGD au bord des différents modes opératoires du 4-UPU.

3.6.5.2 PGDD

On se place dans le revêtement de la compactification β de $SE_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire en faisant un changement de variable $x_i = w_i s$, $i = 0, \dots, 3$, dans l'expression de la matrice de rotation R où s est l'inverse de la distance du centre de la base vers le centre de la plateforme. Ainsi, le PGDD du 4-UPU est décrit par :

$$\begin{aligned} d_1 - \lim_{s \rightarrow 0} (r_1 - r_4) &= 0 \\ d_2 - \lim_{s \rightarrow 0} (r_2 - r_4) &= 0 \\ e_3 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (r_1 - r_2 + r_3 - r_4) &= 0 \\ w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 &= 0 \\ w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1 &= 0 \\ y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

De l'expression (3.20) de la sous-section 3.6.1, nous en déduisons

$$d_j - u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (P_j - P_4) - (B_j - B_4)) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.36)$$

De même, de l'expression (3.19), nous déduisons l'expression de $(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)$ à l'ordre 2, au voisinage de 0, comme suit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} r_i &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) P_i - B_i) \\ &\quad + \frac{s}{2} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \left(\|R(\underline{w}) P_i - B_i\|^2 - \left(u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) P_i - B_i) \right)^2 \right) + o(s) \\ &= \frac{s}{2} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \left(\|R(\underline{w}) P_i - B_i\|^2 - \left(u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) P_i - B_i) \right)^2 \right) + o(s) \end{aligned} \quad (3.37)$$

car

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) P_i - B_i) = 0$$

Ainsi l'équation (3.35) du PGDD devient :

$$\begin{aligned}
 d_1 - u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (P_1 - P_4) - (B_1 - B_4)) &= 0 \\
 d_2 - u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) (P_2 - P_4) - (B_2 - B_4)) &= 0 \\
 e_3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \left(\|R(\underline{w}) P_i - B_i\|^2 - \left(u(\underline{w}, \underline{y}) \cdot (R(\underline{w}) P_i - B_i) \right)^2 \right) &= 0 \\
 w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 &= 0 \\
 w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1 &= 0 \\
 y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Nous allons maintenant nous intéresser au mode de Schoenflies; l'étude du PGDD au bord du mode de Schoenflies retourné pourrait se faire de la même manière.

Rappelons que le mode de Schoenflies est défini par $x_2 = x_1 = x_0 y_0 + x_3 y_3 = 0$. Son bord est défini dans $S^3 \times S^3$ par :

$$w_2 = w_1 = w_0 y_0 + w_3 y_3 = 0$$

Par suite, les matrices des rotations et des translations y sont données par

$$t(\underline{w}, \underline{y}) = \begin{bmatrix} -w_0 y_1 + w_3 y_2 \\ -w_3 y_1 - w_0 y_2 \\ w_3 y_0 - w_0 y_3 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$R(\underline{w}) = \begin{bmatrix} w_0^2 - w_3^2 & -2w_0 w_3 & 0 \\ 2w_0 w_3 & w_0^2 - w_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_0^2 + w_3^2 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

Les équations de normalisation et celle de la quadrique de Study deviennent respectivement :

$$w_0^2 + w_3^2 - 1 = 0 \quad y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0 \quad w_0 y_0 + w_3 y_3 = 0 \tag{3.41}$$

On obtient donc les équations du PGDD, qui, après réduction modulo la base de Gröbner réduite de l'idéal engendré par les polynômes de l'équation (3.41), devient :

$$\begin{aligned}
 d_1 - 2(b+d)w_3 y_1 - 2(b-d)w_0 y_2 &= 0 \\
 d_2 - 2(c-a)w_0 y_1 - 2(a+c)w_3 y_2 - 2(b+d)w_3 y_1 - 2(b-d)w_0 y_2 &= 0 \\
 e_3 - 8(ab+cd)w_3^2 y_1 y_2 - 8(ab-cd)w_0 w_3 y_2^2 + 4(a+c)(b-d)w_0 w_3 + 4(a-c)(b-d)y_1 y_2 \\
 + 4(a-c)(b+d)y_0 y_3 &= 0 \\
 w_0 y_0 + w_3 y_3 &= 0 \\
 w_0^2 + w_3^2 - 1 &= 0 \\
 y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Nous allons maintenant décrire le lieu de singularité image du manipulateur. Pour cela, commençons par chercher son lieu de singularité. Des polynômes du PGDD, nous obtenons la matrice jacobienne

de l'AGID en dérivant chacun de ces six polynômes par rapport aux variables $w_0, w_3, y_0, y_1, y_2, y_2$ (voir 1.2.5.2). Son déterminant est donc donné par

$$128(ad - bc)(w_0 - w_3)(w_0y_3 - w_3y_0)(w_0 + w_3) \left((a - c)(b - d)w_0^2 + (a + c)(b + d)w_3^2 \right) \quad (3.43)$$

Ainsi, le lieu de singularité se décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} d_1 - 2(b + d)w_3y_1 - 2(b - d)w_0y_2 &= 0 \\ d_2 - 2(c - a)w_0y_1 - 2(a + c)w_3y_2 - 2(b + d)w_3y_1 - 2(b - d)w_0y_2 &= 0 \\ e_3 - 8(ab + cd)w_3^2y_1y_2 - 8(ab - cd)w_0w_3y_2^2 + 4(a + c)(b - d)w_0w_3 + 4(a - c)(b - d)y_1y_2 \\ + 4(a - c)(b + d)y_0y_3 &= 0 \\ (ad - bc)(w_0 - w_3)(w_0 + w_3)(w_0y_3 - w_3y_0) \left((a - c)(b - d)w_0^2 + (a + c)(b + d)w_3^2 \right) &= 0 \\ w_0y_0 + w_3y_3 &= 0 \\ w_0^2 + w_3^2 - 1 &= 0 \\ y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

De (3.44), nous pouvons donner l'interprétation cinématique des singularités selon les facteurs du déterminant jacobien.

- ✓ $ad - bc = 0$: la plateforme est un rectangle de mêmes proportions que la base. Alors toutes les poses sont singulières.
- ✓ $w_0 - w_3 = 0$: la plateforme est orientée perpendiculairement par rapport à la base (d'angle de mesure $\pi/2$).
- ✓ $w_0 + w_3 = 0$: la plateforme est également orientée perpendiculairement par rapport à la base (d'angle de mesure $-\pi/2$).
- ✓ $w_0y_3 - w_3y_0 = 0$: le vecteur de translation est horizontal, autrement dit la plateforme est dans le plan de la base. Il n'est pas étonnant que cette pose soit parmi les poses singulières, puisque c'est le cas où la pose coïncide avec sa symétrique par rapport au plan de base.
- ✓ $-(c - a)(b - d)w_0^2 + (a + c)(b + d)w_3^2 = 0$: il n'y a de points réels que si $(c - a)(b - d) \geq 0$. Nous verrons plus tard que cela correspond au cas où il y a des modes opératoires parasites et self-motion dans le mode Schoenflies.

La projection de ce lieu de singularité sur l'espace articulaire (d_1, d_2, e_3) s'effectue en éliminant les variables $w_0, w_3, y_0, y_1, y_2, y_2$ (voir 1.4.5) dans les équations du lieu de singularité (3.44) et nous obtenons la surface de singularité image dans l'espace (d_1, d_2, e_3) . Dans le but de simplifier le calcul, nous allons projeter individuellement chaque composante du lieu de singularité décrite ci-dessus. Il s'agit d'ajouter chaque facteur variable du déterminant jacobien (3.44) aux équations du PGDD (3.42) et de faire l'élimination par rapport aux variables $w_0, w_3, y_0, y_1, y_2, y_2$.

- ✓ Projection du lieu de singularité décrit par $w_0 - w_3 = 0$ et $w_0 + w_3 = 0$: nous obtenons respectivement deux des composantes suivantes du lieu de singularité image :

$$d_1^2 - d_1d_2 + 4bc - 4ad + e_3 = 0 \quad \text{et} \quad d_1^2 - d_1d_2 - 4bc + 4ad + e_3 = 0. \quad (3.45)$$

Ce sont deux paraboloides hyperboliques et ils se déduisent l'un de l'autre par translation.

- ✓ Projection du lieu de singularité décrit par $w_0y_3 - w_3y_0 = 0$: nous obtenons une autre composante du lieu de singularité image. C'est une surface que nous notons \mathcal{S} , d'équation suivante :

$$\begin{aligned} & A_0 d_1^8 + A_1 d_1^7 d_2 + A_2 d_1^6 d_2^2 + A_3 d_1^5 d_2^3 + A_4 d_1^4 d_2^4 + A_5 d_1^3 d_2^5 + A_6 d_1^2 d_2^6 \\ & + A_7 d_1^6 e_3 + A_8 d_1^5 d_2 e_3 + A_9 d_1^4 d_2^2 e_3 + A_{10} d_1^3 d_2^3 e_3 + A_{11} d_1^2 d_2^4 e_3 + A_{12} d_1 d_2^5 e_3 \\ & + A_{13} d_1^6 + A_{14} d_1^5 d_2 + A_{15} d_1^4 d_2^2 + A_{16} d_1^3 d_2^3 + A_{17} d_1^2 d_2^4 + A_{18} d_1^4 e_3^2 \\ & + A_{19} d_1^3 d_2 e_3^2 + A_{20} d_1^2 d_2^2 e_3^2 + A_{21} d_1 d_2^3 e_3^2 + A_{22} d_2^4 e_3^2 + A_{23} d_1^4 e_3 + A_{24} d_1^3 d_2 e_3 \\ & + A_{25} d_1^2 d_2^2 e_3 + A_{26} d_1 d_2^3 e_3 + A_{27} d_1^2 e_3^3 + A_{28} d_1 d_2 e_3^3 + A_{29} d_1^4 + A_{30} d_1^3 d_2 \\ & + A_{31} d_1^2 d_2^2 + A_{32} d_1 d_2^3 + A_{33} d_2^4 + A_{34} d_1^2 e_3^2 + A_{35} d_1 d_2 e_3^2 + A_{36} d_2^2 e_3^2 + A_{37} e_3^4 \\ & + A_{38} d_1^2 e_3 + A_{39} d_1 d_2 e_3 + A_{40} d_1^2 + A_{41} d_1 d_2 + A_{42} d_2^2 + A_{43} e_3^2 + A_{44} = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

où les A_i , $0 \leq i \leq 44$, fonctions des paramètres a , b , c et d , sont les coefficients du polynôme définissant la surface \mathcal{S} et sont comme suit :

$$\begin{aligned} A_0 &= (b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 + 4b^2d^2)(4a^2c^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2) \\ A_1 &= 4(2a^2b^2c^4 + b^4c^4 - 4a^3bc^3d - 4ab^3c^3d + 2a^4c^2d^2 + 22a^2b^2c^2d^2 + 6b^4c^2d^2 \\ &\quad - 4a^3bcd^3 - 12ab^3cd^3 + a^4d^4 + 6a^2b^2d^4) \\ A_2 &= 2(2a^2b^2c^4 + 3b^4c^4 - 4a^3bc^3d - 12ab^3c^3d + 2a^4c^2d^2 + 66a^2b^2c^2d^2 + 30b^4c^2d^2 \\ &\quad - 12a^3bcd^3 - 60ab^3cd^3 + 3a^4d^4 + 30a^2b^2d^4) \\ A_3 &= 4(b^4c^4 - 4ab^3c^3d + 22a^2b^2c^2d^2 + 20b^4c^2d^2 - 4a^3bcd^3 - 40ab^3cd^3 + a^4d^4 + 20a^2b^2d^4) \\ A_4 &= b^4c^4 - 4ab^3c^3d + 22a^2b^2c^2d^2 + 60b^4c^2d^2 - 4a^3bcd^3 - 120ab^3cd^3 + a^4d^4 + 60a^2b^2d^4 \\ \\ A_5 &= 24d^2b^2(bc - ad)^2 & A_6 &= 4d^2b^2(bc - ad)^2 \\ A_7 &= 8(a^2b^2c^4 - 2a^3bc^3d + a^4c^2d^2 + 8a^2b^2c^2d^2 + b^4c^2d^2 - 2ab^3cd^3 + a^2b^2d^4) \\ A_8 &= 8(a^2b^2c^4 - 2a^3bc^3d + a^4c^2d^2 + 24a^2b^2c^2d^2 + 5b^4c^2d^2 - 10ab^3cd^3 + 5a^2b^2d^4) \\ A_9 &= 16d^2b^2(12a^2c^2 + 5b^2c^2 - 10abcd + 5a^2d^2) \\ A_{10} &= 16d^2b^2(4a^2c^2 + 5b^2c^2 - 10abcd + 5a^2d^2) \\ A_{11} &= 40d^2b^2(bc - ad)^2 & A_{12} &= 8d^2b^2(bc - ad)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= 8(bc - ad)^2(5a^2b^2c^2 + b^4c^2 + b^2c^4 - 2a^3bcd - 2ab^3cd - 2abc^3d + a^4d^2 + 5a^2b^2d^2 \\
&\quad + 5a^2c^2d^2 + 5b^2c^2d^2 - 2abcd^3 + a^2d^4) \\
A_{14} &= 16(bc - ad)^2(5a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 + b^2c^4 - 2a^3bcd - 4ab^3cd - 2abc^3d + a^4d^2 + 10a^2b^2d^2 \\
&\quad + 5a^2c^2d^2 + 10b^2c^2d^2 - 4abcd^3 + 2a^2d^4) \\
A_{15} &= 8(bc - ad)^2(5a^2b^2c^2 + 6b^4c^2 + b^2c^4 - 2a^3bcd - 12ab^3cd - 2abc^3d + a^4d^2 + 30a^2b^2d^2 \\
&\quad + 5a^2c^2d^2 + 30b^2c^2d^2 - 12abcd^3 + 6a^2d^4) \\
A_{16} &= 32(bc - ad)^2(b^4c^2 - 2ab^3cd + 5a^2b^2d^2 + 5b^2c^2d^2 - 2abcd^3 + a^2d^4) \\
A_{17} &= 8(bc - ad)^2(b^4c^2 - 2ab^3cd + 5a^2b^2d^2 + 5b^2c^2d^2 - 2abcd^3 + a^2d^4) \\
A_{18} &= -2(-2a^2b^2c^4 + b^4c^4 + 4a^3bc^3d - 8ab^3c^3d - 2a^4c^2d^2 - 34a^2b^2c^2d^2 - 2b^4c^2d^2 \\
&\quad - 8a^3bcd^3 + 4ab^3cd^3 + a^4d^4 - 2a^2b^2d^4) \\
A_{19} &= -4(b^4c^4 - 8ab^3c^3d - 34a^2b^2c^2d^2 - 4b^4c^2d^2 - 8a^3bcd^3 + 8ab^3cd^3 + a^4d^4 - 4a^2b^2d^4) \\
A_{20} &= -2(b^4c^4 - 8ab^3c^3d - 34a^2b^2c^2d^2 - 12b^4c^2d^2 - 8a^3bcd^3 + 24ab^3cd^3 + a^4d^4 - 12a^2b^2d^4) \\
A_{21} &= 16d^2b^2(bc - ad)^2 \quad A_{22} = 4d^2b^2(bc - ad)^2 \\
A_{23} &= 64(bc - ad)^2(a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2) \\
A_{24} &= 64(bc - ad)^2(a^2b^2c^2 + 3a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + 3b^2c^2d^2) \\
A_{25} &= 192d^2b^2(a^2 + c^2)(bc - ad)^2 \quad A_{26} = 64d^2b^2(a^2 + c^2)(bc - ad)^2 \\
A_{27} &= 16dcba(bc + ad)^2 \quad A_{28} = 16dcba(bc + ad)^2 \\
A_{29} &= 16(bc - ad)^2(a^4b^2c^2 + 8a^2b^4c^2 + b^6c^2 - 2a^2b^2c^4 + 4b^4c^4 + b^2c^6 - 2a^5bcd - 8a^3b^3cd \\
&\quad - 2ab^5cd + 4a^3bc^3d - 8ab^3c^3d - 2abc^5d + a^6d^2 + 8a^4b^2d^2 + a^2b^4d^2 - 2a^4c^2d^2 \\
&\quad - 8a^2b^2c^2d^2 - 2b^4c^2d^2 + a^2c^4d^2 + 8b^2c^4d^2 - 8a^3bcd^3 + 4ab^3cd^3 - 8abc^3d^3 + 4a^4d^4 \\
&\quad - 2a^2b^2d^4 + 8a^2c^2d^4 + b^2c^2d^4 - 2abcd^5 + a^2d^6) \\
A_{30} &= 64(bc - ad)^2(4a^2b^4c^2 + b^6c^2 + 2b^4c^4 - 4a^3b^3cd - 2ab^5cd - 4ab^3c^3d + 4a^4b^2d^2 \\
&\quad + a^2b^4d^2 - 4a^2b^2c^2d^2 - 2b^4c^2d^2 + 4b^2c^4d^2 - 4a^3bcd^3 + 4ab^3cd^3 - 4abc^3d^3 + 2a^4d^4 \\
&\quad - 2a^2b^2d^4 + 4a^2c^2d^4 + b^2c^2d^4 - 2abcd^5 + a^2d^6) \\
A_{31} &= 32(bc - ad)^2(4a^2b^4c^2 + 3b^6c^2 + 2b^4c^4 - 4a^3b^3cd - 6ab^5cd - 4ab^3c^3d + 4a^4b^2d^2 \\
&\quad + 3a^2b^4d^2 - 4a^2b^2c^2d^2 - 6b^4c^2d^2 + 4b^2c^4d^2 - 4a^3bcd^3 + 12ab^3cd^3 - 4abc^3d^3 + 2a^4d^4 \\
&\quad - 6a^2b^2d^4 + 4a^2c^2d^4 + 3b^2c^2d^4 - 6abcd^5 + 3a^2d^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{32} &= 64(b-d)^2(b+d)^2(bc-ad)^4 & A_{33} &= 16(b-d)^2(b+d)^2(bc-ad)^4 \\
 A_{34} &= -8(bc+ad)(bc-ad)^2(-3a^2bc+b^3c+bc^3+a^3d-3ab^2d-3ac^2d-3bcd^2+ad^3) \\
 A_{35} &= -16(bc+ad)(bc-ad)^2(b^3c-3ab^2d-3bcd^2+ad^3) \\
 A_{36} &= -8(bc+ad)(bc-ad)^2(b^3c-3ab^2d-3bcd^2+ad^3) & A_{37} &= (bc+ad)^4 \\
 A_{38} &= 128(bc-ad)^2(a^2b^4c^2+a^4b^2d^2-4a^2b^2c^2d^2+b^2c^4d^2+a^2c^2d^4) \\
 A_{39} &= 128(bc-ad)^2(a^2b^4c^2+a^4b^2d^2-4a^2b^2c^2d^2+b^2c^4d^2+a^2c^2d^4) \\
 A_{40} &= 128(bc-ad)^4(a^4b^2+a^2b^4-2a^2b^2c^2+b^4c^2+b^2c^4+a^4d^2-2a^2b^2d^2 \\
 &\quad -2a^2c^2d^2-2b^2c^2d^2+c^4d^2+a^2d^4+c^2d^4) \\
 A_{41} &= 256(b-d)^2(b+d)^2(a^2+c^2)(bc-ad)^4 \\
 A_{42} &= 128(b-d)^2(b+d)^2(a^2+c^2)(bc-ad)^4 \\
 A_{43} &= -32(b-d)(b+d)(-a+c)(a+c)(bc-ad)^2(bc+ad)^2 \\
 A_{44} &= 256(b-d)^2(b+d)^2(-a+c)^2(a+c)^2(bc-ad)^4
 \end{aligned}$$

