



**Université Assane Seck de Ziguinchor**

**UFR: Sciences et Technologies**

**Département de Mathématiques**

## **MÉMOIRE**

**En vue de l'obtention du Diplôme de Master**

**Domaine: Mathématiques et Applications**

**Spécialité: Mathématiques Pures**

**Sujet:** Une approche variationnelle aux équations de Monge-Ampère complexes

**Présenté par:** Papa BDIANE

**Directeur:**

Ahmed ZERIAHI, Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse

**Co-directeur:**

Marie Salomon SAMBOU, Professeur, Université Assane Seck, Ziguinchor

**Soutenu:** le 21 JUIN 2019

Devant le jury

Prénoms et Nom	Grade	Jury	Établissement
Oumar SALL	Professeur	Président	UASZ
Amoussou Thomas GUEDENON	Maître de conférences	Examineur	UASZ
Ahmed ZERIAHI	Professeur	Directeur	IMT/UPST
Marie Salomon SAMBOU	Professeur	Co-directeur	UASZ

À Cheikh Ibrahima FALL

# Remerciements

Je rends grâce à DIEU le TOUT PUISSANT de m'avoir donné la force et la motivation de réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer une profonde gratitude envers le Professeur Marie Salomon SAMBOU ainsi que le professeur Ahmed ZERIAHI dont l'encadrement et le soutien m'ont été d'une grande aide. Ils m'ont introduit à un sujet riche et passionnant, au carrefour de plusieurs disciplines. Je suis vraiment ému par leur disponibilité et l'attention qu'ils ont portée à mon égard tout au long de ce travail.

Je remercie également le Professeur Vincent GUEDJ, Directeur de l'Institut de Mathématiques de Toulouse où j'ai pu réaliser une part importante de mes recherches.

Je remercie les professeurs Oumar SALL et Amoussou Thomas GUEDENON pour leur participation à mon jury.

Je remercie l'ensemble des membres du corps professoral ainsi que de l'administration du département de Mathématiques de l'UASZ qui ont contribué à ma formation.

Je voudrais aussi remercier toute ma famille et tous ceux qui m'ont apporté leur soutien de toute nature afin que je puisse poursuivre ma formation dans de bonnes conditions.

Je ne saurais terminer sans exprimer un remerciement particulier à Monsieur Daouda Niang DIATTA qui en plus d'être la personne qui a su développer ma passion pour les Mathématiques, a beaucoup participé à la réalisation de ce mémoire de par ses conseils, son aide et son soutien.

# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>8</b>
1.1 Fonctions plurisousharmoniques . . . . .	8
1.2 Fonctions quasi-plurisousharmoniques . . . . .	18
<b>2 Opérateurs de Monge-Ampère</b>	<b>23</b>
2.1 Courants de type Monge-Ampère . . . . .	24
2.2 Opérateurs de Monge-Ampère Complexes . . . . .	25
2.3 Continuité des opérateurs de Monge-Ampère complexes . . . . .	28
2.4 Capacité de Monge-Ampère . . . . .	30
2.5 Les classes d'énergie finie . . . . .	32
<b>3 Méthode Variationnelle</b>	<b>41</b>
3.1 Les fonctionnelles d'énergie $\mathcal{F}_\lambda$ . . . . .	41
3.2 Solutions dans $\mathcal{E}^1(X, \omega)$ . . . . .	45
3.3 Autres Solutions . . . . .	59
3.4 Unicité . . . . .	71
<b>Conclusion</b>	<b>82</b>
<b>Références</b>	<b>85</b>

# Introduction

## Contexte

Le problème de l'existence d'une métrique canonique sur une variété kählérienne compacte est un sujet d'actualité qui a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années et qui continue de susciter plusieurs questions ouvertes importantes. Dans les années 50, E. Calabi a posé plusieurs problèmes importants qui ont été à l'origine de ces questions. La célèbre conjecture de Calabi prédit l'existence de métrique kählérienne à courbure de Ricci prescrite. Plus généralement Calabi a défini plusieurs types de métriques canoniques et a posé le problème de leur existence et leur unicité. En particulier, il a conjecturé l'existence de métrique de Kähler-Einstein sur une variété kählérienne compacte vérifiant certaines conditions topologiques nécessaires à l'existence de telles métriques.

E. Calabi a montré que l'existence de celles-ci se ramène à la résolution de certaines équations de Monge-Ampère complexes sur une variété. Il a par ailleurs indiqué une stratégie pour aborder la résolution de ces équations par la méthode de continuité. Cette méthode est assez classique dans la théorie des EDP non linéaires du second ordre et est basée sur des estimées a priori mais sa mise en œuvre dans ce contexte est hautement non triviale.

En 1976, S. T. Yau a réussi à résoudre la conjecture de Calabi et T. Aubin et S. T. Yau ont montré (indépendamment) l'existence de métrique de Kähler-Einstein sur une variété kählérienne compacte à courbure de Ricci nulle ou négative.

Plus récemment, sous l'impulsion notamment des travaux de S. Koldziej et U. Cegrell, les méthodes provenant de la théorie du pluripotentiel ont fait apparition dans ce domaine et y ont été adaptées avec un certain succès.

En effet, il s'avère que ces questions de Géométrie kählérienne se posent également dans le cadre de certaines variétés kählériennes singulières qui apparaissent comme des modèles canoniques ou minimaux dans la classification des variétés projectives complexes. Dans ce cadre, les équations de

Monge-Ampère qui apparaissent sont dégénérées de sorte que les méthodes provenant des EDP (méthode de continuité) ne suffisent pas à les aborder. C'est là que la théorie du pluripotential intervient pour proposer un cadre plus souple dans lequel la notion de solution faible fait sens et permet une approche plus efficace.

L'une des méthodes développées dans ce cadre est l'approche variationnelle. Le sujet de ce mémoire est intitulé "*Une approche variationnelle aux équations de Monge-Ampère complexes*" et fait l'objet du troisième chapitre de ce document.

## Plan du mémoire

Ce mémoire n'est pas un travail original et a pour but d'écrire avec plus de détail le chapitre 11 de [GZ17]. Cependant il est constitué de trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur l'étude des fonctions plurisousharmoniques et des fonctions quasi-plurisousharmoniques. Il comporte deux sections. Dans la première section, on étudie les propriétés de base des fonctions plurisousharmoniques. La deuxième section s'intéresse au comportement local de ces fonctions qui ont un sens global. Mais un problème s'impose puisque d'après le principe du maximum, sur une variété compacte  $X$ , il n'existe pas de fonctions plurisousharmoniques en dehors des constantes. Pour contourner ce problème, on introduit la notion de fonctions quasi-plurisousharmoniques qui va permettre d'étudier localement les fonctions plurisousharmoniques sur une variété compacte.

Dans le second chapitre, on introduit les outils pour la résolution des équations de Monge-Ampère complexes. On étudie d'abord les opérateurs de Monge-Ampère complexes pour les fonctions plurisousharmoniques localement bornées comme dans [BT82] avant de les étendre aux fonctions non bornées par les approximations canoniques comme dans [GZ07]. On introduit aussi la notion de capacité et les classes d'énergie finie qui vont servir d'espace de travail pour l'approche variationnelle.

Le troisième et dernier chapitre intitulé méthode variationnelle est le cœur du mémoire. On va résoudre l'équation de Monge-Ampère

$$MA(\varphi) = e^{-\lambda\varphi}\mu. \tag{0.0.1}$$

Ici,  $\varphi$  est une fonction  $\omega$ -plurisousharmonique sur une variété kählérienne compacte  $X$  et appartenant à la classe  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$ , où  $\omega$  est une forme semi-positive et grosse.  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mu$  une mesure non pluripolaire. Les solutions dépendront de la valeur de  $\lambda$  et des propriétés de la mesure  $\mu$ . Le

principe consiste à interpréter (0.0.1) comme l'équation d'Euler-Lagrange (i.e. l'équation des points critiques ) d'une fonctionnelle  $\mathcal{F}_\lambda$  définie sur l'espace  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$ . Il s'agira d'étudier les propriétés de cette fonctionnelle sur cet espace pour montrer qu'elle atteint son maximum en un point qui sera la solution faible de (0.0.1) sous des conditions raisonnables sur les données.

# Chapter 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, qui fait un rappel des propriétés de base des fonctions plurisousharmoniques et quasi-plurisousharmoniques, on ne donnera pas toutes les preuves puisqu'elles sont dans le livre de référence [GZ17]. Pour ce qui est de la notion de courant, on renvoie le lecteur à [GZ17] et [Dem92] qui sont d'une grande clarté.

### 1.1 Fonctions plurisousharmoniques

#### 1.1.1 Fonctions sousharmoniques

On rappelle ici quelques propriétés de base des fonctions sousharmoniques sur  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ . Elles sont caractérisées par les inégalités de la moyenne.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domaine.

**Définition 1.1.1.** Une fonction  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$  est sous-harmonique si elle est semi-continue supérieurement sur  $\Omega$  et pour tout  $a \in \Omega$ , il existe  $0 < \rho(a) < \text{dist}(a, \partial\Omega)$  tel que, pour tout  $0 < r < \rho(a)$ ,

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta. \quad (1.1.1)$$

On rappelle qu'une fonction  $u$  est semi-continue supérieurement ( s.c.s en abrégé ) sur  $\Omega$  si pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , les sous-ensembles de niveau  $\{u < c\}$  sont des ouverts de  $\Omega$ .

La sous-harmonicité est une propriété locale. Par semi-continuité supérieure, une fonction sousharmonique est bornée supérieurement sur tout sous-ensemble

compact  $K \subset \Omega$  et atteint son maximum sur  $K$ . Elle peut prendre la valeur  $-\infty$  en des points. Avec notre définition, la fonction qui est identiquement égale à  $-\infty$  est sousharmonique sur  $\Omega$ .

On va montrer dans la suite que si  $u$  est sousharmonique sur un domaine  $\Omega$  et non identiquement  $-\infty$ , alors  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , donc l'ensemble  $\{u = -\infty\}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $\mathbb{C}$ . On l'appelle l'ensemble polaire de  $u$ .

Le maximum de deux fonctions sousharmoniques est sousharmonique; il en est de même qu'une combinaison convexe de fonctions sousharmoniques.

**Proposition 1.1.2.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domaine.*

(1) *Si  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$  est sousharmonique sur  $\Omega$  et  $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe croissante sur un intervalle  $I$  contenant  $u(\Omega)$ , alors  $\chi \circ u$  est sousharmonique sur  $\Omega$ .*

(2) *Soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sousharmoniques décroissantes sur  $\Omega$ . Alors  $u := \lim u_j$  est sousharmonique sur  $\Omega$ .*

(3) *Soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sousharmoniques sur  $\Omega$ , qui sont localement bornées supérieurement sur  $\Omega$  et soit  $(\varepsilon_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j < +\infty$ . Alors  $u := \sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j u_j$  est sousharmonique sur  $\Omega$ .*

(4) *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable,  $\mu$  une mesure positive sur  $(X, \mathcal{T})$ , et  $E(z, x) : \Omega \times X \rightarrow [-\infty, +\infty[$  une fonction mesurable telle que*

*i) pour  $\mu$ -p.p.  $x \in X$ ,  $z \mapsto E(z, x)$  est sousharmonique sur  $\Omega$ ,*

*ii) pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe un voisinage  $D$  de  $z_0$  dans  $\Omega$  et  $g \in L^1(\mu)$  tels que  $E(z, x) \leq g(x)$  pour tout  $z \in D$  et  $\mu$ -p.p.  $x \in X$ .*

*Alors  $z \mapsto U(z) := \int_X E(z, x) d\mu(x)$  est sousharmonique.*

Pour la preuve ( Voir [GZ17] ).

**Exemple 1.1.3.**

1. Soient  $a \in \mathbb{C}$  fixé et  $c > 0$ . Alors la fonction  $z \mapsto c \log |z - a|$  est sousharmonique.

2. soient  $(a_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite bornée et  $\varepsilon_j > 0$  des réels positifs tels que  $\sum_j \varepsilon_j < +\infty$ . La fonction

$$z \mapsto u(z) := \sum_j \varepsilon_j \log |z - a_j|$$

est une fonction sousharmonique localement intégrable dans  $\mathbb{C}$ . Si la suite  $(a_j)$  est dense sur un domaine  $\Omega$ , d'après la théorie des catégories de Baire, l'ensemble polaire  $\{u = -\infty\}$  est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. Tout point  $a \in \Omega \setminus \{u = -\infty\}$  est un point de discontinuité de  $u$ : la fonction  $u$  est finie en  $a$ , mais elle n'est pas localement bornée en dehors de  $a$ .

Le résultat suivant généralise le premier point de l'exemple ci dessus:

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe avec  $f \not\equiv 0$  sur  $\Omega$ . Alors  $\log |f|$  est une fonction sousharmonique sur  $\Omega$ .*

*En particulier, pour chaque  $\alpha > 0$ ,  $|f|^\alpha$  est une fonction sousharmonique sur  $\Omega$ . L-ensemble polaire de  $\log |f|$  coïncide avec l'ensemble des zéros de  $f$ .*

*Preuve:*

On voit que si  $u := \log |f|$ , alors  $\{u = -\infty\} = \{f = 0\}$ . Pour chaque  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\{u < c\} = \{|f| < e^c\}$  est ouvert. Donc  $u$  est s.c.s. dans  $\Omega$ .

Si  $a \in \Omega$  et  $u(a) = -\infty$ , alors l'inégalité de sous-moyenne (2.1.1) est triviale.

Si  $a \in \Omega$  et  $u(a) > -\infty$ , alors  $f(a) \neq 0$ . Comme  $f$  est continue alors il existe  $r > 0$  assez petit tel que  $f(z) \neq 0$  pour  $|z - a| < r$ . Il en suit que  $\log |f|$  est une branche continue de  $\log f$  sur  $\mathbb{D}(a, r)$ . Elle est donc holomorphe sur le disque  $\mathbb{D}(a, r)$ . Alors la concavité du logarithme et la propriété de la moyenne donnent le résultat.

En posant  $\chi(t) := e^{\alpha t}$  qui est une fonction convexe croissante sur  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , alors  $|f|^\alpha = \chi(\log |f|)$  est sousharmonique sur  $\Omega$ .  $\square$

On va donner la propriété de monotonie de la valeur moyenne d'une fonction sousharmonique:

**Proposition 1.1.5.** *Soient  $u$  une fonction sousharmonique,  $a \in \Omega$  et on pose  $\delta(a) := \text{dist}(a, \partial\Omega)$ . Alors la valeur moyenne*

$$r \mapsto MA(a, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

*est croissante et continue sur  $[0, \delta(a)[$ ; elle converge vers  $u(a)$  quand  $r \rightarrow 0$ .*

**Corollaire 1.1.6.** *Si  $u$  est sousharmonique sur  $\Omega$ ,  $a \in \Omega$ , et  $0 < r < \delta(a)$ , alors*

$$u(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a,r)} u(z) dV(z),$$

où  $dV$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout  $a \in \Omega$ ,

$$u(a) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a,r)} u(z) dV(z).$$

*En particulier, si  $u$  et  $v$  sont des fonctions sousharmoniques sur  $\Omega$  telles que  $u \leq v$  presque partout sur  $\Omega$ , alors  $u \leq v$  partout sur  $\Omega$ .*

On va donner une propriété fondamentale des fonctions sousharmoniques qui est une généralisation du principe du maximum déjà connu pour les fonctions holomorphes ( plus précisément leur module ).

**Théorème 1.1.7.** *On suppose que  $u$  est sousharmonique sur  $\Omega$ .*

1. *Si  $u$  admet un maximum local en un point  $a \in \Omega$ , alors  $u$  est constante sur un voisinage de  $a$ .*

2 *Pour chaque sous-domaine borné  $D \Subset \Omega$ , on a*

$$\max_D u = \max_{\partial D} u.$$

*De plus,  $u(z) < \max_{\partial D} u$  pour tout  $z \in D$  sauf si  $u$  est constante sur  $D$ .*

**Corollaire 1.1.8.** *Soient  $\Omega \Subset \mathbb{C}$  un domaine borné et  $u$  une fonction sousharmonique sur  $\Omega$ . On suppose que  $\limsup_{z \rightarrow \xi} u(z) \leq 0$  pour tout  $\xi \in \partial\Omega$ . Alors  $u \leq 0$  sur  $\Omega$ .*

On rappelle que l'opérateur laplacien sur  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  est donné par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

On a alors le principe de comparaison:

**Corollaire 1.1.9.** *Soient  $\Omega \Subset \mathbb{C}$  un domaine borné et  $u, v$  des fonctions sousharmoniques dans  $L^1_{loc}(\Omega)$  tels que:*

*i) pour tout  $\xi \in \partial\Omega$ ,  $\liminf_{z \rightarrow \xi} (u(z) - v(z)) \geq 0$ ;*

ii)  $\Delta u \leq \Delta v$  au sens faible des mesures de Radon sur  $\Omega$ .

Alors  $u \geq v$  sur  $\Omega$ .

On va énoncer un résultat crucial qui relie la notion de sousharmonicité à une propriété de différentiabilité et connu sous le nom de théorème de représentation de Riesz:

**Proposition 1.1.10.** *Soit  $u$  est une fonction sousharmonique sur un domaine  $\Omega$  telle que  $u \not\equiv -\infty$ . Alors la distribution  $\Delta u \geq 0$  est positive: pour chaque fonction test positive  $\varphi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$ ,*

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \Delta \varphi dV \geq 0.$$

*Réciproquement, si  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  est une distribution telle que  $\Delta T \geq 0$ , alors il existe une unique fonction sousharmonique  $u$  non identiquement  $-\infty$  sur  $\Omega$  telle que  $T_u = T$ .*

*Preuve:*

On suppose en premier que  $u$  est lisse sur  $\Omega$ . D'après la formule de Taylor,

$$\Delta u(a) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta - u(a) \right).$$

Comme  $u$  est sousharmonique, alors le membre de droite est positive et donc  $\Delta u \geq 0$  sur  $\Omega$ .

D'après la Proposition 1.1.19,  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , donc on peut la régularisée par convolution en posant  $u_\varepsilon = u \star \rho_\varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$  et  $(\rho_\varepsilon)$  une famille de noyaux radiaux régularisants. Les fonctions  $u_\varepsilon$  sont lisses et sousharmoniques comme combinaison convexe de fonctions sousharmoniques, donc on en déduit que  $\Delta u_\varepsilon \geq 0$ . De plus elles convergent vers  $u$  dans  $L^1_{loc}$ . Donc  $\Delta u \geq 0$

En intégrant en coordonnées polaires on a

$$u_\varepsilon(a) = u \star \rho_\varepsilon(a) = \int_0^1 r \rho(r) dr \int_0^{2\pi} u(a + \varepsilon r e^{i\theta}) d\theta$$

qui est croissante d'après Proposition 1.1.5 et en utilisant la propriété sur les noyaux radiaux, cette quantité converge d'après le Corollaire 1.1.6 vers  $u$ .

Soit  $T$  une distribution sur  $\Omega$  et  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une famille de noyaux radiaux régularisants. Alors  $v_\varepsilon = T \star \rho_\varepsilon$  est une fonction lisse et  $\Delta v_\varepsilon = (\Delta T) \star \rho_\varepsilon$ .

Donc  $v_\varepsilon$  est une fonction sousharmonique sur  $\Omega_\varepsilon$ . Soit  $\varepsilon > 0$  assez petit, comme  $v_\varepsilon$  est sousharmonique alors  $\eta \mapsto (v_\varepsilon \star \rho_\eta)$  est croissante sur  $\Omega_{\varepsilon+\eta} := \{z \in \Omega \mid \text{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon + \eta\}$ . On a par symétrie  $v_\varepsilon \star \rho_\eta = v_\eta \star \rho_\varepsilon$  sur  $\Omega_{\varepsilon+\eta}$  pour  $\varepsilon, \eta > 0$  assez petit. Donc pour chaque  $\eta > 0$  assez petit fixé,  $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon \star \rho_\eta$  est aussi croissante pour  $\varepsilon$  assez petit et converge vers  $v_\varepsilon$  lorsque  $\eta \rightarrow 0^+$ . Donc  $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon$  est croissante.

Puisque  $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon$  est croissante en  $\varepsilon > 0$  alors elle converge vers une fonction sousharmonique quand  $\varepsilon \searrow 0$ . Par le théorème de convergence monotone,  $T_u = T$  comme distribution, donc  $u \neq -\infty$ . Comme deux fonctions localement intégrables égales au sens des distributions sont égales presque partout, d'après le Corollaire 1.1.6 on a l'unicité sur  $u$ . □

### 1.1.2 Fonctions plurisousharmoniques

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^n$ .

**Définition 1.1.11.** Une fonction  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$  est plurisousharmonique si elle est semi-continue supérieurement et pour toute droite complexe  $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ , la restriction  $u|_{\Lambda \cap \Omega}$  est sousharmonique sur  $\Omega \cap \Lambda$ .

Cette dernière propriété peut être reformulée comme suit: pour tout  $a \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^n$  avec  $|\xi| = 1$ , et  $r > 0$  tels que  $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ ,

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}\xi) d\theta. \quad (1.1.2)$$

Tous les résultats de base qu'on a établis pour les fonctions sousharmoniques sont aussi valables pour les fonctions plurisousharmoniques.

**Proposition 1.1.12.**

- (1) Si  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$  est plurisousharmonique sur  $\Omega$  et  $\chi$  est une fonction réelle convexe croissante sur un intervalle contenant  $u(\Omega)$ , alors  $\chi \circ u$  est plurisousharmonique sur  $\Omega$ .
- (2) Soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite décroissantes de fonctions plurisousharmoniques sur  $\Omega$ . Alors  $u := \lim u_j$  est plurisousharmonique sur  $\Omega$ .
- (3) Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable,  $\mu$  une mesure positive sur  $(X, \mathcal{T})$ , et  $E(z, x) : \Omega \times X \rightarrow [-\infty, +\infty[$  une fonction telle que

i) pour  $\mu$ -p.p.  $x \in X$ ,  $z \mapsto E(z, x)$  est plurisousharmonique sur  $\Omega$ ,

ii) pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe  $r > 0$  et  $g \in L^1(\mu)$  tels que pour tout  $z \in B(z_0, r)$  et  $E(z, x) \leq g(x)$  pour  $\mu$ -p.p.  $x \in X$ .

Alors  $z \mapsto V(z) := \int_X E(z, x) d\mu(x)$  est plurisousharmonique.

On rappelle qu'une fonction  $f : z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$  continue est holomorphe si elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann  $\partial f / \partial \bar{z}_j = 0$  pour tout  $1 \leq j \leq n$ .

**Proposition 1.1.13.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  un domaine de  $\mathbb{C}^n$  et  $f$  une fonction holomorphe telles que  $f \not\equiv 0$  sur  $\Omega$ . Alors  $\log |f|$  est plurisousharmonique sur  $\Omega$ . De plus, pour chaque  $\alpha > 0$ ,  $|f|^\alpha$  est plurisousharmonique.

**Proposition 1.1.14.** Soit  $u$  une fonction plurisousharmonique sur un domaine  $\Omega$ . Soit  $v$  une fonction plurisousharmonique sur un sous-domaine relativement compact  $\Omega' \subset \Omega$ . Si  $u \geq v$  sur  $\partial\Omega'$ , alors la fonction

$$z \mapsto w(z) = \begin{cases} \max[u(z), v(z)], & \text{si } z \in \Omega', \\ u(z), & \text{si } z \in \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

est plurisousharmonique sur  $\Omega$ .

*Preuve:*

C'est clair que  $w(z)$  est semi-continue supérieurement. En remplaçant  $v$  par  $v - \varepsilon$ , on obtient  $u > v - \varepsilon$  dans un voisinage de  $\partial\Omega'$  la fonction  $w_\varepsilon$  correspondante est plurisousharmonique. Quand  $\varepsilon \searrow 0$ , on a  $w_\varepsilon \nearrow w$  donc  $w$  satisfait la propriété de la sous-moyenne. Elle est alors plurisousharmonique sur  $\Omega$ .  $\square$

On donne maintenant les inégalités de sous-moyenne qui résultent de celles analogues en une variable complexe.

