

République du Sénégal
Ministère de l'enseignement
Supérieur de la recherche et de l'innovation
UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



**UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

MEMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Technologies
Mention : Mathématiques et Applications
Spécialité : Mathématiques Appliquées
Option : Probabilité

**THÈME : UN CRITERE DE KOLMOGOROV ET DE
TENSION DANS LES ESPACES DE BESOV MODULAIRES ET
APPLICATION A UNE CLASSE DE PROCESSUS GAUSSIENS**

Présenté par : Adama Samba KEITA

Sous la direction du : Dr. Ibrahima Mendy

Avec la supervision du : Pr. Clément Manga

Soutenu publiquement le 14 Mars 2026

Devant le jury composé de :

Prénom et Nom	Grade	Qualité	Étab
Emmanuel Nicolas CABRAL	Professeur Assimilé	Président	UASZ
Clément Manga	Professeur Assimilé	Superviseur	UASZ
Mor NDONGO	Maître conférences Titulaire	Examineur	UASZ
Ibrahima MENDY	Maître conférences Titulaire	Directeur	UASZ

Année académique : 2024–2025

DEDICACE

Je dédie ce mémoire :

À mes chers parents, Moctarou Keita et Aissatou Diallo. Je vous consacre ce travail avec une profonde gratitude pour votre amour inconditionnel. Votre présence constante et votre soutien indéfectible ont été les piliers essentiels de cette aventure académique.

À ma chère famille, pour son soutien sans faille, ses encouragements constants et l'affection dont elle m'entoure. Ce travail est le fruit de vos sacrifices et de votre bienveillance tout au long de mon parcours. Une pensée particulière et toute ma reconnaissance à *Mamadou Pathé Keita Mariama Keita* et *Ousmane KEITA* mais aussi également à *Dr. Bocar Sow* et son épouse *Coumba Diallo* pour leur soutien précieux durant toute cette période.

À l'administration et au corps professoral de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, particulièrement à l'UFR des Sciences et Technologies et au Département de Mathématiques. Je remercie l'ensemble des enseignants qui ont su éveiller en moi la rigueur scientifique et la passion des mathématiques. Vous avez posé les fondations sur lesquelles repose ce travail.

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers le Tout-Puissant, pour m'avoir accordé la volonté, la force et la persévérance nécessaires à l'aboutissement de ce mémoire.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon encadreur, *Dr. Ibrahima Mendy*, pour avoir accepté de diriger ce travail. Je le remercie pour sa disponibilité constante, ses conseils précieux, sa rigueur scientifique et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de cette étude.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury qui me font l'honneur d'évaluer ce travail :

- M. Clément Manga, en sa qualité de Superviseur ;
- M. Emmanuel Nicolas Cabral, Président jury ;
- M. Mor Ndongo, Examineur.

Je les remercie par avance pour l'attention qu'ils porteront à mon mémoire et pour leurs critiques constructives.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble du corps professoral du Département de Mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement reçu et pour les bases académiques solides qui nous ont été inculquées.

J'exprime ma vive gratitude à mes camarades de la 6^e promotion de Mathématiques, Physique et Informatique (MPI), particulièrement à Saliou Siby Diatta, Mamadou Sanokho, Ansou Bodian, Keita Mballo, William Diedhiou, Adama Sonko, Ndieundé Mane, Fulgence Alphonse Badiane, Bassirou Lo, Fatou Cissé, Rougui Lome et Mamadou Baldé, Ndebe Diouf, Ndeye Marème Gueye Ibrahima Yinghou, Amadou Ly pour les moments de partage et de solidarité.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance au *Programme Vision Dindéfelo*, au *Fans Club Seckou KEITA* à l'occurrence *Dr Seckou KEITA* ainsi qu'à l'ensemble des amicales (*AEERKet AERT*) qui m'ont soutenu avec dévouement du début à la fin de mon cursus.

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	4
1 PROCESSUS STOCHASTIQUES	6
1.1 Définition	6
1.1.1 Espace de probabilité	6
1.1.2 Filtration	7
1.2 Processus stochastique	7
1.2.1 Processus adapté	8
1.2.2 Processus gaussien	8
1.2.3 Fonction caractéristique	9
1.2.4 Rappel de quelques Résultats	9
1.3 Exemples de processus stochastiques	10
1.3.1 Processus de Poisson	10
1.3.2 Mouvement brownien standard	12
1.3.3 Mouvement brownien fractionnaire	12
1.3.4 Mouvement brownien multifractionnaire	14
2 ESPACE DE BESOV	18
2.1 Espaces de Besov modulaires	18
2.2 Classe de module	20
2.3 Caractérisation des espaces de Besov modulaire	21
2.3.1 Base de Haar	21
2.3.2 Fonctions de Schauder	21
2.4 Critère de Kolmogorov	23
2.5 Critère de tension	24
2.6 Régularité des trajectoires d'une classe de processus gaussiens	27
2.7 EXEMPLES	28
2.7.1 Processus par intégrale	28
2.7.2 Le processus d'Ornstein–Uhlenbeck	29
2.7.3 Mouvement brownien fractionnaire	29
2.7.4 Mouvement brownien Multifractionnaire	30
3 RESULTATS D'APPROXIMATION DANS LES ESPACES DE BESOV	33
3.1 Approximation d'un processus gaussien du type Volterra dans un espace de Besov modulaire	33

TABLE DES MATIÈRES

3.2 Exemples	38
3.2.1 Cas du mouvement brownien fractionnaire	38
3.2.2 Cas du mouvement brownien multifractionnaire	39
CONCLUSION ET PERSPECTIVE	41
Bibliographie	42

Résumé

Le but de ce travail est d'établir un critère de Kolmogorov et un critère de tension dans une classe d'espaces de Besov modulaires qui constituent une extension naturelle du travail de (voir [8]). Nous appliquons ces critères pour obtenir des résultats de régularité et des approximations faibles dans ces espaces pour une classe de processus gaussiens admettant des représentations intégrales de la forme

$$X_t = \int_0^1 K(t,s) dW_s, \quad t \in [0,1],$$

où $(W_t, t \in [0,1])$ est un mouvement brownien standard et K est un noyau satisfaisant des propriétés de régularité appropriées. L'exemple le plus classique de ces processus est le mouvement brownien fractionnaire. Le cas du mouvement brownien multifractionnaire est également considéré. Ces résultats d'approximation constituent un raffinement de ceux de [20] et de [12], qui ont étudié les cas du mouvement brownien et du mouvement brownien fractionnaire dans l'espace des fonctions continues.

Abstract

The purpose of this paper is to prove a Kolmogorov and a tightness criterion in a class of modular Besov spaces which present a natural extension of the work in [8]. We apply these criteria to establish regularity results and weak approximations in these spaces for a class of Gaussian processes which admit integral representations of the form

$$X_t = \int_0^1 K(t,s) dW_s, \quad t \in [0,1],$$

where $(W_t, t \in [0,1])$ is a standard Brownian motion and K is a kernel satisfying suitable regularity properties. The most classical example of these processes is the fractional Brownian motion. The case of the multifractional Brownian motion is considered. These approximation results are a refinement of those of [20] and [12] who considered the cases of Brownian motion and fractional Brownian motion in the space of continuous functions.

Notations et Abréviations

- Ω : espace des possibles (univers des issues d'une expérience aléatoire).
- \mathcal{F} : tribu (ou σ -algèbre) sur Ω .
- \mathbb{P} : mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .
- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$: filtration représentant l'information disponible jusqu'au temps t .
- $\mathbb{E}[\cdot]$: espérance mathématique.
- \mathcal{H} : espace de Hilbert associé au mouvement brownien fractionnaire (mBf), utilisé pour définir l'intégrale de Skorokhod.
- $C([0, T], \mathbb{R})$: espace des fonctions continues sur $[0, T]$.
- $L^p([0, T])$: espace des fonctions p -intégrables sur $[0, T]$.
- $\|\cdot\|_{L^2}$: norme dans $L^2(\Omega)$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$: produit scalaire dans l'espace de Hilbert associé au mBf.
- $L^2_{\mathcal{F}}([0, T])$: espace des processus adaptés de carré intégrable.
- mBf : mouvement brownien fractionnaire.
- mBs : mouvement brownien standard.
- mBm : mouvement brownien multifractionnaire.
- mBsF : mouvement brownien sur-fractionnaire.
- ps : presque-sur

INTRODUCTION GENERALE

Au cours des dernières années, plusieurs articles ont été consacrés à l'analyse stochastique du mouvement brownien fractionnaire (en abrégé mBf) en raison de ses applications potentielles dans de nombreux domaines tels que l'hydrologie, les réseaux de télécommunications et les marchés financiers de [14] pour plus de détails sur le mBf. De nombreux résultats ont été obtenus pour ce processus dans des espaces de trajectoires munis de topologies plus fortes que celles de la convergence uniforme et höldérienne. Il y'a plus d'une décennie, des résultats de régularité et d'approximation pour le mouvement brownien fractionnaire ont été développés dans les espaces de Besov par [10] et [8].

Une large classe de processus gaussiens admet une représentation intégrale en loi de la forme

$$X(t) \stackrel{d}{=} \int_0^t K(t,r) dW_r, \quad t \in [0,1], \quad (1)$$

où $W = \{W_t, t \in [0,1]\}$ désigne un processus de Wiener standard, et où K est un noyau déterministe satisfaisant certaines conditions de régularité (voir [9]).

L'objectif de notre mémoire est de présenter un critère de tension et de kolmogorov dans un espace en s'inspirant de [7]. Pour cela nous allons dans un premier temps, fournir une classe d'espaces de Besov modulaires contenant presque sûrement. les trajectoires des processus gaussiens admettant la représentation (1) en loi. Notre second objectif est de montrer que les processus de type (1) sont faiblement approchés, dans une classe d'espaces de Besov modulaires, par une famille de processus construits à partir d'un processus de Poisson standard .

Plus précisément, inspirés par les travaux de [12] et [7] ont établi ce qui suit : soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson standard, et considérons le processus continu X_ε défini par

$$X_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t,r) (-1)^{N(r/\varepsilon^2)} dr, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Alors la famille de processus $(X_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement vers X , lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans une classe d'espaces de Besov modulaires dont le module est lié à la régularité de K , Un exemple important de processus auquel notre résultat s'applique est le mouvement brownien fractionnaire. Notons que le cadre classique pour ce type de théorème limite est généralement

l'espace des fonctions continues $C([0, 1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Le premier résultat de ce type d'approximation est dû à [20], qui a montré que la famille de processus

$$Y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (-1)^{N(r/\varepsilon^2)} dr,$$

pour $\varepsilon > 0$, converge en loi, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans l'espace de Banach $C([0, 1])$, vers le mouvement brownien.

