UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR DES SCIENCES ET TECHNLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

⋆ ⋆ ⋆

Mémoire de Master II

Mention : Mathématiques et Applications

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Équations aux Dérivées Partielles

Intitulé :

ÉTUDE DE LA CONTRÔLABILITÉ DE L'ÉQUATION DE KURAMOTO-SIVASHINSKY SUR UN INTERVALLE BORNÉ

Présenté par : Siaka DIEME

Sous la direction de : Mamadou GUEYE

Sous la supervision de : Mouhamadou S. GOUDIABY

Soutenue le 27 Janvier 2024, devant le jury :

Qualité	Prénom(s) et Nom	Grade	Université
Président	Marie-Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	UASZ
Superviseur	Mouhamadou S. GOUDIABY	Professeur Assimilé	UASZ
Examinateur	Mamadou E. BODIAN	Maître de Conférences Titulaire	UASZ
Examinateur	Timack NGOM	Maître de Conférences Titulaire	UASZ
Directeur	Mamadou GUEYE	Maître de Conférences Titulaire	UASZ

Siaka DIEME

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.
Je tiens à remercier tout d'abord à mon encadreur : **Docteur Mamadou GUEYE** qui m'a proposé le sujet. Je le remercie pour son aide, sa patience, son soutien, ses conseils et pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail.
Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Monsieur **Marie-Salomon SAMBOU**, Professeur Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, non seulement pour m'avoir enseigné mais aussi pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et avoir accepté de présider mon jury.
Mes remerciements vont à l'endroit du **Docteur Mouhamadou Samsidy GOUDIABY**, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail en faisant parti des membres de mon jury.
J'exprime ma reconnaissance la plus sincère au **Docteur Timack NGOM** et au **Docteur Mamadou Eramane BODIAN** d'avoir accepté de participer au jury en tant qu'examinateur.
Je tiens aussi à remercier profondément tous les professeurs du département de mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont dispensé ; leur vision des mathématiques reste un modèle pour nous.
Je remercie l'ensemble des membres de l'administration du département de Mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor qui ont contribué à ma formation.
Je remercie tous mes amis avec qui j'ai cheminé à l'UASZ de la Licence Mathématiques-Physique-Informatique au Master Mathématiques et Applications. En particulier, je remercie ici **Abdourahmane KONE, Abdourahmane DIATTA, Adama POUYE, Boubacar BALDE, Eveline E. DIEDHIOU, Elhadj B. CAMARA, Ousmane D. BODIAN, Omar PANE, Jésus C. BASSE, Seydina A. MBAYE, Thierno A. DIALLO et Mohamed BA** pour ces expériences enrichissantes, pour leur dynamisme et leur enthousiasme, ainsi que pour leur bienveillance.
J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père **Youba**, ma mère **Siré BADJI** et mes frères et sœurs.
Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

❀ ✿ ❀

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :
À ma chère mère Siré BADJI qui m'a soutenu durant toute la durée de mes études.
À la mémoire de mon père Youba DIEME, un exemple dans ma vie.
À mes frères et sœurs.
À tous les membres de ma famille.
À mes chers amis.

❀ ✿ ❀

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$:	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$:	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$:	ensemble des nombres complexes.
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$:	un ouvert.
$\partial\Omega$:	le bord de Ω.
$f(x)$:	fonction de x.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$:	dérivée partielle de f par rapport à x.
$\nabla f(x)$:	gradient de f en x.
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$:	intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$.
$\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$:	somme des éléments de a_k pour tout entier k.
$E^{'}$:	espace dual de E.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$:	produit de dualité de $E^{'}$, E.
$\mathcal{L}(E, F)$:	espace des opérateurs linéaires continues de E dans F.
$D(A)$:	domaine de l'opérateur de A.
$\rho(A)$:	spectre de l'opérateur A.
$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$:	ensemble des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:	ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$det\ A$:	déterminant de la matrice A.
P_A :	polynôme caractéristique de la matrice A.
$C^k(\Omega, \mathbb{K})$:	ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{K}$, de classe C^k.
$L^P(\Omega, \mathbb{K})$:	ensemble des applications mesurables de Ω dans $\mathbb{K}$, de puissance p intégrable.

Résumé

Résumé :

Le but de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky sur un intervalle borné. Tout d'abord, dans le cas linéaire on prouve que ce système est contrôlable à zéro. Ceci est fait en utilisant une analyse spectrale et la méthode des moments. Par ailleurs, nous introduisons une loi de retour aux limites qui stabilise à zéro la solution du système en boucle fermée. Ensuite, dans le cas non-linéaire on prouve que l'équation de Kuramoto-Sivashinsky est localement contrôlable à zéro avec un contrôle aux bords. La méthode consiste à combiner plusieurs résultats généraux afin de réduire la contrôlabilité à zéro de cette équation parabolique non-linéaire à la contrôlabilité exacte d'un système linéaire de poutres ou de plaques.
Mots clés *: équation de Kuramoto-Sivashinsky, contrôlabilité à zéro, stabilisation, contrôlabilité locale à zéro.*

Abstract :

The aim of this dissertation is to study the controllability of the Kuramoto-Sivashinsky equation on a bounded interval. First of all, in the linear case, we prove that this system is controllable at zero. This is done using spectral analysis and the method of moments. Additionally, we introduce a boundary feedback law that stabilizes the closed-loop solution of the system at zero. Next, in the nonlinear case, we prove that the Kuramoto-Sivashinsky equation is locally controllable at zero with boundary control. The method involves combining several general results to reduce the controllability of this nonlinear parabolic equation to the exact controllability of a linear system of beams or plates.
Key words *: Kuramoto-Sivashinsky equation, null controllability, stbilization, local null controllability .*

Introduction générale

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir en utilisant des commandes appropriées. De nombreux problèmes apparaissent lors de l'étude d'un système de contrôle. Mais les plus courants sont le problème de contrôlabilité et le problème de la stabilisation. C'est dans ce sillage que nous aborderons l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Cette équation (également appelée équation de K-S ou équation de la flamme) est une équation aux dérivées partielles non linéaire du quatrième ordre. Il porte le nom de Yoshiki Kuramoto et Gregory Sivashinsky, qui ont dérivé indépendamment l'équation en 1970 pour modéliser les instabilités diffusives-thermiques dans un front de flamme laminaire [10, 11, 12]. L'équation a été dérivée indépendamment par G. M. Homsy [20] et A. A. Nepomnyashchii [21] en 1974, en relation avec la stabilité d'un film liquide sur un plan incliné et par R. E. LaQuey et. al. [22] en 1975 en relation avec l'instabilité des ions piégés. L'équation de Kuramoto-Sivashinsky est connue pour son comportement chaotique [23, 24]. Elle peut être écrite en une dimension de la manière suivante :

$$y_t(t,x) + y_{xxxx}(t,x) + \lambda y_{xx}(t,x) + y(t,x)y_x(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,T)\times(0,1) \tag{1}$$

où le nombre réel $\lambda > 0$ est appelé le paramètre anti-diffusion. $y(t,x)$ est la fonction inconnue décrivant l'évolution du front d'ondes dans l'espace et le temps. La première dérivée par rapport au temps $y_t(t,x)$ décrit l'évolution temporelle, la deuxième dérivée par rapport à l'espace $y_{xx}(t,x)$ représente le terme de diffusion, la troisième terme $y(t,x)y_x(t,x)$ indique l'advection non linéaire et la quatrième dérivée $y_{xxxx}(t,x)$ décrit les termes de dispersion. Le travail présenté dans ce mémoire est basé sur deux articles, dont le premier est intitulé "Null Controllability and Stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation" de Eduardo Cerpa (voir [27]) et le second est intitulé "Boundary Local Null Controllability of the non linear Kuramoto-Sivashinsky equation" de Takéo Takahashi (voir [13]).

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la contrôlabilité de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky sur un intervalle borné. Cette dernière a une grande importance en pratique puisque la notion de contrôlabilité apparait dans de nombreuses applications physiques ou dans la nature elle-même (en physique, en chimie, en biologie, ...).

En général, pour contrôler un système d'équations, on part d'un système admettant une unique solution sur lequel on a le choix d'un des paramètres que l'on appellera contrôle.

En fait, après avoir prouvé que le système est bien posé, on essayera, dans la mesure du possible, de trouver le contrôle qui nous permettra, par exemple, d'atteindre une cible ou encore d'optimiser un objectif.
En mathématique, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande agit sur un système qu'on souhaite maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'applications ; un ingénieur pourra vouloir contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces, un chimiste pourra vouloir améliorer son procédé en régulant la température, un économiste pourra vouloir agir sur un équilibre financier en modifiant un taux. Il est important de noter que malgré la diversité des situations concrètes qui peuvent être appréhendées ainsi, la théorie du contrôle fournit un cadre commun à tous ces univers.

Définition 1. *De manière abstraite, un système de contrôle est la donnée d'un espace d'états X, d'un espace de contrôle U et d'une loi d'évolution du type*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{2}$$

où $x(t) \in X$ est l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$ et $u \in U$ le contrôle.

Évidemment, toute la complexité de l'étude d'un système de contrôle dépendra de la complexité des espaces X et U et surtout de la nature de l'équation d'évolution (2). En particulier, la distinction majeur est de savoir si X et U sont des espaces de dimension finie ou infinie. Pour cette équation d'évolution, la principale simplification possible sera de supposer que la valeur de la fonction $f(t, x(t), u(t))$ dépend linéairement du couple (x, u). Cette approche sera justifié, comme souvent, par le fait qu'elle décrira bien un système au voisinage d'un point d'équilibre. Ainsi, nous aborderons dans le cas linéaire la question de stabilisation.
La stabilité d'un système est sa capacité à revenir à son état d'équilibre après une perturbation. La stabilisation d'un système est le processus de modification de ses paramètres pour le rendre stable. Les systèmes stables sont essentiels pour les applications industrielles, car ils garantissent que le système fonctionne de manière fiable et prévisible. Le critère de stabilité d'un système est que les pôles de sa fonction de transfert soient à parties réelles strictement négatives. Les critères de stabilité peuvent être algébriques ou analytique par exemple la méthode de Lyapounov. La rapidité et la précision sont également des facteurs importants dans la conception d'un système stable. La rapidité est la capacité d'un système à atteindre son état d'équilibre rapidement après une perturbation. La précision est la capacité d'un système à maintenir son état d'équilibre en présence de perturbations. Les estimations statistiques et dynamiques sont utilisées pour mesurer la précision d'un système. Il existe plusieurs méthodes pour réguler un système et le rendre stable, notamment les méthodes expérimentales en boucle ouverte et en boucle fermée, ainsi que le réglage dans le domaine fréquentiel. Le régulateur PID (Dérivé, Intégrale, Proportionnel) est un régulateur industriel couramment utilisé pour stabiliser les systèmes.

Ainsi, notre étude s'accentuera autour de deux cas où on utilisera les conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann. Nous aborderons en premier lieu le cas où le système

de contrôle est linéaire, puis le cas où il est non-linéaire.
Considérons maintenant un ensemble dénombrable $\mathcal{N}$ défini par :

$$\mathcal{N} := \{\pi^2(k^2+l^2);\ k,\ l \in \mathbb{N},\ 1 \leq k < l,\ k \text{ et } l \text{ ont la même parité}\}.$$

Tout d'abord, dans le cas linéaire (voir [27]), considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + \lambda y_{xx} = 0, & x \in (0,1), \quad t \in (0,T) \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,1) = 0, \\ y_x(t,0) = u(t), \quad y_x(t,1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où l'état $y(t,\cdot) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle.
Nous nous consacrons en partie à la démonstration du théorème de la contrôlabilité à zéro et du théorème de stabilisation.

Théorème 1. *(Contrôlabilité à zéro)*
Soit $T > 0$ et $\lambda \notin \mathcal{N}$. Pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$, il existe un contrôle $u \in H^1(0,T)$ tel que la solution $y \in C([0,1], L^2(0,1))$ de (3) avec la condition initiale $y(0,\cdot) = y_0$, satisfait $y(T,\cdot) = 0$.

Théorème 2. *(Stabilisation)*
Soit $\lambda \notin \mathcal{N}$. Il existe un opérateur de rétroaction K et deux constantes C, $\nu > 0$ telles que pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$, la solution de (3) avec le contrôle sous la forme de rétroaction $u(t) := K(y(t,\cdot))$ satisfaisant

$$\| y(t,\cdot) \|_{L^2(0,1)} \leq Ce^{-\nu t} \| y_0 \|_{L^2(0,1)}.$$

Et dans le cas non-linéaire (voir [13]), nous avons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + \lambda y_{xx} + y y_x = 0, & (t,x) \in (0,T)\times(0,1) \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,1) = 0, \\ y_x(t,0) = u(t), \quad y_x(t,1) = 0, \\ y(0,x) = y_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

où la solution y est contrôlée par la fonction $u = u(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.
Dans cette partie, nous prouvons le théorème principale suivant, en utilisant une méthode due à Russell et la méthode du terme source :

Théorème 3. *Supposons que $\lambda \notin \mathcal{N}$. Alors le système (4) est localement contrôlable à zéro pour tout $T > 0$: il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\| y_0 \|_{H^{-1}(0,1)} < \epsilon$, il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;\mathbb{R})$ et une solution $y \in C([0,T], H^{-1}(0,1))$ avec*

$$y(T) = 0.$$

Le mémoire que nous présentons est rédigé comme suit :
☞ **Premier chapitre :** consacre à la présentation de quelques rappels de notions de base qui seront d'une grande utilité par la suite.
☞ **Deuxième chapitre :** on étudie la contrôlabilité aux bords de l'équation linéaire de K-S sur un intervalle borné. Tout d'abord, on prouve que ce système est contrôlable à zéro. Ceci est fait en utilisant une analyse spectrale et la méthode des moments. Ensuite, on introduit une loi de retour en boucle fermée aux limites qui stabilise à zéro la solution du système.
☞ **Troisième chapitre :** porte sur l'étude de la contrôlabilité locale à zéro aux bords de l'équation non-linéaire de K-S sur un intervalle borné. Cela consiste à combiner plusieurs résultats généraux afin de prouver la contrôlabilité locale à zéro.
☞ **Conclusion et perspectives :** nous terminerons notre travail par une conclusion et des perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des définitions et des notions qui seront utilisées dans les deux chapitres et d'introduire des résultats et des théorèmes utiles pour étudier la contrôlabilité de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky.

1.1 Rappels d'analyse réelle et fonctionnelle

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 2. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive. Par conséquent un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :*

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant (\langle u, u\rangle)^{\frac{1}{2}}(\langle v, v\rangle)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ u, v \in H \times H.$$

Rappelons aussi que

$$\| u \|_2 = (\langle u, u\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme associée au produit scalaire.

Définition 3. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\| u \|_2$.*

1.1.2 Théorème du point fixe de Banach

Définition 4. *Un point fixe d'une application f allant d'un espace E dans lui-même est défini comme étant un élément $x \in E$ vérifiant $f(x) = x$.*

La recherche de l'existence d'un point fixe de certaines applications permette de résoudre de nombreux problèmes, en particulier dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Définition 5. *Soit (X, d) un espaces métrique et $k > 0$.*

- *Une application $f : X \longrightarrow X$ est dite k-lipschitzienne si*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y),\ \forall\ x, y \in X.$$

– *Une application k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$ est dite contractante.*

Voici l'important Théorème du point fixe de Banach.

Théorème 4. *Soit (X, d) un espaces métrique complet. Si l'application $f : X \longrightarrow X$ est contractante, alors elle admet un point fixe unique.*

Démonstration. Pour la preuve, on peut voir [30] □

1.1.3 Espace $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$.

Définition 6. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$. On note $L^p(\Omega)$, l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions f, mesurables presque partout, définies par :*

$$\int_\Omega |f(x)|^p < \infty.$$

Une norme dans $L^p(\Omega)$ est définie par :

$$\|f\|_{L^P(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C > 0 \ / \ |f(x)| \leqslant C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.1.4 Quelques inégalités utiles

Théorème 5. *(Inégalité de Young)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p, q \in]1, +\infty[$ telle que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Théorème 6. *(Inégalité de Hölder)*
Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| dx \leqslant \| f \|_p \| g \|_q .$$

Remarque 1. *Le cas particulier où $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Théorème 7. *(Inégalité de Minkowski)*
Soient f et g de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$, alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et

$$\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p .$$

Pour la preuve des Théorèmes ci-dessus, on peut voir [31].

1.1.5 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces dont les éléments sont des fonctions, et ces fonctions sont telles que leurs puissances et les puissances de leurs dérivées sont intégrables au sens de Lebesgue. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach. Le fait que les espaces de Sobolev sont complets est très important pour démontrer l'existence de solutions aux équations aux dérivées partielles. Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 1$ et on note $C_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur Ω, défini par :

$$C_c^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega);\ \exists\ K \subset \Omega;\ K \text{ compact},\ v = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\Omega)$: on dit que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual algébrique de $\mathcal{D}(\Omega)$. On note $D^\alpha v = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}}$ la dérivée partielle de v d'ordre $|\alpha|$ au sens faible (des distributions).

Définition 7. *(Espaces $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$.