**Proposition 1.1.15.** Soit  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$  une fonction plurisousharmonique. Pour  $a \in \Omega$  fixé, on pose  $\delta(a) := \text{dist}(a, \partial\Omega)$ . Alors

1. l'inégalité de sous-moyenne surfacique sur la sphère donne: pour  $0 < r < \delta(a)$ ,

$$u(a) \leq \int_{|\xi|=1} u(a + r\xi) d\sigma(\xi), \quad (1.1.3)$$

où  $d\sigma$  est la mesure d'aire normalisée sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ;

2. *l'inégalité de sous-moyenne volumique donne: pour  $0 < r < \delta$  et toute fonction croissante continue à droite  $\gamma$  sur  $[0, r]$  avec  $\gamma(0) = 0$ ,*

$$u(a) \leq \frac{1}{\gamma(r)} \int_0^r d\gamma(s) \int_{|\xi|=1} u(a + s\xi) d\sigma(\xi); \quad (1.1.4)$$

3. *l'inégalité de sous-moyenne sur le tore donne:  $0 < r < \delta(a)/\sqrt{n}$ ,*

$$u(a) \leq \int_{\mathbb{T}^n} u(a + r\xi) d\tau_n(\xi), \quad (1.1.5)$$

où  $d\tau_n$  est la mesure de Lebesgue normalisée sur la tore  $\mathbb{T}^n$ .

D'après la Proposition 1.1.19 ci-dessous, toutes ces intégrales sont bien définies.

**Remarque 1.1.16.** Soit  $u$  une fonction plurisousharmonique sur  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ . En passant aux coordonnées polaires et en utilisant (1.1.4), on a

$$u(a) \leq \frac{1}{\kappa_{2n}} \int_{|\zeta| < 1} u(a + r\zeta) dV(\zeta), \quad (1.1.6)$$

où  $\kappa_{2n}$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{C}^n$ .

**Définition 1.1.17.** On note  $PSH(\Omega)$  le cône convexe de l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques  $u$  sur  $\Omega$  et telles que  $u|_{\Omega} \not\equiv -\infty$ .

**Définition 1.1.18.** Un ensemble est dit localement pluripolaire s'il est localement inclus dans l'ensemble polaire  $\{u = -\infty\}$  d'une fonction  $u \in PSH(\Omega)$ .

L'important résultat d'intégrabilité suivant résulte des inégalités de sous-moyenne:

**Proposition 1.1.19.**

$$PSH(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega).$$

*De plus, la restriction de  $u \in PSH(\Omega)$  à toute sphère euclidienne ( resp. tout tore ) contenue dans  $\Omega$  est intégrable par rapport à la mesure d'aire de la sphère ( resp. du tore ).*

*En particulier, l'ensemble polaire  $P := \{u = -\infty\}$  est de volume nulle dans  $\Omega$  et son intersection avec toute sphère euclidienne ( resp. tout tore ) a une mesure nulle par rapport à la mesure d'aire correspondante.*

*Preuve:*

Soit  $u \in PSH(\Omega)$  fixé. On note  $G$  l'ensemble des points  $a$  tels que  $u$  est intégrable dans un voisinage de  $a$ .

Puisque  $u \not\equiv -\infty$ , il existe  $a \in \Omega$  tel que  $u(a) > -\infty$ . Il résulte de l'inégalité de la moyenne que pour tout  $0 < r < \text{dist}(a, \partial\Omega)$ ,

$$-\infty < \kappa_{2n} r^{2n} u(a) \leq \int_{\mathbb{B}(a,r)} u(z) dV(z).$$

Comme  $u$  est majoré sur  $\mathbb{B}(a,r) \Subset \Omega$ , alors  $u \in L^1(\mathbb{B}(a,r))$ . En particulier,  $a \in G$ , donc  $G \neq \emptyset$ .

Soit maintenant  $b \in \Omega$  et  $b \in \partial G$  et soit  $r > 0$  tel que  $\mathbb{B}(b,r) \Subset \Omega$ . Donc il existe  $a \in G \cap \mathbb{B}(b,r)$ . Comme  $u$  est localement intégrable dans un voisinage de  $a$ , il existe  $a'$  proche de  $a$  dans  $\mathbb{B}(b,r)$  tel que  $u(a') > -\infty$  donc  $u \in L^1(\mathbb{B}(a',r))$ . Comme  $b \in \mathbb{B}(a',r)$ ,  $b \in G$  et  $G$  est fermé.

$G$  est ouvert par définition, fermé et non vide, par connexité  $G = \Omega$ .  $\square$

**Proposition 1.1.20.** *Pour  $u \in PSH(\Omega)$  fixé, on pose  $\delta_\Omega(a) := \text{dist}(a, \partial\Omega)$ . On fixe  $\gamma$  une fonction croissante continue à droite telle que  $\gamma(0) = 0$ . Alors*

$$r \mapsto M_\gamma(a,r) := \frac{1}{\gamma(r)} \int_0^r d\gamma(s) \int_{|\xi|=1} u(a + s\xi) d\sigma(\xi),$$

*est une fonction continue croissante sur  $[0, \delta_\Omega(a)[$  qui converge vers  $u(a)$  quand  $r \rightarrow 0$ .*

**Corollaire 1.1.21.** *Soient  $u \in PSH(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$  et  $0 < r < \delta_\Omega(a)$ . Alors*

$$u(a) \leq \frac{1}{\kappa_{2n}} \int_{|\zeta| \leq 1} u(a + r\zeta) d\lambda(\zeta) \leq \int_{|\xi|=1} u(a + r\xi) d\sigma(\xi).$$

Le résultat suivant va être utile dans la suite.

**Corollaire 1.1.22.** *Soient  $u, v \in PSH(\Omega)$  tels que  $u = v$  presque partout. Alors  $u \equiv v$ .*

*Preuve:*

On suppose que  $u, v \in PSH(\Omega)$  sont égales presque partout. Alors pour  $a \in \Omega$ , on a

$$u(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa_{2n}} \int_{|\zeta| \leq 1} u(a + r\zeta) d\lambda(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa_{2n}} \int_{|\zeta| \leq 1} v(a + r\zeta) d\lambda(\zeta) = v(a). \square$$

On muni  $PSH(\Omega)$  de la topologie  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Proposition 1.1.23.** *La fonction d'évaluation*

$$(u, z) \in PSH(\Omega) \times \Omega \mapsto u(z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

*est semi-continue supérieurement.*

*En particulier, si  $\mathcal{U} \subset PSH(\Omega)$  est une famille compacte de fonctions plurisousharmoniques, son enveloppe supérieure*

$$U := \sup\{u \mid u \in \mathcal{U}\}$$

*est semi-continue supérieurement, donc plurisousharmonique sur  $\Omega$ .*

Ce résultat est faux pour une famille de fonctions psh qui est seulement relativement compacte. Par contre sa régularisée semi-continue supérieure est plurisousharmonique:

**Proposition 1.1.24.** *Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de fonctions plurisousharmoniques dans un domaine  $\Omega$ , qui est localement uniformément majorée sur  $\Omega$ , et soit  $u := \sup_{i \in I} u_i$  son enveloppe supérieure. Alors la régularisée semi-continue supérieure*

$$z \mapsto u^*(z) := \limsup_{\Omega \ni z' \rightarrow z} u(z') \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

*est plurisousharmonique sur  $\Omega$  et  $\{u < u^*\}$  est de mesure de Lebesgue nulle.*

**Théorème 1.1.25.** *Soit  $(u_j)$  une suite de fonctions dans  $PSH(\Omega)$  qui est localement uniformément bornée supérieurement sur  $\Omega$ .*

1. *Si  $(u_j)$  ne converge pas localement uniformément vers  $-\infty$  sur  $\Omega$ , alors elle admet une sous-suite qui converge vers  $u \in PSH(\Omega)$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ .*

2. *Si  $u_j \rightarrow U$  sur  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors la distribution  $U$  est définie par une unique fonction  $u \in PSH(\Omega)$ . De plus*

- $u_j \rightarrow u$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ ;
- $\limsup u_j(z) \leq u(z)$  pour tout  $z \in \Omega$ , avec égalité presque partout sur  $\Omega$ ;
- Pour tout ensemble compact  $K$  et toute fonction continue  $h$  sur  $K$ ,

$$\limsup \max_K (u_j - h) \leq \max_K (u - h).$$

Le dernier point est appelé Lemme de Hartogs et si  $K$  est régulier, on a

$$\limsup \max_K (u_j - h) = \max_K (u - h).$$

**Corollaire 1.1.26.** *L'espace  $PSH(\Omega)$  est un sous-ensemble convexe fermé de  $L_{loc}^1(\Omega)$ . Il a la propriété de Montel: tout sous-ensemble borné dans  $PSH(\Omega)$  est relativement compact.*

On termine cette section par ce résultat d'intégrabilité des fonctions plurisousharmoniques:

**Théorème 1.1.27.** *Soit  $(u_j)$  une suite de fonctions dans  $PSH(\Omega)$  qui converge dans  $L_{loc}^1$  vers  $u \in PSH(\Omega)$ . Alors*

1. *la suite est localement uniformément bornée supérieurement;*
2.  *$u_j \rightarrow u$  dans  $L_{loc}^p$  pour tout  $p \geq 1$ ;*
3. *les gradients  $Du_j$  convergent dans  $L_{loc}^q$  vers  $Du$  pour tout  $q < 2$ .*

Ce théorème combiné avec le Théorème 1.1.25 montrent que

$$PSH(\Omega) \subset L_{loc}^p \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

et la topologie faible des distributions sur  $\Omega$  coïncide avec la topologie de  $L_{loc}^p$  sur  $PSH(\Omega)$  pour tout  $p \geq 1$ .

## 1.2 Fonctions quasi-plurisousharmoniques

### 1.2.1 Fonctions quasi-plurisousharmoniques

Même si la notion de fonction plurisousharmonique a un sens global, on s'intéresse au comportement local de ces fonctions. Cependant, il résulte du principe du maximum que sur une variété compacte  $X$ , il n'existe pas de fonction globalement plurisousharmonique autre que les constantes.

Pour contourner ce problème, on va essayer de rendre cette notion locale:

**Définition 1.2.1.** Soit  $(X, \omega)$  une variété Kählérienne compacte. On dit qu'une fonction  $\varphi$  sur  $X$  est quasi-plurisousharmonique ( qpsH en abrégé ) si elle s'écrit localement comme somme d'une fonction psh et d'une fonction lisse.

Toute fonction qpsH  $\varphi$  est  $A\omega$ -psh pour  $A > 0$  assez grand, c'est-à-dire,  $A\omega + dd^c\varphi \geq 0$  au sens faible des courants. Donc on a  $dd^c\varphi \geq -A\omega$ . Par rééchelonnement, on peut supposer que  $A = 1$ . On suppose aussi que  $\omega$  est semi-positive et grosse, c.à.d., que le volume

$$V = V_\omega = Vol_\omega(X) := \int_X \omega^n > 0.$$

On note  $PSH(X, \omega)$  l'espace des fonctions  $\omega$ -psh ( $\omega$ -psh), c.à.d., les fonctions  $\varphi \in L^1(X, \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$  qui s'écrivent localement comme somme d'une fonction lisse et d'une fonction psh telles que

$$\omega + dd^c \varphi \geq 0$$

au sens faible des courants positifs sur  $X$ . Comme  $X$  est compacte, les fonctions  $\omega$ -psh atteignent leur borne supérieure sur  $X$ , puisqu'elles sont s.c.s.. On note que  $PSH(X, \omega)$  est un ensemble convexe fermé de  $L^1(X)$ .

**Proposition 1.2.2.** 1) Si  $\omega_1 \leq \omega_2$ , alors  $PSH(X, \omega_1) \subset PSH(X, \omega_2)$ .

2) Pour tout  $A \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $PSH(X, A\omega) = APSH(X, \omega)$ .

3) Si  $\omega'$  est cohomologue à  $\omega$ ,  $\omega' = \omega + dd^c \chi$ , alors

$$PSH(X, \omega') = PSH(X, \omega) - \chi.$$

4) Si  $\varphi, \psi \in PSH(X, \omega)$ , alors

$$\max(\varphi, \psi), \frac{\varphi + \psi}{2} \in PSH(X, \omega) \text{ et } \log(e^\varphi + e^\psi) \in PSH(X, \omega) \text{ si } \varphi, \psi \leq 0.$$

**Proposition 1.2.3.** Soit  $\mathcal{T}_{\{\omega\}}(X)$  l'ensemble des courants positifs  $\omega'$  de bidegré  $(1, 1)$  sur  $X$  qui sont cohomologues à  $\omega$ . Alors

$$PSH(X, \omega) \simeq \mathcal{T}_{\{\omega\}}(X) \oplus \mathbb{R}.$$

Cette proposition affirme que toute fonction  $\omega$ -psh normalisée s'injecte dans l'ensemble de  $\mathcal{T}_{\{\omega\}}(X)$  qui est compact pour la topologie faible des courants. c'est aussi l'origine de plusieurs résultats dans la suite: la famille des fonctions  $\omega$ -psh normalisées forme un ensemble compact.

**Proposition 1.2.4.** Soit  $(\varphi_j) \in PSH(X, \omega)^\mathbb{N}$ .

1. Si  $(\varphi_j)$  est uniformément bornée supérieurement sur  $X$ , alors soit  $\varphi_j$  converge uniformément vers  $-\infty$  sur  $X$  ou bien la suite  $(\varphi_j)$  est relativement compacte dans  $L^1(X)$ .

2. Si  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $L^1(X)$ , alors  $\varphi$  coïncide presque partout avec une unique fonction  $\varphi^* \in PSH(X, \omega)$ . De plus,

$$\limsup \varphi_j(x) \leq \varphi^*(x),$$

avec égalité en dehors d'un ensemble pluripolaire, et

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_X \varphi_j = \sup_X \varphi^*.$$

3. En particulier, si  $\varphi_j$  est décroissante, alors soit  $\varphi_j \rightarrow -\infty$  ou bien  $\varphi = \lim \varphi_j \in PSH(X, \omega)$ . De même, si  $\varphi_j$  est croissante et uniformément majorée, alors  $\varphi = (\lim \varphi_j)^* \in PSH(X, \omega)$ , où  $*$  est l'enveloppe de régularisé semi-continue supérieure.

4. Si  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  au sens faible des distributions, alors  $\varphi$  coïncide presque partout avec une unique fonction  $\varphi^* \in PSH(X, \omega)$  et  $\varphi_j \rightarrow \varphi^*$  dans  $L^p$  pour  $p > 1$ . De plus,  $\phi_j := (\sup_{l \geq j} \varphi_l)^*$  décroît vers  $\varphi^*$ .

Le second point est appelé Lemme de Hartogs.

**Proposition 1.2.5.** *La famille*

$$\mathcal{P}_0 := \{\varphi \in PSH(X, \omega) \mid \sup_X \varphi = 0\}$$

est un sous-ensemble compact de  $PSH(X; \omega)$ .

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité telle que  $PSH(X, \omega) \subset L^1(\mu)$ , alors

$$\mathcal{P}_\mu := \left\{ \varphi \in PSH(X, \omega) \mid \int_X \varphi d\mu = 0 \right\}$$

est un sous-ensemble relativement compact de  $PSH(X, \omega)$ . En particulier, il existe  $C_\mu$  tel que pour tout  $\varphi \in PSH(X, \omega)$ ,

$$-C_\mu + \sup_X \varphi \leq \int_X \varphi d\mu \leq \sup_X \varphi.$$

*Preuve:*

D'après le Lemme de Hartogs  $\mathcal{P}_0$  est un sous-ensemble fermé de  $PSH(X, \omega)$  et du point 1. de la Proposition 1.2.4 il est relativement compact. Donc  $\mathcal{P}_0$  est compact.

Soit  $(\varphi_j) \in \mathcal{P}_\mu^{\mathbb{N}}$ . Alors  $\psi_j := \varphi - \sup_X \varphi_j$  est dans  $\mathcal{P}_0$  qui est relativement compact.

On suppose en premier que  $\mu$  est lisse. Soit  $\psi_{j_k}$  une sous-suite de  $\psi_j$  qui converge dans  $L^1(X)$  vers  $\psi$ . Alors  $\psi_{j_k} \mu \rightarrow \psi \mu$  dans le sens faible des mesures négatives. Donc  $\int_X \psi_{j_k} d\mu \rightarrow \int_X \psi d\mu > -\infty$ , puisque  $PSH(X, \omega) \subset L^1(\mu)$ . Ainsi  $(\int_X \psi_j d\mu)$  est bornée. On a

$$\int_X \psi_j d\mu = \int_X \varphi_j d\mu - \int_X \sup_X \varphi_j d\mu = - \sup_X \varphi_j.$$

Donc  $(\sup_X \varphi_j)$  est bornée. Comme  $\int_X \varphi_j d\mu = 0$ , alors du point 1. de la Proposition 1.2.4,  $(\varphi_j)$  est relativement compacte.

Si  $\mu$  n'est pas lisse, on suppose par absurde que  $\int_X \psi_j d\mu \rightarrow -\infty$ . Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que  $\int_X \psi_j d\mu \leq -2^j$ . Soit  $\psi = \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \psi_j$  qui est la limite d'une suite décroissante de fonctions  $\omega$ -psh. D'après la point 3 de la Proposition 1.2.4,  $\psi \in PSH(X, \omega)$  ou bien  $\psi \equiv -\infty$ . D'après le cas lisse, si  $dV$  est une mesure de probabilité lisse sur  $X$ , on a  $\int_X \psi dV > -\infty$ , donc  $\psi \in PSH(X, \omega)$ . Ainsi,  $\psi \in PSH(X, \omega)$  et par le théorème de convergence monotone,  $-\infty = \sum_{j \geq 1} \int_X \psi_j d\mu = \int_X \psi d\mu$  qui est la contradiction cherchée.

On a donc  $(\int_X \psi_j d\mu)$  est qui bornée et la preuve est finie.  $\square$

**Exemple 1.2.6.** On rappelle que la classe de Lelong est l'ensemble convexe des fonctions plurisousharmoniques définies sur  $\mathbb{C}^n$  par

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) := \{u \in PSH(\mathbb{C}^n) \mid u(z) \leq \frac{1}{2} \log[1 + |z|^2] + C_u\}$$

où  $C_u$  est une constante qui dépend de  $u$  ( voir [Lel68] ). On sait que  $(X, \omega) = (\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \omega_{FS})$ , où  $\omega_{FS}$  est la forme kählérienne de Fubini-Study, est une variété kählérienne compacte.

D'après [BT88, AAZ18], il y a correspondance bijective entre  $PSH(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \omega_{FS})$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ . En effet,

en considérant l'hyperplan à l'infini

$$H_\infty := \{\zeta \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid \zeta_0 = 0\} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1},$$

on peut écrire  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathcal{U}_0 \cup H_\infty$ , avec  $\mathcal{U}_0 = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus H_\infty$ .

Ainsi, pour  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ , on lui associe la fonction définie sur  $\mathcal{U}_0$  par

$$\phi_u(\zeta) := u(z_1, \dots, z_n) - \frac{1}{2} \log[1 + |z|^2],$$

avec  $z := z^0 = (\zeta_1/\zeta_0, \dots, \zeta_n/\zeta_0)$ .

La fonction  $\phi_u$  est bornée supérieurement (par définition de  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ) au voisinage de  $H_\infty$ .  $H_\infty = \{0\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  est pluripolaire car c'est un ensemble analytique propre. Donc en posant

$$\phi_u(0, \zeta') = \limsup_{\mathcal{U}_0 \ni \zeta \rightarrow (0, \zeta')} \phi_u(\zeta), \quad \zeta' \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1},$$

on prolonge  $\phi_u$  en une fonction  $\omega_{FS}$ -psh sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Alors on a une application bien définie

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \ni u \mapsto \phi_u \in PSH(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \omega_{FS}).$$

C'est une bijection et sa réciproque est donnée pour  $\phi \in PSH(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \omega_{FS})$ , par

$$u_\phi(z) := \phi([1, z]) + \frac{1}{2} \log[1 + |z|^2].$$

### 1.2.2 Intégrabilité des fonctions qpsH

Puisque les fonctions plurisousharmoniques sont dans  $L^p_{loc}$  pour  $p \geq 1$ , alors les fonctions qpsH sont dans  $L^p$ . De même les fonctions qpsH ont leur gradient dans  $L^q$  pour  $q < 2$ .

On va dans cette section, donner un important résultat qui va beaucoup servir dans la suite. Pour les propriétés des nombres de Lelong Voir [GZ17, Zer01].

**Définition 1.2.7.** Soit  $u$  une fonction plurisousharmonique définie au voisinage de l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . On appelle nombre de Lelong de  $u$  en 0, le nombre

$$\nu(u, 0) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sup_{\mathbb{B}(r)} u}{\log r}$$

On voit donc que si  $u$  est une fonction lisse alors  $\nu(u, 0) = 0$ . Le nombre de Lelong en 0 d'une fonction psh est invariant par les changements de cartes locales (voir [GZ17], chapitre 2). Donc on peut définir le nombre de Lelong d'une fonction qpsH sur  $X$ . On note  $\nu(u, x)$  le nombre de Lelong en  $x \in X$  de la fonction qpsH  $u$ .

**Lemme 1.2.8.** *Le nombre*

$$\nu(\{\omega\}) := \sup\{\nu(\varphi, x) \mid x \in X, \varphi \in PSH(X, \omega)\} < +\infty$$

*est fini et dépend uniquement de la classe de cohomologie de  $\omega$ .*

On termine ce chapitre par le théorème d'intégrabilité uniforme de Skoda ( voir [GZ07, Zer01]) qu'on utilisera dans la suite.

**Théorème 1.2.9.** *Si  $A < 2(\nu(\{\omega\}))^{-1}$ , alors  $e^{-A\varphi} \in L^1(X)$ . De plus,*

$$\sup \left\{ \int_X e^{-A\varphi} dV \mid \sup_X \varphi = 0 \right\} < +\infty.$$

## Chapter 2

# Opérateurs de Monge-Ampère

L'opérateur de Monge-Ampère complexe est l'opérateur

$$\varphi \mapsto (dd^c \varphi)^n$$

qui associe à chaque fonction plurisousharmonique donnée, une mesure de Radon positive.

Lorsque  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$ ,

$$(dd^c \varphi)^n = c_n \det\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) dV_c.$$

Lorsque  $\varphi$  n'est  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$ , on utilise la théorie de Bedford et Taylor [BT82].

Dans ce chapitre, on va donner les éléments de base pour la résolution des équations de Monge-Ampère complexes. On commence par une étude locale avec les fonctions plurisousharmoniques bornées comme dans la théorie de Bedford et Taylor avant de faire une généralisation de la notion de l'opérateur de Monge-Ampère complexe sur les fonctions quasi-plurisousharmoniques bornées. On définira la notion de capacité de Monge-Ampère complexe et les propriétés de continuité et de convergences de cet opérateur. On donnera les principes du maximum et de comparaison. On va terminer avec les classes d'énergie sur lesquelles on va étendre la définition de l'opérateur sur les fonctions qsh non bornées et toutes ses propriétés dans le cadre local. On fera la résolution des équations de Monge-Ampère complexes sur les classes d'énergie.

## 2.1 Courants de type Monge-Ampère

**Définition 2.1.1.** Soit  $T$  un courant positif fermé de bidegré  $(p, p)$  sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  et  $u \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ . Alors  $dd^c u \wedge T$  est un courant de bidegré  $(p+1, p+1)$  définie par

$$dd^c u \wedge T := dd^c(uT),$$

i.e.,

$$\langle dd^c u \wedge T, \psi \rangle = \langle uT, dd^c \psi \rangle,$$

pour toute forme lisse  $\psi$  de bidegré  $(q, q)$ , avec  $q := n - p - 1$ .

Comme  $u$  est localement bornée inférieurement, quitte à ajouter une constante, on peut supposer que  $u \geq 0$ . Il en résulte que  $u^2$  est psh, donc  $dd^c u^2 \wedge T$  est un courant positif fermé et est bien défini si  $u$  est lisse.

**Définition 2.1.2.** Soit  $u \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ . On pose

$$du \wedge d^c u \wedge T := \frac{1}{2} dd^c(u - m)^2 \wedge T - (u - m) dd^c u \wedge T,$$

où  $m$  est la borne inférieure de  $u$  sur  $\Omega$ . C'est un courant positif.