- ✓ Projection du lieu de singularité décrit par $-(c-a)(b-d)w_0^2 + (a+c)(b+d)w_3^2 = 0$:
 ici aussi, nous obtenons une autre composante du lieu de singularité image. C'est une variété
 algébrique que nous notons \mathcal{T} et qui est définie par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 (a^2b^2 - c^2 - d^2)d_1^2 - 2(b^2 - d^2)d_1d_2 + (b^2 - d^2)d_2^2 &= 0 \\
 (bc + ad)d_1^2d_2 - (bc + ad)d_1d_2^2 + (bc + ad)d_2e_3 + 4(bc - ad)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)d_1 \\
 + 4(b^2 - d^2)(bc - ad) &= 0 \\
 (bc + ad)d_1^3 - (bc + ad)d_1d_2^2 + (bc + ad)d_1e_3 + (bc + ad)d_2e_3 \\
 + 4(bc - ad)(-a^2 - 2b^2 + c^2 + 2d^2)d_1 + 8(b^2 - d^2)(bc - ad)d_2 &= 0 \\
 (c^2 + d^2)d_1^4 - (c^2 + 3d^2)d_1^3d_2 + 3d^2d_1^2d_2^2 - d^2d_1d_2^3 + (c^2 + d^2)d_1^2e_3 - 2d^2d_1d_2e_3 + d^2d_2^2e_3 \\
 - 4(b^2c^2 - 2abcd - b^2d^2 + c^2d^2 + d^4)d_1^2 + 4(b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 - 2b^2d^2 + 2d^4)d_1d_2 \\
 + 4(b^2 - d^2)(b + d)d^2d_2^2 &= 0 \\
 (ac - bd)d_1^4 - (ac - 3bd)d_1^3d_2 - 3dbd_1^2d_2^2 + dbd_1d_2^3 + (ac - bd)d_1^2e_3 + 2dbd_1d_2e_3 - dbd_2^2e_3 \\
 + 4(-ab^2c - b^3d + 2bc^2d - acd^2 + bd^3)d_1^2 - 4(-ab^2c + a^2bd - 2b^3d + bc^2d \\
 - acd^2 + 2bd^3)d_1d_2 - 4db(b^2 - d^2)d_2^2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (b^2 - d^2)(bc + ad)d_1d_2^2 - (b^2 - d^2)(bc + ad)d_2^3 + (bc + ad)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)d_1e_3 \\
 & \quad + 2(b^2 - d^2)(bc + ad)d_2e_3 + 4(b^2 - d^2)(bc - ad)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)d_1 \\
 & \quad + 4(b^2 - d^2)(bc - ad)(-a^2 + b^2 + c^2 - d^2)d_2 = 0 \\
 & (a^2 - c^2)(bc + ad)d_1d_2^2 + (bc + ad)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)d_1e_3 + (bc + ad)(-a^2 + b^2 \\
 & \quad + c^2 - d^2)d_2e_3 + 4(a^2 - c^2)(-bc + ad)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)d_1 + 8(b^2 - d^2) \\
 & \quad (-a^2 + c^2)(bc - ad)d_2 = 0 \\
 & (b^2c^2 + 2abcd - b^2d^2 + c^2d^2 + d^4)d_1^2e_3 - (b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 - 2b^2d^2 + 2d^4)d_1d_2e_3 \\
 & \quad - (b^2 - d^2)d^2d_2^2e_3 + 4(b^2 - d^2)^2(c^2 + d^2)d_1^2 - 8(b^2 - d^2)(b^2c^2 - a^2d^2 \\
 & \quad + b^2d^2 - d^4)d_1d_2 + 4(b^2 - d^2)(b^2c^2 - a^2d^2 + b^2d^2 - d^4)d_2^2 \\
 & \quad + (bc + ad)^2e_3^2 - 16(b^2 - d^2)(-a^2 + c^2)(bc - ad)^2 = 0 \\
 & (b^2 - d^2)(a^2 - c^2)(bc + ad)d_2^3 + (bc + ad)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(-a^2 + b^2 + c^2 - d^2)d_1e_3 \\
 & \quad + (b^2 - d^2)(bc + ad)(-3a^2 + b^2 + 3c^2 - d^2)d_2e_3 + 8(b^2 - d^2)(-a^2 + c^2)(bc - ad) \\
 & \quad (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)d_1 + 4(b^2 - d^2)(-a^2 + c^2)(bc - ad)(-a^2 + 3b^2 + c^2 - 3d^2)d_2 = 0 \\
 & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)(bc + ad)^2d_1d_2e_3 + (b^2 - d^2)(bc + ad)^2d_2^2e_3 - 8(b^2 - d^2)(-a^2 + c^2) \\
 & \quad (b^2c^2 - a^2d^2)d_1d_2 + 4(b^2 - d^2)(-a^2 + c^2)(bc - ad)(bc + ad)d_2^2 + (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2) \\
 & \quad (bc + ad)^2e_3^2 - 16(b^2 - d^2)(-a^2 + c^2)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(bc - ad)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Pour représenter le lieu de singularité image, nous allons traiter deux situations selon que le produit $(c - a)(b - d)$ soit positif ou strictement négatif. Si cette quantité est positive, on constate l'existence des modes opératoires supplémentaires et de self-motion [CKM15].

Cas où le produit $(c - a)(b - d)$ est strictement négatif.

Prenons par exemple $a = 1, b = c = 2, d = 3$. Les deux paraboloides hyperboliques (3.45) ont pour équations respectives

$$d_1^2 - d_1d_2 + e_3 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad d_1^2 - d_1d_2 + e_3 + 4 = 0.$$

La surface \mathcal{S} (3.46), elle, a pour équation

$$\begin{aligned}
 & 2465d_1^8 - 10116d_1^7d_2 + 16006d_1^6d_2^2 - 12100d_1^5d_2^3 + 4465d_1^4d_2^4 - 864d_1^3d_2^5 + 144d_1^2d_2^6 \\
 & \quad + 9536d_1^6e_3 - 29120d_1^5d_2e_3 + 30528d_1^4d_2^2e_3 - 12096d_1^3d_2^3e_3 + 1440d_1^2d_2^4e_3 - 288d_1d_2^5e_3 \\
 & \quad - 7568d_1^6 + 26864d_1^5d_2 - 36888d_1^4d_2^2 + 23456d_1^3d_2^3 - 5864d_1^2d_2^4 + 14078d_1^4e_3^2 \\
 & \quad - 28412d_1^3d_2e_3^2 + 14782d_1^2d_2^2e_3^2 - 576d_1d_2^3e_3^2 + 144d_2^4e_3^2 - 14848d_1^4e_3 + 37888d_1^3d_2e_3 \\
 & \quad - 34560d_1^2d_2^2e_3 + 11520d_1d_2^3e_3 + 9408d_1^2e_3^3 - 9408d_1d_2e_3^3 + 31840d_1^4 - 64192d_1^3d_2 \\
 & \quad + 33696d_1^2d_2^2 - 1600d_1d_2^3 + 400d_2^4 - 7280d_1^2e_3^2 + 11312d_1d_2e_3^2 - 5656d_2^2e_3^2 + 2401e_3^4 \\
 & \quad + 54272d_1^2e_3 - 54272d_1d_2e_3 - 30976d_1^2 + 32000d_1d_2 - 16000d_2^2 + 23520e_3^2 + 57600 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

C'est un tore « aplati » : il se trouve coincé entre les deux paraboloides hyperboliques et leur est tangent le long de courbes (voir Fig. 3.19 (d))

Puisque pour $(c - a)(b - d) < 0$, le lieu de singularité défini par $-(c - a)(b - d)w_0^2 + (a + c)(b + d)w_3^2 = 0$ n'admet pas de points réels, il en est de même pour sa projection. Ainsi, le lieu de singularité image \mathcal{T} n'a pas de points réels dans ce cas. Elle se constate bien pour les valeurs des paramètres a, b, c et d que nous avons prises. Alors l'ensemble \mathcal{T} (3.47) a pour équations

$$\begin{aligned} 5(d_1 - d_2)^2 + 3d_1^2 &= 0 \\ 98d_1d_2e_3 - 245d_2^2e_3 + 840d_1d_2 - 420d_2^2 + 392e_3^2 + 1920 &= 0 \\ 105d_2^3 - 112d_1e_3 - 140d_2e_3 - 960d_1 + 720d_2 &= 0 \\ 21d_1d_2^2 - 56d_1e_3 + 14d_2e_3 - 96d_1 + 120d_2 &= 0 \end{aligned}$$

On voit clairement que le premier polynôme en d_1 et d_2 est tout le temps strictement positif sauf si $d_1 = d_2 = 0$, mais alors le deuxième polynôme devient $392e_3^2 + 1920$.

Nous représentons ci-dessous la surface de singularité et décrivons le nombre de solutions aux PGDD.

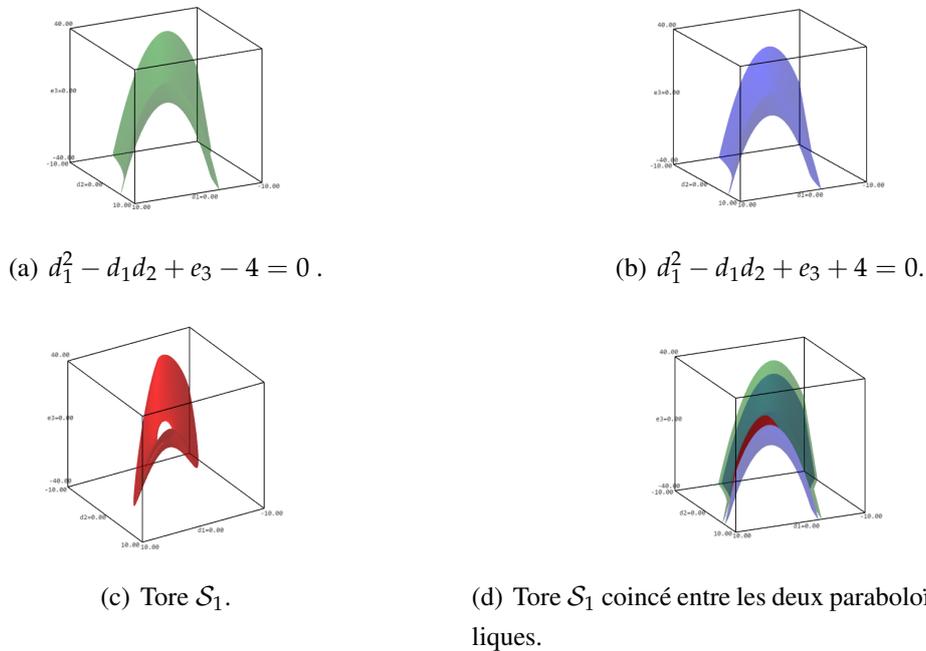


FIGURE 3.19 – PGDD au bord du mode de Schoenflies, surface de singularités, $a = 1, b = c = 2, d = 3$.

Le PGDD admet 0 solution réelle en dessous du paraboloid hyperbolique en bleu, au dessus du paraboloid hyperbolique en vert, entre les deux paraboloides hyperboliques et complètement à l'extérieur du tore ; 4 solutions réelles dans le trou du tore et 2 solutions réelles à l'intérieur du tore.

Une section de la surface de singularité, dans le plan $d_2 = 2$ de l'espace articulaire est donnée par la courbe de singularité image dégénérée suivante :

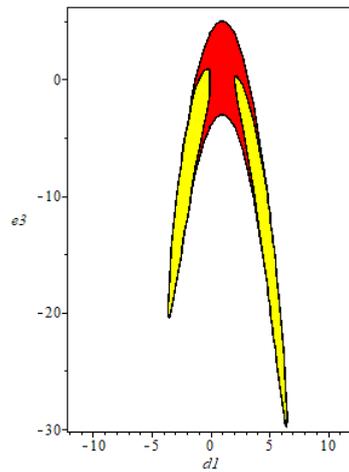


FIGURE 3.20 – PGDD au bord du mode de Schoenflies, courbe de singularités image pour $d_2 = 2$, paramètres $a = 1$, $b = c = 2$, $d = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

Afin de comparer la situation dégénérée et la situation où les longueurs des jambes deviennent de plus en plus grandes, nous donnons ci-dessous quelques courbes de singularité image, tranches des surfaces de singularité non asymptotiques. Pour cela, nous fixons dans chaque dessin la différence de longueur des jambes $r_2 - r_4$ égale à 2, correspondant à la variable asymptotique d_2 fixée à 2 comme ci-dessus dans la tranche pour le PGDD et nous faisons grandir la valeur de r_4 d'un dessin à un autre (Fig. 3.21).

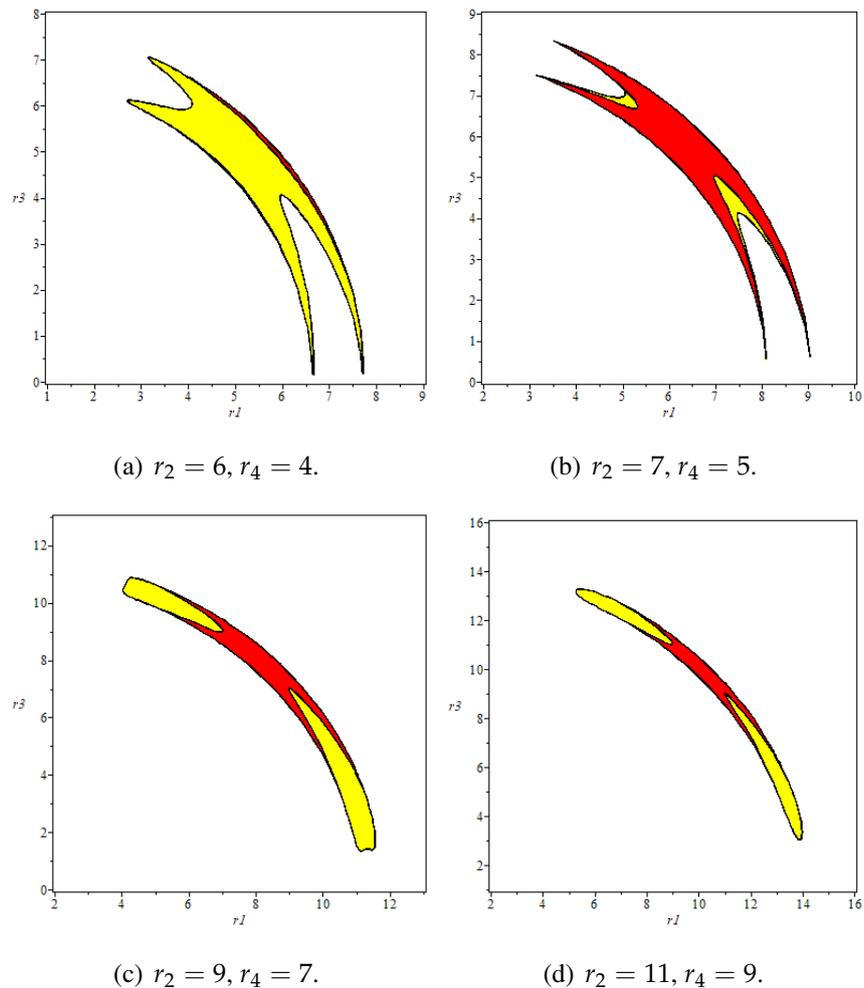


FIGURE 3.21 – PGD pour le mode de Schoenflies, courbe de singularités image, $a = 1, b = c = 2, d = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

Nous constatons que lorsque r_4 devient de plus en plus grand (d'un dessin à un autre), la courbe de singularité image s'aplatit sur la droite de la forme $r_1 + r_3 = c$ où c est une constante. En effet, la différence $r_1 + r_3 - (r_2 + r_4)$ tend vers 0.

Nous allons représenter les courbes de singularités ci-dessus en leur appliquant une transformation affine, fonction de r_1 et r_3 de la forme $w_3 = r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)$ et par conséquent $r_3 = w_3/r_4 - r_1 + r_2 + r_3$. Ce qui donne les courbes ci-dessous. Ainsi les tranches se correspondent par cette transformation affine près qui élargie la droite $r_1 + r_3 = c$.

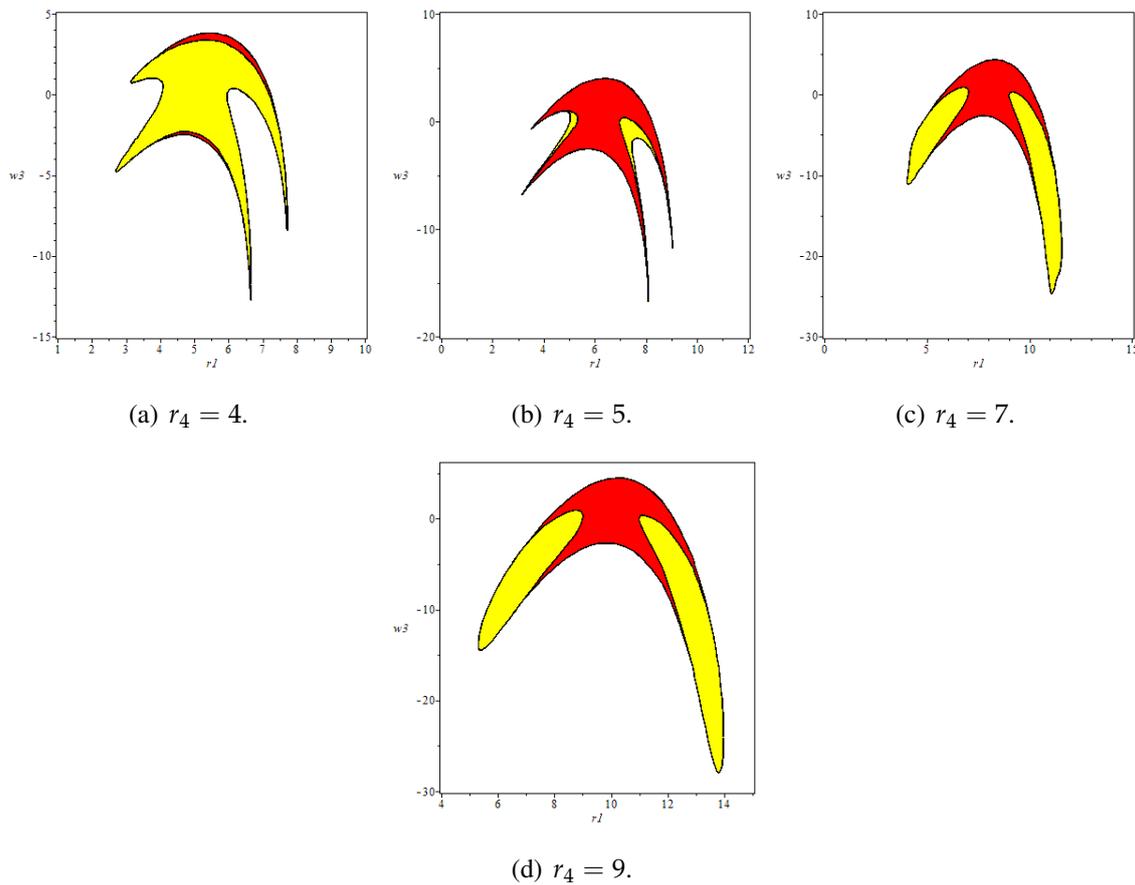


FIGURE 3.22 – PGD pour le mode de Schoenflies, courbes de singularités image obtenues par une transformation affine. $a = 1$, $b = c = 2$, $d = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

Nous remarquons ainsi la convergence de la situation non dégénérée illustrée par les dessins ci-dessus vers la situation dégénérée, qui s'observe déjà bien pour des valeurs de r_4 relativement petites.

