

# UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



## U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

### DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

### Mémoire de Master

**DOMAINE :** Sciences et Technologies  
**MENTION :** Mathématiques et Applications  
**SPÉCIALITÉ :** Mathématiques Appliquées  
**OPTION :** Équations aux Dérivées Partielles

#### Sujet :

**Stabilisation globale des équations de Navier-Stokes  
autour d'un équilibre instable avec un contrôle frontière  
mixte**

Présenté par : Malick DIBA

Le 25 Mai 2021

Sous la direction de : Docteur Mouhamadou Samsidy GOUDIABY

Sous la supervision de : Professeur Abdou SENE

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Université
Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président du jury	UASZ
Abdou SENE	Professeur Titulaire	Examinateur	UVS
Timack NGOM	Maitre de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Mouhamadou S. GOUDIABY	Maitre de Conférences Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2019 – 2020

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Équations de Navier-Stokes et rappels de quelques notions</b>	<b>12</b>
1.1 Équations de Navier-Stokes et conditions aux limites . . . . .	12
1.1.1 Rappels de quelques opérateurs différentiels . . . . .	12
1.1.2 Formulation générale des équations de Navier-Stokes . . .	13
1.1.3 Conditions aux limites . . . . .	14
1.2 A propos de ce mémoire . . . . .	15
1.2.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	16
1.2.2 La méthode de contrôle . . . . .	16
1.2.3 Méthode de résolution . . . . .	17
1.3 Quelques espaces utilisés dans ce mémoire . . . . .	19
1.3.1 Les espaces $L^p$ . . . . .	19
1.3.2 Les espaces de Sobolev . . . . .	21
1.3.3 L'espace de Sobolev dépendant du temps . . . . .	23
1.4 Quelques notions . . . . .	24
1.5 Les inégalités de Sobolev . . . . .	27
<b>2 Construction du contrôle des équations de Navier-Stokes</b>	<b>29</b>
2.1 Équations de Navier-Stokes . . . . .	30
2.1.1 État stationnaire . . . . .	30
2.1.2 État non stationnaire . . . . .	31
2.1.3 Équations de Navier-Stokes à stabiliser . . . . .	33
2.2 Base hilbertienne et loi de contrôle . . . . .	35
2.2.1 Base hilbertienne . . . . .	35
2.2.2 Loi de contrôle . . . . .	36
2.3 Construction de l'opérateur feedback . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Stabilisation des équations de Navier-Stokes</b>	<b>39</b>
3.1	Résultats de stabilité . . . . .	39
3.2	Existence . . . . .	48
3.2.1	Méthode de Galerkin . . . . .	48
3.2.2	Limites supplémentaires . . . . .	50
3.2.3	Passage à la limite . . . . .	58
3.3	Unicité de la solution en dimension 2 . . . . .	60
	<b>Conclusion</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>67</b>

## REMERCIEMENTS - DÉDICACES

Il est très important pour moi, après des années d'étude au cours desquelles de nombreuses étapes ont été franchies, de rendre grâce à ALLAH et de remercier chaleureusement les personnes qui m'ont accompagné, encouragé et ont permis, de la meilleure des manières, d'en être arrivé là.

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur Monsieur *Mouhamadou Sam-sidy GOUDIABY*, Maitre de Conférences Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, sans qui, bien évidemment, ce mémoire ne serait tout simplement pas concrétisé. Mais au-delà du temps qu'il m'a consacré en tant que son disciple, et au risque de ne pas me montrer très original, c'est surtout pour son soutien que je lui suis reconnaissant, pour ses précieuses remarques, ses encouragements, ses conseils ainsi que pour sa patience, sa disponibilité et ses enseignements dont j'ai eu à bénéficier durant mon parcours à l'université.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Monsieur *Salomon SAMBOU*, Professeur Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, non seulement pour m'avoir enseigné mais aussi pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et avoir accepté de présider mon jury.

Mes remerciements vont à l'endroit de Monsieur *Abdou SENE*, Professeur Titulaire à l'Université Virtuelle du Sénégal, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail en faisant parti des membres de mon jury.

Je tiens également à remercier Monsieur *Timack NGOM*, Maitre de Conférences Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour sa gentillesse, sa disponibilité, ses encouragements, ses enseignements qu'il m'a fait profiter en plus de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail en faisant parti des membres de mon jury.

Je tiens aussi à remercier profondément tous les professeurs du département de mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont dispensé ; leur vision des mathématiques reste un modèle pour nous.

Je remercie également tous mes camarades de classe de l'école élémentaire, en passant par le moyen et le secondaire jusqu'à l'université. Je retiendrai d'eux, de très bons moments passés ensemble. Je remercie tous les enseignants qui ont participé à ma formation, tant scolaire que religieuse, et aussi mes camarades pratiquants du Taekwondo pour l'encouragement et les conseils qu'ils me donnent de temps en temps.

Je remercie mon ami et frère *Ibrahima DRAME* pour son soutien que je n'oublierai jamais et ses conseils ainsi que tous les élèves avec lesquels j'ai eu à partager mes connaissances (*Geneviève Jessica NDECKY*, *Zeynab SEYDI*, *Aminata GAYE*, *Aliou MANSALY*, ...), merci à *Khadjiratou DIALLO* et *Aïcha*. A *Mamadou Lamine BAYO*, *Amadou DIBA* le philosophe, *Emile Ndéné*

*NDONG, Mamadou Boye DIALLO, Amadou NDIAYE, Bafodé DIAWARA, Daouda DIACK, Couro KANE, Salémond NDOUR, Oumar NDIONE, Ibrahima KEITA, Youssouph DIALLO, Abdou Lakhat NIANG, Mr SANE, Mr MAN-SALY, Mr LY, le Doyen Koumaya DIEDHIOU, Rokhaya BA, Ndèye LO, Fatou Bintou CISSE, Adama CISSE, Yaye CISSE et Ndèye CISSE, je vous dis merci pour tout.*

Mes sincères remerciements à ma grande sœur *Fatoumata Arouna*, à mes frères (*Djiby, Seydou, Amadou, Ibrahima, Alphousény, Abdourahmane*) et leurs femmes (*Kadidiatou, Sala, Mariama et Aissata*) pour le soutien et les encouragements qu'ils n'ont cessé de me renouveler toutes ces dernières années. Je remercie infiniment mes deux parents (*Arouna Djiby et Fatoumata PAM*) pour tout ce qu'ils ont fait pour moi, sans oublier ma grand-mère (*Inna*) qui a contribué largement à ma réussite, merci à mon oncle et homonyme *Baidy* ainsi que les familles *WADE* de Djibock et *KEITA* de Korentas.

A *Laye FATY* et son équipe, je dis merci pour tous les services qu'ils nous ont rendu à l'université.

Enfin, merci à ceux et celles qui auront la patience de lire ce mémoire.

*Je dédie ce modeste travail à :*

- ▶ *mon homonyme Malick DIBA,*
- ▶ *mon frère Feu Alassane DIBA,*
- ▶ *ma fiancée Hawa SECK,*
- ▶ *mes parents,*
- ▶ *mes frères,*
- ▶ *ma sœur,*
- ▶ *mes amis,*
- ▶ *mes neveux et mes nièces.*

## Résumé

Dans ce document, nous présentons un contrôle de frontière mixte et rétroactif (Dirichlet, Neumann) permettant de stabiliser les équations de Navier-Stokes autour d'un état d'équilibre (stationnaire) dans un domaine  $\Omega$  en se basant sur des techniques développées par *Ngom et al.* [25].

Nous démontrons ici la convergence exponentielle de la perturbation dans  $L^2$ , sans explosion, et que cette convergence est aussi valable dans  $H^1$ . Nous prouvons aussi, dans ce document, l'unicité de la solution faible des équations de Navier-Stokes en dimension 2.

---

# Introduction

---

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (liquide et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus. Par une résolution approchée, elles permettent de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les océanographes et les météorologues, mais aussi le trivial écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides. Le cas particulier de l'écoulement d'un fluide incompressible est traité dans ce mémoire dans le cadre de la stabilisation. L'écoulement d'un fluide est dit incompressible lorsque l'on peut négliger ses variations de masse volumique au cours du temps. Cette hypothèse est vérifiée pour l'eau liquide et les métaux en fusion. Un écoulement incompressible est caractérisé par un champ de vitesse à divergence nulle. Une divergence nulle en un point représente des flux entrant et sortant autour de ce point qui se compensent (champ constant) ou à un champ tourbillonnant.

Plusieurs travaux dédiés à l'étude des équations de Navier-Stokes incompressibles ont été effectués dans la littérature (voir par exemple [11, 17, 32]). Ces travaux ont permis d'établir des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution dans des domaines bornés ou non bornés, des résultats relatifs au comportement en temps long des solutions, ainsi que des résultats concernant les problèmes fondamentaux de stabilité. Cependant, à l'heure actuelle la question de l'existence globale (c'est-à-dire pour tout temps  $t > 0$ ) de solutions régulières en dimension 3, de même que celle de l'unicité des solutions faibles toujours en dimension 3 sont des questions ouvertes.

Ce mémoire, basé sur le travail de *Sene et al.* [30], traite de la stabilisation globale des équations de Navier-Stokes autour d'un équilibre instable avec un contrôle frontière mixte (une partie de la frontière étant sous la forme de Dirichlet et l'autre de Neumann).

La stabilisation par retour d'état permet de gérer, commander, diriger ou réguler le comportement d'un système physique comme le phénomène d'écoulement autour d'un barrage hydraulique. La construction d'un barrage peut provoquer à la fois des bouleversements humains en forçant des populations entières à se déplacer, et avoir un impact écologique non négligeable en changeant l'écosystème local. Cependant, il permet par exemple la régulation du débit d'une rivière ou d'un fleuve (favorisant ainsi le trafic fluvial), l'irrigation des cultures, une prévention relative des catastrophes naturelles (inondations), par la création de lacs artificiels ou de réservoirs. Afin d'augmenter ou de diminuer la quantité d'énergie produite, nous pouvons agir sur les vannes. Cette action permet de contrôler le débit entrant ou sortant au niveau de la conduite forcée. On s'intéresse alors au problème de stabilisation par retour d'état des équations de Navier-Stokes incompressibles.

Cette méthode est aussi utilisée pour passer d'un régime turbulent vers un régime laminaire. La figure 1 représente un certain nombre de lignes de courant de l'écoulement bidimensionnel dans un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dans le cas d'un écoulement laminaire et turbulent, respectivement. On s'intéresse alors au problème de stabilisation suivant : comment déterminer une condition limite non homogène, localisée sur la frontière (du cylindre par exemple), permettant de revenir à l'état laminaire ? L'utilisation de parois perforées : méthode d'aspiration-soufflage, permet de mettre en œuvre un contrôle en boucle fermée (aussi appelé contrôle feedback). C'est un contrôle qui dépend à chaque instant de la variable d'état du système.

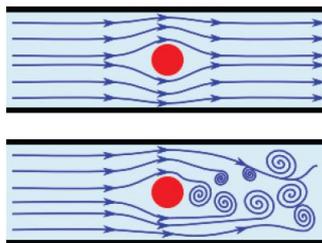


FIGURE 1 – Ecoulement laminaire (haut) et turbulent (bas)

Ce document bénéficiant des techniques développées par *Ngom et al.* [25] présente un contrôleur de frontière mixte et rétroactif permettant de stabiliser les équations de Navier-Stokes. Dans ce travail, nous démontrons une décroissance exponentielle d'une perturbation d'un certain état d'équilibre instable dans l'espace  $L^2$  et ceci sans explosion de l'état initial. De plus nous allons plus loin que *Ngom et al.* [25] en prouvant, d'une part, que la convergence exponentielle vers zéro est valable dans  $H^1$ , et d'autre part, que la solution faible des équations est unique lorsque le domaine d'étude est bidimensionnel.

Comme nous l'avons mentionné, l'objectif dans ce document est d'exploiter la nouvelle méthode de stabilisation de [25] pour construire un contrôleur rétroactif pour le système de Navier-Stokes. Il s'agit de concevoir une loi de contrôle  $f_i(\mathbf{v})$  tel que pour un taux de décroissance prescrit  $\sigma > 0$ , la vitesse  $\mathbf{v}$  du fluide satisfasse la décroissance exponentielle suivante :

$$\|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{X}(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)} e^{-\sigma t}, \quad t \in (0, \infty).$$

Ici  $\mathbf{v}$  est solution des équations de Navier-Stokes perturbées autour d'un état d'équilibre instable,  $\mathbf{v}_0$  est la vitesse initiale et  $\mathbf{X}(\Omega)$  est un espace adéquat à déterminer.

Avant [25], un certain nombre d'auteurs ont étudié diverses méthodes de stabilisation des équations incompressibles de Navier-Stokes à l'aide d'un contrôle feedback. Ce domaine de recherche important pour les équations de Navier-Stokes a été inauguré par *Fursikov et al.* [15, 16], qui a abordé la stabilisation des équations de Navier-Stokes à deux et à trois dimensions à l'aide d'un opérateur d'extension. Viennent ensuite les contributions de *Barbu et al.* [3, 4, 6, 7, 9], *Raymond et al.* [27, 28, 29] et *Badra et al.* [1, 2].

Dans [1, 6, 7, 8, 27, 28], les lois de contrôle sont déterminées en résolvant une équation de Riccati dans un espace de dimension infinie. Dans un tel cas, un problème de contrôle optimal doit être résolu, impliquant la minimisation d'une fonction objectif. En pratique, le contrôle est calculé par approximation via la solution d'une équation algébrique de Riccati, ce qui peut être coûteux en calcul. L'utilisation de contrôle de dimension finie peut être plus appropriée pour stabiliser les équations de Navier-Stokes. Une telle approche est effectuée dans [9] dans le cas d'un contrôle interne et dans [2, 6, 7, 8, 29] dans le cas d'un contrôle aux limites. Dans [2, 9, 29], les auteurs recherchent un contrôle frontière  $\mathbf{u}_b$  de dimension finie de la forme

$$\mathbf{u}_b = \sum_{j=1}^N u_j(t) \psi_j(\mathbf{x}), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

où  $\Gamma$  est la frontière du domaine,  $(\psi_j)_{j=1,2,3,\dots,N}$  est une base de dimension finie obtenue à partir des fonctions propres de certains opérateurs et  $\bar{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_N)$  est une fonction de contrôle exprimée avec une formulation de retour d'état ou feedback. Dans [29] et [2] où  $d = 2$  et  $d = 3$ , respectivement, le contrôle feedback est obtenu à partir de la solution d'une équation de Riccati à dimension finie, tandis qu'une technique de stabilisation à base stochastique est utilisée dans [5] dans le cas d'un contrôle interne, ce qui évite les problèmes de calculs difficiles liés aux équations de Riccati à dimension infinie.

La procédure utilisée dans [4] pour un contrôle de limite ressemble à la forme de contrôleurs de bruits stabilisant conçue dans [5].

Une loi de feedback linéaire est d'abord déterminée en résolvant un problème de commande linéaire dans tous les articles cités ci-dessus sauf dans [25]. Ce

feedback linéaire est ensuite utilisé afin de stabiliser le système non linéaire d'origine. Une telle procédure conduit à choisir une vitesse initiale suffisamment petite pour limiter la généralité du résultat. De plus, il faut généralement que la condition initiale et le contrôle soient suffisamment réguliers. Pour le choix du profil de contrôle, le cas d'un profil normal est très utile dans de nombreuses applications [14, 21, 26] et le problème reste résolu dans les documents [24, 25]. Ce dernier garantit également une décroissance exponentielle de la forme suivante pour un taux de décroissance prescrit  $\sigma > 0$  :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}(\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{X}(\Omega)} e^{-\sigma t}, \quad t > 0 \quad (1)$$

où la constante  $C = 1$ , alors que les travaux antérieurs ne pouvaient avoir que  $C \geq 1$  et  $\mathbf{X}(\Omega)$  est un espace adéquat. En pratique, il est préférable d'avoir  $C = 1$  pour éviter un processus de stabilisation commençant par une explosion et assurer une décroissance exponentielle immédiate.

Les avantages de [24, 25] sur les travaux antérieurs sont dues à l'utilisation d'une approche simple pour stabiliser les équations de dynamique des fluides proposées dans [13, 18, 19, 31]. L'idée a été appliquée pour la première fois à une équation 1D en eau profonde dans [31]. Elle repose sur une estimation à priori et une relation qui existe entre la variation de l'énergie en fonction du temps et certains paramètres et variables des conditions aux limites. Ces derniers sont conçus de manière à assurer une décroissance exponentielle de l'énergie. Ensuite la méthode de Galerkin est utilisée pour prouver l'existence de la solution stabilisée. La méthode du contrôle a été appliquée pour stabiliser le réseau de canal d'irrigation [18, 19], en couplant les équations [13] d'eau peu profonde et d'érosion-sédimentation, mais la première application aux équations de Navier-Stokes a été réalisée dans [24]. C'était pour accélérer la stabilisation autour d'un état stationnaire stable. L'idée de base dans [24] est de considérer les paramètres des conditions de Dirichlet (c'est à dire les contrôles) comme des inconnues et de compléter le système de Navier-Stokes avec une certaine condition imposée à la valeur moyenne des forces exercées sur la même partie de la limite de Dirichlet. Ensuite, en choisissant une base appropriée, la solution stabilisée est construite via une méthode de Galerkin. Dans [25], les mêmes auteurs ont prouvé que la méthode présentée dans [24] s'accorde à la stabilisation autour d'un état d'équilibre instable, mais il fallait pour cela enrichir les lois de contrôle et modifier la base de la méthode de Galerkin. Il est intéressant aussi de noter que [25] a révélé que cette nouvelle approche est un grand pas en avant pour la stabilisation des équations de Navier-Stokes. En effet, comparée aux autres méthodes existantes, cette approche présente les avantages suivantes :

- La direction du contrôle des bords de Dirichlet est arbitraire. En particulier, il peut être conçu pour être normal à la frontière.
- Le taux de décroissance peut être choisi arbitrairement grand tant que l'on est prêt à augmenter la dimension du contrôle.

