UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Analyse et Géométrie Complexe

Thème : Le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur le Polydisque

Présenté par : **Ibrahima THIAM**

Sous la direction de **Dr Souhaibou SAMBOU** et de **Dr Papa BADIANE**

Sous la supervision du : **Pr Marie Salomon SAMBOU**

Soutenu publiquement le 03 Février devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président	UASZ
Mansour SANE	Maitre Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Mamadou Eramane BODIAN	Maitre Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Souhaibou SAMBOU	Maître de Conférences Assimilé	Directeur	UGB
Papa BADIANE	Chercheur	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2023-2024

Remerciements

Si j'ai l'opportunité aujourd'hui de finaliser et de soumettre ce travail scientifique, c'est un devoir pour moi de rendre hommage au Tout-Puissant, le Très Miséricordieux, qui a su m'accorder le courage, la force, la persévérance et la patience nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

Mes remerciements s'adressent particulièrement à ceux et celles dont le soutien m'a été précieux et sans lesquels cet accomplissement n'aurait pas été possible :

à mon directeur de recherche, Dr Souhaibou SAMBOU et à mon co-encadrant, Dr Papa BADIANE, je tiens à exprimer ma profonde gratitude pour votre encadrement et votre soutien tout au long de ce mémoire. Vos expertises, vos conseils avisés et vos retours constructifs ont été d'une aide précieuse dans l'approfondissement de mes recherches et la structuration de ce travail. Vous avez su créer un environnement de travail stimulant, tout en restant constamment disponibles pour répondre à mes questions et apaiser mes doutes. Vos encouragements constants, votre rigueur académique et vos suggestions pertinentes m'ont permis de surmonter les défis de ce projet avec confiance, tout en enrichissant ma compréhension du sujet. Votre patience, votre dévouement et votre engagement ont non seulement contribué à la qualité de ce mémoire, mais ont également été une source d'inspiration tout au long de ce parcours. Je vous remercie profondément pour avoir été des piliers indispensables dans la réussite de ce projet.

Au Pr. Marie Salomon SAMBOU, qui m'a enseigné la Topologie et l'Analyse Complexe en Licence 3, ainsi que l'Analyse Complexe en Master 1 et 2. En tant que superviseur de mon mémoire, il a apporté des observations précieuses et un regard critique qui ont enrichi la qualité de ce travail. Son expertise et son dévouement ont été d'un grand soutien tout au long de ce parcours.

À tous les membres du jury qui ont bien voulu consacrer leur temps à examiner et apprécier notre travail. Vos remarques et suggestions ont été extrêmement utiles pour perfectionner ce travail. Merci encore pour votre soutien et pour avoir contribué à la qualité et à la rigueur de cette recherche.

Au corps professoral et administratif de l'université de Assane Seck de Ziguinchor pour le travail énorme qu'il effectue pour nous créer les conditions les plus favorables pour le déroulement de nos études.

À tous les professeurs du département de mathématiques qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenus dans la poursuite de nos études. Votre expertise, votre passion pour la discipline et votre engagement envers l'enseignement ont été essentiels tout au long de ma formation. Grâce à vos cours stimulants et vos conseils avisés, j'ai pu approfondir mes connaissances et développer une réelle appréciation pour les mathématiques. Merci pour votre soutien constant et votre dévouement.

À mes parents pour leur soutien sans faille tout au long de ma formation. Sans votre appui, je n'aurais pas pu poursuivre mes études et atteindre ce stade. Votre soutien économique a permis de surmonter les défis financiers, tandis que votre encouragement moral a été une source constante de motivation et de réconfort. Sur le plan physique, vous avez toujours veillé à mon bien-être, me permettant de me concentrer pleinement sur mes études. Merci du fond du cœur pour votre amour, vos sacrifices et votre dévouement. Vous avez été une véritable source de force et de stabilité tout au long de ce parcours.

À mon guide religieux Serigne Cheikh Saye MBACKE, qu'Allah lui accorde une longue vie et une santé de fer ainsi que toute sa famille.

À Serigne Alioune Badara DIENG, le responsable pédagogique de l'U.F.R sciences et technologies, Il a toujours été présent pour me guider, m'encourager et m'apporter son aide dans les moments cruciaux de mon parcours académique. Sa bienveillance, sa disponibilité et son engagement en faveur des étudiants m'ont été d'un grand soutien tout au long de mon travail.

À Dr Seny DIATTA pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

À l'ensemble de mes enseignants, depuis l'école élémentaire jusqu'au lycée particulièrement, Ngagne FALL, Ousmane NDOYE, Ibrahima FALL, Pape Ousmane THIAW, Aminata TINE (Mme Faye SVT). Grâce à votre dévouement et à votre passion pour l'enseignement, vous m'avez transmis des connaissances précieuses et m'avez guidé tout au long de mon parcours scolaire. Vous avez joué un rôle clé dans mon développement personnel et académique, et je vous en suis profondément reconnaissant.

À tous mes camarades de promotion de master de maths appliquées et maths pures de l'Université Assane Seck de Ziguinchor. Votre soutien, vos échanges enrichissants et votre camaraderie ont été des éléments essentiels tout au long de ce parcours. Les discussions stimulantes, les moments partagés et l'entraide mutuelle ont grandement contribué à la réussite de ce mémoire. Merci à chacun d'entre vous pour votre engagement et pour avoir rendu cette expérience universitaire inoubliable.

À mes maman de cœur Amy TOURE, Ramata TRAORÉ, Mbène SAKHO, qui ont su remplir le rôle d'une maman depuis la perte de ma mère biologique il y a quatre ans. Leur amour, leur présence et leur soutien ont été un réconfort immense et une source de force tout au long de mon parcours. Elles ont su être là dans les moments de joie comme dans les périodes difficiles, m'offrant un soutien indéfectible qui m'a permis de continuer à avancer.

À mes grandes sœur de sang je veux nommer Daba THIAM, Ndeye THIAM, Bintou THIAM, Nogaye DIONGUE, Fatou THIAM, Maguette THIAM, Mame Diarra THIAM, Ndeye Sokhna GUEYE, Sokhna GUEYE (Ndioba) pour leur soutien inestimable tout au long de mes études. Votre présence constante, vos encouragements et votre aide précieuse ont été des piliers essentiels dans mon parcours académique. Merci pour votre amour, votre compréhension et votre dévouement, qui ont grandement contribué à la réussite de ce travail.

À mes plus que sœurs, Seynabou KASSE, Sokhna Mouhsinatou THIAW, Awa NGOM, Fatima GNING, Yacine SY, Soce SAKHO, Arame GUEYE, Thérèse Bindou NGOM, Adja Mariama ASSEF, Astou MBOW, Khadidiatou Mathie THIAW, Fatou DIOP pour leurs amours inconditionnels. Vous avez été des alliées exceptionnelles et des soutiens inestimables tout au long de ce parcours.

À mes alter ego Abdou Khafar NDIAYE, Cheikh DIOUF, Cheikh Alioune SECK, Abdou FALL, Pape Mor GUEYE, Jean Saloum THIAW, Thierno NDIME, Serigne Massamba DIENG, Serigne Mbaye THIAM, Serigne Fallou Diagne(Mbour), Mouhamed NIANG, Serigne Mor DIENG, Serigne Barra DIONGUE, Mouhamed MBAYE ces esprits complices qui ont su m'accompagner avec bienveillance tout au long de ce chemin. Leur soutien moral, leurs conseils éclairés et leur capacité à toujours trouver les mots justes ont été essentiels pour surmonter les défis rencontrés. À travers nos échanges et nos réflexions communes, ils ont enrichi ce travail d'une manière que je ne saurais assez exprimer. Merci pour les idées partagées, les discussions enrichissantes et le soutien indéfectible.

À mes frères de sang, Coumba Ndoffene THIAM, Ousmane THIAM, Salif THIAM, Assane Diagne THIAM, Issa SAKHO, Ousmane Gueye, Cheikh Tidiane NIANG, El Hadji DIONGUE, pour leurs présences, leur soutien leurs conseils, leurs encouragements tout au long de mon cursus et leurs compréhensions ont été essentiels pour moi. Merci à chacun d'entre vous pour avoir été une source précieuse de motivation et de réconfort.

À Cheikh DIEDHIOU, une personne exceptionnelle qui m'a toujours soutenu dans tous les aspects de la vie universitaire. Merci pour ta bienveillance, ton aide précieuse et ta disponibilité constante, qui ont été une lumière pour moi dans mes moments d'incertitude.

À mes amis de longue date, Baye Moussa HANN, Abdou Seck DIOUM, Khadim HANN, Moussa HANN (Niochor), Modou GUEYE, Modou FALL, Chaikh Ibra FALL (Lamp), Pape FALL, Massamba DIOUF, Eumeu Dou Gueye DIONE, Mbissane MBOW, Fallou HANN, Fallou SOW, Bekaye GUEYE, Mama Assane DIOUF, Bara DIABAYE, Mbaye SOW. Vous avez été une véritable lumière dans mon parcours, toujours prêts à offrir votre soutien et votre amitié. Votre présence constante et vos encouragements ont été un réconfort essentiel, et je ne saurais exprimer à quel point je vous en suis reconnaissant.

À mes amis que j'ai eu le plaisir de connaître à l'université. Je veux nommer Talhaitou DIALLO, Mame Cheikh Ibrahima Fall DIAGNE, Ibrahima DIALLO, Abdou Azil DIALLO, Birame THIAW, Serigne Fallou DIAGNE, Maïmouna DEME, Alif MBOW, Assane GUEYE, Makhary NIASS, Semou DIOUF (UGB), Aba GUEYE, Baye Mor MBAYE, Yahya DIALLO, Serigne Mbacké DIENE, Issa DIOUF, Marie FAYE, Dieynaba SAMB, Kollé DIOP, Sokhna Momy LOUKAR, Mame Diarra DIOP, Sokhna Mame Diarra Bousso GNINGUE, Sokhna Maimouna GAYE, Sokhna Diama GADIAGA, Rama DIAGNE, Awa GADIAGA, Fatou DIOP, Rougui LOME, Oumou Kalsoum SALL, Rokhaya DIOP, Amina DIOP, Assane SOW, Aissatou SOW, Sokhna Fatou THIAM. Votre camaraderie, vos encouragements, et votre soutien ont été essentiels pour moi durant ces années. Ensemble, nous avons partagé des moments de joie et surmonté des difficultés, et votre amitié a grandement enrichi mon expérience universitaire.

À mes amis du lycée de Bambey : Sérigne Modou Mamoune Mbacke Kane NDIAYE, Mouhamadou KA, Mor Khady GAYE, Moustapha FAYE. Merci pour votre soutien indéfectible, votre amitié sincère et les souvenirs inoubliables que nous avons partagés. Votre présence a été pour moi une source de motivation et de réconfort tout au long de mon parcours.

À mes adorables neveux et nièces, Pape FALL, Baye Modou FALL, Marie Odile Soda DIOP, Binta DIASSE, Célina Léonie DIOUSSÉ, vous êtes une véritable source de bonheur et d'inspiration dans ma vie. Vos rires, votre énergie et votre affection m'ont souvent donné la force et le courage nécessaires pour aller de l'avant.

À mes filles adorées : Sokhna Diarra THIAM, Mame Saye THIAM, Fatou THIAM, Sokhna FALL qui m'ont comblé de joie et d'encouragements à chaque étape. Votre affection a été un véritable moteur pour moi.

À mes élèves de terminale S2 du lycée de Bambey, que j'ai eu l'honneur d'accompagner en cours de renforcement en 2021, notamment Mame Anta LO, Ibrahima DIACK, Ndeye Penda DIOUF, Aissatou MBODJI, Mame Diarra MBACKE, Anta MBACKE, Ngone HANN, Ndeye Fatou SOW, Ndiolle BADIANE, Nogaye TOURE, Khady KASSE, Maimouna TOURE, Oumy Khairy LY, Ibra FALL, Moussa DIENG, Ciré HANN, El Hadji Mamadou THIAM, Saliou SECK pour l'année précieuse que nous avons partagée en 2021. Leur motivation, leur curiosité, et leur persévérance m'ont inspiré chaque jour. Après leur succès au BAC, ils m'ont offert la plus belle des surprises, un geste de gratitude qui restera gravé dans mon cœur. Leur reconnaissance a été pour moi un moment inoubliable, confirmant que l'enseignement est une aventure profondément humaine. Merci à chacun de vous pour ce cadeau du cœur, et pour m'avoir donné la joie de vous voir réussir et avancer.

À tous les membres de l'amicale des étudiants ressortissants de Bambey à Ziguinchor particulièrement Amy FALL, Rama NGOM, Boursso DIOUF, Fatou SOW, Anna Satou NGOM, Abdou GUEYE, Francis Elias Jérémie NDOUR, Mamour DIOUF, Adama DIOME, Ndongo FALL, Ramata NDIAYE, Djiril FAYE, Barthelemy FAYE. Votre engagement, votre esprit de solidarité et votre soutien continu ont été d'une importance capitale pour moi. En tant que membre fondateur de cette amicale et président de 2021 à 2024, j'ai eu l'honneur de travailler à vos côtés pour renforcer les liens entre nous et œuvrer à l'épanouissement de chacun. Je vous remercie pour la confiance que vous m'avez accordée et pour les moments inoubliables que nous avons partagés. Ensemble, nous avons construit une communauté forte et solidaire, et ce succès est avant tout le fruit de nos efforts collectifs.