**Proposition 2.1.3.** Soit  $(u_j)$  une famille de fonctions psh localement bornée sur  $\Omega$  et qui décroît vers  $u \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ . Alors

$$du_j \wedge d^c u_j \wedge T \rightarrow du \wedge d^c u \wedge T, \quad dd^c u_j \wedge T \rightarrow dd^c u \wedge T,$$

au sens faible des courants sur  $\Omega$ .

En particulier,  $dd^c u \wedge T$  et  $du \wedge d^c u \wedge T$  sont des courants positifs, donc leurs coefficients s'étendent en des mesures de Borel complexes sur  $\Omega$ .

En itérant ce processus, on définit par récurrence les courants suivants:

**Définition 2.1.4.** Soient  $u_1 \cdots u_k \in PSH(X) \cap L_{loc}^\infty(X)$  et  $T$  un courant positif fermé de bidimension  $(m, m)$ . On définit le courant  $dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T$  par

$$dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T := dd^c(u_1 dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T).$$

De façon similaire, on définit le courant  $du_1 \wedge d^c u_1 \wedge \cdots \wedge du_k \wedge d^c u_k \wedge T$ .

Donc si  $V$  est une fonction psh sur  $\Omega$  et  $u_1 \cdots u_k \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ ,  $dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge dd^c V$  est un courant positif fermé bien définie sur  $\Omega$ .

**Définition 2.1.5.** Soit  $u$  une fonction plurisousharmonique localement bornée. La mesure de Monge-Ampère complexe de  $u$  est

$$(dd^c u)^n := dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u.$$

**Proposition 2.1.6.** Soit  $T$  un courant positif fermé de bidimension  $(1, 1)$  sur  $\Omega$ . Soient  $u, v \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  telles que  $u, v \leq 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow \partial\Omega} u(z) = 0$  et  $\int_X dd^c v \wedge T < +\infty$ . Alors

$$\int_{\Omega} u dd^c v \wedge T \geq \int_{\Omega} v dd^c u \wedge T,$$

où l'inégalité est vraie sur  $[-\infty, 0[$ . Si  $\lim_{z \rightarrow \partial\Omega} v(z) = 0$ , alors

$$\int_{\Omega} u dd^c v \wedge T = \int_{\Omega} v dd^c u \wedge T, \quad (2.1.1)$$

qui montre que  $\int_X dd^c u \wedge T < +\infty$ .

## 2.2 Opérateurs de Monge-Ampère Complexes

On va établir les inégalités de Chern–Levine–Nirenberg qui sont le premier pas vers la définition de l'opérateur de Monge-Ampère complexe d'une fonction plurisousharmonique bornée:

**Théorème 2.2.1.** Soient  $T$  un courant positif fermé de bidimension  $(k, k)$  sur  $\Omega$  et  $u_1 \cdots u_k \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ . Alors pour tous sous-ensembles ouverts  $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$ , il existe une constante  $C = C_{\Omega_1, \Omega_2} > 0$  telle que pour tout sous-ensemble compact  $K \subset \Omega_1$

$$\int_{\Omega_1} dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T \leq C \|u_1\|_E \cdots \|u_k\|_E \|T\|_E \quad (2.2.1)$$

et

$$\int_{\Omega_1} du_1 \wedge d^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T \leq C \|u_1\|_E^2 \|u_2\|_E \cdots \|u_k\|_E \|T\|_E \quad (2.2.2)$$

où  $E := (\Omega_2 \setminus \Omega_1) \cap \text{Supp}(T)$  et  $\|u\|_E$  la norme  $L^\infty$  de  $u$  sur le borélien  $E$ .

*Preuve:*

Par récurrence, il suffit de montrer (2.2.1) pour  $k = 1$ . On pose  $u_1 = u$ . En remplaçant  $u$  par  $v = u - \sup_{\Omega_2} u$ , on peut supposer que  $u \leq 0$  sur  $\Omega_2$ . On a aussi,  $dd^c v = dd^c u$  et  $\|v\|_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} \leq 2\|u\|_{\Omega_2 \setminus \Omega_1}$ .

Soit  $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$  une fonction test positive avec  $\chi|_{\Omega_1} \equiv 1$ . Alors

$$\int_{\Omega_1} T \wedge dd^c u \leq \int_{\Omega_2} \chi T \wedge dd^c u.$$

$$\int_{\Omega_1} \chi dd^c u \wedge T = \int_{\Omega_2} u dd^c \chi \wedge T = \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} u dd^c \chi \wedge T,$$

car  $dd^c \chi \equiv 0$  sur  $\Omega_1$ . Pour  $A > 0$  tel que  $dd^c \chi \leq A\beta$  sur  $\Omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \chi dd^c u \wedge T &\leq \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} u A \beta \wedge T \leq A \|u\|_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} \int_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} T \wedge \beta \\ &\leq A \|u\|_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} \|T\|_{\Omega_2 \setminus \Omega_1} \end{aligned}$$

Pour montrer (2.2.2), on peut supposer sans perte de généralité que  $0 \leq u_1$  puisque qu'elle est minorée sur  $\Omega_2$ . Donc  $u_1^2$  est une fonction psh. On a aussi  $dd^c u_1^2 = 2du_1 \wedge d^c u_1 + 2u_1 dd^c u_1$ , i.e.,

$$du_1 \wedge d^c u_1 = \frac{1}{2} dd^c u_1^2 - u_1 dd^c u_1. \quad (2.2.3)$$

Ainsi, en remplaçant  $u_1$  par  $u_1^2$  dans (2.2.1) et utiliser (2.2.3) on a

$$\int_{\Omega_1} du_1 \wedge^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T \leq C \|u_1^2\|_E \|u_2\|_E \cdots \|u_k\|_E \|T\|_E.$$

□

**Corollaire 2.2.2.** *Pour tous sous-domaines  $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$ , il existe une constante  $C = C_{\Omega_1, \Omega_2} > 0$  telle que si  $V \in PSH(\Omega)$  et  $u_1 \cdots u_k \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ ,*

$$\int_{\Omega_1} dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge dd^c V \wedge \beta_q \leq C \|u_1\|_E \cdots \|u_k\|_E \|V\|_{L^1(E)}, \quad (2.2.4)$$

où  $E := \Omega_2 \setminus \Omega_1$  et  $q = n - (k + 1)$ .

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $T$  un courant positif fermé de bidimension  $(k, k)$ . Alors*

$$(u_1, \cdots, u_k) \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega) \mapsto dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k \wedge T$$

*est symétrique.*

*Preuve:*

Il suffit de faire la preuve pour  $k = 2$ .

Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions lisses, le résultat est vrai.

On suppose d'abord que  $u$  est lisse et on considère une suite  $v_j$  de fonctions psh lisses qui décroît vers  $v$ . Alors

$$dd^c u \wedge dd^c v_j \wedge T = dd^c v_j \wedge dd^c u \wedge T.$$

Comme  $udd^c v_j \wedge T \rightarrow udd^c v \wedge T$  au sens des mesures de Radon et  $dd^c$  continue, alors

$$dd^c u \wedge dd^c v_j \wedge T \rightarrow dd^c u \wedge dd^c v \wedge T$$

au sens des courants sur  $\Omega$ . On a

$$dd^c u \wedge dd^c v \wedge T = dd^c v \wedge dd^c u \wedge T.$$

Pour le cas général, on utilise le fait que le problème est local en supposant que  $u, v \leq 0$  sur une boule  $\mathbb{B} \Subset \Omega$  et  $u = v \equiv 0$  sur  $\partial\mathbb{B}$ . Soit  $\rho$  une fonction définissante plurisousharmonique stricte de  $\mathbb{B}$ . D'après la Proposition 2.1.6,

$$\int_{\mathbb{B}} \rho dd^c u \wedge dd^c v \wedge T = \int_{\mathbb{B}} u dd^c \rho \wedge dd^c v \wedge T.$$

En appliquant le cas lisse, on a  $dd^c \rho \wedge dd^c v \wedge T = dd^c v \wedge dd^c \rho \wedge T$  au sens des courants. Donc

$$\int_{\mathbb{B}} \rho dd^c u \wedge dd^c v \wedge T = \int_{\mathbb{B}} u dd^c v \wedge dd^c \rho \wedge T.$$

Comme  $u, v$  sont nulles sur  $\partial\mathbb{B}$ , alors on a d'après (2.1.1) de la Proposition 2.1.6,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} \rho dd^c u \wedge dd^c v \wedge T &= \int_{\mathbb{B}} u dd^c \rho \wedge dd^c v \wedge T \\ &= \int_{\mathbb{B}} u dd^c v \wedge dd^c \rho \wedge T \\ &= \int_{\mathbb{B}} v dd^c u \wedge dd^c \rho \wedge T \\ &= \int_{\mathbb{B}} v dd^c \rho \wedge dd^c u \wedge T \\ &= \int_{\mathbb{B}} \rho dd^c v \wedge dd^c u \wedge T. \end{aligned}$$

Soit  $\chi$  une fonction teste lisse à support compact dans  $\mathbb{B}$ . On peut trouver  $A > 1$  assez grand tel que  $dd^c \rho \geq -dd^c \chi$ , donc en posant  $\rho_1 := \chi + A\rho$  et  $\rho_2 := A\rho$ , on voit que  $\chi$  est la différence de deux fonctions définissantes de  $\mathbb{B}$ . Donc on a  $dd^c u \wedge dd^c v \wedge T = dd^c v \wedge dd^c u \wedge T$ .  $\square$

**Proposition 2.2.4.** *Soient  $V \in PSH(\Omega)$  et  $u_1, \dots, u_n \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ . Pour tout sous-domaine  $D \Subset \Omega$  et tout sous-ensemble compact  $K \subset D$ , il existe une constante  $C = C(D, K) > 0$  telle que*

$$\int_K |V| dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_n \leq C \|u_1\|_D \dots \|u_n\|_D \|V\|_{L^1(D)}.$$

*En particulier, la mesure de Monge-Ampère  $dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_n$  ne charge pas l'ensemble polaire  $P = \{V = -\infty\}$ .*

## 2.3 Continuité des opérateurs de Monge-Ampère complexes

**Théorème 2.3.1.** *Soient  $T$  un courant positif fermé de bidimension  $(n - p, n - p)$  et  $(u_0^j)_{j \in \mathbb{N}} \dots (u_q^j)_{j \in \mathbb{N}}$  des suites décroissantes de fonctions plurisousharmoniques qui convergent respectivement vers  $u_0 \dots u_q \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ ,  $p + q \leq n$ . Alors*

$$u_0^j dd^c u_1^j \wedge \dots \wedge dd^c u_q^j \wedge T \rightarrow u_0 dd^c u_1 \wedge \dots \wedge u_q \wedge T$$

*au sens faible des courants.*

*Preuve:*

Par récurrence, si  $q = 0$ , c'est une conséquence du théorème de convergence monotone. Soit  $1 \leq q \leq n - p$  fixé, et on suppose que le théorème est vrai pour  $q - 1$ . Il suffit de montrer que si

$$S_j := dd^c u_1^j \wedge \dots \wedge dd^c u_q^j \wedge T \rightarrow S := dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_q \wedge T$$

alors  $(u_0^j)S_j$  converge vers  $u_0 S$  au sens faible des courants. D'après l'inégalité de Chern–Levine–Nirenberg, la suite  $(u_0^j S_j)$  est relativement compacte dans la topologie faible des courants. Soit  $\Theta$  une valeur d'adhérence de la suite  $(u_0^j S_j)$ . On doit montrer que  $\Theta = u_0 S$ . Du Lemme 2.3.2 ci-dessous, on a  $\Theta \wedge \Gamma \leq u_0 S \wedge \Gamma$  pour chaque  $(n - p - q, n - p - q)$ -forme  $\Gamma$  fortement positive.

On va montrer que pour  $\int_K (u_0 S - \Theta) \wedge \Gamma \leq 0$  pour toute  $(n - p - q, n - p - q)$ -forme  $\Gamma$  fortement positive et tout compact  $K \Subset B := B(z_0, r) \Subset \Omega$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $u_i^j \equiv A(|z - z_0|^2 - r^2)$  pour tous  $i, j$  dans un voisinage de  $\partial B$ , avec  $A > 1$  assez grand. On a alors

$$\begin{aligned} \int_B u_0 S \wedge \Gamma &\leq \int_B u_0^j S \wedge \Gamma = \int_B u_1 dd^c u_0^j \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T \wedge \Gamma \\ &\leq \int_B u_1^j dd^c u_0^j \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T \wedge \Gamma \\ &= \int_B u_0^j dd^c u_1^j \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T \wedge \Gamma. \end{aligned}$$

En répétant ce procédé  $q$  fois, on obtient  $\int_B u_0 S \wedge \Gamma \leq \int_B u_0^j S_j \wedge \Gamma$ . Comme la suite de mesures de Radon positive  $-u_0^j S_j \wedge \Gamma$  converge faiblement vers  $-\Theta \wedge \Gamma$ , on a par sci,  $\int_B -\Theta \wedge \Gamma \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_B -u_0^j S_j \wedge \Gamma$ . Donc

$$\int_B -\Theta \wedge \Gamma \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_B -u_0^j S_j \wedge \Gamma \leq \int_B -u_0 S \wedge \Gamma.$$

Comme  $(u_0 S - \Theta) \wedge \Gamma = 0$  est une mesure de Radon positive ayant une masse nulle sur tout compact, on en déduit qu'elle est nulle sur  $\Omega$ .  $\square$

**Lemme 2.3.2.** *Soit  $(\mu_j)$  une suite de mesure de Radon positive sur  $\Omega$  qui converge faiblement vers une mesure de Radon positive  $\mu$ . On suppose que  $(f_j)$  est une suite décroissante de fonctions scs qui converge vers  $f$  sur  $\Omega$ . Alors tout point d'adhérence  $\nu$  de la suite  $(f_j \mu_j)$  vérifie  $\nu \leq f \mu$  au sens des mesures de Radon sur  $\Omega$ .*

*Preuve:*

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on considère  $(g_k^j)_j$  la suite de fonctions continues sur  $\Omega$  qui décroît vers  $f_k$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}^+)$  une fonction test fixée. Pour chaque entier  $k$  fixé, on a

$$\int_\Omega \varphi \nu \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_\Omega \varphi g_k^j d\mu_j = \int_\Omega \varphi g_k^j d\mu.$$

Ainsi, quand  $j \rightarrow +\infty$ , on a  $\int \varphi \mu \leq \int \varphi f_k d\mu$  qui est le résultat cherché.  $\square$

**Théorème 2.3.3.** *Soient  $(u_0^j), \dots, (u_q^j)$  des suites de fonctions plurisousharmoniques localement bornées qui croissent respectivement vers  $u_0, \dots, u_q \in PSH(\Omega) \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ . Alors*

$$u_0^j dd^c u_1^j \wedge \cdots \wedge dd^c u_q^j \rightarrow u_0 dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q$$

*au sens faible des courants.*

## 2.4 Capacité de Monge-Ampère

Soit  $X$  une variété kählérienne compacte de dimension  $n$  et  $\omega$  une  $(1,1)$ -forme semi-positive fermée tels que  $V = V_\omega = \text{Vol}_\omega(X) := \int_X \omega^n > 0$ .

### 2.4.1 Principe du Maximum

Si  $\varphi \in \text{PSH}(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ , d'après [BT82],

$$MA(\varphi) := V^{-1}(\omega + dd^c \varphi)^n$$

est une mesure de probabilité bien définie.

Le résultat suivant est connu sous le nom de principe du maximum:

**Théorème 2.4.1.** (*Principe du maximum*) Soient  $u, v$  des fonctions  $\omega$ -psh bornées sur  $X$ , alors

$$1_{\{u > v\}} MA(u) = 1_{\{u > v\}} MA(\max(u, v)).$$

**Preuve:**

Soient  $u_j$  une suite définissante de  $u$ . On pose

$$\psi_j := \max(u_j - v, 0), \quad \psi := \max(u - v, 0).$$

Comme  $\{u_j > v\}$  est ouvert pour chaque  $j$ , on a

$$1_{\{u_j > v\}} MA(u_j) = 1_{\{u_j > v\}} MA(\max(u_j, v)),$$

donc

$$\psi_j MA(u_j) = \psi_j MA(\max(u_j, v))$$

et par convergence quasi-uniforme, on a

$$\psi MA(u) = \psi MA(\max(u, v)).$$

Donc pour chaque  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\frac{\psi}{\psi + \varepsilon} MA(u) = \frac{\psi}{\psi + \varepsilon} MA(\max(u, v)).$$

On en déduit le résultat en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.  $\square$

On obtient à partir du Théorème 2.4.1, le principe de comparaison suivant:

**Proposition 2.4.2.** Soient  $u, v$  des fonctions  $\omega$ -plurisousharmoniques bornées.

Alors

$$\int_{\{v < u\}} MA(u) \leq \int_{\{v < u\}} MA(v).$$

*Preuve:*

D'après le principe du maximum, on a

$$\begin{aligned} \int_{\{v < u\}} MA(u) &= \int_{\{v < u\}} MA(\max(u, v)) = 1 - \int_{\{v \geq u\}} MA(\max(u, v)) \\ &\leq \int_X MA(v) - \int_{\{v > u\}} MA(\max(u, v)) = \int_{\{v \leq u\}} MA(v). \end{aligned}$$

En remplaçant  $u$  par  $u - \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  positive assez petit, on obtient

$$\int_{\{v < u - \varepsilon\}} MA(u) \leq \int_{\{v \leq u - \varepsilon\}} MA(v) \leq \int_{\{v < u\}} MA(v).$$

Quand  $\varepsilon \searrow 0$ , on a  $\{v < u - \varepsilon\} \nearrow \{v < u\}$  et on en déduit le résultat.  $\square$

## 2.4.2 Inégalités de Chern-Levine-Nirenberg

On va établir la version uniforme des inégalités de Chern-Levine-Nirenberg. Pour les preuves (voir [GZ17]).

**Proposition 2.4.3.** *Soient  $T$  un courant positif fermé de bidegré  $(p, p)$  sur  $X$  et  $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ . Alors  $\|\omega_\varphi \wedge T\| = \|T\|$ . De plus, si  $\psi \in PSH(X, \omega) \cap L^1(T)$ , alors  $\psi \in L^1(T \wedge \omega_\varphi)$  et*

$$\|\psi\|_{L^1(T \wedge \omega_\varphi)} \leq \|\psi\|_{L^1(T)} + \left( 2 \sup_X \psi + \sup_X \varphi - \inf_X \varphi \right) \|T\|.$$

A partir de ce Théorème, on obtient par récurrence, les inégalités de Chern-Levine-Nirenberg suivantes:

**Corollaire 2.4.4.** *Soient  $\varphi, \psi \in PSH(X, \omega)$  avec  $0 \leq \varphi \leq 1$ . Alors*

$$0 \leq \int_X |\psi| \omega_\varphi^n \leq \int_X |\psi| \omega^n + n \left( 1 + 2 \sup_X \psi \right) \int_X \omega^n.$$

**Définition 2.4.5.** Soit  $K \subset X$  un sous-ensemble de Borel. On définit la capacité intérieure par

$$Cap_\omega(K) := \sup \left\{ \int_K MA(\varphi) \mid \varphi \in PSH(X, \omega), 0 \leq \varphi \leq 1 \right\}.$$

On définit la capacité extérieure d'un sous-ensemble  $E \subset X$  par

$$Cap_\omega^*(E) := \inf \{ Cap_\omega(U) \mid E \subset U, U \text{ un sous-ensemble ouvert de } X \}.$$

**Proposition 2.4.6.**

1. Si  $K \subset K' \subset X$  sont des sous-ensembles de Borel, alors  $\text{Vol}_\omega \leq \text{Cap}_\omega$  et

$$0 \leq \text{Cap}_\omega(K) \leq \text{Cap}_\omega(K') \leq \text{Cap}_\omega(X) = 1.$$

2. Si  $(k_j)$  est famille de sous-ensembles de Borel de  $X$ , alors  $\text{Cap}_\omega(\bigcup K_j) \leq \sum \text{Cap}_\omega(K_j)$ . De plus  $\text{Cap}_\omega(\bigcup K_j) = \lim \text{Cap}_\omega(K_j)$  si  $K_j \subset K_{j+1}$ .

3. Si  $\omega_1 \leq \omega_2$  alors  $V_{\omega_1} \text{Cap}_{\omega_1}(\cdot) \leq V_{\omega_2} \text{Cap}_{\omega_2}(\cdot)$ . Pour tout  $A \geq 1$ ,

$$\text{Cap}_\omega(\cdot) \leq \text{Cap}_{A\omega}(\cdot) \leq A^n \text{Cap}_\omega(\cdot).$$

En particulier, si  $\omega, \omega'$  sont deux formes kählériennes, alors il existe  $C \geq 1$  tel que

$$C^{-1} \text{Cap}_\omega(\cdot) \leq \text{Cap}'_{\omega'}(\cdot) \leq C \cdot \text{Cap}_\omega(\cdot).$$

**2.4.3 Quasi-continuité**

**Proposition 2.4.7.** Si  $P$  est un ensemble  $\text{PSH}(X, \omega)$  polaire, alors  $\text{Cap}_\omega(P) = 0$ .

Plus précisément, si  $\psi \in \text{PSH}(X, \omega)$ , avec  $\psi \leq 0$ , alors

$$\text{Cap}_\omega(\psi < -t) \leq \frac{1}{t} \left[ \int_X (-\psi) \frac{\omega^n}{V_\omega} + n \right], \forall t > 0.$$

**Proposition 2.4.8.** Soient  $\psi, \psi_j \in \text{PSH}(X, \omega) \cap L^\infty(X)$  tels que  $(\psi_j)$  décroît vers  $\psi$ . Pour chaque  $\delta > 0$ ,

$$\text{Cap}_\omega(\{\psi_j > \psi + \delta\}) \rightarrow 0,$$

i.e,  $\psi_j \rightarrow \psi$  en capacité.

On a donc le résultat de quasi-continuité:

**Corollaire 2.4.9.** Soit  $\varphi \in \text{PSH}(X, \omega)$ . Pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous-ensemble  $O_\varepsilon$ , ouvert de  $X$  tel que  $\text{Cap}_\omega(O_\varepsilon) < \varepsilon$  et  $\varphi$  est continue sur  $X \setminus O_\varepsilon$ .

**2.5 Les classes d'énergie finie**

Dans cette section, on va étendre la définition de l'opérateur de Monge-Ampère sur la classe  $\mathcal{E}(X, \omega)$  qui contient des fonctions  $\omega$ -psh qui ne sont pas bornées. Le principe de comparaison y est vrai. On considère toujours que  $\omega$  est une forme semi-positive et grosse.

### 2.5.1 Définition de l'opérateur de Monge-Ampère complexe

1) Si  $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ , d'après [BT82],

$$MA(\varphi) := V^{-1}(\omega + dd^c \varphi)^n$$

est une mesure de probabilité bien définie.

D'après la théorie de Bedford et Taylor ([BT82]) si  $u, v$  sont des fonctions psh bornées sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}^n$ , on a

$$1_{\{u>v\}}[dd^c u]^n = 1_{\{u>v\}}[dd^c \max(u, v)]^n \quad (2.5.1)$$

au sens faible des mesures de Radon sur  $D$ .

2) Si  $\varphi \in PSH(X, \omega)$  est non bornée, on utilise son approximation canonique par les  $\varphi_j := \max(\varphi, -j) \in PSH(X, \omega)$  qui sont bornées et décroissent vers  $\varphi$ .

D'après (2.5.1), on a

$$1_{\{\varphi_j > -k\}}[\omega + dd^c \varphi_j]^n = 1_{\{\varphi_j > -k\}}[\omega + dd^c \max(\varphi_j, -k)]^n.$$

Si  $j \geq k$ , alors  $(\varphi_j > -k) = (\varphi > -k)$  et  $\max(\varphi_j, -k) = \varphi_k$ , donc

$$1_{\{\varphi > -k\}}[\omega + dd^c \varphi_j]^n = 1_{\{\varphi > -k\}}[\omega + dd^c \varphi_k]^n. \quad (2.5.2)$$

Comme  $j \geq k$ ,  $(\varphi > -k) \subset (\varphi > -j)$ , donc

$$1_{\{\varphi > -j\}}[\omega + dd^c \varphi_j]^n \geq 1_{\{\varphi > -k\}}[\omega + dd^c \varphi_k]^n,$$

au sens faible des mesures de Radon. On sait que  $\int_{\{\varphi > -k\}}[\omega + dd^c \varphi_j]^n \leq \int_X \omega^n < +\infty$ . Donc on peut calculer la limite et définir

$$\mu_\varphi := \lim_{j \rightarrow +\infty} 1_{\{\varphi > -j\}} V^{-1}[\omega + dd^c \varphi_j]^n$$

qui est une mesure de Radon positive et non pluripolaire comme le cas local dans la théorie de Bedford et Taylor.