Afin d'étendre le champ des applications, le mouvement brownien multifractionnaire (en abrégé mBm) a été introduit comme une extension du mouvement brownien fractionnaire où le paramètre de Hurst est remplacé par une fonction. En conséquence, la régularité höldérienne est autorisée à varier le long des trajectoires. Ces modèles multifractionnaires sont utiles dans divers domaines d'application. Pour plus d'informations sur le mBm, voir [19] et [16]. Ce mémoire est organisé comme suit :

- **Chapitre 1** : Rappel des notions fondamentales sur les processus stochastiques,
- **Chapitre 2** : il est consacré aux espaces de Besov modulaires
- **Chapitre 3** : Résultats d'approximations dans les espaces de Besov

Dans cette section, nous considérons une classe de processus gaussiens du type (1). Comme conséquence du critère de Kolmogorov, nous prouvons la régularité Besov des trajectoires de tels processus gaussiens et donnons quelques exemples d'applications.

1

PROCESSUS STOCHASTIQUES

Ce chapitre présente les notions fondamentales de la théorie des processus stochastiques. Après un rappel des bases de la probabilité, notamment l'espace de probabilité et la notion de filtration, nous introduisons la définition générale d'un processus stochastique ainsi que celle de processus adapté. Nous nous intéressons ensuite aux processus gaussiens, en mettant en évidence leurs propriétés essentielles. Enfin, plusieurs exemples classiques sont étudiés, parmi lesquels le mouvement brownien standard, le mouvement brownien fractionnaire et le pont brownien, qui illustrent la richesse et l'importance des processus gaussiens en modélisation et en analyse stochastique.

1.1 Définition

1.1.1 Espace de probabilité

Définition 1.1.1 *Un espace de probabilité est un triplet*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

où :

- Ω est l'univers ou espace des possibles : c'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- \mathcal{F} est une tribu (ou σ -algèbre) de sous-ensembles de Ω : c'est un ensemble de parties de Ω contenant Ω , stable passage par complémentaire et par union dénombrables. Ses éléments sont appelés événements.
- \mathbb{P} est une probabilité, c'est-à-dire une mesure définie sur \mathcal{F} telle que :

$A \in \mathcal{F}$,

$P(\Omega) = 1$,

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ pour toute suite d'ensembles de \mathcal{F} deux à deux dis-joints $(A_n)_{n \geq 1}$.

1.1.2 Filtration

Définition 1.1.2 Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est une collection croissante au sens de l'inclusion de sous-tribus de \mathcal{A} , c'est-à-dire que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$ pour tous s, t tels que $s \leq t$.

Remarque 1 \mathcal{F}_t représente la quantité d'information disponible à l'instant t . Il est donc logique que cette quantité augmente avec le temps.

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1 Un processus (aléatoire) X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in [0, T]}$. C'est donc une fonction de deux variables :

$$X : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega).$$

Remarque 2 La variable $t \in [0, T]$ représente le temps, mais on aurait également pu prendre $t \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^2$. De même, l'espace d'arrivée pourrait être plus complexe que \mathbb{R} .

Remarque 3 On peut voir un processus comme une fonction qui, à $\omega \in \Omega$, associe une fonction de $[0, T]$ dans \mathbb{R} , $t \mapsto X_t(\omega)$, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.2.2 (Processus Continu) On dit que X est un processus continu (presque sur.) si X est continu trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire si $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue sur $[0, T]$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Définition 1.2.3 (Fonction mesurable) Soit une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, c'est-à-dire une famille croissante de tribus décrivant l'évolution de l'information au cours du temps.

On dit que X_t est \mathcal{F}_t -mesurable si la variable aléatoire X_t appartient à la tribu \mathcal{F}_t .

Formellement, $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{F}_t -mesurable si

$$X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout borélien } B.$$

1.2.1 Processus adapté

Définition 1.2.4 Un processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est dit \mathcal{F} -adapté si la variable aléatoire X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \in [0, T]$.

1.2.2 Processus gaussien

Définition 1.2.5 Un vecteur de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) est un vecteur gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire des X_i est gaussienne, c'est-à-dire que la variable aléatoire

$$\langle a, X \rangle := \sum_{k=1}^n a_k X_k$$

est une variable aléatoire gaussienne pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Voici deux propositions très utiles dans la manipulation des vecteurs gaussiens.

Proposition 1 Si le vecteur (X_1, X_2) est gaussien, les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$.

Proposition 2 Tout vecteur de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est un vecteur gaussien.

Remarque 4 Attention, il est possible de trouver des variables aléatoires gaussiennes non indépendantes de covariance nulle.

La version continue des vecteurs gaussiens est donnée par les processus gaussiens.

Un processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est appelé *processus gaussien* si, pour tout $n \geq 1$ et tous $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$, tels que $t_1 \leq \dots \leq t_n$, le vecteur

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

est gaussien.

1.2.3 Fonction caractéristique

Définition 1.2.6 Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La fonction caractéristique de X est la fonction

$$\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}), \quad t \in \mathbb{R},$$

où i désigne l'unité imaginaire, c'est-à-dire $i^2 = -1$.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout choix de $t_1, \dots, t_n \in T$:

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$$

où

$$m = (m(t_1), \dots, m(t_n))$$

est le vecteur de moyenne,

et

$$\Sigma = (K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

est la matrice de covariance, construite à partir du noyau

$$K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t).$$

1.2.4 Rappel de quelques Résultats

voici quelques théorèmes et lemme qui pourront nous servir à la suite de ce travail.

Théorème 1.2.7 (Inégalité de Markov) Soit X une variable aléatoire positive (ou presque sûrement positive) définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et supposons que

$$\mathbb{E}[X] < \infty.$$

Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Théorème 1.2.8 (Inégalité de Tchebychev) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que

$$\mathbb{E}[X] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 1.2.9 (Théorème de Borel–Cantelli) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(i) *Premier théorème de Borel–Cantelli.* Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

alors

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

(ii) *Second théorème de Borel–Cantelli.* Si les événements $(A_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants et si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty,$$

alors

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1.$$

Lemme 1 (Lemme de Fatou) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives (ou plus généralement mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$) définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors,

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n].$$

1.3 Exemples de processus stochastiques

Dans cette partie nous allons essayer de donner quelques exemples de processus stochastique qui pourront nous servir à la suite.

1.3.1 Processus de Poisson

Définition 1.3.1 Un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$ qui représente le nombre d'événements aléatoires survenus dans l'intervalle $[0, t]$ et qui vérifie :

- $N(0) = 0$;
- *les accroissements sont indépendants* ;
- *les accroissements sont stationnaires* ;
- *pour tout $t \geq 0$, la variable $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt :*

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

où λ représente l'intensité moyenne des événements par unité de temps.

Propriétés 1

- **Condition initiale**

$$N(0) = 0.$$

- **Accroissements indépendants**

Pour

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n,$$

les variables

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

sont indépendantes.

- **Accroissements stationnaires**

$$N(t+s) - N(s) \sim \mathcal{P}(\lambda t).$$

- **Distribution**

$$N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t).$$

Rappelons que si $N(t)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ , alors

$$\mathbb{E} \left[(-1)^{N(t)} \right] = e^{-2\lambda}.$$

1.3.2 Mouvement brownien standard

Définition 1.3.2 *Un processus X est un mouvement brownien si c'est un processus gaussien continu, centré et nul en 0, dont la fonction de covariance est donnée par*

$$\text{cov}(X_s, X_t) = s \wedge t, \quad s, t \in [0, T].$$

Propriétés 2 *Soit \mathcal{F} une filtration. Un \mathcal{F} -mouvement brownien standard est un processus B vérifiant :*

- (i) B est \mathcal{F} -adapté ;
- (ii) $B_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s. ;
- (iii) B est continu, c'est-à-dire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$;
- (iv) B est à accroissements indépendants : $B_t - B_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s pour tous $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$;
- (v) B est à accroissements stationnaires et gaussiens :

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Certaines fois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la filtration à considérer, ou lorsque \mathbb{F} est la filtration naturelle du processus B , on parlera simplement de mouvement brownien.

1.3.3 Mouvement brownien fractionnaire

Définition 1.3.3 *On appelle mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$ le processus $(W_t^H)_{t \geq 0}$ gaussien, réel, continu et centré et nul en 0 .*

de fonction de covariance $\forall s, t \geq 0$,

$$\mathbb{E}(W_s^H W_t^H) = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H});$$

Propriétés 3 *Soit $(W^H(t))_{t \geq 0}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$.*

a) **Trajectoires presque sûrement Hölder continues**

Le mouvement brownien fractionnaire possède des trajectoires presque sûrement α -Hölder continues pour tout $\alpha < H$. Autrement dit, pour tout $\alpha < H$, il existe presque sûrement une constante aléatoire $C_\alpha(\omega) > 0$ telle que, pour tous $s, t \in [0, T]$,

$$|W^H(t) - W^H(s)| \leq C_\alpha(\omega) |t - s|^\alpha.$$

b) **Autosimilarité**

Le processus $(W^H(t))_{t \geq 0}$ est H -autosimilaire, c'est-à-dire que pour tout $a > 0$,

$$\left(W^H(at) \right)_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(a^H W^H(t) \right)_{t \geq 0}.$$

Cela signifie que les trajectoires du processus présentent la même structure statistique à toutes les échelles de temps.

c) **Accroissements stationnaires**

Le mouvement brownien fractionnaire possède des accroissements stationnaires : pour tout $h > 0$, la loi de $W^H(t+h) - W^H(t)$ ne dépend que de h et non de t , c'est-à-dire

$$W^H(t+h) - W^H(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} W^H(h).$$

d) **Non-martingalité**

Le mouvement brownien fractionnaire n'est pas une martingale, sauf dans le cas particulier $H = \frac{1}{2}$. En général, pour $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}\left[W^H(t) \mid \mathcal{F}_s\right] \neq W^H(s), \quad \text{si } H \neq \frac{1}{2}.$$

e) **Non-markovianité**

Le mouvement brownien fractionnaire n'est pas un processus de Markov, sauf dans le cas $H = \frac{1}{2}$. La loi conditionnelle du futur dépend donc de l'ensemble du passé et non seulement de la valeur présente du processus.

f) **Variance des accroissements**

Pour tous $s, t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(W_H(t) - W_H(s)\right)^2\right] = |t - s|^{2H},$$

ce qui reflète la rugosité des trajectoires en fonction du paramètre de Hurst H .

g) *représentation de type Volterra*

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t, r) dW_r, \forall t \geq 0$$

où $W = \{W_t, t \in [0, 1]\}$ est un processus de Wiener, et où $K_H(t, r)$ désigne le noyau défini par :

Si $H > \frac{1}{2}$,

$$K^H(t, r) = r^{\frac{1}{2}} \Gamma(H - \frac{1}{2}) \int_r^t u^{H - \frac{1}{2}} (u - r)^{H - \frac{3}{2}} du \mathbf{1}_{[0, t]}(r).$$

Si $H < \frac{1}{2}$,

$$K^H(t, r) = \left(A_H r^{H - \frac{1}{2}} + B_H (t - r)^{H - \frac{1}{2}} \int_0^1 (1 - u)^{-2H} \left(1 - \frac{ru}{t}\right)^{H - \frac{1}{2}} du \right) \mathbf{1}_{[0, t]}(r),$$

où

$$A_H = \frac{2^{1-2H} \sqrt{\pi}}{\Gamma(H) \sin(\pi H)}, \quad B_H = \frac{\Gamma(2 - 2H)}{2\Gamma(1 - 2H)\Gamma(H + \frac{1}{2})}.$$

1.3.4 Mouvement brownien multifractionnaire

Le mouvement brownien fractionnaire possède d'importantes applications en modélisation, [5]. L'une de ses propriétés est que sa régularité peut être prescrite par son paramètre de Hurst H . Cependant, sa principale limitation réside dans le fait que la régularité de Hölder est constante le long des trajectoires. Afin d'élargir le champ des applications, le mouvement brownien multifractionnaire a été introduit comme une extension du mouvement brownien fractionnaire bien connu, dans laquelle le paramètre de Hurst H est remplacé par une fonction $t \mapsto H(t) \in (0, 1)$. Par conséquent, la régularité de Hölder est autorisée à varier le long des trajectoires. Ces modèles dits multifractionnaires sont utiles dans divers domaines d'application ; voir par exemple [1], [15], [17] et [18]

Le point de départ de cette généralisation est très souvent la représentation harmonisable ou la représentation en moyenne mobile du mouvement brownien fractionnaire.