1. *L'espace $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, est défini par :*
$$H^m(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega);\quad D^\alpha v \in L^2(\Omega),\quad \alpha \in \mathbb{N}^N;\quad |\alpha| \leqslant m\right\}.$$
2. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$, est défini par :*
$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{v \in L^p(\Omega);\quad D^\alpha v \in L^p(\Omega),\quad \alpha \in \mathbb{N}^N;\quad |\alpha| \leqslant m\right\}.$$

Une norme naturelle sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$\| v \|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha v \|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty; \\ \displaystyle\max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha v \|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Muni de cette norme $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. On peut montrer que la norme :

$$\| v \|_{m,p} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha u \|_{L^p} & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty; \\ \displaystyle\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha u \|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty, \end{cases}$$

est une norme équivalente à la norme $\| v \|_{W^{m,p}}$.
Cas particuliers :

– Dans le cas $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

– Dans le cas $p = 2$, on note $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.
Proposition 1. *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}\,.$$

– Dans le cas $m = 1$ et $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega)/\ \ \forall\ i \in \{1, 2, \cdots, N\},\quad D_i v \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Dans cette définition, lorsqu'on écrit $D_i v \in L^2(\Omega)$, on sous-entend

$$\exists\ g \in L^2(\Omega);\ \langle D_i v, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = -\int_\Omega g\,\partial_i\varphi\,dx\quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où $\partial_i\varphi$ désigne la dérivée partielle classique de φ par rapport à sa i-ème variable.

Définition 8. *(Espaces $H_0^m(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega)$)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$.

1. *On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi :*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

2. *Pour $m > 0$ et $1 \leqslant p < \infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{v \in W^{m,p}(\Omega);\ \exists\ (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)/\ \|\ v - \varphi_n\ \|_{W^{m,p}(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$$

et

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,2}(\Omega)}.$$

1.1.6 Les espaces L^p dépendant du temps

Soit X un espace de Banach et $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Définition 9. *Pour $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace L^p des fonctions $u : (a, b) \to X$ par :*

$$L^p(a, b; X) = \left\{u : u \text{ mesurable et } \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty\right\}.$$

La norme de u dans $L^p(a, b; X)$ est définie par :

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 10. *Lorsque $p = \infty$, on définit $L^\infty(a, b; X)$ par :*

$$L^\infty(a, b; X) = \{u : u \text{ mesurable et } \|u(t)\|_X \text{ est essentiellement bornée}\}.$$

On dit que $\|u(t)\|_X$ est essentiellement bornée s'il existe $M > 0$ tel que $\|u(t)\|_X < M$ presque partout. L'espace $L^\infty(a, b; X)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t\in(a,b)} \|u(t)\|_X.$$

1.1.7 Quelques rappels sur les opérateurs

Dans cette partie on peut voir [33].

Définition 11. *On appelle opérateur sur un espace de Hilbert H, une application linéaire continue de H dans H. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H. Si $A \in \mathcal{L}(H)$, on définit sa norme par*

$$\|A\| = sup\left\{\|Ah\| : \, h \in H, \, \|h\| \leq 1\right\}.$$

Définition 12. *(Opérateur adjoint)*
Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un unique opérateur, $A^* \in \mathcal{L}(H)$ appelé adjoint de A, qui vérifie la relation suivante : pour tous $x, y \in H$,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle .$$

De plus, on a $\|A\| = \|A^*\|$.

Définition 13. *Un opérateur A est dit :*
- *hermitien ou auto-adjoint si $A = A^*$;*
- *positif s'il est hermitien et si de plus $\langle Ah, h \rangle \geqslant 0$ pour tout $h \in H$;*
- *unitaire si A est inversible et $A^* = A^{-1}$;*
- *normal si $AA^* = A^*A$.*

Définition 14. *(Opérateur compact)*
On note B_H la boule-unité fermée dans H. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est compact si l'adhérence de $A(B_H)$ est compacte dans H.

Définition 15. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.*
- *Un nombre complexe σ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $h \in H$, $h \neq 0$ tel que $Ah = \sigma h$. Un tel vecteur h est appelé un vecteur propre de A.*
- *On appelle spectre ponctuel de A, et on note $\rho_p(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.*
- *Le spectre de A est défini comme*

  $$\rho(A) := \{\sigma \in \mathbb{C} \text{ tel que } A - \sigma I_d \text{ n'est pas inversible}\}.$$

  On appelle ensemble résolvant le complémentaire du spectre : $R(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

1.2 Notions de contrôlabilité

Une fois que l'on s'est fixé un système de contrôle en terme mathématique au sens de la définition 1, il existe une multitude de questions mathématiques auxquelles il est possible de s'intéresser. Bien sûr, celles-ci doivent être guidées par des considérations sur la réalité que l'on décrit. En premier lieu, on trouve des questions dites d'accessibilités qui se formule ainsi : étant donnés deux états x_i et x_f de X, est-il possible de guider un système initialement en x_i jusqu'à l'état final x_f ? Ou bien, depuis un état initial particulier x_0, quels sont les états possible à atteindre ? Lorsqu'il n'est pas possible d'atteindre l'état final souhaité x_f, une question naturelle est de savoir si l'on peut s'en rapprocher aussi près que l'on souhaite. En dimension infinie, cette notion de contrôlabilité approchée sera souvent fructueuse. Nous pouvons noter que le temps est un paramètre essentiel dans un problème de contrôle. En effet, la plupart des résultats dépendent à priori du temps que l'on s'est fixé pour réaliser un objectif. On pourra s'intéresser à savoir s'il est possible de relier x_i et x_f en un temps donné, ou bien en un temps aussi petit que l'on souhaite. Afin d'aborder la définition de la contrôlabilité, Considérons un système de contrôle linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1.1}$$

où le temps $t \in [0,T]$, l'état du système $x(t) \in \mathbb{R}^n$, le contrôle $u \in \mathbb{R}^m$ et A est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, B est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Rappelons la notion classique de contrôlabilité (voir [18]).

Définition 16. *(Contrôlabilité exacte)*
On dit que le système de contrôle linéaire (1.1) variant dans le temps est exactement contrôlable si, étant donné deux états du système, c'est-à-dire deux points x_0 et x_1 de $\mathbb{R}^n$, et étant donné un temps $T > 0$, il existe une application mesurable bornée $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ qui permette de passer x_0 à x_1 au bout du temps T, ce qui signifie que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

vérifie

$$x(T) = x_1. \tag{1.3}$$

En particulier, nous pouvons aussi contrôler le système vers zéro.

Définition 17. *(Contrôlabilité à zéro)*
On dit que le système de contrôle (1.1) est contrôlable à zéro si, pour tout état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et étant donné un temps $T > 0$, il existe une application mesurable bornée $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que la solution de (1.1) vérifie

$$x(T) = 0.$$

Remarque 2. *Il arrive souvent qu'un système ne soit pas exactement contrôlable, et du point de vue physique, il est seulement nécessaire que l'on soit proche de la fonction cible $x(T)$. Dans le cas linéaire, la contrôlabilité aux trajectoires est équivalente à la contrôlabilité à zéro, c'est-à-dire la contrôlabilité exacte avec $x_0 = 0$.*

Définition 18. *(Contrôlabilité locale)*
Soit un système non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle et où $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Le système (1.4) est localement contrôlable au temps $T > 0$, si il existe $\varepsilon > 0$, il existe une application mesurable $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\forall\, x_1 \in B(x_0, \varepsilon)$, on a

$$x(T) = x_1.$$

1.3 Notions d'étude d'un système de contrôle

Pour montrer que le système de K-S est contrôlable, nous utilisons une analyse spectrale et la méthode des moments. Considérons l'opérateur auto-adjoint compact sous-jacent:

$$A : w \in \mathcal{D}\,(A) \subset L^2(0,1) \longmapsto -w^{''''} - \lambda w^{''} \in L^2(0,1),$$

$$\text{avec}\ \ \mathcal{D}\,(A) = H^4(0,1) \cap H_0^2(0,1).$$

1.3.1 Analyse spectrale

Pour effectuer une analyse spectrale de cette équation, on peut utiliser la décomposition de l'opérateur A, ainsi on a :

$$\begin{cases} -\lambda \phi_k^{''} - \phi_k^{''''} = \sigma_k \phi_k, \\ \phi_k(0) = 0, \quad \phi_k(1) = 0, \\ \phi_k^{'}(0) = 0, \quad \phi_k^{'}(1) = 0, \end{cases}$$

où les valeurs propres de A, notées par $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, forment un sous ensemble discret de $\mathbb{R}$. Et de plus, les fonctions propres désignées par $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, forment une base orthonormée de $L^2(0,1)$.

Cette équation peut être résolue en trouvant les solutions non triviales où σ_k est un nombre réel vérifiant

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = -\infty.$$

Les valeurs de σ_k déterminent la stabilité de l'équation linéaire de Kuramoto-Sivashinsky. Si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative, alors l'état stationnaire est linéairement stable.

En résumé, l'analyse spectrale de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky consiste à calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur linéaire. Nous permet de contrôler, de déterminer la stabilité de l'état stationnaire et d'identifier les modes de fluctuation les plus instables. Cette analyse permet de mieux comprendre le comportement dynamique de l'interface entre les fluides miscibles décrit par cette équation.

1.3.2 Méthode des moments

La méthode des moments est une approche couramment utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Elle consiste à déterminer une solution en représentant la fonction inconnue sous forme d'une série. Dans le cas de l'équation de K-S, nous utilisons la base $L^2(0,1)$ formée par les fonctions propres de A. Ainsi, on va chercher à déterminer la fonction inconnue $q(t,x)$ du système suivant :

$$\begin{cases} -q_t + \lambda q_{xx} + q_{xxxx} = 0, \\ q(t,0) = 0, \quad q(t,1) = 0, \\ q_x(t,0) = 0, \quad q_x(t,1) = 0, \\ q(T,x) = q_T(x), \end{cases}$$

où pour tout $q_T \in L^2(0,1)$, elle peut s'écrire sous la forme

$$q_T = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\phi_k, \quad \textit{avec} \quad \{q_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ \ \textit{satisfaisant} \ \ \sum_{k\in\mathbb{N}} |q_k|^2 < \infty.$$

Par conséquent, la solution est donnée par

$$q(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k}\phi_k(x).$$

En substituant cette solution dans l'équation de K-S et en utilisant la linéarité des opérations différentielles, on obtient une expression sous la forme :

$$\int_0^T u(t)e^{\sigma_k t}dt = c_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

où $c_k \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (voir [15], page 276).

1.3.3 Condition de contrôlabilité de Kalman

L'étude de la contrôlabilité peut s'avérer assez difficile dans de nombreux cas, même pour les systèmes linéaires simples. Dans ce cas, nous donnons un nouveau critère de contrôlabilité qui est beaucoup plus simple à vérifier. Pour simplifier, on commence par le cas d'un système invariant dans le temps, c'est-à-dire le cas où A et B ne dépendent pas du temps. Notons qu'à priori la contrôlabilité de $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ pourrait dépendre du temps $T > 0$. Considérons maintenant, le système de contrôle linéaire invariant dans le temps suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad t \in [0,T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Le résultat classique suivant est dû à Rudolf Emil Kálmán ([18, 19]) et donne une réponse complète au problème de contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension finie.

Théorème 8. *([1])*
Le système de contrôle linéaire invariant dans le temps (1.5) est contrôlable dans $[0,T]$ si et seulement si

$$rang\Big(B, \quad AB, \quad A^2B, \ \cdots, \ A^{n-1}B\Big) = n.$$

Remarque 3. *La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point exactement.*

1.3.4 Dualité, Contrôlabilité et Observabilité

Considérons l'opérateur

$$A : \mathcal{D}\,(A) \subset L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1),$$

un générateur d'un semi-groupe fortement continue $(e^{At})_{t\geqslant 0}$. Considérons également un espace de Hilbert U et $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{D}(A)^{'})$ un opérateur. Nous considérons le problème de contrôle suivant

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Nous fixons $\sigma_0 \in \rho(A)$. Nous pouvons doter $\mathcal{D}(A)$ de la norme

$$\parallel z \parallel_{\mathcal{D}(A)} = \parallel (\sigma_0 - A)z \parallel_{L^2(0,1)} \quad \text{et notons par} \quad A^* : \mathcal{D}\,(A^*) \longrightarrow L^2(0,1),$$

l'adjoint de A. Le dual $\mathcal{D}(A^*)^{'}$ de $\mathcal{D}(A^*)$ par rapport à l'espace pivot $L^2(0,1)$, a pour norme

$$\parallel z \parallel_{\mathcal{D}(A^*)'} = \parallel (\sigma_0 - A)^{-1} z \parallel_{L^2(0,1)}$$

(voir Proposition 2.10.2 dans [14]). Nous conservons les notations A et $(e^{At})_{t\geqslant 0}$ pour les extensions du générateur à $L^2(0,1)$ et du semi-groupe à $\mathcal{D}(A^*)^{'}$ (voir Proposition 2.10.3 dans [14]). Supposons que $T > 0$, pour tout $z_0 \in \mathcal{D}(A^*)^{'}$ et $u \in L^2([0,T]\,, U)$, nous pouvons considérer une solution z de (1.6) comme faible, donner par :

$$z(t) = e^{tA} z_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds.$$

Nous disons que B est admissible pour tout $z_0 \in L^2(0,1)$ et $u \in L^2([0,T]\,, U)$ si la solution ci-dessus satisfait $z \in C([0,T]\,, L^2(0,1))$. C'est le cas si par exemple A est auto-adjoint et positif (cas parabolique) et si $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})^{'})$. Dans le cas où B est admissible, on dit que le système (1.6) (ou la paire (A, B)) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si pour tout $z_0 \in L^2(0,1)$, il existe $u \in L^2([0,T]\,, U)$ tel que la solution de (1.6) vérifie

$$z(T) = 0.$$

Nous disons également que le système (1.6) (ou la paire (A, B)) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $z_0, z_1 \in L^2(0,1)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0,T], U)$ tel que

$$z(T) = z_1.$$

Ces deux notions sont liées par dualité aux propriétés d'observabilité :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = A^*\phi, \\ \psi = B^*\phi, \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

où pour tout $\phi_0 \in \mathcal{D}(A^*)$, on a

$$\phi(t) = e^{tA^*}\phi_0 \quad \text{alors} \quad \psi(t) = B^* e^{tA^*}\phi_0.$$

Définition 19.

a) Le système (1.7) (ou la paire (A^*, B^*)) est observable à l'état final au temps $T > 0$ s'il existe une constante $K(T) > 0$ tel que

$$\| e^{TA^*}\phi_0 \|^2_{L^2(0,1)} \leq K(T)^2 \int_0^T \| B^* e^{tA^*}\phi_0 \|^2_U \, dt, \quad \phi_0 \in D(A^*).$$

b) Le système (1.7) (ou la paire (A^*, B^*)) est exactement observable au temps $T > 0$ s'il existe $K(T) > 0$ tel que

$$\| \phi_0 \|^2_{L^2(0,1)} \leq K(T)^2 \int_0^T \| B^* e^{tA^*}\phi_0 \|^2_U \, dt, \quad \phi_0 \in D(A^*).$$

L'équivalence entre observabilité et contrôlabilité est rappelé dans la proposition ci-dessous due à Dolecki et Russell [9] (voir aussi la proposition 12.1.2 et le théorème 11.2.1 dans [14]).

Proposition 2. *([9]) Supposons que B soit admissible. Alors la paire (A, B) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si la paire (A^*, B^*) est exactement observable au temps $T > 0$. La paire (A, B) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si et seulement si la paire (A^*, B^*) est observable à l'état final au temps $T > 0$. De plus, si la paire (A^*, B^*) est exactement observable au temps $T > 0$, alors il existe un opérateur $L_T \in \mathcal{L}(L^2(0,1), U)$ tel qu'un contrôle pour (1.6) est donné par $u = L_T z_0$ et tel que $\| L_T \|^2_{\mathcal{L}(L^2(0,1),U)} \leqslant K(T)$.*

Remarque 4. *(Coût du contrôle)*
Nous pouvons noter que K est une application continue et décroissante, appelée Coût du contrôle et elle est définie par : $K : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$.

1.4 Notion de stabilité d'un système linéaire

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Dans cette partie on peut voir [32].

Définition 20. *(Point d'équilibre)*
L'état x_e est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour le système (1.8) si x_e vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.

Remarque 5. *On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine 0 puisque si x vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $y = x - x_e$, la dérivée de y est donnée par*

$$\dot{y} = \dot{x} = f(y + x_e) = g(y), \text{ et } g(0) = 0.$$

L'origine est bien un point d'équilibre du système $\dot{y} = g(y)$.

Définition 21. *L'équilibre $x_e = 0$ du système (1.8) est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ on ait*

$$\|x(0)\| < \eta \Longrightarrow \forall\, t \geqslant 0,\ \|x(t)\| < \epsilon.$$

➢ *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable s'il est stable et $x(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Définition 22. *L'équilibre $x_e = 0$ du système (1.8) est dit exponentiellement stable s'il existe $r > 0$, $M > 0$, et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (1.8) on ait*

$$\|x(0)\| < r \Longrightarrow \forall\, t \geqslant 0,\ \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}.$$

Considérons maintenant le système de contrôle linéaire autonome (1.5) :

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu,$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, le contrôle $u \in \mathbb{R}^m$, et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ sont données.