- Seule la régularité  $H^1$  est requise pour l'état stationnaire.
- Il est prouvé que les contrôleurs ne provoquent pas d'explosion lors du démarrage du processus de contrôle.

Ce document est constitué de trois chapitres.

► Dans le chapitre 1 constitué de cinq sections, nous commençons d'abord par donner les équations de Navier-Stokes après avoir rappelé quelques opérateurs différentiels ; de plus nous rappelons aussi les différentes conditions aux limites que l'on peut avoir pour un problème donné. Dans la deuxième section, nous expliquons brièvement ce qui a été fait dans l'article que nous exploitons pour ce mémoire de master. Ensuite, dans les troisième et quatrième sections, nous y mentionnons respectivement les espaces fonctionnels utilisés et des notions importantes pour la suite de ce document. A la dernière section de ce chapitre, nous rappelons les inégalités de Sobolev utilisés tout au long de ce travail.

► Dans le chapitre 2 constitué de trois sections, nous le débutons par les équations de Navier-Stokes. Ensuite, nous construisons une base hilbertienne qui va engendrer l'espace dans lequel nous chercherons la solution de l'équation stabilisée. A la fin de ce chapitre, nous construisons un opérateur de contrôle pour la stabilisation des équations de Navier-Stokes.

► Quant au chapitre 3, il est composé de trois parties. Nous le débutons par la définition d'une solution faible des équations de Navier-Stokes. Ensuite, nous évoquons les résultats de stabilité où nous démontrerons les deux estimations du théorème 12. Les deux dernières parties de ce chapitre sont consacrées d'une part à la preuve de l'existence de la solution en dimension 3, et d'autre part, de l'unicité de celle ci en dimension 2.

---

# Équations de Navier-Stokes et rappels de quelques notions

---

## 1.1 Équations de Navier-Stokes et conditions aux limites

Dans cette partie, nous donnons une formulation générale des équations de Navier-Stokes et les différentes conditions aux limites que l'on peut avoir pour un problème donné. Pour commencer, nous allons d'abord rappeler quelques opérateurs différentiels afin de faciliter la compréhension des notations utilisées dans les équations.

### 1.1.1 Rappels de quelques opérateurs différentiels

Soit un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , de frontière  $\partial\Omega$  régulière. On considère les fonctions  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  régulière avec  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_d(\mathbf{x}))$  pour  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . On définit alors les opérateurs différentiels suivants :

1. Opérateur  $\nabla$  (nabla) :

- $\nabla v = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right) \in \mathbb{R}^d$  est le gradient de  $v$  (un vecteur).

- $\nabla \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$  est la matrice jacobienne de  $\mathbf{u}$ .

- $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^d$  est un vecteur.

2. Divergence :

- $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}$  est un scalaire.

- Si  $M = M(\mathbf{x})$  désigne une matrice de taille  $d \times d$  définie pour  $\mathbf{x} \in \Omega$ , alors  $\operatorname{div} M = \left( \sum_{j=1}^d \frac{\partial M_{1j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^d \frac{\partial M_{dj}}{\partial x_j} \right)^t \in \mathbb{R}^d$  est un vecteur et

$$(\operatorname{div} M)_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} \text{ pour } 1 \leq i \leq d.$$

3. Laplacien (vectoriel) :

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R}^d \text{ est un vecteur.}$$

### 1.1.2 Formulation générale des équations de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes est donnée sous la forme :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \left( \zeta + \frac{\nu}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho f - \nabla p$$

où

- $\mathbf{u}$  est la vitesse du fluide ;
- $p$  est la pression dans le fluide ;
- $\rho$  est la masse volumique du fluide ;
- $\nu$  est la viscosité dynamique en cisaillement du fluide ;
- $\zeta$  est la viscosité dynamique en compression du fluide ;
- $f$  est une force massique s'exerçant dans le fluide (par exemple : pesanteur).

Nous pouvons interpréter les termes de l'équation comme suit :

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  : désigne l'accélération eulérienne du fluide ;
- $\nu \Delta \mathbf{u}$  et  $\left( \zeta + \frac{\nu}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$  : désignent les termes de diffusion visqueuse ;
- $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  : est le terme de convection de quantité de mouvement ;
- $\rho f$  : désigne les forces de pesanteur ;
- $\nabla p$  : désigne les forces de pression.

Si de plus le fluide est incompressible, alors

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Dans ce mémoire, nous considérons le système de Navier-Stokes qui modélise un fluide incompressible. Ainsi, en régime non stationnaire c'est à dire là où les

inconnues dépendent explicitement du temps, ces équations se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = f - \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

tandis qu'en régime stationnaire c'est à dire là où les inconnues sont indépendantes du temps, elles correspondent à :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = f - \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Ces équations sont nommées ainsi pour honorer les travaux de deux scientifiques du *XIX<sup>e</sup>* siècle : le mathématicien et ingénieur des Ponts *Henri Navier*, qui est le premier à introduire la notion de viscosité dans les équations d'*Euler* en 1823, et le physicien *George Gabriel Stokes*, qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845.

### 1.1.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont des contraintes (des valeurs) que l'on impose à la fonction solution (ou à certaines de ces dérivées) sur tout ou partie du domaine  $\Omega$ , et/ou sur toute ou partie de sa frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Un problème est dit bien posé au sens d'Hadamard si sa solution existe, est unique et dépend continument des données. Dans d'autres littératures, on parle aussi de stabilité par rapport aux données<sup>1</sup>.

En général, une équation aux dérivées partielles donnée sans plus de précision sur son domaine ou sur sa solution  $\mathbf{u}$  est mal posée. De ce fait l'on donne souvent des conditions aux limites. On distingue :

► **Les conditions initiales** : Si  $\mathbf{u}$  est fonction de  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}$  où  $t_0$  et  $D_t^p \mathbf{u}$  désignent respectivement l'instant initial et la différentielle par rapport au temps à l'ordre  $p$  de  $\mathbf{u}$ , on donne :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \phi_0(\mathbf{x}) \text{ ou } D_t^p \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \phi_p(\mathbf{x}), \quad p \in \mathbb{N}.$$

On parle de conditions de Cauchy.

► **Les conditions aux bords** : Si  $\mathbf{u}$  est fonction de  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ , on a plusieurs types de contraintes.

- Condition de Dirichlet où  $\mathbf{u}$  est fixé au bord de  $\Omega$  :

$$\mathbf{u} = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

On parle de condition de Dirichlet imposée à une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles, lorsque l'on spécifie les valeurs

---

1. Il peut arriver, même en ayant fixé des conditions, que le problème soit mal posé.

que la solution doit vérifier sur toute ou partie de la frontière du domaine. Il peut s'agir par exemple d'un déplacement imposé (par exemple nul) en des points d'une structure (points d'appuis rigides).

- Condition de Neumann où la dérivée normale de  $\mathbf{u}$  est fixée :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

On parle de condition de Neumann imposée à une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles, lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur la frontière du domaine (flux, contraintes...).

- Condition de Robin ou mixte :

$$c(\mathbf{x})\mathbf{u} + \overline{c(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

On parle de condition de Robin ou condition de Fourier ou condition d'impédance imposée à une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles, lorsque l'on spécifie une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction qui est solution du problème sur toute ou partie de la frontière du domaine. C'est donc une pondération de conditions de Dirichlet et de Neumann.

Si  $g = 0$ , on parle de condition homogène.

- Condition aux limites dynamique :

On parle de condition aux limites dynamique imposée à une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles, lorsque l'on spécifie une combinaison linéaire entre la dérivée temporelle et la dérivée normale que la solution doit vérifier sur toute ou partie de la frontière du domaine.

- Condition aux limites mêlée :

On parle de condition aux limites mêlée lorsque l'on juxtapose plusieurs conditions aux limites différentes sur toute ou partie de la frontière du domaine.

► **Les conditions à l'infini** : Si  $\Omega$  n'est pas borné, on a des conditions de la forme :

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}).$$

**Remarque 1.** *En ce qui nous concerne, nous allons nous intéresser aux conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann dans la suite.*

## 1.2 A propos de ce mémoire

Dans cette section nous expliquons brièvement ce qui a été fait dans l'article intitulé : *Global Stabilization of the Navier-Stokes Equations Around an Unstable Steady State with Mixed Boundary Kinetic Energy Controller*. Nous rappelons

que ce papier est écrit par le Professeur *Abdou Sène*<sup>2</sup>, le Docteur *Timack Ngom*<sup>3</sup> et le Docteur *Evrard Marie Diokel Ngom*<sup>4</sup>.

### 1.2.1 Les équations de Navier-Stokes

Dans l'article, les auteurs considèrent d'abord une trajectoire de référence  $(\mathbf{v}_r, q_r)$  d'un fluide incompressible dans un domaine  $\Omega$ , solution du système de Navier-Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{v}_r + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla)\mathbf{v}_r + \nabla q_r = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_r = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

Puis, ils vont considérer la trajectoire  $(\mathbf{u}, q)$  partant de la perturbation de l'état de référence  $(\mathbf{v}_r, q_r)$  qui sera alors solution du système de Navier-Stokes non stationnaire suivant (avec  $T > 0$  fixé) :

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

En faisant la différence entre la solution du problème non stationnaire (1.4) et celle stationnaire (1.3), ils obtiennent le système suivant (avec  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_r$  et  $p = q - q_r$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_r + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

En utilisant des contrôles de frontières mixtes (que nous allons décrire au chapitre 2), l'objectif des auteurs de l'article sera de stabiliser le système (1.5). Pour ce faire, ils montrent la décroissance exponentielle de la perturbation de l'état d'équilibre instable dans l'espace  $L^2$  et ceci sans explosion de l'état initial. Mieux, ils montrent que cette décroissance exponentielle vers zéro est valable dans  $H^1$ . Après avoir montré l'existence d'une solution faible des équations de Navier-Stokes en dimension 3, les auteurs finiront ce travail par prouver que celle-ci est unique en dimension 2.

### 1.2.2 La méthode de contrôle

Que signifie contrôler un système d'équations ? En général, pour contrôler un système d'équations, on part d'un système admettant une unique solution

---

2. [abdou.sene@uvs.edu.sn](mailto:abdou.sene@uvs.edu.sn)

3. [timack.ngom@univ-zig.sn](mailto:timack.ngom@univ-zig.sn)

4. [evrad-diokel.ngom@ugb.edu.sn](mailto:evrad-diokel.ngom@ugb.edu.sn)

sur lequel on a le choix d'un des paramètres que l'on appellera contrôle. Le système devient ainsi sur-déterminé et on essayera, dans la mesure du possible, de trouver le contrôle qui nous permettra, par exemple, d'atteindre une cible ou encore d'optimiser une donnée.

Ainsi l'objectif des auteurs de l'article sera d'exploiter, dans leur travail, la nouvelle méthode de stabilisation de [25] pour construire un contrôle feedback pour le système (2.17). En bref, il s'agira de concevoir une loi de contrôle tel que, pour un taux de décroissance prescrit  $\sigma > 0$ , la vitesse  $\mathbf{v}$  satisfasse une décroissance exponentielle

$$\begin{cases} \|\mathbf{v}(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq \|\mathbf{v}_0\|_{(L^2(\Omega))^3} e^{-\sigma t}, & t \in (0, \infty) \\ \|e^{2\eta t} \nabla \mathbf{v}(t)\|^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, & \forall \eta < \sigma. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le travail effectué dans le papier confirme que la nouvelle méthode initiée et développée par *Sene et al.* [30] est riche en contenu qualitatif. Il montre que la méthode est applicable à des conditions aux limites mixtes (une partie du contrôle feedback de bords peut être sous la forme de Dirichlet et une autre sous la forme de Neumann).

### 1.2.3 Méthode de résolution

Les auteurs de l'article utilisent la méthode de Galerkin pour prouver l'existence de la solution stabilisée en plus de la méthode du contrôle. La méthode de Galerkin consiste à construire une suite de solutions approchées en utilisant une base de Galerkin adéquate. Un résultat de compacité permet ensuite de passer à la limite dans le système non linéaire satisfait par les solutions approchées.

Il faudra noter que pour la résolution des problèmes, nous disposons de plusieurs méthodes telles que :

- la méthode de compacité,
- la méthode de monotonie,
- la méthode de régularisation,
- la méthode de pénalisation,
- les méthodes itératives d'approximations,

et naturellement, l'utilisation simultanée dans un problème, de plusieurs de ces méthodes.

#### 1.2.3.1 La méthode de compacité

La méthode dite de compacité est utilisée de façon aussi directe que possible :

1. On construit des solutions approchées (ou du moins ce qu'on espère être des solutions approchées) par réduction à la dimension finie, par exemple par la méthode de Galerkin (cas stationnaire) ou de Faedo-Galerkin (cas

d'évolution); on obtient alors l'existence des solutions approchées par utilisation :

- dans le cas stationnaire, d'un théorème de point fixe,
  - dans le cas d'évolution, d'un théorème d'existence de solution d'un système d'équations différentielles ordinaires ;
2. On passe ensuite à la limite sur la dimension, en ayant ici à surmonter une difficulté essentielle : les opérateurs non linéaires rencontrés ne sont pas en général faiblement continus et il faut donc démontrer que la famille des solutions approchées est (grâce aux estimations à priori) compacte dans une topologie forte convenable (pour laquelle l'opérateur est continu). Les outils sont donc ici les théorèmes de compacité de l'injection d'un espace de Sobolev d'ordre  $\alpha$  dans un espace de Sobolev d'ordre inférieur à  $\alpha$ .

### 1.2.3.2 La méthode de monotonie

Lorsque l'opérateur a des propriétés de monotonie (du type de la propriété des différentielles des fonctions différentiables convexes sur un espace de Banach), on peut passer à la limite sur la dimension avec des estimations à priori moins fortes que celles nécessaires dans la méthode de compacité.

La méthode de monotonie, lorsqu'elle est applicable, est d'utilisation plus facile que la méthode de compacité.

### 1.2.3.3 La méthode de régularisation

Dans les méthodes de compacité et de monotonie, on obtient de la même manière les solutions approchées (essentiellement par la méthode de Galerkin) puis l'on passe à la limite soit par compacité, soit par monotonie (ou par mélange des deux méthodes).

Dans les méthodes de régularisation, de pénalisation et d'itération d'approximation, on change la méthode d'approximation en utilisant ensuite compacité ou (et) monotonie pour le passage à la limite.

Dans la méthode de régularisation, on régularise les équations en les rapprochant par des équations meilleures déjà résolues.

Entrent dans ce cadre les méthodes de viscosité, de régularisation elliptique, de régularisation parabolique.

Évidemment, on rencontre ici une autre difficulté essentielle des problèmes non linéaires : leur extrême tendance à l'instabilité ; des termes jugés petits peuvent radicalement changer la situation... Il faut donc prendre garde à bien choisir les termes de régularisation.

### 1.2.3.4 La méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation (issue du calcul des variations et d'ailleurs liée à la méthode de régularisation) consiste à approcher les inéquations variationnelles

par des équations (non linéaires) de caractère plus classique et déjà résolues par d'autres méthodes. Cette méthode est également utile dans la résolution de problèmes d'évolution dans des ouverts non cylindriques.

### 1.2.3.5 Les méthodes itératives d'approximation

Les méthodes itératives d'approximation sont surtout celles issues de l'analyse numérique. Citons :

- la méthode des approximations successives, la méthode de Newton. Le choix des espaces étant ici encore absolument fondamental ;
- les méthodes de discrétisation (différences finies) ;
- les méthodes de décomposition.

Pour plus d'informations, voir [23].

## 1.3 Quelques espaces utilisés dans ce mémoire

Nous donnons dans cette partie quelques espaces utilisés dans ce document.

### 1.3.1 Les espaces $L^p$

**Définition 1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. On note  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions  $f$ , mesurables presque partout, définies par :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Une norme dans  $L^p$  est définie par :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } f \in L^p(\Omega).$$

2. Lorsque  $p = \infty$ , on définit l'espace  $L^\infty$  par :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f \text{ mesurable} : |f(x)| < \infty \}$$

et la norme dans  $L^\infty$  est :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ presque partout} \}.$$

Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  muni de la norme correspondante est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

Dans ce mémoire, on se servira des résultats suivants pour effectuer plusieurs estimations et majorations.