Définition 1.3.4 (Mouvement brownien multifractionnaire, définition par moyenne mobile, voir [4], [19]) *Soit*

$$H : [0, +\infty) \longrightarrow [a, b] \subset (0, 1)$$

une fonction höldérienne d'exposant $\beta > 0$. Pour tout $t \geq 0$, le processus aléatoire défini par

$$W^{H(t)}(t) = \int_{-\infty}^0 \left[(t - s)^{H(t) - \frac{1}{2}} - (-s)^{H(t) - \frac{1}{2}} \right] dW(s) + \int_0^t (t - s)^{H(t) - \frac{1}{2}} dW(s)$$

est appelé mouvement brownien multifractionnaire de paramètre fonctionnel H .

Définition 1.3.5 (Mbm, représentation harmonisable, voir [16]) *Soit*

$$H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [a, b] \subset (0, 1)$$

une fonction höldérienne d'exposant $\beta > 0$. Pour tout $t \geq 0$, le processus aléatoire défini par

$$W^{H(t)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H(t)+\frac{1}{2}}} \widehat{W}(d\xi)$$

est appelé mouvement brownien multifractionnaire.

L'équivalence, à une fonction déterministe multiplicative près, entre cette représentation et la définition par moyenne mobile a été démontrée par [2]. À partir de ces définitions, on voit que le mBm est un processus gaussien centré dont les accroissements ne sont en général ni indépendants ni stationnaires. Lorsque $H(t) = H$ pour tout t , le mBm se réduit au mouvement brownien fractionnaire d'exposant H .

La caractéristique principale de ce processus est que sa régularité de Hölder varie avec le temps et est égale à $H(t)$. Ceci contraste fortement avec le mBf, dont l'exposant de Hölder est presque sûrement constant et égal à H . Plus précisément, les propriétés suivantes sont connues.

Proposition 3 *Supposons que*

$$\beta > \sup_{t \geq 0} H(t).$$

Alors, avec probabilité un, pour tout $t_0 \geq 0$, l'exposant de Hölder ponctuel du mouvement brownien multifractionnaire en t_0 est égal à $H(t_0)$.

Rappelons que l'exposant de Hölder d'un processus $X(t)$ en un point s est défini par

$$\alpha_X(s, \omega) = \sup \left\{ a : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(s+h, \omega) - X(s, \omega)}{|h|^a} = 0 \right\}.$$

Un exposant $\alpha_X(s, \omega)$ élevé signifie que le processus X est régulier en s , tandis qu'un comportement irrégulier en s correspond à un exposant proche de 0.

Proposition 4 *Supposons que*

$$\beta > \sup_{t \geq 0} H(t).$$

Alors, avec probabilité un, pour tout intervalle $[c, d] \subset \mathbb{R}_+$, le graphe du mBm $\{(t, W^{H(t)}(t)), t \in [c, d]\}$ vérifie

$$\dim_H \{(t, W^{H(t)}(t)), t \in [c, d]\} = \dim_B \{(t, W^{H(t)}(t)), t \in [c, d]\} = 2 - \min_{t \in [c, d]} H(t).$$

De plus, le mBm est asymptotiquement localement auto-similaire, au sens suivant.

Proposition 5 *Pour tout $t_0 \geq 0$,*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{L} \left\{ \frac{W_{H(t_0+\rho u)}(t_0 + \rho u) - W_{H(t_0)}(t_0)}{\rho^{H(t_0)}} \right\}_{u \in \mathbb{R}_+} = \mathcal{L} \left\{ C_{t_0} B_{H(t_0)}(u) \right\}_{u \in \mathbb{R}_+},$$

où $B_{H(t_0)}$ est un mouvement brownien fractionnaire d'exposant $H(t_0)$ et C_{t_0} est une fonction déterministe dépendant de t_0 .

Proposition 6 *Voir [16] Soit $X(t)$ un mBm standard (c'est-à-dire tel que la variance au temps 1 soit égale à 1) de paramètre fonctionnel $H(t)$. Alors, en notant E l'espérance,*

$$\text{cov}_X(t, s) = E(X(t)X(s)) = D(H(t), H(s)) \left(t^{H(t)+H(s)} + s^{H(t)+H(s)} - |t-s|^{H(t)+H(s)} \right),$$

où

$$D(x, y) = \frac{\sqrt{\Gamma(2x+1)\Gamma(2y+1)\sin(\pi x)\sin(\pi y)}}{2\Gamma(x+y+1)\sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right)}.$$

Preuve: Par définition,

$$E(X(t)X(s)) = E \left(\frac{1}{C(H(t))} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t} - 1}{|\xi|^{H(t)+\frac{1}{2}}} dW(\xi) \frac{1}{C(H(s))} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi s} - 1}{|\xi|^{H(s)+\frac{1}{2}}} dW(\xi) \right),$$

d'où

$$E(X(t)X(s)) = \frac{1}{C(H(t))C(H(s))} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{i\xi t} - 1)(e^{-i\xi s} - 1)}{|\xi|^{H(t)+H(s)+1}} d\xi. \quad (1.1)$$

La constante

$$C(H(t)) = \left(\frac{\pi}{H(t)\Gamma(2H(t))\sin(\pi H(t))} \right)^{1/2}$$

est déduite de la condition $E(X^2(1)) = 1$.

Fixons t, s , et soit B_H un mouvement brownien fractionnaire standard de paramètre de Hurst

$$H = \frac{H(t) + H(s)}{2}.$$

Il est bien connu que

$$E(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{C^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{i\xi t} - 1)(e^{-i\xi s} - 1)}{|\xi|^{2H+1}} d\xi = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

où

$$C = \left(\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(\pi H)} \right)^{1/2}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{i\xi t} - 1)(e^{-i\xi s} - 1)}{|\xi|^{H(t)+H(s)+1}} d\xi = C^2 E(B_H(t)B_H(s)) = \frac{C^2}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

En substituant dans (1) :

$$\mathbb{E}(X(t)X(s)) = C_2^2 C(H(t))C(H(s)) \left(t^{H(t)+H(s)} + s^{H(t)+H(s)} - |t-s|^{H(t)+H(s)} \right).$$

En remplaçant H par $\frac{H(t)+H(s)}{2}$ dans C et en utilisant l'identité

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1),$$

on obtient l'égalité annoncée. ■ Remarquons que, puisque H prend ses valeurs dans $[a, b]$, $D(H(t), H(s))$ est positive et reste bornée, à distance de 0 et de $+\infty$.

Le mBm étant non stationnaire, il est souvent plus pertinent de considérer l'autocorrélation $\text{cor}_X(t, s)$.

Proposition 7 *Soit $X(t)$ un mBm standard de paramètre fonctionnel $H(t)$. Alors,*

$$\text{cor}_X(t, s) = \frac{D(H(t), H(s)) \left(t^{H(t)+H(s)} + s^{H(t)+H(s)} - |t-s|^{H(t)+H(s)} \right)}{t^{H(t)}s^{H(s)}}.$$

Preuve: Par définition,

$$\text{cor}_X(t, s) = \frac{\text{cov}_X(t, s)}{\sqrt{E(X^2(t))E(X^2(s))}}.$$

Comme $D(H(t), H(t)) = \frac{1}{2}$, on obtient

$$E(X^2(t)) = t^{2H(t)},$$

2

ESPACE DE BESOV

Ce chapitre est consacré à l'étude des espaces de Besov modulaires, qui constituent une généralisation des espaces de Besov classiques permettant de décrire de manière plus fine la régularité des fonctions et des trajectoires aléatoires. Après avoir introduit leur définition, nous présenterons leurs principales propriétés ainsi que différentes caractérisations utiles en analyse fonctionnelle. Nous nous intéressons ensuite aux critères d'inclusion et de régularité, en particulier au critère de Kolmogorov et de tension, qui jouent un rôle fondamental dans l'étude de la régularité des trajectoires de processus stochastiques. Ce cadre théorique fournit des outils adaptés à l'analyse fine des phénomènes irréguliers rencontrés en probabilités et en analyse stochastique.

2.1 Espaces de Besov modulaires

Soit $I = [0, 1]$ et notons $L^p(I)$ l'espace des fonctions de Lebesgue intégrables avec exposant p ($1 \leq p < \infty$). Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction appartenant à $L^p(I)$, on peut mesurer sa régularité à l'aide de son module de continuité calculé en norme L^p .

À cet effet, pour tout $t \in I$, on définit

$$\omega_p(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \left(\int_{I_h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

où

$$I_h = \{x \in I : x+h \in I\}.$$

Soit $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ une fonction continue, croissante et telle que $\omega(0) = 0$ (on appelle ω un module).

Définition 2.1.1 *L'espace de Besov modulairé $B_p^\omega(I)$, pour $1 \leq p < \infty$, est défini par*

$$B_p^\omega(I) = \left\{ f \in L^p(I) : \omega_p(f, t) = O(\omega(t)) \right\}.$$

L'espace $B_p^\omega(I)$, muni de la norme

$$\|f\|_p^\omega = \|f\|_p + \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_p(f, t)}{\omega(t)},$$

est un espace de Banach, contenant le sous-espace de Banach suivant :

$$B_p^{\omega,0}(I) = \left\{ f \in B_p^\omega(I) : \omega_p(f, t) = o(\omega(t)) \text{ lorsque } t \rightarrow 0 \right\}.$$

$$\omega_p(f, t) = \mathcal{O}(\omega(t)).$$

Cela signifie qu'il existe une constante $C > 0$ et un réel $t_0 > 0$ tels que

$$\omega_p(f, t) \leq C \omega(t), \quad \text{pour tout } 0 < t < t_0.$$

La condition

$$\omega_p(f, t) = o(\omega(t)) \quad (t \rightarrow 0)$$

signifie que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega_p(f, t)}{\omega(t)} = 0.$$

Différence conceptuelle entre \mathcal{O} et o .