Définition 23. *On appelle bouclage d'état linéaire (ou régulateur linéaire) du système (1.5) une loi de contrôle du type $u = Kx$ où K est une matrice $m \times n$ dite matrice de gain. Une telle loi est dite stabilisant si l'origine du système en boucle fermée*

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t),$$

est asymptotiquement stable, c'est-à-dire

$$\forall\, \sigma \in \rho(A + BK), \quad Re(\sigma) < 0.$$

Définition 24. *On dit que le système (1.5) est globalement stable si* $\forall \epsilon > 0$, $\exists C > 0$ *et* $\exists K : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tel que*

$$\|e^{(A+BK)t}\| \leq Ce^{-\epsilon t},$$

ou encore

$$\|e^{(A+BK)t}x_0\| \leq Ce^{-\epsilon t}\|x_0\|.$$

1.4.1 Théorème de placement de pôles

On abordera ici un théorème d'algèbre linéaire dont l'intérêt vient de ses applications en théorie du contrôle. La discussion fait suite à celle du livre "Mathematical control theory" d'Eduardo Sontag [16]. Soit A une matrice de taille $n \times n$ et B une matrice de taille $n \times m$. Nous considérons l'expression $A + BK$ une matrice où K est une matrice $m \times n$. Le jeu consiste maintenant à fixer A et B, à tenter au moyen d'un choix approprié de K, de donner les valeurs propres de $A + BK$, les valeurs spécifiées. Le contenu du théorème est que cela est toujours possible, à condition qu'une hypothèse de générosité appropriée, appelée contrôlabilité, soit satisfaite. En fait, cette déclaration doit être légèrement modifiée. Nous voulons travailler avec des matrices réelles et dont les valeurs propres viennent automatiquement par paires conjuguées complexes. Ainsi, l'énoncé correct concerne les candidats pour l'ensemble des valeurs propres qui satisfont cette restriction. D'où vient le nom du théorème ? Sa source est le fait que les valeurs propres d'une matrice M peuvent être considérées comme les pôles de la fonction $(det(M-\lambda I))^{-1}$. Il s'agit d'une image populaire dans la théorie classique du contrôle. L'importance primordiale de ce résultat pour la théorie du contrôle est que la stabilité d'un système de contrôle est dans de nombreux cas déterminée par une matrice de la forme $A+BK$. Si nous pouvons choisir K telle que les valeurs propres de $A + BK$ soient toutes réelles et négatives, alors nous avons montré comment concevoir un système pour lequel l'état souhaité est asymptotiquement stable. Lorsque l'état est perturbé, il revient à l'état souhaité. Il le fait même de manière monotone, c'est-à-dire sans dépassement.

Désignons par P_n l'ensemble des polynômes de degré n en z tels que leurs coefficients sont des nombres réels et tels que le coefficient de z^n est 1. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, rappelons que P_M désigne le polynôme caractéristique de M :

$$P_M(z) = det(zI - M).$$

On dispose alors du théorème de placement de pôles suivant.

Théorème 9. *([17], Théorème 10.1, page 275)*
Supposons que le système de contrôle linéaire (1.5) soit contrôlable. Alors

$$\{P_{A+BK};\ K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\} = P_n.$$

Démonstration. Voir ([17], page 275). □

ÉTUDE DE LA CONTRÔLABILITÉ DE L'ÉQUATION LINÉAIRE DE KURAMOTO-SIVASHINSKY

Dans cette partie, nous aborderons le problème de la contrôlabilité aux bords du système de contrôle de K-S linéaire suivant:

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + \lambda y_{xx} = 0, & x \in (0,1),\, t \in (0,T) \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,1) = 0, \\ y_x(t,0) = u(t), \quad y_x(t,1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où l'état $y(t,\cdot) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle. Étant donné $T > 0$ et une fonction y_0, on se demande s'il existe un contrôle $u = u(t)$ tel que la solution $y = y(t,x)$ de (2.1) avec la condition initiale $y(0,x) = y_0(x)$ satisfasse $y(T,x) = 0$. Si ce contrôle existe pour toute fonction y_0 se trouvant dans un espace approprié, on dit que le système (2.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$. On verra que le système (2.1) est contrôlable à zéro si et seulement si le paramètre anti-diffusion $\lambda > 0$ n'appartient pas à l'ensemble dénombrable suivant :

$$\mathcal{N} := \{\pi^2(k^2 + l^2);\ k,\ l \in \mathbb{N},\ 1 \leq k < l,\ k \textit{ et } l \textit{ ont la même parité}\}. \tag{2.2}$$

Pour se faire, nous utilisons une approche sur le problème des moments et de l'analyse spectrale de l'opérateur spectral sous-jacent :

$$A : w \in \mathcal{D}(A) \subset L^2(0,1) \longmapsto -w'''' - \lambda w'' \in L^2(0,1),$$

$$\text{avec } \mathcal{D}(A) = H^4(0,1) \cap H_0^2(0,1).$$

Lorsque $\lambda \in \mathcal{N}$, cette approche n'est pas possible. En effet, pour ces valeurs de λ, le système (2.1) n'est pas contrôlable à zéro avec des contrôles agissant uniquement sur les dérivées spatiales premières aux extrémités.

Théorème 10. *(Contrôlabilité à zéro)*
Soit $T > 0$ et $\lambda \notin \mathcal{N}$. Pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$, il existe un contrôle $u \in H^1(0,T)$ tel que la solution $y \in C([0,T], L^2(0,1))$ de (2.1) avec la condition initiale $y(0,\cdot) = y_0$, satisfait $y(T,\cdot) = 0$.

Ensuite, on se demande si on peut diriger le système vers zéro à l'aide d'un contrôle par rétroaction, c'est-à-dire que nous abordons la question de la stabilisation. On sait depuis [9] si $\lambda < 4\pi^2$, alors le système (2.1) est exponentiellement stable dans $L^2(0,1)$. En revanche si $\lambda \geq 4\pi^2$, la solution n'est pas stable. En effet, l'opérateur A a un nombre fini de valeurs propres positives.
Afin de stabiliser ce système, nous concevons une rétroaction basée sur une dimension finie, comme dans [7, 8] pour l'équation de K-S avec des conditions aux limites périodiques.

Théorème 11. *(Stabilisation)*
Soit $\lambda \notin \mathcal{N}$. Il existe un opérateur de rétroaction K et deux constantes $C, \nu > 0$ telles que pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$, la solution de (2.1) avec le contrôle sous la forme de rétroaction $u(t) = K(y(t,\cdot))$ satisfait

$$\| y(t,\cdot) \|_{L^2(0,1)} \leq Ce^{-\nu t} \| y_0 \|_{L^2(0,1)}.$$

Remarque 6. *Comme nous l'avons dit, dans le cas critique $\lambda \in \mathcal{N}$, le système linéaire n'est plus contrôlable à zéro. Cela est dû au comportement de certaines fonctions propres de l'opérateur A. On verra que l'espace des fonctions non contrôlables est de dimension finie. Pour obtenir la contrôlabilité à zéro du système linéaire dans ce cas nous devons ajouter un autre contrôle. En discutant ce point plus tard, nous verrons que les contrôles $y_x(t,0)$ et $y_x(t,1)$ n'améliorent pas la situation dans le cas critique. Par contre, le système devient contrôlable à zéro si l'on peut agir sur $y(t,0)$ et $y_x(t,0)$ sans longueur critique. Ce résultat avec des contrôles aux bords a été prouvé dans [6] pour le cas $\lambda = 0$.*

2.1 Analyse Spectrale

On considère l'opérateur auto-adjoint A, avec un résolvant compact. Par conséquent, le spectre $\sigma(A)$ de A consiste uniquement en valeurs propres discrètes. De plus, les valeurs propres de A dénotées par $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, forment un sous ensemble discret de $\mathbb{R}$, satisfaisant

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = -\infty.$$

Les fonctions propres, désignées par $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, forment une base orthonormée de $L^2(0,1)$. Pour le travail à effectuer ici, on a besoin d'information très détaillées sur le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur A. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} -\lambda\phi_k'' - \phi_k'''' = \sigma_k\phi_k, \\ \phi_k(0) = 0, \quad \phi_k(1) = 0, \\ \phi_k'(0) = 0, \quad \phi_k'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Tout d'abord, voyons que $4\sigma_k \leq \lambda^2$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Pour cela, en multipliant l'équation de (2.3) par ϕ_k et en intégrant par partie sur $(0,1)$, on obtient

$$\int_0^1 \sigma_k \phi_k^2(x)dx = \int_0^1 (-\lambda\phi_k^{''}(x) + \phi_k^{''''})\phi_k(x)dx,$$

$$\int_0^1 \sigma_k \phi_k^2(x)dx = -\lambda \int_0^1 \phi_k^{''}(x)dx + \int_0^1 \phi_k^{''''}\phi_k(x)dx.$$

Faisons une double intégration par partie de $\displaystyle\int_0^1 \phi_k^{''''}\phi_k(x)dx$:

posons $\left\{\begin{array}{lcl} f & = & \phi_k \\ g' & = & \phi_k^{''''} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f' & = & \phi_k^{'} \\ g & = & \phi_k^{'''} \end{array}\right.,$

alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi_k^{''''}\phi_k(x)dx &= \Big[\phi_k(x)\phi_k^{'''}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \phi_k^{'}(x)\phi_k^{'''}(x)dx \\ &= -\int_0^1 \phi_k^{'}(x)\phi_k^{'''}(x)dx,\end{aligned}$$

ensuite, posons $\left\{\begin{array}{lcl} f & = & \phi_k^{'} \\ g' & = & \phi_k^{'''} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f' & = & \phi_k^{''} \\ g & = & \phi_k^{''} \end{array}\right.$

ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi_k^{''''}\phi_k(x)dx &= -\Big(\Big[\phi_k^{'}(x)\phi_k^{''}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \phi_k^{''}(x)\phi_k^{''}(x)dx\Big) \\ &= \int_0^1 \phi_k^{''}(x)\phi_k^{''}(x)dx.\end{aligned}$$

Donc la relation devient

$$\sigma_k \int_0^1 |\phi_k(x)|^2 dx = -\lambda \int_0^1 \phi_k^{''}(x)\phi_k(x)dx + \int_0^1 |\phi_k^{''}(x)|^2 dx.$$

En utilisant l'inégalité $ab \leq (\dfrac{a^2}{\lambda} + \lambda\dfrac{b^2}{4})$ avec $a = \parallel \phi_k^{''} \parallel_{L^2(0,1)}$ et $b = \parallel \phi_k \parallel_{L^2(0,1)}$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_k \|\phi_k\|^2_{L^2(0,1)} &= -\lambda \int_0^1 \phi_k^{''}(x)\phi_k(x)dx - \|\phi_k^{''}\|^2_{L^2(0,1)} \\ &\leq -\lambda \|\phi_k^{''}\|_{L^2(0,1)}\|\phi_k\|_{L^2(0,1)} - \|\phi_k^{''}\|^2_{L^2(0,1)} \\ &\leq -\lambda ab - a^2 \\ &\leq -\lambda(\frac{a^2}{\lambda} + \lambda\frac{b^2}{4}) - a^2 \\ &\leq \lambda(\frac{a^2}{\lambda} + \lambda\frac{b^2}{4}) - a^2 \\ &\leq a^2 + \lambda^2\frac{b^2}{4} - a^2 \\ &\leq \lambda^2\frac{b^2}{4},\end{aligned}$$

donc
$$\sigma_k\|\phi_k\|^2_{L^2(0,1)} = -\lambda\int_0^1 \phi_k^{''}(x)\phi_k(x)dx - \|\phi_k^{''}\|^2_{L^2(0,1)} \leq \frac{\lambda^2}{4}\|\phi_k\|^2_{L^2(0,1)}.$$
D'où $\sigma_k \leq \dfrac{\lambda^2}{4}$, ce qui nous donne la limite supérieure des valeurs propres. Comme on le verra dans la section sur la contrôlabilité, le lemme suivant est crucial.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{N}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini en (2.2). Pour tout $\lambda \notin \mathcal{N}$, les fonctions propres de A satisfont*
$$\phi_k^{''}(0) \neq 0, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$
De plus, si $\lambda \notin \mathcal{N}$, les valeurs propres sont simples.

Démonstration. Tout d'abord, on cherche les fonctions propres.
Soit (ϕ, σ) satisfaisant
$$\begin{cases} -\lambda\phi_k^{''} - \phi_k^{''''} = \sigma_k\phi_k, \\ \phi_k(0) = 0, \quad \phi_k(1) = 0, \\ \phi_k^{'}(0) = 0, \quad \phi_k^{'}(1) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$
On distingue trois cas correspondant au signe de la valeur propre σ.
☞ **Cas** 1 : $\sigma = 0$
$$\begin{cases} -\lambda\phi_k^{''} - \phi_k^{''''} = 0, \\ \phi_k(0) = 0, \quad \phi_k(1) = 0, \\ \phi_k^{'}(0) = 0, \quad \phi_k^{'}(1) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$
Pour tout $\lambda > 0$, l'équation caractéristique de (2.6) est donnée par
$$\begin{aligned} &-r^4 - \lambda r^2 = 0, \\ &r^2(r^2+\lambda) = 0, \end{aligned}$$
et ses solutions sont données par :
$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = \sqrt{-\lambda} = i\sqrt{\lambda}, \quad r_4 = -\sqrt{-\lambda} = -i\sqrt{\lambda}.$$
En posant $\alpha = \sqrt{\lambda}$, on obtient
$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = i\alpha, \quad r_4 = -i\alpha.$$
Ainsi, la solution générale est donnée par
$$\phi(x) = C_1 + C_2 x + C_3\cos(\alpha x) + C_4\sin(\alpha x).$$
D'après les conditions aux limites du système (2.6) on a
pour $x = 0$:
$$\begin{cases} \phi(0) = C_1 + C_3 = 0, \\ \phi^{'}(0) = C_2 + \alpha C_4 = 0, \end{cases} \tag{i}$$
pour $x = 1$:

$$\begin{cases} \phi(1) = C_1 + C_2 + C_3\cos(\alpha) + C_4\sin(\alpha) = 0, \\ \phi^{'}(1) = C_2 - C_3\alpha\sin(\alpha) + C_4\alpha\cos(\alpha) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3\cos(\alpha) + C_4\sin(\alpha) = 0, \\ C_2 - C_3\alpha\sin(\alpha) + C_4\alpha\cos(\alpha) = 0. \end{cases} \tag{ii}$$

D'après (i) la solution devient

$$\phi(x) = C_1 - C_4\alpha x - C_1\cos(\alpha x) + C_4\sin(\alpha x),$$

de plus, dans (ii) on obtient

$$\begin{cases} C_1 - \alpha C_4 - C_1\cos(\alpha) + C_4\sin(\alpha) = 0, \\ -\alpha C_4 + C_1\alpha\sin(\alpha) + C_4\alpha\cos(\alpha) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(1-\cos(\alpha)) + C_4(\sin(\alpha) - \alpha) = 0, \\ C_1\sin(\alpha) + C_4(\cos(\alpha) - 1) = 0, \end{cases}$$

où C_1, $C_4 \neq 0$, donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\cos(\alpha) & \sin(\alpha)-\alpha \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)-1 \end{pmatrix}}_{M_1} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice M_1 est : $2\alpha - 2\alpha\cos(\alpha) - \alpha^2\sin(\alpha)$. Ainsi, afin de garantir que (2.6) ait une solution non nulle, α doit satisfaire

$$2\alpha - 2\alpha\cos(\alpha) - \alpha^2\sin(\alpha) = 0,$$

cette équation a une infinité de solutions $\alpha_n = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$, alors on a

$$\lambda_n = (\alpha_n)^2 = 4n^2\pi^2 \Longrightarrow \lambda = 4\pi^2 \notin \mathbb{N}.$$

Ainsi, ϕ est donnée par $\phi(x) = C(1-\cos(\alpha x))$, alors $\phi^{''}(x) = C\alpha^2\cos(\alpha x)$, donc

$$\phi^{''}(0) = C\alpha^2 \neq 0.$$

☞ **Cas** 2 : $\sigma < 0$

$$\begin{cases} -\lambda\phi_k^{''} - \phi_k^{''''} = \sigma\phi(x), \\ \phi_k(0) = 0, \quad \phi_k(1) = 0, \\ \phi_k^{'}(0) = 0, \quad \phi_k^{'}(1) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour tout $\lambda > 0$, l'équation caractéristique de (2.7) est $-r^4 - r^2 - \sigma = 0$ et ses solutions sont données par

$$r_1 = \sqrt{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}, \qquad r_2 = \sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}},$$

$$r_3 = -\sqrt{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}, \qquad r_4 = -\sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}.$$

Posons $\alpha = \sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} > 0$ et $\beta = \sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} > 0$,
donc

$$r_1 = i\beta, \quad r_2 = \alpha, \quad r_3 = -i\beta, \quad r_4 = -\alpha.$$

Ainsi, la solution générale est données par

$$\phi(x) = C_1 \cosh(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_2 \sinh(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_3 \cos(\beta(x - \frac{1}{2})) + C_4 \sin(\beta(x - \frac{1}{2})),$$

où C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont des constantes telles que les conditions aux limites soient vérifiées. Cette solution peut s'écrire sous la forme $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$, où ϕ_1 et ϕ_2 correspondent aux solutions particulières par rapport aux solutions négatives et positives de l'équation caractéristique de (2.7).
D'une part, la fonction ϕ_1 est obtenue pour les solutions négatives r_3 et r_4, et est donnée par

$$\phi_1(x) = C_2 \sinh(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_4 \sin(\beta(x - \frac{1}{2})),$$

alors

$$\phi_1^{'}(x) = C_2\alpha \cosh(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_4\beta \cos(\beta(x - \frac{1}{2})).$$