**Théorème 1 (Inégalité de Hölder).** Pour tout  $1 \leq p < \infty$  et  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , si  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  alors  $f \times g \in L^1(\Omega)$  et on a :

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \times g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Cette inégalité a plusieurs conséquences parmi lesquelles :

► Soient  $f_1, f_2, \dots, f_k$  des fonctions telles que  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq k$  avec  $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}$  alors  $f = f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k$  est dans  $L^p(\Omega)$ . De plus

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

► Si  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ , alors pour tout  $r$  avec  $p \leq r \leq q$ ,  $f \in L^r(\Omega)$ . De plus

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \times \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

**Définition 2.** Soit  $E$  un espace de Banach de dual  $E'$ .

• On dit qu'une suite  $(u_n)_n$  d'éléments de  $E$  converge fortement vers  $u \in E$  et on note  $u_n \rightarrow u$  si :

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty.$$

• On dit qu'une suite  $(u_n)_n$  d'éléments de  $E$  converge faiblement vers  $u \in E$  et on note  $u_n \rightharpoonup u$  si :

$$\forall f \in E', \quad f(u_n) = \langle f, u_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E', E} = f(u).$$

• On dit qu'une suite  $(f_n)_n$  d'éléments de  $E'$  converge faiblement \* vers  $f \in E'$  et on note  $f_n \rightharpoonup^* f$  si :

$$\forall u \in E, \quad f_n(u) = \langle f_n, u \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E', E} = f(u).$$

**Remarque 2.** Si la suite  $(u_n)_n$  d'éléments de  $E$  converge faiblement vers  $u \in E$  alors  $u$  est appelée la limite faible de  $(u_n)$ .

**Théorème 2.** Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$  et  $(u_n)_n$  une suite de fonctions qui converge fortement vers  $u$  dans  $L^{p_1}(\Omega)$  et qui converge faiblement (faiblement \* si  $p_2 = +\infty$ ) dans  $L^{p_2}(\Omega)$ . Alors pour tout  $\theta \in ]0, 1]$ , et pour  $p$  donné par  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ , la suite  $(u_n)$  converge fortement vers  $u$  dans  $L^p(\Omega)$ .

**Théorème 3.** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $q > 1$  et  $(u_n)$  une suite de fonctions bornée dans  $L^q(\Omega)$ . On suppose que  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $L^p_{loc}(\Omega)$ <sup>5</sup> avec  $1 \leq p < q$ , alors on a :

$$u \in L^q(\Omega),$$

et

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } L^p(\Omega).$$

Pour la preuve des deux Théorèmes ci-dessus, on peut voir [11] Corollaire II.1.23 et Proposition II.1.25, respectivement.

**Théorème 4 (Inégalité de Young).** Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $p, q \in ]1, +\infty[$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors :

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}}{q} b^q. \quad (1.7)$$

### 1.3.2 Les espaces de Sobolev

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme  $L^p$  de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin que l'espace soit complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach. Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois, pour donner sens par exemple à une équation aux dérivées partielles et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction. Les espaces de Sobolev sont des outils essentiels pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.

Soient  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^N$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  et  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$  un multi-indice. On note  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$  avec  $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ .

---

5. On note  $L^p_{loc}(\Omega)$ , l'ensemble des fonctions dont la puissance p-ième est localement intégrable; c'est à dire intégrable sur tout compact inclus dans  $\Omega$ . La convergence dans  $L^p_{loc}(\Omega)$  signifie que  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $L^p(\omega)$  pour tout ouvert borné  $\omega$  tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega$ .

**Définition 3.** On note  $\mathcal{D}(\Omega)$ , le  $\mathbb{C}$  – espace des fonctions définies de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  indéfiniment différentiables à support compact inclus dans  $\Omega$ .

**Définition 4.** Soit  $v \in L^2(\Omega)$ . On dit que  $v$  est dérivable au sens faible dans  $L^2$  s'il existe des fonctions  $w_i \in L^2(\Omega)$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  telles que :

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Chaque  $w_i$  est appelée la  $i^{\text{ème}}$  dérivée partielle faible de  $v$  et notée  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ .

**Définition 5.** On dit que  $v \in L^2(\Omega)$  est  $m$  fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles d'ordre  $m - 1$  sont dérivables au sens faible.

**Définition 6.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \forall i \in \{1, \dots, N\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est la  $i^{\text{ème}}$  dérivée partielle faible de  $v$ .

On munit  $H^1(\Omega)$  du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left( u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x) \right) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \langle u, u \rangle \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  muni de la norme correspondante est un espace de Hilbert.

**Définition 7.** L'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  et est caractérisé par :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) / v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \right\}.$$

Muni du produit scalaire de  $H^1(\Omega)$ , l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Définition 8.** Soit  $m \geq 0$ . L'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\}$$

où la dérivée  $\partial^\alpha v$  est à prendre au sens faible.

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^{\alpha} u(x) \partial^{\alpha} v(x) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \langle u, u \rangle \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Définition 9.** Pour tout entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}$  est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \partial^{\alpha} v \in L^p(\Omega) \right\}$$

où la dérivée  $\partial^{\alpha} v$  est à prendre au sens faible.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach.

### 1.3.3 L'espace de Sobolev dépendant du temps

Soit  $X$  un espace de Banach et  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalle.

**Définition 10.** Pour  $1 \leq p < \infty$ , on définit l'espace  $L^p$  des fonctions  $u : (a, b) \rightarrow X$  par :

$$L^p(a, b; X) = \left\{ u : u \text{ mesurable et } \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty \right\}.$$

La norme de  $u$  dans  $L^p(a, b; X)$  est définie par :

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left( \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition 11.** Lorsque  $p = \infty$ , on définit  $L^{\infty}(a, b; X)$  par :

$$L^{\infty}(a, b; X) = \left\{ u : u \text{ mesurable, } \|u(t)\|_X \text{ est essentiellement bornée} \right\}.$$

On dit que  $\|u(t)\|_X$  est essentiellement bornée s'il existe  $M > 0$  tel que  $\|u(t)\|_X < M$  presque partout.

L'espace  $L^{\infty}(a, b; X)$  est muni de la norme

$$\|u(t)\|_{L^{\infty}(a,b;X)} = \sup_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X.$$

**Définition 12.** L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(a, b; X)$  est défini par :

$$W^{1,p}(a, b; X) = \left\{ u \in L^p(a, b; X) / \partial_t u \in L^p(a, b; X) \right\}$$

où la dérivée est à prendre au sens faible.

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} = \left( \int_a^b [\|u(t)\|_X^p + \|\partial_t u(t)\|_X^p] dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

## 1.4 Quelques notions

Nous utilisons dans ce travail la transformation de Fourier dans le but de construire un espace fonctionnel dans lequel nous ferons des estimations importantes pour la suite de solutions approchées des équations de Navier-Stokes. Cela nous permettra de surmonter une difficulté essentielle : le passage à la limite pour le terme non linéaire qui se trouve dans la formulation variationnelle du système de Navier-Stokes. Du fait que le terme non linéaire rencontré n'est pas faiblement continu, il nous faut donc démontrer que la suite de solutions approchées est (grâce aux estimations a priori) compacte dans une topologie forte convenable (pour laquelle le terme non linéaire est continu). Et la norme de l'espace dans lequel nous utiliserons la théorie de compacité est construite à l'aide de la transformée de Fourier.

**Définition 13.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On appelle :

- transformée de Fourier de  $f$ , l'application qu'on note  $\hat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$ , définie pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$  par :

$$\hat{f}(\zeta) = \mathcal{F}(f)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx,$$

- transformée de Fourier conjuguée de  $f$ , l'application qu'on note  $\overline{\mathcal{F}}(f)$ , définie pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}$  par :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi\zeta x} dx.$$

**Remarque 3.** Il existe des variantes dans la définition de la transformation de Fourier. La nôtre consiste à choisir la fréquence au lieu de la pulsation comme variable. Ses avantages sont :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}}(f * g) = \overline{\mathcal{F}}(f)\overline{\mathcal{F}}(g).$$

L'inconvénient est que le facteur  $2\pi$  réapparaît lorsqu'on écrit la transformée de Fourier d'une dérivée. On rencontre aussi les définitions suivantes :

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\zeta x} dx \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\zeta x} dx.$$

Il est important, en lisant un ouvrage ou une table de transformée de Fourier de s'assurer de la définition utilisée. Il n'est pas difficile de passer de l'une à l'autre des définitions. Enfin, ces nuances n'affectent en rien la nature profonde de la transformation de Fourier.

**Théorème 5 (Égalité de Parseval).** Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on a :

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

**Définition 14 (trace d'une fonction).** La restriction au bord  $\Gamma = \partial\Omega$  d'une fonction  $u \in H^1(\Omega)$  est appelée trace au bord de  $u$  et est notée  $u|_\Gamma$  ou  $\gamma_0(u)$ .

L'ensemble des traces au bord des fonctions de  $H^1(\Omega)$  forme un sous espace de  $L^2(\Gamma)$  noté  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Plus succinctement, on a :

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma).$$

Nous rappelons le Théorème de trace suivant (voir [10], Theorem 2.3) que nous utiliserons dans la suite pour les démonstrations de certains résultats. Pour cela, commençons d'abord par définir quelques notions pour faciliter la compréhension des notations du théorème.

**Définition 15.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné. Soient  $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$  tel que  $\sup_{x \in \Omega} p(x) < N$  et  $r : \partial\Omega \rightarrow [1, \infty)$  vérifiant  $r(x) \leq p^*(x) = \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)}$ .

• On dit que  $r$  est uniformément sous critique lorsque :

$$\inf_{\partial\Omega} (p^* - r) > 0.$$

- On note  $p^+ = \sup p$  et  $p^- = \inf p$ .
- On note  $\mathcal{P}(\partial\Omega)$ , l'ensemble des fonctions  $\mathcal{H}^{N-1}$ -mesurable où  $\mathcal{H}^{N-1}$  est un espace de Hausdorff de dimension  $N-1$ .
- L'espace de Lebesgue à exposant variable  $L^{p(x)}(\Omega)$  est défini par :

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

- On définit l'espace  $L^{r(x)}(\partial\Omega)$  par :

$$L^{r(x)}(\partial\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\partial\Omega, dS) : \int_{\partial\Omega} |u(x)|^{r(x)} dS < \infty \right\}.$$

- L'espace de Sobolev à exposant variable  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  est défini par :

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \partial_i u \in L^{p(x)}(\Omega) \text{ pour } i = 1, \dots, N \right\}.$$

**Théorème 6 (Théorème de trace).** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné et lipschitzien. Supposons que  $p \in C^0(\bar{\Omega})$  et  $1 < p^- \leq p^+ < N$ . Si  $r \in \mathcal{P}(\partial\Omega)$  est uniformément sous critique alors l'injection de trace  $W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{r(x)}(\partial\Omega)$  est compacte.

Nous rappelons ci dessous le Lemme de Gronwall, aussi appelé inégalité de Gronwall, nommé d'après Thomas Hakon Gronwall qui l'établit en 1919, permettant l'estimation d'une fonction qui vérifie une certaine inégalité différentielle. Le Lemme de Gronwall constitue la justification et l'outil d'obtention de nombreuses approximations des solutions d'équations différentielles ordinaires. En particulier, il est utilisé pour démontrer l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

**Théorème 7 (Lemme de Gronwall : forme intégrale).** Soient  $u, v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues telles que pour une constante  $C > 0$ , on ait :

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

**Théorème 8 (Lemme de Gronwall : forme différentielle).** Soient  $u$  une application de  $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et dérivable et  $v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue avec

$$u'(t) \leq u(t)v(t).$$

Alors

$$u(t) \leq u(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right).$$

**Théorème 9 (continuité).** Toute fonction  $f$  de  $W^{1,1}([a, b])$  est égale presque partout à une fonction continue  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  et on a pour tous  $x, y \in [a, b]$ ,

$$\tilde{f}(y) = \tilde{f}(x) + \int_x^y f'(s)ds,$$

autrement dit, on a pour presque tous  $x, y \in [a, b]$ ,

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(s)ds.$$

Pour la preuve de ce Théorème, on peut se référer à [11] (Corollaire II.4.2).

## 1.5 Les inégalités de Sobolev

Commençons d'abord par rappeler la définition de l'injection continue et l'injection compacte.

**Définition 16.** On dit que  $H$  est inclus avec injection continue dans  $K$  si  $H \subset K$  et l'opérateur identité  $I : H \rightarrow K$  défini par  $I(x) = x$ , pour tout  $x \in H$ , est continu.

**Définition 17.** On dit que  $H$  est inclus dans  $K$  avec injection compacte si la suite  $(x_n) \subset H$  est telle que si  $x_n$  converge faiblement dans  $H$  vers  $x$  alors  $x_n$  converge fortement dans  $K$  vers  $x$ .

**Théorème 10 (inégalités de Sobolev).** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $r$  un réel tel que :

$$\begin{aligned} 1 \leq r < +\infty, \text{ si } d = 2, \\ 1 \leq r \leq 4, \text{ si } d = 3. \end{aligned}$$

Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega)$ , on ait :

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^r(\Gamma)} &\leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{r}} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{r}}, \text{ si } d = 2, \\ \|v\|_{L^r(\Gamma)} &\leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{r}-\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}-\frac{2}{r}}, \text{ si } d = 3. \end{aligned}$$

Pour la preuve de ce Théorème, on peut se référer à [11], Lemme V.2.1. Quant aux injections de Sobolev :

• Si  $\Omega$  est un ouvert régulier ou bien  $\Omega = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{R}_+^d$  alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } p < d \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*] \text{ avec } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d} \\ \text{si } p = d \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[ \\ \text{si } p > d \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}), \end{array} \right.$$

avec injection continue.

Si  $\Omega$  est borné de classe  $C^1$ , les injections sont compactes.

• Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert de classe  $C^1$  ou  $\Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $m \geq 1$  et  $1 \leq p < \infty$  alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \text{ alors } W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ où } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d} \\ \text{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \text{ alors } W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[ \\ \text{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \text{ alors } W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \end{array} \right.$$

avec injection continue.

- Pour  $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ ,  $m \geq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} = \frac{1}{q} > 0 \text{ alors } |u|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}. \\ \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \text{ alors } |u|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}, \\ \text{pour tout ouvert borné } \Omega \text{ inclus dans } \mathbb{R}^d, \forall q, 1 \leq q < \infty. \\ \text{Si } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \text{ alors } |u|_{C^0(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}, \\ \text{pour tout ouvert borné } \Omega \text{ inclus dans } \mathbb{R}^d. \end{array} \right.$$

**Théorème 11.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine lipschitzien. Soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $q \in [p, p^*]$ . Il existe  $C > 0$  tel que :

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^p}^{1+d/q-d/p} \|u\|_{W^{1,p}}^{d/p-d/q}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}.$$

Pour la preuve de ce Théorème, on peut voir [12] (Proposition III.2.35).

---

# Construction du contrôle des équations de Navier-Stokes

---

Dans ce chapitre, nous allons introduire les équations de Navier-Stokes dont nous donnerons les résultats de stabilité dans le chapitre 3. Nous allons aussi parler de la loi de contrôle qui nous permettra d'obtenir la décroissance exponentielle souhaitée pour la solution du système de Navier-Stokes à stabiliser. En plus d'y construire une base hilbertienne suffisante pour la recherche de l'existence de la solution faible du système, nous construirons un opérateur de contrôle feedback à la fin.

Soit  $\Omega$  un domaine Lipschitzien borné dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) avec une frontière  $\Gamma$  divisée en  $\Gamma_{di}$  et  $\Gamma_{ne}$  où les indices  $di$  et  $ne$  désignent Dirichlet et Neumann, respectivement. Soit  $\Gamma_i \subset \Gamma_{di}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , des parties ouvertes de la frontière de Dirichlet de mesure non nulle telle que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  et  $\cup_{i=1}^N \overline{\Gamma_i} \subset \Gamma_{di}$ . Le contrôle, que nous utiliserons dans la suite, sera défini dans les parties  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Nous utilisons les espaces de fonctions habituels  $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$  et nous notons  $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^d$ ,  $\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^d$  et  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^d$ . L'espace de Sobolev  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  est défini comme l'espace dual de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , c'est à dire,  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))'$ . On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ , le produit scalaire et la norme dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , respectivement. En outre, si  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  est telle que  $\nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ , nous notons la trace normale de  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  par  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  représente le vecteur normal unitaire externe à  $\Gamma$ .

Nous introduisons les espaces de fonctions suivants :

$$\mathbf{H}_d^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_{di} \right\}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_{di}, \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \right\}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{di} \right\}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{V}_0(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}, \quad (2.4)$$

$$V^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\zeta = 0 \right\}, \quad (2.5)$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) = \text{espace de fonction de trace dont l'extension par zéro sur } \Gamma \text{ est dans } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (2.7)$$

L'espace  $\mathbf{V}$  est un sous espace fermé de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  et nous avons par définition

$$\| \cdot \|_{\mathbf{V}} = \| \cdot \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

## 2.1 Équations de Navier-Stokes

### 2.1.1 État stationnaire

Nous considérons la trajectoire de référence  $(\mathbf{v}_r, q_r)$  qui est un couple vitesse-pression pour un fluide incompressible, solution au système de Navier-Stokes stationnaire, avec des conditions aux bords mixtes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{v}_r + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r + \nabla q_r = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_r = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v}_r = \psi & \text{sur } \Gamma_{di}, \\ \nu \nabla \mathbf{v}_r \mathbf{n} - q_r \mathbf{n} = \phi & \text{sur } \Gamma_{ne}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Ici,  $\nu > 0$  est la viscosité,  $\mathbf{f}$  est une fonction de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  représentant les forces massiques s'exerçant dans le fluide,  $\psi$  est la condition de Dirichlet pour la vitesse sur  $\Gamma_{di}$  et  $\phi$  est la condition de Neumann sur  $\Gamma_{ne}$ ,  $\psi \in V^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Le terme  $\nu \Delta \mathbf{v}_r$  désigne les forces de viscosité,  $(\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r$  est un terme d'inertie ou de convection et  $\nabla q_r$  est le gradient de la pression.