**Définition 2.5.1.** On appelle classe d'énergie finie l'ensemble

$$\mathcal{E}(X, \omega) := \{\varphi \in PSH(X, \omega) \mid \mu_\varphi(X) = 1\}.$$

On peut aussi définir  $\mathcal{E}(X, \omega)$  comme suit:

**Lemme 2.5.2.** *On fixe  $\varphi \in PSH(X, \omega)$ . Soit  $(s_j)$  une suite de nombres réels qui converge vers  $+\infty$ , tels que  $s_j \leq j$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1.  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ ;
2.  $(\omega + dd^c \varphi_j)^n(\varphi \leq -j) \rightarrow 0$ ;
3.  $(\omega + dd^c \varphi_j)^n(\varphi \leq -s_j) \rightarrow 0$ ,

où  $\varphi_j := \max(\varphi, -j)$ .

*Preuve:*

On a

$$\mu_\varphi(X) := \int_X \omega^n - \lim_{j \rightarrow +\infty} (\omega + dd^c \varphi_j)^n(\varphi \leq -j),$$

donc 1. est équivalent à 2. En posant  $k = s_j$  dans (2.5.2) et en utilisant le fait que  $s_j \leq j$ , on a

$$(\omega + dd^c \varphi_j)^n(\varphi \leq -s_j) = (\omega + dd^c \varphi_{s_j})^n(\varphi \leq -s_j).$$

Donc 2.  $\Leftrightarrow$  3. □

On a déjà montré que toute fonction  $\varphi$   $\omega$ -psh a un opérateur de Monge-Ampère  $(\omega + dd^c \varphi)^n$  bien défini sur  $X \setminus (\varphi = -\infty)$  et que  $\mu_\varphi$  est son extension sur  $(\varphi = -\infty)$ . D'après le Lemme 2.5.2, une fonction est dans  $\mathcal{E}(X, \omega)$  si son Monge-Ampère complexe est de masse totale  $\int_X \omega^n$  sur  $X \setminus (\varphi = -\infty)$ , donc on peut noter

$$\mu_\varphi := V^{-1}(\omega + dd^c \varphi)^n = MA(\varphi),$$

pour  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ .

**Proposition 2.5.3.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ . Alors pour toute fonction bolérienne bornée  $b$ ,*

$$\langle \mu_\varphi, b \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle MA(\varphi_j), b \rangle \quad (2.5.3)$$

où  $\varphi_j := \max(\varphi, -j)$ . En particulier,

$$1_{\{\varphi > -j\}} MA(\varphi)(B) = 1_{\{\varphi > -j\}} MA(\varphi_j)(B) \quad (2.5.4)$$

pour tout sous-ensemble de Borel  $B \subset X$ .

Pour la preuve, voir [GZ07].

## 2.5.2 Principe de Comparaison

Dans cette section, on va étendre sur la classe d'énergie, les notions de principe de comparaison et de principe du maximum qui vont être d'une grande utilité dans la suite.

**Proposition 2.5.4.** *Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ , alors*

$$\int_{\{\varphi < \psi\}} MA(\psi) \leq \int_{\{\varphi < \psi\}} MA(\varphi).$$

*Preuve:*

Soient  $\varphi_j = \max(\varphi, -j)$  et  $\psi_k = \max(\psi, -k)$  qui sont des fonctions  $\omega$ -psh bornées. D'après le principe de comparaison dans le cas borné,

$$\int_{\{\varphi_j < \psi_k\}} MA(\psi_k) \leq \int_{\{\varphi_j < \psi_k\}} MA(\varphi_j).$$

Comme  $(\varphi_j < \psi) \subset (\varphi_j < \psi_k) \subset (\varphi < \psi_k)$ , d'après la Proposition 2.4.6, on obtient quand  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\int_{\{\varphi_j < \psi\}} MA(\psi) \leq \int_{\{\varphi_j < \psi\}} MA(\varphi_j).$$

En faisant tendre de nouveau  $j$  vers  $+\infty$  puis remplacer  $\psi$  par  $\psi + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , on a le résultat quand  $\varepsilon \searrow 0$ .  $\square$

**Proposition 2.5.5.** *L'ensemble  $\mathcal{E}(X, \omega)$  est convexe et si  $\varphi, \psi \in PSH(X, \omega)$  sont telles que  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  et  $\varphi \leq \psi$ , alors  $\psi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ .*

Voir [GZ17] pour la preuve.

On va établir maintenant le principe du maximum sur  $\mathcal{E}(X, \omega)$ .

**Corollaire 2.5.6.** *Soient  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  et  $\psi \in PSH(X, \omega)$ . Alors  $\max(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}(X, \omega)$  et*

$$1_{\{\varphi > \psi\}} MA(\varphi) = 1_{\{\varphi > \psi\}} MA(\max(\varphi, \psi)).$$

*Preuve:*

D'après la Proposition 2.5.5,  $\max(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}(X, \omega)$

On pose  $\varphi_j = \max(\varphi, -j)$ ,  $\psi_{j+1} = \max(\psi, -j-1)$  et  $u_j = \max(u, -j)$ , où  $u = \max(\varphi, \psi)$ . On voit que  $\max(\varphi_j, \psi_{j+1}) = \max(\varphi, \psi, -j) = \max(u, -j) = u_j$ . D'après le principe du maximum pour les fonctions bornées, on a

$$1_{\{\varphi_j > \psi_{j+1}\}} \omega_{\varphi_j}^n = 1_{\{\varphi_j > \psi_{j+1}\}} \omega_{u_j}^n.$$

Comme  $(\varphi > \psi) \subset (\varphi_j > \psi_{j+1})$  et  $(\varphi_j > \psi_{j+1}) \setminus (\varphi > \psi) \subset (\varphi \leq -j)$ , alors en utilisant le fait que  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ , on a

$$0 \leq \left(1_{\{\varphi_j > \psi_{j+1}\}} - 1_{\{\varphi > \psi\}}\right) \omega_{\varphi_j}^n \leq 1_{\{\varphi \leq -j\}} \omega_{\varphi_j}^n \rightarrow 0.$$

Ce qui montre que

$$1_{\{\varphi_j > \psi_{j+1}\}} \omega_{\varphi_j}^n \rightarrow 1_{\{\varphi > \psi\}} \omega_{\varphi}^n$$

On a aussi  $(\varphi_j > \psi_{j+1}) \setminus (\varphi > \psi) \subset (u \leq -j)$ . Donc les mêmes arguments montrent que

$$1_{\{\varphi_j > \psi_{j+1}\}} \omega_{u_j}^n \rightarrow 1_{\{\varphi > \psi\}} \omega_u^n.$$

Ce qui achève la preuve.  $\square$

**Proposition 2.5.7.** *Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  telles que  $MA(\varphi) \geq \mu$  et  $MA(\psi) \geq \mu$  pour une mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $X$ . Alors  $MA(\max(\varphi, \psi)) \geq \mu$ .*

On termine cette partie par le principe de domination, voir [GZ17] :

**Proposition 2.5.8.** *Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  telles que*

$$\psi(x) \leq \varphi(x) \text{ pour } MA(\varphi) - \text{presque partout } x \in X.$$

*Alors  $\psi(x) \leq \varphi(x)$  pour tout  $x \in X$ .*

### 2.5.3 Les classes $\mathcal{E}_\chi(X, \omega)$

**Définition 2.5.9.** On appelle poids une fonction croissante lisse  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\chi(-\infty) = -\infty$ . On note  $\mathcal{W}$  l'espace des poids et  $\mathcal{W}_+$  l'espace des poids convexes normalisés par  $\chi|_{\mathbb{R}^-} \leq 0$  et  $\chi' \leq 1$ .

Si  $\varphi \in PSH(X, \omega)$  et  $\chi \in \mathcal{W}_+$ , on a

$$dd^c \chi \circ \varphi = \chi'' \circ \varphi d\varphi \wedge d^c \varphi + \chi' \circ \varphi dd^c \varphi \geq -\chi' \circ \varphi \omega \geq -\omega.$$

Donc  $\chi \circ \varphi \in PSH(X, \omega)$ . Pour  $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ , on pose

$$E_\chi(\varphi) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_X \chi \circ \varphi (\omega + dd^c \varphi)^j \wedge \omega^{n-j}.$$

Elle est croissante, voir [GZ17]. On a alors la définition suivante:

**Définition 2.5.10.** Soit  $\chi \in \mathcal{W}$ . Pour  $\varphi \in PSH(X, \omega)$ , on pose

$$E_\chi(\varphi) := \inf\{E_\chi(\psi) \mid \psi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X) \text{ et } \varphi \leq \psi\},$$

et

$$\mathcal{E}_\chi(X, \omega) := \{\varphi \in PSH(X, \omega) \mid E_\chi(\varphi) > -\infty\}.$$

On sait que le Monge-Ampère est continu pour les suites monotones uniformément bornées. Donc en utilisant des approximations, on peut établir le résultat sur les classes d'énergie.

**Théorème 2.5.11.** Soient  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  fixé et  $\varphi_j \in \mathcal{E}(X, \omega)$  une suite monotone qui converge vers  $\varphi$ . Alors  $MA(\varphi_j)$  converge faiblement vers  $MA(\varphi)$ . Si  $\varphi, \varphi_j \in \mathcal{E}_\chi(X, \omega)$  pour  $\chi \in \mathcal{W}_+$ , alors

1. les mesures  $\chi \circ \varphi_j MA(\varphi_j)$  converge faiblement vers  $\chi \circ \varphi MA(\varphi)$ ;
2. pour toute fonction  $\omega$ -psh bornée  $u$ ,  $\int_X u MA(\varphi_j) \rightarrow \int_X u MA(\varphi)$ .

On en déduit le résultat de semi-continuité qui sera utile pour le chapitre méthode variationnelle:

**Proposition 2.5.12.** Soit  $\chi \in \mathcal{W}_+$  fixé. L'application  $\varphi \mapsto E_\chi(\varphi)$  est semi-continue supérieurement pour la topologie  $L^1$ . Elle est continue pour les suites décroissantes.

*Preuve:*

Soit  $(\varphi_j)$  une suite de fonctions  $\omega$ -psh qui converge dans  $L^1(X)$  vers  $\varphi \in PSH(X, \omega)$ . Si  $\limsup E_\chi(\varphi_j) = -\infty$ , le résultat est trivial. Donc on peut supposer sans perte de généralité que  $\varphi_j \in \mathcal{E}_\chi(X, \omega)$  et  $E_\chi(\varphi_j) \geq -C$  est uniformément bornée inférieurement. On pose

$$\phi_j := \left( \sup_{l \geq j} \varphi_l \right)^*,$$

telle que  $\phi_j \geq \varphi_j$  et elle décroît vers  $\varphi$ .

Soit  $\psi$  une fonction  $\omega$ -psh bornée telle que  $\psi \geq \varphi$ . On a  $\max(\psi, \phi_j) \geq \psi$  et qui décroît vers  $\max(\psi, \varphi) = \psi$ . En utilisant la monotonie de  $E_\chi$  et la continuité du Monge-Ampère sur les fonctions  $\omega$ -psh bornée, on obtient

$$E_\chi(\psi) = \lim E_\chi(\max(\psi, \phi_j)) \geq \limsup E_\chi(\phi_j) \limsup E_\chi(\varphi_j).$$

En prenant  $\varphi = \psi$ , on a

$$E_\chi(\varphi) \geq \limsup E_\chi(\varphi_j).$$

Donc on a scs.

Si  $(\varphi_j)$  décroît vers  $\varphi$ , alors par monotonie de  $E_\chi$ , on a  $E_\chi(\varphi) \leq \liminf E_\chi(\varphi_j)$ , donc  $E_\chi$  est aussi sci, donc continue.  $\square$

**Proposition 2.5.13.** *Soient  $\chi \in \mathcal{W}_+$  fixé et  $C > 0$ . L'ensemble*

$$\mathcal{E}_{\chi,C}(X, \omega) := \{\varphi \in \mathcal{E}_\chi(X, \omega) \mid E_\chi(\varphi) \geq -C \text{ et } \varphi \leq 0\}$$

*est compact pour la  $L^1$ -topologie.*

*Preuve:*

Comme  $\chi$  est croissante,  $\chi(\varphi) \leq \chi(\sup_X \varphi)$ , donc  $E_\chi(\varphi) \leq \chi(\sup_X \varphi)$ .

On a aussi,  $\mathcal{E}_{\chi,C}(X, \omega)$  est sous-ensemble de

$$\{\varphi \in PSH(X, \omega) \mid -C' \leq \sup_X \varphi \leq 0\}$$

qui est compact d'après le lemme de Hartogs. Ici,

$$-C' = \chi^{-1}(-C) := \inf\{t > 0, \chi(t) \geq -C\}.$$

Comme  $\varphi \mapsto E_\chi(\varphi)$  est scs,  $\mathcal{E}_{\chi,C}(X, \omega)$  est fermé, donc il est compact pour la  $L^1$ -topologie.  $\square$

#### 2.5.4 La classe $\mathcal{E}^1(X, \omega)$

Dans cette section, on étudie la classe  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  qui joue un rôle capital dans la résolution des équations de Monge-Ampère complexes dégénérées.

**Définition 2.5.14.** On note  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  la classe  $\mathcal{E}_\chi(X, \omega)$  pour  $\chi(t) \equiv t$ . On note aussi l'énergie correspondante à  $E_{Id}$  par

$$E(\varphi) := \frac{1}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \int_X \varphi(\omega + dd^c \varphi)^j \wedge \omega^{n-j}.$$

**Proposition 2.5.15.** (voir [GZ17]) *La fonctionnelle d'énergie  $E$  est la primitive de l'opérateur de Monge-Ampère complexe, à savoir chaque fois que  $\varphi + tv \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ ,*

$$\left. \frac{dE(\varphi + tv)}{dt} \right|_{t=0} = \int_X v MA(\varphi).$$

La fonctionnelle  $E$  est croissante, concave, satisfait  $E(\varphi + c) = E(\varphi) + c$  pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ , et la condition de cocycle

$$E(\varphi) - E(\psi) = \frac{1}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \int_X (\varphi - \psi)(\omega + dd^c \varphi)^j \wedge (\omega + dd^c \psi)^{n-j},$$

pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .

D'après la Proposition 2.5.13,

$$\mathcal{E}_C^1(X, \omega) := \{\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega) \mid E(\varphi) \geq -C \text{ et } \varphi \leq 0\}$$

est compact. Il est de plus convexe puisque  $E$  est concave. On termine le chapitre par un résultat de capacité sur les ensembles de niveau et qui va servir dans la suite:

**Lemme 2.5.16.** *Soit  $\varphi \in PSH(X, \omega)$ . Si*

$$\int_0^{+\infty} t^n \text{Cap}_\omega\{\varphi < -t\} dt < +\infty,$$

alors  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ . Réciproquement pour chaque  $C > 0$ ,

$$\sup \left( \int_0^\infty t \text{Cap}_\omega\{\varphi < -t\} dt \mid \varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega) \right) < +\infty.$$

*Preuve:*

Soit  $\varphi \in PSH(X, \omega)$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\varphi \leq -1$ . Pour chaque  $t \geq 1$ , la fonction  $1 + t^{-1} \max(\varphi, -t)$  est une fonction  $\omega$ -psh à valeurs dans  $[0, 1]$ , donc

$$MA(\max(\varphi, -t)) \leq t^n \text{Cap}_\omega.$$

Donc si

$$\int_1^{+\infty} t^n \text{Cap}_\omega\{\varphi < -t\} dt < +\infty,$$

alors  $\int_1^{+\infty} MA(\max(\varphi, -t))(\varphi < -t) dt < +\infty$ . Donc

$$\int_X (-\varphi) MA(\varphi) = \int_0^{+\infty} MA(\max(\varphi, -t))(\varphi < -t) dt < +\infty.$$

On en déduit que  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .

Soit maintenant  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ . Donc  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  et  $\varphi \in L^1(MA(\varphi))$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $\varphi \leq -1$ . Donc

$$\begin{aligned} - \int_X \varphi MA(\varphi) &= \int_X \omega^n + \int_1^{+\infty} MA(\varphi)(\varphi < -t) dt \\ &= \int_X \omega^n + \int_1^{+\infty} MA(\max(\varphi, -t))(\varphi < -t) dt < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  et intégrable par rapport à  $MA(\varphi)$  donc  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .

Soit  $u \in PSH(X, \omega)$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . On a

$$\{\varphi < -2t\} \subset \{t^{-1}\varphi < u - 1\} \subset \{\varphi < -t\}.$$

D'après le principe de comparaison,

$$\int_{\{\varphi < -2t\}} MA(u) \leq \int_{\{\varphi < -t\}} MA(t^{-1}\varphi).$$

$MA(t^{-1}\varphi) \leq V^{-1}(t^{-1}\omega_\varphi + \omega)$  donne

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} tCap(\varphi < -t) dt &= 4 \int_1^{+\infty} tCap(\varphi < -2t) dt \\ &\leq 2 \int_X \varphi^2 \frac{\omega^n}{V} + \frac{4}{V} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \int_X (-\varphi) \omega_\varphi^j \wedge \omega^{n-j}. \end{aligned}$$

Les deux composantes du membre de droite sont uniformément bornées puisque la deuxième l'est si  $\varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega)$  et la première aussi car,  $-C \leq E(\varphi) \leq \sup_X \varphi \leq 0$ .  $\square$

## Chapter 3

# Méthode Variationnelle

Soient  $X$  une variété kählérienne compacte et  $\omega$  semi-positive et grosse sur  $X$ . Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mu$  une mesure non-pluripolaire.

Notre objectif est de résoudre les équations de Monge-Ampère complexes dégénérées,

$$(MA)_\lambda \quad MA(\varphi) = e^{-\lambda\varphi}\mu,$$

où  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .

Pour cela, on cherche une fonctionnelle  $\mathcal{F}_\lambda$  définie sur  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  pour laquelle l'équation d'Euler-Lagrange est  $(MA)_\lambda$ . Cette méthode a été développée dans [BBGZ13].

### 3.1 Les fonctionnelles d'énergie $\mathcal{F}_\lambda$

#### 3.1.1 Les fonctionnelles $\mathcal{F}_\lambda$

On considère la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\lambda : \mathcal{E}^1(X, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mathcal{F}_\lambda(\varphi) = E(\varphi) + \frac{1}{\lambda} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right]$$

et pour  $\lambda = 0$

$$\mathcal{F}_0(\varphi) = E(\varphi) - \int_X \varphi d\mu = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{F}_\lambda(\varphi).$$

Mais on doit montrer en premier lieu que  $\mathcal{F}_\lambda$  est bien définie pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On va montrer que l'énergie  $E$  est bien définie pour  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .

$$E(\varphi) = \frac{1}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \int_X \varphi (\omega + dd^c \varphi)^j \wedge \omega^{n-j}$$

- Si  $\varphi$  est bornée, on a d'après Bedford et Taylor que  $E(\varphi)$  est bien définie.
- Si  $\varphi$  n'est pas bornée, alors on fait une approximation canonique, en considérant la suite

$$\varphi_j := \max(\varphi, -j) \in PSH(X, \omega)$$

qui décroît ponctuellement vers  $\varphi$ . Par continuité de  $MA$ , pour les suites décroissantes, on a  $MA(\varphi_j) \rightarrow MA(\varphi)$  au sens faible des courants sur  $X$ . Donc le Monge-Ampère de  $\varphi$  est donc bien défini et par suite,  $E(\varphi)$  est bien définie.

Il reste à montrer que la deuxième partie de la fonctionnelle est bien définie. Ce qui dépend de la valeur prise par  $\lambda$  mais aussi des propriétés de la mesure  $\mu$  pour chaque cas  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  et  $\lambda > 0$ .

Pour le cas  $\lambda < 0$ , cette deuxième partie est toujours bien définie, c'est-à-dire, finie puisque les fonctions  $\omega$ -psh sont en particulier s.c.s donc elles atteignent leur borne supérieure sur  $X$  qui est ici compact.

Pour le cas  $\lambda > 0$ ,  $\varphi \mapsto \int_X e^{-\lambda \varphi} d\mu$  n'est pas toujours bien définie si  $\mu$  est une mesure quelconque, comme le montre l'exemple ci-dessous:

**Exemple 3.1.1.** On considère, dans la boule unité de  $\mathbb{C}^n$  et pour  $\alpha > 0$ , la fonction  $\varphi_\alpha = \alpha \log |z|$ . Alors  $e^{-\varphi_\alpha} = \frac{1}{|z|^\alpha}$  qui vaut  $-\infty$  en 0. En passant aux coordonnées polaires,  $z = r\xi$ ,  $|\xi| = 1$ ,  $r > 0$  et  $d\lambda_{2n} = r^{2n-1} dr d\sigma$ , on a

$$\int_{\mathbb{B}(0,1)} \frac{d\lambda_{2n}}{|z|^\alpha} = \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} r^{2n-1-\alpha} dr d\sigma = \sigma_{2n-1} \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-2n+1}}$$

qui n'est bien définie que pour  $\alpha - 2n + 1 < 1$ , i.e.,  $\alpha < 2n$ .

Mais si la mesure  $\mu = f dV$ ,  $f \in L^p(dV)$  avec  $p > 1$  et  $dV$  une forme volume, alors cette intégrale est toujours bien définie dans  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$ . En effet,  
pour  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ ,

$$\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu = \int_X e^{-\lambda\varphi} f dV \leq \|f\|_{L^p} \left( \int_X e^{-\lambda q\varphi} dV \right)^{\frac{1}{q}},$$

d'après d'inégalité de Hölder. Par le théorème d'intégrabilité de Skoda,

$$\int_X e^{-\lambda q\varphi} dV < +\infty,$$

puisque les fonctions de  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  ont un nombre de Lelong nul.

Dans le  $\lambda = 0$ , si on considère localement  $\varphi_\alpha = \alpha \log |z|$  qui prend la valeur  $-\infty$  en 0, alors pour la masse de Dirac en 0, on a  $\int_X \varphi_\alpha d\delta_0 = -\infty$ . Donc il faut imposer des conditions à la mesure  $\mu$  pour que les fonctions de  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  soient  $\mu$ -intégrables.

### 3.1.2 L'Equation d'Euler-Lagrange de $\mathcal{F}_\lambda$

On va montrer ici que l'équation  $(MA)_\lambda$  est bien l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\lambda$ .

**Lemme 3.1.2.** *Soient  $v, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$  et  $\omega_\varphi > 0$ . Alors,*

$$\left. \frac{d\mathcal{F}_\lambda(\varphi + tv)}{dt} \right|_{t=0} = \int_X v MA(\varphi) - \int_X v \frac{e^{-\lambda\varphi} d\mu}{\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu}.$$

*De plus, si  $\varphi$  est un point critique  $\omega$ -psh de  $\mathcal{F}_\lambda$ , alors  $\varphi + c$  est solution de  $(MA)_\lambda$  pour un choix approprié de  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Preuve:*

Comme  $\omega_\varphi > 0$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $\omega_\varphi \geq \delta\omega$ . Pour  $|t| \leq \varepsilon \ll 1$ , on a  $tdd^c v \geq -\delta\omega$ . Donc

$$\omega + dd^c(\varphi + tv) = \omega_\varphi + tdd^c v \geq \delta\omega + tdd^c v \geq 0.$$

On a

$$\frac{d\mathcal{F}_\lambda(\varphi + tv)}{dt} = \frac{dE(\varphi + tv)}{dt} + \frac{d}{\lambda dt} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right].$$

$$\left. \frac{dE(\varphi + tv)}{dt} \right|_{t=0} = \int_X vMA(\varphi + tv) \Big|_{t=0} = \int_X vMA(\varphi)$$

$$\left. \frac{d}{\lambda dt} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right] \right|_{t=0} = - \left. \frac{\int_X v e^{-\lambda(\varphi+tv)} d\mu}{\int_X e^{-\lambda(\varphi+tv)} d\mu} \right|_{t=0} = - \int_X v \frac{e^{-\lambda\varphi} d\mu}{\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu}$$

Alors

$$\left. \frac{d\mathcal{F}_\lambda(\varphi + tv)}{dt} \right|_{t=0} = \int_X vMA(\varphi) - \int_X v \frac{e^{-\lambda\varphi} d\mu}{\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu}.$$

Si  $\varphi$  est point critique de  $\mathcal{F}_\lambda$ , alors  $\left. \frac{d\mathcal{F}_\lambda(\varphi+tv)}{dt} \right|_{t=0} = 0$  pour tout  $v \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ . Donc

$$MA(\varphi) = \frac{e^{-\lambda\varphi} \mu}{\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu},$$

au sens des mesures de Radon sur  $X$ .