À l'ensemble des membres du Collectif des Étudiants pour le Développement de Bambey (CEDB). Votre engagement pour le développement de notre commune et votre solidarité envers chaque étudiant sont une source d'inspiration. En travaillant avec vous, j'ai découvert la force du collectif, l'importance du partage et l'impact d'une communauté unie. Merci pour votre soutien, votre esprit d'équipe et pour les moments précieux que nous avons partagés. Ensemble, nous avons montré que l'union fait la force.

À l'ensemble des membres du Dahira Matlabul Fawzayni de l'UASZ votre dévouement, votre fraternité et votre accompagnement spirituel ont été pour moi des repères essentiels. Faire partie de cette noble structure a enrichi mon parcours universitaire, non seulement par les valeurs qui y sont prônées, mais aussi par les liens solides que nous avons tissés. Merci pour votre soutien constant et vos prières, qui ont été une lumière dans mon cheminement.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nous tenons à adresser nos sincères remerciements à toutes celles et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire par leurs conseils et leurs compétences. Votre aide précieuse a été fondamentale pour mener à bien ce travail, et nous vous en sommes profondément reconnaissants.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents :

À la mémoire de ma chère mère, `Fatou WADE`,
La vie m'a privé de toi bien trop tôt, alors que j'étais encore dans ma deuxième année universitaire, un moment où ton soutien, tes conseils et ton amour étaient plus que jamais essentiels. Depuis ce jour, l'absence de ta présence physique a laissé un vide profond, mais c'est aussi cette même absence qui m'a permis de découvrir la force de l'amour que tu m'as donné, et la profondeur de tes enseignements.

Maman, tu étais la première à croire en moi, à m'encourager dans chacun de mes projets et à me dire que je pouvais atteindre des sommets. Tu m'as montré la valeur de la patience, de l'humilité et du travail acharné. Aujourd'hui, en finissant ce mémoire, je sais que c'est à toi que je dois ma force intérieure. Même lorsque la maladie te frappait, tu n'as jamais cessé de me soutenir, dans tous les aspects de ma vie. Ton amour, ta force et ton soutien, même dans les moments les plus difficiles, ont été mes piliers.

Je me souviens de tous ces moments où, malgré la douleur qui te rongeait, tu me guidais, m'encourageais, et m'aidais à rester concentré sur mes études. Tu as toujours cru en moi, même lorsque je doutais de moi-même. Cette conviction, cette foi que tu avais en moi, m'a porté jusqu'ici, jusqu'à ce jour où je termine ce mémoire. Tu es la première à qui je le dédie, car sans toi, je ne serais pas la personne que je suis aujourd'hui. Il représente le fruit de ta sagesse, de ton sacrifice et de ton amour inébranlable. Même si tu n'es plus là pour le voir, sache que ta présence vit en moi à travers chaque ligne de ce travail.

Tu m'as appris à aimer, à persévérer malgré les difficultés et à rester fidèle à mes principes. Même si ma douleur reste vive, je continue à avancer, porté par ta mémoire, ton amour et ton exemple. Tu n'es pas partie, maman, tu vis en moi à chaque instant, et ce mémoire est ma manière de te rendre hommage.

Que ton âme repose en paix, là où tu veilles sur moi, et sache que je t'aime plus que jamais.

À mon très cher père `El Hadji Modou THIAM`
Dont l'amour, la sagesse et les sacrifices m'ont permis de poursuivre mes rêves et de réaliser ce travail aujourd'hui. Tu as été mon modèle, mon soutien et ma force dans chaque étape de ma vie. Par ton exemple, tu m'as appris que la réussite n'est pas le fruit du hasard, mais celui du travail acharné, de la discipline et de la foi. Ce mémoire est le reflet de tout ce que tu m'as transmis et de tout ce que tu continues de représenter pour moi. Je te dédie ce travail en signe de reconnaissance et d'amour éternel. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours eus pour toi. Je t'aime, papa, et j'implore le Tout-Puissant pour qu'il t'accorde une bonne santé, ainsi qu'une vie longue et heureuse. Ce modeste travail est le fruit de tous les sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

Résumé

Ce mémoire présente une étude détaillée du spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann noté $\Box_q$ sur un polydisque dans l'espace complexe $\mathbb{C}^n$. Nous procédons à un calcul explicite des valeurs propres de cet opérateur. L'analyse montre que le spectre se compose de valeurs propres discrètes, dont certaines valeurs, en particulier les plus petites, possèdent une multiplicité infinie. Nous mettons également en lumière l'influence des conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann sur la structure du spectre. Ce travail offre ainsi une compréhension approfondie de la relation entre la géométrie du polydisque et le comportement spectral de l'opérateur $\Box_q$, avec des applications majeures pour l'analyse complexe et les équations aux dérivées partielles.

Table des matières

Introduction générale

L'étude du spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann occupe une place centrale en analyse complexe, ainsi que dans l'étude des équations aux dérivées partielles sur des domaines complexes. Dans l'article de Siqi Fu [11] intitulé *"The Spectrum of the $\bar{\partial}$-Neumann Laplacian on the Polydisc"*, une analyse approfondie du spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann ($\square_q$) est réalisée spécifiquement sur un polydisque, c'est-à-dire le produit de disques dans l'espace $\mathbb{C}^n$. Notre travail repose principalement sur cet article, et nous cherchons à expliciter l'étude des propriétés spectrales de l'opérateur $\square_q$ dans ce cadre géométrique particulier.

Pour tout entier q compris entre 1 et $n-1$, le problème des valeurs propres du Laplacien $\overline{\partial}$-Neumann se réduit à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\square_q u = \lambda u$$

avec les conditions suivantes :

$$u \in Dom(\overline{\partial}^*_{q-1}),$$
$$\overline{\partial}_q u \in Dom(\overline{\partial}^*_q).$$

Ces conditions sur les domaines fonctionnels jouent un rôle essentiel dans la caractérisation des solutions. Par ailleurs, les conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann, imposées sur le bord du domaine, influencent fortement la nature du spectre. Plus précisément, ces conditions aux bords déterminent les propriétés des solutions aux équations différentielles associées, et leur rôle est central dans notre étude.

L'opérateur $\square_q$ représente une généralisation du Laplacien dans le cadre des opérateurs complexes, et l'analyse de son spectre fournit des informations cruciales sur la structure géométrique et analytique des solutions. Pour aborder cette question, nous allons appliquer la méthode de séparation des variables en coordonnées polaires, une technique particulièrement adaptée à la géométrie du polydisque. Cette méthode permet de décomposer le problème en deux équations différentielles ordinaires plus simples. Les fonctions de Bessel jouent un rôle crucial dans cette approche : en effet, lors de l'application de la méthode de séparation des variables, les solutions de l'équation différentielle radiale sont souvent exprimées en termes de fonctions de Bessel, qui permettent de résoudre les équations aux valeurs propres en coordonnées polaires.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

- **Dans le premier chapitre**, nous introduisons les nations de la géométrie différentielle et de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés tout au long de ce mémoire.
- **Dans le deuxième chapitre**, nous nous intéressons aux fonctions de Bessel de première et deuxième espèces. Nous résolvons l'équation de Bessel à l'aide de la méthode de Frobenius et explorons les propriétés fondamentales de ces fonctions, notamment les relations de récurrence et leur orthogonalité.
- **Dans le troisième chapitre**, nous allons appliquer les concepts développés dans les deux premiers chapitres pour résoudre l'équation $\square_q u = \lambda u$ sur le polydisque, en utilisant la méthode de séparation des variables. Nous discutons ensuite les résultats obtenus, notamment en ce qui concerne le spectre de l'opérateur $\square_q$ et l'impact des conditions aux bords de Dirichlet et Neumann.

Chapitre I

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous posons les bases théoriques nécessaires pour l'étude du spectre de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann sur le polydisque. Nous introduisons les concepts fondamentaux en géométrie différentielle et en analyse fonctionnelle qui seront utilisés tout au long de ce mémoire. Une compréhension approfondie de ces concepts est essentielle pour aborder les résultats spécifiques relatifs au Laplacien de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann dans les chapitres suivants.

I-1 Rappels de notions de géométrie différentielle

I-1-1 Notion de Variété différentiable

Les notions sont tirées de [9].

Définition I-1.1 *Une **variété topologique** de dimension n est un espace topologique séparé M qui est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, pour chaque point $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p et une application $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ telle que φ soit un homéomorphisme.*

Définition I-1.2 *Une **carte locale** sur sur une variété topologique M de dimension n est un couple (U,φ), où :*
- *U est un ouvert de M,*
- *$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Définition I-1.3 *Soient (U,φ) et (V,ψ) deux cartes locales sur une variété topologique M telles que $U \cap V \neq \emptyset$. L'application*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

*est un homéomorphisme appelé **fonction de transition** ou **changement de carte**.*

Exemple I-1.1 *Soit $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ muni de la topologie induite. Soient $N = \{(0,0,1)\}$ et $S = \{(0,0,-1)\}$ les deux pôles de la sphère.*

1. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi_N : S^2 \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \end{aligned}$$

est continue et bijective. De plus, son inverse

$$\varphi_N^{-1}(x',y') = \left(\frac{2x'}{1+x'^2+y'^2}, \frac{2y'}{1+x'^2+y'^2}, \frac{-1+x'^2+y'^2}{1+x'^2+y'^2}\right)$$

est également continue. Le couple (U_N,φ_N) constitue donc une carte de S^2.

2. *De manière similaire, l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_S : S^2 \setminus \{S\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right) \end{aligned}$$

est continue et bijective. Le couple (U_S,φ_S) *est aussi une carte de* S^2.
Les deux cartes (U_N,φ_N) *et* (U_S,φ_S) *se recouvrent, avec*

$$U_N \cap U_S = S^2 \setminus \{N,S\} \quad \text{et} \quad \varphi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \varphi_S(U_N \cap U_S).$$

La fonction de transition est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (x_1,x_2) &\mapsto (y_1,y_2) \end{aligned}$$

où

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

L'application $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ *est un homéomorphisme.*

Définition I-1.4 *Un* ***atlas de classe*** C^r $(r \geq 1)$ *sur une variété topologique* M *est un ensemble de cartes* $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *de* M *tel que, pour toute paire* $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ *et* (U_β,φ_β) *avec* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *les fonctions de transition*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^r.

Exemple I-1.2 *L'exemple I-1.1 donne un atlas pour la sphère* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ *avec deux cartes locales. Les cartes* φ_N *et* φ_S *couvrent toute la sphère, et la fonction de transition entre les deux cartes est un homéomorphisme. Donc,* $\{(U_N,\varphi_N),(U_S,\varphi_S)\}$ *forme un atlas pour* S^2.

Définition I-1.5 *Deux atlas* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *et* $\mathcal{B} = \{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ *sur une variété topologique* M *sont dits* C^r***-compatibles*** *si :*
- *Leur union* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A} \cup \{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ *forme un atlas de* M.
- *Toutes les fonctions de transition entre les cartes de* $\mathcal{A}$ *et celles de* $\mathcal{B}$ *sont de classe* C^r.

Remarque I-1.1 *On dit que* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont équivalents, noté* $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, *si et seulement si* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont* C^r*-compatibles*

Définition I-1.6 *Une* ***structure différentielle*** *de classe* C^r *sur une variété topologique* M *est une classe d'équivalence d'atlas* C^r*-compatibles sur* M.

Définition I-1.7 *Une* ***variété différentiable*** M *de dimension n et de classe* C^r *est un espace topologique séparable, réunion dénombrable de compacts, muni d'une structure différentielle de classe* C^r.

Exemple I-1.3 *La sphère* S^2, *telle que définie dans l'exemple I-1.1, est munie d'une structure différentielle dont l'atlas différentiel est donné par les cartes* (U_N,φ_N) *et* (U_S,φ_S).
Ainsi, $(S^2,\{(U_N,\varphi_N),(U_S,\varphi_S)\})$ *est une variété différentiable de dimension* 2.

Nous abordons à présent la notion d'espace tangent et cotangent.