Dans [22], il est montré que la solution  $(\mathbf{v}_r, q_r)$  du système (2.8) existe dans  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ .

Nous avons considéré l'état stationnaire dans ce travail afin de pouvoir le perturber et obtenir enfin l'état non stationnaire c'est à dire le cas où les paramètres (solutions des équations) vont dépendre du temps. Ainsi, connaissant

l'existence de la solution à l'état stationnaire, le but sera de faire tendre exponentiellement la différence des solutions des différentes équations vers 0 pour un temps suffisamment grand. Autrement dit, de montrer que lorsque le temps tend vers l'infini, la solution à l'état non stationnaire n'est autre que celle à l'état stationnaire.

**Remarque 4.** *Dans la plupart des écoulements réels les conditions aux limites ne sont pas nulles au bord du domaine. Parfois, on s'intéresse à des écoulements pour lesquels la vitesse est prescrite sur une partie de la frontière alors que sur une autre partie de celle-ci le fluide peut s'écouler librement. Un exemple de ce type de situation est un réseau de conduites dont la vitesse d'entrée en un certain nombre de points du réseau est imposée alors quelle est inconnue en sortie. C'est aussi le cas de l'écoulement dans un canal lorsqu'on néglige les effets verticaux de surface libre.*

*De façon générale quelles que soient les situations physiques rencontrées lorsque l'on veut calculer numériquement un écoulement autour d'un objet (tel l'exemple classique de l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion) on est amené à tronquer, plus ou moins arbitrairement, le domaine de calcul et partant de là il convient d'écrire des conditions aux limites réalistes sur les frontières non-physiques du domaine qui vont conduire à un problème bien posé mathématiquement et qui vont être capables de décrire fidèlement la réalité.*

*Typiquement, lorsque pour des grandes valeurs du nombre de Reynolds (le nombre de Reynolds mesure le poids relatif des termes visqueux et inertiels dans l'équation de Navier-Stokes) l'écoulement cesse d'être laminaire, les structures tourbillonnaires induisent en sortie (c'est à dire là où, en moyenne, le fluide sort du domaine), un champ de vitesse alternativement positif et négatif. Ainsi, bien que l'écoulement soit globalement sortant, on ne sait pas a priori si localement le champ de vitesse est sortant ou rentrant. En un point où le champ de vitesse est sortant, on comprend bien intuitivement qu'il n'est pas nécessaire d'imposer une condition aux limites alors qu'à l'inverse si le champ de vitesse est entrant, il faut absolument donner une condition aux limites en ce point. Pour plus d'explication dans cette remarque, on peut consulter le livre de Franck Boyer et Pierre Fabrie [11].*

## 2.1.2 État non stationnaire

Pour  $T > 0$  fixé (temps final), soient  $Q = [0, T] \times \Omega$ ,  $\Sigma_{di} = [0, T] \times \Gamma_{di}$ ,  $\Sigma_{ne} = [0, T] \times \Gamma_{ne}$  et  $\Sigma_i = [0, T] \times \Gamma_i$ . Considérons une trajectoire  $(\mathbf{u}, q)$  partant de la perturbation  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  de l'état de référence  $(\mathbf{v}_r, q_r)$  c'est à dire à  $t = 0$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_r(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  dans  $\Omega$ . Le nouveau état perturbé est alors la solution des équations de Navier-Stokes non stationnaire suivant, où un contrôle  $\mathbf{v}_c$  est

ajouté :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathbf{u} = \psi + \mathbf{v}_c & \text{sur } \Sigma_{di}, \\ \nu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} - q \mathbf{n} = \phi + \phi_c & \text{sur } \Sigma_{ne}, \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{v}_r(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Ici, l'expression  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  est définie comme étant l'accélération eulérienne du fluide. Nous désignons par  $\mathbf{v}_c$  et  $\phi_c$  les lois de contrôle de Dirichlet et Neumann respectivement :

$$\mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \phi_c = -\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]^- (\mathbf{u} - \mathbf{v}_r)$$

où  $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]^-(x) = -\min([\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}](x), 0)$ . La quantité  $\alpha_i$  est a priori inconnue. Le profil de contrôle fixe  $\mathbf{g}_i$  est défini dans  $\Gamma_i$  et satisfait aux conditions suivante :

$$\mathbf{g}_i \in \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_i, \quad (2.11)$$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n} \, d\zeta = 0. \quad (2.12)$$

La condition (2.11) s'interprète par le fait que le profil de contrôle n'est pas orthogonal au vecteur normale unitaire  $\mathbf{n}$ . Quant à (2.12), nous dirons que  $\mathbf{g}_i$  est à flux nul sur le bord  $\Gamma_i$ .

De plus, lorsqu'on se propose éventuellement d'assurer un profil normal au contrôle, la condition

$$\mathbf{g}_i(\zeta) \cdot \tau(\zeta) = 0, \quad \forall \zeta \in \Gamma_i \quad \text{et} \quad \forall \tau \in T_\zeta(\Gamma_i) \quad (2.13)$$

peut être ajoutée aux conditions (2.10) – (2.12), où l'espace tangent de  $\Gamma_i$  en  $\zeta$ , noté  $T_\zeta(\Gamma_i)$ , est défini comme l'ensemble de tous les vecteurs tangents en  $\zeta$ . Par exemple, en supposant que la frontière  $\Gamma$  soit assez régulière pour que  $\mathbf{n}$  soit dans  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , nous considérons  $\mathbf{h}_j$ ,  $j = 0, 1$ , définie sur  $\Gamma_i$ ,  $i \in I$ , comme suit :

$$\mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\|^2}{r_j^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\|^2}\right) \mathbf{n} & \text{si } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_j, r_j) \cap \Gamma_i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $B(\mathbf{x}_j, r_j)$  est la boule ouverte centrée en  $\mathbf{x}_j \in \Gamma_i$ , de rayon  $r_j$  tel que  $B(\mathbf{x}_0, r_0) \cap B(\mathbf{x}_1, r_1) = \emptyset$ . En choisissant  $r_0$  et  $r_1$  de manière appropriée, on peut satisfaire l'égalité (2.14). Si  $\beta_j$ ,  $j = 0, 1$ , est défini par :

$$\beta_j = \int_{B(\mathbf{x}_j, r_j) \cap \Gamma_i} \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{n} \, d\zeta,$$

le profil de contrôle  $\mathbf{g}_i = \beta_0 \mathbf{h}_1 - \beta_1 \mathbf{h}_0$  satisfait non seulement (2.10) – (2.12), mais aussi (2.13). Toutefois, il convient de noter que la condition (2.13) n'est pas nécessaire pour construire la loi de contrôle dans ce mémoire. On peut aussi considérer  $\mathbf{g}_i(\zeta) = \beta_0 \mathbf{h}_1(\zeta) - \beta_1 \mathbf{h}_0(\zeta) + A(\zeta)\tau(\zeta)$ , où  $A(\zeta)$  est une fonction suffisamment régulière.

### 2.1.3 Équations de Navier-Stokes à stabiliser

En faisant la différence entre (2.9) et (2.8), on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}_r) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{v}_r \cdot \nabla)\mathbf{v}_r + \nabla(q - q_r) = 0 & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_r) = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathbf{u} - \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_c & \text{sur } \Sigma_{di}, \\ \nu \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_r)\mathbf{n} - (q - q_r)\mathbf{n} = \phi_c & \text{sur } \Sigma_{ne}, \\ \mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{v}_r(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

On pose  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_r$  et  $p = q - q_r$ . Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \\ \mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) + \mathbf{v}_r(\mathbf{x}). \end{array} \right.$$

En revenant au système (2.15), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + ((\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \nabla)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) - (\mathbf{v}_r \cdot \nabla)\mathbf{v}_r + \nabla p = 0 & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_c & \text{sur } \Sigma_{di}, \\ \nu \nabla \mathbf{v} \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \phi_c & \text{sur } \Sigma_{ne}, \\ \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Afin de gérer les nouvelles inconnues  $\alpha_i$ , nous définissons des lois de contrôle de telle sorte que :

$$\int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{v} \mathbf{n} - p \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta = f_i(\mathbf{v}), \quad i = 1, \dots, N,$$

où  $f_i$  est la loi de contrôle à définir à la sous section 2.2.2. Il faudra noter ici que la loi de contrôle  $f_i$  fera partie des éléments qui nous permettront dans la suite d'obtenir la décroissance exponentielle désirée pour  $\mathbf{v}$ , à savoir :

$$\|\mathbf{v}(t)\|_{X(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}_0\|_{X(\Omega)} e^{-\sigma t}, \quad t \in (0, \infty)$$

où  $\sigma > 0$  est un taux de décroissance et  $X(\Omega)$  est un espace adéquat.

Sachant que :

$$\left( (\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \nabla \right) (\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_r + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r,$$

nous obtenons le système suivant dont nous ferons l'étude de stabilité tout en prouvant l'existence de la solution dans le chapitre 3.

$$\left\{ \begin{array}{ll} a. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_r + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0 & \text{dans } Q, \\ b. \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } Q, \\ c. \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) & \text{sur } \Sigma_{di}, \\ d. \nu \nabla \mathbf{v} \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -\frac{1}{2} [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \mathbf{v} & \text{sur } \Sigma_{ne}, \\ e. \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{v} \mathbf{n} - p \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i d\zeta = f_i(\mathbf{v}), \quad i = 1, \dots, N, \\ f. \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Dans le but de stabiliser la solution non stationnaire  $\mathbf{u}$  de (2.9), pour un taux de décroissance prescrit  $\sigma > 0$ , nous avons besoin de trouver un contrôle  $\mathbf{v}_c$  (c'est la raison pour laquelle nous l'avons ajouté dans le système (2.9) en plus de la façon dont nous l'avons conçu) de telle sorte que la composante  $\mathbf{v}$  de la solution  $(\mathbf{v}, p)$  du problème (2.17) satisfasse la décroissance exponentielle

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq C \|\mathbf{v}_0\| e^{-\sigma t}, \quad t \in (0, \infty),$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\mathbf{v}_0$ . Et dans ce document, nous montrons même que  $C = 1$ .

**Remarque 5.** *Le fait de considérer le côté droit de la condition de Neumann comme étant du second degré en terme de vitesse a un sens, du point de vu de la mécanique. Ceci, si l'on se réfère au théorème de Bernoulli, où la pression est proportionnelle au carré de la vitesse, le long des lignes de courant. De plus, en regardant de plus près cette condition et en revenant à la variable initiale  $\mathbf{u}$ , nous avons :*

$$\nu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} - q \mathbf{n} = \phi - \frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]^- (\mathbf{u} - \mathbf{v}_r) \quad \text{sur } \Sigma_{ne}.$$

*Dans la stabilisation du système (2.17), on peut considérer le contrôle situé à la frontière de Neumann étant l'énergie cinétique résiduelle entrant.*

Pour étudier le système (2.17), nous avons besoin de définir un espace fonctionnel dans lequel nous chercherons la solution  $\mathbf{v}$  du système après avoir donné sa formulation variationnelle (dans le chapitre 3).

## 2.2 Base hilbertienne et loi de contrôle

### 2.2.1 Base hilbertienne

Soient  $\{\mathbf{z}_j, \lambda_j, j = 1, 2, 3, \dots\}$  les fonctions propres et les valeurs propres du problème spectral suivant pour l'opérateur de Stokes :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{z}_j + \nabla p_j = \lambda_j\mathbf{z}_j, \\ \nabla \cdot \mathbf{z}_j = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{z}_j = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.18)$$

Les valeurs propres vérifient  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j$  quand  $j \rightarrow \infty$  (voir [32]). En plus, les  $\{\mathbf{z}_j\}$  forment une base orthonormée dans  $\mathbf{V}_0(\Omega)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k \rangle = \delta_{jk}, \\ \langle \nabla\mathbf{z}_j, \nabla\mathbf{z}_k \rangle = \lambda_j\delta_{jk}, \quad \forall j, k. \end{cases} \quad (2.19)$$

Puisque  $\lambda_j$  dans le système (2.19) tend vers l'infini lorsque  $j \rightarrow \infty$  alors pour un taux de décroissance prescrit  $\sigma > 0$ , on trouve toujours  $N_\sigma$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$  tel que :

$$\sigma \leq \sigma_{N_\sigma} = \frac{\nu}{4}\lambda_{N_\sigma+1} - \left(\frac{2}{3\nu}\right)^3 C^4 \|\nabla\mathbf{v}_r\|_{L^2(\Omega)}^4 \quad (2.20)$$

où  $C$  est une constante provenant des inégalités de Sobolev. Notons que l'expression  $\left(\frac{2}{3\nu}\right)^3 C^4 \|\nabla\mathbf{v}_r\|_{L^2(\Omega)}^4$  est obtenue de façon à assurer que la valeur propre  $\lambda_{N_\sigma+1}$  soit assez grande pour que  $\sigma_{N_\sigma}$  soit positif. On verra l'utilité de cette estimation du taux de décroissance  $\sigma$  dans le chapitre 3. Bref, ça nous permettra de stabiliser facilement l'état d'équilibre instable du système de Navier-Stokes (2.17) c'est à dire de prouver la décroissance exponentielle de la solution  $\mathbf{v}$  du système. Toujours en notant  $N_\sigma$  par  $N$  dans la suite de ce mémoire, nous définissons  $I = \{1, \dots, N\}$ .

Considérons le problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\psi_i + \nabla q_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \psi_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_i = \mathbf{g}_i & \text{sur } \Gamma_{di}, \\ \nu\nabla\psi_i \cdot \mathbf{n} - q_i\mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{ne}, \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.21)$$

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes (termes inertiels absents ou négligés). Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule lentement en un lieu

étroit ou autour d'un petit objet, les effets visqueux dominant sur les effets inertiels. Son écoulement est alors appelé écoulement de Stokes. On parle aussi d'écoulement à faible nombre de Reynolds. Ce nombre de Reynolds est alors beaucoup plus petit que 1. Contrairement à l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Stokes est linéaire.

Grâce aux conditions (2.10) et (2.12), le problème de Stokes (2.21) admet une solution unique  $(\psi_i, q_i)$  appartenant à  $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  (voir [11], Proposition III.4.1). De plus, les  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_N, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \dots$ , sont linéairement indépendants. Par conséquent, nous choisissons de chercher la solution  $\mathbf{v}$  de (2.17) dans l'espace

$$\mathbf{W}(\Omega) = \text{vect}(\psi_n + \mathbf{z}_n)_{\{n < N+1\}} \oplus \text{vect}(\mathbf{z}_n)_{\{n > N\}}. \quad (2.22)$$

Nous ne proposerons pas de norme particulière pour l'espace  $\mathbf{W}(\Omega)$  car nous n'en avons pas besoin dans ce travail. De plus, la solution  $\mathbf{v}$  peut être écrite comme :

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{z}, \quad \text{où } \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{w}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \theta_i \mathbf{z}_i, \quad (2.23)$$

avec  $\mathbf{w}_i = \psi_i + \mathbf{z}_i$ , pour  $i \in I$ . On pose  $r_i = q_i + p_i$ <sup>1</sup>.

Ainsi, on définit l'espace  $\mathbf{W}(\Omega)$  par :

$$\mathbf{W}(\Omega) = \text{vect}(\mathbf{w}_n)_{\{n < N+1\}} \oplus \text{vect}(\mathbf{z}_n)_{\{n > N\}}. \quad (2.24)$$

## 2.2.2 Loi de contrôle

Pour  $i \in I$ , la loi de contrôle est définie par :

$$f_i(\mathbf{v}) = a_i \alpha_i^2 + b_i \alpha_i - (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \left( \alpha_i \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right) \quad (2.25)$$

où  $\lambda_{N+1}$  est définie dans (2.19),  $0 < \varepsilon < \nu$  et

$$a_i = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} |\mathbf{g}_i|^2 (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta \quad \text{et} \quad b_i = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} |\mathbf{g}_i|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta.$$

Le paramètre  $\varepsilon$  est inconnu pour l'instant mais nous montrerons au chapitre 3 qu'il dépend de la viscosité du fluide  $\nu$  et qu'il vaut même trois quart de celle-ci dans le but d'optimiser le choix de la valeur propre  $\lambda_{N+1}$  pour des besoins de démonstration dans ce même chapitre.

Nous rappelons ici que la loi de contrôle  $f_i(\mathbf{v})$  est conçue de façon à nous

---

1. Nous utiliserons cette écriture dans la section 2.3

permettre dans la suite de montrer que la vitesse  $\mathbf{v}$  du fluide, solution au système de Navier-Stokes (2.17), satisfait la décroissance exponentielle :

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\sigma t}, \quad \forall t > 0,$$

pour un taux de décroissance prescrit  $\sigma > 0$  et  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$  étant la donnée initiale arbitraire.