Dans $B_p^\omega(I)$, on a

$$\omega_p(f, t) \leq C \omega(t),$$

ce qui correspond à un *contrôle uniforme*.

Dans $B_p^{\omega,0}(I)$, on a

$$\omega_p(f, t) \ll \omega(t),$$

c'est-à-dire un *contrôle strict, asymptotiquement nul*.

$B_p^{\omega,0}(I)$ est donc un *sous-espace strict* de $B_p^\omega(I)$.

Remarque 5 *i) Soit $1 \leq p < \infty$ et soient ω et ω_0 deux modules tels que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega_0(t)}{\omega(t)} = 0.$$

Alors, l'injection continue suivante est valable :

$$B_p^{\omega,0}(I) \hookrightarrow B_p^\omega(I).$$

ii) Si $p = \infty$ et $f \in C(I)$, l'espace des fonctions continues, alors $B_\infty^\omega(I)$ coïncide simplement avec l'espace classique de Hölder ω -continu :

$$C^\omega(I) = \left\{ f \in C(I) : \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in I}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_\omega = \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in I}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}.$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on a clairement l'inclusion continue suivante :

$$C^\omega(I) \hookrightarrow B_p^\omega(I).$$

2.2 Classe de module

Dans cette section, nous introduisons quelques notations et rappelons certaines propriétés nécessaires concernant le (φ, ρ) -module et les espaces de Besov.

Afin de caractériser les espaces de Besov modulaires $B_p^\omega(I)$ en termes d'espaces de suites, Ciesielski a introduit dans [11] la classe suivante de modules.

Définition 2.2.1 Une fonction $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, continue et non décroissante, est un (φ, ψ) -module s'il existe des constantes $\varphi > 0$, $\psi > 0$ et $K > 0$ telles que, pour tout $j_0 = 0, 1, 2, \dots$:

- i) $\omega(0) = 0$, $\omega(2t) \leq K\omega(t)$,
- ii) $\sum_{j \geq j_0} 2^{j\varphi} \omega(2^{-j}) \leq K 2^{j_0\varphi} \omega(2^{-j_0})$,
- iii) $\sum_{0 \leq j \leq j_0} \frac{2^{-j\varphi}}{\omega(2^{-j})} \leq K \frac{2^{-j_0\varphi}}{\omega(2^{-j_0})}$,
- iv) $\sum_{j \geq j_0} \frac{2^{-j\psi}}{\omega(2^{-j})} \leq K \frac{2^{-j_0\psi}}{\omega(2^{-j_0})}$,
- v) $\sum_{0 \leq j \leq j_0} 2^{j\psi} \omega(2^{-j}) \leq K 2^{j_0\psi} \omega(2^{-j_0})$.

Exemple 1 Une fonction mesurable $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ est dite de variation régulière en 0 (resp. en $+\infty$) d'indice β si, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^\beta \quad (\text{resp. } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^\beta).$$

Si $\beta = 0$, on dit que f est à variation lente en 0 (resp. en ∞). Une fonction f est à variation régulière d'indice β si et seulement si

$$l(t) = t^{-\beta} f(t)$$

est à variation lente. Pour davantage de détails sur les fonctions à variation régulière, voir le livre de Bingham et al [6]. Soit maintenant $\omega(t) = t^\beta l(t)$, $t \in [0, 1]$, une fonction à variation régulière en 0, satisfaisant les hypothèses suivantes (H) :

1. La fonction à variation lente $l : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ est bornée à l'infini sur tout intervalle $[a, 1]$, avec $0 < a < 1$.
2. La fonction ω est non décroissante au voisinage de 0.

Sous ces conditions [7] ont montré que ω est un (φ, ψ) -module dans un voisinage de 0 pour tout $\varphi < \beta < \psi$.

Par exemple, les fonctions se comportant au voisinage de 0 comme

$$x^\beta (\log(1/x))^\tau, \quad \beta > 0, \tau \in \mathbb{R},$$

sont des (φ, ψ) -modules dès que $\varphi < \beta < \psi$.

2.3 Caractérisation des espaces de Besov modulaire

Dans la suite, nous aurons besoin de la caractérisation des espaces de Besov en termes de coefficients de l'expansion d'une fonction continue dans la base formée par les fonctions de Schauder. Nous devons donner certaines propriétés des bases de Haar et de Schauder.

2.3.1 Base de Haar

Les fonctions de Haar constituent la base d'ondelettes la plus classique, définie par

$$\psi_n(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad x \in I, n \geq 1,$$

où $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$, et

$$\psi(x) = \mathbf{1}_{(0,1/2]}(x) - \mathbf{1}_{(1/2,1]}(x).$$

On complète cette famille en posant $\psi_0 = \mathbf{1}_{[0,1]}$. Le système $(\psi_n)_{n \geq 0}$ ainsi obtenu constitue une base orthonormale de $L^2(I, dx)$.

Dans la suite, nous utiliserons le système de Haar pour construire, par interpolation linéaire, une version continue du mouvement brownien fractionnaire.

2.3.2 Fonctions de Schauder

La famille des fonctions de Schauder sur I est obtenue en intégrant le système de Haar :

$$\phi_n(t) = \int_0^t \psi_n(s) ds, \quad t \in I, n \geq 0,$$

et complétée par la fonction $\phi_{-1} = \mathbf{1}_{[0,1]}$.

D'après [7] pour toute fonction continue f sur $[0, 1]$, peut être décomposée de la forme

$$f(s) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n(f) \phi_n(s), \quad (2.1)$$

où

$$c_{-1}(f) = f(0), \quad c_0(f) = f(1) - f(0), \quad c_n(f) = 2^{j/2} C_n(f),$$

ou

$$C_n(f) = 2 \left[f\left(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right) + f\left(\frac{2k-2}{2^{j+1}}\right) \right) \right].$$

et, pour $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$,

Le théorème de caractérisation suivant, dû à [10], joue un rôle crucial dans la suite .

Théorème 2.3.1 *Soit $1 \leq p < \infty$ et ω $(1/p, 1)$ -module. Alors l'espace de Besov $B_p^\omega(I)$ est un espace de fonctions continues, isomorphe à un espace de suites, et l'on a l'équivalence de normes suivantes*

$$\|f\|_{B_p^\omega} \sim \max \left\{ |C_0(f)|, |C_1(f)|, \sup_{j \geq 0} \frac{2^{-j/p}}{\omega(2^{-j})^{-1}} \left(\sum_{n=2^{j+1}}^{2^{j+1}-1} |C_n(f)|^p \right)^{1/p} \right\}.$$

De plus, on a

$$f \in B_p^{\omega, 0} \iff \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2^{-j/p}}{\omega(2^{-j})} \left(\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} |C_n(f)|^p \right)^{1/p} = 0,$$

Où $(C_n(f))_{n \geq 0}$ désigne les coefficients de Franklin (ou d'une base de schauder adaptée)

Preuve : Pour la démonstration voir [10].

Remarque 6 *Comme conséquence du Théorème (2.3.1), on peut déduire que l'espace de Banach $B_p^{\omega, 0}$ est en particulier séparable.*

Soit maintenant $0 < H < 1$ et B^H un mouvement brownien fractionnaire. Il est bien connu que les trajectoires de B^H satisfont presque sûrement une condition de Hölder d'ordre strictement inférieur à H . Cependant, [10] ont montré, en utilisant le Théorème (2.3.1), que les trajectoires de B^H appartiennent p.s. à l'espace de Besov $B_p^{\omega_H}(I)$, où $\omega_H(t) = t^H$ et $p > 1/H$.

On peut en déduire, grâce à l'injection continue de la Remarque (5), que B^H appartient presque sûrement à $B_p^{\omega, 0}(I)$ pour toute fonction $\omega(t) = t^H l(t)$, à variation régulière en 0 d'indice $H \in (0, 1)$, satisfaisant les hypothèses (H) de l'Exemple (1) et telle que $\lim_{t \rightarrow 0} l(t) = \infty$.

Pour établir un critère de Kolmogorov et un critère de tension dans cette classe d'espaces de Besov, nous devons introduire les notations suivantes.

Pour $1 \leq p < \infty$ et ω_0 un $(1/p, 1)$ -module, posons

$\mathcal{F}_p^{\omega_0} := \{\omega : \omega \text{ est un } (1/p, 1)\text{-module tel que } \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\omega_0(2^{-j})}{\omega(2^{-j})} \right)^p < \infty\}$.

Pour tout $\omega \in F_p^{\omega_0}$, définissons enfin

$$J_p^{\omega_0}(\omega) = \left\{ \omega_0 \in F_p^{\omega_0} : \frac{\omega_0(t)}{\omega(t)} \text{ croît près de } 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega_0(t)}{\omega(t)} = 0. \right\}$$

Exemple 2 Pour $1 \leq p < \infty$ et $\frac{1}{p} < \beta < 1$, considérons $\omega_0(t) = t^\beta \ell_0(t)$, une fonction à variation régulière satisfaisant l'hypothèse (H) de l'Exemple (1) Soit $\omega_\tau(t) = \omega_0(t) (\log \frac{1}{t})^\tau$ où $\tau > \frac{1}{p}$. Alors $\omega_\tau \in F_p^{\omega_0}$, et il est facile de voir que pour tout $\frac{1}{p} < \tau_0 < \tau$ on a $\omega_{\tau_0} \in J_p^{\omega_0}(\omega_\tau)$. En particulier, ω_0 est telle que la condition (ii) de l'Exemple 1 peut être satisfaite.