Définition I-1.8 *[17] Soit M une variété différentiable de classe C^r de dimension n et $p \in M$. Une **courbe** tracée sur une variété différentiable de dimension n et de classe C^r (avec $r \geq 1$) est une application γ de classe C^r (avec $r \geq 1$), telle que pour tout $\epsilon > 0$*

$$\begin{aligned}\gamma :]-\epsilon,\epsilon[\subset \mathbb{R} &\to M\\ t &\mapsto \gamma(t) \quad \textit{avec} \quad \gamma(0) = p.\end{aligned}$$

On note par $C(M,\gamma)$ l'ensemble des courbes tracées sur M et passant par p, c'est-à-dire

$$C(M,\gamma) = \{\textit{courbe tracée sur } M \textit{ telle que } \gamma(0) = p\}.$$

Définition I-1.9 *Deux courbes γ_1 et γ_2 sont dites **tangentes au point** p si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ et s'il existe une carte locale (U,φ) telle que $p \in U$ et*

$$\frac{d}{dt}\left((\varphi \circ \gamma_1)(0)\right) = \frac{d}{dt}\left((\varphi \circ \gamma_2)(0)\right).$$

Remarque I-1.2 *La définition de la tangente des courbes dans une variété est indépendante de la carte choisie. En effet, si (V,ψ) est une autre carte locale autour de p, alors on a :*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left((\psi \circ \gamma_1)(0)\right) &= \frac{d}{dt}\left((\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)(0)\right)\\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})\frac{d}{dt}\left((\varphi \circ \gamma_1)(0)\right)\\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})\frac{d}{dt}\left((\varphi \circ \gamma_2)(0)\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left((\psi \circ \gamma_2)(0)\right),\end{aligned}$$

où $D(\psi \circ \varphi^{-1})$ est la dérivée de la fonction de transition $\psi \circ \varphi^{-1}$, qui représente le changement de coordonnées entre les deux cartes locales. La tangente d'une courbe est donc bien définie indépendamment de la carte choisie, et cette dérivée se comprend dans le cadre de la différentiation dans les variétés différentiables, pas comme la dérivée usuelle dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition I-1.1 (voir [17]) *Soient γ_1 et γ_2 deux courbes passant par p. Alors :*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \in \mathcal{A} \textit{ tel que } \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)\bigg|_{t=0},$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des cartes locales autour de p. Cette relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Définition I-1.10 (Vecteur tangent) *Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p.*
***L'espace tangent** à M en p, noté T_pM, est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p, défini par :*

$$T_pM = \{[\gamma] \mid \gamma \in C(M,\gamma), \textit{ avec } \gamma(0) = p\} = C(M,\sim)/R,$$

où R est la relation d'équivalence des courbes tangentes à M en p.

Définition I-1.11 *Le fibré tangent d'une variété différentiable M, noté TM, est l'union disjointe des espaces tangents T_pM pour chaque point $p \in M$:*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

*Le fibré cotangent est noté $T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$, où T_p^*M est le **dual algébrique** de T_pM.*

Nous abordons maintenant la notion de Champs de vecteurs.

Définition I-1.12 (Champs de vecteurs) *(cf [19]) Soit M une variété différentiable. Un champ de vecteurs X sur M est une application différentiable qui associe à chaque point $p \in M$ un vecteur $X(p) \in T_pM$, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} X : M &\to TM \\ p &\mapsto X(p) \in T_pM \end{aligned}$$

Localement, X s'écrit sous la forme :

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{I.1}$$

où chaque $a_i : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur un ouvert U contenant p, et $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ est la base canonique des vecteurs tangents associée aux coordonnées locales x_i, $i = 1, \ldots ,n$. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\chi(M)$.

Exemple I-1.4 *Prenons $M = \mathbb{R}^3$. Considérons X défini par :*

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - 1)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Alors X est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

I-1-2 Formes différentielles

On va introduire dans cette partie les définitions et quelque propriétés de base sur les formes différentielles, pour plus de détails on renvoit le lecteur au (cf[14][5][3]).

Définition I-1.13 (p-forme différentielle) *Soit M une variété différentiable de classe C^r $(r \geq 1)$ et de dimension n. Une p-forme différentielle de classe C^r sur M est une section de classe C^r du fibré des p-formes extérieures, noté $\Lambda^p T^*M$.*

Dans un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots ,x^n)$, une p-forme différentielle ω de classe C^r peut être exprimée comme suit :

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 \cdots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

où $\omega_{i_1 \cdots i_p}$ sont des fonctions de classe C^r, appelées coefficients de la p-forme différentielle de classe C^r, et $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ est le produit extérieur des différentiels de coordonnées.

On note $\Omega^p_r(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^r.

Exemple I-1.5 *Considérons une variété différentiable M de dimension 3, avec les coordonnées locales (x,y,z), et $M \subset \mathbb{R}^3$.*
La 2-forme différentielle ω définie ci-dessous est une 2-forme sur M :

$$\omega := (xy + z) \, dx \wedge dy + (2x - y) \, dy \wedge dz + (3z) \, dz \wedge dx.$$

Définition I-1.14 (Produit extérieur) *Soient ω_1 une p-forme différentielle de classe C^r ($r \geq 1$) et ω_2 une q-forme différentielle de classe C^r définies localement par :*

$$\omega_1(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x)\, dx_I \quad et \quad \omega_2(x) = \sum_{|J|=q}' v_J(x)\, dx_J.$$

Alors, le produit extérieur de ω_1 avec ω_2 est la forme de degré $(p+q)$ définie localement par :

$$\omega_1(x) \wedge \omega_2(x) = \sum_{|I|=p, |J|=q}' u_I(x) v_J(x)\, dx_I \wedge dx_J,$$

où

$$I = (i_1, \ldots, i_p) \quad avec \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n,$$
$$J = (j_1, \ldots, j_q) \quad avec \quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n,$$

et

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, \quad dx_J = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

Nous abordons à présent la notion de la différentielle extérieure sur une variété.

Définition I-1.15 (Différentielle extérieure) *Soit M une variété différentiable dimension n et classe C^r. L'opérateur de différentiation extérieure d est un opérateur*

$$d : \Omega_r^p(M) \to \Omega_{r-1}^{p+1}(M).$$

Si $\omega \in \Omega_r^p(M)$ et

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 \cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{|I|=p}' \omega_I\, dx_I,$$

alors, dans un système de coordonnées locales $x_1, \cdots, x_n$, on a :

$$d\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} d\omega_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{|I|=p}' d\omega_I \wedge dx_I,$$

où $d\omega_I$ désigne la différentielle de chaque coefficient ω_I.

Propriétés I-1.1 *L'application $d : \Omega_r^p(M) \to \Omega_{r-1}^{p+1}(M)$ satisfait les propriétés suivantes :*

i) Pour $p = 0$, $d : C^r(M) \to \Omega_{r-1}^1(M)$ est la différentielle usuelle des fonctions.

ii) Pour $\omega_1 \in \Omega_r^p(M)$ et $\omega_2 \in \Omega_r^q(M)$, on a

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

(règle de Leibniz).

iii) Pour toute $\omega \in \Omega_r^p(M)$, on a $d^2\omega = 0$, c'est-à-dire $(d \circ d)\omega = 0$ (nilpotence).

I-2 Notion de variété complexe

I-2-1 Structure Complexe

Définition I-2.1 (Structure complexe) *Soient M une variété différentiable de dimension réelle $2n$, et $p \in M$ un point. Une **structure complexe** sur l'espace tangent T_pM en p est un endomorphisme*

$$J : T_pM \to T_pM,$$

tel que

$$J^2 = -\mathrm{Id}_{T_pM},$$

où Id_{T_pM} est l'identité sur T_pM.

L'endomorphisme J s'étend naturellement à l'espace tangent complexifié $T_p^{\mathbb{C}}M$ via

$$J^{\mathbb{C}} : T_p^{\mathbb{C}}M \to T_p^{\mathbb{C}}M,$$

avec la propriéte que $(J^{\mathbb{C}})^2 = -\mathrm{Id}_{T_pM}$. L'espace tangent complexifié $T_p^{\mathbb{C}}M$ est défini par :

$$T_p^{\mathbb{C}}M = T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

L'endomorphisme $J^{\mathbb{C}}$ sur l'espace tangent complexifié est défini par :

$$J^{\mathbb{C}}(v \otimes \lambda) = J(v) \otimes \lambda, \quad \text{pour tout } v \in T_pM \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

On peut alors décomposer $T_p^{\mathbb{C}}M$ en sous-espaces propres de $J^{\mathbb{C}}$ associés aux valeurs propres i et $-i$:

- $T_p^{*1,0}M = \{u \in T_p^{\mathbb{C}}M \mid J(u) = iu\}$, appelé espace des **vecteurs tangents holomorphes**.
- $T_p^{*0,1}M = \{u \in T_p^{\mathbb{C}}M \mid J(u) = -iu\}$, appelé espace des **vecteurs tangents anti-holomorphes**.

I-2-2 Variété analytique complexe

Définition I-2.2 *Soit M une variété differentiable de dimension $2n$. Un **atlas complexe** sur M est une collection de cartes locales $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$, où :*

- *$(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouvrement ouvert de M,*
- *chaque V_α est un ouvert de $\mathbb{C}^n$,*
- *chaque application φ_α est un homéomorphisme entre $U_\alpha \subset M$ et $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$.*

De plus, pour tous indices α et $\beta \in I$ tel que $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$, les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

doivent être des biholomorphismes.

Définition I-2.3 *Une **variété analytique complexe** M est un espace topologique séparé qui est muni d'un atlas complexe.*

I-2-3 $(p,q)-$Formes différentielles

Les fibrés des formes extérieures sur les fibrés cotangents holomorphe et antiholomorphe sont donc respectivement :

$$\Lambda^p T^{*1,0}M = \bigcup_{z\in M} \Lambda^p T_z^{*1,0}M,$$
$$\Lambda^q T^{*0,1}M = \bigcup_{z\in M} \Lambda^q T_z^{*0,1}M.$$

Enfin, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on définit le fibré $\Lambda^{(p,q)}T_z^*M^{\mathbb{C}}$ comme le produit tensoriel des espaces $\Lambda^p T_z^{*1,0}M$ et $\Lambda^q T_z^{*0,1}M$, soit :

$$\Lambda^{(p,q)}T_z^*M^{\mathbb{C}} = \Lambda^p T_z^{*1,0}M \otimes \Lambda^q T_z^{*0,1}M.$$

Localement, cela se décrit comme suit :

$$\Lambda^{(p,q)}T_z^*M^{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}\{dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}\},$$

avec les indices $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ et $1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n$.

Définition I-2.4 *Une (p,q)-forme différentielle de classe C^r (avec $r \ge 1$) sur une variété analytique complexe M est une section du fibré $\Lambda^{(p,q)}T_z^*M^{\mathbb{C}}$ sur M.*

Localement, une (p,q)-forme différentielle ω de classe C^r $(r \ge 1)$ s'écrit :

$$\omega = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \omega_{IJ}(z)\, dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où I et J sont des multi-indices avec $|I| = p$ et $|J| = q$. Les $\omega_{IJ}(z)$ sont des fonctions de classe $C^r(r \ge 1)$, dz_I représente le produit des différentielles $dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$, et $d\bar{z}_J$ représente le produit des différentielles $d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ et $\sum{}'$ indique que la somme se fait suivant les indices croissants.

On note par $\Omega_r^{(p,q)}(M)$ l'espace des formes différentielles de bidegré (p,q) et de classe C^r sur M.

I-3 Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n \approxeq \mathbb{R}^{2n}$ un sous-ensemble ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On écrire $z_k = x_k + iy_k$ et considérons pour $a \in \Omega$ la différentielle (cf. [12])

$$df_a = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}(a)\, dy_k \right).$$

On utilise les notations habituelles :

$$dz_k = dx_k + i\, dy_k, \quad d\overline{z}_k = dx_k - i\, dy_k$$

et les dérivées formelles

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right).$$

Ces transformations permettent d'écrire df_a sous la forme :

$$df_a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k}(a)\, dz_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}(a)\, d\overline{z}_k. \tag{I.2}$$

Posons
$$\partial f_a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k}(a)\, dz_k \quad et \quad \overline{\partial} f_a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}(a)\, d\overline{z}_k.$$
Ainsi, (I.2) peut s'écrire :
$$df_a = \partial f_a + \overline{\partial} f_a.$$
La décomposition :
$$d = \partial + \overline{\partial} \tag{I.3}$$
avec
$$\partial = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\, dz_k \quad et \quad \overline{\partial} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\, d\overline{z}_k,$$
se généralise sur toutes les formes différentielles.
En effet, si
$$\omega(z) = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} \omega_{I,J}(z)\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \tag{I.4}$$
est une $(p,q)-$forme différentielle de classe C^r.
La différentielle extérieure de ω est définie par

$$d\omega = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} d\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J = \sideset{}{'}\sum_{I,J} (\partial + \overline{\partial})\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} \partial\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J + \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} \overline{\partial}\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$
et on pose :

$$\partial\omega = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} \partial\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J \quad et \quad \overline{\partial}\omega = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} \overline{\partial}\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants :

$$\partial : \Omega_r^{(p,q)}(M) \to \Omega_{r-1}^{(p+1,q)}(M),$$
$$\overline{\partial} : \Omega_r^{(p,q)}(M) \to \Omega_{r-1}^{(p,q+1)}(M).$$

La relation $d^2 = (\partial + \overline{\partial})^2 = 0$ équivaut à :

$$\partial^2 + \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial + \overline{\partial}^2 = 0,$$

ce qui implique :
$$\partial^2 = 0, \quad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0, \quad \overline{\partial}^2 = 0,$$
car ces termes sont respectivement de type $(p+2,q)$, $(p+1,q+1)$, et $(p,q+2)$.