Nous pouvons conclure en disant que la situation dégénérée reflète bien ce qui se passe pour des longueurs de jambes suffisamment grandes.

Cas où le produit $(c - a)(b - d)$ est positif.

Pour ce cas, prenons $a = d = 2$, $b = c = 3$. Comme précédemment, les deux paraboloides hyperbo-

liques et la surface \mathcal{S} ont respectivement pour équations

$$d_1^2 - d_1 d_2 + e_3 - 20 = 0,$$

$$d_1^2 - d_1 d_2 + e_3 + 20 = 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} & 28561d_1^8 - 114244d_1^7d_2 + 185766d_1^6d_2^2 - 157444d_1^5d_2^3 + 75361d_1^4d_2^4 - 21600d_1^3d_2^5 + 3600d_1^2d_2^6 \\ & + 97344d_1^6e_3 - 292032d_1^5d_2e_3 + 320832d_1^4d_2^2e_3 - 154944d_1^3d_2^3e_3 + 36000d_1^2d_2^4e_3 - 7200d_1d_2^5e_3 \\ & - 878800d_1^6 + 2636400d_1^5d_2 - 3075800d_1^4d_2^2 + 1757600d_1^3d_2^3 - 439400d_1^2d_2^4 + 137566d_1^4e_3^2 \\ & - 275132d_1^3d_2e_3^2 + 151966d_1^2d_2^2e_3^2 - 14400d_1d_2^3e_3^2 + 3600d_2^4e_3^2 - 1497600d_1^4e_3 + 2995200d_1^3d_2e_3 \\ & - 2246400d_1^2d_2^2e_3 + 748800d_1d_2^3e_3 + 97344d_1^2e_3^3 - 97344d_1d_2e_3^3 + 10140000d_1^4 - 20280000d_1^3d_2 \\ & + 11140000d_1^2d_2^2 - 1000000d_1d_2^3 + 250000d_2^4 - 618800d_1^2e_3^2 + 618800d_1d_2e_3^2 - 309400d_2^2e_3^2 \\ & + 28561e_3^4 + 5760000d_1^2e_3 - 5760000d_1d_2e_3 - 52000000d_1^2 + 52000000d_1d_2 - 26000000d_2^2 \\ & - 3380000e_3^2 + 100000000 = 0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

La surface \mathcal{S} se trouve également coincée entre les deux paraboloides hyperboliques (voir Fig. 3.23 (b))

L'ensemble \mathcal{T} se décompose dans ce cas en deux paraboles donc la première, dans le plan $d_2 = 0$, a pour équation $13d_1^2 + 13e_3 - 100 = 0$ et la seconde, dans le plan $d_2 = 2d_1$, pour équation $13d_2^2 - 52e_3 - 400 = 0$ (voir Fig. 3.23 (a)). La surface \mathcal{S} a des auto-intersections le long d'arcs de chacune des paraboles : deux nappes viennent se croiser sur ces arcs. En dehors de ces arcs d'auto-intersection, les paraboles ne sont pas contenues dans la partie de dimension 2 de la surface \mathcal{S} . On peut voir ces paraboles comme des « manches » de la surface \mathcal{S} , comme pour le fameux parapluie de Whitney d'équation $z^2 = xy^2$ où la surface a une auto-intersection sur le demi-axe des x positifs, tandis que le demi-axe des x négatifs est en dehors de la partie de dimension 2 de la surface : l'axe des x est le « manche » du parapluie.

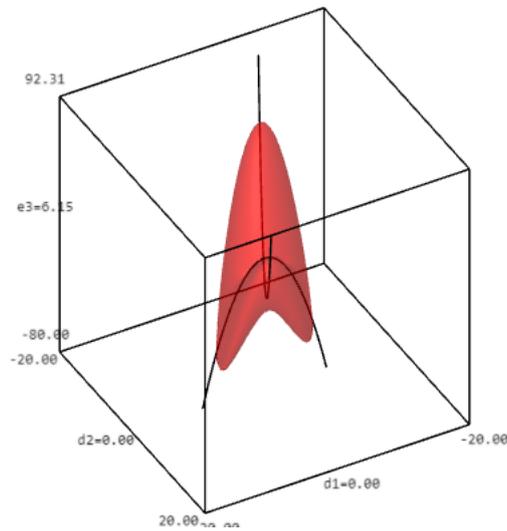
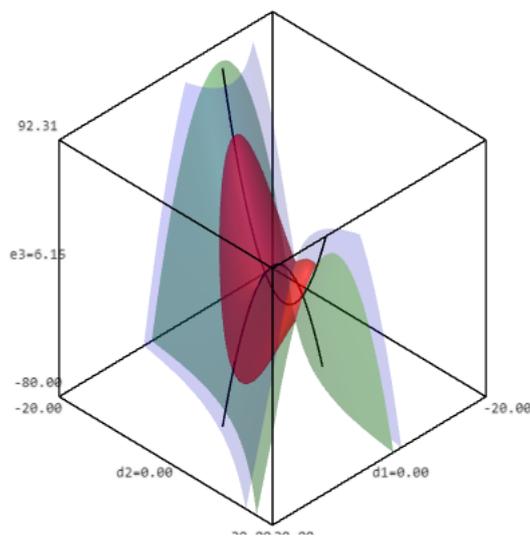

 (a) Surface \mathcal{S} et les deux paraboles.

 (b) Surface \mathcal{S} avec ses deux manches coincée entre les deux paraboloides hyperboliques.

 FIGURE 3.23 – PGDD au bord du mode de Schoenflies, surface de singularités image, paramètres $a = 2, b = c = 3, d = 2$.

Le PGDD admet au plus 4 solutions réelles. La description suivant les régions est un peu délicate. Nous allons nous contenter de la description plane. De même la section dans le plan $d_2 = 2$ donne les courbes de singularité dégénérée suivantes. Ici également r_2 et r_4 sont fixés avec une différence égale à 2 dans chaque dessin et grandissent d'un dessin à l'autre.

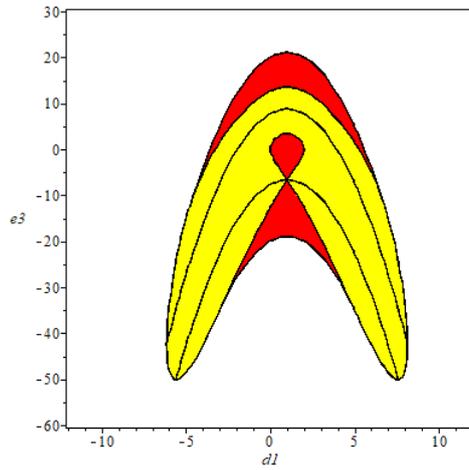


FIGURE 3.24 – PGDD au bord du mode de Schoenflies, courbes de singularité images $a = d = 2$, $b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

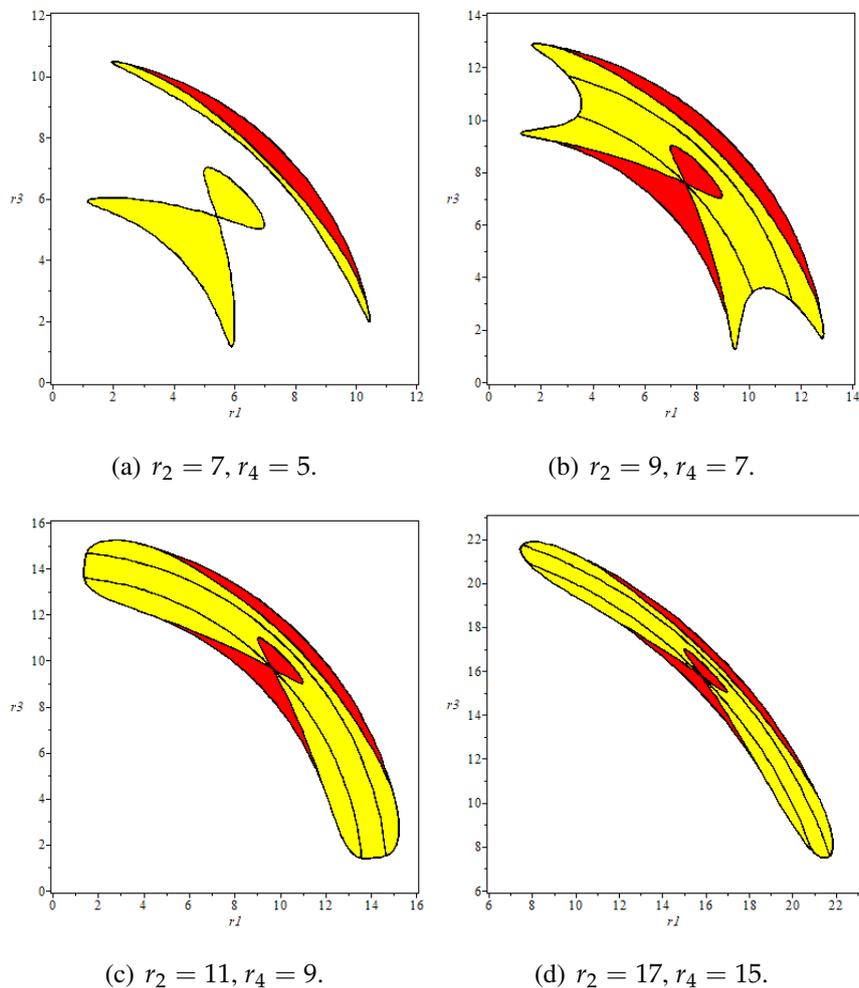


FIGURE 3.25 – PGD pour le mode de Schoenflies, courbe de singularités image, $a = d = 2$, $b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

Nous constatons également que la courbe de singularité image s'écrase sur la droite de la forme $r_1 + r_3 = c$ où c est une constante lorsque r_4 devient de plus en plus grand.

Nous appliquons également une transformation affine $w_3 = r_4(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)$. Ce qui donne les courbes ci-dessous.

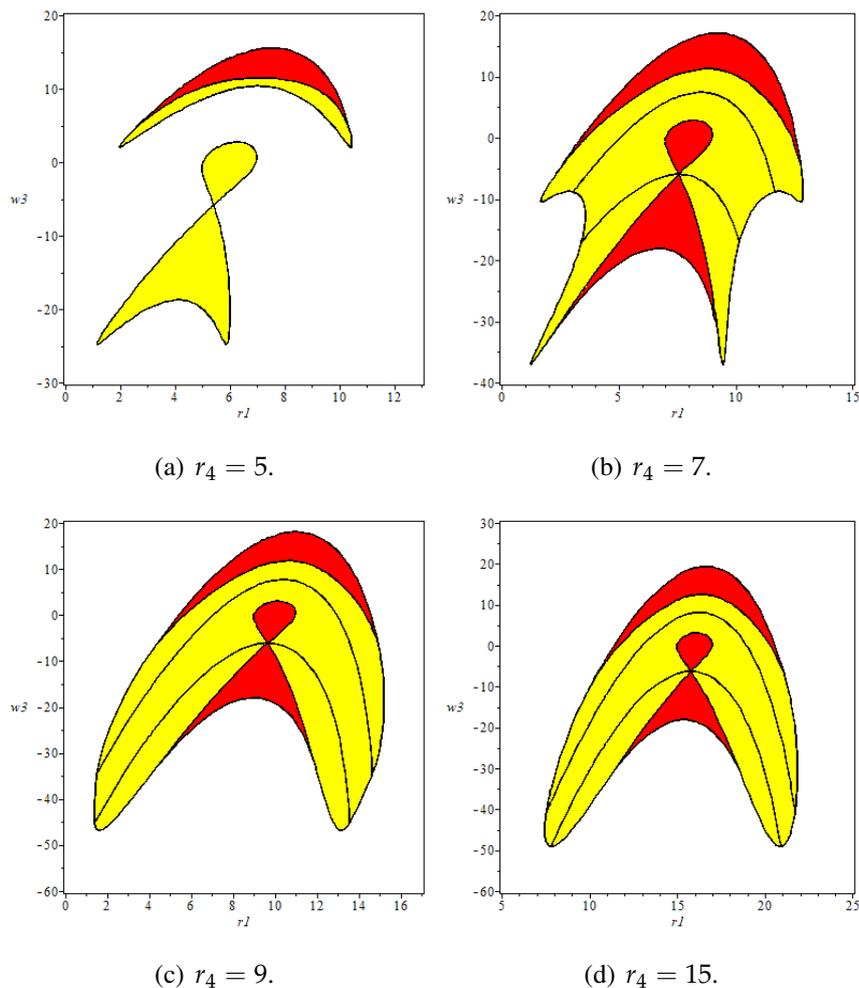


FIGURE 3.26 – PGD pour le mode de Schoenflies, courbes de singularités image obtenues par une transformation affine. $a = d = 2$, $b = c = 3$. Région rouge : 4 solutions réelles, Régions jaunes : 2 solutions réelles

Ici nous observons et nous concluons également que la situation dégénérée reflète bien ce qui se passe pour des longueurs de jambes suffisamment grandes.

3.6.5.3 Self-motion

Nous allons maintenant étudier l'existence de self-motions du manipulateur en vérifiant si les fibres (les images réciproques des points de la parabole par l'application géométrique inverse dégénérée) au-dessus des arcs des paraboles, courbes d'auto-intersections de la surface \mathcal{S} sont des self-motions. Pour cela, nous allons ajouter un à un les idéaux engendrés par les polynômes décrivant les deux paraboles à l'idéal qui décrit le modèle géométrique inverse du mode de Schoenflies.

Considérons donc l'idéal suivant

$$\langle -10w_3y_1 - 2w_0y_2 + d_1, -2w_0y_1 - 10w_3y_1 - 2w_0y_2 - 10w_3y_2 + d_2, -96w_3^2y_1y_2 + 20w_0w_3 - 4y_1y_2 - 20y_0y_3 + e_3, w_0^2 + w_3^2 - 1, y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1, w_0y_0 + w_3y_3, d_2, 13d_1^2 + 13e_3 - 100. \rangle$$

Il se décompose en deux idéaux primaires :

$$\langle d_2, 5x_0 + x_3, y_1 + y_2, y_0 - 5y_3, 13d_1^2 + 13e_3 - 100, x_3d_1 + 10y_2, 130y_2d_1 - 13x_3e_3 + 100x_3, 26x_3^2 - 25, 52y_2x_3 + 5d_1, 17576y_3^2 - 13e_3 - 576, 1352y_2^2 + 13e_3 - 100 \rangle$$

$$\langle d_2, x_0 + 5x_3, 5y_0 - y_3, 13d_1^2 + 13e_3 - 100, 13x_3d_1 - 5y_1 + 5y_2, 5y_1d_1 - 5y_2d_1 + 13x_3e_3 - 100x_3, 26x_3^2 - 1, 10y_1x_3 - 10y_2x_3 - d_1, 100y_1y_2 + 52y_3^2 - 13e_3 + 50, 25y_1^2 + 25y_2^2 + 26y_3^2 - 25, 100y_2^2d_1 + 52y_3^2d_1 - 260y_2x_3e_3 + 2000y_2x_3 - 13d_1e_3 + 50d_1, 100y_2^2x_3 + 52y_3^2x_3 + 10y_2d_1 - 13x_3e_3 + 50x_3, 100y_2^3 - 52y_1y_3^2 + 104y_2y_3^2 + 13y_1e_3 - 50y_1 - 100y_2 \rangle$$

Le premier idéal est de dimension 1 (ce qui est normal car nous avons ajouté un idéal de dimension 1). Il décrit la fibre au-dessus des arcs de la parabole d'équation $13d_1^2 + 13e_3 - 100 = 0$ dans le plan $d_2 = 0$ qui sortent de la surface \mathcal{S} . Le second idéal est de dimension 2; nous avons donc une infinité de solutions au PGDD. Il y a donc des self-motions au dessus de l'arc de cette parabole qui est une courbe d'auto-intersection de \mathcal{S} .

De même, le deuxième idéal ci-dessous

$$\langle 2d_1 - d_2, 5x_0 - x_3, y_1 - y_2, y_0 + 5y_3, 13d_2^2 - 52e_3 - 400, x_3d_2 - 20y_2, 65y_2d_2 - 13x_3e_3 - 100x_3, 26x_3^2 - 25, 104y_2x_3 - 5d_2, 17576y_3^2 + 13e_3 - 576, 1352y_2^2 - 13e_3 - 100 \rangle$$

admet deux composantes primaires suivantes

$$\langle 2d_1 - d_2, y_1 - y_2, y_0 + 5y_3, 5x_0 - x_3, 13d_2^2 - 52e_3 - 400, 65y_2d_2 - 13x_3e_3 - 100x_3, x_3d_2 - 20y_2, 17576y_3^2 + 13e_3 - 576, 1352y_2^2 - 13e_3 - 100, 104x_3y_2 - 5d_2, 26x_3^2 - 25 \rangle$$

$$\langle 2d_1 - d_2, x_0 - 5x_3, 5y_0 + y_3, 13d_2^2 - 52e_3 - 400, 13x_3d_2 - 10y_1 - 10y_2, 5y_1d_2 + 5y_2d_2 - 26x_3e_3 - 200x_3, 26x_3^2 - 1, 20y_1x_3 + 20y_2x_3 - d_2, 100y_1y_2 - 52y_3^2 - 13e_3 - 50, 25y_1^2 + 25y_2^2 + 26y_3^2 - 25, 100y_2^2d_2 + 52y_3^2d_2 - 520y_2x_3e_3 - 4000y_2x_3 + 13d_2e_3 + 50d_2, 100y_2^2x_3 + 52y_3^2x_3 - 5y_2d_2 + 13x_3e_3 + 50x_3, 100y_2^3 + 52y_1y_3^2 + 104y_2y_3^2 + 13y_1e_3 + 50y_1 - 100y_2 \rangle$$

Le premier idéal, également de dimension 1, correspond à la fibre au-dessus des arcs de la parabole d'équation $13d_2^2 - 52e_3 - 400 = 0$ dans le plan $d_2 = 2d_1$ qui sont en dehors de \mathcal{S} . On vérifie également que la deuxième composante est de dimension 2 et ainsi décrit également les self-motions de la plateforme au-dessus de l'arc de la deuxième parabole, courbe d'auto-intersection de la surface \mathcal{S} .