D'après les conditions aux bords on a

$$\begin{cases} \phi_1(0) = -C_2 \sinh(\frac{\alpha}{2}) - C_4 \sin(\frac{\beta}{2}) = 0, \\ \phi_1^{'}(0) = C_2\alpha \cos(\frac{\alpha}{2}) + C_4\beta \cos(\frac{\beta}{2}) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_2 \sinh(\frac{\alpha}{2}) - C_4 \sin(\frac{\beta}{2}) = 0, \\ C_2\alpha \cos(\frac{\alpha}{2}) + C_4\beta \cos(\frac{\beta}{2}) = 0, \end{cases}$$

donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\sinh(\frac{\alpha}{2}) & -\sin(\frac{\beta}{2}) \\ \alpha \cos(\frac{\alpha}{2}) & \beta \cos(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix}}_{M_2} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice M_2 est : $-\beta \cos(\frac{\beta}{2}) \sinh(\frac{\alpha}{2}) + \alpha \cosh(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2})$.
Posons

$$-\beta \cos(\frac{\beta}{2}) \sinh(\frac{\alpha}{2}) + \alpha \cosh(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2}) = 0,$$

alors
$$\alpha \cosh(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2}) = \beta \cos(\frac{\beta}{2}) \sinh(\frac{\alpha}{2}). \tag{2.8}$$
Soit $\{\sigma_{1,n}\}_{n\geq 1}$, l'ensemble des valeurs propres. Notons que
$$\alpha \cosh(\frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\beta}{2}) = \beta \cos(\frac{\beta}{2}) \sinh(\frac{\alpha}{2}).$$
Comme on a $C_2 = -C_4 \frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sinh(\frac{\alpha}{2})}$, alors les fonctions propres sont données par
$$\phi_{1,n}(x) = C_4 \left[-\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sinh(\frac{\alpha}{2})} \sinh(\alpha(x-\frac{1}{2})) + \sin(\beta(x-\frac{1}{2})) \right].$$
Ainsi, nous obtenons
$$\phi''_{1,n}(x) = C_4 \left[-\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sinh(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \sinh(\alpha(x-\frac{1}{2})) - \beta^2 \sin(\beta(x-\frac{1}{2})) \right],$$
alors
$$\begin{aligned}
\phi''_{1,n}(0) &= C_4 \left[-\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sinh(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \sinh(\alpha(-\frac{1}{2})) - \beta^2 \sin(\beta(-\frac{1}{2})) \right] \\
&= C_4 \left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sinh(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \sinh((\frac{\alpha}{2})) + \beta^2 \sin((\frac{\beta}{2})) \right] \\
&= C_4(\alpha^2 + \beta^2) \sin(\frac{\beta}{2}) \neq 0
\end{aligned}$$
où α et β sont en fonction de λ_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
D'autre part, la fonction ϕ_2 est obtenue pour les solutions positives r_1 et r_2 et est donnée par
$$\phi_2(x) = C_1 \cosh(\alpha(x-\frac{1}{2})) + C_3 \cos(\beta(x-\frac{1}{2})),$$
alors
$$\phi'_2(x) = C_1\alpha \sinh(\alpha(x-\frac{1}{2})) - C_3\beta \sin(\beta(x-\frac{1}{2})).$$
D'après les conditions aux bords on a
$$\begin{cases} \phi_2(0) = C_1 \cosh(\frac{\alpha}{2}) + C_3 \cos(\frac{\beta}{2}) = 0, \\ \phi'_2(0) = -C_1\alpha \sinh(\frac{\alpha}{2}) + C_3\beta \sin(\frac{\beta}{2}) = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1 \cosh(\frac{\alpha}{2}) + C_3 \cos(\frac{\beta}{2}) = 0, \\ -C_1\alpha \sinh(\frac{\alpha}{2}) + C_3\beta \sin(\frac{\beta}{2}) = 0, \end{cases}$$

donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cosh(\frac{\alpha}{2}) & \cos(\frac{\beta}{2}) \\ -\alpha\sinh(\frac{\alpha}{2}) & \beta\sin(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix}}_{M_3} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice M_3 est : $\beta\cosh(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}) + \alpha\cos(\frac{\beta}{2})\sinh(\frac{\alpha}{2})$.
Posons

$$\beta\cosh(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}) + \alpha\cos(\frac{\beta}{2})\sinh(\frac{\alpha}{2}) = 0,$$

alors

$$-\alpha\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2}) = \beta\cosh(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}). \tag{2.9}$$

Soit $\{\sigma_{2,n}\}_{n\geq 1}$, l'ensemble des valeurs propres. Notons que

$$-\alpha\sinh(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2}) = \beta\cosh(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\beta}{2}).$$

Comme on a $C_1 = -C_3\dfrac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha}{2})}$, alors les fonctions propres sont données par

$$\phi_{2,n}(x) = C_3\left[-\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha}{2})}\cosh(\alpha(x-\frac{1}{2})) + \cos(\beta(x-\frac{1}{2}))\right].$$

Ainsi, nous obtenons

$$\phi''_{2,n}(x) = C_3\left[-\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\cosh(\alpha(x-\frac{1}{2})) - \beta^2\cos(\beta(x-\frac{1}{2}))\right],$$

alors

$$\begin{aligned} \phi''_{2,n}(0) &= C_3\left[-\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\cosh(\alpha(-\frac{1}{2})) - \beta^2\cos(\beta(-\frac{1}{2}))\right] \\ &= C_3\left[-\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\cosh((\frac{\alpha}{2})) - \beta^2\cos((\frac{\beta}{2}))\right] \\ &= -C_3(\alpha^2+\beta^2)\cos(\frac{\beta}{2}) \neq 0, \end{aligned}$$

où α et β sont en fonction λ_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
☞ **Cas** 3 : $\sigma > 0$
Dans cette partie, on trouvera quelques valeurs de λ pour lesquelles (2.4) ne tient pas. On a

$$\begin{cases} -\lambda\phi''_k - \phi''''_k = \sigma\phi(x), \\ \phi_k(0) = 0, \quad \phi_k(1) = 0, \\ \phi'_k(0) = 0, \quad \phi'_k(1) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour tout $\lambda > 0$, l'équation caractéristique de (2.10) est $-r^4 - r^2 - \sigma = 0$ et ses solutions sont données par

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} = i\sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}},\\
r_2 &= \sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} = i\sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}},\\
r_3 &= -\sqrt{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} = -i\sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}},\\
r_4 &= -\sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} = -i\sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}}.
\end{aligned}
$$

Posons

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} > 0 \text{ et } \beta = \sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\sigma}}{2}} > 0,$$

alors

$$r_1 = i\beta, \quad r_2 = i\alpha, \quad r_3 = -i\beta, \quad r_4 = -i\alpha.$$

Ainsi, la solution générale est données par

$$\phi(x) = C_1 \cos(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_2 \sin(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_3 \cos(\beta(x - \frac{1}{2})) + C_4 \sin(\beta(x - \frac{1}{2})),$$

où C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont des constantes telles que les conditions aux limites soient vérifiées. Cette solution peut s'écrire sous la forme $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$, où ϕ_1 et ϕ_2 correspondent aux solutions particulières par rapport aux solutions négatives et positives de l'équation caractéristique (2.10).

D'une part, la fonction ϕ_1 est obtenue par les solutions négatives r_3 et r_4 et est donnée par

$$\phi_1(x) = C_2 \sin(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_4 \sin(\beta(x - \frac{1}{2})),$$

alors

$$\phi_1^{'}(x) = C_2\alpha \cos(\alpha(x - \frac{1}{2})) + C_4\beta \cos(\beta(x - \frac{1}{2})).$$

D'après les conditions aux bords on a

$$
\begin{cases}
\phi_1(0) = -C_2 \sin(\frac{\alpha}{2}) - C_4 \sin(\frac{\beta}{2}) = 0,\\
\phi_1^{'}(0) = C_2\alpha \cos(\frac{\alpha}{2}) + C_4\beta \cos(\frac{\beta}{2}) = 0,
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} -C_2\sin(\frac{\alpha}{2}) - C_4\sin(\frac{\beta}{2}) = 0, \\ C_2\alpha\cos(\frac{\alpha}{2}) + C_4\beta\cos(\frac{\beta}{2}) = 0, \end{cases}$$

donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\frac{\alpha}{2}) & -\sin(\frac{\beta}{2}) \\ \alpha\cos(\frac{\alpha}{2}) & \beta\cos(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix}}_{M_4} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice M_4 est : $-\beta\cos(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}) + \alpha\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2})$.
Posons

$$-\beta\cos(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}) + \alpha\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}) = 0,$$

alors

$$\alpha\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}) = \beta\cos(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}). \tag{2.11}$$

Soit $\{\sigma_{1,n}\}_{n=1}^{m_1}$, l'ensemble des valeurs propres. Notons que

$$\alpha\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}) = \beta\cos(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\alpha}{2}).$$

Comme on a $C_2 = -C_4\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$, alors les fonctions propres sont données par

$$\widehat{\phi}_{1,n}(x) = C_4\left[-\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}\sin(\alpha(x-\frac{1}{2})) + \sin(\beta(x-\frac{1}{2}))\right], \quad \textit{où} \quad \sin(\frac{\alpha}{2}) \neq 0.$$

Ainsi, on obtient

$$\widehat{\phi}''_{1,n}(x) = C_4\left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\sin(\alpha(x-\frac{1}{2})) - \beta^2\sin(\beta(x-\frac{1}{2}))\right],$$

alors

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}''_{1,n}(0) &= C_4\left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\sin(\alpha(-\frac{1}{2})) - \beta^2\sin(\beta(-\frac{1}{2}))\right] \\ &= C_4\left[-\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\sin((\frac{\alpha}{2})) + \beta^2\sin((\frac{\beta}{2}))\right] \\ &= C_4(\beta^2-\alpha^2)\sin(\frac{\beta}{2}) \neq 0. \end{aligned}$$

Dans le cas $\sin(\frac{\alpha}{2}) = 0$, d'après la relation $\alpha\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2}) = \beta\cos(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\alpha}{2})$ la fonction $\widehat{\phi}_{1,n}$ peut s'écrire sous la forme

$$\widehat{\phi}_{1,n}(x) = C_4\left[-\frac{\beta\cos(\frac{\beta}{2})}{\alpha\cos(\frac{\alpha}{2})}\sin(\alpha(x-\frac{1}{2})) + \sin(\beta(x-\frac{1}{2}))\right].$$

Ainsi, on a

$$\widehat{\phi}''_{1,n}(x) = C_4\left[\frac{\beta\cos(\frac{\beta}{2})}{\alpha\cos(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\sin(\alpha(x-\frac{1}{2})) - \beta^2\sin(\beta(x-\frac{1}{2}))\right],$$

alors

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}''_{1,n}(0) &= C_4\left[\frac{\beta\cos(\frac{\beta}{2})}{\alpha\cos(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\sin(\alpha(-\frac{1}{2})) - \beta^2\sin(\beta(-\frac{1}{2}))\right]\\ &= C_4\left[-\frac{\beta\cos(\frac{\beta}{2})}{\alpha\cos(\frac{\alpha}{2})}\alpha^2\sin((\frac{\alpha}{2})) + \beta^2\sin((\frac{\beta}{2}))\right] \quad \textit{où} \quad \sin(\frac{\alpha}{2}) = 0\\ &= C_4\beta^2\sin(\frac{\beta}{2}).\end{aligned}$$

La fonction $\widehat{\phi}''_{1,n}(0) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pi^2\big((2p)^2 + (2q)^2\big)$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < p < q$, dans ce cas $\widehat{\sigma}_{1,n} = 16\pi^4 pq$.

D'autre part, la fonction ϕ_2 est obtenue par les solutions négatives r_1 et r_2 et est donnée par

$$\phi_2(x) = C_1\cos(\alpha(x-\frac{1}{2})) + C_3\cos(\beta(x-\frac{1}{2})),$$

alors

$$\phi_2'(x) = -C_1\alpha\sin(\alpha(x-\frac{1}{2})) - C_3\beta\sin(\beta(x-\frac{1}{2})).$$

D'après les conditions aux bords on a

$$\begin{cases}\phi_2(0) = C_1\cos(\frac{\alpha}{2}) + C_3\cos(\frac{\beta}{2}) = 0,\\ \phi_2'(0) = C_1\alpha\sin(\frac{\alpha}{2}) + C_3\beta\sin(\frac{\beta}{2}) = 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_1\cos(\frac{\alpha}{2}) + C_3\cos(\frac{\beta}{2}) = 0,\\ C_1\alpha\sin(\frac{\alpha}{2}) + C_3\beta\sin(\frac{\beta}{2}) = 0,\end{cases}$$

donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\cos(\frac{\alpha}{2}) & +\cos(\frac{\beta}{2})\\ \alpha\sin(\frac{\alpha}{2}) & \beta\sin(\frac{\beta}{2})\end{pmatrix}}_{M_5}\begin{pmatrix}C_1\\ C_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice M_5 est : $\beta\sin(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) - \alpha\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2})$.

Posons

$$\beta \sin(\frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) - \alpha \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}) = 0,$$

alors

$$\beta \sin(\frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) = \alpha \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}). \tag{2.12}$$

Soit $\{\sigma_{2,n}\}_{n=1}^{m_2}$, l'ensemble des valeurs propres. Notons que

$$\beta \sin(\frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) = \alpha \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}).$$

Comme on a $C_1 = -C_3 \frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})}$, donc les fonctions propres sont données par

$$\widehat{\phi}_{2,n}(x) = C_3 \left[-\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \cos(\alpha(x - \frac{1}{2})) + \cos(\beta(x - \frac{1}{2})) \right] \quad où \quad \cos(\frac{\alpha}{2}) \neq 0.$$

Ainsi, on obtient

$$\widehat{\phi}''_{2,n}(x) = C_3 \left[\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \cos(\alpha(x - \frac{1}{2})) - \beta^2 \cos(\beta(x - \frac{1}{2})) \right],$$

alors

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}''_{2,n}(0) &= C_3 \left[\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \cos(\alpha(-\frac{1}{2})) - \beta^2 \cos(\beta(-\frac{1}{2})) \right] \\
&= C_3 \left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \sin((\frac{\alpha}{2})) - \beta^2 \cos((\frac{\beta}{2})) \right] \\
&= C_3(\alpha^2 - \beta^2) \cos(\frac{\beta}{2}) \neq 0.
\end{aligned}$$

Dans le cas $\cos(\frac{\alpha}{2}) = 0$, d'après la relation $\beta \sin(\frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) = \alpha \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2})$ la fonction $\widehat{\phi}_{2,n}$ peut s'écrire sous la forme

$$\widehat{\phi}_{2,n}(x) = C_3 \left[-\frac{\beta \sin(\frac{\beta}{2})}{\alpha \sin(\frac{\alpha}{2})} \cos(\alpha(x - \frac{1}{2})) + \cos(\beta(x - \frac{1}{2})) \right].$$

Ainsi, on a

$$\widehat{\phi}''_{2,n}(x) = C_3 \left[\frac{\beta \sin(\frac{\beta}{2})}{\alpha \sin(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \cos(\alpha(x - \frac{1}{2})) - \beta^2 \cos(\beta(x - \frac{1}{2})) \right],$$

alors

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}''_{2,n}(0) &= C_3 \left[\frac{\beta \sin(\frac{\beta}{2})}{\alpha \sin(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \cos(\alpha(-\frac{1}{2})) - \beta^2 \cos(\beta(-\frac{1}{2})) \right] \\
&= C_3 \left[\frac{\beta \sin(\frac{\beta}{2})}{\alpha \sin(\frac{\alpha}{2})} \alpha^2 \cos((\frac{\alpha}{2})) - \beta^2 \cos((\frac{\beta}{2})) \right] \quad où \quad \cos((\frac{\alpha}{2})) = 0 \\
&= -C_3 \beta^2 \cos(\frac{\beta}{2}).
\end{aligned}$$

La fonction $\widehat{\phi}''_{2,n}(0) = 0 \iff \lambda = \pi^2\big((2p+1)^2 + (2q+1)^2\big)$ telle que $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < p < q$, dans ce cas $\widehat{\sigma}_{2,n} = 16\pi^4(2p+1)^2(2q+1)^2$.
On a ainsi obtenu l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles (2.4) est valable.
Enfin, prouvons la dernière déclaration du lemme.
Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions propres associées à la même valeur propre σ.
On définie $w := \varphi_1''(0)\varphi_2 - \varphi_2''(0)\varphi_1$, alors on a

$$\begin{aligned} w''(x) &= \varphi_1''(0)\varphi_2''(x) - \varphi_2''(0)\varphi_1''(x), \\ w''''(x) &= \varphi_1''(0)\varphi_2''''(x) - \varphi_2''(0)\varphi_1''''(x). \end{aligned}$$

D'après le système (2.3), on a

$$\begin{aligned} -\lambda w''(x) - w''''(x) &= -\lambda\left[\varphi_1''(0)\varphi_2''(x) - \varphi_2''(0)\varphi_1''(x)\right] - \left[\varphi_1''(0)\varphi_2''''(x) - \varphi_2''(0)\varphi_1''''(x)\right] \\ &= \left[-\lambda\varphi_2''(x) - \varphi_2''''(x)\right]\varphi_1''(0) - \left[-\lambda\varphi_1''(x) - \varphi_1''''(x)\right]\varphi_2''(0) \\ &= \sigma\varphi_2(x)\varphi_1''(0) - \sigma\varphi_1(x)\varphi_2''(0) \\ &= \sigma\left[\varphi_2(x)\varphi_1''(0) - \varphi_1(x)\varphi_2''(0)\right] \\ &= \sigma w(x). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} w(0) &= \varphi_1''(0)\varphi_2(0) - \varphi_2''(0)\varphi_1(0) = 0, \\ w(1) &= \varphi_1''(0)\varphi_2(1) - \varphi_2''(0)\varphi_1(1) = 0, \\ w'(0) &= \varphi_1''(0)\varphi_2'(0) - \varphi_2''(0)\varphi_1'(0) = 0, \\ w'(1) &= \varphi_1''(0)\varphi_2'(1) - \varphi_2''(0)\varphi_1'(1) = 0, \\ w''(0) &= \varphi_1''(0)\varphi_2''(0) - \varphi_2''(0)\varphi_1''(0) = 0. \end{aligned}$$

Donc, w ainsi définie satisfait :

$$\begin{cases} -\lambda w''(x) - w''''(x) = \sigma w(x), \\ w(0) = 0, \quad w(1) = 0, \\ w'(0) = 0, \quad w'(1) = 0, \end{cases}$$

et $w''(0) = 0$. Par conséquent, on en conclut que $w = 0$, c'est-à-dire que φ_1 et φ_2 sont linéairement dépendants. □

Remarque 7. *Le lemme précédent montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$ fixe, le sous-espace formé par les fonctions propres ϕ satisfaisant $\phi''(0) = 0$ est de dimension finie. Par exemple si $\lambda = 20\pi^2$, ce sous-espace est unidimensionnel et est généré par la fonction propre $\phi(x) = 2\sin(2\pi x - \pi) + \sin(4\pi x)$, et la valeur propre associée est $64\pi^4$.*

Afin de prouver un comportement asymptotique des valeurs propres de A, on se concentre sur le cas 2 ($\sigma < 0$) puisque nous savons qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres non négatives. D'après la preuve du lemme précédent, en particulier d'après (2.8) et (2.9), on peut voir que le résultat suivant est valable.