- si  $\lambda = 0$ , alors  $MA(\varphi) = \mu$ ; donc  $\mu$  est solution de  $(MA)_0$ .
- si  $\lambda \neq 0$ , on pose  $\psi = \varphi + c$  point critique de  $\mathcal{F}_\lambda$ . Alors

$$MA(\varphi) = \frac{e^{-\lambda\varphi} \mu}{\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu} = e^{-\lambda(\varphi+c)} \mu \Rightarrow c = \frac{1}{\lambda} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right]$$

donc  $\psi = \varphi + \frac{1}{\lambda} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right]$  est solution de  $(MA)_\lambda$ .  $\square$

Donc  $(MA)_\lambda$  est bien l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\lambda$  et trouver les solutions de l'équation revient à trouver les points critiques de  $\mathcal{F}_\lambda$ .

## 3.2 Solutions dans $\mathcal{E}^1(X, \omega)$

### 3.2.1 Le Cas $\lambda = 0$

$$\mathcal{F}_0(\varphi) = E(\varphi) - \int_X \varphi d\mu.$$

Donc pour pouvoir contrôler l'intégrale du membre de gauche il faut que nos fonctions soient  $\mu$ -intégrables. Comme les fonctions de  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  ne sont pas intégrables par rapport à toute mesure, on travaille avec les mesures telles que  $\mathcal{E}^1(X, \omega) \subset L^1(\mu)$ . On suppose de plus que les mesures considérées sont dominées par la capacité.

On dit que  $\mu$  vérifie la condition  $(DC)_A$  s'il existe  $A > 0$  tel que

$$\forall K \subset X, \quad \mu(K) \leq A \text{Cap}_\omega(K).$$

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui vérifie  $(DC)_A$ . Alors  $\mathcal{E}^1(X, \omega) \subset L^2(X, \mu)$  et  $\mathcal{F}_0$  est semi-continue supérieurement sur tout sous-ensemble compact  $\mathcal{E}_C^1(X, \omega) \subset \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .*

*Preuve:*

Comme  $E(\varphi)$  est semi-continue supérieurement d'après la Proposition 2.5.12, il suffit de montrer que  $L_\mu : \varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega) \mapsto \int_X \varphi d\mu$  est s.c.i.

Soit  $\varphi_j$  une suite de fonctions de  $\mathcal{E}_C^1(X, \omega)$  qui converge vers  $\varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega)$  dans  $L^1(X)$ . Ici, on a  $\mathcal{E}^1(X, \omega) \subset L^1(\mu)$ . Comme les  $\varphi_j$  sont uniformément bornées supérieurement, on peut supposer que  $\varphi_j \leq 0$ . Par le lemme de Fatou, on a

$$\limsup \int_X \varphi_j d\mu \leq \int_X \limsup \varphi_j d\mu \leq \int_X \varphi d\mu$$

avec la dernière inégalité qui vient du lemme de Hartogs. Donc  $\varphi \mapsto \int_X \varphi d\mu$  est semi-continue supérieurement.

Mais on veut montrer qu'elle est semi-continue inférieurement. Pour cela, on utilise le fait que  $\mu \leq A \text{Cap}_\omega$  et on a

$$\int_X \varphi_j^2 d\mu = 2 \int_0^{+\infty} t \mu(\{\varphi_j < -t\}) dt \leq 2A \int_0^{+\infty} t \text{Cap}_\omega(\{\varphi_j < -t\}) dt.$$

D'après le Lemme 2.5.16,  $\forall C > 0$ ,

$$M_C := \sup \left\{ \int_0^{+\infty} t \text{Cap}_\omega(\{\varphi_j < -t\}) dt \mid \varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega) \right\} < +\infty.$$

Donc il suffit de restreindre au cas où  $\varphi_j \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega)$  et il existe  $C'$  tel que  $\int_X \varphi_j^2 d\mu \leq C'$ . Par le Lemme 3.2.2, on a  $\int_X \varphi_j d\mu \rightarrow \int_X \varphi d\mu$  et donc  $L_\mu$  est semi-continue inférieurement.  $\square$

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. Soit  $\psi_j \in PSH(X, \omega)$  une suite de fonctions qui converge dans  $L^1(X)$  vers  $\psi \in PSH(X, \omega)$ . Si les  $\psi_j$  sont uniformément bornées, alors*

$$\int_X \psi_j d\mu \rightarrow \int_X \psi d\mu.$$

On a le même résultat, si on suppose de plus qu'il existe  $p > 1$  tel que  $\sup_j \int_X |\psi_j|^p d\mu < +\infty$

*Preuve:*

On a  $\limsup \psi_j \leq \psi \leq C$ , donc d'après le lemme de Fatou

$$\limsup \int_X \psi_j d\mu \leq \int_X \limsup \psi_j d\mu \leq \int_X \psi d\mu.$$

Donc  $\psi \mapsto \int_X \psi d\mu$  est semi-continue supérieurement.

Pour la semi-continuité inférieure, il suffit de montrer que

$$\liminf \int_X \text{Comb}(\psi_j) d\mu \geq \int_X \psi d\mu,$$

où  $\text{Comb}(\psi_j)$  est une combinaison quelconque des  $\psi_j$ .

On suppose en premier que  $p = 2$ . Alors  $(\psi_j)$  est faiblement compact dans  $L^2(\mu)$ . D'après le Théorème de Banach-Saks, il existe une sous-suite  $\psi_{j_k}$  telle que la suite

$$\tilde{\psi}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{j_k}, \quad N \in \mathbb{N},$$

converge dans  $L^2(\mu)$  vers une fonction  $g \in L^2(\mu)$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\tilde{\psi}_N$  converge  $\mu$ -presque partout vers  $g(x)$ .

On pose

$$\varphi_N(x) := \left( \sup_{j \geq N} \tilde{\psi}_j(x) \right)^*.$$

Alors  $\varphi_N(x) := \sup_{j \geq N} \tilde{\psi}_j(x)$   $\mu$ -presque partout, puisque, ( voir [BT82] ),  $\mu$  ne charge pas l'ensemble pluripolaire

$$P := \left\{ x \in X \mid \sup_{j \geq N} \psi_j(x) < \left( \sup_{j \geq N} \psi_j(x) \right)^* \right\}.$$

Donc  $\varphi_N(x)$  décroît partout vers  $\psi$ , donc  $\mu$ -presque partout. Comme elle converge aussi vers  $g(x)$   $\mu$ -presque partout, alors  $\psi \equiv g$   $\mu$ -presque partout, en particulier

$$\lim \int_X \tilde{\psi}_N d\mu = \int_X \psi d\mu.$$

Pour  $p > 1$  alors  $L^p(\mu)$  est réflexif. Donc tout convexe faiblement compact est fortement compact. Donc l'enveloppe convexe  $E = \text{conv}(\{\psi_j\} \cup \{\psi\})$  qui est faiblement compacte est fortement compacte. Quitte à extraire une sous-suite,  $\varphi_j = \text{Comb}(\psi_j)$  converge vers  $\varphi$  dans  $L^p(\mu)$ . Et un même raisonnement donne le résultat.  $\square$

On va donner le résultat le plus important de cette section.

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui vérifie la condition  $(DC)_A$ . Alors si  $\mathcal{F}_0$  est propre, il existe  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  tel que  $MA(\varphi) = \mu$  et de plus*

$$\sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\varphi).$$

*Preuve:*

On pose  $M = \sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_0 > -\infty$ . Comme  $\mathcal{F}_0$  est invariant par translation, alors

$$M = \sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_0 = \sup_{\mathcal{E}_0^1(X, \omega)} \mathcal{F}_0,$$

où  $\mathcal{E}_0^1(X, \omega)$  est l'ensembles des fonctions  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  normalisées. Donc il existe une suite  $\varphi_j \in \mathcal{E}_0^1(X, \omega)$  telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_0(\varphi_j) = M$ .

$\mathcal{F}_0$  étant propre donc  $C = \sup |E(\varphi_j)| < +\infty$ . Alors pour tout  $j$ ,  $\varphi_j \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega)$ . Par compacité, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\varphi_j \rightarrow \varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega)$ . Alors par s.c.s., on a

$$M = \limsup \mathcal{F}_0(\varphi_j) \leq \mathcal{F}_0(\varphi) \leq M.$$

Donc  $M = \mathcal{F}_0(\varphi)$  ce qui veut dire qu'il existe

$$\sup_{\mathcal{E}_C^1(X, \omega)} \mathcal{F}_0 = \sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\varphi).$$

Il reste à montrer que ce point  $\varphi$  qui réalise le maximum de  $\mathcal{F}_0$  est solution de  $(MA)_0$ .

Pour  $v \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$  fixé, on considère la fonction

$$g(t) = E \circ P(\varphi + tv) - \int_X (\varphi + tv) d\mu$$

où pour  $h$  une fonction s.c.s sur  $X$ , on pose

$$P(h)(x) := \sup\{\psi(x) \in \mathbb{R} \mid \psi \in PSH(X, \omega) \text{ et } \psi \leq h\},$$

qui est l'enveloppe  $\omega$ -psh de  $h$ .

D'après le Théorème 3.2.15,  $g$  est différentiable en 0 et

$$g'(0) = \int_X v MA(\varphi) - \int_X v d\mu.$$

Comme  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  et  $t \in ]-1, 1[$ , alors on a  $\varphi - c \leq \varphi + tv \leq \varphi + c$ , avec  $c$  une constante réelle. Donc  $\varphi - c \leq P(\varphi + tv)$  et puisque  $\varphi - c \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ , alors  $P(\varphi + tv) \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .

$P(\varphi + tv) \leq \varphi + tv$ , alors

$$\mathcal{F}_0 \circ P(\varphi + tv) = E \circ P(\varphi + tv) - \int_X P(\varphi + tv) d\mu \geq E \circ P(\varphi + tv) - \int_X (\varphi + tv) d\mu$$

donc  $g(t) \leq \mathcal{F}_0 \circ P(\varphi + tv)$ .

On a aussi  $g(0) = E \circ P(\varphi) - \int_X \varphi d\mu = E(\varphi) - \int_X \varphi d\mu = \mathcal{F}_0(\varphi)$ . Or  $\mathcal{F}_0$  atteint son maximum en  $\varphi$  donc  $\mathcal{F}_0 \circ P(\varphi + tv) \leq g(0)$ .

Ainsi  $g(t) \leq g(0)$ ; ce qui implique  $g'(0) = 0$ . On a

$$g'(0) = \int_X v MA(\varphi) - \int_X v d\mu, \forall v \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}),$$

donc  $MA(\varphi) = \mu$ . □

On va maintenant donner le résultat qui garantit la propriété de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_0$ .

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité telle que  $\mathcal{E}^1(X, \omega) \subset L^1(\mu)$ . Alors  $\mathcal{F}_0$  est propre: il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  normalisé par  $\sup_X \varphi = 0$ ,*

$$\mathcal{F}_0 \leq E(\varphi) + C|E(\varphi)|^{\frac{1}{2}}.$$

On va utiliser les résultats suivants pour la preuve du théorème.

Soit  $\mathcal{C} \subset PSH(X, \omega)$  un ensemble convexe invariant par translation:  $u \in \mathcal{C}$  et  $c \in \mathbb{R} \Rightarrow u + c \in \mathcal{C}$ .

**Lemme 3.2.5.** Soit  $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  une fonction convexe, non décroissante, et qui vérifie  $I(\varphi + c) = I(\varphi) + c$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$  un sous-ensemble compact, convexe. Si  $I$  est fini sur  $\mathcal{K}$ , alors elle est uniformément bornée sur  $\mathcal{K}$ .

**Lemme 3.2.6.** Soient  $\psi, \varphi \in PSH(X, \omega)$  telles que  $\psi = \varepsilon\varphi$ , avec  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\omega_\psi^j \wedge \omega^{n-j} \leq \omega^n + N\varepsilon \sum_{l=1}^n \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l}$$

*Preuve du Théorème 3.2.4:*

Soit  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  fixé tel que  $\sup_X \varphi = 0$  et  $E(\varphi) \leq -1$ . On pose  $\varepsilon = |E(\varphi)|^{-\frac{1}{2}} \in ]0, 1]$  et on considère  $\psi = \varepsilon\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  puisque  $\psi \geq \varphi$  et  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ . Alors

$$E(\psi) = \frac{\varepsilon}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \int_X \varphi \omega_\psi^j \wedge \omega^{n-j}.$$

Du Lemme 3.2.6, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\omega_\psi^j \wedge \omega^{n-j} \leq \omega^n + N\varepsilon \sum_{l=1}^n \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l}.$$

Comme  $\psi, \varphi \leq 0$ , on a:

$$\psi \omega_\psi^j \wedge \omega^{n-j} \geq \varepsilon \varphi \omega^n + N\varepsilon^2 \sum_{l=1}^n \varphi \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l} \geq \varphi \omega^n + N\varepsilon^2 \sum_{l=0}^n \varphi \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l}.$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\psi) &\geq \frac{1}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \int_X \varphi \omega^n + \frac{N\varepsilon^2}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \sum_{l=1}^n \int_X \varphi \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l} \\ &= \frac{1}{V} \int_X \varphi \omega^n + (n+1)N\varepsilon^2 E(\varphi) \geq -C - (n+1)N, \end{aligned}$$

où

$$C := \sup \left\{ \frac{1}{V} \int_X (-\varphi) \omega^n \mid \varphi \in PSH_0(X, \omega) \right\} < +\infty,$$

d'après le Lemme 3.2.5. Donc  $\psi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega)$ . Il résulte aussi du Lemme 3.2.5 que  $\varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega) \mapsto \int_X \varphi d\mu$  est uniformément bornée. Donc  $\int_X \psi d\mu \geq -C'$ . Ainsi,

$$\int_X \varphi d\mu = \varepsilon^{-1} \int_X \psi d\mu = |E(\varphi)|^{\frac{1}{2}} \int_X \psi d\mu \geq -C' |E(\varphi)|^{\frac{1}{2}},$$

ce qui implique

$$\mathcal{F}_0(\varphi) = E(\varphi) - \int_X \varphi d\mu \leq E(\varphi) + C' |E(\varphi)|^{\frac{1}{2}}$$

et elle est donc propre. □

*Preuve du Lemme 3.2.5:*

On va raisonner par l'absurde en supposant que  $I$  n'est pas bornée sur  $\mathcal{K}$ . Si  $I$  n'est pas bornée sur  $\mathcal{K}$ , alors il existe une suite  $(\varphi_j)$  dans  $\mathcal{K}$  telle que  $I(\varphi_j) \leq -2^j$  et  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $L^1(X)$ . Par le lemme de Hartogs, on a  $\limsup_{j \rightarrow +\infty} (\max_X \varphi_j) = \max_X \varphi$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} (\max_X \varphi_j) = \max_X \varphi$  et donc  $\sup |\max_X \varphi_j| = M < +\infty$ .

On pose  $\tilde{\varphi}_j = \varphi_j - \max_X \varphi_j$ . Alors,  $\max_X \tilde{\varphi}_j = 0$  et  $I(\tilde{\varphi}_j) = I(\varphi_j) - \max_X \varphi_j$ .

La fonction

$$\psi = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \tilde{\varphi}_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^k 2^{-j} \tilde{\varphi}_j$$

est dans  $\mathcal{K}$  comme limite d'une combinaison convexe d'éléments de  $\mathcal{K}$ . Alors

$$I(\psi) \leq I\left(\sum_{j=1}^k 2^{-j} \tilde{\varphi}_j\right) \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} I(\tilde{\varphi}_j)$$

or

$$I(\tilde{\varphi}_j) = I(\varphi_j) - \max_X \varphi_j \leq (-2^j + M) \rightarrow -\infty$$

quand  $j \rightarrow +\infty$ .

Donc  $I(\psi) = -\infty$  et  $\psi \in \mathcal{K}$ , ce qui contredit le fait que  $I$  est finie sur  $\mathcal{K}$ . □

*Preuve du Lemme 3.2.6:*

$\psi = \varepsilon\varphi$ , donc  $\omega_\psi = \omega + \varepsilon dd^c\varphi$  et  $\varepsilon\omega_\varphi = \varepsilon\omega + \varepsilon dd^c\varphi$ . Alors  $\omega_\psi - \varepsilon\omega_\varphi = (1-\varepsilon)\omega$  et on a  $\omega_\psi = \varepsilon\omega_\varphi + (1-\varepsilon)\omega$ . Donc

$$\omega_\psi^j = \omega_\psi = (\varepsilon\omega_\varphi + (1-\varepsilon)\omega)^j = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \varepsilon^l (1-\varepsilon)^{j-l} \omega_\varphi^l \wedge \omega^{j-l}$$

et donc

$$\begin{aligned}\omega_\psi^j \wedge \omega^{n-j} &= \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \varepsilon^l (1-\varepsilon)^{j-l} \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l} \\ &= (1-\varepsilon)^j \omega^n + \sum_{l=1}^j \binom{j}{l} \varepsilon^l (1-\varepsilon)^{j-l} \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l}.\end{aligned}$$

$0 < \varepsilon \leq 1$  donc  $\varepsilon^l \leq \varepsilon$  et  $(1-\varepsilon)^l \leq 1$  pour  $l = 1 \dots j$  et

$$\omega_\psi^j \wedge \omega^{n-j} \leq \omega^n + \varepsilon \sum_{l=1}^j \binom{j}{l} \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l} \leq \omega^n + \varepsilon \sum_{l=1}^n \binom{j}{l} \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l}.$$

On pose

$$N = \sup_{1 \leq l \leq j \leq n} \binom{j}{l}$$

et on a

$$\omega_\psi^j \wedge \omega^{n-j} \leq \omega^n + N\varepsilon \sum_{l=1}^n \omega_\varphi^l \wedge \omega^{n-l}$$

qui est le résultat.  $\square$

Le résultat suivant donne l'existence de la solution de  $(MA)_0$  dans  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  sous la seule condition  $\mathcal{E}^1(X, \omega) \subset L^1(\mu)$ .

**Théorème 3.2.7.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité telle que  $\mathcal{E}^1(X, \omega) \subset L^1(\mu)$ . Il existe une unique fonction  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  telle que*

$$MA(\varphi) = \mu,$$

*qui est de plus unique à l'addition d'une constante près.*

*Les fonctions  $\varphi + c$  sont les uniques points qui maximisent  $\mathcal{F}_0$ .*

*Preuve:*

On considère l'ensemble convexe compact

$$\mathcal{C}_\Lambda = \{\nu \text{ mesure de probabilité sur } X \mid \nu \leq \Lambda \text{Cap}_\omega\}.$$

Du théorème de Radon-Nikodým généralisé ( voir [Rai69] ), on a  $\mu = f\nu + \sigma$ , où  $\nu \in \mathcal{C}_\Lambda$ ,  $0 \leq f \in L^1(\nu)$  et  $\sigma \perp \mathcal{C}_\Lambda$ .

$(\sigma \perp \mathcal{C}_\Lambda) \iff (\exists A \subset X, \sigma(A) = \sigma(X) \text{ et } \forall \gamma \in \mathcal{C}_\Lambda, \gamma(A) = 0)$ . On a

$$\{(\omega + dd^c u)^n \mid u \text{ } \omega \text{ - psh borné}\} \subset \mathcal{C}_\Lambda$$

donc

$$Cap_\omega(A) := \sup \left\{ \int_A (\omega + dd^c u)^n \mid u \in PSH(X, \omega), -1 \leq u \leq 0 \right\} = 0.$$

Alors par le théorème de Choquet,  $0 = Cap_\omega(A) = Cap_\omega^*(A)$  et dans ce cas on a par un résultat de Bedford et Taylor ( voir [BT82, GZ17]) que  $A$  est pluripolaire. Donc  $\mu(A) = 0$  et on a  $0 = \sigma(A) = \sigma(X)$ , qui implique que  $\sigma \equiv 0$ , c'est à dire  $\mu = f\nu$ .

On pose  $\mu_j := c_j \min(f, j)\nu$ , avec  $c_j$  la constante de normalisation qui décroît vers 1. En effet,

$$V = \int_X \mu_j = c_j \int_X \min(f, j)\nu \text{ donc } 1 \leq c_j = \frac{V}{\int_X \min(f, j)\nu} \text{ et } c_j \rightarrow 1.$$

Alors on a  $\mu_j$  qui est une mesure de probabilité et  $\mu_j \leq j c_j Cap_\omega$ , donc elle vérifie les conditions du Théorème 3.2.3. Alors, il existe une  $\varphi_j \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  normalisé par  $\sup_X \varphi_j = 0$  tel que  $\mu_j = MA(\varphi_j)$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $L^1(X)$ . Du Théorème 3.2.4, on a

$$\begin{aligned} |E(\varphi_j)| &\leq \int_X (-\varphi_j) MA(\varphi_j) = c_j \int_X (-\varphi_j) \min(f, j)\nu \\ &\leq c_j \int_X (-\varphi_j) f\nu = c_j \int_X (-\varphi_j) d\mu \leq C |E(\varphi_j)|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $j$ ,  $|E(\varphi_j)| \leq C^2$ . Comme  $E$  s.c, alors  $|E(\varphi)| \leq C^2$ , par suite  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .

Posons  $\phi_j := (\sup_{l \geq j} \varphi_l)^*$  qui est  $\omega$ -psh et décroît vers  $\varphi$ . Comme  $\psi \geq \varphi_j$ , alors  $\phi_j \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ . Puisque  $MA(\phi_j) = MA(\max(\phi_j, \varphi_j))$  et  $MA(\varphi_j) = c_j \min(f, j)\nu \geq \min(f, j)\nu = \mu$ , d'après le Lemme 2.5.7, on a  $MA(\phi_j) \geq \mu$ . Par convergence monotone, on a  $MA(\phi_j) \rightarrow MA(\varphi)$  donc  $MA(\varphi) \geq \mu$ . Ainsi,  $MA(\varphi) = \mu$  puisque ce sont deux mesures de probabilité.  $\square$

### 3.2.2 Le Cas $\lambda < 0$

Dans cette section, on va travailler avec  $\mu$  une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. On pose pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda = -\varepsilon$  et donc

$$\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_{-\varepsilon} = E(\varphi) - \frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon \varphi} d\mu \right]$$

On va vérifier en premier que la fonctionnelle  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est semi-continue supérieurement.

**Proposition 3.2.8.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. Alors  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est semi-continue supérieurement.*

*Preuve:*

Comme  $\mathcal{F}_{-\varepsilon} = E(\varphi) - \frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu \right]$ , montrer qu'elle est semi-continue supérieurement revient à montrer que

$$\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega) \mapsto \int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu$$

avec  $\sup_X \varphi = 0$  est semi-continue inférieurement.