Les courbes d'auto-intersection et les points au-dessus desquels il y a du self-motion se remarque également dans les tranches en dimension 2. Pour quelques valeurs de d_2 fixées, nous avons les dessins suivants :

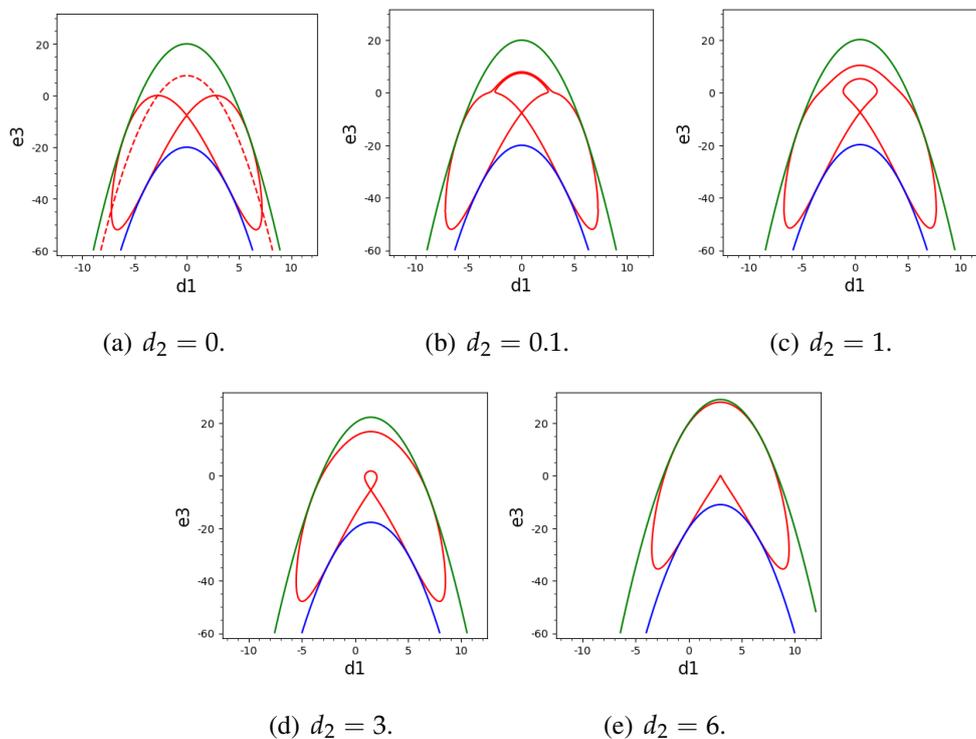


FIGURE 3.27 – Courbes des singularités images-Self-motion

Nous observons par exemple, pour $d_2 = 0.1$, deux demi-cercles très proches l'un de l'autre et qui pour $d_2 = 0$ se fondent en un seul et les points où il y a self-motion correspondent aux points où ils se rattachent au reste de la courbe. En réalité cette double courbe est là, elle n'apparaît pas explicitement sur le dessin mais nous pouvons l'attraper en cherchant son équation.

En effet, dans la tranche $d_2 = 0$ de la surface de singularité image, si nous factorisons l'équation correspondant à la surface \mathcal{S} , nous obtenons l'ensemble suivant

$$(13d_1^2 + 13e_3 - 100)^2(169d_1^4 + 238d_1^2e_3 - 2600d_1^2 + 169e_3^2 + 2600e_3 + 10000) = 0$$

C'est donc la réunion de la double parabole d'équation $(13d_1^2 + 13e_3 - 100)^2 = 0$, la double courbe annoncée ci-dessus qui est un arc de parabole (représenté en pointillé sur la représentation graphique) et de la courbe définie par le deuxième facteur (surface en rouge sur la représentation graphique 3.27 (a)).

Pour la discussion plus détaillée de self-motion plan (Fig.3.33), nous considérons la deuxième composante (la composante de dimension 2) de l'image réciproque de la parabole du plan $d_2 = 0$. Puis nous calculons les fibres au dessus de points de la parabole. Elles sont de dimension 1, mais ont ou non des points réels. Pour les examiner, nous considérons l'ensemble défini par l'idéal engendré par les équations du PGDD et les équations de la composante considérée et nous le projetons, pour une valeur de d_1 fixée appartenant à une portion spécifique de la parabole, sur le plan de coordonnées y_0, y_2 (cela correspond à l'élimination des variables et paramètres $d_1, d_2, e_3, y_3, y_2, x_0, x_3$ de l'idéal). Nous obtenons un polynôme de degré 2 en y_0^2 et y_1^2 qui, en faisant un changement $u = y_0^2$ et $v = y_1^2$, nous obtenons l'équation d'une conique. Pour ce qui est de l'existence ou non de self-motion, nous

vérifions dans chaque portion si cette conique a ou n'a pas de point dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ (le couple (y_0^2, y_1^2) devrait appartenir à ce carré si les y_i sont réels tels que $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$).

- ✓ Portions en dessous de la courbe en huit (voir 3.27 (a)). Prenons par exemple $d_1 = 8$.

La projection sur le plan de coordonnées y_0, y_2 donne la courbe suivante :

$$422500y_0^4 + 65000y_0^2y_1^2 + 2500y_1^4 + 508300y_0^2 - 2500y_1^2 + 152881 = 0$$

Ce qui conduit par changement de variables à la conique d'équation suivante :

$$422500u^2 + 1300u(50v + 391) + 2500v^2 - 2500v + 152881 = 0$$

dont la représentation graphique montre clairement qu'il n'y a pas de points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

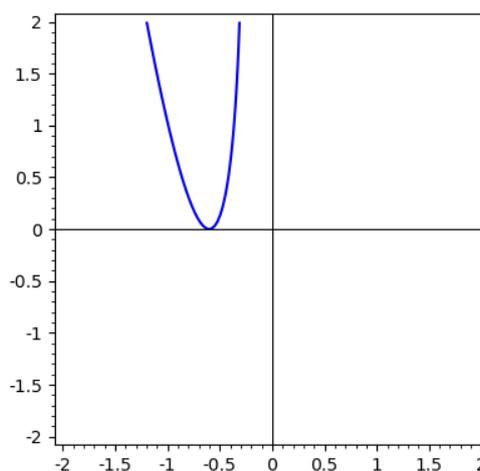


FIGURE 3.28 – Fibre au dessus du point de la parabole correspondant à $d_1 = 8$ - Aucun point réel dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

- ✓ Portions à l'intérieur de la courbe en huit, $d_1 = 5$.

La projection sur le plan de coordonnées y_0, y_2 donne la courbe suivante :

$$2704y_0^4 + 416y_0^2y_1^2 + 16y_1^4 + 1144y_0^2 - 16y_1^2 + 121 = 0$$

Le changement de variables donne la conique d'équation suivante :

$$2704u^2 + 104u(4v + 11) + 16v^2 - 16v + 121 = 0$$

La représentation graphique montre également qu'il n'y a pas de points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

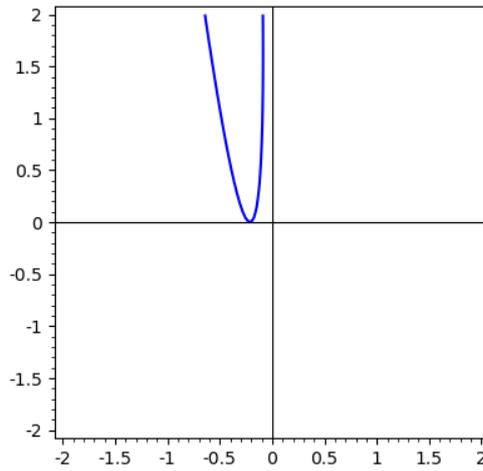


FIGURE 3.29 – Fibre au dessus du point de la parabole correspondant à $d_1 = 5$ - Aucun point réel dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

- ✓ Sommet de la parabole ($d_1 = 0$).

La courbe de projection a pour équation :

$$26y_0^2 + 2y_1^2 - 1 = 0$$

La conique a pour équation :

$$26u + 2v - 1 = 0$$

Nous voyons très bien qu'il y a des points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Il y a donc de self-motion.

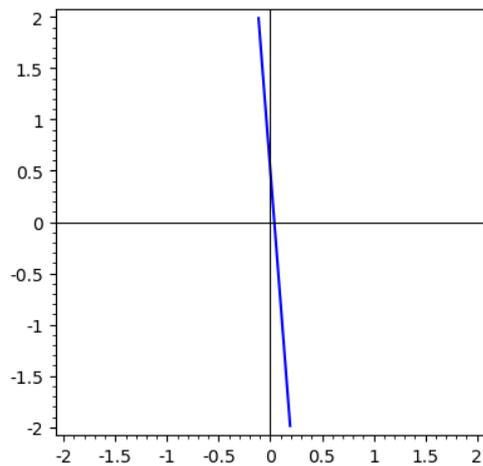


FIGURE 3.30 – Fibre au dessus du sommet de la parabole ($d_1 = 0$) - Points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

- ✓ Points sur l'arc de parabole autour de son sommet. Prenons $d_1 = 1$.

L'équation de la courbe de projection est la suivante :

$$1690000y_0^4 + 260000y_0^2y_1^2 + 10000y_1^4 - 96200y_0^2 - 10000y_1^2 + 1369 = 0$$

Et celle de la conique est la suivante :

$$1690000u^2 + 2600u(100v - 37) + 10000v^2 - 10000v + 1369 = 0$$

Nous voyons également des points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Ce qui indique la présence de self-motion.

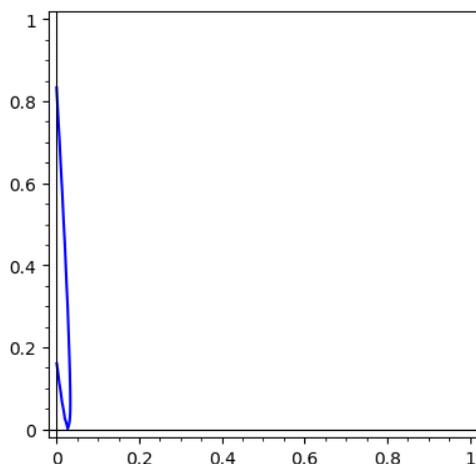


FIGURE 3.31 – Fibre au dessus d’un point autour du sommet de la parabole correspondant $d_1 = 1$ - Points réels dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

- ✓ Points, extrémités de l’arc de parabole qui contient le sommet. Ce sont des points avec $d_1 = \pm 10\sqrt{13}$

La projection donne la courbe d’équation :

$$676y_0^4 + 104y_0^2y_1^2 + 4y_1^4 + 52y_0^2 - 4y_1^2 + 1 = 0$$

Puis le changement de variable donne la conique d’équation :

$$676u^2 + 52u(2v + 1) + 4v^2 - 4v + 1$$

Ici la conique a une tangence avec l’axe des v au point $v = 1/2$. La courbe en y_0, y_1 a donc un seul point réel $y_0 = 0, y_1 = \sqrt{2}$. La courbe de self-motion est réduite dans ce cas à un point (ou plutôt deux points symétriques par rapport à l’origine donnant la même pose).

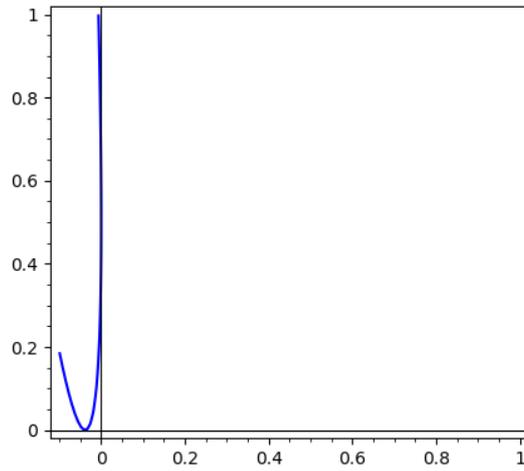


FIGURE 3.32 – Points, extrémités de l’arc de parabole qui contient le sommet - Un point réel dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Ci-dessous (Fig. 3.33) nous résumons tout ce qui se passe au dessus des différents arcs de la parabole dans le plan $d_2 = 0$.

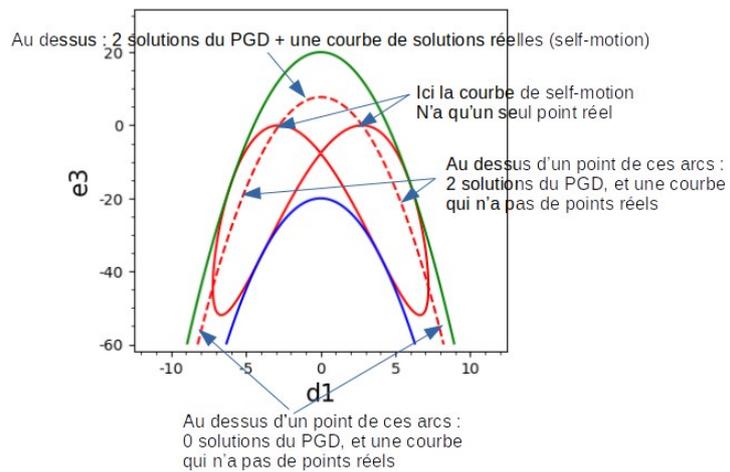


FIGURE 3.33 – Self-motion au dessus de la parabole dans le plan $d_2 = 0$

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux compactifications du groupe des déplacements de l'espace et de l'utilisation des points à l'infini pour des problèmes de la cinématique des robots. Nous avons commencé par montrer quelques exemples d'utilisation de la compactification de Study pour la modélisation algébrique en robotique et par conséquent appliquer les méthodes de la géométrie étudiées. Afin d'étudier et d'utiliser les points à l'infini de $SE_3(\mathbb{R})$, nous avons introduit une nouvelle compactification qui dérive de celle de Study par éclatement. L'utilisation des points à l'infini de $SE_3(\mathbb{R})$ dans cette compactification nous a permis de résoudre quelques problèmes des robots parallèles à 3 degrés de liberté, notamment la facilité de décrire certains modes opératoires tel que le mode général du Tsai 3-UPP et la simplicité de résoudre les problèmes géométriques directs. Nous avons aussi montré que cette nouvelle compactification est isomorphe à une autre obtenue en prenant la clôture projective du sous-groupe de translations dans $SE_3(\mathbb{R})$ vu comme produit semi-direct du groupe des rotations avec le groupe des translations.

Ce travail est bien-sûr loin d'être achevé. On peut remarquer que nous nous sommes limités qu'aux robots parallèles à trois degrés de liberté et dont la base et la plateforme mobile sont en forme d'un triangle équilatéral. La prochaine étape du travail serait de s'intéresser aux mécanismes contraints avec des degrés de liberté un peu élevé; la difficulté réside dans la compactification des espaces articulaires. Par exemple, pour le manipulateur 4-UPU [CKM15], nous avons obtenu une condition linéaire sur les longueurs des jambes. Aussi, il serait intéressant d'étudier les cas où l'architecture de la base et de la plateforme est perturbée, par exemple en remplaçant le rectangle par un quadrilatère quelconque.

Troisième partie

Appendices

Feuille de calcul Sagemath

Nous présentons ici quelques feuilles de calcul que nous avons eu à faire avec le logiciel de calcul symbolique Sagemath.

A Le 3-RPS

A.1 Détermination des modes opératoires

Déclaration de l'anneau de polynôme en les huit paramètres de Study sur l'extension quadratique des rationnels par la racine carrée de 3

```
In [1]: F.<sq3>=QuadraticField(3)
        R.<x0,x1,x2,x3,y0,y1,y2,y3>=PolynomialRing(F,8)
        x=[x0,x1,x2,x3] ; y=[y0,y1,y2,y3]
```

Coordonnées des centres des articulations dans le repère fixe (liste A) et le repère lié à la plateforme mobile (liste b) et des axes de rotation (liste axe)

```
In [2]: k1=1; k2=1/2
        A=[vector(R,[0,k1,0]),vector(R,[0,-k1/2,k1*sq3/2]),\
        vector(R,[0,-k1/2,-k1*sq3/2])]
        b=[vector(R,[0,k2,0]),vector(R,[0,-k2/2,k2*sq3/2]),\
        vector(R,[0,-k2/2,-k2*sq3/2])]
        axe=[vector([0,V[2],-V[1]]) for V in A]
```

Paramétrisation de Study de la matrice de rotation et du vecteur de translation

```
In [3]: rotation=matrix(R,3,3,\
        [x0^2+x1^2-x2^2-x3^2,2*(x1*x2-x0*x3),2*(x1*x3+x0*x2),\
        2*(x1*x2+x0*x3),x0^2-x1^2+x2^2-x3^2,2*(x2*x3-x0*x1),\
        2*(x1*x3-x0*x2),2*(x2*x3+x0*x1),x0^2-x1^2-x2^2+x3^2])
        translation=2*vector(R,[-x0*y1+x1*y0-x2*y3+x3*y2,\
        -x0*y2+x1*y3+x2*y0-x3*y1,\
        -x0*y3-x1*y2+x2*y1+x3*y0])
```

Équations du 3-plan et de la quadrique de Study

```
In [4]: Delta=add(x[i]^2 for i in range(4))
        Study=add(x[i]*y[i] for i in range(4))
```

Coordonnées des centres des articulations de la plateforme dans le repère de la base.

```
In [5]: B=[(rotation*v+translation) for v in b]
```

Équations de contraintes

```
In [6]: ctr=[(B[i]-Delta*A[i]).dot_product(axe[i]) for i in range(3)]
        ctr
```

```
Out [6]: [-x0*x1 - x2*x3 - 2*x3*y0 - 2*x2*y1 + 2*x1*y2 + 2*x0*y3,
          -1*x0*x1 + (-1/4*sq3)*x2^2 + 1/2*x2*x3 + (1/4*sq3)*x3^2
          + (sq3)*x2*y0 + x3*y0 + x2*y1 + (-sq3)*x3*y1 + (-sq3)*x0*y2
          - x1*y2 - x0*y3 + (sq3)*x1*y3,
          -1*x0*x1 + (1/4*sq3)*x2^2 + 1/2*x2*x3 + (-1/4*sq3)*x3^2
          + (-sq3)*x2*y0 + x3*y0 + x2*y1 + (sq3)*x3*y1 + (sq3)*x0*y2
          - x1*y2 - x0*y3 + (-sq3)*x1*y3]
```

Idéal définissant l'espace des configurations : saturation de l'idéal engendré par les équations de contraintes et l'équation de la quadrique de Study par rapport à l'idéal de l'équation du 3-plan.

```
In [7]: iEspConf=R.ideal([ctr[i] for i in range(3)]+[Study])\
        .saturation(R.ideal(Delta))
        iEspConf
```

```
Out [7]: (Ideal (x0*y0 + x1*y1 + x2*y2 + x3*y3, x2*x3 + 2*x3*y0
+ 2*x2*y1 - 2*x1*y2 - 2*x0*y3, x2^2 - x3^2 - 4*x2*y0
+ 4*x3*y1 + 4*x0*y2 - 4*x1*y3, x0*x1, x1^2*y1 + x1*x2*y2
+ x1*x3*y3, x3^3 - 12*x3*y0^2 - 2*x3^2*y1 - 4*x2*y0*y1
- 8*x3*y1^2 - 2*x1*x2*y2 - 4*x0*x3*y2 + 12*x1*y0*y2
- 8*x0*y1*y2 - 2*x0*x2*y3 + 4*x1*x3*y3 - 4*x1*y1*y3
- 12*x2*y2*y3 - 12*x3*y3^2, x3^2*y0*y1 + 2*x2*y0^2*y1
- 8*y0^3*y1 - 2*x3*y0*y1^2 - 8*y0*y1^3 + x1*x3*y1*y2
+ 2*x1*y1^2*y2 - 8*y0*y1*y2^2 + 2*x1*y2^3 - x1*x2*y1*y3
+ 2*x1*y0*y1*y3 + 6*x3*y1*y2*y3 + 2*x2*y1*y3^2
- 8*y0*y1*y3^2 - 6*x1*y2*y3^2, x1*x3^2*y1 + 2*x1*x2*y0*y1
- 8*x1*y0^2*y1 - 2*x1*x3*y1^2 - 8*x1*y1^3 + 2*x1*x3*y2^2
```

```

- 8*x1*y1*y2^2 + 2*x1*x2*y2*y3 - 4*x1*x3*y3^2 - 8*x1*y1*y3^2)
of Multivariate Polynomial Ring in x0, x1, x2, x3, y0, y1,
y2, y3 over Number Field in sq3 with defining polynomial
x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?, 1)

```

La décomposition primaire de l'espace des configurations (sans mauvais points de la quadrique de Study) obtenue après saturation par l'idéal du 3-plan est très coûteuse en temps. Nous allons considérer l'espace des configurations avec les mauvais points de la quadrique de Study puis les enlever après décomposition.

```

In [8]: idealEspConfig=R.ideal([ctr[i] for i in range(3)]+[Study])
idealEspConfig

```

```

Out [8]: Ideal (-x0*x1 - x2*x3 - 2*x3*y0 - 2*x2*y1 + 2*x1*y2 + 2*x0*y3,
- x0*x1 + (-1/4*sq3)*x2^2 + 1/2*x2*x3 + (1/4*sq3)*x3^2
+ (sq3)*x2*y0 + x3*y0 + x2*y1 + (-sq3)*x3*y1 + (-sq3)*x0*y2
- x1*y2 - x0*y3 + (sq3)*x1*y3, - x0*x1 + (1/4*sq3)*x2^2
+ 1/2*x2*x3 + (-1/4*sq3)*x3^2 + (-sq3)*x2*y0 + x3*y0 + x2*y1
+ (sq3)*x3*y1 + (sq3)*x0*y2 - x1*y2 - x0*y3 + (-sq3)*x1*y3,
x0*y0 + x1*y1 + x2*y2 + x3*y3) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3
with defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?