Lemme 2. *Il existe des constantes réelles positives D_i avec $i = 1, 2, 3$ telles que :*
(i) *les nombres réels $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ ont la forme asymptotique suivante :*

$$\sigma_k = D_1 k^4 + O(k^3) \quad \textit{lorsque} \quad k \longrightarrow \infty,$$

(ii) $$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\phi_k''(0)|}{k^2} = D_2 \quad \textit{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{|\phi_k''(0)|}{k^3} = D_3.$$

2.2 Contrôlabilité

2.2.1 Problème bien posé

Expliquons d'abord ce que nous entendons par solution du système de contrôle linéaire de K-S. Si $y = y(t,x)$ est la solution de (2.1), alors posons

$$w(t,x) = y(t,x) - (x^3 - 2x^2 + x)u(t).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
y_t(t,x) &= w_t(t,x) + (x^3 - 2x^2 + x)u_t(t),\\
y_x(t,x) &= w_x(t,x) + (3x^2 - 4x + 1)u(t),\\
y_{xx}(t,x) &= w_{xx}(t,x) + (6x - 4)u(t),\\
y_{xxx}(t,x) &= w_{xxx}(t,x) + (6)u(t),\\
y_{xxxx}(t,x) &= w_{xxxx}(t,x).
\end{aligned}$$

Donc pour tout $\lambda > 0$ et comme $y(t,x)$ est solution de (2.1) on a :

$$\begin{aligned}
&y_t(t,x) + y_{xxxx} + \lambda y_{xx} = 0,\\
&w_t(t,x) + (x^3 - 2x^2 + x)u_t(t) + w_{xxxx}(t,x) + \lambda\left[w_{xx}(t,x) + (6x-4)u(t)\right] = 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$w_t(t,x) + w_{xxxx}(t,x) + \lambda w_{xx}(t,x) = -(x^3 - 2x^2 + x)u_t(t) - \lambda(6x-4)u(t).$$

De plus, $y(t,0) = 0,\ y(t,1) = 0,\ y_x(t,0) = 0,\ y_x(t,1) = 0,$
alors $w(t,0) = 0,\ w(t,1) = 0,\ w_x(t,0) = 0,\ w_x(t,1) = 0.$
D'où on obtient le système suivant

$$\begin{cases}
w_t + w_{xxxx} + \lambda w_{xx} = F(t,x),\\
w(t,0) = 0, \quad w(t,1) = 0,\\
w_x(t,0) = 0, \quad w_x(t,1) = 0,\\
w(0,x) = y_0(x) - (x^2 - 2x^2 + x)u_t(t),
\end{cases} \tag{2.13}$$

où

$$F(t,x) = -(x^3 - 2x^2 + x)u_t(t) - \lambda(6x-4)u(t).$$

On sait que l'opérateur A, dont le domaine est $H^4(0,1) \cap H_0^2(0,1)$, génère un semi-groupe fortement continu dans $L^2(0,1)$. Ainsi, si la condition initiale $w_0 \in L^2(0,1)$ et $F \in L^1([0,T], L^2(0,1))$, alors le système (2.13) admet une unique solution (appelée solution faible) dans l'espace $C([0,T], L^2(0,1))$.
De plus, si $w_0 \in H^4(0,1) \cap H_0^2(0,1)$ et $F \in C^1([0,T], L^2(0,1))$ alors le système (2.13) admet une unique solution (appelée solution classique) dans l'espace

$$C([0,T], H^4(0,1) \cap H_0^2(0,1)) \cap C^1([0,T], L^2(0,1)).$$

De cette manière, on voit que si $y_0 \in L^2(0,1)$ et $u \in H^1(0,T)$, alors il existe une solution unique $y \in C([0,T], L^2(0,1))$ de (2.1). Il est important de noter que pour tout $t \in [0,T]$, nous pouvons parler de $y(t,\cdot)$ comme d'une fonction située dans $L^2(0,1)$.

2.2.2 Contrôlabilité à zéro

Étant donné $T > 0$, le système (2.1) est dit contrôlable par défaut dans un espace H si pour tout état $y_0 \in H$, on peut trouver un contrôle u tel que la solution y de (2.1) satisfasse $y(T) = 0$. Donnons la caractérisation suivante de la propriété de contrôlabilité à zéro.

Lemme 3. *Le système de contrôle (2.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si et seulement si pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$, il existe une fonction $u \in H^1(0,1)$ telle que pour tout $q_T \in L^2(0,1)$, on a*

$$\int_0^1 y_0(x)q(0,x)dx = -\int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)dt, \tag{2.14}$$

où $q = q(t,x)$ est la solution du système

$$\begin{cases} -q_t + \lambda q_{xx} + q_{xxxx} = 0, \\ q(t,0) = 0, \quad q(t,1) = 0, \\ q_x(t,0) = 0, \quad q_x(t,1) = 0, \\ q(T,x) = q_T(x). \end{cases} \tag{2.15}$$

Démonstration. Soit $q_T \in L^2(0,1)$ et $q = q(t,x)$ la solution de (2.15). D'après le système (2.1) on a

$$y_t + \lambda y_{xx} + y_{xxxx} = 0,$$

multiplions par q et faisons une intégration par partie :

$$\int_0^T \int_0^1 (y_t + \lambda y_{xx} + y_{xxxx})q \; dxdt = 0,$$

$$\int_0^1 ([y(t,x)q(t,x)]_0^T - \int_0^T y(t,x)q_t(t,x)dt)dx + \lambda \int_0^T \Big([y_x(t,x)q(t,x)]_0^1 - \int_0^1 y_x(t,x)q_x(t,x)dx\Big)dt$$
$$+ \int_0^T \Big([y_{xxx}(t,x)q(t,x)]_0^1 - \int_0^1 y_{xxx}(t,x)q_x(t,x)dx\Big)dt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx - \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_t(t,x)\ dxdt$$
$$-\lambda \int_0^T \int_0^1 y_x(t,x)q_x(t,x)\ dxdt - \int_0^T \int_0^1 y_{xxx}(t,x)q_x(t,x)\ dxdt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx - \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_t(t,x)\ dxdt$$
$$-\lambda \int_0^T \Big([y(t,x)q_x(t,x)]_0^1 - \int_0^1 y(t,x)q_{xx}(t,x)dx\Big)dt$$
$$- \int_0^T \Big([y_{xx}(t,x)q_x(t,x)]_0^1 - \int_0^1 y_{xx}(t,x)q_{xx}(t,x)dx\Big)dt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx - \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_t(t,x)\ dxdt$$
$$+\lambda \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_{xx}(t,x)\ dxdt + \int_0^T \int_0^1 y_{xx}(t,x)q_{xx}(t,x)\ dxdt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx$$
$$- \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_t(t,x)\ dxdt + \lambda \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_{xx}(t,x)\ dxdt$$
$$+ \int_0^T \Big([y_x(t,x)q_{xx}(t,x)]_0^1 - \int_0^1 y_x(t,x)q_{xxx}(t,x)dx\Big)dt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx$$
$$- \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_t(t,x)\ dxdt + \lambda \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_{xx}(t,x)\ dxdt$$
$$- \int_0^T y_x(t,0)q_{xx}(t,0)\ dt - \int_0^T \int_0^1 y_x(t,x)q_{xxx}(t,x)dx)dt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx - \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_t(t,x)\ dxdt$$
$$+\lambda \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_{xx}(t,x)\ dxdt - \int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)\ dt$$
$$-\int_0^T \Big([y(t,x)q_{xxxx}(t,x)]_0^1 - \int_0^1 y(t,x)q_{xxxx}(t,x)dx \Big) dt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx$$
$$-\int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_t(t,x)\ dxdt + \lambda \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_{xx}(t,x)\ dxdt$$
$$-\int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)\ dt + \int_0^T \int_0^1 y(t,x)q_{xxxx}(t,x)dxdt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q(T,x)dx - \int_0^1 y(0,x)q(0,x)dx - \int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)\ dt$$
$$+\int_0^T \int_0^1 y(t,x)\left[-q_t(t,x) + \lambda q_{xx}(t,x) + q_{xxxx}(t,x)\right] dx)dt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)q_T(x)dx - \int_0^1 y_0(x)q(0,x)dx - \int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)\ dt = 0. \tag{2.16}$$

$\Rightarrow$ Supposons qu'on a la relation (2.14), c'est-à-dire pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$, il existe une fonction $u \in H^1(0,1)$ telle que pour tout $q_T \in L^2(0,1)$ on a

$$\int_0^1 y_0(x)q(0,x)dx = -\int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)dt.$$

Alors, dans (2.16) on obtient

$$\int_0^1 y(T,x)q_T(x)dx = 0.$$

Ainsi, pour tout $q_T \in L^2(0,1)$ on a $y(T) = 0$, d'où le système de contrôle (2.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$.
$\Leftarrow$ Supposons que le système (2.1) est contrôlable, c'est-à-dire $\forall\ y_0 \in L^2(0,1)$, $\exists\ u \in H^1(0,1)$ telle que $y(T) = 0$. Donc d'après la relation (2.16) on obtient

$$-\int_0^1 y_0(x)q(0,x)dx - \int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)\ dt = 0,$$
$$\int_0^1 y_0(x)q(0,x)dx = -\int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)\ dt.$$

D'où on a la relation (2.14). $\square$

On utilise maintenant la base $L^2(0,1)$ formée par les fonctions propres de A. Pour tout $q_T \in L^2(0,1)$ peut s'écrire sous la forme

$$q_T = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\phi_k, \quad \textit{avec} \quad \{q_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \textit{ satisfaisant } \sum_{k\in\mathbb{N}} |q_k|^2 < \infty.$$

Par conséquent, la solution de (2.15) est donnée par

$$q(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k}\phi_k(x).$$

Ainsi, on a

$$q_x(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k}\phi_k'(x) \quad et \quad q_{xx}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k}\phi_k''(x),$$

alors,

$$q_{xx}(t,0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k}\phi_k''(0).$$

En utilisant ce fait dans (2.14), on obtient le lemme suivant.

Lemme 4. *Le système de contrôle (2.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si et seulement si pour tous $y_0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_0^k\phi_k \in L^2(0,1)$ il existe une fonction $f \in H^1(0,T)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\phi_k''(0)\int_0^T f(t)e^{\sigma_k t}dt = -y_0^k e^{\sigma_k T}, \tag{2.17}$$

où $u(t) = f(T-t)$ est le contrôle.

Démonstration. D'après la relation (2.16) on a

$$\int_0^1 y(T,x)q_T(x)dx - \int_0^1 y_0(x)q(0,x)dx - \int_0^T u(t)q_{xx}(t,0)\,dt = 0.$$

Alors, on a

$$\int_0^1 y(T,x)\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\phi_k(x)dx - \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{N}} y_0^k\phi_k(x)\sum_{l\in\mathbb{N}} q_l e^{\sigma_l T}\phi_l(x)dx - \int_0^T f(T-t)\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k}\phi_k''(0)\,dt = 0,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\int_0^1 y(T,x)\phi_k(x)dx - \sum_{k,l\in\mathbb{N}} q_l y_0^k e^{\sigma_l T}\int_0^1 \phi_k(x)\phi_l(x)dx - \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\phi_k''(0)\int_0^T f(T-t)e^{(T-t)\sigma_k}\,dt = 0,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\int_0^1 y(T,x)\phi_k(x)dx - \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k y_0^k e^{\sigma_k T} - \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k\phi_k''(0)\int_0^T f(T-t)e^{(T-t)\sigma_k}\,dt = 0.$$

Posons $\tau = T - t$, alors

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \left[\int_0^1 y(T,x)\phi_k(x)dx - y_0^k e^{\sigma_k T} - \phi_k^{''}(0)\int_0^T f(\tau)e^{\sigma_k\tau}\, d\tau\right] = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x)\phi_k(x)dx - \phi_k^{''}(0)\int_0^T f(\tau)e^{\sigma_k\tau}\, d\tau - y_0^k e^{\sigma_k T} = 0.$$

$\Rightarrow$ Supposons que le système (2.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$, c'est-à-dire $y(T) = 0$, alors

$$-\phi_k^{''}(0)\int_0^T f(\tau)e^{\sigma_k\tau}\, d\tau - y_0^k e^{\sigma_k T} = 0,$$

donc

$$\phi_k^{''}(0)\int_0^T f(\tau)e^{\sigma_k\tau}\, d\tau = -y_0^k e^{\sigma_k T}.$$

$\Leftarrow$ Supposons maintenant qu'il existe une fonction $f \in H^1(0,1)$ telle que

$$\phi_k^{''}(0)\int_0^T f(\tau)e^{\sigma_k\tau}\, d\tau = -y_0^k e^{\sigma_k T},$$

alors

$$\int_0^1 y(T,x)\phi_k(x)dx = 0.$$

Ainsi, pour tout $\phi_k \in L^2(0,1)$ on a $y(T) = 0$, alors le système (2.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$. D'où la fin de la preuve. $\square$

Considérons maintenant le cas $\lambda \notin \mathcal{N}$. Ainsi, les fonctions propres ϕ_k satisfont $\phi_k^{''}(0) \neq 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ nous pouvons écrire (2.17) sous la forme

$$\int_0^T f(t)e^{\sigma_k t}dt = \frac{-y_0^k e^{\sigma_k T}}{\phi_k^{''}(0)}. \tag{2.18}$$

Grâce au comportement décrit dans le lemme 2, pour résoudre le problème de moment, on peut appliquer la théorie générale développée par Fattorini-Roussell [15]. D'après (2.18), nous voyons clairement que si $\phi_k^{''}(0) = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ nous ne pouvons pas contrôler la k-ième coordonnée de la solution. C'est le cas comme nous l'avons vu dans la partie 2.1 si $\lambda \in \mathcal{N}$. Le système (2.1) n'est plus contrôlable à zéro puisqu'il existe un sous-espace de dimension finie de $L^2(0,1)$ formé par certaines fonctions propres satisfaisant $\phi^{''}(0) = 0$ (voir Remarque 7). Pour surmonter cette difficulté, on peut ajouter un autre contrôle. Si nous sommes autorisés à contrôler la dérivée spatiale aux deux extrémités avec les contrôles u_1 et u_2, c'est-à-dire que nous considérons le système :

$$\begin{cases} y_t + \lambda y_{xx} + y_{xxxx} = 0, & (t,x) \in (0,T)\times(0,1) \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,1) = 0, & \\ y_x(t,0) = u_1(t), \quad y_x(t,1) = u_2(t). & \end{cases} \tag{2.19}$$

On peut prouver que la contrôlabilité à zéro est équivalente à l'existence de f_1 et f_2 telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\phi_k''(0) \int_0^T f_1(t) e^{\sigma_k t}\, dt - \phi_k''(1) \int_0^T f_2(t) e^{\sigma_k t}\, dt = -y_0^k e^{\sigma_k T}. \tag{2.20}$$

Démonstration. D'après le système (2.19), en multipliant par q et en faisant une intégration par partie on obtient ainsi (voir la preuve du lemme 3)

$$\int_0^1 y(T,x) q_T(x) dx - \int_0^1 y_0(x) q(0,x) dx + \int_0^T u_2(t) q_{xx}(t,1)\, dt - \int_0^T u_1(t) q_{xx}(t,0)\, dt = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x) \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \phi_k(x) dx - \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{N}} y_0^k \phi_k(x) \sum_{l\in\mathbb{N}} q_l e^{\sigma_l T} \phi_l(x) dx$$
$$+ \int_0^T f_2(T-t) \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k} \phi_k''(1)\, dt - \int_0^T f_1(T-t) \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k e^{(T-t)\sigma_k} \phi_k''(0)\, dt = 0,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \int_0^1 y(T,x) \phi_k(x) dx - \sum_{k,l\in\mathbb{N}} y_0^k q_l e^{\sigma_l T} \int_0^1 \phi_k(x) \phi_l(x) dx$$
$$+ \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \phi_k''(1) \int_0^T f_2(T-t) e^{(T-t)\sigma_k}\, dt - \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \phi_k''(0) \int_0^T f_1(T-t) e^{(T-t)\sigma_k}\, dt = 0,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \int_0^1 y(T,x) \phi_k(x) dx - \sum_{k\in\mathbb{N}} y_0^k q_k e^{\sigma_k T}$$
$$+ \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \phi_k''(1) \int_0^T f_2(T-t) e^{(T-t)\sigma_k}\, dt - \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \phi_k''(0) \int_0^T f_1(T-t) e^{(T-t)\sigma_k}\, dt = 0.$$

Posons $\tau = T - t$ alors

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \left(\int_0^1 y(T,x) \phi_k(x) dx - y_0^k q_k e^{\sigma_k T} + \phi_k''(1) \int_0^T f_2(\tau) e^{\sigma_k \tau} d\tau - \phi_k''(0) \int_0^T f_1(\tau) e^{\sigma_k \tau}\, d\tau \right) = 0,$$

$$\int_0^1 y(T,x) \phi_k(x) dx - y_0^k q_k e^{\sigma_k T} + \phi_k''(1) \int_0^T f_2(\tau) e^{\sigma_k \tau} d\tau - \phi_k''(0) \int_0^T f_1(\tau) e^{\sigma_k \tau}\, d\tau = 0.$$