Définition I-3.1 *Soit M une variété analytique complexe de dimension n et ω une (p,q)-forme différentielle de classe C^r $(r \geq 1)$. On dit que :*

i) ω est $\overline{\partial}$-fermée si $\overline{\partial}\omega = 0$.

ii) ω est dite $\overline{\partial}$-exacte s'il existe une $(p,q-1)$-forme différentielle u de classe C^{r+1} $(r \geq 1)$ telle que $\overline{\partial}u = \omega$.

Remarque I-3.1 *Puisque $\overline{\partial}^2 = 0$, si $\omega = \overline{\partial}u$, alors $\overline{\partial}\omega = \overline{\partial}^2 u$, c'est-à-dire $\overline{\partial}\omega = 0$.*

On note :

$$Z^{p,q}(M) = \left\{\omega \in \Omega_r^{(p,q)}(M)/\overline{\partial}\omega = 0\right\},$$

$$B^{p,q}(M) = \left\{\overline{\partial}u : u \in \Omega_r^{(p,q-1)}(M)/\overline{\partial}\omega = 0\right\}.$$

On a alors

$$B^{p,q}(M) \subset Z^{p,q}(M).$$

Le quotient

$$H^{p,q}(M) = \frac{Z^{p,q}(M)}{B^{p,q}(M)}$$

est appelé le $(p,q)-$ième groupe de cohomologie de Dolbeault (où $\overline{\partial}-$cohomologie). On peut définir le groupe de $\overline{\partial}-$cohomologie à support compact

$$H_c^{p,q}(M) = \frac{Z_c^{p,q}(M)}{B_c^{p,q}(M)}.$$

Le problème global de résolution du $\overline{\partial}$ est, pour une $(p,q)-$forme différentielle ω sur M telle que $\bar{\partial}w = 0$, de chercher l'existence d'une $(p,q-1)-$forme différentielle u dans M, telle que $\overline{\partial}u = \omega$.

I-4 Fonctions sousharmoniques

Pour une discussion plus approfondie sur les fonctions sousharmoniques, vous pouvez consulter (cf[13])

Définition I-4.1 (Fonction harmonique) *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est dite **harmonique** si elle satisfait l'équation de Laplace :*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{sur } \Omega,$$

où Δ est l'opérateur laplacien défini par :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Propriétés I-4.1 .

— ***Principe du Maximum*** *: Si u est harmonique sur un domaine Ω, alors u ne peut atteindre ni son maximum ni son minimum stricts à l'intérieur de Ω, sauf si u est constante.*

— ***Principe de la Moyenne*** *: Pour toute boule ouverte $B_r(x_0) \subseteq \Omega$ de centre x_0 et de rayon r, la valeur de u en x_0 est donnée par la moyenne de u sur la sphère $\partial B_r(x_0)$, c'est-à-dire :*

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u \, dS,$$

— ***Continuité*** *: Les fonctions harmoniques sont infiniment différentiables, c'est-à-dire de classe C^r $(r \geq 1)$.*

— ***Unicité*** *: La solution de l'équation de Laplace dans un domaine donné est unique si les valeurs au bord sont fixées (problème de Dirichlet).*

Exemple I-4.1 . *La fonction $u(x,y) = x^2 - y^2$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$ car elle satisfait $\Delta u = 0$.*

Définition I-4.2 (Fonction sousharmonique) *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dite **sousharmonique** si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. *u est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que* $\limsup_{x \to x_0} u(x) \le u(x_0)$ *pour tout* $x_0 \in \Omega$.
2. *Pour toute boule* $B_r(x_0) \subset \Omega$, *on a l'inégalité de la moyenne :*

$$u(x_0) \le \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, dx,$$

où $|B_r(x_0)|$ *désigne le volume de la boule.*

Propriétés I-4.2 .

— *Principe du maximum : Si u est sousharmonique sur un domaine* Ω, *alors u ne peut pas atteindre un maximum local strict à l'intérieur de* Ω, *sauf si u est constante.*

— *Stabilité par addition : Si* u_1 *et* u_2 *sont deux fonctions sousharmoniques, alors* $u_1 + u_2$ *est également sousharmonique.*

— *Stabilité par composition avec des fonctions convexes : Si u est sousharmonique et* φ *est une fonction convexe croissante, alors* $\varphi(u)$ *est sousharmonique.*

Exemple I-4.2 .

— *Toute fonction harmonique est sousharmonique.*

— *Soient* $a \in \mathbb{C}$ *fixé et* $c > 0$. *Alors la fonction* $z \mapsto c \log |z - a|$ *est sous-harmonique.*

I-5 Outils d'analyse fonctionnelle

Les notions suivantes sont tirées de [15] et [4]

Définition I-5.1 (Espaces Normés) *Une norme sur un espace vectoriel réel X est une fonction*

$$\begin{aligned} \|.\| : X &\to \mathbb{R}^+ \\ u &\mapsto \|u\| \end{aligned}$$

telle que :

(a) *si* $u \in X$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_X$;

(b) *si* $u \in X$ *et si* $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors* $\|\alpha u\| = |\alpha|\, \|u\|$;

(c) *si* $u,v \in X$, *alors* $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Exemple I-5.1 *Pour* $X = \mathbb{R}^n$, *si u est dans X et s'écrit* $u = (u_1,u_2,\dots,u_n)$, *on a :*

(i) *La norme euclidienne :*

$$\|u\| = \left(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) *La norme p-euclidienne, pour tout* $p \ge 1$:

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(iii) *La norme infinie :*

$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|).$$

Définition I-5.2 (Espaces de Banach) *Un espace vectoriel normé X est complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Exemple I-5.2 *Soit* $(E,\mathcal{T},m)$ *un espace mesuré, où* E *est un ensemble,* $\mathcal{T}$ *une tribu sur* E*, et* m *une mesure définie sur* $\mathcal{T}$*. Soit* f *une fonction mesurable définie de* E *vers* $\mathbb{K}$*, avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

On définit l'espace $L^p(E,\mathcal{T},m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables* $f : E \to \mathbb{K}$ *pour la relation suivante : deux fonctions* f *et* g *sont dites équivalentes si* $f = g$ *presque partout, c'est-à-dire si*

$$m\left(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0.$$

Cet espace est noté :

$$L^p(E,\mathcal{T},m) = \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ est mesurable et } \int_E |f|^p \, dm < +\infty \right\} / \sim ,$$

où $\sim$ *désigne la relation d'équivalence définie ci-dessus, et* $1 \leq p < +\infty$*.*

L'espace $L^p(E,\mathcal{T},m)$ *est un espace de Banach, muni de la norme suivante :*

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, dm \right)^{\frac{1}{p}},$$

définie sur chaque classe d'équivalence de fonctions mesurables. Ici, dm *représente l'élément de volume sur* E*.*

Définition I-5.3 (Produit scalaire) *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel* X *est une application*

$$\begin{aligned}(.\mid.) : X \times X &\to \mathbb{R},\\ (u,v) &\mapsto (u \mid v),\end{aligned}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

(a) $(u \mid u) > 0$ *pour tout* $u \in X \setminus \{0\}$ *et* $(0 \mid 0) = 0$ *;*

(b) pour tous $u,v,w \in X$ *et* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*,*

$$(\alpha u + \beta v \mid w) = \alpha(u \mid w) + \beta(v \mid w)$$

(c) $(u \mid v) = (v \mid u)$ *pour tous* $u,v \in X$*.*

La norme associée à ce produit scalaire est définie par

$$\|u\| = \sqrt{(u \mid u)}.$$

L'espace $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$*, où*

$$\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

est un espace préhilbertien réel.

Définition I-5.4 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espaces de Banach dont la norme dérive d'un produit scalaire.*

Exemple I-5.3 *L'espace* $l^2 = \left\{ u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid u_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 < \infty \right\}$ *est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :*

$$\langle u,v \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \overline{v_j},$$

où $\overline{v_j}$ *désigne la conjugaison complexe de* v_j*.*

Passons maintenant à la notion d'opérateur qui est une notion fondamentale dans ce document.

Définition I-5.5 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Banach.*
*Un **opérateur** de H_1 vers H_2 est une application T définie sur un sous-espace vectoriel $dom(T) \subset H_1$ à valeurs dans H_2. On écrit :*

$$T : dom(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2.$$

*Le sous-espace $dom(T)$ est appelé le **domaine** de l'opérateur.*
Un opérateur est noté $(T,dom(T))$. S'il n'y a pas d'ambiguïté concernant son domaine, on le note simplement T.
*Si $dom(\tilde{T})$ est un sous-espace vectoriel de H_1 contenant $dom(T)$ et si $\tilde{T}f = Tf$ pour $f \in dom(T)$, alors on dit que $\tilde{T}$ est une **extension** de T.*

Dans la suite, nous travaillerons sur un opérateur défini sur un espace de Hilbert.

Définition I-5.6 (Graphe d'un opérateur)

Soit $T : dom(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur. Le graphe de T est le sous-espace de $H_1 \times H_2$ noté $\Gamma(T)$ et donné par

$$\Gamma(T) := \{(x,T_x) : x \in dom(T)\}.$$

Définition I-5.7

Un opérateur $(T,dom(T))$ est fermé si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $dom(T)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$$

alors $x \in dom(T)$ et $y = Tx$.

Proposition I-5.1 (Opérateur fermé) *On dit que $(T,dom(T))$ est fermé si et seulement si son graphe $\Gamma(T)$ est un fermé de $H_1 \times H_2$.*

Définition I-5.8 (Opérateur fermable)

Un opérateur T est dit fermable si $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur.

Définition I-5.9 (Fermeture)

La fermeture de l'opérateur fermable T est l'opérateur noté $\bar{T}$ tel que $\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

Remarque I-5.1

Un opérateur T est dit fermé ssi $\bar{T} = T$.

Définition I-5.10 (Opérateur borné)

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On dit que T est un opérateur borné de H_1 vers H_2 si $dom(T) = H_1$ et s'il existe C tel que

$$||Tu||_{H_2} \leq C||u||_{H_1} \ \ \forall \ \ u \in H_1. \tag{I.5}$$

On pose alors :

$$||T|| = \sup_{u\in H_1, u\neq 0} \frac{||Tu||_{H_2}}{||u||_{H_1}}.$$

Si $dom(T) \neq H_1$ et s'il existe une constante C telle que :

$$||Tu||_{H_2} \leq C||u||_{H_1} \ \ \forall \ \ u \in dom(T) \tag{I.6}$$

alors l'opérateur T se prolonge en un opérateur borné de $\overline{dom(T)}$ vers H_2, où $\overline{dom(T)}$ désigne l'adhérence de $dom(T)$ dans H_1.

Proposition I-5.2 *[19] Soit $(T,dom(T))$ un opérateur fermé.*
Alors T est borné si et seulement si $dom(T) = H_1$.

Définition I-5.11 (Opérateur dense) *On dit qu'un opérateur $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est à domaine dense si $\overline{dom(T)} = H_1$.*

Définition I-5.12 (Adjoint d'un opérateur) *Soit $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur, $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ est l'unique application linéaire telle que pour tout $x \in H_1$, $y \in H_2$ on ait*

$$< T(x),y >_{H_2} = < x,T^*(y) >_{H_1} .$$

T^* est appelée adjoint de T.

Remarque I-5.2 *Pour $H_1 = H_2$ et si $T = T^*$ alors T est auto-adjoint.*

Définition I-5.13 (Opérateur symétrique) *Un opérateur T est dit symétrique si $T \subset T^*$, c'est-à-dire,*

$$dom(T) \subset dom(T^*), \quad Tu = T^*u \ \text{ pour } \ u \in dom(T).$$

Remarque I-5.3

Si T est un opérateur symétrique alors l'adjoint T^* devient une extension de T.

Définition I-5.14 (Opérateur essentiellement auto-adjoint)

Un opérateur symétrique T est dit essentiellement auto-adjoint s'il admet une unique extension auto-adjointe qui n'est rien d'autre que sa fermeture $\bar{T}$.
En d'autre termes un opérateur symétrique T est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture $\bar{T}$ est l'unique extension qui est auto-adjointe.

Définition I-5.15 *Soient X et Y deux espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues et $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.*
On dit que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est compact si l'image par T de la boule unité fermé B_X de X est relativement compacte dans l'espace Y ($\overline{T(B_X)}$ est compact).