```

L'espace des configurations du 3-RPS est de dimension 3 car son polynôme de Hilbert est de degré 3.

```

In [9]: idealEspConfig.hilbert_polynomial()

```

```

Out [9]: 8/3*t^3 + 16/3*t

```

Décompositions primaires de l'idéal de l'espace des configurations

```

In [10]: compPrim=idealEspConfig.primary_decomposition()
compPrim

```

```

Out [10]: [Ideal (x1, x0*y0 + x2*y2 + x3*y3, x2*x3 + 2*x3*y0 + 2*x2*y1
- 2*x0*y3, x2^2 - x3^2 - 4*x2*y0 + 4*x3*y1 + 4*x0*y2, x3^2*y0
+ 2*x2*y0^2 - 8*y0^3 - 2*x3*y0*y1 - 8*y0*y1^2 - 8*y0*y2^2
+ 6*x3*y2*y3 + 2*x2*y3^2 - 8*y0*y3^2, x3^3 - 12*x3*y0^2
- 2*x3^2*y1 - 4*x2*y0*y1 - 8*x3*y1^2 - 4*x0*x3*y2 - 8*x0*y1*y2
- 2*x0*x2*y3 - 12*x2*y2*y3 - 12*x3*y3^2) of Multivariate

```

```

Polynomial Ring in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number
Field in sq3 with defining polynomial x^2 - 3 with
sq3 =1.732050807568878?,
Ideal (x2*y2 + x3*y3, x3*y1 + x0*y2, x2*y1 - x0*y3, x3*y0
- x1*y2, x2*y0 + x1*y3, x0*y0 + x1*y1, x3^2, x2*x3, x1*x3,
x0*x3, x2^2, x1*x2, x0*x2, x1^2, x0*x1, x0^2)
of Multivariate Polynomial Ring in x0, x1, x2, x3, y0,
y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with defining
polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (x0, x1*y1 + x2*y2 + x3*y3, x2*x3 + 2*x3*y0 + 2*x2*y1
- 2*x1*y2, x2^2 - x3^2 - 4*x2*y0 + 4*x3*y1 - 4*x1*y3,
x3^2*y1 + 2*x2*y0*y1 - 8*y0^2*y1 - 2*x3*y1^2 - 8*y1^3
+ 2*x3*y2^2 - 8*y1*y2^2 + 2*x2*y2*y3 - 4*x3*y3^2
- 8*y1*y3^2, x3^3 - 12*x3*y0^2 - 16*y0^2*y1 - 12*x3*y1^2
- 16*y1^3 - 2*x1*x2*y2 + 12*x1*y0*y2 + 4*x3*y2^2 - 16*y1*y2^2
+ 4*x1*x3*y3 - 4*x2*y2*y3 - 16*x3*y3^2 - 16*y1*y3^2)
of Multivariate Polynomial Ring in x0, x1, x2, x3, y0, y1,
y2, y3 over Number Field in sq3 with defining polynomial
x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?]

```

On vérifie que Delta appartient au deuxième idéal mais pas aux deux autres.

```
In [11]: [Delta in compPrim[i] for i in range(3)]
```

```
Out[11]: [False, True, False]
```

On vérifie que les deux idéaux primaires sont premiers. Donc, ils définissent les modes opératoires du 3-RPS. Le mode opératoire défini par le deuxième idéal est considéré comme le premier mode et celui défini par le premier, le second mode.

```
In [12]: [compPrim[i].is_prime() for i in range(0, 3, 2)]
```

```
Out[12]: [True, True]
```

Les deux modes opératoires ont pour dimension 3 car leur polynôme de Hilbert ont pour degré 3

```
In [13]: [compPrim[i].hilbert_polynomial() for i in range(0, 3, 2)]
```

```
Out[13]: [7/6*t^3 + 5/2*t^2 + 7/3*t + 1, 7/6*t^3 + 5/2*t^2 + 7/3*t + 1]
```

A.2 Calcul des bords des modes opératoires du 3-RPS

On définit deux nouveaux anneaux des polynômes qui sont W et S.

```
In [14]: W.<x0,x1,x2,x3,y0,y1,y2,y3,w0,w1,w2,w3>\
         =PolynomialRing(QQ,12)
         S.<y0,y1,y2,y3,w0,w1,w2,w3>=PolynomialRing(QQ,8)
```

Equations de l'éclatement et du diviseur exceptionnel

```
In [15]: w=[w0,w1,w2,w3];x=[x0,x1,x2,x3]
         iEclat=W.ideal([x[i]*w[j]-x[j]*w[i] for i in range(3) \
         for j in range(i+1,4)])
         iDivExcep=W.ideal(x)
```

Transformée stricte et bord du premier mode opératoire

```
In [16]: iTranStr1,expo=(compPrim[2].change_ring(W)+iEclat)\
         .saturation(iDivExcep)
         iBord1=(iTranStr1+idealDivExcep).elimination_ideal(x)\
         .change_ring(S)
         iBord1
```

```
Out [16]: Ideal (w0, y3*w1 + y0*w2 - y1*w3, y2*w1 - y1*w2 - y0*w3,
         y1*w1 + y2*w2 + y3*w3, y0*y2*w2 + y1*y3*w2 - y1*y2*w3
         + y0*y3*w3, y1^2*w2 + y2^2*w2 + y0*y1*w3 + y2*y3*w3,
         y0*y1*w2 - y2*y3*w2 - y1^2*w3 - y3^2*w3, y0^2*y1
         + y1^3 + y1*y2^2 + y1*y3^2) of Multivariate Polynomial
         Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field
```

On vérifie que iBord1 n'est pas premier; donc on peut faire sa décomposition primaire.

```
In [17]: iBord1.is_prime()
```

```
Out [17]: False
```

On effectue la décomposition primaire de l'idéal du bord 1, on obtient deux idéaux primaires dont un (le deuxième) ne définit pas un déplacement.

```
In [18]: compBord1=iBord1.primary_decomposition()
         compBord1
```

```
Out [18]: [Ideal (w0, y1, y2*w2 + y3*w3, y3*w1 + y0*w2, y2*w1 - y0*w3)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1,
w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w0, w1^2 + w2^2 + w3^2, y3*w1 + y0*w2 - y1*w3, y2*w1
- y1*w2 - y0*w3, y1*w1 + y2*w2 + y3*w3, y0*w1 - y3*w2 + y2*w3,
y0^2 + y1^2 + y2^2 + y3^2, y0*y2*w2 + y1*y3*w2 - y1*y2*w3
+ y0*y3*w3, y1^2*w2 + y2^2*w2 + y0*y1*w3 + y2*y3*w3, y0*y1*w2
- y2*y3*w2 - y1^2*w3 - y3^2*w3) of Multivariate Polynomial
Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field]
```

Le bord du premier mode opératoire est donc défini par l'idéal ci-dessous.

```
In [19]: compBord1[0]
```

```
Out [19]: Ideal (w0, y1, y2*w2 + y3*w3, y3*w1 + y0*w2, y2*w1 - y0*w3)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0,
w1, w2, w3 over Rational Field
```

Transformée stricte et bord du deuxième mode opératoire

```
In [20]: iTranStr2,expo=(compPrim[0].change_ring(W)+iEclat)\
.saturation(iDivExcep)
iBord2=(iTranStr2+idealDivExcep).elimination_ideal(x)\
.change_ring(S)
iBord2
```

```
Out [20]: Ideal (w1, y3*w0 - y1*w2 - y0*w3, y2*w0 - y0*w2 + y1*w3,
y0*w0 + y2*w2 + y3*w3, y1*y2*w2 - y0*y3*w2 + y0*y2*w3
+ y1*y3*w3, y0*y1*w2 + y2*y3*w2 + y0^2*w3 + y3^2*w3,
y0^2*w2 + y2^2*w2 - y0*y1*w3 + y2*y3*w3, y0^3
+ y0*y1^2 + y0*y2^2 + y0*y3^2) of Multivariate
Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2,
w3 over Rational Field
```

On vérifie également que `iBord2` n'est pas premier et on calculera sa décomposition primaire.

```
In [21]: iBord2.is_prime()
```

```
Out [21]: False
```

En faisant la décomposition primaire de l'idéal du bord 2, on obtient deux idéaux primaires dont le deuxième ne définit pas un mode opératoire.

```
In [22]: compBord2=iBord2.primary_decomposition()
         compBord2
```

```
Out [22]: [Ideal (w1, y0, y2*w2 + y3*w3, y3*w0 - y1*w2, y2*w0 + y1*w3)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1,
w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w1, w0^2 + w2^2 + w3^2, y3*w0 - y1*w2 - y0*w3, y2*w0
- y0*w2 + y1*w3, y1*w0 + y3*w2 - y2*w3, y0*w0 + y2*w2
+ y3*w3, y0^2 + y1^2 + y2^2 + y3^2, y1*y2*w2 - y0*y3*w2
+ y0*y2*w3 + y1*y3*w3, y1^2*w2 + y3^2*w2 + y0*y1*w3
- y2*y3*w3, y0*y1*w2 + y2*y3*w2 - y1^2*w3 - y2^2*w3)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1,
w2, w3 over Rational Field]
```

Les bords sont donc définis par les deux idéaux ci-dessous.

```
In [23]: compBord1[0],compBord2[0]
```

```
Out [23]: (Ideal (w0, y1, y2*w2 + y3*w3, y3*w1 + y0*w2, y2*w1 - y0*w3)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1,
w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w1, y0, y2*w2 + y3*w3, y3*w0 - y1*w2, y2*w0 + y1*w3)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1,
w2, w3 over Rational Field)
```

B Le SNU 3-UPU

B.1 Calcul des modes opératoires du SNU 3-UPU

Déclaration de l'anneau de polynôme en les huit paramètres de Study sur l'extension quadratique des rationnels par la racine carrée de 3

```
In [1]: F.<sq3>=QuadraticField(3)
        R.<x0,x1,x2,x3,y0,y1,y2,y3>=PolynomialRing(F,8)
        x=[x0,x1,x2,x3] ; y=[y0,y1,y2,y3]
```

Coordonnées des centres des articulations dans le repère fixe (liste A) et le repère lié à la plateforme mobile (liste b) et des axes de rotation (liste axe1 et axe4)

```
In [2]: k1=1; k2=1/2
A=[vector(R, [0, k1, 0]), vector(R, [0, -k1/2, k1*sq3/2]), \
    vector(R, [0, -k1/2, -k1*sq3/2])]
b=[vector(R, [0, k2, 0]), vector(R, [0, -k2/2, k2*sq3/2]), \
    vector(R, [0, -k2/2, -k2*sq3/2])]
Axe1=[vector([0, V[1], V[2]]) for V in A]
axe4=[vector([0, v[1], v[2]]) for v in b]
```

Paramétrisation de Study de la matrice de rotation et du vecteur de translation

```
In [3]: Rot=matrix(R, \
    [[x0^2+x1^2-x2^2-x3^2, 2*(x1*x2-x0*x3), \
      2*(x1*x3+x0*x2)], \
    [2*(x1*x2+x0*x3), x0^2-x1^2+x2^2-x3^2, \
      2*(x2*x3-x0*x1)], \
    [2*(x1*x3-x0*x2), 2*(x2*x3+x0*x1), \
      x0^2-x1^2-x2^2+x3^2]])

trans=2*vector(R, [-x0*y1+x1*y0-x2*y3+x3*y2, \
    -x0*y2+x1*y3+x2*y0-x3*y1, \
    -x0*y3-x1*y2+x2*y1+x3*y0])
```

Equation du 3-plan et de la quadrique de Study

```
In [4]: Delta=add(x[i]^2 for i in range(4))

Study=add(x[i]*y[i] for i in range(4))
```

Coordonnées des centres des articulations de la plateforme et de l'axe 4 dans le repère de la base.

```
In [5]: B=[Rot*p+trans for p in b]
Axe4=[Rot*v for v in axe4]
```

Les trois équations de contraintes

```
In [6]: Contr=[matrix([Axe1[i], Axe4[i], B[i]-Delta*A[i]]) \
    .determinant() for i in range(3)]
Contr
```

```
Out [6]: [2*x0*x1^2*y0 + 2*x0*x3^2*y0 - 2*x0^2*x1*y1 - 2*x1*x2^2*y1
    + 2*x1^2*x2*y2 + 2*x2*x3^2*y2 - 2*x0^2*x3*y3 - 2*x2^2*x3*y3,
```

$$\begin{aligned}
& 2*x0*x1^2*y0 + 3/2*x0*x2^2*y0 + (sq3)*x0*x2*x3*y0 \\
& + 1/2*x0*x3^2*y0 - 2*x0^2*x1*y1 - 1/2*x1*x2^2*y1 \\
& + (sq3)*x1*x2*x3*y1 - 3/2*x1*x3^2*y1 - 3/2*x0^2*x2*y2 \\
& + 1/2*x1^2*x2*y2 + (-1/2*sq3)*x0^2*x3*y2 \\
& + (-1/2*sq3)*x1^2*x3*y2 + (1/2*sq3)*x2^2*x3*y2 \\
& - x2*x3^2*y2 + (-1/2*sq3)*x3^3*y2 + (-1/2*sq3)*x0^2*x2*y3 \\
& + (-1/2*sq3)*x1^2*x2*y3 + (-1/2*sq3)*x2^3*y3 \\
& - 1/2*x0^2*x3*y3 + 3/2*x1^2*x3*y3 + x2^2*x3*y3 \\
& + (1/2*sq3)*x2*x3^2*y3, 2*x0*x1^2*y0 + 3/2*x0*x2^2*y0 \\
& + (-sq3)*x0*x2*x3*y0 + 1/2*x0*x3^2*y0 - 2*x0^2*x1*y1 \\
& - 1/2*x1*x2^2*y1 + (-sq3)*x1*x2*x3*y1 - 3/2*x1*x3^2*y1 \\
& - 3/2*x0^2*x2*y2 + 1/2*x1^2*x2*y2 + (1/2*sq3)*x0^2*x3*y2 \\
& + (1/2*sq3)*x1^2*x3*y2 + (-1/2*sq3)*x2^2*x3*y2 - x2*x3^2*y2 \\
& + (1/2*sq3)*x3^3*y2 + (1/2*sq3)*x0^2*x2*y3 \\
& + (1/2*sq3)*x1^2*x2*y3 + (1/2*sq3)*x2^3*y3 - 1/2*x0^2*x3*y3 \\
& + 3/2*x1^2*x3*y3 + x2^2*x3*y3 + (-1/2*sq3)*x2*x3^2*y3]
\end{aligned}$$

Idéal des configurations : saturé de l'idéal engendré par les équations de contraintes et l'équation de la quadrique de Study par rapport à l'idéal du 3-plan.

```
In [7]: idealConfig,expo=R.ideal(Contr+[Study])\
        .saturation(R.ideal([Delta]))
idealConfig,expo
```

```
Out [7]: (Ideal (x3*y2 + x2*y3, x2*y2 - x3*y3, x1*y1 + x3*y3,
x0*y0 + x3*y3, x2^2*y3 + x3^2*y3, y0*y1*y2^2
+ y0*y1*y3^2) of Multivariate Polynomial Ring in x0, x1,
x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with defining
polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?, 2)
```

On vérifie que l'idéal des configurations n'est pas premier et on effectue sa décomposition primaire

```
In [8]: idealConfig.is_prime()
```

```
Out [8]: False
```

Composantes primaires de l'idéal des configurations

```
In [9]: CompPrimaires=idealConfig.primary_decomposition()
CompPrimaires
```

```

Out [9]: [Ideal (y0, x3, x2, x1) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y1, y0, x3, x2) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y1, x3, x2, x0) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y3, y2, x1, x0) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y3, y2, y0, x1) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y3, y2, y1, y0) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y3, y2, y1, x0) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y2^2 + y3^2, x3*y2 + x2*y3, x2*y2 - x3*y3, x1*y1 + x3*y3,
x0*y0 + x3*y3, x2^2 + x3^2) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?]