$\Rightarrow$ Supposons que le système (2.19) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ i.e $y(T) = 0$ alors

$$-y_0^k q_k e^{\sigma_k T} + \phi_k''(1) \int_0^T f_2(\tau) e^{\sigma_k \tau} d\tau - \phi_k''(0) \int_0^T f_1(\tau) e^{\sigma_k \tau}\, d\tau = 0,$$

$$\phi_k^{''}(0)\int_0^T f_1(\tau)e^{\sigma_k\tau}\,d\tau-\phi_k^{''}(1)\int_0^T f_2(\tau)e^{\sigma_k\tau}d\tau=-y_0^k q_k e^{\sigma_k T}.$$

$\Leftarrow$ Supposons maintenant qu'il existe une fonction $f\in H^1(0,1)$ telle que

$$\phi_k^{''}(0)\int_0^T f_1(\tau)e^{\sigma_k\tau}\,d\tau-\phi_k^{''}(1)\int_0^T f_2(\tau)e^{\sigma_k\tau}d\tau=-y_0^k q_k e^{\sigma_k T},$$

alors

$$\int_0^1 y(T,x)\phi_k(x)dx=0.$$

Ainsi, pour tout $\phi_k\in L^2(0,1)$ on a $y(T)=0$, alors le système (2.19) est contrôlable à zéro au temps $T>0$. D'où la fin de la preuve. $\square$

Malheureusement, les mêmes fonctions propres ϕ_k pour lesquelles $\phi_k^{''}(0)=0$, satisfont également $\phi_k^{''}(1)=0$. Ainsi, le second contrôle ne donne pas la contrôlabilité à zéro. D'autre part en revanche, si l'on ajoute un contrôle agissant sur $y(t,0)$, on obtient la contrôlabilité. En effet, dans ce cas, la contrôlabilité à zéro du système de contrôle suivant

$$\begin{cases} y_t+\lambda y_{xx}+y_{xxxx}=0,\\ y(t,0)=u_1(t),\quad y(t,1)=0,\\ y_x(t,0)=u_2(t),\quad y_x(t,1)=0,\end{cases}$$

est équivalente à l'existence de f_1 et f_2 telles que $\forall\ k\in\mathbb{N}$

$$\phi_k^{''}(0)\int_0^T f_2(t)e^{\sigma_k t}\,dt+\phi_k^{'''}(0)\int_0^T f_1(t)e^{\sigma_k t}dt=-y_0^k q_k e^{\sigma_k T}. \tag{2.21}$$

Et ce problème de moment peut être résolut de la même manière que (2.17) puisqu'il n'est pas possible qu'une fonction propre ϕ_k satisfasse aux deux conditions $\phi_k^{''}=0$ et $\phi_k^{'''}=0$. En effet, la fonction ϕ_k est la solution triviale d'une *EDO* du quatrième ordre telle que $\phi_k(0)=\phi_k^{'}(0)=0$.

2.3 La stabilisation

Puisque les valeurs propres de l'opérateur A (voir (2.3)) sont réelles et satisfont $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_k=-\infty$, on sait qu'il peut y avoir au plus un nombre fini de valeurs propres non négatives. Cette situation instable se produit en fait lorsque le paramètre réel λ est plus grand ou égal à $4\pi^2$ (voir [9]). On sait également que si $\lambda<4\pi^2$, l'équation linéaire de K-S est asymptotiquement stable dans $L^2(0,1)$. Nous nous concentrons ici sur le cas $\lambda\geqslant 4\pi^2$.
Afin de stabiliser notre système de contrôle linéaire, nous allons concevoir une loi de rétroaction déplaçant les premières valeurs propres instables vers la gauche sans déplacer les autres. Ainsi, toutes les valeurs propres du système en boucle fermée seront négatives. Maintenant, afin de traiter un problème de Dirichlet homogène au lieu du système (2.1), on fixe comme précédemment,

$$w(t,x) = y(t,x) - (x^3 - 2x^2 + x)u(t).$$

Alors on a

$$w_t(t,x) + (x^3 - 2x^2 + x)u_t(t) + w_{xxxx}(t,x) + \lambda\left[w_{xx}(t,x) + (6x-4)u(t)\right] = 0,$$

$$w_t(t,x) - (-x^3 + 2x^2 - x)u_t(t) + w_{xxxx}(t,x) + \lambda w_{xx}(t,x) + \lambda(6x-4)u(t) = 0,$$

$$w_t(t,x) - b(x)u_t(t) + w_{xxxx}(t,x) + \lambda w_{xx}(t,x) - a(x)u(t) = 0,$$

$$w_t(t,x) - b(x)u_t(t) - Aw(t,x) - a(x)u(t) = 0.$$

Et avec les conditions aux bords, cela conduit au système suivant :

$$\begin{cases} w_t = Aw + b(x)u_t(t) + a(x)u(t), \\ w(t,0) = 0, \quad w(t,1) = 0, \\ w_x(t,0) = 0, \quad w_x(t,1) = 0, \\ w(0,x) = y_0(x) - b(x)u(0), \end{cases} \tag{2.22}$$

où $b(x) = -x^3 + 2x^2 - x$ et $a(x) = -\lambda(6x-4)$. Toute solution $w = w(t,x)$ du système (2.22) peut être développée comme une série sur la base des fonctions propres $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k(t)\phi_k(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > n$, on a $\sigma_k < -1$. Notre rétroaction est basée sur une procédure de placement de pôles finis pour les n premières valeurs propres. Soit Π^n la projection orthogonale sur le sous-espace couvert par les n premières fonctions propres $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots, \phi_n$. Ainsi, on a :

$$\Pi^n(w_t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{w}_k(t)\phi_k(x) \quad et \quad \Pi^n(Aw(t,x)) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k w_k(t)\phi_k(x).$$

On peut écrire $\forall\ k \in \{1,2,3,\cdots,n\}$,

$$\dot{w}_k(t) = \sigma_k w_k(t) + b_k\dot{u}(t) + a_k u(t), \tag{2.23}$$

alors, en multipliant par ϕ_k on a

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{w}_k(t)\phi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k w_k(t)\phi_k(x) + \sum_{k=1}^{n}\Big(b_k\dot{u}(t) + a_k u(t)\Big)\phi_k(x),$$

$$\Pi^n(w_t) = \Pi^n\Big(Aw(t,x)\Big) + \Pi^n\Big(b(x)\dot{u}(t) + a(x)u(t)\Big),$$

où
$$b_k = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)\phi_k dx \quad et \quad a_k = -\lambda \int_0^1 (6x-4)\phi_k dx.$$
Les n équations de (2.23) forment un système différentiel à dimension finie, contrôlé par u et $\dot{u}$.
Soit $\alpha(t) = \dot{u}(t)$ et considérons maintenant u comme faisant partie de l'état et α comme le contrôle. Le système différentiel précédent peut alors être écrit sous la forme
$$\dot{X}_n(t) = A_n X_n(t) + B_n \alpha(t), \tag{2.24}$$
avec
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \\ w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
Prenons maintenant le résultat suivant.

Proposition 3. *Le système de contrôle de dimension finie (2.24) est contrôlable.*

Démonstration. Soit $C = \left(B_n, \quad A_n B_n, \quad A_n^2 B_n, \ \cdots \ , A_n^{n-1} B_n\right)$ la matrice de Kalman de l'équation (2.24). Voyons que la condition de Kalman est vérifiée. En effet, en calculant le déterminant de la matrice C on obtient :
$$\begin{aligned} det\ C &= det\left(B_n, \quad A_n B_n, \quad A_n^2 B_n, \ \cdots \ , A_n^{n-1} B_n\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (a_k + \sigma_k b_k) VdM(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n), \end{aligned}$$
où $VdM(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ est le déterminant de la matrice de Vandermonde donné par $VdM(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = \prod_{k>j} (\sigma_k - \sigma_j)$ qui n'est pas nulle puisque toutes les valeurs propres sont simples (voir preuve du lemme 1). Ainsi, d'après a_k et b_k faisons une intégration par

partie

$$\begin{aligned}
a_k+\sigma_k b_k &= -\lambda\int_0^1 (6x-4)\phi_k(x)dx+\sigma_k\int_0^1(-x^3+2x^2-x)\phi_k(x)dx\\
&=\lambda\int_0^1(-6x+4)\phi_k(x)dx+\sigma_k\int_0^1(-x^3+2x^2-x)\phi_k(x)dx\\
&=\lambda\int_0^1 b^{''}(x)\phi_k(x)dx+\int_0^1\sigma_k b(x)\phi_k(x)dx\\
&=\lambda\Big(\Big[b^{'}(x)\phi_k(x)\Big]_0^1-\int_0^1 b^{'}(x)\phi_k^{'}(x)dx\Big)+\int_0^1\sigma_k b(x)\phi_k(x)dx\\
&=-\lambda\int_0^1 b^{'}(x)\phi_k^{'}(x)dx+\int_0^1\sigma_k b(x)\phi_k(x)dx\\
&=-\lambda\Big(\Big[b(x)\phi_k^{'}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 b(x)\phi_k^{''}(x)dx\Big)+\int_0^1\sigma_k b(x)\phi_k(x)dx\\
&=\lambda\int_0^1 b(x)\phi_k^{''}(x)dx+\int_0^1\sigma_k b(x)\phi_k(x)dx\\
&=\int_0^1 b(x)\Big(\lambda\phi_k^{''}(x)+\sigma_k\phi_k(x)\Big)dx,
\end{aligned}$$

or d'après (2.3) on a $-\lambda\phi_k^{''}-\phi_k^{''''}=\sigma_k\phi_k$,
alors

$$\begin{aligned}
a_k+\sigma_k b_k &= -\int_0^1 b(x)\phi_k^{''''}(x)dx\\
&=-\Big[b(x)\phi_k^{'''}(x)\Big]_0^1+\int_0^1 b^{'}(x)\phi_k^{'''}(x)dx\\
&=\int_0^1 b^{'}(x)\phi_k^{'''}(x)dx\\
&=\Big[b^{'}(x)\phi_k^{''}(x)\Big]_0^1-\int_0^1 b^{''}(x)\phi_k^{''}(x)dx\\
&=\phi_k^{''}(0)-\int_0^1 b^{''}(x)\phi_k^{''}(x)dx\\
&=\phi_k^{''}(0).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1, on a $\phi_k^{''}(0)\neq 0$. Donc $det\ C\neq 0$, alors la condition de Kalman est vérifiée. Par conséquent, le système (2.24) est contrôlable. □

Ainsi, ce système peut être stabilisé par la méthode de placement de pôles (voir [5]), ce qui permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Il existe un vecteur* $K_n=(K_n^0,K_n^1,\cdots,K_n^n)$ *tel que la matrice* $A_n+B_nK_n$ *admet* $n+1$ *valeurs propres* $\{\mu_k\}_k$ *satisfaisant pour tout* $k\in\{0,1,\cdots,n\}$, $Re(\mu_k)<-1$.

Si on prend $\dot{u}(t) = K_n X_n(t)$ tel que $u(0) = 0$ dans le système (2.24), nous obtenons le système en boucle fermée

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = K_n X_n(t), \\ w_t = Aw + b(x)K_n X_n(t) + a(x)u(t), \\ w(t,0) = 0, \quad w(t,1) = 0, \\ w_x(t,0) = 0, \quad w_x(t,1) = 0, \\ w(0,x) = y_0(x), \end{cases} \tag{2.25}$$

où l'état est $(u(t), w(t,\cdot)) \in \mathbb{R}\times L^2(0,1)$.

Désignons par $(\mu_k, \widehat{X}_k)$ avec $k = 0, 1, \cdots, n$, les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $(A_n + B_n K_n)$. Il n'est pas difficile de voir que les valeurs propres du système en boucle fermée (2.25) sont données par

$$E_v = \{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \cdots\},$$

et les fonctions propres correspondantes sont données par

$$E_f = \left\{ \begin{pmatrix} \widehat{X}_0 \\ g_0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \widehat{X}_n \\ g_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ F_{n+1}(\phi_{n+1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ F_{n+2}(\phi_{n+2}) \end{pmatrix}, \cdots \right\},$$

où les fonctions $g_k \in Vect\{\phi_{n+1}, \phi_{n+2}, \cdots\} \subset L^2(0,1)$, sont définies par

$$(A - \mu_k) g_k = F_n(\widehat{X}_k) \tag{2.26}$$

et

$$\begin{aligned} F_n \colon \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow Vect\{\phi_{n+1}, \phi_{n+2}, \cdots\} \\ (y_0, y_1, \cdots, y_n) &\longmapsto \sum_{j \geq n+1} \left[(a_j + b_j K_n^0) y_0 + b_j K_n^1 y_1 + \cdots + b_j K_n^n y_n \right] \phi_j. \end{aligned}$$

Notons que pour résoudre (2.26), nous devons imposer les conditions suivantes :

$$\mu_k \neq \sigma_j, \forall\ k = 0, 1, \cdots, n\ , \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

Si on pose $F_n(\widehat{X}_k) = \sum_{j \geq n+1} f_j^k \phi_j$, alors la solution de (2.26) est donnée par

$$g_k = \sum_{j \geq n+1} \frac{f_j^k}{\mu_k - \sigma_k} \phi_j.$$

Enfin, on voit que le sous-espace E_f forme une base de l'espace $\mathbb{R}\times L^2(0,1)$ et que toutes les valeurs propres du système en boucle fermée sont dans la moitié gauche de la droite $Re(Z) = -1$ sur le plan complexe. On obtient ainsi la stabilité exponentielle du système en boucle fermée (2.25) et donc le théorème 2.

Chapitre 3

ÉTUDE DE LA CONTRÔLABILITÉ LOCALE A ZÉRO DE L'ÉQUATION NON-LINÉAIRE DE KURAMOTO-SIVASHINSKY

Dans cette partie, nous étudierons la contrôlabilité au bord de l'équation de K-S. Pour cela, on utilise un seul contrôle dans ce cas. Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + \lambda y_{xx} + y y_x = 0, & (t,x) \in (0,T)\times(0,1) \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,1) = 0, \\ y_x(t,0) = u(t), \quad y_x(t,1) = 0, \\ y(0,x) = y_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

où la solution y est contrôlée par la fonction $u = u(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. Rappelons que dans la partie précédente, on a étudié la contrôlabilité du système linéaire en particulier la contrôlabilité à zéro à condition que $\lambda \notin \mathcal{N}$ où

$$\mathcal{N} := \{\pi^2(k^2+l^2);\ k,\ l \in \mathbb{N},\ 1 \leq k < l,\ k \textit{ et } l \textit{ ont la même parité}\}.$$

Notre résultat principal montre la contrôlabilité locale à zéro du système (3.1) avec les mêmes hypothèses sur λ.

Théorème 12. *Supposons que $\lambda \notin \mathcal{N}$. Alors le système (3.1) est localement contrôlable à zéro pour tout $T > 0$: il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\| y_0 \|_{H^{-1}(0,1)} < \epsilon$, il existe un contrôle $u \in L^2(0,T;\mathbb{R})$ et une solution $y \in C([0,T], H^{-1}(0,1))$ avec*

$$y(T) = 0.$$

Dans la partie précédente, pour étudier la contrôlabilité de l'équation linéaire, on a utilisé une méthode basée sur une analyse spectrale et la méthode des moments. Néanmoins, on utilise l'analyse spectrale dans notre preuve, mais afin d'obtenir un premier résultat sur le problème non-linéaire associé à (3.1).

Remarque 8. *L'espace des conditions initiales est différent de celui de la partie précédente (voir [27]). Cette partie, où on a utilisé un contrôle $u \in H^1(0,T)$. Pour étudier la contrôlabilité d'une équation non-linéaire, une première approche consisterait à utiliser la contrôlabilité du système linéaire, puis à prouver la contrôlabilité de l'équation non-linéaire.*

Remarque 9. *Si $\lambda \in \mathcal{N}$, alors le système linéaire n'est pas contrôlable et la méthode développée ici ne peut pas être appliquée (voir [25, 26]). Néanmoins, l'équation non-linéaire (3.1) peut être contrôlable à zéro même si $\lambda \in \mathcal{N}$. La preuve du théorème 3 est basée sur plusieurs résultats généraux décrits dans la section (3.1). La méthode de preuve pourrait être appliquée à plusieurs autres systèmes paraboliques non-linéaires. L'idée est d'abord d'appliquer une méthode due à Russell pour déduire la contrôlabilité à zéro d'un système parabolique linéarisé à partir de la contrôlabilité (où de l'observabilité) d'un système hyperbolique correspondant.*

3.1 Quelques résultats généraux

cette partie est consacrée à la présentation des résultats généraux importants qui sont utilisés dans la preuve du théorème 3.

3.1.1 La méthode de Russell

On rappelle ici une méthode introduite par Russell [4] et qui est complètement décrite dans [14] (section 9.2). L'idée est que l'observabilité de l'état final d'un système parabolique peut être obtenue par observabilité d'un système hyperbolique associé au système parabolique. Plus précisément, considérons un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur auto-adjoint

$$A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1), \text{ strictement positif.}$$

Nous supposons également que A^{-1} est strictement positif et de plus compact. Considérons également un espace de Hilbert U et $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}), U)$ un opérateur. Considérons ainsi le problème d'observabilité suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = -Az, \\ y = C_0 z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{cases} \ddot{w} = -Aw, \\ y = C_0 \dot{w}, \\ w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = w_1. \end{cases} \tag{3.3}$$

On désigne par $(e^{-At})_{t \geqslant 0}$ le semi-groupe généré par $-A$. On introduit une base orthonormé $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{H}$ composée de vecteurs propres de A et de valeurs propres $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a alors ce résultat.