Théorème I-5.1 *[7] $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans X, la suite image (Tx_n) admet des sous-suites convergentes dans Y.*

Théorème I-5.2 *[7] Si T_1, $T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ sont compacts, alors $a_1T + a_2T$ est compact pour tous scalaires a_1, a_2. Ainsi, les opérateurs compacts de X dans Y forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$. Cet espace des opérateurs compacts sera noté $\mathcal{K}(X,Y)$.*

I-6 Le $\overline{\partial}-$Neumann

Soit $L^2_{p,q}(\Omega)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles à coefficient dans $L^2(\Omega)$ pour $1 \leq q \leq n$. Si

$$f = {\sum_{I,J}}' f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

et

$$g = {\sum_{I,J}}' g_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

sont deux (p,q)-formes différentielles dans $L^2_{p,q}(\Omega)$, nous définissons le produit scalaire et la norme comme suit :

$$< f,g >= \sum_{I,J}{}' < f_{I,J},g_{I,J} > , \quad |f|^2 =< f,f >= \sum_{I,J}{}' |f_{I,J}|^2$$

$$||f||^2 = \int_\Omega < f,f > dm = \sum_{I,J}{}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 dm.$$

Soit φ une fonction continue et positive sur Ω. On note $L^2_{p,q}(\Omega,\, \varphi)$ l'espace vectoriel des formes différentielles f de bidegré $(p,\, q)$ qui s'écrivent localement comme suite :

$$f = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' f_{I,J} dz_I \wedge dz_J$$

où $f_{I,J}$ est une fonction mesurable telle que $\int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$ ($d\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$). Sur $L^2_{p,q}(\Omega,\, \varphi)$, on définit un produit scalaire noté $< f,\, g >_\varphi$ par :

$$< f,\, g >_\varphi= \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \int_\Omega f_{I,J}\overline{g_{I,J}} e^{-\varphi} d\lambda,$$

sa norme est définie par :

$$\|f\|^2_\varphi = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi} d\lambda.$$

Ainsi $L^2_{p,q}(\Omega,\, \varphi)$ muni de cette norme est un espace de Hilbert.

Définition I-6.1

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. L'opérateur $\bar\partial$ défini pour les (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur Ω s'étend aux (p,q)-formes différentielles de carré intégrable sur Ω aux sens des distributions. Si $u \in L^2_{p,q}(\Omega)$ (resp.$u \in L^2_{p,q}(\Omega,\varphi)$) est dans $dom(\bar\partial)$, alors l'opérateur

$$\bar\partial : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega)$$

avec

$$dom(\bar\partial) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) :\ \bar\partial f \in L^2_{p,q+1}(\Omega)\}$$

(resp.

$$\bar\partial : L^2_{p,q}(\Omega,\, \varphi) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega,\, \varphi)$$

avec

$$dom(\bar\partial) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) :\ \bar\partial f \in L^2_{p,q+1}(\Omega,\varphi)\})$$

admet un adjoint noté $\bar\partial^*$ *(resp.*$\bar\partial^*_\varphi$*),*
c'est-à-dire que

$$< \bar\partial u,\, v >=< u,\, \bar\partial^* v >$$

(resp.

$$< \bar\partial u,\, v >_\varphi=< u,\, \bar\partial^*_\varphi v >_\varphi),$$

$\forall\ u \in dom(\bar\partial)$ et $v \in dom(\bar\partial^*)$ *(resp.* $\forall\ u \in dom(\bar\partial)$ *et* $v \in dom(\bar\partial^*_\varphi)$*).*
Notons

$$\Box_{(p,q)} = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$$

le Laplacien complexe avec

$$dom(\square_{(p,q)}) = \{f \in dom(\bar{\partial}) \cap dom(\bar{\partial}^*) : \ \bar{\partial} f \in dom(\bar{\partial}^*) \ et \ \bar{\partial}^* f \in dom(\bar{\partial})\}$$

et

$$\square_{(p,q)\varphi} = \bar{\partial}\bar{\partial}^*_{\varphi} + \bar{\partial}^*_{\varphi}\bar{\partial}$$

le Laplacien complexe à poids.

Nous donnons à présent deux propositions d'une grande importance pour l'étude du spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur le Polydisque qui sont tirées de [6].

Proposition I-6.1 $\square_{(p,q)}$ *est un opérateur linéaire, fermé, dense et auto-adjoint.*

Proposition I-6.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné à bord C^1 et ρ une fonction définissant la bordure de Ω, de classe C^1. Si $f \in C^2_{(p,q)}(\overline{\Omega})$, alors*

$$f \in Dom(\square_{(p,q)})$$

si et seulement si les conditions de bord suivantes sont satisfaites :

$$\sigma(\vartheta, d\rho) f = 0 \quad et \quad \sigma(\vartheta, d\rho)\overline{\partial} f = 0 \quad sur\ le\ bord\ de\ \Omega.$$

Ici, $\sigma(\vartheta, d\rho)$ désigne l'opérateur de condition de Neumann modifié par la forme différentielle $d\rho$, et $\sigma(\vartheta, d\rho)\overline{\partial}$ correspond à son action sur la dérivée $\overline{\partial} f$.
De plus, si

$$f = \sum_{I,J}{}' f_{I,J} dz^I \wedge d\overline{z}^J \in C^2_{(p,q)}(\overline{\Omega}) \cap Dom(\square_{(p,q)}),$$

alors on a

$$\square_{(p,q)} f = -\frac{1}{4} \sum_{I,J}{}' \triangle f_{I,J} dz^I \wedge d\overline{z}^J,$$

où

$$\triangle = 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \right)$$

est le Laplacien de Beltrami.

Chapitre II

Fonctions de Bessel

Ce chapitre est consacré aux fonctions de Bessel, qui sont essentielles pour résoudre l'équation différentielle radiale en coordonnées polaires. Nous commencerons par introduire les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces, en les définissant à partir de leur équation différentielle fondamentale. Nous explorerons ensuite les principales propriétés de ces fonctions, notamment leurs relations de récurrence, leur orthogonalité et leur rôle dans les fonctions génératrices.

II-1 Quelques fonctions spéciales

Définition II-1.1 (Fonction Gamma) *[2] La fonction Gamma, notée Γ, est la fonction définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \textit{pour tout} \quad z > 0. \tag{II.1}$$

Proposition II-1.1 *[2] La fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. $\Gamma(z+1) = z!$, *pour tout entier* z.
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
5. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}$.

Preuve II-1.1 .

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$.
2. $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.
   Puisque le premier terme du membre de gauche est nul, on a
   $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{II.2}$$
3. $\Gamma(z+1) = z!$, *pour tout entier* z.
   En utilisant la relation (II.2) n fois, on obtient :
   $$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ &= z(z-1)\Gamma(z-1) \\ &\vdots \\ &= z!.\end{aligned}$$

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
En effet :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,\\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds \quad (\textit{changement de variable } s = \sqrt{t}),\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad (\textit{d'après l'intégrale de Gauss}).\end{aligned}$$

5. $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2z)!\sqrt{\pi}}{z!\cdot 2^{2z}}$.
Nous procédons par récurrence.
Pour $z \in \mathbb{N}$, notons P_z la propriété : $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2z)!\sqrt{\pi}}{z!\cdot 2^{2z}}$.
Initialisation : Pour $z = 0$, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ donc P_0 est vrai d'après 4).
Hérédité : Supposons P_z vrai, c'est-à-dire $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2z)!\sqrt{\pi}}{z!\cdot 2^{2z}}$.
Montrons que P_{z+1} est vraie, c'est-à-dire $\Gamma\left((z+1)+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2(z+1))!\sqrt{\pi}}{(z+1)!\cdot 2^{2(z+1)}}$.

$$\begin{aligned}\Gamma\left((z+1)+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2z+1}{2}+1\right)\\ &= \frac{2z+1}{2}\times\Gamma\left(\frac{2z+1}{2}\right)\\ &= \frac{2z+1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\\ &= \frac{2z+1}{2}\times\frac{(2z)!}{2^{2z}z!}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{(2z+1)!}{2^{2z+1}z!}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{(2z+2)!}{2^{2z+2}(z+1)!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Donc P_{z+1} est vraie.
Conclusion : $\forall z \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2z)!\sqrt{\pi}}{z!\cdot 2^{2z}}$.

□

Définition II-1.2 (Fonction Bêta) *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous les réels x et y strictement positifs par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{II.3}$$

Proposition II-1.2 *[2] La fonction Bêta possède les propriétés suivantes :*

1. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.
2. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
3. $\beta(x,y+1) = \frac{y}{x+y}\beta(x,y)$.
4. $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

Preuve II-1.2 *voir [2]*

II-2 Résolution de l'équation de Bessel

Les fonctions de Bessel ont été introduites par Bernoulli, et leur analyse a été développée par Bessel en 1860. Considérons une équation différentielle du second ordre à coefficients variables de la forme suivante [2] :

$$y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0. \tag{II.4}$$

Nous rappelons que de nombreuses fonctions spéciales découlent de l'équation (II.4), mais dans notre étude, nous nous limiterons aux équations différentielles linéaires suivantes :

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) y = 0, \tag{II.5}$$

dont les solutions sont les fonctions de Bessel d'ordre m, où z est la variable, $y(z)$ la fonction inconnue et m un paramètre réel. Cette équation admet deux classes de solutions : les fonctions de Bessel de première espèce, notées J_m, et les fonctions de Bessel de seconde espèce, parfois appelées fonctions de Neumann, notées Y_m ou parfois N_m.

Remarque II-2.1 *Dans le cas où m est un nombre complexe, l'équation admet une troisième classe de solutions : les fonctions de Bessel de troisième espèce, notées H_m.*

En effet,

$$\begin{cases} P(z) = \dfrac{1}{z}, \\ Q(z) = \dfrac{1-m^2}{z^2}. \end{cases} \tag{II.6}$$

Pour résoudre l'équation (II.5), nous utilisons la méthode de Frobenius, qui est une technique de résolution des équations différentielles linéaires basée sur le développement en série de puissances de z, sous la forme suivante :

$$y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+p}. \tag{II.7}$$

En posant $a_0 \neq 0$, le problème est de déterminer les coefficients a_i pour $i = 1{,}2, \cdots$ et le nombre p. Calculons les dérivées de $y(z)$:

$$y'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (p+i) z^{i+p-1}, \tag{II.8}$$

$$y''(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (p+i)(i+p-1) z^{i+p-2}. \tag{II.9}$$

En remplaçant (II.7), (II.8) et (II.9) dans l'équation (II.5), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (p+i)(i+p-1) z^{i+p-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (p+i) z^{i+p-2} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+p} = 0.$$

En simplifiant, cela donne :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (p+i) \left[p+i-1+1\right] z^{i+p-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+p} - m^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+p-2} = 0.$$

Cette équation peut être réarrangée en regroupant les termes semblables :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[(p+i)^2 - m^2\right] z^{i+p-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+p} = 0.$$

En multipliant par z^2, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[(p+i)^2 - m^2\right] z^{i+p} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+p+2} = 0.$$

Pour regrouper les puissances de z, faisons un décalage d'index dans les séries :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left[(p+i)^2 - m^2\right] z^{i+p} + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} z^{i+p} = 0,$$

$$a_0 \left[p^2 - m^2\right] z^p + a_1 \left[(p+1)^2 - m^2\right] z^{p+1} + \sum_{i=2}^{\infty} \left[a_i \left[(p+i)^2 - m^2\right] + a_{i-2}\right] z^{i+p} = 0. \tag{II.10}$$

Pour que y satisfasse l'équation différentielle (II.5), il faut que le coefficient de chaque puissance de z dans (II.10) soit nul, c'est-à-dire que chaque coefficient soit égal à zéro. On trouve alors :

$$\begin{cases} a_0 \left[p^2 - m^2\right] = 0, \\ a_1 \left[(p+1)^2 - m^2\right] = 0, \\ a_i \left[(p+i)^2 - m^2\right] + a_{i-2} = 0 \quad \forall i \geq 2. \end{cases} \tag{II.11}$$

Comme $a_0 \neq 0$, la première équation du système (II.11) impose que

$$p^2 - m^2 = 0,$$

ce qui signifie que

$$p = \pm m.$$

Ainsi, p doit être égal à m ou à $-m$.

- **Cas** $p = m$

  Pour la deuxième équation du système (II.11),

  $$a_1 \left[(m+1)^2 - m^2\right] = 0. \tag{II.12}$$

  En développant l'expression dans le crochet, on a

  $$(m+1)^2 - m^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 = 2m + 1.$$

  Donc, l'équation (II.12) devient

  $$a_1(2m+1) = 0.$$

  Puisque $2m + 1 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -\dfrac{1}{2}$, alors $a_1 = 0$.