```

Tous ces idéaux primaires sont premiers. Donc tous définissent des modes opératoires du SNU 3-UPU sauf le dernier qui ne définit pas un mode opératoire réel.

```
In [10]: [CompPrimaires[i].is_prime() for i in range(8)]
```

```
Out [10]: [True, True, True, True, True, True, True, True]
```

B.2 Calcul des bords des modes opératoires du SNU 3-UPU

On définit deux nouveaux anneaux des polynômes qui sont W et S .

```
In [11]: W.<x0,x1,x2,x3,y0,y1,y2,y3,w0,w1,w2,w3>\
=PolynomialRing(QQ,12)
S.<y0,y1,y2,y3,w0,w1,w2,w3>=PolynomialRing(QQ,8)
```

Idéaux engendrés par les équations de l'éclatement et du diviseur exceptionnel

```
In [12]: w=[w0,w1,w2,w3]; x=[x0,x1,x2,x3]
         idealEclat=W.ideal([x[i]*w[j]-x[j]*w[i] for i in range(3) \
         for j in range(i+1,4)])
         idealDivExcept=W.ideal([Delta])
```

Idéaux de la transformée stricte et du bord de l'espace des configurations

```
In [13]: transStict,expo=(idealConfig.change_ring(W)+idealEclat)\
         .saturation(idealDivExcept)
         idealBord=(transStict+idealDivExcept)\
         .elimination_ideal(x).change_ring(S)
         idealBord
```

```
Out [13]: Ideal (y3*w2 + y2*w3, y2*w2 - y3*w3, y1*w1 + y3*w3,
y0*w0 + y3*w3, y2^2*w3 + y3^2*w3, y0*y1*y2^2 + y0*y1*y3^2)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1,
w2, w3 over Rational Field
```

Décomposition primaire de l'idéal du bord. Ils définissent les bords des modes opératoires du SNU 3-UPU sauf le dernier qui définit un bord complexe.

```
In [14]: CompBord=idealBord.primary_decomposition()
         CompBord
```

```
Out [14]: [Ideal (w2^2 + w3^2, y3*w2 + y2*w3, y2*w2 - y3*w3,
y1*w1 + y3*w3, y0*w0 + y3*w3, y2^2 + y3^2)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3,
w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w1, w0, y3, y2) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w1, y3, y2, y0) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w3, w2, w0, y1) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w0, y3, y2, y1) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (y3, y2, y1, y0) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w3, w2, y1, y0) of Multivariate Polynomial Ring
```

```

in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w3, w2, w1, y0) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field]

```

C Le Tsai 3-UPU

C.1 Calcul des modes opératoires du Tsai 3-UPU

Déclaration de l'anneau de polynôme en les huit paramètres de Study sur l'extension quadratique des rationnels par la racine carrée de 3

```

In [1]: F.<sq3>=QuadraticField(3)
        R.<x0,x1,x2,x3,y0,y1,y2,y3>=PolynomialRing(F,8)
        x=[x0,x1,x2,x3] ; y=[y0,y1,y2,y3]

```

Coordonnées des centres des articulations dans le repère fixe (liste A) et le repère lié à la plateforme mobile (liste b) et des axes de rotation (liste Axe1 dans le repère lié à la base et axe4 dans le repère lié à la plateforme mobile).

```

In [2]: k1=1; k2=1/2
        A=[vector(R,[0,k1,0]),vector(R,[0,-k1/2,k1*sq3/2]),\
            vector(R,[0,-k1/2,-k1*sq3/2])]
        b=[vector(R,[0,k2,0]),vector(R,[0,-k2/2,k2*sq3/2]),\
            vector(R,[0,-k2/2,-k2*sq3/2])]
        Axe1=[vector([0,V[2],-V[1]]) for V in A]
        axe4=[vector([0,v[2],-v[1]]) for v in b]

```

Paramétrisation de Study de la matrice de rotation et du vecteur de translation

```

In [3]: Rot=matrix(R,\
    [[x0^2+x1^2-x2^2-x3^2, 2*(x1*x2-x0*x3),\
      2*(x1*x3+x0*x2)],\
    [2*(x1*x2+x0*x3), x0^2-x1^2+x2^2-x3^2,\
      2*(x2*x3-x0*x1)],\
    [2*(x1*x3-x0*x2), 2*(x2*x3+x0*x1),\
      x0^2-x1^2-x2^2+x3^2]])
        trans=2*vector(R,[-x0*y1+x1*y0-x2*y3+x3*y2,\
            -x0*y2+x1*y3+x2*y0-x3*y1,\
            -x0*y3-x1*y2+x2*y1+x3*y0])

```

Equation du 3-plan et de la quadrique de Study

```
In [4]: Delta=add(x[i]^2 for i in range(4))
        Study=add(x[i]*y[i] for i in range(4))
```

Coordonnées des centres des articulations de la plateforme et des axe 4 dans le repère de la base.

```
In [5]: B=[Rot*p+trans for p in b]
        Axe4=[Rot*v for v in axe4]
```

Les trois équations de contraintes. Ce sont de très longues équations dont nous chercherons à les réduire.

```
In [6]: Contr=[matrix([Axe1[i],Axe4[i],B[i]-Delta*A[i]])\
                    .determinant() for i in range(3)]
```

```
In [7]: def prim(P) : return P/P.content()
```

Liste des équations qui définissent l'espace des configurations. Les équations de contraintes ont été réduites.

```
In [8]: Contrreduit=[prim(R(Contr[0])),prim(R(Contr[1]+Contr[2])),\
                    prim(R((Contr[1]-Contr[2])/sq3)), R(Study)]
        Contrreduit
```

```
Out [8]: [-1/2*x0^3*x2 - 1/2*x0*x1^2*x2 - 1/2*x0*x2^3 - 3/2*x0^2*x1*x3
          - 3/2*x1^3*x3 - 3/2*x1*x2^2*x3 - 1/2*x0*x2*x3^2 - 3/2*x1*x3^3
          + 2*x0*x1^2*y0 + 2*x0*x2^2*y0 - 2*x0^2*x1*y1 - 2*x1*x3^2*y1
          - 2*x0^2*x2*y2 - 2*x2*x3^2*y2 + 2*x1^2*x3*y3 + 2*x2^2*x3*y3,
          1/2*x0^3*x2 + 1/2*x0*x1^2*x2 + 1/2*x0*x2^3 + 3/2*x0^2*x1*x3
          + 3/2*x1^3*x3 + 3/2*x1*x2^2*x3 + 1/2*x0*x2*x3^2 + 3/2*x1*x3^3
          + 4*x0*x1^2*y0 + x0*x2^2*y0 + 3*x0*x3^2*y0 - 4*x0^2*x1*y1
          - 3*x1*x2^2*y1 - x1*x3^2*y1 - x0^2*x2*y2 + 3*x1^2*x2*y2
          + 2*x2*x3^2*y2 - 3*x0^2*x3*y3 + x1^2*x3*y3 - 2*x2^2*x3*y3,
          3/2*x0^2*x1*x2 + 3/2*x1^3*x2 + 3/2*x1*x2^3 - 1/2*x0^3*x3
          - 1/2*x0*x1^2*x3 - 1/2*x0*x2^2*x3 + 3/2*x1*x2*x3^2
          - 1/2*x0*x3^3 - 2*x0*x2*x3*y0 - 2*x1*x2*x3*y1 + x0^2*x3*y2
          + x1^2*x3*y2 - x2^2*x3*y2 + x3^3*y2 + x0^2*x2*y3
          + x1^2*x2*y3 + x2^3*y3 - x2*x3^2*y3,
          x0*y0 + x1*y1 + x2*y2 + x3*y3]
```

Idéal des configurations

```
In [9]: idealConfig,expo=R.ideal(Contrreduit)\
        .saturation(R.ideal([Delta]))
idealConfig,expo
```

```
Out [9]: (Ideal (2*x1*y1 + x2*y2 + x3*y3, 2*x0*y0 + x2*y2 + x3*y3,
3*x1*x2 - x0*x3 + 2*x3*y2 + 2*x2*y3, x0*x2 + 3*x1*x3
+ 2*x2*y2 - 2*x3*y3, 2*x0*x3*y1 + 3*x2^2*y2 - 4*x3*y1*y2
+ 3*x2*x3*y3 - 4*x2*y1*y3, 6*x1*x3*y0 - x2^2*y2 + 4*x2*y0*y2
- x2*x3*y3 - 4*x3*y0*y3, x0^2*x3 + 9*x1^2*x3 - 4*x3*y2^2
- 4*x3*y3^2, 3*x3*y0*y2^2 + x2*y1*y2^2 - 4*y0*y1*y2^2
+ 6*x2*y0*y2*y3 - 2*x3*y1*y2*y3 - 3*x3*y0*y3^2 - x2*y1*y3^2
- 4*y0*y1*y3^2, 3*x3^2*y0*y2 + x2*x3*y1*y2 - 4*x3*y0*y1*y2
+ 9*x2*x3*y0*y3 + x2^2*y1*y3 - 2*x3^2*y1*y3 - 4*x2*y0*y1*y3,
3*x2*x3*y0*y2 + x2^2*y1*y2 - 4*x2*y0*y1*y2 + 3*x3^2*y0*y3
+ x2*x3*y1*y3 + 4*x3*y0*y1*y3, 3*x2^2*y0*y2 - x2*x3*y1*y2
- 4*x3*y0*y1*y2 + 3*x2*x3*y0*y3 - x3^2*y1*y3 - 4*x2*y0*y1*y3,
3*x2^3*y2 + 3*x2*x3^2*y2 - 8*x2*x3*y1*y2 + 3*x2^2*x3*y3
+ 3*x3^3*y3 - 4*x2^2*y1*y3 + 4*x3^2*y1*y3,
9*x2^2*x3*y0*y3 - 3*x3^3*y0*y3 + x2^3*y1*y3
- 3*x2*x3^2*y1*y3 - 4*x2^2*y0*y1*y3 - 4*x3^2*y0*y1*y3)
of Multivariate Polynomial Ring in x0, x1, x2, x3, y0, y1,
y2, y3 over Number Field in sq3 with defining polynomial
x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?, 2)
```

Composantes primaires de l'espaces des configurations

```
In [10]: compPrimaires=idealConfig.primary_decomposition()
compPrimaires
```

```
Out [10]: [Ideal (y3, y2, x1, x0) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y0, x3, x2, x1) of Multivariate Polynomial Ring
in x0, x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3
with defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y1, x3, x2, x0) of Multivariate Polynomial Ring in x0,
x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
Ideal (y1, y0, x3, x2) of Multivariate Polynomial Ring in x0,
x1, x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with
defining polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?,
```

```

Ideal (2*x1*y1 + x2*y2 + x3*y3, 2*x0*y0 + x2*y2 + x3*y3,
3*x1*x2 - x0*x3 + 2*x3*y2 + 2*x2*y3, x0*x2 + 3*x1*x3 + 2*x2*y2
- 2*x3*y3, x0^2 + 9*x1^2 - 4*y2^2 - 4*y3^2, 2*x0*x3*y1
+ 3*x2^2*y2 - 4*x3*y1*y2 + 3*x2*x3*y3 - 4*x2*y1*y3, 6*x1*x3*y0
- x2^2*y2 + 4*x2*y0*y2 - x2*x3*y3 - 4*x3*y0*y3, 18*x1^2*y0
+ 3*x1*x3*y2 + 2*x2*y2^2 - 8*y0*y2^2 - x0*x3*y3 - 2*x3*y2*y3
- 8*y0*y3^2, 3*x3*y0*y2^2 + x2*y1*y2^2 - 4*y0*y1*y2^2
+ 6*x2*y0*y2*y3 - 2*x3*y1*y2*y3 - 3*x3*y0*y3^2 - x2*y1*y3^2
- 4*y0*y1*y3^2, 3*x3^2*y0*y2 + x2*x3*y1*y2 - 4*x3*y0*y1*y2
+ 9*x2*x3*y0*y3 + x2^2*y1*y3 - 2*x3^2*y1*y3 - 4*x2*y0*y1*y3,
3*x2*x3*y0*y2 + x2^2*y1*y2 - 4*x2*y0*y1*y2 + 3*x3^2*y0*y3
+ x2*x3*y1*y3 + 4*x3*y0*y1*y3, 3*x2^2*y0*y2 - x2*x3*y1*y2
- 4*x3*y0*y1*y2 + 3*x2*x3*y0*y3 - x3^2*y1*y3 - 4*x2*y0*y1*y3,
3*x2^3*y2 + 3*x2*x3^2*y2 - 8*x2*x3*y1*y2 + 3*x2^2*x3*y3
+ 3*x3^3*y3 - 4*x2^2*y1*y3 + 4*x3^2*y1*y3, 9*x2^2*x3*y0
- 3*x3^3*y0 + x2^3*y1 - 3*x2*x3^2*y1 - 4*x2^2*y0*y1
- 4*x3^2*y0*y1) of Multivariate Polynomial Ring in x0, x1,
x2, x3, y0, y1, y2, y3 over Number Field in sq3 with defining
polynomial x^2 - 3 with sq3 = 1.732050807568878?]

```

On vérifie que toutes les composantes primaires de l'idéal des configurations sont radicales, donc ces idéaux sont tous premiers et définissent les modes opératoires du Tsai 3-UPU. Il est difficile de décrire le dernier mode opératoire. Il est appelé mode mystérieux ou mode général. Nous allons dans la suite étudier son bord. Les autres modes opératoires sont les mêmes que les modes du SNU 3-UPU

```
In [11]: [compPrimaires[i].radical() for i in range(5)]==compPrimaires
```

```
Out[11]: True
```

C.2 Calcul du bord du mode opératoire général du Tsai 3-UPU

```
In [12]: W.<x0,x1,x2,x3,y0,y1,y2,y3,w0,w1,w2,w3>\
=PolynomialRing(QQ,12)
S.<y0,y1,y2,y3,w0,w1,w2,w3>=PolynomialRing(QQ,8)
```

Idéaux des équations de l'éclatement et du diviseur exceptionnel

```
In [13]: w=[w0,w1,w2,w3]; x=[x0,x1,x2,x3]
idealEclat=W.ideal([x[i]*w[j]-x[j]*w[i] for i in range(3)\
for j in range(i+1,4)])
idealDivExcept=W.ideal([x0,x1,x2,x3])
```

Idéaux de la transformée stricte et du bord du mode général.

```
In [14]: transStrict, expo=(compPrimaires[-1].change_ring(W)+idealEclat)\
        .saturation(idealDivExcept)
idealBord=(transStrict+idealDivExcept)\
        .elimination_ideal(x).change_ring(S)
idealBord
```

```
Out [14]: Ideal (y3*w2 + y2*w3, y2*w2 - y3*w3, y1*w1 + y3*w3,
y0*w0 + y3*w3, y2^2 + y3^2, y0*y1*w2^2 + y0*y1*w3^2)
of Multivariate Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0,
w1, w2, w3 over Rational Field
```

On vérifie que l'idéal du bord du mode général n'est pas premier; le bord est donc réductible.

```
In [15]: idealBord.is_prime()
```

```
Out [15]: False
```

Décomposition primaire de l'idéal du bord du mode général. Le bord du mode opératoire se décompose donc en 4 composantes dont une (la dernière) est complexe. Les trois autres sont également les mêmes que les bords des modes opératoires du SNU 3-UPU.

```
In [16]: idealBord.primary_decomposition()
```

```
Out [16]: [Ideal (w1, y3, y2, y0) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (y3, y2, y1, y0) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w0, y3, y2, y1) of Multivariate Polynomial Ring
in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3 over Rational Field,
Ideal (w2^2 + w3^2, y3*w2 + y2*w3, y2*w2 - y3*w3,
y1*w1 + y3*w3, y0*w0 + y3*w3, y2^2 + y3^2) of Multivariate
Polynomial Ring in y0, y1, y2, y3, w0, w1, w2, w3
over Rational Field]
```

Feuille de calcul Maple

Ici nous présentons quelques feuilles utilisées pour les calculs (les feuilles de calcul du PGD et PGDD du 3-RPS et du Tsai 3-UPU). Le cas du SNU 3-UPU peut être traité de la même manière. Pour faire ces calculs, nous avons utilisé principalement la bibliothèque SIROPA de Maple.

A Le 3-RPS

A.1 PGD du 3-RPS

```
> restart: with(LinearAlgebra): with(Siropa):
> r3ex:=5: h2ex:=1/2:
```

Matrice de rotation dans la paramétrisation de Study (sous la condition de normalisation $N=1$)

et vecteur de translation (où z est arbitraire

```
> M:=Matrix([[x0^2+x1^2-x2^2-x3^2, 2*(x1*x2-x0*x3), 2*(x1*x3+x0*x2)],
[2*(x1*x2+x0*x3), x0^2-x1^2+x2^2-x3^2, 2*(x2*x3-x0*x1)],
[2*(x1*x3-x0*x2), 2*(x2*x3+x0*x1), x0^2-x1^2-x2^2+x3^2]]);
```

```
> T:=Vector([z, u, v]);
```

$$M := \begin{bmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & -2x_0x_3 + 2x_1x_2 & 2x_0x_2 + 2x_1x_3 \\ 2x_0x_3 + 2x_1x_2 & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & -2x_0x_1 + 2x_2x_3 \\ -2x_0x_2 + 2x_1x_3 & 2x_0x_1 + 2x_2x_3 & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$T := \begin{bmatrix} z \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

Matrice du demi-tour

```
> DT:=subs({x0=0}, M);
```

$$DT := \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}$$

```
> N:=x1^2+x2^2+x3^2-1;
```

$$N := x1^2 + x2^2 + x3^2 - 1$$

Géométrie de la base et de la plateforme (deux triangles équilatéraux, le premier inscrit dans un cercle de rayon 1, le deuxième dans un cercle de rayon 1/2).

```
> A1:=Vector([0,0,1]): A2:=Vector([0,sqrt(3)/2,-1/2]):
A3:=Vector([0,-sqrt(3)/2,-1/2]):
> b1:=Vector([0,0,h2]): b2:=Vector([0,(sqrt(3)/2)*h2,
(-1/2)*h2]): b3:=Vector([0,(-sqrt(3)/2)*h2,(-1/2)*h2]):
```

Calcul des coordonnées des sommets de la plateforme dans le repère fixe (sous réserve N=1).

```
> B1p:=DT.b1+T; B2p:=DT.b2+T; B3p:=DT.b3+T;
```

$$B1p := \begin{bmatrix} 2h2 x1 x3 + z \\ 2h2 x2 x3 + u \\ (-x1^2 - x2^2 + x3^2) h2 + v \end{bmatrix}$$

$$B2p := \begin{bmatrix} x1 x2 \sqrt{3}h2 - h2 x1 x3 + z \\ (-1/2 x1^2 + 1/2 x2^2 - 1/2 x3^2) \sqrt{3}h2 - h2 x2 x3 + u \\ x2 x3 \sqrt{3}h2 - (-1/2 x1^2 - 1/2 x2^2 + 1/2 x3^2) h2 + v \end{bmatrix}$$

$$B3p := \begin{bmatrix} -x1 x2 \sqrt{3}h2 - h2 x1 x3 + z \\ -(-1/2 x1^2 + 1/2 x2^2 - 1/2 x3^2) \sqrt{3}h2 - h2 x2 x3 + u \\ -x2 x3 \sqrt{3}h2 - (-1/2 x1^2 - 1/2 x2^2 + 1/2 x3^2) h2 + v \end{bmatrix}$$

Écriture des équations de contraintes.

```
> E1:=numer(B1p[2]);
> E2:=numer(B2p[2]+sqrt(3)*B2p[3]);
> E3:=numer(B3p[2]-sqrt(3)*B3p[3]);
```

$$E1 := 2h2 x2 x3 + u$$

$$E2 := 2h2 x2 x3 + \sqrt{3}h2 x2^2 - \sqrt{3}h2 x3^2 + \sqrt{3}v + u$$

$$E3 := 2h2 x2 x3 - \sqrt{3}h2 x2^2 + \sqrt{3}h2 x3^2 - \sqrt{3}v + u$$

Détermination des inconnues u et v.

```
> S:=solve({E1,E2,E3},{u,v});
S := {u = -2h2 x2 x3, v = -h2 x2^2 + h2 x3^2}
```

Nouvelles coordonnées des sommets de la plateforme dans le repère fixe .

```
> B1:=subs(u=rhs(S[1]),v=rhs(S[2]),B1p);
> B2:=subs(u=rhs(S[1]),v=rhs(S[2]),B2p);
> B3:=subs(u=rhs(S[1]),v=rhs(S[2]),B3p);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 2h2x1x3 + z \\ 0 \\ (-x1^2 - x2^2 + x3^2)h2 - h2x2^2 + h2x3^2 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} x1x2\sqrt{3}h2 - h2x1x3 + z \\ (-1/2x1^2 + 1/2x2^2 - 1/2x3^2)\sqrt{3}h2 - 3h2x2x3 \\ x2x3\sqrt{3}h2 - (-1/2x1^2 - 1/2x2^2 + 1/2x3^2)h2 - h2x2^2 + h2x3^2 \end{bmatrix}$$

$$B3 := \begin{bmatrix} -x1x2\sqrt{3}h2 - h2x1x3 + z \\ -(-1/2x1^2 + 1/2x2^2 - 1/2x3^2)\sqrt{3}h2 - 3h2x2x3 \\ -x2x3\sqrt{3}h2 - (-1/2x1^2 - 1/2x2^2 + 1/2x3^2)h2 - h2x2^2 + h2x3^2 \end{bmatrix}$$

Nouvelles équations de contraintes.