**Remarque 6.** *Le principe de construction de la loi de contrôle sera vu lors de la démonstration de l'estimation (3.7) dans le chapitre 3. En fait, l'idée vient du fait de vouloir contrôler (simplifier) certains paramètres qui interviennent dans les estimations de certains termes de la formulation variationnelle du système de Navier-Stokes afin d'assurer la décroissance exponentielle de la vitesse  $\mathbf{v}$ , solution du problème.*

## 2.3 Construction de l'opérateur feedback

Nous mentionnons cette section afin de montrer que  $\alpha(t)$  dépend non linéairement de  $\mathbf{v}$ , par conséquent écrire  $\alpha(\mathbf{v}(t))$ , et satisfait une loi de contrôle non linéaire. Pour simplifier,  $\alpha(\mathbf{v}(t))$  est noté  $\alpha$  dans la suite.

Dans le système (2.17), on peut exploiter la condition (2.17)<sub>e</sub> pour réduire le système. En effet, nous utilisons ces identités et la décomposition ci-dessous :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{w}_i + \mathbf{z}, \quad p = \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i + q \quad \text{où} \quad \mathbf{z} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \theta_i \mathbf{z}_i, \quad q = \sum_{i=N+1}^{\infty} \theta_i p_i. \quad (2.26)$$

Définissons la matrice et le vecteur  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{F}$  comme suit :

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n} - r_j \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.27)$$

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{v}) = - \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} - q \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta + f_i(\mathbf{v}), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.28)$$

Ainsi, à partir de l'équation (2.17)<sub>e</sub>, on peut déduire la relation exprimant  $\alpha$  en fonction de  $\mathbf{v}$  :

$$\mathcal{M}\alpha = \mathcal{F}(\mathbf{v}). \quad (2.29)$$

En effet, nous avons :

$$\mathcal{M}\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n} - r_j \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta \right) \alpha_j \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i(\mathbf{v}) \\
&= \sum_{i=1}^N \left( - \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} - q \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta \right) + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{v} \mathbf{n} - p \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n} - (p - q) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left[ \nu \nabla \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{w}_j \right) \cdot \mathbf{n} - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j r_j \right) \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta \\
\mathcal{F}(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_i} [\nu \nabla \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n} - r_j \mathbf{n}] \cdot \mathbf{g}_i \, d\zeta \right) \alpha_j \quad (**).
\end{aligned}$$

De (\*) et (\*\*), nous obtenons l'égalité  $\mathcal{M}\alpha = \mathcal{F}(\mathbf{v})$ .  $\square$

**Remarque 7 (sur la loi de contrôle).** Notons que pour le calcul de la solution du système contrôlé, nous considérons la forme suivante de la loi de contrôle  $f_i(\mathbf{v})$  :

$$f_i(\mathbf{v}) = a_i \alpha_i^2 + b_i \alpha_i - (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \left( 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v} \rangle - \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right). \quad (2.30)$$

Car nous avons :

$$\alpha_i \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v} \rangle - \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle.$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\alpha_i \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle &= 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle + \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \\
&= 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{w}_j \rangle + \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \\
&= 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v} \rangle - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \\
&= 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{v} \rangle - \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle
\end{aligned}$$

$\square$

---

# Stabilisation des équations de Navier-Stokes

---

Cette partie concerne la stabilisation globale des équations de Navier-Stokes autour d'un équilibre instable avec le contrôle frontière mixte construit dans le chapitre précédent. Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans la première partie nous évoquons les résultats de stabilité. Dans la deuxième partie, nous montrons l'existence de la solution faible des équations de Navier-Stokes en dimension 3. Dans la troisième, nous prouvons l'unicité de la solution en dimension 2.

## 3.1 Résultats de stabilité

Dans cette partie, nous donnons d'abord la définition d'une solution du système de Navier-Stokes. Ensuite, nous mentionnons deux lemmes que nous utiliserons dans la suite pour montrer que certaines quantités sont bornées. Enfin, nous abordons les résultats de stabilité.

Afin de définir une forme faible des équations de Navier-Stokes, nous introduisons des formes bilinéaires et trilinéaires suivantes :

$$a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_2, \quad \forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega),$$
$$b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3, \quad \forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Ainsi, par intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{u}_j (\partial_j \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{u}_j \partial_j (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} (\partial_j \mathbf{u}_j) (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma} (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j) d\zeta. \end{aligned}$$

Comme nous traitons le cas d'un fluide incompressible,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^N \partial_j \mathbf{u}_j = 0.$$

Donc :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\zeta, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega). \quad (3.1)$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$|b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)| \leq \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}_2\| \|\mathbf{v}_3\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

De plus, avec l'inégalité de Sobolev (Théorème 11), il existe une constante  $C$  positive telle que :

$$\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}_1\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}_1\|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_3\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{v}_3\|;$$

par conséquent,

$$|b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)| \leq C \|\mathbf{v}_1\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}_1\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}_2\| \|\nabla \mathbf{v}_3\|. \quad (3.2)$$

Ces estimations sur la forme trilinéaire seront utilisées dans la suite pour des besoins de démonstration.

Maintenant, nous pouvons considérer la formulation variationnelle du système de Navier-Stokes.

**Définition 18.** Soient  $T > 0$  un nombre réel arbitraire et  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ . Nous dirons que  $\mathbf{v}$  est une solution faible du système (2.17) sur  $[0, T]$  si

- $\mathbf{v} \in [L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega))]$ ,
- il existe  $\alpha_i \in L^\infty(0, T)$  tel que  $\mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{g}_i$  sur  $\Gamma_i$ ,  $i \in I$ ,  $\mathbf{g}_i$  étant le profil de contrôle défini dans (2.10) – (2.12),

- pour tout  $\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \mathbf{w}_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} \tilde{\theta}_i \mathbf{z}_i \in \mathbf{W}(\Omega)$  où  $\mathbf{W}(\Omega)$  est défini dans (2.24), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \nu a(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) \\ \quad \quad \quad = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i f_i(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\zeta, \\ b. \quad \left( \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \right) (0) = \int_{\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Notons que la condition initiale (3.3)<sub>b</sub> est logique parce que pour toute solution  $\mathbf{v}$  de l'équation (3.3)<sub>a</sub>, nous avons  $t \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{v}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$  est continue en temps (voir Théorème 9).

Nous mentionnons que les conditions (2.10) et (2.11) permettent d'obtenir le Lemme suivant dont la preuve est donnée dans [20]. Ce Lemme nous sera d'une grande utilité dans la suite.

**Lemme 1.** *Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}(\Omega)$  défini dans (2.26) avec  $\alpha_i \in L^\infty(0, T)$ . Il existe des constantes  $C_i > 0$  telles que :*

$$|\alpha_i| \leq C_i \|\mathbf{v}\|, \quad i \in I. \quad (3.4)$$

De plus en utilisant (3.4), on obtient le Lemme suivant :

**Lemme 2.** *Pour tout  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{z} \in \mathbf{W}(\Omega)$ , avec  $\mathbf{w} \in \text{vect}(\mathbf{w}_n)_{\{n < N+1\}}$  et  $\mathbf{z} \in \text{vect}(\mathbf{z}_n)_{\{n > N\}}$ ,  $\mathbf{w}$  satisfait :*

$$\|\mathbf{w}\| \leq C_N \|\mathbf{v}\|, \quad (3.5)$$

où

$$C_N = \left( \sum_{i=1}^N C_i^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} |C_i| |C_j| |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle| \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

**Preuve :**

En développant  $\|\mathbf{w}\|^2$ , nous obtenons à partir de l'équation (2.26) et de l'inégalité (3.4) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \alpha_i \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} |\alpha_i| |\alpha_j| |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^N C_i^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} |C_i| |C_j| |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle| \right) \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous donnons maintenant les résultats de stabilité dans le théorème suivant. Il s'agit de la décroissance exponentielle de la vitesse  $\mathbf{v}$  du fluide, solution des équations de Navier-Stokes, lorsque le profil de contrôle satisfait certaines conditions avec un taux de décroissance positif prescrit. De plus, l'existence d'une solution faible des équations de Navier-Stokes en dimension 3 et son unicité en dimension 2 sont mentionnées.

**Théorème 12.** Soient  $d \in \{2, 3\}$  la dimension de l'espace et  $\sigma > 0$  un taux prescrit de décroissance satisfaisant :

$$\sigma \leq \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} - \left( \frac{2}{3\nu} \right)^3 C^4 \|\nabla \mathbf{v}_r\|_{L^2(\Omega)}^4.$$

où  $\mathbf{v}_r$  est la solution de (2.8) et  $\lambda_{N+1}$  est une valeur propre du problème spectral (2.18). Soit  $\mathbf{g}_i$  le profil de contrôle satisfaisant :

$$\mathbf{g}_i \in \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i), \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_i, \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n} \, d\zeta = 0.$$

Soit  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ , une donnée initiale arbitraire. Il existe donc une solution faible  $\mathbf{v}$  du système (2.17) au sens de la définition 18. De plus,  $\mathbf{v}$  satisfait les estimations suivantes :

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| e^{-\sigma t}, \quad \forall t > 0 \quad (3.7)$$

$$\int_0^\infty e^{2\eta s} \|\nabla \mathbf{v}(s)\|^2 ds \leq C, \quad \forall \eta < \sigma \quad (3.8)$$

où  $C$  est une constante.

De plus, lorsque  $d = 2$ , la solution est unique.

**Remarque 8.** Notons qu'à partir de l'inégalité (3.8), on déduit la convergence exponentielle de la norme  $H^1$  de  $\mathbf{v}$  vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $\infty$ . En effet, lorsque (3.8) est satisfaite alors  $e^{2\eta t} \|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2$  est bornée. Donc il existe une constante  $C > 0$  tel que  $\|\nabla \mathbf{v}(t)\|^2 \leq C e^{-2\eta t}$ .

### Preuve du Théorème 12 :

Pour la démonstration de ce théorème, nous commençons d'abord par montrer les estimations (3.7) et (3.8).

En prenant  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{w}_i + \sum_{i=N+1}^\infty \alpha_i \mathbf{z}_i$  dans l'équation (3.3)<sub>a</sub>, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}) \\ = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \, d\zeta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En utilisant l'égalité (3.1), nous obtenons respectivement :

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta = \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i^3 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta, \quad (3.10)$$

$$b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta = \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta. \quad (3.11)$$

En effet, pour prouver (3.10), on utilise le fait que  $\mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{g}_i$  sur  $\Gamma_i \subset \Gamma_{di}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  où  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  et  $\cup_{i=1}^N \overline{\Gamma_i} \subset \Gamma_{di}$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{di}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 \times \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} |\mathbf{g}_i|^2 (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i^3 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta \text{ où } a_i = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} |\mathbf{g}_i|^2 (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta. \end{aligned}$$

Ainsi, nous prouvons (3.11) de la même manière :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{di}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \times \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} |\mathbf{g}_i|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta \text{ où } b_i = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} |\mathbf{g}_i|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta. \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à borner  $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v})$ .

L'utilisation de (3.2) entraîne :

$$|b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{v}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}_r\| \|\nabla \mathbf{v}\|.$$

En appliquant l'inégalité de Young (1.7) avec :

$$a = \|\nabla \mathbf{v}\|, \quad b = C \|\mathbf{v}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}_r\|, \quad p = q = 2 \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_1,$$

on a :

$$|b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v})| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{C^2}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{v}_r\|^2.$$

En appliquant une deuxième fois l'inégalité de Young à

$$\frac{C^2}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{v}_r\|^2,$$

on obtient :

$$|b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v})| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \left( \frac{C^2}{2\varepsilon_1} \|\nabla \mathbf{v}_r\|^2 \right)^2 \|\mathbf{v}\|^2.$$

En prenant  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , nous déduisons que :

$$|b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v})| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \left( \frac{C^4}{8\varepsilon^3} \|\nabla \mathbf{v}_r\|^4 \right) \|\mathbf{v}\|^2. \quad (3.12)$$

La définition de la loi de contrôle dans (2.25) conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i^3 + \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 \\ &- (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right). \end{aligned}$$

Or, d'après la décomposition (2.26) donnée dans le chapitre 2, nous avons :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{w}_i + \mathbf{z}.$$

Donc :

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle + \|\mathbf{z}\|^2.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i^3 + \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 - (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \left( \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 \right). \quad (3.13)$$

L'utilisation de (3.10) – (3.13) dans l'égalité (3.9) conduit à :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i^3 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta + \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \, d\zeta - \varepsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 - \frac{C^4}{8\varepsilon^3} \|\nabla \mathbf{v}_r\|^4 \|\mathbf{v}\|^2 \leq \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i^3 + \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 \\ &- (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \left( \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 \right) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \, d\zeta. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \, d\zeta + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \, d\zeta \\ &+ (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \|\mathbf{v}\|^2 - \varepsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 - \frac{C^4}{8\varepsilon^3} \|\nabla \mathbf{v}_r\|^4 \|\mathbf{v}\|^2 \leq (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2. \end{aligned}$$

Notons  $[(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+(x) = \max([( \mathbf{v} + \mathbf{v}_r ) \cdot \mathbf{n}](x), 0)$ , la partie positive de  $[(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]$ . Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + (\nu - \varepsilon) \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+ \, d\zeta \\ &\leq (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$C_\varepsilon = (\nu - \varepsilon)\lambda_{N+1} - \frac{C^4}{8\varepsilon^3}\|\nabla\mathbf{v}_r\|^4,$$

avec  $\lambda_{N+1}$  assez grande pour que  $C_\varepsilon$  soit positif, à savoir

$$h(\varepsilon) = \frac{C^4}{8(\nu - \varepsilon)\varepsilon^3}\|\nabla\mathbf{v}_r\|^4 < \lambda_{N+1}. \quad (3.15)$$

Pour optimiser le choix de  $\lambda_{N+1}$  dans (3.15), nous cherchons  $\varepsilon \in ]0, \nu[$  qui minimise  $h$ . Par conséquent,  $\varepsilon$  est tel que  $h'(\varepsilon) = 0$ . Après avoir dérivé et calculé, nous trouvons :

$$\varepsilon = \frac{3\nu}{4} \quad (3.16)$$

qui est unique.

Notons que, pour tout  $i \in I$  et  $j > N$ , nous avons  $\langle \nabla\mathbf{w}_i, \nabla\mathbf{z}_j \rangle = 0$ . Par conséquent, nous déduisons l'égalité suivante :

$$\|\nabla\mathbf{v}\|^2 = \|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \|\nabla\mathbf{z}\|^2. \quad (3.17)$$

En utilisant les égalités (3.16) et (3.17) dans l'inégalité (3.14), il s'en suit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla\mathbf{z}\|^2 + \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\mathbf{v}\|^2 - \left(\frac{2}{3\nu}\right)^3 C^4 \|\nabla\mathbf{v}_r\|^4 \|\mathbf{v}\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+ d\zeta \leq \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2. \end{aligned}$$

En factorisant une partie par  $\|\mathbf{v}\|^2$ , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla\mathbf{z}\|^2 + \left(\frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} - \left(\frac{2}{3\nu}\right)^3 C^4 \|\nabla\mathbf{v}_r\|^4\right) \|\mathbf{v}\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+ d\zeta \leq \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2. \end{aligned}$$

Donc en posant  $\sigma_N = \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} - \left(\frac{2}{3\nu}\right)^3 C^4 \|\nabla\mathbf{v}_r\|^4$ , comme défini dans (2.20), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla\mathbf{w}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla\mathbf{z}\|^2 + \sigma_N \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+ d\zeta \\ & \leq \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Comme

$$\mathbf{z} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{z}_i \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^2 \|\mathbf{z}_i\|^2 + 2 \sum_{N+1 \leq i < j} \alpha_i \alpha_j \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle.$$

Nous avons donc :

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^2, \text{ car } \|\mathbf{z}_i\|^2 = \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i \rangle = 1 \text{ et } \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle = 0;$$

vu que dans le chapitre 2 nous avons précisé que les  $\{\mathbf{z}_j\}$  forment une base orthonormée dans  $\mathbf{V}_0(\Omega)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k \rangle = \delta_{jk}, \\ \langle \nabla \mathbf{z}_j, \nabla \mathbf{z}_k \rangle = \lambda_j \delta_{jk}, \quad \forall j, k. \end{cases} \quad (3.19)$$

De la même manière, nous avons :  $\nabla \mathbf{z} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i \nabla \mathbf{z}_i$ .