  Pour la troisième équation du système (II.11) pour $i \geq 2$,

  $$a_i \left[(m+i)^2 - m^2\right] + a_{i-2} = 0. \tag{II.13}$$

  En développant l'expression dans le crochet, on a

  $$(m+i)^2 - m^2 = m^2 + 2mi + i^2 - m^2 = 2mi + i^2.$$

  L'équation (II.13) devient alors

  $$a_i \left[i(2m+i)\right] + a_{i-2} = 0.$$

Puisque $2m + i \neq 0$, alors a_i est déterminé en fonction de a_{i-2} :

$$a_i = \frac{-a_{i-2}}{i(i+2m)} \quad \forall i \geq 2. \tag{II.14}$$

Puisque $a_1 = 0$, les coefficients d'indice impair sont nuls, c'est-à-dire $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, $a_{2k+1} = 0, \ldots$. On en déduit alors que les coefficients d'indice pair sont donnés par :

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{-a_0}{2^2(1+m)}, \\ a_4 = \dfrac{-a_2}{4(4+2m)} = \dfrac{(-1)^2 a_0}{2^4 2!(1+m)(2+m)}, \\ a_6 = \dfrac{-a_4}{6(6+2m)} = \dfrac{(-1)^3 a_0}{2^6 3!(1+m)(2+m)(3+m)}. \end{cases} \tag{II.15}$$

Par récurrence sur i, le terme général s'écrit alors :

$$a_{2i} = \frac{(-1)^i a_0}{2^{2i} i!(1+m)(2+m)\cdots(i+m)}.$$

En multipliant, en divisant par $\Gamma(m+1)$ et en utilisant la formule

$$(m+1)(m+2)\cdots(m+i)\Gamma(m+1) = \Gamma(m+i+1),$$

on trouve :

$$a_{2i} = \frac{(-1)^i a_0 \Gamma(m+1)}{2^{2i} i! \Gamma(m+i+1)}. \tag{II.16}$$

On remarque que tous les coefficients d'indice pair sont exprimés en fonction de a_0. On peut alors poser :

$$a_0 = \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)}, \tag{II.17}$$

de sorte que :

$$a_{2i} = \frac{(-1)^i}{2^{2i+m} i! \Gamma(m+i+1)}. \tag{II.18}$$

En injectant (II.18) dans (II.7), on obtient la première solution de l'équation pour $p = m$, notée $J_m(z)$, et appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre m donnée par :

$$y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\Gamma(m+i+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2i+m}. \tag{II.19}$$

Donc

$$J_m(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}. \tag{II.20}$$

- **Cas** $p = -m$

  Pour la deuxième équation du système (II.11),

$$a_1 \left[(-m+1)^2 - m^2\right] = 0.$$

En développant l'expression dans le crochet, on a

$$(-m+1)^2 - m^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 = 1 - 2m.$$

Donc

$$a_1(1-2m) = 0.$$

Si $1-2m \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq \frac{1}{2}$, alors $a_1 = 0$.

Pour la troisième équation du système pour $i \geq 2$,

$$a_i\left[(-m+i)^2 - m^2\right] + a_{i-2} = 0.$$

Calculons l'expression entre crochets :

$$(-m+i)^2 - m^2 = m^2 - 2mi + i^2 - m^2 = i^2 - 2mi.$$

L'équation devient alors

$$a_i i(i-2m) + a_{i-2} = 0.$$

Si $i - 2m \neq 0$, alors a_i est déterminé en fonction de a_{i-2} :

$$a_i = -\frac{a_{i-2}}{i(i-2m)}.$$

De la même manière comme dans le cas $p = m$, on obtient :

$$y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\Gamma(1+i-m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2i-m}, \tag{II.21}$$

$$J_{-m}(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k-m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-m}. \tag{II.22}$$

J_{-m} est appelée la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $-m$.

□

La relation entre les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(z)$ et $J_{-m}(z)$ est donnée par :

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z). \tag{II.23}$$

Cette relation est valable lorsque m est un entier et montre que la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $-m$ est proportionnelle à celle d'ordre m avec un facteur de signe dépendant de m.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} J_{-m}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k-m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-m}, \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-m}. \end{aligned}$$

En posant $s = k - m$, nous avons $k = s + m$, donc :

$$\begin{aligned} J_{-m}(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+m}}{(s+m)!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(s+m)-m}, \\ &= (-1)^m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+m}, \\ &= (-1)^m J_m(z). \end{aligned}$$

□

On définit les fonctions de Bessel de deuxième espèce, $Y_m(z)$, en fonction des fonctions de Bessel de première espèce $J_m(z)$ et $J_{-m}(z)$ comme suit :

$$Y_m(z) = \frac{J_m(z)\cos(m\pi) - J_{-m}(z)}{\sin(m\pi)}.$$

Cette définition est valable pour les valeurs non entières de m. Pour les valeurs entières de m, $Y_m(z)$ est défini par :

$$Y_m(z) = \lim_{\nu \to m} \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

II-3 Relations de récurrence des fonctions de Bessel de Première espèce

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(z)$ satisfont plusieurs relations de récurrence importantes [2] :

1. $\dfrac{d}{dz}\left[z^m J_m(z)\right] = z^m J_{m-1}(z)$
2. $\dfrac{d}{dz}\left[z^{-m} J_m(z)\right] = -z^{-m} J_{m+1}(z)$
3. $J'_m(z) = J_{m-1}(z) - \dfrac{m}{z} J_m(z)$
4. $J'_m(z) = \dfrac{m}{z} J_m(z) - J_{m+1}(z)$
5. $J'_m(z) = \dfrac{1}{2}\left[J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)\right]$
6. $J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) = \dfrac{2z}{m} J_m(z)$

Preuve II-3.1 .
On a

$$J_m(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}. \tag{II.24}$$

1.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[z^m J_m(z)\right] &= \frac{d}{dz}\left[\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)2^{2k+m}} z^{2k+2m}\right], \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)2^{2k+m}} \frac{d}{dz}\left[z^{2k+2m}\right], \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{2(k+m)(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)2^{2k+m}} z^{2k+2m-1}, \\
&= z^m \sum_{k\geq 0} \frac{(k+m)(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m-1}, \\
&= z^m \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m-1}, \textit{car} \quad \Gamma(1+k+m) = (k+m)\Gamma(k+m), \\
&= z^m J_{m-1}(z).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[z^{-m}J_m(z)\right] &= \frac{d}{dz}\left[\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)2^{2k+m}}z^{2k}\right],\\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)2^{2k+m}}\frac{d}{dz}\left[z^{2k}\right],\\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{(2k)(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)2^{2k+m}}z^{2k-1},\\
&= z^{-m}\sum_{k\geq 0}\frac{k(-1)^k}{k!\Gamma(1+k+m)2^{2k+m-1}}z^{2k+m-1},\\
&= z^{-m}\sum_{r\geq 0}\frac{(r+1)(-1)^{(r+1)}}{(r+1)!\Gamma(1+(r+1)+m)2^{2(r+1)+m-1}}z^{2(r+1)+m-1} \qquad (k=r+1),\\
&= z^{-m}\sum_{r\geq 0}\frac{(r+1)(-1)^{(r+1)}}{(r+1)!\Gamma(r+2+m)2^{2r+m+1}}x^{2r+m+1},\\
&= -z^{-m}\sum_{r\geq 0}\frac{(r+1)(-1)^{r}}{(r+1)!\Gamma(r+2+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+m+1},\\
&= -z^{-m}\sum_{r\geq 0}\frac{(-1)^{r}}{r!\Gamma(r+2+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+m+1},\\
&= -z^{-m}J_{m+1}(z).
\end{aligned}$$

3. En développant la dérivée de $z^m J_m(z)$ dans la formule (1), on trouve

$$\begin{aligned}
z^m J_{m-1}(z) &= \frac{d}{dz}\left[z^m J_m(z)\right],\\
&= mz^{m-1}J_m(z) + z^m J'_m(z).
\end{aligned}$$

Si $z \neq 0$ alors on a

$$J'_m(z) = J_{m-1}(z) - \frac{z}{m}J_m(z).$$

4. En développant la dérivée de z^{-m} dans (2), on obtient

$$\begin{aligned}
-z^{-m}J_{m+1}(x) &= \frac{d}{dz}\left[z^{-m}J_m(z)\right],\\
&= -mz^{-m-1}J_m(z) + z^{-m}\frac{d}{dz}J_m(z).
\end{aligned}$$

En multipliant par z^{-m}, on obtient

$$J'_m(z) = \frac{m}{z}J_m(z) - J_{m+1}(z)$$

5. Si on fait la somme de (3) et (4), il en résulte (5).

6. On obtient (6) en faisant la soustraction entre (3) et (4).

□

NB : Toutes les relations de récurrence de $J_m(z)$ sont valables pour la fonction $Y_m(z)$ et se démontrent de la même manière. (cf[20])

Nous abordons à présent l'étude de la fonction génératrice des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre entier m. La fonction génératrice est donnée par (cf. [20]) :

$$u(z,t) = e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(z), \tag{II.25}$$

où $J_m(z)$ représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre entier m.

Nous allons démontrer que l'expression de la fonction génératrice donnée par (II.25) est correcte. Considérons :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= e^{\frac{zt}{2}} e^{-\frac{z}{2t}}, \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{zt}{2}\right)^k}{k!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{2t}\right)^n}{n!}\right). \end{aligned}$$

En développant chaque série, on obtient :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^k}{2^k k!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{2^n t^n n!}\right), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{k+n} t^{k-n}}{2^{k+n} k! n!}. \end{aligned}$$

En combinant les indices k et n, on a :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{n+2m}}{2^{n+2m} n!(n+m)!}\right) t^m \quad (\text{où } m = k-n), \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}}{n!(n+m)!}\right), \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(z). \end{aligned}$$

□

Proposition II-3.1 ([20]) *La forme intégrale des fonctions de Bessel de premier espèce est donnée par :*

1) $J_m(z) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} cos(m\varphi - z\sin(\varphi)) d\theta,$

2) $J_m(z) = \dfrac{\left(\frac{z}{2}\right)^m}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+\frac{1}{2})} \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} e^{izt} dt.$

Preuve II-3.2 .

1) On commence par $J_m(z) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} cos(m\varphi - z\sin(\varphi)) d\theta$

On pose $t = e^{i\varphi} \Rightarrow t^m = e^{im\varphi}$.

On a également :

$$\frac{t-\frac{1}{t}}{2} = \frac{e^{i\varphi} - \frac{1}{e^{i\varphi}}}{2} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = i\sin\varphi,$$

ce qui implique :

$$\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = iz\sin\varphi.$$

La relation (II.25) devient alors :

$$\begin{aligned} e^{iz\sin\varphi} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)e^{im\varphi}, \\ &= J_0(z) + \sum_{m=-\infty}^{-1} J_m(z)e^{im\varphi} + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(z)e^{im\varphi}, \\ &= J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} J_{-m}(z)e^{-im\varphi} + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(z)e^{im\varphi}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la propriété $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$, on obtient :

$$e^{iz\sin\varphi} = J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{im\varphi} + (-1)^m e^{-im\varphi}\right) J_m(z). \tag{II.26}$$

Nous allons maintenant évaluer les deux côtés de l'expression ci-dessus en posant $t = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Pour $m \in \mathbb{Z}^+$, on a les identités suivantes :

$$e^{im\varphi} + (-1)^m e^{-im\varphi} = \begin{cases} 2\cos(m\varphi) & si\ m = 2k, \\ 2i\sin(m\varphi) & si\ m = 2k+1. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{iz\sin\varphi} = \cos(z\sin\varphi) + i\sin(z\sin\varphi). \tag{II.27}$$

D'après (II.26) et (II.27), on obtient :

$$\begin{aligned} \cos(z\sin\varphi) + i\sin(z\sin\varphi) &= J_0(z) + \sum_{m\ pair} 2\cos(m\varphi)J_m(z) + \sum_{m\ impair} 2i\sin(m\varphi)J_m(z), \\ &= J_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos(2k\varphi)J_{2k}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} 2i\sin\left((2k+1)\varphi\right) J_{2k+1}(z). \end{aligned} \tag{II.28}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de l'équation (II.28), on obtient :

$$\cos(z\sin\varphi) = J_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} 2cos(2k\varphi)J_{2k}(z), \tag{II.29}$$

$$\sin(z\sin\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} 2sin\left((2k+1)\varphi\right)(z). \tag{II.30}$$

En multipliant les deux cotés de l'équation (II.29) par $\cos(m\varphi)$, $(m > \varphi)$ et les deux cotés de l'équation ((II.30)) par $\sin(m\varphi)$, $(m \geq 1)$, puis en intégrant de 0 a π et en utilisant les identités

$$\int_0^{\pi} \cos(m\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

et

$$\int_0^{\pi} \sin(m\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases},$$

on obtient

$$\int_0^{\pi} \cos(m\varphi)\cos(z\sin(\varphi))d\varphi = \begin{cases} \pi J_m(z) & m\ pair \\ 0 & m\ impair \end{cases}. \tag{II.31}$$

De la même manière, on a

$$\int_0^\pi \sin(m\varphi)\sin(m\sin(\varphi))d\varphi = \begin{cases} 0 & m \text{ pair} \\ \pi J_m(z) & m \text{ impair} \end{cases} \tag{II.32}$$

En sommant (II.31) et (II.32) on trouve

$$\int_0^\pi \left[\cos(m\varphi)\cos(z\sin(\varphi))d\varphi + sin(m\varphi)\sin(m\sin(\varphi))d\varphi\right]d\varphi = \pi J_m(z).$$

Donc

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(m\varphi - z\sin\varphi)d\varphi. \tag{II.33}$$

2) Considérons

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} e^{izt} dt, \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0} \frac{(izt)^k}{k!} dt, \end{aligned}$$

$$I = \sum_{k\geq 0} \frac{(iz)^k}{k!} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} t^k dt}_{=A}. \tag{II.34}$$

Si k est impaire alors $(1-t^2)^{m-1/2}t^k$ est impaire. Donc son intégrale sur $[-1{,}1]$ est nulle. Donc

$$I = \sum_{k \text{ pair}} \frac{(iz)^k}{k!} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} t^k dt}_{=A}. \tag{II.35}$$