Soit  $\varphi_j \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  une suite de fonctions normalisées par  $\sup_X \varphi_j = 0$  et qui converge vers  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  dans  $L^1(X)$ . Donc  $\sup_X \varphi = 0$ . Comme  $\varphi_j, \varphi$  sont normalisées, alors on peut supposer qu'elles sont négatives et donc

$$\psi_j = e^{\varepsilon\varphi_j}, \psi = e^{\varepsilon\varphi} \in PSH(X; \omega)$$

et sont uniformément bornées puisqu'elles sont à valeurs dans  $[0, 1]$ . Du Lemme 3.2.2, on en déduit que  $\lim \int_X \psi_j d\mu = \int_X \psi d\mu$  et  $\psi \mapsto \int_X \psi d\mu$  est semi-continue inférieurement. Donc  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est semi-continue supérieurement.  $\square$

On va donner le résultat phare de cette section:

**Théorème 3.2.9.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. Si  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est propre, alors il existe  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  solution de l'équation  $(MA)_{-\varepsilon}$  et tel que*

$$\sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_{-\varepsilon} = \mathcal{F}_{-\varepsilon}(\varphi)$$

*Preuve:*

Comme dans le cas  $\lambda = 0$ , la propriété et l'invariance par translation de  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  permet de trouver un  $C > 0$  tel que

$$\sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_{-\varepsilon} = \sup_{\mathcal{E}_C^1(X, \omega)} \mathcal{F}_{-\varepsilon}.$$

Le fait que  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est semi-continue supérieurement sur le sous-ensemble convexe compact  $\mathcal{E}_C^1(X, \omega)$  permet de trouver un  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  qui la maximise sur  $\mathcal{E}_C^1(X, \omega)$ .

Pour montrer que ce point  $\varphi$  qui maximise  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est solution de  $(MA)_{-\varepsilon}$ , on considère, pour  $v \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$  fixé et  $t \in ]-1, 1[$  la fonction

$$g(t) := E \circ P(\varphi + tv) - \frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon(\varphi + tv)} d\mu \right]$$

où on pose  $P(h)(x) := \{\psi(x) \in \mathbb{R} \mid \psi \in PSH(X, \omega) \text{ et } \psi \leq h\}$  qui est l'enveloppe  $\omega$ -psh de  $h$ .

On a

$$g'(t) = \int_X v MA(P(\varphi + tv)) - \int_X v \frac{e^{\varepsilon(\varphi+tv)} d\mu}{\int_X e^{\varepsilon(\varphi+tv)} d\mu}.$$

Puisque  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  et  $tv$  minoré, alors  $P(\varphi + tv) \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .  $P(\varphi + tv) \leq \varphi + tv$ , donc

$$-\frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon P(\varphi+tv)} d\mu \right] \geq -\frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon(\varphi+tv)} d\mu \right]$$

et donc  $g(t) \leq \mathcal{F}_{-\varepsilon} \circ P(\varphi + tv)$ .

On a aussi

$$g(0) = E \circ P(\varphi) - \frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu \right] = E(\varphi) - \frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu \right] = \mathcal{F}_{-\varepsilon}(\varphi).$$

$\varphi$  étant le point qui maximise  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  alors  $g(t) \leq \mathcal{F}_{-\varepsilon} \circ P(\varphi + tv) \leq \mathcal{F}_{-\varepsilon}(\varphi) = g(0)$ .

Ainsi,  $g(t) \leq g(0)$  et comme  $g$  est dérivable en 0 ( Théorème 3.2.15 ) alors  $g'(0) = 0$ .

Donc

$$0 = g'(0) = \int_X v MA(\varphi) - \int_X v \frac{e^{\varepsilon\varphi} d\mu}{\int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu}$$

pour tout  $v \in C^0(X, \mathbb{R})$ . Alors

$$MA(\varphi) = \frac{e^{\varepsilon\varphi} \mu}{\int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu},$$

au sens des mesures de Radon sur  $X$ . Donc  $\psi = \varphi - \frac{1}{\varepsilon} \log \left[ \int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu \right]$  est solution de  $(MA)_{-\varepsilon}$ .  $\square$

Puisque si  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est propre, on a une solution de son équation d'Euler-Lagrange, alors on doit se demander à quelles conditions la fonctionnelle vérifie cette propriété? La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant:

**Proposition 3.2.10.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. Alors  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}(\varphi) \leq E(\varphi) + C_\mu$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  normalisé par  $\sup_X \varphi = 0$ . En particulier,  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est propre.*

*Preuve:*

$$PSH_0(X, \omega) := \{\varphi \in PSH(X, \omega) \mid \sup_X \varphi = 0\}$$

est un compact et comme

$$\varphi \in PSH(X, \omega) \mapsto \int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu$$

est continue et positive, alors pour tout  $\varphi \in PSH_0(X, \omega)$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu \geq \delta$ . Donc  $\log \left[ \int_X e^{\varepsilon\varphi} d\mu \right] \geq \log \delta$  et on a  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}(\varphi) \leq E(\varphi) - \frac{1}{\varepsilon} \log \delta$  ce qui implique qu'elle est propre.

**Théorème 3.2.11.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un unique  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  tel que*

$$MA(\varphi) = e^{\varepsilon\varphi} \mu.$$

$\varphi$  est est l'unique fonction qui maximise la fonctionnelle  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$ .

*Preuve:*

Comme  $\mu$  ne charge pas les ensembles pluripolaires alors  $\mathcal{F}_{-\varepsilon}$  est propre. D'après le Théorème 3.2.9, il existe un  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  solution de l'équation  $MA(\varphi) = e^{\varepsilon\varphi} \mu$ .

Montrons alors que cette fonction est unique.

Supposons qu'il existe une autre solution  $\psi$  de  $(MA)_{-\varepsilon}$ . On a alors

$$MA(\varphi) = e^{\varepsilon\varphi} \mu \quad \text{et} \quad MA(\psi) = e^{\varepsilon\psi} \mu,$$

donc  $MA(\psi) = e^{\varepsilon(\psi-\varphi)} MA(\varphi)$ .

D'après le principe de comparaison Proposition 2.5.4,

$$\int_{\{\varphi < \psi\}} MA(\varphi) \leq \int_{\{\varphi < \psi\}} e^{\varepsilon(\psi-\varphi)} MA(\varphi) = \int_{\{\varphi < \psi\}} MA(\psi) \leq \int_{\{\varphi < \psi\}} MA(\varphi)$$

donc  $MA(\varphi)(\{\varphi < \psi\}) = 0$ . On en déduit que  $\psi \leq \varphi$   $MA(\varphi)$ -presque partout. Du principe de domination Proposition 2.5.8, on a  $\psi \leq \varphi$  sur  $X$ . Par symétrie on a  $\psi \equiv \varphi$  d'où l'unicité.  $\square$

### 3.2.3 Le Cas $\lambda > 0$

Dans cette section, on fait l'étude avec la condition supplémentaire sur  $\mu = fdV$  avec  $f \in L^p(dV)$ ,  $p > 1$  et une forme volume  $dV$ . Ici

$$\mathcal{F}_\lambda(\varphi) = E(\varphi) + \frac{1}{\lambda} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right]$$

**Proposition 3.2.12.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité telle que  $\mu = fdV$  avec  $f \in L^p(dV)$ ,  $p > 1$  et  $dV$  une forme volume. Alors  $\mathcal{F}_\lambda$  est semi-continue supérieurement sur tout sous-ensemble compact  $\mathcal{E}_C^1(X, \omega) \subset \mathcal{E}^1(X, \omega)$ .*

*Preuve:*

Comme  $E(\varphi)$  semi-continue supérieurement, il suffit de montrer que

$$\varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega) \mapsto \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \in \mathbb{R}$$

est semi-continue supérieurement. Par le lemme de Fatou, on voit que cette fonctionnelle est semi-continue inférieurement. Donc elle sera continue si on montre qu'elle semi-continue supérieurement.

Soit  $\varphi_j$  une suite de  $\mathcal{E}_C^1(X, \omega)$  qui converge vers  $\varphi$  dans  $L^p(X)$ . On a

$$\left| \int_X e^{-\lambda\varphi_j} d\mu - \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right| \leq \int_X |e^{-\lambda\varphi_j} - e^{-\lambda\varphi}| d\mu = \int_X |e^{-\lambda\varphi_j} - e^{-\lambda\varphi}| f dV$$

Or  $|e^a - e^b| \leq |a - b|e^{a+b}$  pour tout  $a, b \leq 0$ . Donc

$$\int_X |e^{-\lambda\varphi_j} - e^{-\lambda\varphi}| f dV \leq \lambda \int_X |\varphi_j - \varphi| e^{-\lambda(\varphi_j + \varphi)} f dV.$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\int_X |\varphi_j - \varphi| e^{-\lambda(\varphi_j + \varphi)} f dV \leq \|f\|_{L^p} \left( \int_X |\varphi_j - \varphi|^q e^{-\lambda q(\varphi_j + \varphi)} dV \right)^{\frac{1}{q}}$$

On applique encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz et

$$\int_X |\varphi_j - \varphi| e^{-\lambda(\varphi_j + \varphi)} f dV \leq \|f\|_{L^p} \left( \int_X |\varphi_j - \varphi|^{2q} dV \right)^{\frac{1}{2q}} \times \left( \int_X e^{-2q\lambda(\varphi_j + \varphi)} dV \right)^{\frac{1}{2q}}$$

$$\varphi_j, \varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega) \subset \mathcal{E}^1(X, \omega)$$

donc ont des nombres de Lelong nuls. Du théorème d'intégrabilité uniforme de Skoda, on a

$$C' := \sup_j \left( \int_X e^{-2q(\varphi_j + \varphi)} dV \right)^{\frac{1}{2q}} < +\infty.$$

On obtient donc

$$\left| \int_X e^{-\varphi_j} d\mu - \int_X e^{-\varphi} d\mu \right| \leq C' \|\varphi_j - \varphi\|_{L^{2q}}$$

Puisque  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $L^1(X)$  alors  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $L^{2q}(X)$  et on obtient la semi-continuité supérieure.  $\square$

On va donner le résultat d'existence de solution pour le cas  $\lambda > 0$ . La démonstration est pareille qu'aux cas  $\lambda = 0$  et  $\lambda < 0$ .

**Théorème 3.2.13.** *Soit  $\mu = fdV$ , avec  $f \in L^p(dV)$ ,  $p > 1$  et  $dV$  une forme volume, une mesure de probabilité. Si  $\mathcal{F}_\lambda$  est propre, alors il existe  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  solution de  $(MA)_\lambda$  et de plus*

$$\sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda(\varphi).$$

**Théorème 3.2.14.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité telle que  $\mu = fdV$  avec  $f \in L^p(dV)$ ,  $p > 1$  et  $dV$  une forme volume. Alors il existe  $\alpha(\omega) > 0$  telle que pour  $0 < \lambda < \alpha(\omega)$ , il existe  $C_\lambda > 0$  tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  normalisé par  $\sup_X \varphi = 0$ ,*

$$\mathcal{F}_\lambda(\varphi) \leq E(\varphi) + C_\lambda.$$

*En particulier,  $\mathcal{F}_\lambda$  est propre pour  $0 < \lambda < \alpha(\omega)$ .*

*Preuve:*

Ici, on a  $\mu = fdV$ . Donc

$$\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu = \int_X e^{-\lambda\varphi} f dV \leq \|f\|_{L^p} \left( \int_X e^{-q\lambda\varphi} dV \right)^{\frac{1}{q}}$$

d'après l'inégalité de Hölder.

Comme l'espace des fonctions  $\omega$ -psh normalisées est compact, alors pour tout  $\varphi$  normalisé, on a d'après le théorème de Skoda uniforme

$$\int_X e^{-q\lambda\varphi} dV \leq C(q\lambda)$$

si  $\lambda < (q\nu(\{\omega\}))^{-1}$  où

$$\nu(\{\omega\}) := \sup\{\nu(u, x) \mid x \in X \text{ et } u \in PSH(X, \omega)\}.$$

Donc pour tout  $0 < \lambda < \nu(\{\omega\})$ , il existe  $A > 0$  tel que  $\int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \leq A$ . Alors on a  $\mathcal{F}_\lambda(\varphi) \leq E(\varphi) + \frac{1}{\lambda} \log A$ .  $\square$

### 3.2.4 Théorème de Projection

On rappelle que l'enveloppe  $\omega$ -psh  $P(u)$  d'une fonction semi-continue supérieurement  $u : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  est

$$P(u)(x) := \sup\{\psi(x) \mid \psi \in PSH(X, \omega) \text{ et } \psi \leq u\}.$$

**Théorème 3.2.15.** Soient  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  et  $v \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$  fixés. Alors la fonction qui à  $t \mapsto E \circ P(\varphi + tv)$  est différentiable en zéro et

$$\left. \frac{dE \circ P(\varphi + tv)}{dt} \right|_{t=0} = \int_X vMA(\varphi).$$

*Preuve:*

On veut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E \circ P(\varphi + tv) - E(\varphi)}{t} = \int_X vMA(\varphi).$$

On suppose que  $t > 0$ .

Comme  $E$  est concave et  $E' = MA$  alors on :

$$E \circ P(\varphi + tv) - E(\varphi) \leq \langle E'(\varphi), P(\varphi + tv) - \varphi \rangle = \int_X (P(\varphi + tv) - \varphi)MA(\varphi).$$

Comme  $P(\varphi + tv) \leq \varphi + tv$  et  $t > 0$ , alors

$$\frac{E \circ P(\varphi + tv) - E(\varphi)}{t} \leq \int_X vMA(\varphi).$$

De la concavité de  $E$  aussi, on a

$$\begin{aligned} E \circ P(\varphi + tv) - E(\varphi) &\geq \langle E' \circ P(\varphi + tv), P(\varphi + tv) - \varphi \rangle \\ &= \int_X (P(\varphi + tv) - \varphi)MA(P(\varphi + tv)). \end{aligned}$$

Puisque  $MA(P(\varphi+tv))$  est concentré sur l'ensemble  $\{P(\varphi+tv) = \varphi+tv\}$ ,

$$\int_X (P(\varphi+tv) - \varphi)MA(P(\varphi+tv)) = \int_X tvMA(P(\varphi+tv)).$$

$t > 0$ , alors

$$\frac{E \circ P(\varphi+tv) - E(\varphi)}{t} \geq \int_X vMA(P(\varphi+tv)).$$

$P$  est uniformément Lipschitzien, donc

$$\sup_X |P(\varphi+tv) - P(\varphi)| = \sup_X |P(\varphi+tv) - \varphi| \leq t \sup_X |v| \rightarrow 0$$

lorsque  $t \rightarrow 0$ . L'opérateur de Monge-Ampère étant continu sous convergence uniforme, alors

$$\int_X vMA(P(\varphi+tv)) \rightarrow \int_X vMA(\varphi)$$

quand  $t \rightarrow 0$ . Donc

$$\frac{E \circ P(\varphi+tv) - E(\varphi)}{t} \geq \int_X vMA(\varphi).$$

Alors on a

$$\left. \frac{dE \circ P(\varphi+tv)}{dt} \right|_{t=0} = \int_X vMA(\varphi).$$

Le cas  $t < 0$  s'obtient comme celui de  $t > 0$  en remplaçant  $v$  par  $-v$ .  $\square$

### 3.3 Autres Solutions

#### 3.3.1 Solutions dans le cas $\lambda > 0$ .

**Définition 3.3.1.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité. On pose

$$\alpha_\mu(\{\omega\}) := \sup \left[ \alpha \geq 0 \mid \sup_{\varphi \in \mathcal{P}_0} \int_X e^{-\alpha\varphi} d\mu < +\infty \right],$$

où  $\mathcal{P}_0 = \{\varphi \in PSH(X, \omega) \mid \sup_X \varphi = 0\}$ .

Lorsque  $\mu_0 = f dV$  est une mesure de probabilité à densité  $f \in L^p$ ,  $p > 1$ , alors pour  $\varphi \in PSH(X, \omega)$  normalisé par  $\sup_X \varphi = 0$  et tout  $\alpha > 0$ ,

$$\int_X e^{-\alpha\varphi} d\mu = \int_X e^{-\alpha\varphi} f dV.$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_X e^{-\alpha\varphi} f dV \leq \|f\|_{L^p} \left( \int_X e^{-q\alpha\varphi} dV \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{P}_0$ ,

$$\int_X e^{-q\alpha\varphi} dV < +\infty$$

si  $0 < \alpha < 1$ . Donc  $\alpha_\mu(\{\omega\}) > 0$ .

On suppose dans toute la suite que  $\alpha_\mu(\{\omega\}) > 0$ .

**Théorème 3.3.2.** Soit  $\lambda > 0$  fixé tel que  $\alpha_\mu(\{\omega\}) > \lambda n/(n+1)$ , alors il existe  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  solution de l'équation

$$MA(\varphi) = e^{-\lambda\varphi} \mu.$$

**Remarque 3.3.3.** Pour  $\lambda > 0$ , on pose  $\tilde{\omega} = \lambda\omega$ ,  $\alpha_\mu(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha_\mu(\omega)}{\lambda}$  et  $\tilde{\varphi} = \lambda\varphi$ . Donc  $\tilde{\omega} + dd^c\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \omega + \frac{1}{\lambda}dd^c\varphi \geq 0$ . Alors  $PSH(X, \tilde{\omega}) = \frac{1}{\lambda}PSH(X, \omega)$ . On note  $\mathcal{F}_\lambda^\omega(\varphi) = E^\omega(\varphi) + \frac{1}{\lambda} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right]$ . Alors

$$\begin{aligned} E^{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) &= \frac{1}{(n+1)\tilde{V}} \sum_{j=0}^n \int_X \tilde{\varphi} \tilde{\omega}_\tilde{\varphi}^j \wedge \tilde{\omega}^{n-j} \\ &= \frac{1}{(n+1)\lambda^n V} \sum_{j=0}^n \int_X \lambda\varphi \lambda^j \omega_\varphi^j \wedge \lambda^{n-j} \omega^{n-j} \\ &= \lambda E^\omega(\varphi). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) &= E^{\tilde{\omega}}(\tilde{\varphi}) + \log \left[ \int_X e^{-\tilde{\varphi}} d\mu \right] \\ &= \lambda \left( E^\omega(\varphi) + \frac{1}{\lambda} \log \left[ \int_X e^{-\lambda\varphi} d\mu \right] \right) \\ &= \lambda \mathcal{F}_\lambda^\omega(\varphi). \end{aligned}$$

Ces deux fonctions ont les mêmes propriétés extrémales et comme  $\alpha_\mu(\lambda\omega) = \frac{1}{\lambda}\alpha_\mu(\omega)$ , on peut supposer que  $\lambda = 1$  et  $\alpha_\mu(\omega) > n/(n+1)$ .

On pose:

$$\mathcal{M}_\mu(\varphi) = E(\varphi) - \int_X \varphi MA(\varphi) - H_\mu(MA(\varphi)),$$

où

$$H_\mu(\nu) := \int_X \left( \frac{\nu}{\mu} \right) \log \left( \frac{\nu}{\mu} \right) d\mu,$$

est l'entropie relative de  $\nu$  par rapport à  $\mu$  qui est par convention égale  $+\infty$  quand  $\nu$  n'est pas absolument continue par rapport à  $\mu$ . Elle est non négative quand  $\nu \ll \mu$ . On montre que  $H_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu$  (voir [BBEGZ11]).

On pose aussi

$$H_{\mu_\varphi}(MA(\varphi)) = \begin{cases} H_\mu(MA(\varphi)) + \int_X \varphi MA(\varphi) \\ + \log \left( \int_X e^{-\varphi} d\mu \right), & \text{si } \int_X e^{-\varphi} d\mu < +\infty, \\ +\infty, & \text{si } \int_X e^{-\varphi} d\mu = +\infty, \end{cases}$$

et

$$\mu_\varphi := \frac{e^{-\varphi} \mu}{\int_X e^{-\varphi} d\mu}.$$

Maintenant, on va utiliser les résultats suivant pour la preuve du théorème 3.3.2

**Lemme 3.3.4.** *Pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ ,*

$$\mathcal{F}_1(\varphi) = \mathcal{M}_\mu(\varphi) + H_{\mu_\varphi}(MA(\varphi)) \geq \mathcal{M}_\mu(\varphi),$$

*avec égalité ( voir [BBEGZ11],) si et seulement si  $MA(\varphi) = \mu_\varphi$ .*

*Preuve:*

On suppose d'abord que  $\int_X e^{-\varphi} d\mu < +\infty$  donc  $\mu_\varphi(X) = 1$ . Alors

$$\begin{aligned}
H_{\mu_\varphi}(MA(\varphi)) &= \int_X \left( \frac{MA(\varphi)}{\mu_\varphi} \right) \log \left( \frac{MA(\varphi)}{\mu_\varphi} \right) d\mu_\varphi \\
&= \int_X \left( \frac{MA(\varphi)}{\mu_\varphi} \right) \log \left( \frac{MA(\varphi)}{\mu_\varphi} \right) d\mu_\varphi \\
&= \int_X \log \left( \frac{MA(\varphi)}{\mu_\varphi} \right) MA(\varphi) \\
&= \int_X \log \left( \frac{MA(\varphi)}{\int_X e^{-\varphi} d\mu} \right) MA(\varphi) \\
&= \int_X \log \left( \frac{MA(\varphi) e^\varphi \int_X e^{-\varphi} d\mu}{\mu} \right) MA(\varphi) \\
&= \int_X \log \left( \frac{MA(\varphi)}{\mu} \right) MA(\varphi) + \int_X \varphi MA(\varphi) \\
&\quad + \log \left[ \int_X e^{-\varphi} d\mu \right] \\
&= H_\mu(MA(\varphi)) + \int_X \varphi MA(\varphi) + \log \left[ \int_X e^{-\varphi} d\mu \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{M}_\mu(\varphi) + H_{\mu_\varphi}(MA(\varphi)) = E(\varphi) + \log \left[ \int_X e^{-\varphi} d\mu \right] = \mathcal{F}_1(\varphi).$$

Comme  $H_{\mu_\varphi}(MA(\varphi)) \geq 0$ , alors  $\mathcal{F}_1(\varphi) \geq \mathcal{M}_\mu(\varphi)$ .

Si  $\int_X e^{-\varphi} d\mu = +\infty$ , le résultat reste vrai.  $\square$

**Lemme 3.3.5.** Soit  $0 < \alpha < \alpha_\mu$ . Il existe  $C_\alpha > 0$  tel que

$$\mathcal{M}_\mu(\varphi) \leq [1 - (1 - \alpha)(n + 1)]E(\varphi) + C_\alpha,$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  tel que  $\sup_X \varphi = 0$ . De plus,

$$\mathcal{M}_\mu(\varphi) \leq \varepsilon E(\varphi) + C_\varepsilon \text{ avec } \varepsilon > 0,$$

si  $\alpha_\mu > n/(n + 1)$ .

*Preuve:*

On pose  $\psi = \varphi - \sup_X \varphi$ . On a alors  $\sup_X \psi = 0$  et  $\psi \leq 0$ . Comme  $0 < \alpha < \alpha_\mu$ , alors il existe  $C_\alpha > 0$  tel que  $\int_X e^{-\alpha\psi} d\mu \leq e^{C_\alpha}$ .

Puisque  $-\alpha\psi - \log\left(\frac{MA(\psi)}{\mu}\right) = -\alpha\psi + \varphi$ , donc

$$\int_X e^{-\alpha\psi - \log\left(\frac{MA(\psi)}{\mu}\right)} MA(\psi) = \int_X e^{-\alpha\psi + \varphi} e^{-\varphi} d\mu = \int_X e^{-\alpha\psi} d\mu.$$

Alors

$$\int_X e^{-\alpha\psi - \log\left(\frac{MA(\psi)}{\mu}\right)} MA(\psi) \leq e^{C_\alpha}.$$

Par concavité du logarithme, on a

$$\int_X \left[ -\alpha\psi - \log\left(\frac{MA(\psi)}{\mu}\right) \right] MA(\psi) \leq C_\alpha.$$

D'où

$$-C_\alpha - \alpha \int_X \psi MA(\psi) \leq \int_X \log\left(\frac{MA(\psi)}{\mu}\right) MA(\psi) = H_\mu(MA(\psi)).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\mu(\psi) &= E(\psi) - \int_X \psi MA(\psi) - H_\mu(MA(\psi)) \\ &\leq E(\psi) + C_\alpha + \alpha \int_X \psi MA(\psi) - H_\mu(MA(\psi)) \\ &= E(\psi) - (1 - \alpha) \int_X \psi MA(\psi) + C_\alpha. \end{aligned}$$

Puisque  $(n+1)E(\psi) \leq \int_X \psi MA(\psi)$ ,

$$\mathcal{M}_\mu(\psi) \leq [1 - (1 - \alpha)(n+1)]E(\psi) + C_\alpha.$$

□

### Remarque 3.3.6.

1. Si  $\alpha_\mu(\omega) > 0$ , alors il existe  $\alpha > 0$ ,  $\int_X e^{-\alpha\varphi} d\mu < C_\alpha$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{P}_0$ . Donc  $\int_X (-\alpha\varphi) d\mu \leq \int_X e^{-\alpha\varphi} d\mu < C_\alpha$ , ce qui implique  $\mathcal{E}^p(X, \omega) \subset L^p(MA(\psi))$ , pour tout  $p > 0$ .