2.4 Critère de Kolmogorov

Lemme 2 Soit $1 \leq p < \infty$, ω_0 un $(\frac{1}{p}, 1)$ -module, et considéronsle processus stochastique réel continu $\{X_t, t \in [0, 1]\}$, nul en 0, et satisfaisant l'hypothèse suivante :

Il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour tout $s, t \in [0, 1]$, on ait

$$\left(\mathbb{E} |X_t - X_s|^p \right)^{1/p} \leq C_p \omega_0(|t - s|).$$

Alors :

(i) Pour tout $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$, il existe une constante $C(p, \omega_0, \omega) > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(\|X\|_p^\omega > \lambda) \leq C(p, \omega_0, \omega) \lambda^{-p}.$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X \in B_p^\omega(I)) = 1, \quad \forall \omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}.$$

(ii) Pour tout $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ tel que $J_p^{\omega_0}(\omega) \neq \emptyset$, on a

$$\mathbb{P}(X \in B_p^{\omega, 0}(I)) = 1.$$

Preuve : Soit $\lambda > 0$. En appliquant le Théorème 2.3.1, il suffit de montrer que, pour tout $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$,

$$\mathbb{P} \left(\max \left\{ |C_0(X)|, |C_1(X)|, \sup_{j \geq 0} \frac{2^{-j/p}}{\omega(2^{-j})} \left(\sum_{l=2^{j+1}}^{2^{j+1}} |C_l(X)|^p \right)^{1/p} \right\} > \lambda \right) \leq C(p, \omega_0, \omega) \lambda^{-p}.$$

Par l'inégalité de Tchebyshev, on a

$$J = \mathbb{P} \left(\sup_{j \geq 0} \frac{2^{-j/p}}{\omega(2^{-j})} \left(\sum_{l=2^{j+1}}^{2^{j+1}} |C_l(X)|^p \right)^{1/p} > \lambda \right) \leq \lambda^{-p} \sum_{j \geq 0} \frac{2^{-j}}{\omega(2^{-j})^p} \sum_{l=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \mathbb{E} |C_l(X)|^p.$$

D'autre part, les coefficients $C_l(X)$ sont donnés par

$$C_l(X) = 2 \left(X \left(\frac{2k-1}{2^{j+1}} \right) - \frac{1}{2} \left[X \left(\frac{2k}{2^{j+1}} \right) + X \left(\frac{2k-2}{2^{j+1}} \right) \right] \right),$$

pour $l = 2^j + k$, $j \geq 0$ et $k = 1, \dots, 2^j$. Ainsi,

$$J \leq C_p \sum_{j \geq 0} \frac{2^{-j}}{\omega(2^{-j})^p} \sum_{l=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \mathbb{E} \left| X \left(\frac{k}{2^j} \right) - X \left(\frac{k-1}{2^j} \right) \right|^p \leq \lambda^{-p} \left[C_p \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\omega_0}{\omega} (2^{-j}) \right)^p \right] \leq C(p, \omega_0, \omega) \lambda^{-p}.$$

Enfin, l'assertion (ii) découle immédiatement de (i) et de l'injection continue de la Remarque (5) \square

Remarque 7 Dans la preuve de la seconde assertion du Lemme (2), nous utilisons seulement le fait que, pour tout $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$, il existe $\tilde{\omega} \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\omega}(t)}{\omega(t)} = 0.$$

Aucun argument de monotonie portant sur $\tilde{\omega}/\omega$ n'est nécessaire.

2.5 Critère de tension

Définition 2.5.1 (Une suite tendue) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles.

On dit que la suite est tendue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \text{ tel que } \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > K) \leq \varepsilon.$$

Proposition 8 Soient $1 \leq p < \infty$ et ω un $(\frac{1}{p}, 1)$ -module. Une famille F de fonctions mesurables $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est relativement compacte dans $B_p^{\omega, 0}(I)$ si :

$$(i) \sup_{f \in F} \|f\|_{\omega, p} < \infty,$$

$$(ii) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{f \in F} K_\varepsilon(f, \omega, p) = 0,$$

où

$$K_\varepsilon(f, \omega, p) := \sup_{0 < t \leq \varepsilon} \frac{\omega_p(f, t)}{\omega(t)}.$$

Preuve: D'après le théorème de Riesz–Fréchet–Kolmogorov (voir [21]) il est facile de vérifier que (i) et (ii) impliquent que F est relativement compacte dans $L^p(I)$. Ainsi, pour toute suite $(f_n)_{n \geq 1}$ extraite de F , il existe une sous-suite (que l'on note encore (f_n)) qui converge dans $L^p(I)$ vers une fonction $f \in L^p(I)$.

Pour conclure la preuve, il suffit d'établir les deux points suivants :

- (a) $f \in B_p^{\omega,0}(I)$,
- (b) $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $B_p^\omega(I)$.

(a) — Montrons que $f \in B_p^{\omega,0}(I)$.

Choisissons une sous-suite de (f_n) qui converge vers f presque partout. Par le lemme de Fatou, on obtient

$$\|\Delta_h f\|_{L^p(I)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_h f_n\|_{L^p(I)} \leq \sup_{n \geq 1} \|\Delta_h f_n\|_{L^p(I)}.$$

Donc, pour tout $t \in I$,

$$\omega_p(f, t) \leq \sup_{n \geq 1} \omega_p(f_n, t). \quad (2.2)$$

D'après (i),

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_p(f, t)}{\omega(t)} \leq \sup_{n \geq 1} \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_p(f_n, t)}{\omega(t)} \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_{\omega, p} < \infty.$$

De plus, l'hypothèse (ii) implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{t \leq \delta_\varepsilon} \frac{\omega_p(f_n, t)}{\omega(t)} < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Alors, grâce à ((2.2)), on obtient

$$\omega_p(f, t) = o(\omega(t)) \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0,$$

ce qui termine la preuve de (a).

(b) — Montrons que (f_n) est de Cauchy dans $B_p^\omega(I)$.

Pour $n, n' \geq 0$, on a

$$\|f_n - f_{n'}\|_{\omega, p} = \|f_n - f_{n'}\|_{L^p(I)} + \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_p(f_n - f_{n'}, t)}{\omega(t)}.$$

Comme $\|f_n - f_{n'}\|_{L^p(I)} \rightarrow 0$ lorsque $n, n' \rightarrow \infty$, on choisit $\delta_0 > 0$, puis

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_p(f_n - f_{n'}, t)}{\omega(t)} \leq \sup_{t \leq \delta_0} \frac{\omega_p(f_n - f_{n'}, t)}{\omega(t)} + \sup_{t > \delta_0} \frac{\omega_p(f_n - f_{n'}, t)}{\omega(t)}.$$

On obtient alors

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_p(f_n - f_{n'}, t)}{\omega(t)} \leq K_{\delta_0}(f_n - f_{n'}, \omega, p) + \frac{2\|f_n - f_{n'}\|_{L^p(I)}}{\omega(\delta_0)}.$$

Grâce à (ii), on choisit $\delta_0 > 0$ assez petit pour que

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_p(f_n - f_{n'}, t)}{\omega(t)} \leq 2\varepsilon + \frac{2\|f_n - f_{n'}\|_{L^p(I)}}{\omega(\delta_0)}. \quad (2.4)$$

Cela termine la preuve de la Proposition (8). \square

Lemme 3 Soient $1 \leq p < \infty$ et ω, ω_0 deux $(\frac{1}{p}, 1)$ -modules tels que

$$\frac{\omega_0(t)}{\omega(t)} \text{ est croissante au voisinage de } 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega_0}{\omega} = 0.$$

Alors l'espace $B_p^{\omega_0}(I)$ est compactement immergé dans $B_p^{\omega, 0}(I)$.

Preuve: D'après la Remarque (5), on dispose de l'injection continue

$$B_p^{\omega_0}(I) \hookrightarrow B_p^{\omega, 0}(I).$$

Pour terminer la preuve, il suffit donc d'établir les assertions (i) et (ii) de la Proposition (8).

Soit B une partie bornée de $B_p^{\omega_0}(I)$ et posons

$$K := \sup_{f \in B} \|f\|_{\omega_0, p}.$$

Comme $\frac{\omega_0}{\omega}$ est croissante au voisinage de 0, en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient

$$K_\varepsilon(f, \omega, p) = \sup_{0 < t \leq \varepsilon} \frac{\omega_p(f, t)}{\omega(t)} \leq \sup_{0 < t \leq \varepsilon} \left(\frac{\omega_p(f, t)}{\omega_0(t)} \cdot \frac{\omega_0(t)}{\omega(t)} \right) \leq \|f\|_{\omega_0, p} \frac{\omega_0(\varepsilon)}{\omega(\varepsilon)} \leq K \frac{\omega_0(\varepsilon)}{\omega(\varepsilon)}.$$

Par conséquent,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{f \in B} K_\varepsilon(f, \omega, p) = 0.$$

Ainsi, d'après la Proposition (8), B est relativement compacte dans $B_p^{\omega, 0}(I)$.

\square

Lemme 4 Soient $1 \leq p < \infty$ et ω_0 un $(\frac{1}{p}, 1)$ -module. Soit $(X_t^n, t \in I)_{n \geq 1}$ une suite de processus stochastiques telle que :

(i) $X_0^n = 0$ pour tout $n \geq 1$;

(ii) Il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\left(\mathbb{E} |X_t^n - X_s^n|^p \right)^{1/p} \leq C_p \omega_0(|t - s|), \quad \forall s, t \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors la famille $(X_t^n, t \in I)_{n \geq 1}$ est tendue dans l'espace $B_p^{\omega, 0}(I)$ pour tout $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ tel que $J_p^{\omega_0}(\omega) \neq \emptyset$.

Preuve : Soit $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ telle qu'il existe $\omega_0 \in J_p^{\omega_0}(\omega)$. La première assertion du Lemme (2) implique l'existence d'une constante $C_p > 0$ telle que, pour tout $\tau > 0$,

$$\mathbb{P}(\|X^n\|_{\omega_0, p} > \tau) \leq C_p \tau^{-p}, \quad \forall n \geq 1.$$

La preuve est alors complétée en appliquant le Lemme (3) et en laissant $\tau \rightarrow \infty$. \square

2.6 Régularité des trajectoires d'une classe de processus gaussiens

Dans cette section, nous nous intéressons à l'obtention de résultats de régularité pour une large classe de processus gaussiens.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $X = \{X_t, t \in I\}$ un processus gaussien centré tel que $X_0 = 0$ et, pour tous $t, s \in I$,

$$\left(\mathbb{E}(X_t - X_s)^2\right)^{1/2} \leq C \omega_0(|t - s|), \quad (2.5)$$

où $C > 0$ est une constante donnée et $\omega_0 : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, croissante, s'annulant en 0.

Théorème 2.6.1 *Soit $1 \leq p < \infty$ et supposons que ω_0 soit un module $(\frac{1}{p}, 1)$. Alors*

$$\mathbb{P}\{X \in B_p^{\omega_0, 0}(I)\} = 1,$$

pour toute $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ telle que $J_p^{\omega_0}(\omega) \neq \emptyset$.

Preuve : Puisque $\{X_t, t \in I\}$ est un processus gaussien, la variable aléatoire $X_t - X_s$ est gaussienne. Par conséquent, $\mathbb{E}|X_t - X_s|^{2p}$ est proportionnelle à $(\mathbb{E}|X_t - X_s|^2)^p$ pour tout $p \geq 1$. On obtient alors

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \leq C_p \left(\omega_0(|t - s|)\right)^p. \quad (2.6)$$

La preuve s'achève en appliquant le Lemme (2).

Remarque 8 *Supposons que ω_0 soit une fonction à variation régulière d'ordre $\alpha > 0$ satisfaisant les hypothèses (H) de l'Exemple (1). Alors (voir l'Exemple (2)), pour tout $\lambda > 0$ et pour tout*

$$p > \max\left\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\alpha}\right\},$$

on a

$$\mathbb{P}\{X \in B_p^{\omega_0, \lambda, 0}(I)\} = 1,$$

où

$$\omega_\lambda(t) = \omega_0(t) \left(\log \frac{1}{t} \right)^\lambda, \quad t \in (0, 1].$$

Une classe importante de processus gaussiens satisfaisant ((2.5)) est constituée de ceux admettant la représentation suivante en loi :

$$X_t \stackrel{d}{=} \int_I K(t, s) dW_s, \quad t \in I, \quad (2.7)$$

où $W = \{W_t, t \in I\}$ désigne le mouvement brownien standard sur I et où $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable satisfaisant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & K(0, s) = 0, \quad \forall s \in I, \\ (ii) \quad & \exists C > 0 \quad \text{tel que,} \quad \forall s, t \in I, \\ & \int_I (K(t, r) - K(s, r))^2 dr \leq C (\omega_0(|t - s|))^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $C > 0$ est une constante donnée et $\omega_0 : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, croissante, s'annulant en 0.