En posant $k = 2s$, on a :

$$A = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} t^{2s} dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} t^{2s} dt.$$

On fait un changement de variable $u = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{u} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}du$, on obtient alors

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^1 (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} t^{2s} dt, \\ &= 2\int_0^1 (1-u)^{m-\frac{1}{2}} u^s \frac{1}{2\sqrt{u}} du, \\ &= \int_0^1 (1-u)^{m-\frac{1}{2}} u^{s-\frac{1}{2}} du, \end{aligned}$$

qui est la fonction Bêta, et on trouve

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (1-u)^{m-\frac{1}{2}} u^{s-\frac{1}{2}} du, \\ &= \beta\left(m+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

(II.35) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{s\geq 0} \frac{(-1)^s z^{2s}}{(2s)!} A \\
&= \sum_{s\geq 0} \frac{(-1)^s z^{2s}}{(2s)!} \beta\left(m+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}\right), \\
&= \sum_{s\geq 0} \frac{(-1)^s z^{2s}}{(2s)!} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+s+1\right)}, \\
&= \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^s z^{2s}}{(2s)!} \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+s+1\right)}, \\
&= \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^s z^{2s}}{(2s)!\Gamma\left(m+s+1\right)} \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right), \\
&= \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^s z^{2s}}{(2s)!\Gamma\left(m+s+1\right)} \frac{(2s)!}{s!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s}} \quad car \quad \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2s)!}{s!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s}}, \\
&= \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma\left(m+s+1\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s} \sqrt{\pi}, \\
&= \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \left(\sqrt{\pi}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma\left(m+s+1\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+m}, \\
&= \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} J_m(z).
\end{aligned}
$$

Donc

$$J_m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^m I,$$

d'où

$$J_m(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^m}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} e^{izt} dt.$$

□

II-4 Relation d'orthogonalité

Théorème II-4.1 ([1]) *Les fonctions de Bessel de première espèce $J_m(z)$ satisfont les relations d'orthogonalité suivantes :*

$$(J_m(\lambda_{nm}z), J_m(\lambda_{km}z)) := \int_0^a zJ_m(\lambda_{nm}z)J_m(\lambda_{km}z)\,dz = \begin{cases} 0 & si\ n \neq k, \\ \frac{a^2}{2}J_{m+1}^2(\lambda_{kn}a) & si\ n = k, \end{cases} \tag{II.36}$$

où

$$\lambda_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{a},\ avec\ n = 1,2,3,\ldots,\ et\ \alpha_{nm}\ est\ le\ n\text{-ième zéro positif de}\ J_m.$$

Preuve II-4.1 .
Cas 1 : $n \neq k$
D'après II-2, la fonction $J_m(z)$ satisfait l'équation de Bessel :

$$z^2 J_m''(\lambda z) + zJ_m'(\lambda z) + (\lambda^2 z^2 - m^2)J_m(\lambda z) = 0,$$

ou de manière équivalente,

$$zJ''_m(\lambda z) + J'_m(\lambda z) + \left(\lambda^2 z - \frac{m^2}{z}\right) J_m(\lambda z) = 0.$$

Réécrivons cette dernière équation sous la forme suivante :

$$[zJ'_m(\lambda z)]' + \left(\lambda^2 z - \frac{m^2}{z}\right) J_m(\lambda z) = 0. \quad \text{(II.37)}$$

Posons $\lambda = \lambda_{nm}$ *et multiplions la relation* (II.37) *par* $J_m(\lambda_{km} z)$ *:*

$$J_m(\lambda_{km} z)\left\{[zJ'_m(\lambda_{nm} z)]' + \left(\lambda_{nm}^2 z - \frac{m^2}{z}\right) J_m(\lambda_{nm} z)\right\} = 0. \quad \text{(II.38)}$$

Posons maintenant $\lambda = \lambda_{km}$ *et multiplions la relation* (II.37) *par* $-J_m(\lambda_{km} z)$ *:*

$$-J_m(\lambda_{nm} z)\left\{[zJ'_m(\lambda_{km} z)]' + \left(\lambda_{km}^2 z - \frac{m^2}{z}\right) J_m(\lambda_{km} z)\right\} = 0. \quad \text{(II.39)}$$

En additionnant (II.38) *et* (II.39), *on obtient :*

$$(\lambda_{nm}^2 - \lambda_{km}^2) z J_m(\lambda_{nm} z) J_m(\lambda_{km} z) + J_m(\lambda_{km} z)[zJ'_m(\lambda_{nm} z)]' - J_m(\lambda_{nm} z)[zJ'_m(\lambda_{km} z)]' = 0.$$

En intégrant cette équation de 0 *à* a, *on obtient :*

$$(\lambda_{nm}^2 - \lambda_{km}^2)\int_0^a zJ_m(\lambda_{nm} z)J_m(\lambda_{km} z)\, dz = -\int_0^a J_m(\lambda_{km} z)[zJ'_m(\lambda_{nm} z)]'\, dz + \int_0^a J_m(\lambda_{nm} z)[zJ'_m(\lambda_{km} z)]'\, dz.$$

En faisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}(\lambda_{nm}^2 - \lambda_{km}^2)\int_0^a zJ_m(\lambda_{nm} z)J_m(\lambda_{km} z)\, dz = &-\left[J_m(\lambda_{km} z) zJ'_m(\lambda_{nm} z)\right]_0^a + \int_0^a J'_m(\lambda_{km} z) zJ'_m(\lambda_{nm} z)\, dz + \\ &\left[J_m(\lambda_{nm} z) zJ'_m(\lambda_{km} z)\right]_0^a - \int_0^a J'_m(\lambda_{nm} z) zJ'_m(\lambda_{km} z)\, dz.\end{aligned}$$

En évaluant les termes au bord et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}(\lambda_{nm}^2 - \lambda_{km}^2)\int_0^a zJ_m(\lambda_{nm} z)J_m(\lambda_{km} z) dz &= -J_m(\lambda_{km} a) aJ'_m(\lambda_{nm} a) + J_m(\lambda_{nm} a) aJ'_m(\lambda_{km} a), \\ &= -J_m(\alpha_{km}) aJ'_m(\alpha_{nm} a) + J_m(\alpha_{nm} a) aJ'_m(\alpha_{km} a), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Comme $\lambda_{nm} \neq \lambda_{km}$, *il en résulte que :*

$$\int_0^a zJ_m(\lambda_{nm} z)J_m(\lambda_{km} z)\, dz = 0.$$

Cas 2 : $n = k$
En multipliant ensuite l'équation (II.37) *par* $2zJ'_m(\lambda z)$ *on a*

$$2zJ'_m(\lambda z)\,[zJ'_m(\lambda z)]' + 2zJ'_m(\lambda z)\left(\lambda^2 z - \frac{m^2}{z}\right) J_m(\lambda z) = 0.$$

Donc

$$\left\{[zJ'_m(\lambda z)]^2\right\}' + (\lambda^2 z^2 - m^2)\left\{[J_m(\lambda z)]^2\right\}' = 0.$$

En intégrant par rapport à z de 0 à a, on obtient :

$$\left[[zJ'_m(\lambda z)]^2\right]_0^a = -\int_0^a (\lambda^2 z^2 - m^2)\left\{[J_m(\lambda z)]^2\right\}' \, dz. \tag{II.40}$$

Posons

$$\lambda = \lambda_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{a}.$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
-\int_0^a (\lambda^2 z^2 - m^2)\left\{[J_m(\lambda z)]^2\right\}' \, dz &= \left[-(\lambda_{mn}^2 z^2 - m^2)\{J_m(\lambda z)\}^2\right]_0^a + 2\lambda_{nm}^2 \int_0^a z\{J_m(\lambda_{nm} z)\}^2 \, dz, \\
&= 2\lambda_{nm}^2 \int_0^a z\{J_m(\lambda z)\}^2 \, dz, \\
&= 2\lambda_{nm}^2 \left\|J_m(\lambda_{nm} z)\right\|^2.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\left[[zJ'_m(\lambda z)]^2\right]_0^a$ dans l'équation (II.40), nous utilisons la relation de récurrence (II-3) :

$$zJ'_m(\lambda_{nm} z) = mJ_m(\lambda_{nm} z) - \lambda_{nm} z J_{m+1}(\lambda_{nm} z).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left[[zJ'_m(\lambda z)]^2\right]_0^a &= \left[(mJ_m(\lambda_{nm} z) - \lambda_{nm} z J_{m+1}(\lambda_{nm} z))^2\right]_0^a, \\
&= \lambda_{nm}^2 a^2 \left[J_{m+1}(\lambda_{nm} a)\right]^2.
\end{aligned}$$

Enfin, l'équation (II.40) devient :

$$2\lambda_{nm}^2 \left\|J_m(\lambda_{nm} z)\right\|^2 = \lambda_{nm}^2 a^2 \left[J_{m+1}(\lambda_{nm} a)\right]^2,$$

ce qui implique :

$$\left\|J_n(\lambda_{nm} z)\right\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[J_{m+1}(\lambda_{nm} a)\right]^2.$$

□

Chapitre III

Le spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur le Polydisque

Dans ce chapitre, nous mettons en pratique les concepts développés dans les chapitres précédents pour résoudre le problème aux valeurs propres de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur le polydisque. Nous appliquons la méthode de séparation des variables en coordonnées polaires pour déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur $\Box_q$. Nous commencerons par décrire en détail la méthode de séparation des variables, en expliquant comment elle permet de simplifier la résolution des équations différentielles complexes. Nous illustrerons cette méthode en l'appliquant à notre problème spécifique, en utilisant les fonctions de Bessel comme outils principaux pour la résolution des équations radiales. Ce chapitre vise à démontrer comment ces outils permettent d'effectuer une analyse précise du spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann.

III-1 Quelques notions de base

Il est essentiel de définir quelques notions clés. Ces définitions fournissent une base théorique solide et permettent de situer le problème dans son contexte mathématique. Voici une liste de ces notions clés :

Définition III-1.1 (Problème aux valeurs propres(cf [10])) *Un problème aux valeurs propres pour une équation différentielle consiste à trouver des fonctions propres u et des valeurs propres λ telles que*

$$Au = \lambda u,$$

où A est un opérateur différentiel linéaire et u est la fonction propre associée à la valeur propre λ.

Définition III-1.2 (Résolvante (cf [8])) *Soit T un opérateur linéaire défini sur un domaine $dom(T) \subset H$, où H est un espace de Banach. Pour $z \in \mathbb{C}$ qui n'est pas une valeur propre de T, on appelle **résolvante de T en z** l'opérateur*

$$R(z,T) = (zI - T)^{-1},$$

si cet inverse existe et est un opérateur borné. L'ensemble de résolvante de T, noté $\rho(T)$, est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la résolvante $R(z,T)$ est bien définie et bornée. Autrement dit, l'ensemble de résolvante est le complémentaire du spectre de T dans $\mathbb{C}$ dont la définition est donnée ci-dessous.

Définition III-1.3 (Spectre) *Soit T un opérateur linéaire dans un espace de Banach H. Le **spectre** de T, noté $\sigma(T)$, est l'ensemble des valeurs complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $zI - T$ n'est pas inversible, c'est-à-dire*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Définition III-1.4 (Spectre d'un opérateur (cf [10])) *Le spectre d'un opérateur différentiel dans un problème aux valeurs propres est l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles il existe des solutions non nulles u à l'équation*

$$Au = \lambda u.$$

Définition III-1.5 (Conditions aux bords (cf [18])) *Les conditions aux bords sont des règles qui dictent le comportement de la solution d'un problème aux valeurs propres sur la frontière du domaine. Nous donnons quelques exemples de conditions aux bords :*

1. ***Condition de Dirichlet*** *: considérons un domaine Ω dans $\mathbb{C}^n$ avec une frontière $\partial\Omega$. Une condition de Dirichlet homogène impose que la solution u d'une équation différentielle soit nulle sur $\partial\Omega$. Cela s'exprime ainsi :*

$$u(z) = 0, \quad \textit{pour tout } z \in \partial\Omega.$$

2. ***Condition de Neumann*** *: Pour un domaine Ω dans $\mathbb{C}^n$ avec une frontière $\partial\Omega$, on peut imposer une condition de Neumann homogène à une fonction u définie sur $\overline{\Omega}$ et suffisamment régulière (par exemple, $u \in C^1(\overline{\Omega})$). Cette condition impose que la dérivée normale de u sur la frontière soit nulle :*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(z) = 0, \quad \textit{pour tout } z \in \partial\Omega,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée de u dans la direction normale à $\partial\Omega$.

3. ***Une Condition de périodicité*** *impose que la solution d'une équation différentielle, ainsi que sa dérivée, soient identiques en des points périodiquement équivalents du domaine. Cela signifie que, pour deux points α et β, la solution u et sa dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ doivent vérifier :*

$$u(\alpha) = u(\beta) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z}(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial z}(\beta).$$

Autrement dit, la solution et ses dérivées se répètent de manière identique en ces points.