2. Pour tout  $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ , la mesure de probabilité

$$\mu_\varphi := \frac{e^{-\varphi} \mu}{\int_X e^{-\varphi} d\mu},$$

vérifie  $\forall p > 0$ ,  $\mathcal{E}^p(X, \omega) \subset L^p(MA(\psi))$ .

**Lemme 3.3.7.** *Pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ , il existe  $\psi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  tel que*

$$\mathcal{F}_1(\psi) \geq \mathcal{F}_1(\varphi) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_\mu(\psi) \geq \mathcal{F}_1(\varphi).$$

*Preuve:*

1. Soit  $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$  tel que  $\int_X e^{-\varphi} d\mu = 1$ .

La mesure  $\nu = e^{-\varphi} \mu$  intègre les fonctions de  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  d'après la Remarque 3.3.6, il existe  $\psi_0 \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  tel que  $MA(\psi_0) = e^{-\varphi} \mu$ .

Si  $\int_X e^{-\psi_0} d\mu < +\infty$ , on pose  $\psi = \psi_0 - c$  tel que  $\int_X e^{-\psi} d\mu = 1$ . Alors  $\mu_\varphi = e^{-\varphi} \mu = MA(\psi)$  et  $\mu_\psi = e^{-\psi} \mu$  sont deux mesures de probabilités. On a aussi  $\mathcal{F}_1(\psi) = E(\psi)$  et  $\mathcal{F}_1(\varphi) = E(\varphi)$ .

D'après la propriété de cocycle de  $E$ , on a

$$\begin{aligned} E(\varphi) - E(\psi) &= \frac{1}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \int_X (\varphi - \psi) \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-j} \\ &\leq \int_X (\varphi - \psi) MA(\psi) = \int_X (\varphi - \psi) d\mu_\varphi \\ &= \int_X (\varphi - \psi) e^{\psi - \varphi} d\mu_\psi. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} H_{\mu_\psi}(\mu_\varphi) &= \int_X \frac{\mu_\varphi}{\mu_\psi} \log \left( \frac{\mu_\varphi}{\mu_\psi} \right) d\mu_\psi = \int_X \frac{e^{-\varphi}}{e^{-\psi}} \log \left( \frac{e^{-\varphi}}{e^{-\psi}} \right) d\mu_\psi \\ &= - \int_X (\varphi - \psi) e^{-(\varphi - \psi)} d\mu_\psi \end{aligned}$$

Alors  $E(\varphi) - E(\psi) = -H_{\mu_\psi}(\mu_\varphi) \leq 0$ . Donc  $\mathcal{F}_1(\psi) \geq \mathcal{F}_1(\varphi)$ . Maintenant on a

$$\mathcal{M}_\mu(\psi) = E(\psi) + \int_X (\varphi - \psi) MA(\psi) \geq E(\varphi) = \mathcal{F}_1(\varphi).$$

2. Il résulte de la première étape que  $\forall \varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ ,

$$\mathcal{F}_1(\varphi) \leq \sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{M}_\mu = M < +\infty,$$

d'après le Lemme 3.3.5.

Soit  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  et  $\varphi_j := \max(\varphi, -j) \searrow \varphi$ . Alors

$$\mathcal{F}_1(\varphi) = \lim \mathcal{F}_1(\varphi_j) \leq M < +\infty.$$

En particulier,  $\forall \varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ ,  $\int_X e^{-\varphi} d\mu < +\infty$  et on est ramené au cas précédent.  $\square$

*Preuve du Théorème 3.3.2:*

On considère que  $\lambda = 1$ . Alors

$$\mathcal{F}_1(\varphi) = E(\varphi) + \log \left[ \int_X e^{-\varphi} d\mu \right].$$

Comme  $\alpha_\mu(\omega) > n/(n+1)$ , il vient du Lemme 3.3.5 que  $\mathcal{M}_\mu(\varphi)$  est propre. De plus il existe  $C > 0$  assez grand tel que

$$\sup_{\mathcal{E}(X, \omega)} \mathcal{M}_\mu = \sup_{\mathcal{E}_C^1(X, \omega)} \mathcal{M}_\mu.$$

Or on a du Lemme 3.3.4, pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ ,

$$\mathcal{F}_1(\varphi) \geq \mathcal{M}_\mu(\varphi)$$

et du Lemme 3.3.7 que pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ , il existe un  $\psi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  tel que

$$\mathcal{F}_1(\varphi) \leq \mathcal{M}_\mu(\psi) \leq \sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{M}_\mu.$$

Donc

$$\sup_{\mathcal{E}_C^1(X, \omega)} \mathcal{M}_\mu = \sup_{\mathcal{E}_C^1(X, \omega)} \mathcal{F}_1 = \sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_1.$$

Comme  $\sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{M}_\mu < +\infty$  d'après le Lemme 3.3.5, on en déduit que  $\sup_{\mathcal{E}^1(X, \omega)} \mathcal{F}_1 < +\infty$  et donc  $\forall \varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ ,  $\int_X e^{-\varphi} d\mu < +\infty$ .

Ainsi comme (d'après le Lemme 3.3.9 ci-dessous)  $\mathcal{F}_1$  est semi-continue supérieurement, il existe  $\varphi \in \mathcal{E}_C^1(X, \omega) \subset \mathcal{E}^1(X, \omega)$  qui réalise le maximum de  $\mathcal{F}_1$  et d'après les résultats précédents ce point qui réalise le maximum est un point critique et cela termine la preuve.  $\square$

**Corollaire 3.3.8.** *Pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ , on a*

$$\int_X e^{-\varphi} d\mu < +\infty.$$

**Lemme 3.3.9.** *La fonction*

$$L : \mathcal{E}^1(X, \omega) \ni \varphi \mapsto \log \left( \int_X e^{-\varphi} d\mu \right) \in \mathbb{R}$$

*est continue pour la topologie  $L^1(X)$ .*

*Preuve:*([BBEGZ11])

### 3.3.2 Solutions Dans $\mathcal{E}(X, \omega)$

**Théorème 3.3.10.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $X$ . Il existe  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  tel que  $\mu = MA(\varphi)$  si et seulement si  $\mu$  ne charge pas les ensembles pluripolaires.*

*De plus, cette solution est unique à l'addition d'une constante près.*

D'après la définition de  $\mathcal{E}(X, \omega)$ , les mesures de Monge-Ampère  $MA(\varphi)$  ne charge pas les ensembles pluripolaires pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$ . Donc l'important contenu de ce théorème est que, réciproquement, toute mesure pluripolaire est la mesure de Monge-Ampère d'une fonction (qui est unique à l'addition d'une constante près) dans  $\mathcal{E}(X, \omega)$ .

On donne ici la preuve de l'existence de solution et la partie de l'unicité sera traitée dans la section unicité en fin du chapitre.

*Preuve:*

On suppose que  $\mu$  ne charge pas les ensembles pluripolaires. Par projection sur le compact convexe défini précédemment, il existe  $0 \geq u \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  et  $0 \leq f \in L^1(MA(u))$  tels que  $\mu = fMA(u)$ . On pose  $v = e^u$  qui est bornée car  $u \leq 0$ . On a aussi,

$$\begin{aligned} \omega + dd^c e^u &= \omega + e^u dd^c u + e^u du \wedge d^c u \\ &= \omega + e^u \omega_u - e^u \omega + e^u du \wedge d^c u \\ &= \omega(1 - e^u) + e^u \omega_u + e^u du \wedge d^c u \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc  $v$  est  $\omega$ -psh bornée. Ainsi,

$$\begin{aligned} MA(v) &= \omega_v^n = \frac{1}{V}(\omega(1 - e^u) + e^u\omega_u + e^u du \wedge d^c u)^n \\ &\geq \frac{1}{V}(\omega(1 - e^u) + e^u\omega_u)^n \\ &\geq \frac{1}{V}(e^u\omega_u)^n = e^{nu}MA(u). \end{aligned}$$

On a alors  $MA(u)$  qui est absolument continue par rapport à  $MA(v)$ . D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe  $g \in L^1(MA(v))$  telle que  $MA(u) = gMA(v)$ .

Or  $\mu = fMA(u)$ , avec  $u \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  et  $0 \leq f \in L^1(MA(u))$ , donc  $\mu = hMA(u)$  et  $h = fg \in L^1(MA(v))$ . On peut donc remplacer  $u$  par  $v$  et supposer que  $u$  est bornée dans la suite.

On pose  $\mu_j := c_j \min(f, j)MA(u)$  où  $c_j \searrow 1$  est tel que  $\mu_j(X) = \mu(X) = 1$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $1 \leq c_j \leq 2$ . Donc  $\mu_j \leq 2jMA(u) \leq 2jCap_\omega$ . D'après les résultats précédents, il existe  $\varphi_j \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  normalisée par  $\sup_X \varphi_j = 0$  telle que  $\mu_j = MA(\varphi_j)$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\varphi_j \rightarrow \varphi \in L^1(X)$  pour une fonction  $\omega$ -psh  $\varphi$  normalisée par  $\sup_X \varphi = 0$ .

Soit  $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction convexe, croissante avec  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(z)}{z} = +\infty$  telle que  $\gamma \circ f \in L^1(MA(u))$  ( voir [RR02] pour la construction de  $\gamma$ ). Soit  $\gamma^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  la transformé de Legendre de  $\gamma$ , définie par  $\gamma^*(z) = \sup\{zy - \gamma(z) \mid y \in \mathbb{R}^+\}$ .

On veut montrer que  $\varphi \in \mathcal{E}_\chi$  et que  $\mu = MA(\varphi)$ , où  $\chi \in \mathcal{W}_+$  est définie par  $\chi(t) := -(\gamma^*)^{-1}(-t)$ . On a  $\chi(-\infty) = -\infty$  et  $\chi(0) = 0$ , on suppose que  $\gamma(0) = 0$ . Pour tout  $y, z \in \mathbb{R}^+$ ,  $zy \leq \gamma^*(z) + \gamma(y)$ . Donc

$$-t = \gamma^*(-\chi(t)) \geq -\chi(t)y - \gamma(y).$$

Comme  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in X$ , alors on a

$$(-\chi)(-t) \cdot f(x) \leq -t + \gamma \circ f(x), \text{ pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}^- \times X. \quad (3.3.1)$$

Pour  $t = \varphi_j$  dans (3.3.1), on

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_X (-\chi) \circ \varphi_j MA(\varphi_j) \leq 2 \int_X (-\chi) \circ \varphi_j f MA(u) \\ &\leq 2 \int_X (-\varphi_j) MA(u) + 2 \int_X \gamma \circ f MA(u). \end{aligned}$$

Comme  $u$  et  $\int_X (-\varphi_j) \omega^n$  sont bornées, de l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg on déduit que  $\int_X (-\varphi_j) MA(u)$  est uniformément bornée supérieurement. Donc  $\int_X (-\chi) \circ \varphi_j MA(\varphi_j)$  est bornée.

On pose  $\phi_j := (\sup_{l \geq j} \varphi_l)^* \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  et décroît vers  $\varphi$ . On a

$$MA(\phi_j) \geq \min_{l \geq j} MA(\varphi_l) \geq \min(f, j) MA(u).$$

On a  $\varphi_j \leq \phi_j \leq 0$ , donc

$$0 \geq E_\chi(\phi_j) \geq E_\chi(\varphi) \geq \int_X \chi \circ \varphi_j MA(\varphi_j) \geq -C.$$

Donc  $\varphi \in \mathcal{E}_\chi(X, \omega) \subset \mathcal{E}(X, \omega)$  et on a

$$MA(\varphi) = \lim_{j \rightarrow +\infty} MA(\phi_j) \geq \lim_{j \rightarrow +\infty} \min(f, j) = \mu.$$

Comme ce sont deux mesures de probabilités, alors elles sont égales.  $\square$

### 3.3.3 Solutions dans $\mathcal{E}^p(X, \omega)$

**Définition 3.3.11.** Soit  $p > 0$ , fixé. On note par  $\mathcal{E}^p(X, \omega)$  la classe  $\mathcal{E}_\chi(X, \omega)$  pour un pods  $\chi : t \mapsto -(-t)^p$  dans  $\mathcal{W}$ .

On note

$$E_p(\varphi) := \frac{1}{(n+1)V} \sum_{j=0}^n \int_X (-\varphi)^p \omega_\varphi^j \wedge \omega^{n-1}$$

l'énergie correspondant  $E_\chi$ .

**Théorème 3.3.12.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité. Alors il existe  $\varphi \in \mathcal{E}^p(X, \omega)$  tel que  $\mu = MA(\varphi)$  si et seulement si  $\mathcal{E}^p(X, \omega) \subset L^p(\mu)$ .

On a besoin des résultats suivants pour la preuve du théorème.

**Lemme 3.3.13.** Soient  $0 \geq \varphi, \psi \in \mathcal{E}^p(X, \omega)$ . Alors

$$2^p(n+1) [|E_p(\varphi)| + |E_p(\psi)|] \geq \int_X (-\varphi)^p MA(\psi) \geq 0.$$

En particulier,  $\mathcal{E}^p(X, \omega) \subset L^p(MA(\mathcal{E}^p(X, \omega)))$ .

*Preuve:*

On sait que

$$(n+1)|E_p(\varphi)| \geq \int_X (-\varphi)^p MA(\varphi).$$

Donc il suffit de montrer que

$$\int_X (-\psi)^p MA(\psi) \leq 2^p \left[ \int_X (-\varphi)^p MA(\varphi) + \int_X (-\psi)^p MA(\psi) \right].$$

On a

$$\int_X (-\varphi)^p MA(\psi) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} MA(\psi) \{\varphi < -t\} dt$$

En faisant le changement de variable  $t = 2s$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_X (-\varphi)^p MA(\psi) &= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} MA(\psi) \{\varphi < -t\} dt \\ &= 2^p p \int_0^{+\infty} s^{p-1} MA(\psi) \{\varphi < -2s\} ds. \end{aligned}$$

Or  $\{\varphi < -2s\} \subset \{\varphi < \psi - s\} \cup \{\psi < -s\}$ , donc

$$\begin{aligned} \int_X (-\varphi)^p MA(\psi) &\leq 2^p p \int_0^{+\infty} s^{p-1} MA(\psi) \{\varphi < \psi - s\} ds \\ &\quad + 2^p p \int_0^{+\infty} s^{p-1} MA(\psi) \{\psi < -s\} ds \\ &= 2^p p \int_0^{+\infty} s^{p-1} MA(\psi) \{\varphi < \psi - s\} ds + 2^p \int_X (-\psi)^p MA(\psi). \end{aligned}$$

Par le principe de comparaison,  $MA(\psi) \{\varphi < \psi - t\} \leq MA(\varphi) \{\varphi < \psi - t\}$ . Comme  $\{\varphi < \psi - t\} \subset \{\varphi < -t\}$ , on a

$$\int_X (-\psi)^p MA(\psi) \leq 2^p \left[ \int_X (-\varphi)^p MA(\varphi) + \int_X (-\psi)^p MA(\psi) \right]. \quad \square$$

**Lemme 3.3.14.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité telle que  $\mathcal{E}^p(X, \omega) \subset L^p(\mu)$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}^p(X, \omega)$  normalisé par  $\sup_X \varphi = -1$ , on a

$$\int_X |\varphi|^p d\mu \leq C |E_p(\varphi)|^{\frac{p}{p+1}}.$$

*Preuve:*

Comme  $\sup_X \varphi = -1$ , alors on a  $E(\varphi) \leq -1$ . Donc  $0 < |E(\varphi)|^{\frac{1}{p+1}} \leq 1$ .

Par suite  $\psi = |E(\varphi)|^{-\frac{1}{p+1}} \varphi \in \mathcal{E}^p(X, \omega) \subset L^p(\mu)$ . Ainsi il existe  $C > 0$  tel que

$$\int_X |\psi|^p d\mu \leq C.$$

D'où

$$\int_X |\varphi|^p d\mu \leq C |E(\varphi)|^{\frac{p}{p+1}}.$$

□

*Preuve du Théorème 3.3.12:*

Si on suppose que  $\mu = MA(\varphi)$  pour un  $\varphi \in \mathcal{E}^p(X, \omega)$ , le Lemme 3.3.13 montre que  $\mathcal{E}^p(X, \omega) \subset L^p(\mu)$ .

Pour la réciproque, on rappelle que  $\mathcal{E}^p(X, \omega)$  caractérise les ensembles pluripolaires. Donc  $\mu$  ne charge pas les ensembles pluripolaires. D'après le Théorème 3.3.10 il existe  $\varphi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  tel que  $\sup_X \varphi = -1$  et  $MA(\varphi) = \mu$ . On pose  $\varphi_j := \max(\varphi, -j)$ . Quand  $0 < p \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} 0 \leq |E_p(\varphi_j)| &\leq \int_X (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j) \\ &= \int_{\{\varphi > -j\}} (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j) + \int_{\{\varphi \leq -j\}} (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j) \end{aligned}$$

Par le principe du maximum,

$$\int_{\{\varphi > -j\}} (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j) = \int_{\{\varphi > -j\}} (-\varphi_j)^p MA(\varphi).$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
\int_{\{\varphi \leq -j\}} (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j) &= \int_{\{\varphi \leq -j\}} j^p MA(\varphi_j) \\
&= j^p \int_{\{\varphi \leq -j\}} MA(\varphi_j) \\
&= j^p \left( 1 - \int_{\{\varphi > -j\}} MA(\varphi_j) \right) \\
&= j^p \int_{\{\varphi \leq -j\}} MA(\varphi_j) \\
&= j^p \left( 1 - \int_{\{\varphi > -j\}} MA(\varphi) \right) \\
&= j^p \int_{\{\varphi \leq -j\}} MA(\varphi) \\
&= \int_{\{\varphi \leq -j\}} (-\varphi_j)^p MA(\varphi).
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_X (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j) = \int_X (-\varphi_j)^p MA(\varphi).$$

Ainsi,

$$0 \leq |E_p(\varphi_j)| \leq \int_X (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j) = \int_X (-\varphi_j)^p d\mu \leq C |E_p(\varphi_j)|^{\frac{p}{p+1}},$$

Où la dernière inégalité vient du Lemme 3.3.14 ci-dessus, montrant que  $E_p(\varphi_j)$  est borné, donc  $\varphi \in \mathcal{E}^p(X, \omega)$ .

Si  $p > 1$ , il existe  $C_p > 0$ , ( voir dans ([GZ07], Proposition 2.10 ) tel que

$$0 \leq |E_p(\varphi_j)| \leq C_p \int_X (-\varphi_j)^p MA(\varphi_j),$$

donc  $\varphi \in \mathcal{E}^p(X, \omega)$ . □

### 3.4 Unicité

On a déjà montré que dans le cas  $\lambda < 0$  que l'unicité des solutions de  $(MA)_\lambda$  est une conséquence du principe de domination. On va étudier dans cette partie l'unicité des solutions  $(MA)_0$ .

### 3.4.1 La Méthode de Calabi

On commence en expliquant une preuve de Calabi qui montre l'unicité des solutions  $\varphi$  de  $(MA)_0$  lorsqu'on suppose de plus que  $\omega_\psi$  est une forme kählérienne.

Soient  $\psi, \varphi$  deux solutions de  $(MA)_0$  telles que  $\omega_\varphi := \omega + dd^c\varphi$  et  $\omega_\psi := \omega + dd^c\psi$  soient des formes kählériennes. Alors on a

$$\begin{aligned} 0 = \omega_\varphi^n - \omega_\psi^n &= (\omega_\varphi - \omega_\psi) \wedge \left( \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j} \right) \\ &= (dd^c\varphi - dd^c\psi) \wedge \left( \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j} \right) \\ &= dd^c(\varphi - \psi) \wedge \left( \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j} \right) \end{aligned}$$

Donc  $dd^c(\varphi - \psi) \wedge S = 0$ , avec  $S := \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j}$  une  $(n-1, n-1)$ -forme positive fermée. En multipliant par  $\psi - \varphi$  on a toujours  $(\psi - \varphi)dd^c(\varphi - \psi) \wedge \left( \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j} \right) = 0$  et une intégration par parties donne:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X (\psi - \varphi) dd^c(\varphi - \psi) \wedge \left( \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j} \right) \\ &= \int_X d(\varphi - \psi) d^c(\varphi - \psi) \wedge \left( \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j} \right), \end{aligned}$$

or  $\omega_\psi^{n-1} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j}$  donc

$$\int_X d(\varphi - \psi) d^c(\varphi - \psi) \wedge \omega_\psi^{n-1} \leq \int_X d(\varphi - \psi) d^c(\varphi - \psi) \wedge \left( \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j} \right) = 0.$$

En posant  $f = \varphi - \psi$  et en passant aux coordonnées locales, on a pour  $z = (z_1, \dots, z_n)$  et  $w = (idz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \dots \wedge (idz_n \wedge d\bar{z}_n)$  la forme volume canonique,

$$p.p, 0 = |\nabla_\omega f|^2 = n \frac{df \wedge d^c f \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n} = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right|^2,$$

$f$  est constant p.p. par la théorie des espaces de Sobolev ( voir [Zie89] ). Par les inégalités de la moyenne  $f$  est constante partout, i.e.,  $\varphi - \psi$  est constante partout.  $\square$

### 3.4.2 Unicité dans $\mathcal{E}^1(X, \omega)$

Généralisation de la méthode de Calabi.

**Théorème 3.4.1.** *Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$  telles que  $(\omega + dd^c\varphi)^n \equiv (\omega + dd^c\psi)^n$ . Alors  $\varphi - \psi$  est constante.*

*Preuve:*

Posons  $f = \frac{\varphi - \psi}{2}$  et  $h = \frac{\varphi + \psi}{2}$ . Comme  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  est convexe alors  $h \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ . On suppose  $\varphi, \psi \leq -C_\omega$ , où  $C_\omega$  est choisi de sorte que  $\int_X (-h)\omega_h^n \geq 1$ . On veut montrer que  $\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega^{n-1} = 0$ . Pour cela, on montre en premier lieu que pour  $T = \omega_h^l \wedge \omega^{n-2-l}$  un courant positif fermé de bidimension  $(2, 2)$ ,  $l = 0, \dots, n-2$  et  $\varphi, \psi$  bornées,

$$\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega \wedge T \leq 3 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X (-h)\omega_h^2 \wedge T \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\dagger)$$

On sait que

$$df \wedge d^c f \wedge \omega = df \wedge d^c f \wedge \omega_h - df \wedge d^c f \wedge dd^c h$$

donc en intégrant contre  $T$  on a

$$\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega \wedge T = \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T - \int_X df \wedge d^c f \wedge dd^c h \wedge T$$

En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned} \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega \wedge T &= \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T + \int_X df \wedge d^c h \wedge dd^c f \wedge T \\ &= \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T + \int_X df \wedge d^c h \wedge \frac{\omega_\varphi - \omega_\psi}{2} \wedge T, \end{aligned}$$

puisque  $dd^c f = \frac{\omega_\varphi - \omega_\psi}{2}$ .

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \int_X df \wedge d^c h \wedge \omega_\varphi \wedge T \right| \leq \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_\varphi \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_\varphi \wedge T \right)^{\frac{1}{2}},$$

or  $2\omega_h = 2\omega + dd^c\varphi + dd^c\psi = \omega_\varphi + \omega_\psi \geq \omega_\varphi$  donc

$$\begin{aligned} \left| \int_X df \wedge d^c h \wedge \omega_\varphi \wedge T \right| &\leq \left( 2 \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( 2 \int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De même

$$\left| \int_X df \wedge d^c h \wedge \omega_\psi \wedge T \right| \leq 2 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une intégration par parties donne aussi,

$$\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T = \int_X (-f) dd^c f \wedge \omega_h \wedge T,$$

or

$$\begin{aligned} h\omega_h - f dd^c f &= \frac{1}{4}((\varphi + \psi)(\omega_\varphi + \omega_\psi) + (\psi - \varphi)(\omega_\varphi - \omega_\psi)) \\ &= \frac{1}{4}(2\varphi\omega_\psi + 2\psi\omega_\varphi) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \leq \int_X (-h)\omega_h^2 \wedge T$$

On a aussi

$$\int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h \wedge T = \int_X (-h) dd^c h \wedge \omega_h \wedge T \leq \int_X (-h)\omega_h^2 \wedge T.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega \wedge T &\leq \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left[ \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left( \int_X dh \wedge d^c h \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left[ \left( \int_X (-h)\omega_h^2 \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left( \int_X (-h)\omega_h^2 \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= 3 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X (-h)\omega_h^2 \wedge T \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

qui est l'inégalité (†).