Par l'hypothèse (2.8)–(ii), le processus $\{X_t, t \in I\}$ est un processus gaussien bien défini et admet pour fonction de covariance

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = \int_I K(t, r) K(s, r) dr, \quad s, t \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

2.7 EXEMPLES

2.7.1 Processus par intégrale

Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction α -Hölder continue pour un certain $\alpha > 0$, et soit X le processus gaussien centré défini par

$$X_t = \int_0^t h(t - s) dW_s.$$

En posant

$$K(t, r) = h(t - r) \mathbf{1}_{[0, t]}(r),$$

on obtient, pour tout $0 \leq s < t \leq 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (K(t, r) - K(s, r))^2 dr &\leq \int_0^s (h(t - r) - h(s - r))^2 dr \\ &+ \int_s^t h^2(t - r) dr \\ &\leq C(|s - t|^{2\alpha} + |s - t|) \\ &\leq C|s - t|^{\min\{2\alpha, 1\}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les hypothèses(2.8) sont satisfaites avec

$$\omega_0(h) = h^{\min\{\alpha, 1/2\}}.$$

2.7.2 Le processus d'Ornstein–Uhlenbeck

Soit X le processus d'Ornstein–Uhlenbeck stationnaire défini par

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $\alpha, \sigma > 0$ sont des constantes et

$$X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right),$$

indépendant de W .

Le processus X est un processus gaussien centré tel que

$$\mathbb{E}(X_t - X_s)^2 = \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha|t-s|}) \leq \sigma^2 |t-s|, \quad \forall t, s \in [0, 1].$$

Par conséquent, X satisfait la condition (2.5) avec

$$\omega_0(h) = \sigma h^{1/2}.$$

2.7.3 Mouvement brownien fractionnaire

L'un des processus les plus classiques admettant la représentation (2.7) est le mouvement brownien fractionnaire $\{B_t^H, t \in I\}$ de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$. Autrement dit, B^H est un processus gaussien centré dont la fonction de covariance est donnée par

$$R(t, s) = \mathbb{E}(B_s^H B_t^H) = \frac{1}{2} V(H) (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

où

$$V(H) = \frac{\Gamma(2-2H) \cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}.$$

Il a été montré par Decreasefond et Üstünel (voir ([15]), p. 182) que le processus B^H admet une représentation intégrale de la forme

$$B_t^H = \int_0^1 K^H(t, r) dW_r,$$

Remarque 9 *Dans certaines situations, on obtient une propriété de régularité plus précise pour X que celle donnée par le Théorème (2.3.1). Il suffit pour cela de disposer de davantage d'informations sur la régularité de la fonction de variance de X .*

Par exemple, soit $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ un processus gaussien centré à accroissements stationnaires, de fonction de variance

$$\omega_0(h) = \left(\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t)^2\right)^{1/2}, \quad h > 0.$$

On fait les hypothèses suivantes (H') :

(i) ω_0 est une fonction à variation régulière d'ordre $\alpha > 0$ satisfaisant les hypothèses (H) de l'Exemple 1 ;

(ii) ω_0 est dérivable et il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\omega_0'(h)| \leq Mh^{-1}|\omega_0(h)|, \quad h > 0.$$

Alors, pour tout

$$p > \frac{1}{\alpha},$$

on a (voir [9]) :

$$\mathbb{P}\{X \in B_p^{\omega_0}(I)\} = 1.$$

Notons que la classe des processus gaussiens satisfaisant les hypothèses (H') contient le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $0 < H < 1$.

2.7.4 Mouvement brownien Multifractionnaire

Rappelons une autre représentation du mBm, liée à la représentation harmonisable classique. Soient $(B_x^1)_{x \in \mathbb{R}_+}$ et $(B_x^2)_{x \in \mathbb{R}_+}$ deux mouvements browniens standards linéairement indépendants. On considère alors le processus gaussien centré X^H défini par

$$X_t^H = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{x^{H(t)+\frac{1}{2}}} dB_x^1 + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^{H(t)+\frac{1}{2}}} dB_x^2, \quad t \in I. \quad (2.10)$$

Proposition 9 *Le processus*

$$(X_t^H, t \in I)$$

est, à une fonction déterministe multiplicative près, un mouvement brownien multifractionnaire.

Preuve: Soient $s, t \in I$. On a

$$\mathbb{E}(X_t^H X_s^H) = \int_0^1 \frac{(1 - \cos(tx))(1 - \cos(sx))}{x^{H(t)+H(s)+1}} dx + \int_0^1 \frac{\sin(tx)\sin(sx)}{x^{H(t)+H(s)+1}} dx.$$

On en déduit

$$\mathbb{E}(X_t^H X_s^H) = \int_0^1 \frac{1 - \cos(tx)}{x^{H(t)+H(s)+1}} dx + \int_0^1 \frac{1 - \cos(sx)}{x^{H(t)+H(s)+1}} dx - \int_0^1 \frac{1 - \cos((t-s)x)}{x^{H(t)+H(s)+1}} dx.$$

Par un changement de variable élémentaire, on obtient clairement

$$\mathbb{E}(X_t^H X_s^H) = \frac{V(H(t), H(s))}{2} (t^{h(t,s)} + s^{h(t,s)} - |t-s|^{h(t,s)}),$$

où $h(t, s) = H(t) + H(s)$ qui est égal

$$V(H(t), H(s)) = 2 \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^{H(t)+H(s)+1}} dx.$$

On remarque que le mBm n'admet pas de représentation du type (2.7). Nous introduisons maintenant une classe d'espaces de Besov contenant presque sûrement les trajectoires du mBm.

Proposition 10 *Soit $H : I \rightarrow [a, b] \subset (0, 1)$ une fonction höldérienne d'exposant $\beta > 0$. Posons*

$$\alpha = \min(a, \beta) \quad \text{et} \quad \omega_0(t) = t^\alpha.$$

Alors, pour tout $p > \frac{1}{\alpha}$, le processus gaussien $\{X^H(t), t \in I\}$ vérifie

$$\mathbb{P}\{X^H \in B_p^{\omega_0, 0}(I)\} = 1,$$

pour toute fonction $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ telle que $J_p^{\omega_0}(\omega) \neq \emptyset$.

D'après la Remarque (8), avec les notations de la Proposition 10, on obtient :

Corollaire 1 *Pour tout $\lambda > 0$ et tout*

$$p > \max\left\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\alpha}\right\},$$

on a

$$\mathbb{P}\{X^H \in B_p^{\omega_\lambda, 0}(I)\} = 1,$$

où

$$\omega_\lambda(t) = \omega_0(t) \left(\log \frac{1}{t}\right)^\lambda, \quad t \in (0, 1].$$

Preuve : Considérons le champ gaussien

$$(t, \lambda) \mapsto X_t^\lambda, \quad (t, \lambda) \in I \times [a, b].$$

Remarquons que, pour $\lambda \in [a, b]$ fixé, le processus $(X_t^\lambda, t \in I)$ est distribué, à une constante multiplicative près, comme un mouvement brownien fractionnaire. On a

$$\mathbb{E}(X_t^\lambda - X_s^\lambda)^2 = C(\lambda) |t - s|^{2\lambda},$$

où

$$C(\lambda) = 2 \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u^{2\lambda+1}} du.$$

Maintenant, soient $\lambda, \lambda' \in [a, b]$, et notons X^λ et $X^{\lambda'}$ les mouvements browniens fractionnaires associés définis par (3.2). On obtient alors

$$X_t^{\lambda'} - X_t^\lambda = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{x^{\lambda+\lambda'+1/2}} (x^\lambda - x^{\lambda'}) dB_x^1 + \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x^{\lambda+\lambda'+1/2}} (x^\lambda - x^{\lambda'}) dB_x^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(X_t^{\lambda'} - X_t^\lambda\right)^2\right] &= \int_0^\infty \frac{(1 - \cos(tx))^2}{x^{2(\lambda+\lambda')+1}} (x^\lambda - x^{\lambda'})^2 dx + \int_0^\infty \frac{\sin^2(tx)}{x^{2(\lambda+\lambda')+1}} (x^\lambda - x^{\lambda'})^2 dx \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{x^{2(\lambda+\lambda')+1}} (x^\lambda - x^{\lambda'})^2 dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Soit $\lambda' < \lambda$. D'après le théorème de la valeur moyenne Il existe $\xi \in (\lambda', \lambda)$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(X_t^{\lambda'} - X_t^\lambda\right)^2\right] &= 2(\lambda - \lambda')^2 \int_0^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{x^{2(\lambda+\lambda')+1}} x^{2\xi} (\log x)^2 dx \\ &\leq 2(\lambda - \lambda')^2 \left[\int_0^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{x^{2\lambda+1}} (\log x)^2 dx + \int_0^\infty \frac{1}{x^{2\lambda'+1}} (\log x)^2 dx \right] \leq C(a, b)(\lambda - \lambda')^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

D'autre part, on a

$$\mathbb{E}|X_t^H - X_s^H|^2 \leq 2 \left[\mathbb{E}|X_t^{H(t)} - X_s^{H(t)}|^2 + \mathbb{E}|X_s^{H(t)} - X_s^{H(s)}|^2 \right].$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}|X_t^H - X_s^H|^2 \leq C(a, b) \left(|t - s|^{2H(t)} + |H(t) - H(s)|^2 \right) \leq C(a, b) |t - s|^{2\beta},$$

où $\beta = \min(a, \alpha)$.

En conséquence, le processus X^H satisfait l'hypothèse 2.5 avec

$$\omega_0(t) = t^\beta.$$

Le Théorème (2.6.1) fournit alors le résultat de régularité désiré dans les espaces de Besov.

3

RESULTATS D'APPROXIMATION DANS LES ESPACES DE BESOV

Ce chapitre est consacré à l'étude de la convergence faible dans les espaces de Besov modulaires, cadre fonctionnel particulièrement adapté à l'analyse des trajectoires de processus stochastiques. Nous présentons des résultats d'approximation dans les espaces de Besov, qui constituent un outil fondamental pour l'étude des propriétés asymptotiques des processus aléatoires. Nous appliquons ensuite ces résultats au mouvement brownien fractionnaire, puis au cas plus général du mouvement brownien multifractionnaire, afin d'illustrer l'intérêt des espaces de Besov modulaires pour l'analyse fine de la convergence faible de processus gaussiens présentant des régularités variables.

3.1 Approximation d'un processus gaussien du type Volterra dans un espace de Besov modulaire

Le but de cette section est de montrer que la classe de processus X admettant la représentation ((2.7)) peut être approximée en loi, dans une classe d'espaces de Besov, par des processus continus construits à partir de processus de Poisson. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini un processus de Poisson standard $N = \{N_t, t \geq 0\}$, et soit $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ un autre espace probabilisé sur lequel est défini un mouvement brownien standard $W = \{W_t, t \in [0, 1]\}$.

On définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la famille de processus $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ donnée par :

$$X^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, r) (-1)^{N_{r/\varepsilon^2}} dr, \quad t \in [0, 1].$$

Considérons le processus gaussien centré

$$X_t = \int_0^t K(t, s) dW_s.$$

Dans la section précédente, on a montré que, sous l'hypothèse (2.8), le processus X appartient presque sûrement à l'espace de Besov $B_p^{\omega, 0}$, où $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ tel que $J_p^{\omega_0}(\omega) \neq \emptyset$. Cela motive l'idée de prouver la convergence faible de la famille de processus $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ vers le processus X dans cette classe d'espaces de Besov. Un résultat similaire a été obtenu dans l'espace de Banach des fonctions continues (cf. [12]).

Commençons par donner le lemme ci-dessous dû à [12] que nous utiliserons dans la suite .

Lemme 5 *Pour tout entier pair $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_m = \frac{m!}{2}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $f \in L^2([0, 1])$,*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 f(r) \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right] \leq C_m \left(\int_0^1 f^2(r) dr \right)^{m/2}.$$

Preuve : On a

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 f(r) \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right] = \mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^m} f(r_1) \cdots f(r_m) \theta_\varepsilon(r_1) \cdots \theta_\varepsilon(r_m) dr_1 \cdots dr_m \right].$$

Par symétrisation, il vient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 f(r) \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right] = \\ & \frac{m!}{\varepsilon^m} \mathbb{E} \left[\int_{[0,1]^m} f(r_1) \cdots f(r_m) (-1)^{N(r_1/\varepsilon^2) + \cdots + N(r_m/\varepsilon^2)} \mathbf{1}_{\{r_1 \leq \cdots \leq r_m\}} dr_1 \cdots dr_m \right]. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 f(r) \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right] = \frac{m!}{\varepsilon^m} \int_{[0,1]^m} \mathbf{1}_{\{r_1 \leq \cdots \leq r_m\}} f(r_1) \cdots f(r_m) \mathbb{E} \left[(-1)^{\sum_{i=1}^{m/2} (N(r_{2i}/\varepsilon^2) - N(r_{2i-1}/\varepsilon^2))} \right] dr_1 \cdots dr_m$$

Rappelons que si Y est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ , alors

$$\mathbb{E} \left[(-1)^Y \right] = e^{-2\lambda}.$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{m/2} (N(r_{2i}/\varepsilon^2) - N(r_{2i-1}/\varepsilon^2))$$

suit une loi de Poisson de paramètre

$$\sum_{i=1}^{m/2} \frac{r_{2i} - r_{2i-1}}{\varepsilon^2}.$$

On obtient alors que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 f(r) \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right] = \frac{m!}{\varepsilon^m} \int_{[0,1]^m} \mathbf{1}_{\{r_1 \leq \dots \leq r_m\}} f(r_1) \cdots f(r_m) \exp \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{m/2} (r_{2i} - r_{2i-1}) \right\} dr_1 \cdots dr_m$$

Par majoration, on a

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty f(r) \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right] \leq \frac{m!}{\varepsilon^m} \int_{[0,1]^m} \left(\prod_{i=1}^{m/2} \mathbf{1}_{\{r_{2i-1} \leq r_{2i}\}} \right) |f(r_1) \cdots f(r_m)| \left(\prod_{i=1}^{m/2} \exp \left\{ -2 \frac{r_{2i} - r_{2i-1}}{\varepsilon^2} \right\} \right) dr_1 \cdots dr_m$$

Par factorisation, il vient

$$= m! \left(\int_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{\{r_1 \leq r_2\}} |f(r_1) f(r_2)| \frac{1}{\varepsilon^2} \exp \left\{ -2 \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon^2} \right\} dr_1 dr_2 \right)^{m/2}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{m!}{2^{m/2}} \left(\int_0^1 f^2(r_1) \left(\int_{r_1}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} \exp \left\{ -2 \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon^2} \right\} dr_2 \right) dr_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 f^2(r_2) \left(\int_0^{r_2} \frac{1}{\varepsilon^2} \exp \left\{ -2 \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon^2} \right\} dr_1 \right) dr_2 \right)^{m/2}. \end{aligned}$$

Enfin, comme

$$\int_{r_1}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} \exp \left\{ -2 \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon^2} \right\} dr_2 \leq \frac{1}{2}, \quad \int_0^{r_2} \frac{1}{\varepsilon^2} \exp \left\{ -2 \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon^2} \right\} dr_1 \leq \frac{1}{2},$$

on obtient le résultat énoncé

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 f(r) \theta_\varepsilon(r) dr \right)^m \right] \leq \frac{m!}{2^{m/2}} \left(\int_0^1 f^2(r) dr \right)^{m/2}.$$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 3.1.1 *Soit $1 \leq p < \infty$, soit ω_0 un $(1/p, 1)$ -module, et soit K satisfaisant (2.8). Alors la famille de processus stochastiques $(X^\varepsilon(t), t \in [0, 1])_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers le processus $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ dans l'espace de Banach séparable $B_p^{\omega, 0}$, pour tout $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega_0}$ tel que $J_p^{\omega_0}(\omega) \neq \emptyset$.*

Preuve La preuve de la tension est basée sur le Lemme (4) L'hypothèse (2.8-(i)) implique que $X^\varepsilon(0) = 0$. Il suffit de montrer que la famille de processus $(X^\varepsilon(t), t \in [0, 1])_{\varepsilon > 0}$ satisfait la condition (ii) du Lemme (4), c'est-à-dire qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour tout $s, t \in I$,

$$\mathbb{E} |X^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(s)|^p \leq C_p (\omega_0(|t - s|))^p, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Soient $0 \leq s < t \leq 1$ et $m = 2\lfloor p \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Par l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X_t - X_s|^p &\leq \left(\mathbb{E} |X_t - X_s|^m \right)^{\frac{p}{m}} \\ &= \left[\mathbb{E} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_I (K(t, r) - K(s, r)) (-1)^{N(\frac{r}{\varepsilon^2})} dr \right|^m \right]^{\frac{p}{m}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

D'après le Lemme (5), on obtient pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pair :

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_I [K(t, r) - K(s, r)] (-1)^{N_{r/\varepsilon^2}} dr \right|^m \leq C_m \left(\int_I [K(t, r) - K(s, r)]^2 dr \right)^{m/2},$$

où C_m est une constante positive. En appliquant l'hypothèse (2.8-(ii)), on obtient :

$$\mathbb{E} |X^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(s)|^p \leq C_p \omega_0(|t - s|)^p.$$

Ainsi, d'après le Lemme (4), la famille $\{X^\varepsilon(t), t \in I\}_{\varepsilon > 0}$ est tendue dans l'espace $B_p^{\omega, 0}(I)$, où ω est comme indiqué dans le théorème.

Dans la suite, nous identifions la loi limite. Nous allons montrer que, pour tout $k \geq 1$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ et $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$, les lois des variables aléatoires réelles S_ε , définies par

$$S_\varepsilon = \sum_{i=1}^k a_i Y_{t_i}^\varepsilon,$$

convergent, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers la loi de la variable aléatoire

$$S = \sum_{i=1}^k a_i Y_{t_i}.$$

Cela sera établi en montrant la convergence des fonctions caractéristiques correspondantes.

Notons que

$$S_\varepsilon = \int_0^1 K^*(r) \theta_\varepsilon(r) dr, \quad S = \int_0^1 K^*(r) dW_r,$$

où

$$K^*(r) = \sum_{i=1}^k a_i K(t_i, r).$$

La fonction K^* appartient à $L^2([0, 1])$ et peut être approchée par une suite de fonctions en escalier de la forme

$$K^n(r) = \sum_{i=0}^{m_n-1} K_i^n \mathbf{1}_{(r_i^n, r_{i+1}^n]}(r),$$

avec $0 = r_0^n < r_1^n < \dots < r_{m_n-1}^n < r_{m_n}^n = 1$, choisies de telle sorte que

$$\int_0^1 (K^*(r) - K^n(r))^2 dr \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Définissons maintenant

$$S_\varepsilon^n = \int_0^1 K^n(r) \theta_\varepsilon(r) dr \quad \text{et} \quad S^n = \int_0^1 K^n(r) dW_r.$$

En prenant $f = K^* - K^n$ dans le Lemme (4), on obtient qu'il existe une constante positive C , indépendante de n , telle que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}[(S_\varepsilon - S_\varepsilon^n)^2] \leq C \int_0^1 (K^*(r) - K^n(r))^2 dr \leq \frac{C}{n}. \quad (4.2)$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$S_\varepsilon^n = \sum_{i=0}^{m_n-1} K_i^n \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} \theta_\varepsilon(r) dr$$

converge en loi, lorsque ε tend vers zéro, vers

$$S^n = \sum_{i=0}^{m_n-1} K_i^n \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} dW_r,$$

grâce au résultat établi par [20]. On en déduit alors la convergence des fonctions caractéristiques correspondantes : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[e^{ixS_\varepsilon^n}] \longrightarrow \tilde{\mathbb{E}}[e^{ixS^n}] \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \mathbb{E}[e^{ixS_\varepsilon}] - \tilde{\mathbb{E}}[e^{ixS}] \right| \leq \alpha_\varepsilon^n + \beta_\varepsilon^n + \gamma^n,$$

où

$$\alpha_\varepsilon^n = \left| \mathbb{E}[e^{ixS_\varepsilon}] - \mathbb{E}[e^{ixS_\varepsilon^n}] \right|, \quad \beta_\varepsilon^n = \left| \mathbb{E}[e^{ixS_\varepsilon^n}] - \tilde{\mathbb{E}}[e^{ixS^n}] \right|, \quad \gamma^n = \left| \tilde{\mathbb{E}}[e^{ixS^n}] - \tilde{\mathbb{E}}[e^{ixS}] \right|.$$

L'inégalité (4.2) et le théorème des accroissements finis impliquent qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_\varepsilon^n \leq x \mathbb{E}[|S_\varepsilon - S_\varepsilon^n|] \leq Cx \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis ainsi que l'expression de la variance d'une intégrale stochastique, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma^n \leq x \tilde{\mathbb{E}}[|S - S^n|] \leq Cx \left(\int_0^1 (K^*(r) - K^n(r))^2 dr \right)^{1/2} \leq Cx \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, les termes α_ε^n et γ^n deviennent arbitrairement petits dès que l'on choisit $n \geq n_0$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Enfin, en fixant $n = n_0$, le terme $\beta_\varepsilon^{n_0}$ converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro, d'après (4.3). Ceci achève la preuve de la convergence des fonctions caractéristiques.