Théorème 13. *Supposons que (3.3) soit exactement observable dans $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \times \mathcal{H}$ au temps $T > 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma_n^k} < \infty. \tag{3.4}$$

Alors, (3.2) est observable à l'état final dans $\mathcal{H}$ pour tout $T > 0$:

$$\| e^{-AT}\phi_0 \|^2_{L^2(0,1)} \leq K(T)^2 \int_0^T \| C_0 e^{-At}\phi_0 \|^2_U \, dt, \quad \phi_0 \in D(A) \tag{3.5}$$

où

$$K(T) = Ce^{\frac{M}{T}}. \tag{3.6}$$

Cet théorème est énoncé dans cette manière dans [14] (théorème 9.2.2).

3.1.2 La méthode du terme source

On rappelle ici une méthode introduite dans [3] et qui nous permet de traiter la contrôlabilité des systèmes paraboliques non-linéaires. Dans ce qui suit, on considère le sous-ensemble $\mathcal{R}_T$ avec $T > 0$, des fonctions ρ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\rho : [0, T] \longrightarrow [0, +\infty)$$

est continue, décroissante, positive sur $[0, T)$ et

$$\rho(T) = 0. \tag{3.7}$$

Notons par $L^2_\rho([0, T], Y)$ l'espace L^2 à valeurs dans l'espace de Hilbert Y et de mesure $\dfrac{m_1}{\rho^2}$ où m_1 désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$. Considérons les mêmes hypothèses précédentes : $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et un opérateur auto-adjoint

$$A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(0, 1) \longrightarrow L^2(0, 1),$$

strictement positif tel que A^{-1} est compact. On considère également un espace de Hilbert U et $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})')$ un opérateur. Pour abréger la notation dans cette partie, nous écrivons

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \ \text{ et } \ \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})'.$$

On considère aussi le problème de contrôle suivant

$$\begin{cases} \dot{z} = -Az + Bu + f, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Théorème 14. *Supposons que pour tout $T>0$, nous ayons l'inégalité d'observabilité*

$$\parallel e^{-AT}\phi_0 \parallel^2_{L^2(0,1)} \leq K(T)^2 \int_0^T \parallel B^* e^{-At}\phi_0 \parallel^2_U dt, \quad \phi_0 \in D(A), \tag{3.9}$$

où $K:(0,+\infty)\longmapsto(0,+\infty)$ est continue et décroissante. Il existe $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{R}_T$ tels que pour tout $z_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2_\rho([0,T], \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})$, il existe $u \in L^2([0,T], U)$ tel que les solutions de (3.8) satisfont

$$\begin{aligned} \parallel z \parallel^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \left\| \frac{z}{\rho_0} \right\|^2_{C^0([0,T],\mathcal{H})} + \parallel \dot{z} \parallel^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],U)} + \parallel u \parallel^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],U)} \\ \leq C\big(\parallel z_0 \parallel^2_{\mathcal{H}} + \parallel f \parallel^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}\big). \end{aligned} \tag{3.10}$$

En particulier (3.8) est contrôlable à zéro au temps $T>0$.

Démonstration. Soient les fonctions ρ_0 et ρ_1 définies dans la relation suivante

$$\rho_0(t) = \rho_1\big(q^2(t-T)+T\big)K\big((q-1)(T-t)\big), \tag{3.11}$$

où $t \in \left[T(1-\frac{1}{q^2}), T\right]$ pour tout $q>1$ et ρ_0 étendue sur $\left[0, T(1-\frac{1}{q^2})\right]$ de sort que $\rho_0 \in \mathcal{R}_T$. Fixons $T_k = T - \dfrac{T}{q^k}, \forall\, k \in \mathbb{N}$. D'après la relation (3.11), nous avons la relation suivante

$$\begin{aligned} \rho_0(T_{k+2}) &= \rho_0\big(T - \frac{T}{q^{k+2}}\big) \\ &= \rho_1\big(q^2(T - \frac{T}{q^{k+2}} + T) + T\big)K\big((q-1)(T - T + \frac{T}{q^{k+2}})\big) \\ &= \rho_1\big(T - \frac{T}{q^k}\big)K\big(-\frac{T}{q^{k+2}} + \frac{T}{q^{k+1}}\big) \\ &= \rho_1\big(T - \frac{T}{q^k}\big)K\big(-\frac{T}{q^{k+2}} - T + T + \frac{T}{q^{k+1}}\big) \\ &= \rho_1\big(T - \frac{T}{q^k}\big)K\big(T - \frac{T}{q^{k+2}} - (T - \frac{T}{q^{k+1}})\big), \end{aligned}$$

alors

$$\rho_0(T_{k+2}) = \rho_1\big(T_{k+1}\big)K\big(T_{k+2} - T_{k+1}\big). \tag{3.12}$$

Nous définissons alors la suite suivante :

$$\begin{cases} a_{k+1} = z_1(T^-_{k+1}), & \forall\, k \geqslant 0 \\ a_0 = z_0, \end{cases}$$

où z_1 est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -Az_1 + f, \\ z_1(T^+_k) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Alors en utilisant le lemme 2.5 ([3], p.25), on a d'après la solution z_1 de (3.13)

$$\| z_1 \|^2_{C^0([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H})} + \| -A^{\frac{1}{2}} z_1 \|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H})} \leq C \| f \|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}, \ \forall\ k \geqslant 0$$

alors

$$\| z_1 \|^2_{C^0([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H})} \leq C \| f \|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}, \ \forall\ k \geqslant 0.$$

En particulier, d'après la relation $a_{k+1} = z_1$ on a

$$\| a_{k+1} \|^2_{\mathcal{H}} \leq C \| f \|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}, \ \forall\ k \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Enfin, on considère le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = -Az_2 + Bu, \\ z_2(T_k^+) = a_k. \end{cases} \tag{3.15}$$

D'après la relation (3.9) et la Proposition 1, il existe un contrôle $u \in L^2([T_k, T_{k+1}], U)$ tel que

$$z_2(T_k^-) = 0 \quad et \quad \| u \|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H})} \leq K^2(T_{k+1} - T_k) \| a_k \|^2_{\mathcal{H}}, \ \forall\ k \geqslant 0. \tag{3.16}$$

Nous définissons alors $z = z_1 + z_2$ et en utilisant la relation de z_1 et de z_2 à T^- et T^+, vérifions que z est solution du système (3.8).
En effet, on a

$$z(T_k^-) = z_1(T_k^-) + z_2(T_k^-) = a_k \quad et \quad z(T_k^+) = z_1(T_k^+) + z_2(T_k^+) = a_k,$$

alors

$$z(T_k^-) = z(T_k^+) = a_k, \ \forall\ k \geqslant 1$$

donc z est continue à T_k $\forall\ k \geqslant 0$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 + \dot{z}_2 &= -Az_1 + f - Az_2 + Bu \\ &= -A(z_1 + z_2) + Bu + f \\ &= -Az + Bu + f. \end{aligned}$$

Ainsi, on a le système

$$\begin{cases} \dot{z} = -Az + Bu + f, \quad t \in [T_k, T_{k+1}] \\ z(T_k) = a_k, \quad k \geqslant 0. \end{cases}$$

Donc $z = z_1 + z_2$ est la solution du système (3.8).
De plus, d'après la relation (3.16) on a

$$\| u \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],U)} \leq K^2(T_{k+2} - T_{k+1}) \| a_{k+1} \|^2_{\mathcal{H}}, \ \forall\ k \geqslant 0.$$

Ainsi, en utilisant les relations (3.12) et (3.14) on obtient

$$\begin{aligned}
\| u \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],U)} &\leq \frac{\rho_0^2(T_{k+2})}{\rho_1^2(T_{k+1})} C \| f \|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}, \ \forall\, k \geqslant 0 \\
\frac{\| u \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],U)}}{\rho_0^2(T_{k+2})} &\leq C \frac{\| f \|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}}{\rho_1^2(T_{k+1})}, \\
\left\| \frac{u}{\rho_0} \right\|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],U)} &\leq C \left\| \frac{f}{\rho_1} \right\|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})},
\end{aligned}$$

alors

$$\left\| \frac{u}{\rho_0} \right\|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],U)} \leq C \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} . \tag{3.17}$$

D'après les résultats classiques pour le système paraboliques on a pour tout $k \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\| z \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \| z \|^2_{C^0([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \\
&\leq C\big(\| a_{k+1} \|^2_{\mathcal{H}} + \| u \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],U)} + \| f \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \big).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ainsi, d'après les relations (3.14) et (3.16) on a

$$\| z \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \| z \|^2_{C^0([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}$$

$$\leq C\big(C \| f \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} + K^2(T_{k+2}-T_{k+1}) C \| f \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} + \| f \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \big),$$

$$\begin{aligned}
&\| z \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \| z \|^2_{C^0([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \\
&\qquad \leq \frac{\rho_0^2(T_{k+2})}{\rho_1^2(T_{k+1})} C \| f \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})},
\end{aligned}$$

$$\| z \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \| z \|^2_{C^0([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \leq \rho_0^2(T_{k+2}) C \left\| \frac{f}{\rho_1} \right\|^2_{L^2([T_k,T_{k+1}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})},$$

alors

$$\begin{aligned}
&\| z \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \| z \|^2_{C^0([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \\
&\qquad \leq \rho_0^2(T_{k+2}) C \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Puisque ρ_0 est décroissante, alors on a

$$\left\| \frac{z}{\rho_0} \right\|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \left\| \frac{z}{\rho_0} \right\|^2_{C^0([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H})} + \left\| \frac{\dot{z}}{\rho_0} \right\|^2_{L^2([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \leq C \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})},$$

donc

$$\| z \|^2_{L^2_{\rho_0}([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \left\| \frac{z}{\rho_0} \right\|^2_{C^0([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2_{\rho_0}([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \leq C \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([T_{k+1},T_{k+2}],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} . \tag{3.20}$$

Une estimation similaire est valable pour tout (T_0, T_1), donc on a

$$\| z \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \left\| \frac{z}{\rho_0} \right\|^2_{C^0([0,T],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} \leq C \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})},$$

alors

$$\| z \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \left\| \frac{z}{\rho_0} \right\|^2_{C^0([0,T],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} + \| u \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],U)}$$
$$\leq C \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})} + C \| z_0 \|^2_{\mathcal{H}},$$

d'où la relation (3.10) :

$$\| z \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}_{\frac{1}{2}})} + \left\| \frac{z}{\rho_0} \right\|^2_{C^0([0,T],\mathcal{H})} + \| \dot{z} \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],U)} + \| u \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],U)}$$
$$\leq C\big(\| z_0 \|^2_{\mathcal{H}} + \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})}\big).$$

□

3.1.3 La méthode des perturbations

Dans cette partie, nous rappelons certains résultats afin de déduire l'observabilité de

$$\begin{cases} \ddot{w} = -Aw + \lambda A^{\frac{1}{2}} w, \\ y = C_0 w, \\ w(0) = w_0, \dot{w} = w_1, \end{cases} \tag{3.21}$$

et l'observabilité de

$$\begin{cases} \ddot{w} = -Aw, \\ y = C_0 w, \\ w(0) = w_0, \dot{w}(0) = w_1. \end{cases} \tag{3.22}$$

considérons un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur auto-adjoint

$$A : \mathcal{D}\,(A) \subset L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1), \text{ strictement positif.}$$

On suppose également que A^{-1} est strictement positif et de plus compact. Nous définissons la racine carré de A par $A^{\frac{1}{2}}$. On considère également un espace de Hilbert U et $B_0 \in \mathcal{L}(U, \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})')$ un opérateur admissible. On désigne par $\sigma_n, n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs propres de A. Elles sont réelles positives et on désigne par σ_1, la plus petite. On obtient le résultat suivant.

Théorème 15. *([2]) Supposons que le système (3.22) soit observable et $\lambda < \sqrt{\sigma_1}$. Alors le système (3.21) est observable ([2], proposition 3.1).*

3.2 Contrôlabilité

On utilise maintenant le résultat de la section précédente pour obtenir la contrôlabilité à zéro de l'équation de K-S.

3.2.1 Cadre abstrait

Nous commençons par introduire des opérateurs afin de réécrire le système (3.1). On défini

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ y \in H^4(0,1) : y = y_x = 0 \quad dans \ \{0,1\} \right\}, \tag{3.23}$$

$$A : \mathcal{D}\,(A) \longmapsto L^2(0,1), \quad y \longmapsto -y_{xxxx} - \lambda y_{xx}, \tag{3.24}$$

où A est un opérateur auto-adjoint et $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe parabolique $(e^{-tA})_{t\geqslant 0}$. Dans ce qui suit, on considère $\sigma_\# \in \rho(A)$ tel que $A_\# := \sigma_\# + A$ soit positif et on fixe

$$\mathcal{H}^s := \mathcal{D}(A^{\frac{s}{4}}), \quad \mathcal{H}^{-s} := \mathcal{D}(A^{\frac{s}{4}})', \quad (s \geqslant 0) \tag{3.25}$$

où $\mathcal{H}^{-s}$ désigne le dual de $\mathcal{H}^s$ par rapport à l'espace $L^2(0,1)$. On peut considérer A comme un opérateur défini par

$$A : \mathcal{H}^{s+4} \longrightarrow \mathcal{H}^s, \quad (s \in \mathbb{R}).$$

En particulier

$$A_\# : \mathcal{H}^{s+4} \longrightarrow \mathcal{H}^s, \quad (s \in \mathbb{R}),$$

est une transformation unitaire. Afin, d'obtenir une formulation faible du système (3.1) on multiplie formellement la première équation de (3.1) par une fonction test $q \in \mathcal{H}^4$ pour tout $(t,x) \in (0,T)\times(0,1)$:

$$y_t q + y_{xxxx} q + \lambda y_{xx} q + y y_x q = 0.$$

Faisons une intégration par partie sur $(0,T)\times(0,1)$,

$$\int_0^T \int_0^1 (y_t q + y_{xxxx} q + \lambda y_{xx} q + y y_x q)\ dxdt = 0.$$

On a

$$\frac{d}{dt}(yq) = y_t q + y q_t, \implies y_t q = \frac{d}{dt}(yq) - y q_t,$$

alors

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dxdt - \int_0^T \int_0^1 y q_t\ dxdt + \lambda \int_0^T \int_0^1 y_{xx} q\ dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^1 y_{xxxx} q\ dxdt + \int_0^T \int_0^1 y y_x q\ dxdt = 0,$$

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dxdt - \int_0^T\int_0^1 yq_t\ dxdt + \lambda\int_0^T\Big([y_xq]_0^1 - \int_0^1 y_xq_xdx\Big)dt$$
$$+\int_0^T\Big([y_{xxx}q]_0^1 - \int_0^1 y_{xxx}q_xdx\Big)dt + \int_0^T\Big(\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2}q_xdx\Big)dt = 0,$$

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dxdt - \int_0^T\int_0^1 yq_t\ dxdt - \lambda\int_0^T\int_0^1 y_xq_x\ dxdt$$
$$-\int_0^T\int_0^1 y_{xxx}q_x\ dxdt - \int_0^T\int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dxdt = 0,$$

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dxdt - \int_0^T\int_0^1 yq_t\ dxdt + \lambda\int_0^T\int_0^1 yq_{xx}\ dxdt$$
$$+\int_0^T\Big([y_xq_{xx}]_0^1 - \int_0^1 y_xq_{xxx}dx\Big)dt - \int_0^T\int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dxdt = 0,$$

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dxdt - \int_0^T\int_0^1 yq_t\ dxdt + \lambda\int_0^T\int_0^1 y_xq_x\ dxdt + \int_0^T(-u(t))q_{xx}(t,0)dt$$
$$-\int_0^T\int_0^1 y_{xxx}q_x\ dxdt - \int_0^T\int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dxdt = 0,$$

$$\int_0^T\left(\int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dx - \int_0^1 yq_t\ dx + \lambda\int_0^1 yq_{xx}\ dx - u(t)q_{xx}(t,0) + \int_0^1 yq_{xxxx}\ dx - \int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dx\right)dt = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dx + \int_0^1 y(-q_t + q_{xxxx} + \lambda q_{xx})\ dx - \int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dx - u(t)q_{xx}(t,0) = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(yq)\ dx + \int_0^1 yAq\ dx - \int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dx - u(t)q_{xx}(t,0) = 0,$$

donc

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 yq\ dx + \int_0^1 yAq\ dx - \int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dx = u(t)q_{xx}(t,0). \tag{3.26}$$

Afin d'écrire l'opérateur de contrôle correspondant, nous utilisons une approche classique et définissons l'opérateur $D : U = \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}^1 = H_0^1(0,1)$ comme suite : $Du = y$ est la solution du système

$$\begin{cases} \sigma_{\#} y + (y_{xxxx} + \lambda y_{xx}) = 0, \\ y(0) = y(1) = 0, \\ y_x(0) = u, \quad y_x(1) = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Plus précisément, $Du = y$ est l'unique élément de $\mathcal{H}^1 = H_0^1(0,1)$ tel que

$$\langle Du, f\rangle_{\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1}} = u(A^{-1}f)_{xx}(0). \tag{3.28}$$

Puisque $A_{\#}^{-1}(\mathcal{H}^{-1}) = \mathcal{H}^3 \subset H^3(0,1)$, Du est bien définie et $D \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H}^{-1})$. On définit alors l'opérateur B par

$$B := A_{\#} D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}^{-3}. \tag{3.29}$$

Soit $q \in \mathcal{H}^3$ et $u \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\langle Bu, q\rangle_{\mathcal{H}^{-3},\mathcal{H}^3} = uq_{xx}(0).$$

Enfin, on définit $F : L^2(0,1) \longrightarrow \mathcal{H}^{-2}$ par

$$\langle F(y), q\rangle_{\mathcal{H}^{-2},\mathcal{H}^2} := -\int_0^1 \frac{y^2}{2} q_x \, dx, \quad (q \in \mathcal{H}^2). \tag{3.30}$$

La fonction F est bien définie puisque $H^1(0,1) \subset L^\infty(0,1)$. D'après la définition si-dessus nous écrivons la relation (3.26) sous la forme :

$$\langle y_t, q\rangle + \langle yA, q\rangle + \langle F(y), q\rangle = \langle Bu, q\rangle,$$

$$\langle y_t + yA + F(y) - Bu, q\rangle = 0,$$

alors

$$y_t + yA + F(y) - Bu = 0. \tag{3.31}$$

Et si $u \in L^2(0,T)$, nous considérons des solutions satisfaisant la régularité suivante

$$y \in H^1\big([0,T], \mathcal{H}^{-3}\big) \cap L^2\big([0,T], \mathcal{H}^1\big) \cap C\big([0,T], \mathcal{H}^{-1}\big). \tag{3.32}$$

Notons que si y satisfait la relation (3.32), alors

$$y \in L^4\big([0,T], L^2(0,1)\big),$$

et en particulier $F(y) \in L^2\big([0,T], \mathcal{H}^{-2}\big)$.