```
> C1:=numer(r1^2-DotProduct(B1-A1, B1-A1, conjugate = false));
> C2:=numer(r2^2-DotProduct(B2-A2, B2-A2, conjugate = false));
> C3:=numer(r3^2-DotProduct(B3-A3, B3-A3, conjugate = false));
C1 := -h2^2x1^4 - 4h2^2x1^2x2^2 - 4h2^2x2^4 + 8h2^2x2^2x3^2 - 4h2^2x3^4 - 4h2x1x3z
-2h2x1^2 - 4h2x2^2 + 4h2x3^2 + r1^2 - z^2 - 1
C2 := -4 - 8h2x1^2 + 8h2x2^2 - 8h2x3^2 - 16x2x3\sqrt{3}h2 - 8\sqrt{3}h2^2x1^2x2x3
-8\sqrt{3}h2x1x2z + 8h2x1x3z + 16\sqrt{3}h2^2x2^3x3 - 16\sqrt{3}h2^2x3^3x2 - 4z^2 + 4r2^2 -
40x2^2x3^2h2^2 - 4h2^2x1^2x2^2 - 12h2^2x1^2x3^2 - 4h2^2x1^4 - 4h2^2x2^4 - 4h2^2x3^4
C3 := -4 - 8h2x1^2 + 8h2x2^2 - 8h2x3^2 + 16x2x3\sqrt{3}h2 + 8\sqrt{3}h2^2x1^2x2x3
+8\sqrt{3}h2x1x2z + 8h2x1x3z - 16\sqrt{3}h2^2x2^3x3 + 16\sqrt{3}h2^2x3^3x2 - 4z^2 + 4r3^2 -
40x2^2x3^2h2^2 - 4h2^2x1^2x2^2 - 12h2^2x1^2x3^2 - 4h2^2x1^4 - 4h2^2x2^4 - 4h2^2x3^4
```

Création du manipulateur associé.

```
> RobotDT:=CreateManipulator([C1,C2,C3,N], [x1,x2,x3,z], [r1,r2,r3]):
```

Décomposition cellulaire dans une tranche en fixant r3.

```
> Tranche:=SubsParameters(r3=r3ex, SubsParameters(h2=h2ex, RobotDT)):
> Tranche[Equations];
[-1/4x1^4 - x1^2x2^2 - x2^4 + 2x2^2x3^2 - x3^4 - 2x1x3z + r1^2 - x1^2 - 2x2^2 + 2x3^2 - z^2 - 1,
-4 - 4x1^2 + 4x2^2 - 4x3^2 - 8x2x3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x1^2x2x3 - 4\sqrt{3}x1x2z + 4x1x3z +
4\sqrt{3}x2^3x3 - 4\sqrt{3}x3^3x2 - 4z^2 + 4r2^2 - 10x2^2x3^2 - x1^2x2^2 - 3x1^2x3^2 - x1^4 - x2^4 - x3^4, 96 -
4x1^2 + 4x2^2 - 4x3^2 + 8x2x3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x1^2x2x3 + 4\sqrt{3}x1x2z + 4x1x3z - 4\sqrt{3}x2^3x3 +
4\sqrt{3}x3^3x2 - 4z^2 - 10x2^2x3^2 - x1^2x2^2 - 3x1^2x3^2 - x1^4 - x2^4 - x3^4, x1^2 + x2^2 + x3^2 - 1]
> DCA:=CellDecompositionPlus(Tranche[Equations], [r1,r2,sqrt(3)],
[x1,x2,x3,z], [r1,r2]):
```

Discriminant Variety computation ...

-> Groebner Basis computation ...

-> Number of components : 1

-> Component number 1 ...

—> Reduction of number of polynomials ...

—> Computation of non proper locus ...

—> Computation of constraints locus ...

—> Computation of multiplicities locus ...

Real roots testing ...

Cylindrical Algebraic Decomposition computation ...

Saturation by the inequalities ...

```
> binf:=r3ex-2*(1+h2ex) : bsup:=r3ex+2*(1+h2ex) :
```

```
> PlotCell2D(DCA, r1=binf..bsup, r2=binf..bsup) ;
```

-> Plotting 114 cells ...

—> 10%

—> 21%

—> 31%

—> 42%

—> 52%

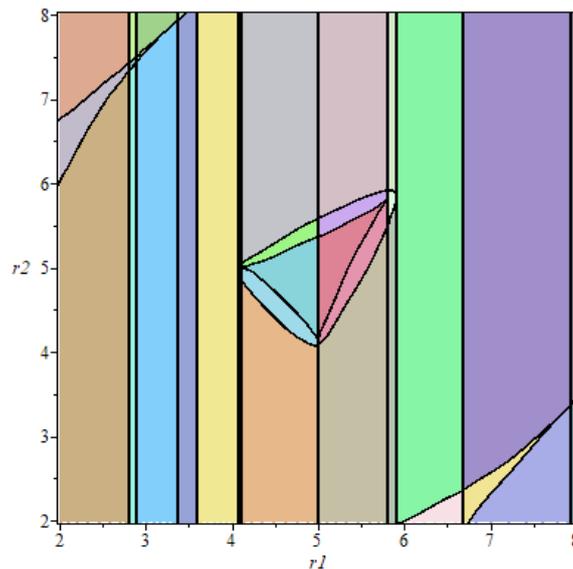
—> 63%

—> 73%

—> 84%

—> 94%

—> 100%



```
> with(RootFinding:-Parametric) :
```

Nombre des solutions réelles dans chaque cellule du DCA.

```

> liste_nb:=NumberOfSolutions(DCA);
liste_nb := [[1,0],[2,0],[3,0],[4,0],[5,0],[6,0],[7,0],[8,0],[9,0],[10,0],[11,0],[12,0],[13,0],
[14,0],[15,0],[16,0],[17,0],[18,0],[19,0],[20,0],[21,0],[22,0],[23,0],[24,0],[25,0],[26,0],
[27,0],[28,0],[29,0],[30,0],[31,0],[32,0],[33,0],[34,0],[35,0],[36,0],[37,0],[38,0],[39,0],
[40,0],[41,0],[42,0],[43,0],[44,0],[45,0],[46,0],[47,0],[48,0],[49,0],[50,0],[51,0],[52,0],
[53,0],[54,0],[55,0],[56,0],[57,0],[58,8],[59,0],[60,0],[61,0],[62,0],[63,0],[64,0],[65,8],
[66,16],[67,8],[68,0],[69,0],[70,0],[71,0],[72,0],[73,0],[74,8],[75,16],[76,8],[77,0],[78,0],
[79,0],[80,0],[81,0],[82,0],[83,0],[84,8],[85,0],[86,0],[87,0],[88,0],[89,0],[90,0],[91,0],
[92,0],[93,0],[94,0],[95,0],[96,0],[97,0],[98,0],[99,0],[100,0],[101,0],[102,0],[103,0],[104,0],
[105,0],[106,0],[107,0],[108,0],[109,0],[110,0],[111,0],[112,0],[113,0],[114,0]]

```

Tri des cellules ayant des solutions réelles.

```
> liste_16:= select(x->x[2]=16,liste_nb)[..,1];
```

```
> liste_8:= select(x->x[2]=8,liste_nb)[..,1];
```

```
liste_16 := [66,75]
```

```
liste_8 := [58,65,67,74,76,84]
```

Affichage des cellules ayant des solutions réelles.

```
> plot_cell_16:=PlotCell2D(DCA, liste_16,r1=binf..bsup,r2=binf..bsup,
color=red, nowall);
```

```
> plot_cell_8:=PlotCell2D(DCA, liste_8,r1=binf..bsup,r2=binf..bsup,
color=yellow, nowall);
```

-> Plotting 2 cells ...

—> 50%

—> 100%

```
plot_cell_16 := PLOT(`...`)
```

-> Plotting 6 cells ...

—> 16%

—> 33%

—> 50%

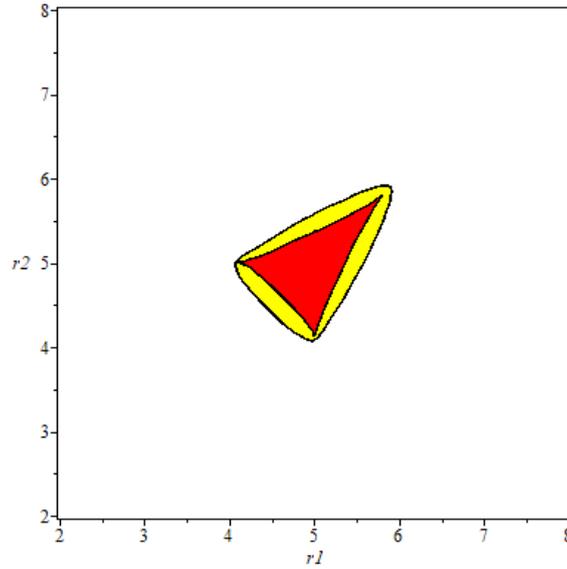
—> 66%

—> 83%

—> 100%

```
plot_cell_8 := PLOT(`...`)
```

```
> display(plot_cell_16,plot_cell_8, scaling=constrained);
```



```
> DV:=DCA:-DiscriminantVariety;
```

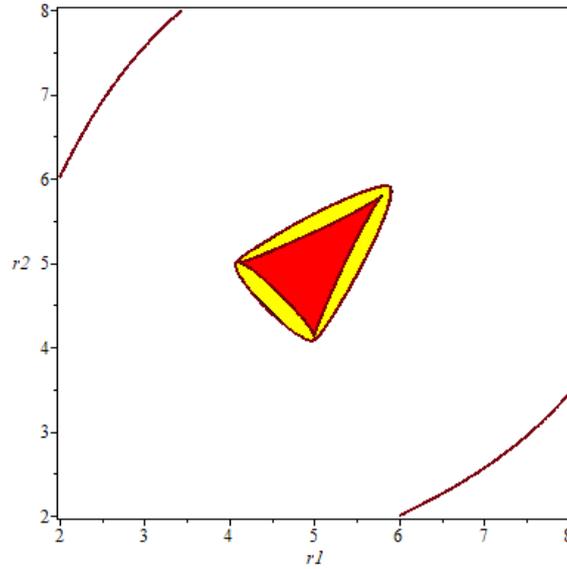
```
DV := [[r1],[r2],[16 r14 - 1400 r12 - 2975],[16 r24 - 1400 r22 - 2975],
[16 r14 - 32 r12r22 + 16 r24 - 600 r12 - 600 r22 + 2025],[16777216 r116r28
- 33554432 r114r210 + 50331648 r112r212 - 33554432 r110r214 + 16777216 r18r216
- 1140850688 r116r26 - 327155712 r114r28 - 536870912 r112r210 - 536870912 r110r212
- 327155712 r18r214 - 1140850688 r16r216 + 44310724608 r116r24 + 23169335296 r114r26
+ 262272974848 r112r28 - 272331964416 r110r210 + 262272974848 r18r212
+ 23169335296 r16r214 + 44310724608 r14r216 - 279393075200 r116r22
- 3826604048384 r114r24 - 3146624532480 r112r26 - 2450372689920 r110r28
- 2450372689920 r18r210 - 3146624532480 r16r212 - 3826604048384 r14r214
- 279393075200 r12r216 + 2778913374208 r116 + 8363736956928 r114r22
+ 205130512531456 r112r24 - 130218999545856 r110r26 + 354821810356224 r18r28
- 130218999545856 r16r210 + 205130512531456 r14r212 + 8363736956928 r12r214
+ 2778913374208 r216 - 302425716457472 r114 + 451029226160128 r112r22
- 2898716492955648 r110r24 - 671664660381696 r18r26 - 671664660381696 r16r28
- 2898716492955648 r14r210 + 451029226160128 r12r212 - 302425716457472 r214
+ 13854006155071488 r112 - 50048292880400384 r110r22 + 73194591329357824 r18r24
- 63454337014038528 r16r26 + 73194591329357824 r14r28 - 50048292880400384 r12r210
+ 13854006155071488 r212 - 255027986057431040 r110 + 734324931503155200 r18r22
- 190329115376906240 r16r24 - 190329115376906240 r14r26 + 734324931503155200 r12r28
- 255027986057431040 r210 + 1961930192551244800 r18 - 2325123467351513600 r16r22
- 1265643480490425600 r14r24 - 2325123467351513600 r12r26 + 1961930192551244800 r28
- 3587051843575632000 r16 - 9203008959086112000 r14r22 - 9203008959086112000 r12r24
- 3587051843575632000 r26 - 23990530873230270000 r14 + 24095200701868920000 r12r22
- 23990530873230270000 r24 + 62346002118123375000 r12 + 62346002118123375000 r22
+ 149776409961421453125]]
```

```
> CDis:=DV[-1][1];
```

```

CDis := 16777216 r116 r28 - 33554432 r114 r210 + 50331648 r112 r212
- 33554432 r110 r214 + 16777216 r18 r216 - 1140850688 r116 r26 - 327155712 r114 r28
- 536870912 r112 r210 - 536870912 r110 r212 - 327155712 r18 r214 - 1140850688 r16 r216
+ 44310724608 r116 r24 + 23169335296 r114 r26 + 262272974848 r112 r28
- 272331964416 r110 r210 + 262272974848 r18 r212 + 23169335296 r16 r214
+ 44310724608 r14 r216 - 279393075200 r116 r22 - 3826604048384 r114 r24
- 3146624532480 r112 r26 - 2450372689920 r110 r28 - 2450372689920 r18 r210
- 3146624532480 r16 r212 - 3826604048384 r14 r214 - 279393075200 r12 r216
+ 2778913374208 r116 + 8363736956928 r114 r22 + 205130512531456 r112 r24
- 130218999545856 r110 r26 + 354821810356224 r18 r28 - 130218999545856 r16 r210
+ 205130512531456 r14 r212 + 8363736956928 r12 r214 + 2778913374208 r216
- 302425716457472 r114 + 451029226160128 r112 r22 - 2898716492955648 r110 r24
- 671664660381696 r18 r26 - 671664660381696 r16 r28 - 2898716492955648 r14 r210
+ 451029226160128 r12 r212 - 302425716457472 r214 + 13854006155071488 r112
- 50048292880400384 r110 r22 + 73194591329357824 r18 r24 - 63454337014038528 r16 r26
+ 73194591329357824 r14 r28 - 50048292880400384 r12 r210 + 13854006155071488 r212
- 255027986057431040 r110 + 734324931503155200 r18 r22 - 190329115376906240 r16 r24
- 190329115376906240 r14 r26 + 734324931503155200 r12 r28 - 255027986057431040 r210
+ 1961930192551244800 r18 - 2325123467351513600 r16 r22 - 1265643480490425600 r14 r24
- 2325123467351513600 r12 r26 + 1961930192551244800 r28 - 3587051843575632000 r16
- 9203008959086112000 r14 r22 - 9203008959086112000 r12 r24 - 3587051843575632000 r26
- 23990530873230270000 r14 + 24095200701868920000 r12 r22 - 23990530873230270000 r24
+ 62346002118123375000 r12 + 62346002118123375000 r22 + 149776409961421453125
> with(plots):
> plot_sing:=implicitplot(CDis,r1=binf..bsup,r2=binf..bsup,
gridrefine=4);
plot_sing := PLOT(`...`)
> display(plot_cell_16,plot_cell_8, plot_sing,
scaling=constrained);

```



A.2 PGDD du 3-RPS

```
> restart:with(LinearAlgebra):with(Siropa):
```

Matrice de rotation (sous la condition de normalisation $N=1$) et vecteur de translation (défini à un facteur scalaire près si on ne normalise pas)

```
> M:=Matrix([[w0^2+w1^2-w2^2-w3^2, 2*(w1*w2-w0*w3), 2*(w1*w3+w0*w2)],
[2*(w1*w2+w0*w3), w0^2-w1^2+w2^2-w3^2, 2*(w2*w3-w0*w1)],
[2*(w1*w3-w0*w2), 2*(w2*w3+w0*w1), w0^2-w1^2-w2^2+w3^2]]);
```

```
> T:=Vector([-w0*y1+w1*y0-w2*y3+w3*y2, -w0*y2+w1*y3+w2*y0-w3*y1,
-w0*y3-w1*y2+w2*y1+w3*y0]);
```

```
> N:=w0^2+w1^2+w2^2+w3^2;
```

```
> h2ex:=1/2:
```

$$M := \begin{bmatrix} w_0^2 + w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & -2w_0w_3 + 2w_1w_2 & 2w_0w_2 + 2w_1w_3 \\ 2w_0w_3 + 2w_1w_2 & w_0^2 - w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 & -2w_0w_1 + 2w_2w_3 \\ -2w_0w_2 + 2w_1w_3 & 2w_0w_1 + 2w_2w_3 & w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}$$

$$T := \begin{bmatrix} -w_0y_1 + w_1y_0 - w_2y_3 + w_3y_2 \\ -w_0y_2 + w_1y_3 + w_2y_0 - w_3y_1 \\ -w_0y_3 - w_1y_2 + w_2y_1 + w_3y_0 \end{bmatrix}$$

$$N := w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

Composante du bord donnée par ($y_1=0, w_0=0, w_2*y_2 + w_3*y_3=0, w_1*y_3 + w_2*y_0=0, w_1*y_2 - w_3*y_0=0$)

Ces équations décrivent un sous-ensemble algébrique du produit des deux espaces projectifs de dimension 3 avec les coordonnées homogènes w et y respectivement. Ce sous-ensemble est un plan

projectif, pour lequel on peut utiliser les coordonnées homogènes w_1, w_2, w_3 . On normalise avec $N=1$, ce qui fait qu'on est en fait dans la sphère revêtement double du plan projectif.

```
> Bord1 := [y0=w1, w0=0, y1=0, y2=w3, y3=-w2] :
```

```
> MBord1 := subs (Bord1, M) ; TBord1 := subs (Bord1, T) ;
```

```
NBord1 := subs (Bord1, N) ;
```

$$MBord1 := \begin{bmatrix} w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & 2 w_1 w_2 & 2 w_1 w_3 \\ 2 w_1 w_2 & -w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2 w_2 w_3 \\ 2 w_1 w_3 & 2 w_2 w_3 & -w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}$$

$$TBord1 := \begin{bmatrix} w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$NBord1 := w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

Équations de contraintes : elles lient les limites de différences de longueurs de jambes d_1 et d_2 aux variables de position w_1, w_2, w_3 (avec la condition de normalisation $N=1$). Comme à la limite les jambes sont toutes parallèles à la direction du vecteur de translation, on a d_1 et d_2 égaux aux différences de produits scalaires l_1, l_2, l_3 des vecteurs des jambes correspondant à une translation nulle avec le vecteur (normalisé) qui donne la direction de translation.