On va déduire de la relation (†), la relation (††) suivante:

$$\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega^{n-1} \leq 9 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^{n-1} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^2 \quad (\dagger\dagger)$$

Comme  $T = \omega_h^l \wedge \omega^{n-2-l}$ ,  $l = 0, \dots, n-2$  alors (†) donne

$$\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega \wedge \omega_h^l \wedge \omega^{n-2-l} \leq 3 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^{l+1} \wedge \omega^{n-2-l} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^{\frac{1}{2}},$$

puisque pour  $l = 0, \dots, n-2$ ,  $\int_X (-h) \omega_h^{2+l} \wedge \omega^{n-2-l} \leq \int_X (-h) \omega_h^n$ .

$$\begin{aligned} \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega^{n-1} &\leq 3 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h \wedge \omega^{n-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 3 \left[ 3 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^2 \wedge \omega^{n-3} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{1+\frac{1}{2^2}} \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^2 \wedge \omega^{n-3} \right)^{\frac{1}{2^2}} \times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^{1+\frac{1}{2^2}}. \end{aligned}$$

En appliquant ce procédé  $n-1$  fois, on obtient,

$$\begin{aligned} \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega^{n-1} &\leq 3^{1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}} \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^{n-1} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &\times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &\leq 9 \left( \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^{n-1} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \times \left( \int_X (-h) \omega_h^n \right)^2. \end{aligned}$$

D'où la relation (††).

Ainsi, pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ , on utilise les suites bornées,  $\varphi_j = \max(\varphi, -j)$  et  $\psi_j = \max(\psi, -j)$  qui décroissent respectivement vers  $\varphi$  et  $\psi$ . Par propriété de continuité,  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient (††).

Comme  $f = \frac{\varphi - \psi}{2}$ , alors on a

$$dd^c f \wedge S = \frac{dd^c(\varphi - \psi)}{2} \wedge S = 0,$$

où

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j}$$

est un courant positif fermé de bidegré  $(n-1, n-1)$ . Donc

$$0 = \int_X (-f) dd^c f \wedge S = \int_X df \wedge d^c f \wedge S.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^{n-1} &= \int_X df \wedge d^c f \wedge \left( \frac{\omega_\varphi - \omega_\psi}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \int_X df \wedge d^c f \wedge \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \omega_\varphi^j \wedge \omega_\psi^{n-1-j}. \end{aligned}$$

Donc  $\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega_h^{n-1} = 0$  et par suite  $\int_X df \wedge d^c f \wedge \omega^{n-1} = 0$ .

$$|\nabla_\omega f|^2 = n \frac{df \wedge d^c f \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n} = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right|^2 = 0 \text{ p.p.,}$$

donc  $f$  est constant p.p., i.e.,  $\varphi - \psi$  est constante partout. Ce qui achève la preuve.  $\square$

### 3.4.3 Unicité dans $\mathcal{E}(X, \omega)$

Dans cette partie, on va montrer que les solutions de  $(MA)_0$  sont uniques (à l'addition d'une constante près):

**Théorème 3.4.2.** *Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(X, \omega)$  tels que  $(\omega + dd^c \varphi)^n \equiv (\omega + dd^c \psi)^n$ . Alors  $\varphi - \psi$  est une constante.*

*Preuve:*

On pose  $T_1 = \omega + dd^c \varphi$ ,  $T_2 = \omega + dd^c \psi$  et

$$\mu := T_1^n = T_2^n.$$

D'après la proposition 3.4.3 ci-dessous, on remarque que

$$T_1^k \wedge T_2^{n-k} \geq \mu,$$

donc

$$T_1^k \wedge T_2^{n-k} = \mu$$

pour  $k = 0, \dots, n$  puisque ces deux mesures ont même masse totale 1. Puisque  $\mu$  ne charge pas les ensembles pluripolaires, on considère l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\mu\{\varphi = \psi + t\} > 0$  qui coïncide avec le lieu des points de discontinuité de la fonction croissante

$$f : t \mapsto \mu\{\varphi < \psi + t\},$$

en effet,  
on a

$$\bigcup_{t < s} \{\varphi < \psi + t\} = \{\varphi < \psi + s\} \text{ et } \bigcap_{t > s} \{\varphi < \psi + t\} = \{\varphi \leq \psi + s\}.$$

Donc

$$f(s^-) = \lim_{t \rightarrow s^-} f(t) = \mu\{\varphi < \psi + s\} \text{ et } f(s^+) = \lim_{t \rightarrow s^+} f(t) = \mu\{\varphi \leq \psi + s\}$$

qui est discontinue aux points  $t$  tels que  $\mu\{\varphi = \psi + t\} > 0$ .

La fonction  $f$  est croissante, donc l'ensemble des ses points de discontinuité est dénombrable.

On va montrer par absurde qu'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi = \psi + t$   $\mu$ -presque partout.

Donc il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$0 < \mu\{\varphi < \psi + t\} < 1.$$

Par convergence monotone, on peut dire d'après de petite perturbation sur  $t$  que

$$\mu\{\varphi = \psi + t\} = 0.$$

En remplaçant  $\psi$  par  $\psi + t$ , on peut supposer que  $t = 0$ , donc  $\mu\{\varphi < \psi\}, \mu\{\varphi > \psi\} < 1$  tant que  $\mu\{\varphi = \psi\} = 0$ . On peut alors choisir  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que  $(1 + \varepsilon)^n \mu\{\varphi < \psi\}, (1 + \varepsilon)^n \mu\{\varphi > \psi\} < 1$ .

On fixe  $\eta > 0$  tel que la mesure non-pluripolaire

$$1_{\{\varphi < \psi\}}(1 + \varepsilon)^n \mu + 1_{\{\varphi > \psi\}} \eta \mu$$

est de masse totale 1. D'après le Théorème 3.3.10, il existe  $0 \geq u \in \mathcal{E}(X, \omega)$  tel que  $T = \omega + dd^c u$  satisfait

$$T^n = 1_{\{\varphi < \psi\}}(1 + \varepsilon)^n \mu + 1_{\{\varphi > \psi\}} \eta \mu.$$

De la proposition 3.4.3, on en déduit que

$$T \wedge T_1^{n-1} \geq (1 + \varepsilon)\mu$$

sur  $\{\varphi < \psi\}$ . On considère

$$O_\delta := \{(1 - \delta)\varphi < (1 - \delta)\psi + \delta u\} \subset \{\varphi < \psi\}.$$

Par le principe de comparaison, on a

$$\int_{O_\delta} ((1 - \delta)T_2 + \delta T) \wedge T_1^{n-1} \leq \int_{O_\delta} ((1 - \delta)T_1 + \delta\omega) \wedge T_1^{n-1}.$$

Comme

$$T_1^n = T_2 \wedge T_1^{n-1} = \mu,$$

on a

$$(1 + \varepsilon) \int_{O_\delta} \mu \leq \int_{O_\delta} T \wedge T_1^{n-1} \leq \int_{O_\delta} \omega \wedge T_1^{n-1}.$$

Quand  $\delta$  tend vers 0,  $O_\delta$  qui croît vers  $\{\varphi < \psi\}$ , donc par convergence monotone, on a

$$(1 + \varepsilon) \int_{\{\varphi < \psi\}} \mu \leq \int_{\{\varphi < \psi\}} \omega \wedge T_1^{n-1}.$$

Si on intervertit les rôles de  $\varphi$  et  $\psi$ , on obtient par le même raisonnement

$$(1 + \varepsilon) \int_{\{\varphi > \psi\}} \mu \leq \int_{\{\varphi > \psi\}} \omega \wedge T_1^{n-1}.$$

Puisque  $\mu\{\varphi = \psi\} = 0$ , on obtient en sommant les deux inégalités que

$$1 + \varepsilon \leq \int_X \omega \wedge T_1^{n-1} \leq 1,$$

qui est en contradiction.

On a alors montré que  $\varphi = \psi$   $MA(\varphi) = MA(\psi)$ -presque partout. Donc par le principe de domination et par symétrie on a  $\varphi = \psi$ .  $\square$

**Proposition 3.4.3.** Soient  $\mu$  une mesure non-pluripolaire et  $0 \leq f_1 \cdots f_n \in L^1(\mu)$ . On suppose que les  $\varphi_i \in \mathcal{E}(X, \omega)$  sont telles que

$$T_i^n = (\omega + dd^c \varphi_i)^n \geq f_i \mu$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Alors

$$T_1 \wedge \cdots \wedge T_n \geq (f_1 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} \mu. \quad (\text{A})$$

*Preuve:*

On peut écrire  $\mu = g(\omega + dd^c u)^n$  avec  $u$   $\omega$ -psh et borné et  $0 \leq g \in L^1(\omega_u^n)$ . En remplaçant  $f_i$  par  $f_i g$ , on peut supposer que  $\mu = (\omega + dd^c u)^n$ , avec  $u$   $\omega$ -psh borné.

On suppose en premier que toutes les données sont bornées donc on a d'après le Lemme 3.4.5

$$T_1 \wedge \cdots \wedge T_n \geq (f_1 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} \mu.$$

On se ramène au cas où les  $f_i$  sont bornées, en posant  $f_i^k = \min(f_i, k)$  qui sont bornées, croissantes et convergent vers  $f_i$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . D'après le Lemme 3.4.5, on a

$$T_1 \wedge \cdots \wedge T_n \geq (f_1^k \cdots f_n^k)^{\frac{1}{n}} \mu.$$

Par convergence monotone, on a

$$T_1 \wedge \cdots \wedge T_n \geq (f_1 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} \mu.$$

On se ramène maintenant au cas où les  $\varphi_j$  sont bornées. Ici, on utilise les approximations  $\varphi_i^{(k)} = \max(\varphi_i, -k)$  qui sont bornées et décroissent vers  $\varphi_i$ . Par le principe du maximum, on a

$$MA(\varphi_i^{(k)}) \geq 1_{\{\varphi_i > -k\}} MA(\varphi_i^{(k)}) = 1_{\{\varphi_i > -k\}} MA(\varphi_i).$$

Comme le cas borné,

$$(\omega + dd^c \varphi_1^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (\omega + dd^c \varphi_n^{(k)}) \geq (f_1 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} \mu,$$

le résultat s'en résulte quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

On s'est donc ramené au cas où  $\mu = (\omega + dd^c u^n$  avec  $u, \varphi_i$   $\omega$ -psh bornées.

□

**Lemme 3.4.4.** ([DL15]) Soient  $(u_j)$  et  $(\varphi_j)$  deux suites de fonctions  $\omega$ -psh bornées sur  $X$ . On suppose que  $u_j$  converge en capacité vers  $u \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$  et  $\varphi_j$  converge dans  $L^1(X)$  vers  $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ . Si il existe  $A > 0$  tel que

$$MA(\varphi_j) \leq A \times MA(u_j), \forall j,$$

Alors  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  en  $Cap_\omega$ . En particulier,  $MA(\varphi_j)$  converge faiblement vers  $MA(\varphi)$ .

**Lemme 3.4.5.** Soient  $u, v_i, \varphi_i$  des fonctions  $\omega$ -psh bornées et  $0 \leq f_i, g_i$  des fonctions densités bornées telles que

$$(\omega + dd^c \varphi_i)^n = f_i(\omega + dd^c u)^n + g_i(\omega + dd^c v_i)^n$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Alors

$$(\omega + dd^c \varphi_1) \wedge \cdots \wedge (\omega + dd^c \varphi_n) \geq (f_1 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} (\omega + dd^c u)^n.$$

*Preuve:*

Quand toutes les données sont lisses, alors le résultat est donné par le Théorème 5 de [LG59].

On suppose alors que  $u$  et les  $v_i$  sont lisses. On considère dans  $L^1$  les suites de densités lisses et uniformément bornées  $f_i^\varepsilon$  et  $g_i^\varepsilon$  qui sont des approximations de  $f_i$  et  $g_i$  respectivement et qui sont normalisées de sorte qu'il existe une unique fonction lisse  $\varphi_i^\varepsilon$  ( Théorème de Yau ) solution de l'équation

$$(\omega + dd^c \varphi_i^\varepsilon)^n = f_i^\varepsilon (\omega + dd^c u)^n + g_i^\varepsilon (\omega + dd^c v_i)^n.$$

Comme dans le cas lisse,

$$(\omega + dd^c \varphi_1^\varepsilon) \wedge \cdots \wedge (\omega + dd^c \varphi_n^\varepsilon) \geq (f_1^\varepsilon \cdots f_n^\varepsilon)^{\frac{1}{n}} (\omega + dd^c u)^n.$$

D'après les propriétés de stabilité, on a  $\varphi_i^\varepsilon$  qui converge en capacité vers  $\varphi_i$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donc on a l'inégalité.

On suppose maintenant que  $\omega$  est kählérienne, que les densités  $f_i, g_i \geq \delta > 0$  sont quasi-continues et bornées en zéro et en infini et que  $u, v_i$  ne

sont plus lisses. On approxime  $u, v_j$  par les suites décroissantes de fonctions  $\omega$ -psh lisses  $u^\varepsilon, v_i^\varepsilon$  et l'on résout l'équation avec  $\varphi_i^\varepsilon$

$$(\omega + dd^c \varphi_i^\varepsilon)^n = e^{\varphi_i^\varepsilon - \varphi_i} [f_i(\omega + dd^c u^\varepsilon)^n + g_i(\omega + dd^c v_i^\varepsilon)^n]. \quad (C)$$

On a  $u^\varepsilon + C \leq M + C$  où  $C$  est une constante positive tel qu'on a

$$\begin{aligned} e^{u^\varepsilon + C - \varphi_i} [f_i(\omega + dd^c u^\varepsilon)^n + g_i(\omega + dd^c v_i^\varepsilon)^n] &\geq e^{u^\varepsilon + C - \varphi_i} f_i(\omega + dd^c u^\varepsilon)^n \\ &\geq (\omega + dd^c u^\varepsilon)^n, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$e^{u^\varepsilon + C - \varphi_i} f_i \geq 1.$$

Dans ce cas,  $u^\varepsilon + C$  est sur-solution de l'équation (C) et par le principe de comparaison on a  $\varphi_i^\varepsilon \leq u^\varepsilon + C \leq M + C$ .

Si on prend  $M' - C' \leq \psi = \frac{u^\varepsilon + v_i^\varepsilon}{2} - C'$  où  $C' > 0$  est tel que

$$\begin{aligned} e^{\psi - C' - \varphi_i} [f_i(\omega + dd^c u^\varepsilon)^n + g_i(\omega + dd^c v_i^\varepsilon)^n] &\leq \frac{1}{2^n} A e^{\psi - C' - \varphi_i} (\omega_{u^\varepsilon} + \omega_{v_i^\varepsilon})^n \\ &\leq (\omega_{u^\varepsilon} + \omega_{v_i^\varepsilon})^n, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2^n} A e^{\psi - C' - \varphi_i} \leq 1.$$

Donc, du principe de comparaison on a,

$$\psi = \frac{u^\varepsilon + v_i^\varepsilon}{2} - C' \leq \varphi_i^\varepsilon.$$

Alors  $\varphi_i^\varepsilon$  est uniformément bornée et converge en uniformément vers  $\varphi_i$ . Comme  $f_i, g_i$  sont bornées, on peut trouver une constante  $A > 0$  telle que

$$(\omega + dd^c \varphi_i^\varepsilon)^n \leq A(\omega + dd^c(u^\varepsilon + v_i^\varepsilon)/2)^n.$$

$(u^\varepsilon + v_i^\varepsilon)/2$  converge en capacité vers  $(u + v_i)/2$  qui est  $\omega$ -psh bornée. D'après le Lemme 3.4.4,  $\varphi_i^\varepsilon \rightarrow \varphi_i$  en capacité quand  $\varepsilon \searrow 0$ .

On a

$$(\omega + dd^c \varphi_1^\varepsilon) \wedge \cdots \wedge (\omega + dd^c \varphi_n^\varepsilon) \geq e^{\sum \frac{\varphi_i^\varepsilon - \varphi_i}{2}} (f_1 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} (\omega + dd^c u^\varepsilon)^n. \quad (D)$$

Comme les suites  $\varphi_i^\varepsilon$  et  $u^\varepsilon$  convergent en capacité, le membre de gauche de (D) converge vers  $(\omega + dd^c \varphi_1) \wedge \cdots \wedge (\omega + dd^c \varphi_n)$  et celui de droite vers

$$(f_1 \cdots f_n)^{\frac{1}{n}} (\omega + dd^c u)^n.$$

En fin, on suppose que les densités  $f_i, g_i$  ne sont pas lisses. Donc on les approche par les suites de densités continues et uniformément bornées  $f_i^\varepsilon, g_i^\varepsilon \geq \varepsilon > 0$  qui convergent dans  $L^1$  et résolvent l'équation

$$(\omega + dd^c \varphi_i^\varepsilon)^n = e^{\varphi_i^\varepsilon - \varphi_i} [f_i^\varepsilon (\omega + dd^c u)^n + g_i^\varepsilon (\omega + dd^c v_i)^n].$$

$u + C$  est une sur-solution pour  $C > 0$  tel que  $e^{u+C-\varphi_i} f_i^\varepsilon \geq 1$ . en effet, si telle est le cas

$$\begin{aligned} e^{u+C-\varphi_i} [f_i^\varepsilon (\omega + dd^c u)^n + g_i^\varepsilon (\omega + dd^c v_i)^n] &\geq e^{u+C-\varphi_i} f_i^\varepsilon (\omega + dd^c u)^n \\ &\geq (\omega + dd^c u)^n. \end{aligned}$$

$\psi = \frac{u+v_i-C'}{2}$  est aussi sous-solution si on choisit  $C' > 0$  de sorte que  $\frac{A}{2^n} e^{\psi-C'-\varphi_i} \leq 1$  avec  $A$  le max des bornes sup de  $f_i^\varepsilon, g_i^\varepsilon$ , puisque dans ce cas on aura

$$\begin{aligned} e^{\psi-C'-\varphi_i} [f_i^\varepsilon (\omega + dd^c u)^n + g_i^\varepsilon (\omega + dd^c v_i)^n] &\leq A e^{\psi-C'-\varphi_i} (\omega + dd^c \psi)^n \\ &\leq (\omega + dd^c \psi)^n \end{aligned}$$

On a alors  $\varphi_i^\varepsilon$  est uniformément d'après le principe de comparaison. Comme dans les points précédents on a le résultat par passage à la limite.  $\square$

# Conclusion

L'approche variationnelle est une méthode efficace pour la résolution des équations de Monge-Ampère complexes. Dans ce mémoire, après avoir défini les outils nécessaires et rappelé leurs propriétés, on a trouvé une fonctionnelle  $\mathcal{F}_\lambda$  dont l'équation d'Euler-Lagrange est (0.0.1) et montré qu'elle admet des points critiques (les points qui la maximisent,) qui sont les solutions de l'équation (0.0.1). Ces solutions sont uniques dans les cas  $\lambda < 0$  et  $\lambda = 0$ .

Le travail est plus simple pour le cas  $\lambda < 0$ , puisque les fonctions  $\omega$ -psh sont scs donc majorées et atteignent leur borne sup sur  $X$  qui est compact.

Dans le cas  $\lambda = 0$ , c'est plus compliqué puisque les fonctions  $\omega$ -psh sont majorées mais peuvent prendre la valeur  $-\infty$ . C'est pourquoi, on a posé des conditions supplémentaires sur la mesure  $\mu$  pour trouver une solution sur  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$ , avant d'utiliser les propriétés de convergences et de continuités pour étendre l'existence et l'unicité de la solution sur  $\mathcal{E}(X, \omega)$ . On a montré aussi l'existence des solutions de (0.0.1) sur  $\mathcal{E}^p(X, \omega)$ , pour  $p > 0$  dans le cas  $\lambda = 0$ .

Pour  $\lambda > 0$  c'est encore plus délicat. On commence dans ce cas à montrer l'existence de solutions sur  $\mathcal{E}^1(X, \omega)$  lorsque  $\mu = f dV$   $f \in L^p(X, \mu)$ ,  $p > 1$  avant de montrer qu'il existe des solutions pour une mesure de probabilité mais avec la condition  $0 < \alpha_\mu(\omega) < n\lambda/(n+1)$ .

# Références

- [AAZ18] S. Asserda, F. Z. Assila, and A. Zeriahi, Projective Logarithmic Potentials. Preprint arXiv(2018), Art. ID 1803.03253.
- [BBGZ13] R. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, and A. Zeriahi, A variational approach to complex Monge–Ampère equations. *Publ. Math. I. H. E. S.*, 117 (2013), 179–245.
- [BBEGZ11] R. Berman, S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi, Kähler–Ricci flow and Ricci iteration on log-Fano varieties. Preprint arXiv (2011), to appear in *Crelle*.
- [BT76] E. Bedford and B. A. Taylor, The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampère equation. *Invent. Math.*, 37(1)(1976), 1–44.
- [BT78] E. Bedford and B. A. Taylor, Variational properties of the complex Monge–Ampère equation. I. Dirichlet principle. *Duke Math. J.*, 45(2)(1978), 375–403.
- [BT82] E. Bedford and B. A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149(1–2)(1982), 1–40.
- [BT87] E. Bedford and B. A. Taylor, Fine topology, ilov boundary, and  $(dd^c)^n$ . *J. Funct. Anal.*, 72(2)(1987), 225–251.
- [BT88] E. Bedford and B. A. Taylor, *Uniqueness for the complex Monge–Ampère equation for functions of logarithmic growth*. *Indiana Univ. Math. J.* 38 (1989), no. 2, 455–469.
- [Dem85] J. P. Demailly, Mesures de Monge–Ampère et Caractérisation Géométrique des Variétés Algébriques Affines. *Mém. Soc. Math. France*, 19 (1985), 124.

- [Dem91] J. P. Demailly, Potential Theory in Several Complex Variables. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>, 2016.
- [Dem92] J. P. Demailly, Regularization of closed positive currents and intersection theory. *J. Alg. Geom.*, 1(3)(1992), 361-409.
- [DL15] S. Dinew and H. C. Lu, Mixed Hessian inequalities and uniqueness in the class  $\mathcal{E}(X, \omega, m)$ . *Math. Z.*, 279(3-4)(2015), 753-766.
- [GZ05] V. Guedj, A. Zeriahi, Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds, *J. Geom. Anal.* 15 (4) (2005) 607–639.
- [GZ04] V. Guedj, A. Zeriahi, Monge–Ampère operators on compact Kähler manifolds, preprint, arXiv: math.CV/0504234.
- [GZ07] V. Guedj and A. Zeriahi, The weighted Monge–Ampère energy of quasiplurisubharmonic functions. *J. Funct. An.* 250(2007), 442-482.
- [GZ17] V. Guedj and A. Zeriahi: Degenerate Complex Monge–Ampère Equations, EMS Tracts in Mathematics Vol.26, January 2017, 496 pages, DOI 10.4171/167.
- [Lel68] P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières ( $n$  variables)*, Sémin. de Math. Supérieures, 6e session, été 1967, Presses Univ. Montréal (1968).
- [LG59] L. Garding, An inequality for hyperbolic polynomials, *Acta Math.* 180(1959) 957-965.
- [Rai69] R. J. Rainwater, A note on the preceding paper. *Duke Math. J.*, 36(1969), 799-800.
- [RR02] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Applications of Orlicz Spaces*. Monographs and Text-books in Pure and Applied Mathematics 250, Marcel Dekker Inc, New York, 2002.
- [Zer01] A. Zeriahi, Volume and capacity of sublevel sets of a Lelong class of psh functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 50(1)(2001), 671-703.
- [Zie89] William P. Ziemer, Weakly Differentiable functions, Springer-Verlag, 1989.