Donc :

$$\|\nabla \mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^2 \|\nabla \mathbf{z}_i\|^2 + 2 \sum_{N+1 \leq i < j}^{\infty} \alpha_i \alpha_j \langle \nabla \mathbf{z}_i, \nabla \mathbf{z}_j \rangle.$$

D'où :

$$\|\nabla \mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2, \text{ car } \|\nabla \mathbf{z}_i\|^2 = \langle \nabla \mathbf{z}_i, \nabla \mathbf{z}_i \rangle = \lambda_i \text{ et } \langle \nabla \mathbf{z}_i, \nabla \mathbf{z}_j \rangle = 0.$$

Ainsi, nous avons :

$$\lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2 = \lambda_{N+1} \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i^2 \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2 = \|\nabla \mathbf{z}\|^2.$$

D'après l'inégalité (3.18), nous avons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{w}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{z}\|^2 + \sigma_N \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+ d\zeta \leq \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{z}\|^2.$$

Ainsi, il s'en suit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{w}\|^2 + \sigma_N \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+ d\zeta \leq 0. \quad (3.20)$$

Par conséquent, pour tout  $\sigma$  tel que  $0 < \sigma \leq \sigma_N$ , nous avons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \sigma \|\mathbf{v}\|^2 \leq 0, \quad (3.21)$$

Donc  $\frac{d}{dt} \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \leq -2\sigma$  entraine après intégration :

$$\|\mathbf{v}\|^2 \leq K e^{-2\sigma t} \quad \text{avec} \quad K = \|\mathbf{v}(0)\|^2.$$

Donc  $\mathbf{v}$  satisfait l'estimation ci-dessous :

$$\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}(0)\|e^{-\sigma t}. \quad (3.22)$$

De plus, prendre  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(0)$  dans l'égalité (3.3)<sub>b</sub>, conduit à :

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}(0)|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}(0) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_0|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{v}(0)|^2,$$

car

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(0))^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{v}_0|^2 + \int_{\Omega} |\mathbf{v}(0)|^2 - 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}(0) \geq 0.$$

Donc, nous avons :

$$2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \leq \|\mathbf{v}_0\|^2 + \|\mathbf{v}(0)\|^2.$$

Par conséquent,

$$\|\mathbf{v}(0)\|^2 \leq \|\mathbf{v}_0\|^2. \quad (3.23)$$

Donc, en revenant à (3.22), il s'en suit :

$$\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}_0\|e^{-\sigma t}. \quad (3.24)$$

Ainsi, nous avons montré la première estimation (3.7) du théorème 12.

Maintenant il reste à prouver l'estimation (3.8).

Puisque  $\sigma_N > 0$ , on part de l'inégalité (3.14) et de l'égalité (3.16) pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C_{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^+ d\zeta \leq \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2.$$

Ce qui permet d'avoir, sachant que  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ , le résultat suivant :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \leq \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\mathbf{z}\|^2 = \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2.$$

Comme  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2$  entraîne que  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \leq 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2$ , on a donc en majorant  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$  de l'inégalité précédente :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \leq \frac{\nu}{2} \lambda_{N+1} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{2} \lambda_{N+1} \|\mathbf{w}\|^2. \quad (3.25)$$

Or d'après le Lemme 2, nous avons  $\|\mathbf{w}\| \leq C_N \|\mathbf{v}\|$  pour tout  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{z} \in \mathbf{W}(\Omega)$ . Donc en majorant  $\|\mathbf{w}\|$  par  $C_N \|\mathbf{v}\|$  dans l'inégalité (3.25) et en posant  $M_N = \nu \lambda_{N+1} (1 + C_N^2)$ , il s'en suit :

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \leq M_N \|\mathbf{v}\|^2. \quad (3.26)$$

En multipliant (3.26) par  $e^{2\eta t}$ , où  $\eta < \sigma$ , puis en intégrant sur  $(0, t)$  et en utilisant l'estimation de stabilité (3.24), nous obtenons :

$$\begin{aligned} e^{2\eta t} \|\mathbf{v}\|^2 + 2\nu \int_0^t e^{2\eta s} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 ds &\leq \|\mathbf{v}_0\|^2 + 2(M_N + \eta) \int_0^t e^{2\eta s} \|\mathbf{v}\|^2 ds \\ &\leq \left( 1 + 2(M_N + \eta) \int_0^t e^{-2(\sigma-\eta)s} ds \right) \|\mathbf{v}_0\|^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Par conséquent, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $T$  telle que :

$$\int_0^T e^{2\eta s} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 ds \leq C \|\mathbf{v}_0\|^2. \quad (3.28)$$

Ainsi l'estimation (3.8) est atteinte.  $\square$

## 3.2 Existence

La preuve de l'existence de la solution suit une procédure standard. Dans un premier temps, la suite de solutions approximatives est construite via la méthode de Galerkin. Ensuite, un résultat de compacité nous permet de passer à la limite dans le système satisfait par les solutions approximatives en passant par des limites supplémentaires.

### 3.2.1 Méthode de Galerkin

Pour tout  $m > N$ , nous définissons l'espace  $\mathbf{W}_m$  comme suit :

$$\mathbf{W}_m = \text{vect}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_m\})$$

où

$$\mathbf{w}_i = \begin{cases} \mathbf{w}_i & \text{si } 1 \leq i \leq N, \\ \mathbf{z}_i & \text{si } N + 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (3.29)$$

Ainsi, pour  $\mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m$ , nous écrivons  $\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^m \phi_{im} \mathbf{w}_i$  et définissons le système non linéaire de dimension finie suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \langle \partial_t \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_j \rangle + \nu a(\mathbf{v}_m, \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_j) \\ \quad + b(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_j) = \sum_{l=1}^N \delta_{lj} f_l(\mathbf{v}_m) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_j d\zeta \\ (b) \quad \langle \mathbf{v}_m(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_j \rangle = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (3.30)$$

où  $\delta_{lj}$  définit le symbole de Kronecker et pour  $\mathbf{z}_m = \sum_{i=N+1}^m \phi_{im} \mathbf{w}_i$ ,

$$f_l(\mathbf{v}_m) = a_l \phi_{lm}^2 + b_l \phi_{lm} - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \phi_{lm} \|\mathbf{w}_l\|^2 - \frac{\nu}{2} \lambda_{N+1} \langle \mathbf{w}_l, \mathbf{z}_m \rangle - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \sum_{i=1, i \neq l}^N \phi_{im} \langle \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_i \rangle, \quad 1 \leq l \leq N. \quad (3.31)$$

Rappelons que  $\phi_{im}$  est à priori inconnue et satisfait, grâce à (3.31), à une loi de contrôle non linéaire conduisant à la recherche de  $\phi_{im}(\mathbf{v}_m(t))$ . Par souci de simplicité,  $\phi_{im}(\mathbf{v}_m(t))$  sera notée  $\phi_{im}$  dans la suite.

**Lemme 3.** *Le problème discret (3.30) admet une solution unique  $\mathbf{v}_m \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{W}_m)$ .*

*De plus, cette solution satisfait :*

$$\|\mathbf{v}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla \mathbf{v}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \quad (3.32)$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $m$ .

**Preuve :** En écrivant (3.30) en fonction de  $\phi_{im}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \frac{d\phi_{im}}{dt} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle + \sum_{i=1}^m \phi_{im} (\nu a(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{v}_r, \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_j)) \\ + \sum_{i,k=1}^m \phi_{km} \phi_{im} b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j) = \sum_{l=1}^N \delta_{lj} f_l(\mathbf{v}_m) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_j d\zeta \\ \sum_{i=1}^m \phi_{im}(0) \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_j \rangle, \quad \text{pour } j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.33)$$

Puisque la matrice à coefficients  $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ) est non singulière, le système (3.33) se réduit à un système non linéaire avec des coefficients constants

$$\begin{cases} \frac{d\phi_{im}}{dt} + \sum_{j=1}^m \phi_{jm} X_{ij} + \sum_{j,k=1}^m \phi_{km} \phi_{jm} Y_{ijk} = \\ \left( \sum_{j=1}^m \delta_{lj} f_l(\mathbf{v}_m) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_j d\zeta \right) Z_{ij} \\ \phi_{im}(0) = \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_j \rangle Z_{ij} \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $X_{ij}, Y_{ijk}, Z_{ij} \in \mathbb{R}$ . Donc il existe  $T_m$  ( $0 < T_m \leq T$ ) tel que le système différentiel non linéaire (3.34) admette une solution maximale définie sur un certain intervalle  $[0, T_m]$ . Pour montrer que  $T_m$  est indépendant de  $m$ , il suffit de

vérifier que  $\phi_{im}$  est bornée. Suivant la même procédure que celle de dérivation des estimations (3.24) et (3.28), nous obtenons :

$$\begin{cases} a. & \|\mathbf{v}_m(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\|e^{-\sigma t}, \quad \forall t > 0 \\ b. & \int_0^T e^{2\eta s} \|\nabla \mathbf{v}_m(s)\|^2 ds \leq C. \end{cases} \quad (3.35)$$

Par conséquent, grâce à l'inégalité (3.35)<sub>a</sub>, on obtient  $T_m = T$ .  $\square$

De plus, une conséquence des estimations (3.35) est que la suite  $(\mathbf{v}_m)_m$  est bornée dans  $L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$  et  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ . Donc, pour une sous suite de  $\mathbf{v}_m$  (encore notée  $\mathbf{v}_m$ ), les estimations dans (3.35) donnent, lorsque  $m$  tend vers  $\infty$ , les convergences faibles suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_m \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \\ \mathbf{v}_m \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega)). \end{cases} \quad (3.36)$$

Néanmoins, les convergences dans (3.36) ne sont pas suffisantes pour passer à la limite dans la formulation faible (3.30), à cause de la présence du terme d'inertie (non linéaire). Pour passer à la limite dans le terme non linéaire, il faut obtenir un résultat de convergence forte. Par conséquent, nous devons obtenir des limites supplémentaires afin d'utiliser la théorie de compacité sur la suite de solutions approximatives  $(\mathbf{v}_m)_m$ .

### 3.2.2 Limites supplémentaires

Puisque les convergences faibles ne sont pas suffisantes pour passer à la limite dans (3.30), à cause du terme non linéaire qui n'est pas faiblement continu, cherchons plus d'estimation  $\mathbf{v}_m$ . Comme dans [23], supposons que  $B_0, B$  et  $B_1$  sont trois espaces de Hilbert tels que  $B_0 \subset B \subset B_1$ . Si  $\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow B_1$  est une fonction, on note par  $\widehat{\mathbf{v}}$  sa transformée de Fourier.

$$\mathcal{F}(\mathbf{v})(\tau) = \widehat{\mathbf{v}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\tau} \mathbf{v}(t) dt.$$

Rappelons l'identité suivante sur la transformation de Fourier des opérateurs différentiels qui sera utilisée dans la suite de ce mémoire :

$$\widehat{D_t^\gamma \mathbf{v}}(\tau) = (2i\pi\tau)^\gamma \widehat{\mathbf{v}}(\tau),$$

pour  $\gamma > 0$  donné et définissons l'espace

$$H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1) = \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}, B_0), D_t^\gamma \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}, B_1) \right\}.$$

L'espace  $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$  est muni de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)} = \left( \|\mathbf{v}\|_{L^2(\mathbb{R}, B_0)}^2 + \|\tau^\gamma \widehat{\mathbf{v}}\|_{L^2(\mathbb{R}, B_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous définissons également  $H^\gamma(0, T; B_0, B_1)$  comme l'espace des fonctions obtenues par restriction sur  $[0, T]$  des fonctions de  $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$ .

Nous rappelons le résultat suivant (voir [23]) :

**Lemme 4.** *Soient  $B_0, B$  et  $B_1$  trois espaces de Hilbert tels que  $B_0 \subset B \subset B_1$  avec inclusion compacte de  $B_0$  dans  $B$ . L'injection  $H^\gamma(0, T; B_0, B_1) \rightarrow L^2(0, T; B)$  est compacte.*

Pour l'application de ce Lemme dans la suite, on pose :

$$B_0 = \mathbf{V}(\Omega), \quad B = \mathbf{H}(\Omega), \quad B_1 = \mathbf{H}(\Omega), \quad \gamma = \frac{1}{4} - \varepsilon \geq 0.$$

Les principaux résultats de la présente section sont fournis en utilisant les deux Lemmes préliminaires suivants.

En utilisant le Théorème de trace (Théorème 6), nous prouvons un Lemme préliminaire qui permet d'estimer le terme du côté droit de la condition de Neumann.

**Lemme 5.** *La suite  $\mathbf{v}_m$ , solution du problème discret (3.30), satisfait l'estimation de trace suivante*

$$\int_{\Gamma_{ne}} |\mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r) \cdot \mathbf{n}] \bar{\mathbf{v}}_m) | \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_m | \, d\zeta \leq C \|\hat{\mathbf{v}}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (3.37)$$

De plus,  $\forall \tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \mathbf{w}_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} \tilde{\theta}_i \mathbf{z}_i \in \mathbf{W}(\Omega)$ , nous avons

$$\int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \longrightarrow \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \quad (3.38)$$

où  $\mathbf{v}$  est la limite faible de  $\mathbf{v}_m$  dans (3.36).

**Preuve :**

En se référant au Théorème de trace (Théorème 6) dans les espaces de Sobolev,

$$\text{pour tout } r \leq 4 \text{ l'injection } H^1(\Omega) \rightarrow L^r(\Gamma) \text{ est compacte.} \quad (3.39)$$

Rappelons que :

$$\int_{\Gamma_{ne}} |\mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r) \cdot \mathbf{n}] \bar{\mathbf{v}}_m) \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_m | \, d\zeta \leq \|\mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r) \cdot \mathbf{n}] \bar{\mathbf{v}}_m)\|_{L^2(\Gamma_{ne})} \|\bar{\tilde{\mathbf{v}}}_m\|_{L^2(\Gamma_{ne})}. \quad (3.40)$$

L'une des deux conséquences de l'inégalité de Hölder permet d'avoir :

$$\|[(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m\|_{L^2(\Gamma_{ne})} \leq \|\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r\|_{\mathbf{L}^4(\Gamma_{ne})} \|\mathbf{v}_m\|_{\mathbf{L}^4(\Gamma_{ne})}.$$

D'après (3.39), il existe  $C > 0$  tels que :

$$\|\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r\|_{\mathbf{L}^4(\Gamma_{ne})} \leq C \|\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_m\|_{\mathbf{L}^4(\Gamma_{ne})} \leq C \|\mathbf{v}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Nous déduisons donc dans le résultat ci-dessus que :

$$\|[(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m\|_{L^2(\Gamma_{ne})} \leq C \|\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (3.41)$$

Grâce à (3.35), la suite  $([(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m)_m$  est bornée dans  $L^1(]0, T[, \mathbf{L}^2(\Gamma_{ne}))$ . Par conséquent, la suite de sa transformée de Fourier

$$(\mathcal{F}([( \mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m))_m \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{L}^2(\Gamma_{ne})). \quad (3.42)$$

En combinant (3.40), (3.42) et le Théorème de trace, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r) \cdot \mathbf{n}] \bar{\mathbf{v}}_m| \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_m| \, d\zeta &\leq \|\mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r) \cdot \mathbf{n}] \bar{\mathbf{v}}_m)\|_{L^2(\Gamma_{ne})} \|\bar{\tilde{\mathbf{v}}}_m\|_{L^2(\Gamma_{ne})} \\ &\leq C \|\hat{\tilde{\mathbf{v}}}_m\|_{L^2(\Gamma_{ne})} \\ &\leq C \|\hat{\tilde{\mathbf{v}}}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour prouver (3.38), commençons d'abord par noter les convergences fortes suivantes :

$$\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_m \cdot \tilde{\mathbf{v}} \longrightarrow \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad \text{dans } L^2(]0, T[, \mathbf{L}^2(\Gamma_{ne})).$$

En effet, pour  $\mathbf{w} \in \{\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ , nous avons d'après l'une des conséquences de l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\Gamma_{ne}} |(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|^2 \, d\zeta \leq \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}\|_{L^4(\Gamma_{ne})}^2 \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Gamma_{ne})}^2.$$

Ensuite on intègre cette dernière inégalité par rapport au temps  $t$  de 0 à  $T$  :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{ne}} |(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|^2 \, d\zeta \, dt \leq \int_0^T \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}\|_{L^4(\Gamma_{ne})}^2 \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Gamma_{ne})}^2 \, dt.$$

Or d'après le Théorème de trace qui donne (3.39), nous avons :

$$\|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}\|_{L^4(\Gamma_{ne})} \leq C \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{ne}} |(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|^2 \, d\zeta \, dt \leq C \int_0^T \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Gamma_{ne})}^2 \, dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Car  $(\mathbf{v}_m)_m$  converge vers  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .

Si nous utilisons (3.39) et maintenons la même notation pour toutes les sous

suites qui convergent, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta - \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \right| \\
&= \left| \int_{\Gamma_{ne}} \left( [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m - [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v} \right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \right| \\
&= \left| \int_{\Gamma_{ne}} \left( [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v}_m - [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v} \right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \right| \\
&= \left| \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \right| \\
&\leq \| \mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r + \mathbf{v} \|_{L^4(\Gamma_{ne})} \| \mathbf{v}_m - \mathbf{v} \|_{L^4(\Gamma_{ne})} \| \tilde{\mathbf{v}} \|_{L^2(\Gamma_{ne})} \\
&\leq C \| \mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r + \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \| \mathbf{v}_m - \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \| \tilde{\mathbf{v}} \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on montre (3.38).  $\square$

**Lemme 6.** *La suite  $\mathbf{v}_m$ , solution du problème discret (3.30), est bornée dans  $H^\gamma(0, T; \mathbf{V}(\Omega), \mathbf{H}(\Omega))$ , avec  $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{4} - \varepsilon$ .*

**Preuve :**

Nous désignons par  $\bar{\mathbf{v}}_m$  le prolongement de  $\mathbf{v}_m$  par 0 pour  $t < 0$  et  $t > T$  et  $\hat{\mathbf{v}}_m$  la transformée de Fourier par rapport au temps de  $\mathbf{v}_m$ ;  $\bar{\mathbf{v}}_m$  possède deux discontinuités en 0 et  $T$ . La dérivée de  $\bar{\mathbf{v}}_m$  au sens des distributions<sup>1</sup> est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}}_m = \bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{v}_m(0)\delta_0 - \mathbf{v}_m(T)\delta_T \quad (3.43)$$

où  $\delta_0$  et  $\delta_T$  sont respectivement des distributions de Dirac en 0 et  $T$ , et

$$\bar{\mathbf{u}}_m = \mathbf{v}'_m = \text{la dérivée de } \mathbf{v}_m \text{ sur } [0, T].$$

En appliquant la transformation de Fourier, l'égalité (3.43) donne :

$$2i\pi\tau \hat{\mathbf{v}}_m(\tau) = \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) + \mathbf{v}_m(0) - \mathbf{v}_m(T)e^{-2i\pi\tau T},$$

où  $\hat{\mathbf{v}}_m$  et  $\hat{\mathbf{u}}_m$  indiquent respectivement les transformées de Fourier de  $\bar{\mathbf{v}}_m$  et  $\bar{\mathbf{u}}_m$ . Puisque nous savons déjà que  $\mathbf{v}_m$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T, \mathbf{V}(\Omega))$ , il reste à prouver que

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} \| \hat{\mathbf{v}}_m(\tau) \|^2 d\tau \leq C \quad (3.44)$$

pour montrer que  $\mathbf{v}_m$  est bornée dans  $H^\gamma(0, T; \mathbf{V}(\Omega), \mathbf{H}(\Omega))$  pour  $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{4} - \varepsilon$ . Pour tout  $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}_m$  avec  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\alpha}_i \mathbf{g}_i$  sur  $\Gamma_i$  (pour un petit rappel, les  $\Gamma_i$  sont des

---

1. Une distribution  $T$  sur  $\Omega$  est une forme linéaire séquentiellement continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  c'est à dire  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi \mapsto T(\phi)$ , linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite  $\phi_j$  qui converge vers  $\phi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , la suite de nombres complexes  $T(\phi_j) \rightarrow T(\phi)$ .

parties ouvertes de la frontière de Dirichlet destinées à contenir le contrôle),  $\bar{\mathbf{v}}_m$  satisfait :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_m}{\partial t} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{v}}_m : \nabla \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} G_m \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega} G_m^0 \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} G_m^1 \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(T) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \delta_T \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(0) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \delta_0 \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i H_{im} + \int_{\Gamma_{ne}} H_{(N+1)m} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \quad (3.45)
\end{aligned}$$

où  $G_m = (\bar{\mathbf{v}}_m \nabla) \bar{\mathbf{v}}_m$ ,  $G_m^0 = (\bar{\mathbf{v}}_m \nabla) \bar{\mathbf{v}}_r$ ,  $G_m^1 = (\bar{\mathbf{v}}_r \nabla) \bar{\mathbf{v}}_m$ ,  $H_{im} = f_i(\bar{\mathbf{v}}_m)$  et  $H_{(N+1)m} = -\frac{1}{2}[(\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \bar{\mathbf{v}}_m$ .

Nous appliquons maintenant la transformation de Fourier à l'équation (3.45) :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi\tau \int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}_m(\tau) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \hat{\mathbf{v}}_m(\tau) : \nabla \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \hat{G}_m(\tau) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega} \hat{G}_m^0(\tau) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \hat{G}_m^1(\tau) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(0) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) \, d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(T) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) e^{-2i\pi\tau T} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i \hat{H}_{im} + \int_{\Gamma_{ne}} \hat{H}_{(N+1)m} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{v}}}(\tau) \, d\zeta. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

où  $\hat{G}_m$ ,  $\hat{G}_m^0$ ,  $\hat{G}_m^1$  et  $\hat{H}_{im}$  sont respectivement les transformées de Fourier par rapport au temps de  $G_m$ ,  $G_m^0$ ,  $G_m^1$  et  $H_{im}$ .

On remplace ensuite  $\hat{\tilde{\mathbf{v}}}$  par le conjugué complexe de  $\hat{\mathbf{v}}_m$  noté  $\bar{\hat{\mathbf{v}}}_m$  que nous prenons comme fonction test ( $\mathbf{v}_m \in \mathbf{W}_m$  et  $\hat{\mathbf{v}}_m \in \mathbf{W}_m$ ), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi\tau \int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}_m(\tau) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \hat{\mathbf{v}}_m(\tau) : \nabla \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \hat{G}_m(\tau) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega} \hat{G}_m^0(\tau) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \hat{G}_m^1(\tau) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(0) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(T) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) e^{-2i\pi\tau T} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \bar{\hat{\phi}}_{im} \hat{H}_{im} + \int_{\Gamma_{ne}} \hat{H}_{(N+1)m} \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m \, d\zeta. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Ainsi, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi\tau \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{v}}_m(\tau)|^2 \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} |\nabla \hat{\mathbf{v}}_m(\tau)|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \hat{G}_m(\tau) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega} \hat{G}_m^0(\tau) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \hat{G}_m^1(\tau) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(0) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(T) \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m(\tau) e^{-2i\pi\tau T} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \bar{\hat{\phi}}_{im} \hat{H}_{im} + \int_{\Gamma_{ne}} \hat{H}_{(N+1)m} \cdot \bar{\hat{\mathbf{v}}}_m \, d\zeta. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

On donne maintenant une écriture explicite de  $\sum_{i=1}^N \bar{\phi}_{im} \widehat{H}_{im}$ . Pour ce faire, notons que

$$\begin{aligned} H_{im} = f_i(\bar{\mathbf{v}}_m) &= a_i \bar{\phi}_{im}^2 + b_i \bar{\phi}_{im} - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \bar{\phi}_{im} \|\mathbf{w}_i\|^2 - \frac{\nu}{2} \lambda_{N+1} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z}_m \rangle \\ &\quad - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\phi}_{jm} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \phi_{im} H_{im} &= a_i \phi_{im} \bar{\phi}_{im}^2 + b_i \phi_{im} \bar{\phi}_{im} - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \phi_{im} \bar{\phi}_{im} \|\mathbf{w}_i\|^2 \\ &\quad - \frac{\nu}{2} \lambda_{N+1} \phi_{im} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z}_m \rangle - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \sum_{j=1, j \neq i}^N \phi_{im} \bar{\phi}_{jm} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle. \end{aligned}$$

En appliquant la transformation de Fourier à l'égalité ci dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{im} \widehat{H}_{im} &= -\frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} |\widehat{\phi}_{im}|^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 - \frac{\nu}{2} \lambda_{N+1} \bar{\widehat{\phi}}_{im} \langle \mathbf{w}_i, \widehat{\mathbf{z}}_m \rangle \\ &\quad - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\widehat{\phi}}_{im} \widehat{\phi}_{jm} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle + a_i \bar{\widehat{\phi}}_{im} (\widehat{\phi}_{im}^2) + b_i |\widehat{\phi}_{im}|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \widehat{\phi}_{im} \widehat{H}_{im} &= \sum_{i=1}^N a_i \bar{\widehat{\phi}}_{im} (\widehat{\phi}_{im}^2) + \sum_{i=1}^N b_i |\widehat{\phi}_{im}|^2 \\ &\quad - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \left( \sum_{i=1}^N |\widehat{\phi}_{im}|^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \bar{\widehat{\phi}}_{im} \langle \mathbf{w}_i, \widehat{\mathbf{z}}_m \rangle + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\widehat{\phi}}_{im} \widehat{\phi}_{jm} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right). \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\|\widehat{\mathbf{v}}_m\|^2 - \|\widehat{\mathbf{z}}_m\|^2 = \sum_{i=1}^N |\widehat{\phi}_{im}|^2 \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \bar{\widehat{\phi}}_{im} \langle \mathbf{w}_i, \widehat{\mathbf{z}}_m \rangle + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\widehat{\phi}}_{im} \widehat{\phi}_{jm} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle,$$

on obtient finalement :

$$\sum_{i=1}^N \widehat{\phi}_{im} \widehat{H}_{im} = -\frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \left[ \|\widehat{\mathbf{v}}_m\|^2 - \|\widehat{\mathbf{z}}_m\|^2 \right] + \sum_{i=1}^N a_i \bar{\widehat{\phi}}_{im} (\widehat{\phi}_{im}^2) + \sum_{i=1}^N b_i |\widehat{\phi}_{im}|^2. \quad (3.49)$$

En utilisant (3.49) dans l'équation (3.48), on obtient :

$$\begin{aligned} &2i\pi\tau \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 + \nu \|\nabla \widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 + \int_{\Omega} \widehat{G}_m(\tau) \cdot \widehat{\mathbf{v}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \widehat{G}_m^0(\tau) \cdot \widehat{\mathbf{v}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \widehat{G}_m^1(\tau) \cdot \widehat{\mathbf{v}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(0) \cdot \widehat{\mathbf{v}}_m(\tau) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}_m(T) \cdot \widehat{\mathbf{v}}_m(\tau) e^{-2i\pi\tau T} \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{i=1}^N a_i \bar{\widehat{\phi}}_{im} (\widehat{\phi}_{im}^2) + \sum_{i=1}^N b_i |\widehat{\phi}_{im}|^2 - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\widehat{\mathbf{v}}_m\|^2 + \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \|\widehat{\mathbf{z}}_m\|^2 \\ &+ \int_{\Gamma_{ne}} \widehat{H}_{(N+1)m} \cdot \widehat{\mathbf{v}}_m \, d\zeta. \end{aligned} \quad (3.50)$$

où  $\widehat{H}_{(N+1)m} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r] \cdot \mathbf{n})^{-\bar{\mathbf{v}}_m}$ .

Dans la suite,  $C$  désigne différentes constantes positives.

En prenant la partie imaginaire de l'équation (3.50), nous avons :

$$\begin{aligned} |\tau| \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 &\leq C \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{V}(\Omega)} \left( \|\widehat{G}_m(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} + \|\widehat{G}_m^0(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} + \|\widehat{G}_m^1(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} \right) \\ &\quad + C \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\| \left( \|\bar{\mathbf{v}}_m(T)\| + \|\bar{\mathbf{v}}_m(0)\| \right) + \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^N |a_i| \widehat{\phi}_{im}(\tau) |\widehat{\phi}_{im}^2| \\ &\quad + \frac{1}{2} Im \int_{\Gamma_{ne}} \mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r] \cdot \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}}_m \bar{\widehat{\mathbf{v}}}_m \, d\zeta. \end{aligned}$$

Comme nous avons d'après le Lemme 1 :

$$|\widehat{\phi}_{im}(\tau)| \leq C_i \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\tau| \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 &\leq C \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\| \left( \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^N |a_i| C_i |\widehat{\phi}_{im}^2| + \|\bar{\mathbf{v}}_m(T)\| + \|\bar{\mathbf{v}}_m(0)\| \right) \\ &\quad + C \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{V}(\Omega)} \left( \|\widehat{G}_m(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} + \|\widehat{G}_m^0(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} + \|\widehat{G}_m^1(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} Im \int_{\Gamma_{ne}} \mathcal{F}([\bar{\mathbf{v}}_m + \bar{\mathbf{v}}_r] \cdot \mathbf{n}) \bar{\mathbf{v}}_m \bar{\widehat{\mathbf{v}}}_m \, d\zeta. \quad (3.51) \end{aligned}$$

Nous prouvons maintenant que chaque terme du côté droit de l'inégalité (3.51) est borné.

• D'abord, nous avons :

$$G_m = (\bar{\mathbf{v}}_m \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}_m \implies \|G_m\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} \leq C \|\bar{\mathbf{v}}_m\|_{\mathbf{V}(\Omega)} \|\nabla \bar{\mathbf{v}}_m\|_{\mathbf{V}(\Omega)}.$$

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 2,  $\mathbf{V}$  est un sous espace fermé de  $\mathbf{H}^1$  et par définition  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}} = \|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$ . Donc

$$\|G_m\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} \leq C \|\bar{\mathbf{v}}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2.$$

Sachant que :

$$G_m^0 = (\bar{\mathbf{v}}_m \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}_r \quad \text{et} \quad G_m^1 = (\bar{\mathbf{v}}_r \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}_m,$$

on montre de la même manière que :

$$\|G_m^s\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} \leq C \|\bar{\mathbf{v}}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad s = 0, 1.$$

Grâce à l'estimation d'énergie (3.35) satisfaite par  $\mathbf{v}_m$ ,  $G_m$  et  $G_m^s$  restent bornées dans  $L^1(\mathbb{R}; \mathbf{V}'(\Omega))$  et les fonctions  $\widehat{G}_m$  et  $\widehat{G}_m^s$  sont bornées dans  $L^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{V}'(\Omega))$ . Par conséquent, nous avons :

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \left( \|\widehat{G}_m(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} + \|\widehat{G}_m^0(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} + \|\widehat{G}_m^1(\tau)\|_{\mathbf{V}'(\Omega)} \right) \leq C. \quad (3.52)$$

• Prouvons que les trois premiers termes du côté droit de (3.51) sont bornés. Grâce au Lemme 1, nous savons que  $\phi_{im}^2$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Donc la fonction  $(\widehat{\phi_{im}^2})$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Ainsi en utilisant l'estimation d'énergie (3.35)<sub>a</sub>, nous obtenons :

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^N |a_i| C_i (\widehat{\phi_{im}^2}) + \|\mathbf{v}_m(T)\| + \|\mathbf{v}_m(0)\| \leq C. \quad (3.53)$$

Ainsi, les estimations (3.52), (3.53) et (3.37) permettent de réduire l'inégalité (3.51) à :

$$|\tau| \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 \leq C \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Pour  $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ , nous estimons maintenant la norme

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 d\tau.$$

Notons que (voir [23]) :

$$|\tau|^{2\gamma} \leq c(\gamma) \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, sachant que  $|\tau| \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 \leq C \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ , nous déduisons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 d\tau &\leq c(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau + c(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tau| \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \\ &\leq c_3(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau + c_4(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \\ &\leq c_3(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 d\tau + c_4(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.54)$$

La dernière intégrale du côté droit de l'inéquation (3.54) satisfait grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.55)$$

et la première intégrale du côté droit de l'inégalité (3.55) est convergente pour tout  $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ . D'autre part, l'utilisation de l'égalité de Parseval conduit à :

$$\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 d\tau = \int_0^T \|\mathbf{v}_m(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 dt \leq C.$$

Ainsi, on montre que :

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} \|\widehat{\mathbf{v}}_m(\tau)\|^2 d\tau \leq C.$$

Donc la suite  $\mathbf{v}_m$  est bornée dans  $H^\gamma(0, T; \mathbf{V}(\Omega), \mathbf{H}(\Omega))$  pour  $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{4} - \varepsilon$ .  $\square$

Maintenant, en appliquant les Lemmes 4 et 6, il y a une sous suite de  $(\mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement dans  $L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ .

### 3.2.3 Passage à la limite

Le résultat de compacité obtenu dans la section précédente implique la convergence forte suivante (au moins pour une sous suite de  $\mathbf{v}_m$  encore notée  $\mathbf{v}_m$ )

$$\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v} \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)).$$

Car l'espace  $\mathbf{H}(\Omega)$  est défini dans le chapitre 2 par :

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{di} \right\}.$$

Ce résultat de convergence avec (3.36) nous permet de passer à la limite dans la formulation faible suivante, obtenue à partir du système (3.30) en multipliant par  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$  et en intégrant par parties par rapport au temps

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v}_m \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi'(t) d\mathbf{x} dt - \int_{\Omega} \mathbf{v}_m(0) \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(0) d\mathbf{x} + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_m : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_m \cdot \nabla \mathbf{v}_m) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_m \cdot \nabla \mathbf{v}_r) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_r \cdot \nabla \mathbf{v}_m) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt \\ & = \int_0^T \tilde{\alpha}_j \delta_{lj} f_l(\mathbf{v}_m) \varphi(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_m + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_j \varphi(t) d\zeta dt \quad (3.56) \end{aligned}$$

pour tout  $\tilde{\mathbf{v}}_j = \tilde{\alpha}_j \mathbf{w}_j$ .

Dans un premier temps, les intégrales du côté gauche de l'équation (3.56) sont examinées.

L'utilisation des convergences faibles (3.36), pour les termes linéaires, donne :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v}_m \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi'(t) d\mathbf{x} dt & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi'(t) d\mathbf{x} dt, \\ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_m : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt, \\ \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_m \cdot \nabla \mathbf{v}_r) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_r) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt, \\ \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_r \cdot \nabla \mathbf{v}_m) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt & \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_r \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

Nous pouvons passer à la limite dans le terme non linéaire puisque  $\mathbf{v}_m$  converge faiblement vers  $\mathbf{v}$  dans  $L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$  et fortement dans  $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Ce qui entraîne :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_m \cdot \nabla \mathbf{v}_m) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) d\mathbf{x} dt. \quad (3.57)$$

En utilisant le Lemme 1 et d'après l'inégalité (3.35)<sub>a</sub>, nous avons  $\phi_{im} \in L^\infty(0, T)$ .  
Donc pour une sous suite de  $\phi_{im}$  (toujours notée par  $\phi_{im}$ ) :

$$\phi_{im} \rightharpoonup \alpha_i \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T). \quad (3.58)$$

Notons que la convergence de  $\mathbf{v}_m$  dans  $\mathbf{L}^2([0, T] \times \Omega)$  implique sa convergence dans  $L^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ <sup>2</sup>. Ainsi

$$\|\mathbf{v}_m\| \rightarrow \|\mathbf{v}\| \text{ dans } L^1(0, T). \quad (3.59)$$

D'après le Lemme 1, pour tout  $i \in I$ , nous avons :

$$|\phi_{ip} - \phi_{iq}| \leq C_b \|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q\|, \quad \forall \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_q \in \mathbf{W}_m.$$

Ainsi,  $\phi_{im}$  est une suite de Cauchy dans  $L^1(0, T)$  et nous avons donc

$$\phi_{im} \rightarrow \phi_i \text{ dans } L^1(0, T). \quad (3.60)$$

Comme  $\phi_{im}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T)$  et converge vers  $\phi_i$  dans  $L^1(0, T)$  et vers  $\alpha_i$  dans  $L^\infty(0, T)$ , d'après le Théorème 3,  $\phi_i \in L^\infty(0, T)$ . Par conséquent  $\phi_i = \alpha_i \in L^\infty(0, T)$ .