```
> l1 := simplify (DotProduct (MBord1.b1-A1, TBord1, conjugate=false)) ;
```

```
> l2 := simplify (DotProduct (MBord1.b2-A2, TBord1, conjugate=false)) ;
```

```
> l3 := simplify (DotProduct (MBord1.b3-A3, TBord1, conjugate=false)) ;
```

```
> Eq1 := d1 - (l1 - l3) ;
```

```
> Eq2 := d2 - (l2 - l3) ;
```

```
> Eq3 := NBord1 - 1 ;
```

$$l_1 := 2 w_1 w_3 h_2 (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

$$l_2 := h_2 w_1 (\sqrt{3} w_2 - w_3) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

$$l_3 := -h_2 w_1 (\sqrt{3} w_2 + w_3) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

$$Eq_1 := d_1 - 2 w_1 w_3 h_2 (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - h_2 w_1 (\sqrt{3} w_2 + w_3) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

$$Eq_2 := d_2 - h_2 w_1 (\sqrt{3} w_2 - w_3) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - h_2 w_1 (\sqrt{3} w_2 + w_3) (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

$$Eq_3 := w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1$$

Etude des solutions du PGD

```
> Robot := CreateManipulator ([Eq1, Eq2, Eq3], [w1, w2, w3], [d1, d2]) :
```

```
> Tranche := SubsParameters (h2=h2ex, Robot) :
```

```
> Tranche [Equations] ;
```

```
[d1 - 3/2 w1^3 w3 - 3/2 w1 w3 w2^2 - 3/2 w1 w3^3 - 1/2 w1^3 sqrt(3) w2 - 1/2 w1 sqrt(3) w2^3
-1/2 w1 sqrt(3) w2 w3^2, d2 - w1^3 sqrt(3) w2 - w1 sqrt(3) w2^3 - w1 sqrt(3) w2 w3^2, w1^2 + w2^2 + w3^2 - 1]
> DCA:=CellDecompositionPlus(Tranche[Equations], [sqrt(3)], [w1, w2, w3]):
> PlotCell2D(DCA, grid=100, d1=-2*(1+h2ex)..2*(1+h2ex),
d2=-2*(1+h2ex)..2*(1+h2ex)) ;
```

Discriminant Variety computation ...

-> Groebner Basis computation ...

-> Number of components : 1

-> Component number 1 ...

—> Reduction of number of polynomials ...

—> Computation of non proper locus ...

—> Computation of constraints locus ...

—> Computation of multiplicities locus ...

Real roots testing ...

Cylindrical Algebraic Decomposition computation ...

Saturation by the inequalities ...

-> Plotting 8 cells ...

—> 12%

—> 25%

—> 37%

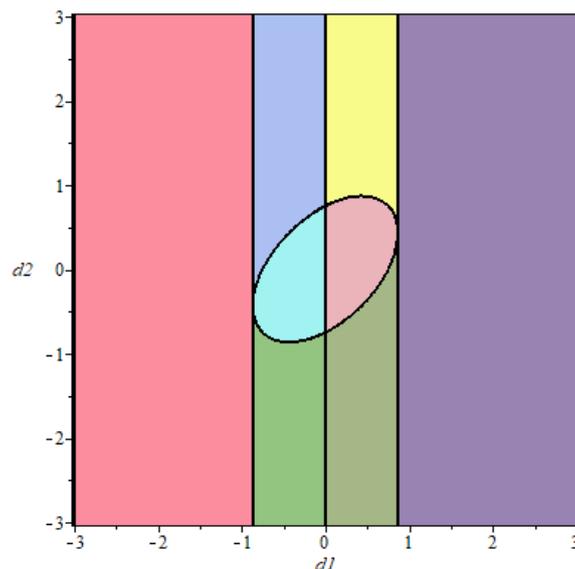
—> 50%

—> 62%

—> 75%

—> 87%

—> 100%



```
> with(RootFinding:-Parametric):
```

```

> liste_nb:=NumberOfSolutions(DCA);
      liste1_nb := [[1,0],[2,0],[3,4],[4,0],[5,0],[6,4],[7,0],[8,0]]
> liste_4:= select(x->x[2]=4,liste_nb)[..,1];
      liste_4 := [3,6]
> plot_cell_4:=PlotCell2D(DCA,grid = 100,liste1_4,
d1=-2*(1+h2ex)..2*(1+h2ex),d2=-2*(1+h2ex)..2*(1+h2ex),
color=yellow,nowall);

```

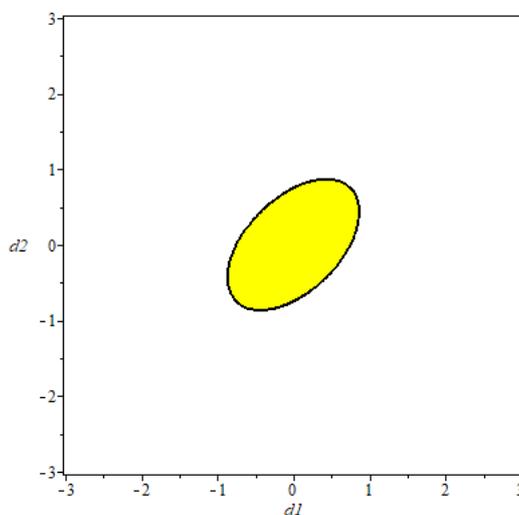
-> Plotting 2 cells ...

—> 50%

—> 100%

```
plot1_cell_4 := PLOT(`...`)
```

```
> with(plots): display(plot1_cell_4, scaling=constrained);
```



L'image de l'ellipse toute en jaune laisse croire qu'aucun accident n'arrive à l'intérieur. mais c'est trompeur, comme on va le voir en calculant les singularités images (SI)

```
> PS:=ParallelSingularities(Tranche);
```

```
PS := [d1 - 3/2 w1^3 w3 - 3/2 w1 w3 w2^2 - 3/2 w1 w3^3 - 1/2 w1^3 sqrt(3) w2 - 1/2 w1 sqrt(3) w2^3
- 1/2 w1 sqrt(3) w2 w3^2, d2 - w1^3 sqrt(3) w2 - w1 sqrt(3) w2^3 - w1 sqrt(3) w2 w3^2, w1^2 + w2^2 +
w3^2 - 1, -3 sqrt(3) w1^7 - 3 sqrt(3) w1^5 w2^2 - 3 sqrt(3) w1^5 w3^2 + 3 sqrt(3) w1^3 w2^4 + 6 w1^3 sqrt(3) w2^2 w3^2 +
3 sqrt(3) w1^3 w3^4 + 3 sqrt(3) w1 w2^6 + 9 sqrt(3) w1 w2^4 w3^2 + 9 sqrt(3) w1 w2^2 w3^4 + 3 sqrt(3) w1 w3^6]
```

```
> SI:=Projection(PS, [d1, d2]);
```

```
SI := [16 d1^3 - 16 d1^2 d2 + 16 d1 d2^2 - 9 d1, 16 d1^3 + 16 d2^3 - 9 d1 - 9 d2]
```

On voit apparaître l'origine $d1=d2=0$ comme appartenant aux singularités images. Ceci indique qu'il se passe quelque chose de spécial.

```
> Fact:=AlgebraicTools[FactorSystem](SI);
```

```
Fact := [[d1^2 - d1 d2 + d2^2 - 9/16], [d1, d2 + d1]]
```

On regarde là où le PGD a une infinité de solutions : $d1=d2=0$.

```
> InfiniteEquations(Comp2pf, [d1,d2]);  
[[d1,d2]]
```

B Les 3-UPUs

```
> restart: with(LinearAlgebra) : with(PolynomialIdeals):  
with(Siropa):  
> #alias(alpha=RootOf(Z^2-3)):  
> alpha:=sqrt(3):  
> alpha; simplify(alpha^2);  
√3  
3  
> A:=[Vector([0,0,1]),Vector([0,alpha/2,-1/2]),  
Vector([0,-alpha/2,-1/2])]:  
> b:=[Vector([0,0,h]),Vector([0,(alpha/2)*h, (-1/2)*h]),  
Vector([0,(-alpha/2)*h, (-1/2)*h])]:  
> #h:=3/2:  
> M:=simplify(Matrix([[x[0]^2+x[1]^2-x[2]^2-x[3]^2,  
2*(x[1]*x[2]-x[0]*x[3]),2*(x[1]*x[3]+x[0]*x[2]),  
[2*(x[1]*x[2]+x[0]*x[3]),x[0]^2-x[1]^2+x[2]^2-x[3]^2,  
2*(x[2]*x[3]-x[0]*x[1]), [2*(x[1]*x[3]-x[0]*x[2]),  
2*(x[2]*x[3]+x[0]*x[1]), x[0]^2-x[1]^2-x[2]^2+x[3]^2]]))):  
> T:=simplify(Vector([-x[0]*y[1]+x[1]*y[0]-x[2]*y[3]  
+x[3]*y[2],-x[0]*y[2]+x[1]*y[3]+x[2]*y[0]-x[3]*y[1],  
-x[0]*y[3]-x[1]*y[2]+x[2]*y[1]+x[3]*y[0]])):  
> N:=simplify(x[0]^2+x[1]^2+x[2]^2+x[3]^2):  
> B:=[seq(simplify(M.i+T), i in b)]:
```

Vecteurs qui dirigent les axes de rotation 1 et 4 sur chaque jambe (Axe : dans le repère fixe, axe : dans le repère attaché à la plateforme).

```
> Axel:= [seq(Vector([u[i],v[i],w[i]]), i=1..3)]:  
> axe4:= [seq(Vector([l[i],m[i],n[i]]), i=1..3)]:  
> Axe4:= [seq(M.i, i in axe4)]:  
> Study:= add(x[i]*y[i], i=0..3);
```

$$Study := x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Écriture des équations de contraintes qui expriment la coplanarité des vecteurs Axe1, Axe4, et AB pour chaque jambe.

```
> Contr:=seq(Determinant(Matrix(3,3,[Axe1[i],Axe4[i],
B[i]-N*A[i]])),i=1..3),Study]:
```

B.1 Cas du Tsai 3-UPU

Ici les *axe1* et *axe4* sont tangents aux cercles circonscrits.

```
> Tsai:=seq(u[i]=A[i][1], i=1..3), seq(v[i]=A[i][3],
i=1..3), seq(w[i]=-A[i][2], i=1..3), seq(l[i]=b[i][1],
i=1..3), seq(m[i]=b[i][3], i=1..3), seq(n[i]=-b[i][2], i=1..3):
```

```
> TsaiContr:=simplify(subs(Tsai,Contr)):
```

```
> TsaiContrSimp:=simplify(TsaiContr[1]/h), simplify((TsaiContr[2
+TsaiContr[3])/h), simplify((TsaiContr[2]-TsaiContr[3])/alpha/h), Study];
```

```
TsaiContrSimp := [2hx03x3 + 2hx02x1x2 + 2hx0x12x3 + 2hx0x22x3 + 2hx0x33 + 2hx13x2
+ 2hx1x23 + 2hx1x2x32 - 2x03x3 + 2x02x1x2 - 2x02x1y1 - 2x02x3y3 - 2x0x12x3 +
2x0y0x12 - 2x0x22x3 - 2x0x33 + 2x0x32y0 + 2x13x2 + 2x12y2x2 + 2x1x23 - 2x1y1x22 +
2x1x2x32 - 2x22y3x3 + 2x2x32y2, -2hx03x3 - 2hx02x1x2 - 2hx0x12x3 - 2hx0x22x3 -
2hx0x33 - 2hx13x2 - 2hx1x23 - 2hx1x2x32 + 2x03x3 - 2x02x1x2 - 4x02x1y1 -
3x02x2y2 - x02x3y3 + 2x0x12x3 + 4x0y0x12 + 2x0x22x3 + 3x0x22y0 + 2x0x33 + x0x32y0 -
2x13x2 + x12y2x2 + 3x12x3y3 - 2x1x23 - x1y1x22 - 2x1x2x32 - 3x1x32y1 + 2x22y3x3 -
2x2x32y2, 2hx03x2 - 2hx02x1x3 + 2hx0x12x2 + 2hx0x23 + 2hx0x2x32 - 2hx13x3 -
2hx1x22x3 - 2hx1x33 - 2x2x03 - 2x02x1x3 + x02x2y3 + x02x3y2 - 2x12x0x2 - 2x0x23 -
2x0x2x32 - 2x0x2x3y0 - 2x13x3 + x12x2y3 + x12y2x3 - 2x1x22x3 - 2x1x2x3y1 - 2x1x33 +
x23y3 - x22x3y2 - x2x32y3 + x33y2, x0y0 + x1y1 + x2y2 + x3y3]
```

Fabrication de l'idéal des contraintes, saturation par rapport à N et on décomposition en composantes premières.

```
> ITsai:=PolynomialIdeal(TsaiContrSimp, variables=seq(x[i], i=0..3),
seq(y[i], i=0..3)):
```

```
> ITsaiSat:=Saturate(ITsai,N):
```

```
> ModopTsai:=Simplify(PrimeDecomposition(ITsaiSat));
```

On s'intéresse au mode opératoire "général", qui n'est ni planaire ni purement translationnel.

```
> K5:=ModopTsai[-1];
```

```
> Groebner[HilbertPolynomial](K5);
```

$$2 + \frac{11}{6} _Z^3 + 3 _Z^2 + 7/6 _Z$$

```
> Groebner[HilbertPolynomial](ITsaiSat);
```

$$1 + 5/2 _Z^3 + _Z^2 + 7/2 _Z$$

Introduction des équations qui relient les variables articulaires aux variables de position et d'orientation.

```
> K5ex:=subs(h=1/2, K5);
```

```

> R:=[r[1],r[2],r[3]]:
> Lex:=[N-1,seq(subs(h=1/2,R[i]^2-DotProduct(B[i]-A[i],
B[i]-A[i], conjugate = false)), i=1..3)]:
> Confex:=Add(K5ex,PolynomialIdeal(Lex)):
> RobotK5:=CreateManipulator(convert(Generators(Confex),list),
[seq(x[i], i=0..3),seq(y[i],i=0..3)],R):

```

B.2 Calcul dans une tranche

On essaie ici de faire une décomposition cellulaire dans une tranche en fixant $r[3]$

```

> r3ex:=5;
                                     r3ex := 5
> Tranche:=SubsParameters(r[3]=r3ex,r[1]=r3ex+k,r[2]=r3ex,RobotK5):
> #Sol0:=Configurations(Tranche,k=0): nops(Sol0)/2;
> #select(x->(rhs(x[5])>0 or(rhs(x[5])=0 and
rhs(x[6])>0)),Sol0); nops(%);

```

Nombre de solutions réelles dans chaque cellule de la tranche

```

> DCA:=CellDecompositionPlus(Tranche[Equations],[k,sqrt(3)],[seq(x[i],i=

```

Discriminant Variety computation ...

-> Groebner Basis computation ...

-> Number of components : 1

-> Component number 1 ...

—> Reduction of number of polynomials ...

—> Computation of non proper locus ...

—> Computation of constraints locus ...

—> Computation of multiplicities locus ...

Real roots testing ...

Cylindrical Algebraic Decomposition computation ...

Saturation by the inequalities ...

Warning, computation interrupted

```

> print(DCA);

```

```

> with(RootFinding:-Parametric): liste_nb:=NumberOfSolutions(DCA);

```

```

liste_nb := [[1,24],[2,16],[3,16],[4,8],[5,8],[6,4],[7,4],[8,4],[9,0],[10,0],[11,0],[12,0],[13,0]]

```

Bibliographie

- [BCR98] J. Bochnak, M. Coste, and M-F. Roy. *Real Algebraic geometry*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [BPR16] S. Basu, R. Pollack, and M-F. Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, volume 10 of *AACIM*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2016.
- [CD21] Michel Coste and Nestor Djintelbe. *Degeneration to Infinity May Provide Information About Kinematics*, volume 15, pages 234–241. In : Lenarcic J., Siciliano B. (eds) *Advances in Robot Kinematics 2020*. ARK 2020. Springer Proceedings in Advanced Robotics, Springer, Cham., 2021.
- [CKM15] Michel Coste and Demdah Kartoue Mady. Extra modes of operation and self-motions in manipulators designed for schoenflies motion. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 7, 11 2015.
- [CLO15] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms : An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, third edition, 2015.
- [CM15] Michel Coste and Seydou Moussa. On the rationality of the singularity locus of a Gough–Stewart platform — biplanar case. *Mechanism and Machine Theory*, 87 :82 – 92, 2015.
- [Cos00] M. Coste. *An introduction to semialgebraic geometry*. Universita di Pisa, Dottorato di ricerca in Matematica, Istituti editoriali poligrafici internazionali, Pisa- Rome, 2000.
- [Cos03] M. Coste. Exponentielle de matrices : cas des rotations et des déplacements, cas des carrés. <https://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Exponentielle.pdf>, Juin 2003.
- [Cos12] Michel Coste. Asymptotic singularities of planar parallel 3-RPR manipulators. In Jadran Lenarcic and Manfred Husty, editors, *Latest Advances in Robot Kinematics*, pages 35–42, Dordrecht, 2012. Springer Netherlands.
- [DC20] Nestor Djintelbe and Michel Coste. Compactification of the group of rigid motions and applications to robotics. *J. Pure Appl. Algebra*, 2020.
- [DS10] Wolfram Decker and Frank-Olaf Schreyer. *Varieties, Gröbner Bases and Algebraic Curves*. Springer, 08 2010.

- [EM07] M. Elkadi and B. Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, volume 59 of *Springer. Mathématiques & Applications*, 2007.
- [Eul76] L. Euler. *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. Novi Commentari Acad. Petropolitanae*, 1776.
- [Fau99] J.-C. Faugère. A New Efficient Algorithm for Computing Gröbner Bases (F4) . *Journal of Pure and Applied Algebra*, June 1999.
- [Fau02] J.-C. Faugère. A New Efficient Algorithm for Computing Gröbner Bases without Reduction to Zero (F5). In *Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC '02*, pages 75–83, New York, NY, USA, 2002. ACM.
- [FGLM93] J.-C. Faugère, P. Gianni, D. Lazard, and T. Mora. Efficient Computation Gröbner Bases by Change of Ordering. *Journal of Symbolic Computation*, 1993.
- [Gal01] J.H. Gallier. *Geometric methods and applications : for computer science and engineering*. Springer verlag, 2001.
- [Gat19] A. Gathmann. Birational Maps and Blowing Up. <https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2019/alggeom-2019-c9.pdf>, 2019.
- [GK07] Floris Geerts and Bart Kuijpers. *Real Algebraic Geometry and Constraint Databases*, pages 799–856. 09 2007.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52. Springer-Verlag New York, 1977.
- [HKSS97] M. L. Husty, A. Karger, H. Sachs, and W. Steinhilper. *Kinematik und Robotik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [HS10] Manfred L. Husty and Hans-Peter Schröcker. Algebraic geometry and kinematics. In Ioannis Z. Emiris, Frank Sottile, and Thorsten Theobald, editors, *Nonlinear Computational Geometry*, pages 85–107, New York, NY, 2010. Springer New York.
- [HSS13] Gábor Hegedüs, Josef Schicho, and Hans-Peter Schröcker. The theory of bonds : A new method for the analysis of linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 70 :407 – 424, 2013.
- [III1] Vladimir Ivancevic and Tijana Ivancevic. Lecture notes in lie groups. 04 2011.
- [LFA01] J. Lelong-Ferrand and J-M. Arnaudiès. *Cours de mathématiques, tome 3 : Géométrie et cinématique*. Dunod, 04 2001.
- [MT97] R. Mneimné and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 10 1997.
- [Per95] D. Perrin. *Géométrie algébrique : Une introduction*. InterEditions et CNRS Editions, 1995.
- [Sel05] J. M. Selig. *Geometry Fundamentals of Robotics*. Springer. Monographs in Computer Science, New York, 2005.

- [SIR] *SIROPA home page*. <http://siropa.gforge.inria.fr/doc/files/siropa-mpl.htm>.
- [Stu91] E. Study. Von den Bewegungen und Umlegungen. *Math. Ann.*, 39(4) :441–565, 1891.
- [Stu03] E. Study. *Geometrie der Dinamen*. B. G. Teubner, Leipzig, 1903.
- [SWH14] J. Schadlbauer, D.R. Walter, and M.L. Husty. The 3-RPS parallel manipulator from an algebraic viewpoint. *Mechanism and Machine Theory*, 75 :161 – 176, 2014.
- [Tsa96] Lung-Wen Tsai. *Kinematics of A Three-Dof Platform with Three Extensible Limbs*, pages 401–410. Springer Netherlands, Dordrecht, 1996.
- [WH11] D.R. Walter and M.L. Husty. Kinematic analysis of the TSAI 3-UPU parallel manipulator using algebraic methods. In *The 13th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science*, pages 1–10, 01 2011.
- [WHP08] Dominic R. Walter, Manfred L. Husty, and Martin Pfurner. A complete kinematic analysis of the snu 3-upu parallel robot. 496 :331–346, 01 2008.