Corollaire 2 *Supposons que ω_0 soit une fonction à variable régulière d'ordre $\beta > 0$ en 0, satisfaisant les hypothèses (H) de l'Exemple 1. Alors, pour tout $\tau > 0$ et pour tout $p > \max\{1/\tau, 1/\beta\}$, la famille de processus $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers le processus $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ dans l'espace de Banach séparable $B_p^{\omega_\tau, 0}$, où*

$$\omega_\tau(t) = \omega_0(t) (\log(1/t))^\tau.$$

3.2 Exemples

3.2.1 Cas du mouvement brownien fractionnaire

Corollaire 3 *Soit $1 \leq p < \infty$, soit ω_0 un module $(1/p, 1)$. Alors, le processus $\{X_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K^H H(t, r) (-1)^{N(\frac{r}{\varepsilon^2})} dr, t \in [0, 1]\}$ converge faiblement, lorsque ε tend vers 0, vers le mouvement brownien fractionnaire*

$$B_t^H = \int_0^1 K^H(t, s) dW_s$$

dans l'espace de Banach séparable $B_p^{\omega, 0}$, pour tout $\omega \in \mathcal{F}_p^{\omega, 0}$ tel que $J_p^{\omega, 0}(\omega) \neq \emptyset$.

Preuve : Comme K^H vérifie la condition (2.8) donc le théorème 3.1.1 donne le résultats

3.2.2 Cas du mouvement brownien multifractionnaire

Dans cette section, nous montrons un résultat analogue pour le mouvement brownien multifractionnaire. Soient N_1, N_2 deux processus de Poisson indépendants et posons

$$\psi_i^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} (-1)^{N_i(x/\varepsilon^2)}, \quad \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2.$$

Soit $H : [0, \infty) \rightarrow [a, b] \subset (\frac{1}{2}, 1)$ une fonction Hölderienne d'ordre $\gamma > 0$. Considérons la famille de processus

$$X^\varepsilon(t) = \int_0^1 \frac{1 - \cos(tx)}{x^{H(t)+1/2}} \psi_1^\varepsilon(x) dx + \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{x^{H(t)+1/2}} \psi_2^\varepsilon(x) dx. \quad (3.2)$$

Soit X^H le processus gaussien centré défini par 2.10. Le résultat d'approximation suivant est valable.

Proposition 11 *Soit $\beta = \min\{a, \gamma\}$. Pour tout $\tau > 0$ et tout $p > \max\{1/\beta, 1/\tau\}$, la famille de processus $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dans l'espace de Banach séparable $B_p^{\omega_\tau, 0}$, vers le mouvement brownien multifractionnaire $\{X_t^H, t \in [0, 1]\}$, où*

$$\omega_\tau(t) = t^\beta (\log(1/t))^\tau.$$

Preuve : Pour démontrer la tension, on utilise les mêmes calculs que dans la Proposition 10. Considérons la famille de champs

$$(t, h) \mapsto X^{\varepsilon, h}(t), \quad (t, h) \in [0, 1] \times [a, b], \varepsilon > 0,$$

définie par

$$X^{\varepsilon, h}(t) = \int_0^\infty K_h^{(1)}(t, x) \psi_1^\varepsilon(x) dx + \int_0^\infty K_h^{(2)}(t, x) \psi_2^\varepsilon(x) dx,$$

où

$$K_h^{(1)}(t, x) = \frac{1 - \cos(tx)}{x^{h+1/2}}, \quad K_h^{(2)}(t, x) = \frac{\sin(tx)}{x^{h+1/2}}.$$

Pour $h \in [a, b] \subset (\frac{1}{2}, 1)$ et $t \in [0, 1]$, on a $K_h^{(i)}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+)$, et le Lemme 5 s'applique (en remplaçant $L^2(I)$ par $L^2(\mathbb{R}_+)$). Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(X_t^{\varepsilon, h} - X_s^{\varepsilon, h} \right)^{2m} &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty (K_h^{(1)}(t, x) - K_h^{(1)}(s, x)) \psi_1^\varepsilon(x) dx + \int_0^\infty (K_h^{(2)}(t, x) - K_h^{(2)}(s, x)) \psi_2^\varepsilon(x) dx \right]^m \\ &\leq C_m \left(\int_0^\infty (K_h^{(1)}(t, x) - K_h^{(1)}(s, x))^2 dx \right)^m + C_m \left(\int_0^\infty (K_h^{(2)}(t, x) - K_h^{(2)}(s, x))^2 dx \right)^m \\ &\leq C_m(a, b) \left| \int_0^\infty \frac{1 - \cos((t-s)x)}{x^{2h+1}} dx \right|^m \leq C_m(a, b) |t-s|^{2hm} \leq C_m(a, b) |t-s|^{2\beta m}. \end{aligned}$$

De plus, pour $h, h' \in [a, b]$,

$$\mathbb{E}\left(X_t^{\varepsilon, h} - X_t^{\varepsilon, h'}\right)^{2m} \leq C_m(a, b)|h - h'|^{2m}.$$

Ainsi, pour $s, t \in I$,

$$\mathbb{E}(X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon)^{2m} \leq C_m(a, b)\left(|t - s|^{2mH(t)} + |H(t) - H(s)|^{2m}\right) \leq C_m(a, b)|t - s|^{2m\beta}.$$

Comme dans (3.1), l'inégalité de Hölder donne pour tout $1 \leq p < \infty$,

$$\mathbb{E}|X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon|^p \leq C_p(a, b)|t - s|^{p\beta}.$$

Par conséquent, d'après le Lemme (4), la famille $\{X^\varepsilon(t), t \in I\}_{\varepsilon > 0}$ est tendue dans l'espace $B_p^{\omega_\tau, 0}(I)$, où

$$\omega_\tau(t) = t^\beta(\log(1/t))^\tau, \quad \tau > 0, \quad p > \max\{1/\beta, 1/\tau\}.$$

La convergence des distributions finies-dimensionnelles se démontre comme dans la preuve du Théorème (2.3.1) de [12] (en remplaçant \int_0^1 par \int_0^∞ et en utilisant que $K_h^{(i)}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ pour $i = 1, 2$ et $0 < H(\cdot) < 1$).

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

Ce travail a été consacré à l'étude de la régularité et de la convergence faible de processus stochastiques dans le cadre des espaces de Besov modulaires. Après avoir posé les fondements théoriques des processus stochastiques, en particulier des processus gaussiens, nous avons introduit des exemples fondamentaux tels que le mouvement brownien standard, le mouvement brownien fractionnaire et le mouvement brownien multifractionnaire, qui illustrent différentes structures de dépendance et de régularité des trajectoires.

Dans un second temps, nous avons développé le cadre analytique des espaces de Besov modulaires. Ces espaces, qui généralisent les espaces de Besov classiques, se sont révélés particulièrement adaptés pour décrire finement la régularité des fonctions et des trajectoires aléatoires. Les propriétés et caractérisations établies, ainsi que les critères de Kolmogorov et de tension, ont permis de relier de manière précise les propriétés probabilistes des processus stochastiques à leur comportement analytique.

Enfin, nous avons étudié la convergence faible dans les espaces de Besov modulaires. En nous appuyant sur des résultats d'approximation de type Volterra, nous avons obtenu des théorèmes de convergence faible pour des processus gaussiens, en particulier pour le mouvement brownien fractionnaire et le mouvement brownien multifractionnaire. Ces résultats mettent en évidence l'intérêt des espaces de Besov modulaires pour l'analyse de processus présentant une régularité non uniforme ou variable dans le temps.

Plusieurs perspectives de recherche peuvent être envisagées à la suite de ce travail. Une première direction consisterait à étendre ces résultats à des processus non gaussiens, tels que les processus de Lévy ou les processus à sauts, dont les trajectoires présentent des discontinuités plus marquées. Une autre perspective naturelle serait l'étude de la convergence forte ou presque sûre dans les espaces de Besov modulaires, ainsi que l'application de ces résultats à l'analyse d'équations différentielles stochastiques. Enfin, l'exploitation de ces outils dans des contextes appliqués, notamment en finance mathématique, en traitement du signal ou en modélisation de phénomènes à mémoire longue, constitue une voie prometteuse pour de futurs travaux.

Bibliography

- [1] Ayache, A., Du mouvement Brownien fractionnaire au mouvement Brownien multifractionnaire. *Technique et Science informatiques*, **20** (2001), 1133-1152.
- [2] Ayache, A., Cohen S. and Lévy Véhel J. The covariance structure of multifractional Brownian motion, with application to long range dependence. *ICASSP*, (2000).
- [3] Bardina X., The complex Brownian motion as a weak limit of processes constructed from a Poisson process. *Progress in Probability, Birkhäuser Verlag*,**48** (2001), 149-158.
- [4] Benassi, A., Jaffard, S. and Roux, D. Elliptic Gaussian random processes. *Revista Matemática Iberoamericana*, **13** (1997), 19–96.
- [5] Beran, J. *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman and Hall, 1994.
- [6] Bingham, N., Goldie, C. and Teugels, I. *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [7] B.Boufoussi,M.Dozzi and E.Lkhel.,A kolmogorov and tightness criterion in modular Besov spaces and application to a class of Gaussian processes.*Stochastic and Applications*,**23**,(2005),665-685
- [8] Boufoussi, B. and Lakhel, E. Weak convergence in Besov spaces to fractional Brownian motion. *C. R. Académ. Sci. Paris, Série I*, **333** (2001), 39–44.
- [9] Boufoussi, B. and N’zi, M. On the regularity of the local times of a class of symmetric Lévy processes. *Stochastics and Stochastics Reports*, **69** (2000), 173–194.
- [10] Ciesielski, Z., Kerkyacharian, G. and Roynette, B. Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens. *Studia Mathematica*, **107** (1993), 171–204.
- [11] Ciesielski, Z. Orlicz spaces, spline systems and Brownian motion. *Constructive Approximation*, **9** (1993), 191–208.
- [12] Delgado, R. and Jolis, M. Weak approximation for a class of Gaussian processes. *Journal of Applied Probability*, **37** (2000), 400–407.

BIBLIOGRAPHY

- [13] Decreusefond, L. Stochastic integration with respect to Gaussian processes. *C. R. Math. Académ. Sci. Paris*, **334** (2002), 903–908.
- [14] Decreusefond, L. and Üstünel, A. S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Analysis*, **10** (1999), 177–214.
- [15] Frisch, U. and Parisi, G. Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics. In: Ghil, M., Benzi, R. and Parisi, G. (Eds.), *North Holland*, 1985.
- [16] Herbin E. From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions. Preprint.
- [17] Lévy Véhel, J. Introduction to multifractal analysis of images. In: Evertsz, C. J. G., Peitgen, H.-O. and Voss, R. F. (Eds.), *Fractal Geometry and Analysis: The Mandelbrot Festschrift*, Curaçao 1995. World Scientific, 1996.
- [18] Lévy Véhel, J. and Mignot, P. Multifractal segmentation of images. *Fractals*, **2** (1994), 371–378.
- [19] Peltier, R. F. and Lévy Véhel, J. Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results. *Rapport de recherche de l'INRIA*, No. 264, 1995.
- [20] Stroock, D. W. *Topics in Stochastic Differential Equations*. Tata Institute of Fundamental Research. Springer, Berlin, 1982.
- [21] Yosida, K. *Functional Analysis*. Springer, 1965.