Puisque  $\phi_{im}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T)$ , en utilisant (3.60), on a :

$$\phi_{im} \rightarrow \alpha_i \text{ dans } L^p(0, T),$$

d'après le Théorème 2, pour tout  $p \in ]1, +\infty[$ .

Maintenant pour  $1 \leq i \leq N$  nous pouvons passer à la limite dans le terme suivant :

$$\int_0^T \tilde{\alpha}_i \phi_{im}^2 \varphi(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \tilde{\alpha}_i \alpha_i^2 \varphi(t) dt,$$

et puisque

$$\mathbf{z}_m = \mathbf{v}_m - \sum_{i=1}^N \phi_{im} \mathbf{w}_i,$$

nous avons

$$\int_0^T \tilde{\alpha}_i \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z}_m \rangle \varphi(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \tilde{\alpha}_i \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle \varphi(t) dt.$$

Par conséquent

$$\int_0^T \tilde{\alpha}_i f_i(\mathbf{v}_m) \varphi(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \tilde{\alpha}_i f_i(\mathbf{v}) \varphi(t) dt,$$

où

$$f_i(\mathbf{v}) = a_i \alpha_i^2 + b_i \alpha_i - \frac{\nu}{4} \lambda_{N+1} \left( \alpha_i \|\mathbf{w}_i\|^2 + 2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{z} \rangle + \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right).$$

---

2. En effet, cela vient d'une des propriétés des espaces  $L^p$ , c'est à dire si la mesure du domaine  $\Omega$  est finie alors  $f \in L^p(\Omega)$  entraîne  $f \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq q \leq p$ .

Ainsi, en utilisant le Lemme 5, plus précisément (3.38), pour gérer la convergence des conditions au bord de Neumann et en passant à la limite dans l'équation (3.56), on a :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi'(t) \, d\mathbf{x} \, dt - \int_{\Omega} \mathbf{v}_0 \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(0) \, d\mathbf{x} + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) \, d\mathbf{x} \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_r) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) \, d\mathbf{x} \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_r \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) \, d\mathbf{x} \, dt \\
& = \int_0^T \tilde{\alpha}_j \delta_{ij} f_i(\mathbf{v}) \varphi(t) \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi(t) \, d\zeta \, dt \quad (3.61)
\end{aligned}$$

pour tout  $\tilde{\mathbf{v}}_j = \tilde{\alpha}_j \mathbf{w}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ .

Par linéarité, l'équation (3.61) est vraie pour tout  $\tilde{\mathbf{v}}$  combinaison finie de  $\tilde{\mathbf{v}}_j$  et par densité, pour tout élément de  $\mathbf{W}(\Omega)$ .

### 3.3 Unicité de la solution en dimension 2

Dans cette partie, nous montrons que la solution faible obtenue dans la section précédente est unique en dimension 2.

Soient  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  deux solutions du système (3.3), tels que, sur  $\Gamma_i$ ,  $\mathbf{v}_1 = \alpha_{1i} \mathbf{g}_i$  et  $\mathbf{v}_2 = \alpha_{2i} \mathbf{g}_i$ . En faisant la différence de ces deux solutions, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
a. \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \nu a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_r, \tilde{\mathbf{v}}) \\
\quad + b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \tilde{\mathbf{v}}) = \\
\quad \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i (f_i(\mathbf{v}_1) - f_i(\mathbf{v}_2)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\zeta \\
\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- (\mathbf{v}_2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \, d\zeta + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- (\mathbf{v}_2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \, d\zeta \\
b. \quad \left( \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \right) (0) = 0.
\end{array} \right. \quad (3.62)$$

Ainsi, on pose  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  et on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \nu a(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \tilde{\mathbf{v}}) \\ \quad + b(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i (f_i(\mathbf{v}_1) - f_i(\mathbf{v}_2)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- (\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \, d\zeta \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} (\mathbf{v}_2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}) ([(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- - [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^-) \, d\zeta, \\ b. \left( \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \right) (0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.63)$$

En posant  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  dans le système (3.63), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ \quad = \sum_{i=1}^N \alpha_i (f_i(\mathbf{v}_1) - f_i(\mathbf{v}_2)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \, d\zeta \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{ne}} (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}) ([(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- - [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^-) \, d\zeta, \\ b. \|\mathbf{v}(0)\|^2 = 0. \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Évaluons tous les éléments sauf les deux premiers termes de l'équation (3.64)<sub>a</sub>.

• La définition (2.25) de la loi de contrôle mène à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i (f_i(\mathbf{v}_1) - f_i(\mathbf{v}_2)) &= \sum_{i=1}^N a_i (\alpha_{1i} + \alpha_{2i}) \alpha_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 - (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1} (\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2). \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (3.4) et (3.5), nous obtenons respectivement :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N a_i (\alpha_{1i} + \alpha_{2i}) \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i^2 \right| &\leq \left( (\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|) \sum_{i=1}^N |a_i| C_i^3 + \sum_{i=1}^N |b_i| C_i^2 \right) \|\mathbf{v}\|^2, \\ \|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| &\leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \leq (1 + C_N) \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \sum_{i=1}^N \alpha_i (f_i(\mathbf{v}_1) - f_i(\mathbf{v}_2)) \right| \leq g_1(t) \|\mathbf{v}\|^2, \quad (3.65)$$

où

$$g_1(t) = (\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|) \sum_{i=1}^N |a_i| C_i^3 + \sum_{i=1}^N |b_i| C_i^2 + (1 + C_N)^2 + (\nu - \varepsilon) \lambda_{N+1}.$$

• Notons que

$$\left| \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- d\zeta \right| \leq \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 |(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}| d\zeta$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma_{ne}} (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}) \left( [(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- - [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}]^- \right) d\zeta \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma_{ne}} (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}) [(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}]^- d\zeta \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_{ne}} |(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})| d\zeta. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, le Théorème de trace en dimension  $d = 2$  (Théorème 10), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 |(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}| d\zeta &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^3(\Gamma_{ne})}^2 \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r\|_{L^3(\Gamma_{ne})} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|^{\frac{2}{3}} \|\nabla \mathbf{v}\|^{\frac{4}{3}} \left( \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r\|^{\frac{1}{3}} \|\nabla(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r)\|^{\frac{2}{3}} \right). \end{aligned}$$

Lorsqu'on applique l'inégalité de Young (1.7) au résultat précédent, il vient :

$$\int_{\Gamma_{ne}} |\mathbf{v}|^2 |(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}| d\zeta \leq \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C g_2(t) \|\mathbf{v}\|^2, \quad (3.66)$$

où

$$g_2(t) = \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r\| \|\nabla(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r)\|^2,$$

en notant qu'on a posé dans (1.7) :

$$p = \frac{3}{2}, q = 3, \varepsilon = \frac{3\nu}{8}, a = \|\nabla \mathbf{v}\|^{\frac{4}{3}} \text{ et } b = C \|\mathbf{v}\|^{\frac{2}{3}} \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r\|^{\frac{1}{3}} \|\nabla(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r)\|^{\frac{2}{3}}.$$

Par la même démarche qu'on a eu l'estimation (3.66), on montre ce qui suit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ne}} |(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})| d\zeta &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^3(\Gamma_{ne})}^2 \|\mathbf{v}_2\|_{L^3(\Gamma_{ne})} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|^{\frac{2}{3}} \|\nabla \mathbf{v}\|^{\frac{4}{3}} \left( \|\mathbf{v}_2\|^{\frac{1}{3}} \|\nabla \mathbf{v}_2\|^{\frac{2}{3}} \right) \\ &\leq \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C g_3(t) \|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned} \quad (3.67)$$

où

$$g_3(t) = \|\mathbf{v}_2\| \|\nabla \mathbf{v}_2\|^2.$$

• En utilisant une fois de plus l'inégalité de Hölder, l'injection de Sobolev en dimension  $d = 2$  c'est à dire le Théorème 11 et l'inégalité de Young, nous

obtenons respectivement

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v} \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{v} \right| \\
&\leq \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r)\| \\
&\leq C \|\mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{v}_1 + \nabla \mathbf{v}_r\| \\
&\leq \frac{\nu}{8} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C g_4(t) \|\mathbf{v}\|^2, \tag{3.68}
\end{aligned}$$

où

$$g_4(t) = \|\nabla \mathbf{v}_1 + \nabla \mathbf{v}_r\|^2.$$

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} ((\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r) \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right| \\
&\leq \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\| \|\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C \|\mathbf{v}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}\| \|\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r)\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\nu}{8} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C g_5(t) \|\mathbf{v}\|^2, \tag{3.69}
\end{aligned}$$

où

$$g_5(t) = \|\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_r\|^2 \|\nabla \mathbf{v}_2 + \nabla \mathbf{v}_r\|^2.$$

Les estimations (3.65) – (3.69) combinées avec l'équation (3.64)<sub>a</sub> nous permettent d'avoir :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 &\leq g_1(t) \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C g_2(t) \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\quad + \frac{\nu}{8} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C g_3(t) \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \\
&\quad + C g_4(t) \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + C g_5(t) \|\mathbf{v}\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \leq C g(t) \|\mathbf{v}\|^2, \tag{3.70}$$

où

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) + g_4(t) + g_5(t) \in L^1(0, T).$$

Enfin, en appliquant le Lemme de Gronwall, nous déduisons de l'inégalité (3.70) et de l'égalité (3.64)<sub>b</sub> que  $\mathbf{v}$  est égale à zéro sur  $]0, T[$ .

Par conséquent,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$  et l'unicité est prouvée en dimension 2.

**Remarque 9.** *En dimension 3, l'absence d'unicité de la solution empêche de prétendre directement que la solution faible est la solution forte. Cependant une plus grande régularité temporelle pourrait être nécessaire pour atteindre le caractère unique de la solution.*

---

# Conclusion

---

La stabilisation globale des équations de Navier-Stokes en dimension 3 avec des conditions aux limites mixtes est étudiée autour d'un état d'équilibre instable donné, en utilisant un contrôle de frontière mixte et rétroactif. La condition de Neumann, en tirant sa signification du Théorème de Bernoulli, est proportionnelle au carré de la vitesse. De plus, cette condition est conçue pour être nulle lorsque l'écoulement se dirige vers l'extérieur du domaine ; et elle stipule que l'énergie cinétique résiduelle interne peut être utilisée comme force limite exercée sur le fluide pour stabiliser le système de Navier-Stokes. En plus de la décroissance exponentielle de la perturbation arbitraire pour la norme  $L^2$  que nous avons prouvée, nous avons établi que :

$$\|e^{2\eta t}\nabla\mathbf{v}(t)\|^2 \xrightarrow[t\rightarrow+\infty]{} 0, \quad \forall\eta > 0,$$

et que la solution faible est unique lorsque le domaine d'étude est bidimensionnel.

---

# Bibliographie

---

- [1] Mehdi Badra. Feedback stabilization of the 2-D and 3-D Navier-Stokes equations based on an extended system. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 15(4) :934–968, 2009.
- [2] Mehdi Badra and Takéo Takahashi. Stabilization of parabolic nonlinear systems with finite dimensional feedback or dynamical controllers : Application to the Navier–Stokes system. *SIAM journal on control and optimization*, 49(2) :420–463, 2011.
- [3] Viorel Barbu. Feedback stabilization of Navier–Stokes equations. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :197–205, 2003.
- [4] Viorel Barbu. Stabilization of Navier–Stokes equations by oblique boundary feedback controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50(4) :2288–2307, 2012.
- [5] Viorel Barbu and Giuseppe Da Prato. Internal stabilization by noise of the Navier–Stokes equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 49(1) :1–20, 2011.
- [6] Viorel Barbu, Irena Lasiecka, and Roberto Triggiani. Abstract settings for tangential boundary stabilization of Navier–Stokes equations by high-and low-gain feedback controllers. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 64(12) :2704–2746, 2006.
- [7] Viorel Barbu, Irena Lasiecka, and Roberto Triggiani. *Tangential boundary stabilization of Navier-Stokes equations*, volume 181. American Mathematical Soc., 2006.
- [8] Viorel Barbu, Irena Lasiecka, and Roberto Triggiani. Local exponential stabilization strategies of the Navier-Stokes equations,  $d= 2, 3$ , via feedback stabilization of its linearization. In *Control of coupled partial differential equations*, pages 13–46. Springer, 2007.

- [9] Viorel Barbu and Roberto Triggiani. Internal stabilization of Navier-Stokes equations with finite-dimensional controllers. *Indiana University mathematics journal*, pages 1443–1494, 2004.
- [10] Julián Fernández Bonder, Nicolas Saintier, and Analía Silva. On the Sobolev trace theorem for variable exponent spaces in the critical range. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 193(6) :1607–1628, 2014.
- [11] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d’analyse pour l’étude de quelques modes d’écoulements visqueux incompressibles*, *Mathématiques et Applications*, Vol. 52. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [12] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models applied mathematical sciences*, *Mathématiques et Applications*, Vol. 183. New York : Springer, 2013.
- [13] Ababacar Diagne and Abdou Sène. Control of shallow water and sediment continuity coupled system. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 25(3) :387–406, 2013.
- [14] A. Fursikov, M. Gunzburger, L. S. Hou, and S. Manservigi. Optimal control problems for the Navier-Stokes equations. *Lectures on Applied Mathematics (Munich, 1999)*, pages 143–155, 2000.
- [15] A. V. Fursikov. Stabilizability of Two-Dimensional Navier—Stokes Equations with Help of a Boundary Feedback Control. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 3(3) :259–301, 2001.
- [16] Andrei V. Fursikov. Stabilization for the 3D Navier-Stokes system by feedback boundary control. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 10(1&2) :289, 2004.
- [17] Giovanni Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations : Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [18] M. S. Goudiaby, A. Sene, and G. Kreiss. *An algebraic approach for controlling cascade of reaches in irrigation canal. Types, Sources and Problems*. InTech.
- [19] Mouhamadou Samsidy Goudiaby, Abdou Sene, and Gunilla Kreiss. A delayed feedback control for network of open canals. *International Journal of Dynamics and Control*, 1(4) :316–329, 2013.
- [20] Céline Grandmont, Bertrand Maury, and Assia Soualah. Multiscale modelling of the respiratory track : a theoretical framework. In *ESAIM : Proceedings*, volume 23, pages 10–29. EDP sciences, 2008.
- [21] J.-W. He, R. Glowinski, R. Metcalfe, A. Nordlander, and J. Periaux. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder : I. Oscillatory cylinder rotation. *Journal of Computational Physics*, 163(1) :83–117, 2000.

- [22] Petr Kučera and Zdenek Skalak. Local solutions to the Navier–Stokes equations with mixed boundary conditions. *Acta Applicandae Mathematica*, 54(3) :275–288, 1998.
- [23] J. L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires (Reedition of the 1969 original edn). *Les cours de références*. Dunod, 2002.
- [24] Evrad Marie Diokel Ngom, Abdou Sène, and Daniel Le Roux. Boundary stabilization of the Navier-Stokes equations with feedback controller via a Galerkin method. *Evolution Equations and Control Theory*, pages 147–166, 2014.
- [25] Evrad Marie Diokel Ngom, Abdou Sène, and Daniel Le Roux. Global stabilization of the Navier-Stokes equations around an unstable equilibrium state with a boundary feedback controller. *Evolution Equations and Control Theory*, pages 89–106, 2015.
- [26] D. S. Park, D. M. Ladd, and E. W. Hendricks. Feedback control of von Kármán vortex shedding behind a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Physics of fluids*, 6(7) :2390–2405, 1994.
- [27] J.-P. Raymond. Feedback boundary stabilization of the three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 87(6) :627–669, 2007.
- [28] Jean-Pierre Raymond. Feedback boundary stabilization of the two-dimensional Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(3) :790–828, 2006.
- [29] Jean-Pierre Raymond and Laetitia Thevenet. Boundary feedback stabilization of the two dimensional Navier-Stokes equations with finite dimensional controllers. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 27(3) :1159, 2010.
- [30] Abdou Sène, Timack Ngom, and Evrad MD Ngom. Global stabilization of the navier-stokes equations around an unstable steady state with mixed boundary kinetic energy controller. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 25(2) :197–218.
- [31] Abdou Sène, Bocar Amadou Wane, and Daniel Y. Le Roux. Control of irrigation channels with variable bathymetry and time dependent stabilization rate. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(19-20) :1119–1122, 2008.
- [32] Roger Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*, volume 343. American Mathematical Soc.