Théorème 16. *Supposons que $\lambda \notin \mathcal{N}$. Pour tout $y_0 \in \mathcal{H}^{-1}$, il existe $u \in L^2(0,T)$ tel que $y(T) = 0$. De plus, il existe un opérateur $L_T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{-1}, \mathbb{R})$ tel que u peut être donné par $u = L_T(y)$. On a*

$$\| L_T \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{-1},\mathbb{R})} \leq K(T),$$

avec

$$K(T) := Ce^{\frac{M}{T}},$$

où M et T sont deux constantes positives.

3.2.2 Preuve du théorème 3

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 3. Nous rappelons l'opérateur de rétroaction K satisfait à la relation (3.6), c'est-à-dire

$$K(T) = Ce^{\frac{M}{T}}.$$

On prend

$$q \in (1, 2^{\frac{1}{4}}),\ \alpha > \frac{MT}{2(q-1)} q^4, \tag{3.33}$$

et

$$\rho_1(t) = exp(-\frac{\alpha}{(T-t)^2}). \tag{3.34}$$

On définit ρ_0 comme suite

$$\rho_0(t) = exp\Big(-\frac{\alpha}{q^4(T-t)^2} + \frac{M}{(q-1)(T-t)}\Big),\ (t \in [0,T]). \tag{3.35}$$

En particulier, d'après (3.33), ρ_0 est continue et décroissante et satisfait la relation (3.11). Ainsi, nous avons

$$\left|\frac{\rho_0^2}{\rho_1}\right| \leqslant C. \tag{3.36}$$

Démonstration. En appliquant le Théorème 14 et le Théorème 16, on en déduit que pour tout $y_0 \in \mathcal{H}^{-1}$ et $f \in L^2_{\rho_1}([0,T], \mathcal{H}^{-3})$, il existe $u \in L^2_{\rho_0}([0,T], U)$ tel que la solution de

$$\begin{cases} y_t + y_{xxxx} + \lambda y_{xx} = f, & (t,x) \in (0,T)\times(0,1) \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,1) = 0, \\ y_x(t,0) = u(t), \quad y_x(t,1) = 0, \\ y(0,x) = y_0(x), \end{cases} \tag{3.37}$$

satisfait

$$\begin{aligned} \| y \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^1)} + \left\| \frac{y}{\rho_0} \right\|^2_{C^0([0,T],\mathcal{H}^{-1})} + \| y_t \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^{-3})} + \| u \|^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],U)} \\ \leq C\big(\| y_0 \|^2_{\mathcal{H}^{-1}} + \| f \|^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})}\big). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Considérons maintenant la fonction

$$Z : f \in L^2_{\rho_1}([0,T], \mathcal{H}^{-3}) \longmapsto -F(y) \in L^2_{\rho_1}([0,T], \mathcal{H}^{-3})$$

où (y,u) est la solution de (3.37) et F est définie par (3.30). On voit que Z est bien définie et supposons qu'il existe $R > 0$ tel que

$$Z(B(0,R)) \subset B(0,R),$$

où $B(0,R)$ est la boule fermée de $L^2_{\rho_1}([0,T]\,,\mathcal{H}^{-3})$ de rayon $R>0$. En utilisant la relation (3.30), on a

$$\begin{aligned}\langle F(y),q\rangle_{\mathcal{H}^{-2},\mathcal{H}^2} &= -\int_0^1 \frac{y^2}{2}q_x\ dx = -\langle F(y),q_x\rangle_{\mathcal{H}^{-2},\mathcal{H}^2}\\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\frac{y^2}{2})q\ dx = \int_0^1 yq\ dx,\quad (q\in\mathcal{H}^2)\end{aligned}$$

où $F(y)=y$. Alors

$$\langle F(y),F(y)\rangle_{\mathcal{H}^{-2},\mathcal{H}^2} = -\int_0^1 y^2\ dx,$$

donc il existe $C>0$ telle que

$$\parallel F(y)\parallel_{\mathcal{H}^{-2}}\leqslant C\parallel y\parallel_{\mathcal{H}^1}\parallel y\parallel_{\mathcal{H}^{-1}}.$$

Par conséquent, d'après (3.36) et (3.38) on a

$$\begin{aligned}\parallel F(y)\parallel_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^{-2})} &\leqslant C\parallel y\parallel_{\mathcal{H}^1}\parallel y\parallel_{\mathcal{H}^{-1}}\\ &\leqslant C\big(\parallel y_0\parallel_{\mathcal{H}^{-1}} + \parallel f\parallel^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})}\big).\end{aligned}$$

Supposons que $\parallel y_0\parallel_{\mathcal{H}^{-1}}< R$, et prenons $\parallel f\parallel^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})}\leqslant R$, alors

$$\parallel F(y)\parallel_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^{-2})}\leqslant C(R^2+R^2)=2CR^2.$$

Supposons que

$$R=\frac{1}{4C}, \tag{3.39}$$

alors on a

$$\parallel F(y)\parallel_{\mathcal{H}^{-2}}\leqslant C(R^2+R^2)=2CR^2\leqslant R.$$

On montre ensuite que Z est une contraction de $B(0,1)$.
Soit $f^{(1)},f^{(2)}\in B(0,1)$ et considérons les solutions et les contrôles suivants $(y^{(1)},u^{(1)})$ et $(y^{(2)},u^{(2)})$, et posons

$$f=f^{(1)}-f^{(2)},\ y=y^{(1)}-y^{(2)}\ \ et\ u=u^{(1)}-u^{(2)}.$$

Nous avons

$$\parallel y\parallel^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^1)} + \left\|\frac{y}{\rho_0}\right\|^2_{C^0([0,T],\mathcal{H}^{-1})} + \parallel y_t\parallel^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^{-3})} + \parallel u\parallel^2_{L^2_{\rho_0}([0,T],U)}\leq C\parallel f\parallel^2_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})}. \tag{3.40}$$

D'après la relation (3.30), on a

$$\begin{aligned}\big\langle F(y^{(1)}),F(y^{(1)})\big\rangle - \big\langle F(y^{(2)}),F(y^{(2)})\big\rangle &= \big\langle F(y^{(1)})-F(y^{(2)}),F(y^{(1)})-F(y^{(2)})\big\rangle\\ &= \int_0^1 (y^{(1)}-y^{(2)})^2\ dx\\ &\leqslant \int_0^1 (y^{(1)})^2\ dx + \int_0^1 (y^{(2)})^2\ dx.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\| F(y^{(1)}) - F(y^{(2)}) \|_{\mathcal{H}^{-2}} &\leqslant \| F(y^{(1)}) \|_{\mathcal{H}^{-2}} + \| F(y^{(2)}) \|_{\mathcal{H}^{-2}} \\
&\leqslant C \| y^{(1)} \|_{\mathcal{H}^{1}} \| y^{(1)} \|_{\mathcal{H}^{-1}} + C \| y^{(2)} \|_{\mathcal{H}^{1}} \| y^{(2)} \|_{\mathcal{H}^{-1}} \\
&\leqslant C \Big(\| y^{(1)} \|_{\mathcal{H}^{1}} \| y \|_{\mathcal{H}^{-1}} + \| y^{(2)} \|_{\mathcal{H}^{1}} \| y \|_{\mathcal{H}^{-1}} \Big) \\
&\leqslant C \Big(\| y^{(1)} \|_{\mathcal{H}^{1}} + \| y^{(2)} \|_{\mathcal{H}^{1}} \Big) \| y \|_{\mathcal{H}^{-1}} .
\end{aligned}$$

Ainsi, en combinant (3.38) et (3.40) on obtient

$$\begin{aligned}
\| F(y^{(1)}) - F(y^{(2)}) \|_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^{-2})} &\leq 2CR \| f \|_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})} \\
&\leq 2CR \| y^{(1)} y^{(1)}_x - y^{(2)} y^{(2)}_x \|_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})} \\
&\leq 2CR \| \big(y^{(1)}\big)^2 - \big(y^{(2)}\big)^2 \|_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})} \\
&\leq 2CR \| y^{(1)} + y^{(2)} \|_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})} \| y^{(1)} - y^{(2)} \|_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})} \\
&\leq 4CR^2 \| y^{(1)} - y^{(2)} \|_{L^2_{\rho_1}([0,T],\mathcal{H}^{-3})},
\end{aligned}$$

donc

$$\| F(y^{(1)}) - F(y^{(2)}) \|_{L^2\rho_0([0,T],\mathcal{H}^{-2})} \leq 4CR^2 \| y^{(1)} - y^{(2)} \|_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^{-2})} .$$

Alors d'après la relation (3.39) on a

$$\| F(y^{(1)}) - F(y^{(2)}) \|_{L^2\rho_0([0,T],\mathcal{H}^{-2})} \leq \frac{1}{4C} \| y^{(1)} - y^{(2)} \|_{L^2_{\rho_0}([0,T],\mathcal{H}^{-2})},$$

d'où Z est une contraction de $B(0,1)$. $\square$

Conclusion et perspectives

Après avoir défini quelques notions de bases et rappelé leurs propriétés, nous avons étudié la contrôlabilité de K-S sur un intervalle borné. Tout d'abord, pour le cas linéaire on a pu montrer que le système est contrôlable à zéro. Ceci est fait en utilisant l'analyse spectrale et la méthode des moments. De plus, on a utilisé une méthode d'algèbre linéaire, appelée condition de Kalman, pour montrer que le système linéaire autonome est contrôlable. Ainsi, la méthode de placement de pôle nous a permis de montrer que ce système est stabilisable. Et dans le cas non-linéaire, nous avons montré que le système est contrôlable localement à zéro en utilisant quelques résultats généraux notamment la méthode de Rusell et la méthode du terme source.

Bien que l'étude de cette équation ait été approfondie, il reste encore quelques perspectives non résolues qui méritent davantage de recherches. Voici quelques-unes de ces perspectives :

Tout d'abord, il serait intéressant d'étudier la contrôlabilité globale de l'équation de K-S en utilisant des techniques différentes ou en combinant les approches existantes. Mais aussi, il serait intéressant de faire l'étude dans le cas où $\lambda \in \mathcal{N}$. Ensuite, cette étude pourrait inclure :

① Extension à des dimensions supérieures : l'étude a été principalement axé sur l'équation de Kuramoto-Sivashinsky unidimensionnelle. Une perspective intéressante consisterait à étendre cette étude à des dimensions supérieures, ce qui permettrait de modéliser des phénomènes plus complexes et réalistes, par exemple l'instabilité de flamme (modéliser les instabilités de flamme dans les systèmes de combustion).

② Des fronts d'ondes : l'étude de la propagation des fronts d'ondes dans l'équation de Kuramoto-Sivashinsky est un domaine de recherche actif. Il reste encore à comprendre comment les fronts se forment, se propagent et interagissent avec d'autres structures dans le système.

③ Méthodes numériques : bien que de nombreuses avancées aient été réalisées dans la résolution numérique de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky, il existe encore des défis à relever, notamment en ce qui concerne la stabilité, la précision et le coût computationnel des méthodes existantes.

④ Applications pratiques : l'équation de Kuramoto-Sivashinsky est utilisée pour modéliser un large éventail de phénomènes physiques et biologiques, tels que la combustion, l'écoulement de fluides complexes et la croissance de cristaux. Il reste encore à explorer les

implications et les applications pratiques de cette équation dans ces domaines.
En somme, l'équation de Kuramoto-Sivashinsky offre de nombreuses possibilités d'étude et de recherche dans différents domaines de la physique et des mathématiques. Sa complexité et sa richesse permettent de mieux comprendre les phénomènes dynamiques dans des systèmes variés.

Bibliographie

[1] S. Micu and E. Zuazua, *An introduction to the controllability of linear PDE, in "Contrôle Non linéaire et Applications,"*. Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, (2005), 67–150.

[2] Nicolae Cindea and Marius Tucsnak, *Local exact controllability for Berger plate equation.* Math. Control Signals Systems, 21(2) :93–110, 2009.

[3] Yuning Liu, Takéo Takahashi, and Tucsnak Marius, *Single input controllability of a simplified fluid-structure interaction model.* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2013.

[4] David L. Russell, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations.* Studies in Appl. Math., 52 :189–211, 1973.

[5] H. K. Khalil, *"Nonlinear Systems,"* Macmillan, New York, 1992.

[6] Y.-J. Lin Guo, *Null boundary controllability for a fourth order parabolic equation*, Taiwanese J. of Mathematics, 6 (2002), 421–431.

[7] P. D. Christofides and A. Armaou, *Global stabilization of the Kuramoto-Sivashinsky equation via distributed output feedback control*, Systems Control Lett., 39 (2000), 283–294.

[8] A. Armaou and P. D. Christofides, *Feedback control of the Kuramoto-Sivashinsky equation*, Phys. D, 137 (2000), 49–61.

[9] W.-J. Liu and M. Krstić, *Stability enhancement by boundary control in the Kuramoto-Sivashinsky equation*, Nonlinear Anal. Ser. A : Theory Methods, 43 (2001), 485–507.

[10] Kuramoto, Yoshiki (1978), *"Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems"*. Progress of Theoretical Physics Supplement. 64 : 346–367.

[11] Sivashinsky, G.I. (1977), *"Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—I. Derivation of basic equations"*. Acta Astronautica. 4 (11–12).

[12] Sivashinsky, G. I. (1980), *"On Flame Propagation Under Conditions of Stoichiometry"*. SIAM Journal on Applied Mathematics. 39 (1) : 67–82.

[13] Takéo Takahashi, *Boundary Local Null Controllability of the Kuramoto-Sivashinsky equation.* 2 (2017).

[14] Marius Tucsnak and George Weiss, *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[15] H. O. Fattorini and D. L. Russell, *Exact controllability theorems for linear parabolic equation in one space dimension*, Arch. Rat. Mech. Anal., 43 (1971), 272–292.

[16] Eduardo Sontag, *Mathematical control theory*, second ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 6, Springer-Verlag, New York, 1998, Deterministic finite-dimensional systems. MR 1640001 (99k :93001).

[17] Jean-Michel Coron, *Control and Nonlinearity*. Mathematical Surveys and Monographs Volume 136.

[18] R. E. Kalman, *On the general theory of control systems*. Proceedings of the 1st IFAC Congress Automatic Control, 1(1960), 481-492.

[19] R. E. Kalman, *Contributions to the theory of optimal control*. Boletin De La Sociedad Matematica Mexicana, 5(1960), 102–119.

[20] Homsy, G. M. (1974), *Model equations for wavy viscous film flow*. Lect. Appl. Math, 15(191-194), 19.

[21] Nepomnyashchii, A. A. (1974), *Stability of wavy conditions in a film flowing down an inclined plane*. Fluid Dynamics, 9(3), 354-359.

[22] . LaQuey, R. E., Mahajan, S. M., Rutherford, P. H., Tang, W. M. (1975), *Nonlinear saturation of the trapped-ion mode*. Physical Review Letters, 34(7), 391.

[23] Pathak, Jaideep ; Hunt, Brian ; Girvan, Michelle ; Lu, Zhixin ; Ott, Edward (2018), *"Model-Free Prediction of Large Spatiotemporally Chaotic Systems from Data : A Reservoir Computing Approach"*. Physical Review Letters. 120 (2) : 024102.

[24] Vlachas, P.R. ; Pathak, J. ; Hunt, B.R. ; Sapsis, T.P. ; Girvan, M. ; Ott, E. ; Koumoutsakos, P. (2020-03-21), *"Backpropagation algorithms and Reservoir Computing in Recurrent Neural Networks for the forecasting of complex spatiotemporal dynamics"*. Neural Networks. 126 : 191–217.

[25] Eduardo Cerpa, *Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain*. SIAM J. Control Optim., 46(3) :877–899 (electronic), 2007.

[26] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau, *Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 26(2) :457–475, 2009.

[27] Eduardo Cerpa, *Null controllability and stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation*. Commun. Pure Appl. Anal., 9(1) :91–102, 2010.

[28] Eduardo Cerpa, Patricio Guzmán, and Alberto Mercado, *On the control of the linear kuramoto-sivashinsky equation*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., to appear.

[29] Eduardo Cerpa and Alberto Mercado, *Local exact controllability to the trajectories of the 1-D Kuramoto-Sivashinsky equation*. J. Differential Equations, 250(4) :2024–2044, 2011.

[30] D. Smart, *Fixed point theorems*, cambridge uni. Press., Cambridge, 1980.

[31] T. GALLAY, *Théorie de la mesure et de l'intégration.*

[32] Emmanuel Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications.*

[33] Guillaume AUBRUN, *Théorie des opérateurs.*