Définition III-1.6 (Équation harmonique (cf. [16])) *L'équation différentielle du second ordre sans second membre :*

$$\Theta'' + a\Theta' + b\Theta = 0, \tag{III.1}$$

*où $a,b \in \mathbb{R}$, est appelée **équation harmonique**.*

Supposons que la solution ait la forme $\Theta = e^{rx}$. En remplaçant cette forme dans l'équation (III.1), nous obtenons :

$$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0,$$

ce qui implique :

$$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0 \implies r^2 + ar + b = 0.$$

*Cette équation est appelée **l'équation caractéristique** de l'équation (III.1). En résolvant cette équation caractéristique, on détermine la solution générale de l'équation (III.1). Les différents cas possibles sont les suivants :*

1. ***Deux racines réelles distinctes :*** *Si r_1 et r_2 sont deux racines réelles distinctes, la solution générale de l'équation (III.1) est donnée par :*

$$\Theta(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. ***Une racine réelle double :*** *Si $r_1 = r_2 = r_0$, la solution générale de l'équation (III.1) est :*

$$\Theta(x) = (c_1 x + c_2) e^{r_0 x}, \quad c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. ***Deux racines complexes conjuguées :*** *Si $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, la solution générale de l'équation (III.1) s'écrit :*

$$\Theta(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) \right), \quad c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

III-2 Rappel sur la méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables est une technique classique utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles, telles que celles associées au Laplacien de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann. Cette méthode permet de réduire une équation aux dérivées partielles complexe en une série d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre. Dans le cas du polydisque, cette approche consiste à séparer la solution en produits de fonctions, chacune dépendant d'une seule variable indépendante. Plus précisément, dans notre cas, cette méthode suppose que la solution $u(r,\theta)$ peut être exprimée comme un produit de deux fonctions indépendantes, $R(r)$ et $\Theta(\theta)$, où r et θ représentent respectivement les coordonnées radiales et angulaires. L'application de la méthode de séparation des variables à l'équation du Laplacien de $\overline{\partial}$-Neumann conduit à la réduction du problème en deux équations différentielles ordinaires, une pour $R(r)$ et une autre pour $\Theta(\theta)$. Ces équations ordinaires sont ensuite résolues séparément, et les solutions obtenues sont combinées pour déterminer les fonctions propres du Laplacien de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann. Cette démarche permet de traiter de manière plus simple et plus systématique les solutions de l'équation aux valeurs propres sur le polydisque.

Pour illustrer l'application de la méthode de séparation des variables, considérons l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

$$a_{11}(r,\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) + a_{22}(r,\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta) + b_1(r,\theta)\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + b_2(r,\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) + c(r,\theta)u(r,\theta) = 0. \tag{III.2}$$

Pour appliquer la méthode de séparation des variables à l'équation différentielle (III.2), on suppose que la solution $u(r,\theta)$ peut être écrite sous la forme d'un produit de deux fonctions séparées :

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \neq 0. \tag{III.3}$$

où R et Θ sont respectivement des fonctions de r et de θ ; ayant au moins des dérivées premières et secondes continues. Maintenant, nous calculons la dérivée seconde par rapport à r

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = R'(r)\Theta(\theta),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) = R''(r)\Theta(\theta),$$

et la dérivée seconde par rapport à θ

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta) = R(r)\Theta'(\theta),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta) = R(r)\Theta''(\theta).$$

En remplaçant ces dérivées dans l'équation (III.2), on obtient :

$$a_{11}R''\Theta + a_{22}R\Theta'' + b_1R'\Theta + b_2R\Theta' + cR\Theta = 0.$$

On divise par $R\Theta$, on obtient :

$$a_{11}\frac{R''}{R} + a_{22}\frac{\Theta''}{\Theta} + b_1\frac{R'}{R} + b_2\frac{\Theta'}{\Theta} + c = 0. \tag{III.4}$$

Si on déplace tous les termes qui dépendent de r d'un côté et tous les termes qui dépendent de θ de l'autre on obtient :

$$a_{11}\frac{R''}{R} + b_1\frac{R'}{R} = -\left(a_{22}\frac{\Theta''}{\Theta} + b_2\frac{\Theta'}{\Theta} + c\right). \tag{III.5}$$

Pour que cette égalité soit possible, chaque côté de l'équation (III.5) doit être égal à une constante et on note cette constante par β.

$$a_{11}\frac{R''}{R} + b_1\frac{R'}{R} = -\left(a_{22}\frac{\Theta''}{\Theta} + b_2\frac{\Theta'}{\Theta} + c\right) = \beta.$$

Cela nous donne deux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$a_{11}R'' + b_1R' - \beta R = 0, \tag{III.6}$$

$$a_{22}\Theta'' + b_2\Theta' + (\beta + c)\Theta = 0. \tag{III.7}$$

Ces équations peuvent ensuite être résolues indépendamment, en fonction des conditions aux bords ou des conditions initiales données.

III-3 Résolution du Problème

Le polydisque P de centre 0 et de multi rayon $a = (a_1,...,a_n)$ dans $\mathbb{C}^n$ est défini par l'ensemble suivant :

$$P = \{(z_1, \cdots ,z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < a_1, \cdots , |z_n| < a_n\}.$$

Cela signifie que P est le produit de n disques dans $\mathbb{C}$, chacun centré à l'origine et de rayon a_i, où $i = 1,2,\dots,n$. On peut également exprimer P à l'aide des fonctions $\rho_j(z)$ définies par :

$$P = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho_j(z) < 0, \;\; j = 1, \cdots ,n\},$$

où $\rho_j(z) = |z_j|^2 - a_j^2$. Cela signifie que chaque variable z_j appartient à un disque de rayon a_j dans $\mathbb{C}$.

Considérons une $(0,q)$-forme différentielle u de classe C^∞ définie sur $\overline{P}$. Localement cette forme s'écrire de la manière suivante :

$$u = \sum_{|J|=q}{}' u_J d\overline{z}_J,$$

où $(z_1, \dots ,z_n)$ est un système de coordonnées locales dans P.

Pour tout entier q compris entre 1 et $n-1$, le problème des valeurs propres du Laplacien du $\overline{\partial}$-Neumann se réduit à la résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Box_q u = \lambda u$$

avec les conditions suivantes :

$$u \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial}_q^*),$$

$$\overline{\partial}_q u \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial}_q^*).$$

Pour identifier les valeurs propres de l'opérateur $\Box_q$, nous utilisons la méthode de séparation des variables et recherchons des formes propres dont les coefficients ont la forme suivante :

$$u_J(z) = \prod_{k=1}^{n} u_J^k(z_k), \tag{III.8}$$

où $z = (z_1, \cdots, z_n)$ représente les coordonnées dans $\mathbb{C}^n$, $J = (j_1, \cdots, j_n)$ est un multi-indice, et $u_J^k(z_k)$ est une fonction définie sur le disque de centre O et de rayon a_k.
Posons $z_k = a_k e^{i\theta_k}$, alors la condition de Dirichlet est donnée par :

$$u_J^k(a_k e^{i\theta_k}) = 0, \ \ quand \ \ k \in J \quad (Dirichlet). \tag{III.9}$$

Cette condition indique que la fonction u_J^k doit s'annuler sur le bord du disque de rayon a_k pour chaque $k \in J$.
Pour tout $K = (k_1, \ldots, k_{q+1})$, on écrit :

$$v_K = \sum_{l=1}^{q+1} (-1)^{l+1} \frac{\partial u^{K \setminus k_l}}{\partial \overline{z}_{k_l}},$$

où $K \setminus k_l$ représente la suppression de l'entrée k_l de K. Alors :

$$\overline{\partial}_q u = \sum_{|K|=q+1}' v_K d\overline{z}_K.$$

Ainsi, $\overline{\partial}_q u \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial}_q^*)$ si $v_J^j(z) = 0$ chaque fois que $|z_j| = a_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et un q-uplet J. En utilisant la séparation des variables (III.8), on a que $\overline{\partial}_q u \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial}_q^*)$, à condition que, en plus de (III.9), u_J satisfasse également :

$$\frac{\partial u_J^k}{\partial \overline{z}_k}(a_k e^{i\theta_k}) = 0, \quad \text{quand } k \notin J \quad (Neumann). \tag{III.10}$$

Ces conditions assurent que les formes propres associées à l'opérateur $\Box_q$ respectent les contraintes imposées par le domaine et les conditions aux bords.
D'après la **proposition** I-6.2, l'opérateur $\Box_q$ est relié au Laplacien classique Δ par la relation suivante :

$$\Box_q u_J = -\frac{1}{4}\Delta u_J.$$

En coordonnées complexes $(z_1, \ldots, z_n)$, le Laplacien partiel Δ_k s'écrit :

$$\Delta_k = 4\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z}_k}.$$

Le Laplacien total Δ est alors donné par la somme :

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k,$$

ou encore explicitement :

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} 4\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z}_k}.$$

L'équation aux valeurs propres associée devient :

$$\square_q u_J = \lambda u_J \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\Delta u_J = \lambda u_J,$$

ce qui s'écrit sous la forme :

$$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \Delta_k u_J = \lambda u_J. \tag{III.11}$$

Les valeurs propres globales du polydisque découlent de la combinaison des valeurs propres des disques individuels. Si λ_k est la k-ième valeur propre associée au k-ième disque, alors les valeurs propres λ du Laplacien du $\overline{\partial}$-Neumann sur le polydisque P sont données par :

$$\lambda = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

En remplaçant cette expression de λ dans l'équation (III.11), on obtient :

$$\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k). \tag{III.12}$$

En tenant compte de ces conditions aux bords (III.9) et (III.10), le problème des valeurs propres pour l'opérateur $\square_q$ se réduit aux équations suivantes :

$$\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k), \quad u_J^k(a_k e^{i\theta_k}) = 0, \quad \text{pour} \quad k \notin J \quad \text{(Dirichlet)} \tag{III.13}$$

$$\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k), \quad \frac{\partial u_J^k}{\partial \overline{z}_k}(a_k e^{i\theta_k}) = 0, \quad \text{pour} \quad k \in J \quad \text{(Neumann)} \tag{III.14}$$

La résolution des équations (III.13) et (III.14) nous permet de déterminer les valeurs propres λ_k et les fonctions propres $u_J^k(z_k)$ sur chaque disque $|z_k| < a_k$.

— Les valeurs propres globales λ de l'opérateur $\square_q$ sur le polydisque sont données par la somme des valeurs propres des disques individuels :

$$\lambda = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tag{III.15}$$

— De même, les fonctions propres globales $u_J(z)$ sont obtenues en prenant le produit des fonctions propres sur chaque disque :

$$u_J(z) = \prod_{k=1}^{n} u_J^k(z_k) \tag{III.16}$$

III-3-1 Étude des valeurs propres de l'opérateur Δ_k sur le disque $|z_k| < a_k$

Considérons un disque D_{a_k} de rayon a_k dans $\mathbb{C}$, défini comme suit :

$$D_{a_k} = \{z_k \in \mathbb{C} : |z_k| < a_k\}.$$

L'objectif est de résoudre l'équation aux valeurs propres de l'opérateur Laplacien sur ce disque :

$$\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k). \tag{III.17}$$

Pour ce faire, nous utilisons la méthode de séparation des variables. Cette approche permet de transformer l'équation (III.17) en deux équations différentielles ordinaires, chacune dépendant d'une seule variable. Les équations obtenues sont ensuite traitées séparément en appliquant :

— **Les conditions aux bords** (Dirichlet ou Neumann) sur le contour du disque.

— **Les conditions périodiques** liées à la nature angulaire des coordonnées polaires.

Ces étapes conduisent à la détermination des valeurs propres λ_k et des fonctions propres $u_J^k(z_k)$.

III-3-1.1 Spectre du Laplacien avec condition de Dirichlet

Le problème des valeurs propres avec des conditions aux bords de Dirichlet sur chaque disque $|z_k| < a_k$ se formule comme suit :

$$\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k), \tag{III.18}$$

où u_J^k est la fonction propre associée à la valeur propre λ_k sur le disque D_{a_k}. La condition aux bords de Dirichlet impose que

$$u_J^k(a_k e^{i\theta_k}) = 0 \quad \text{pour tout } \theta_k \in [0,2\pi]\,. \tag{III.19}$$

Le disque est un domaine qui possède une symétrie circulaire. En coordonnées cartésiennes (x,y), l'équation de Laplace prend une forme moins adaptée à cette symétrie, car les dérivées partielles ne reflètent pas directement la structure radiale et angulaire du disque.
Les coordonnées polaires (r_k,θ_k), définies par :

$$x = r_k \cos\theta_k, \quad y = r_k \sin\theta_k,$$

sont idéales pour un domaine circulaire car :
— r_k est la distance radiale au centre du disque,
— l'angle θ_k varie de 0 à 2π, suivant la symétrie angulaire.
Pour passer du Laplacien Δ_k en coordonnées cartésiennes (x,y) à son expression en coordonnées polaires (r,θ), nous devons exprimer les dérivées partielles par rapport à x et y en termes des dérivées partielles par rapport à r_k et θ_k.
Les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et polaires sont données par :

$$x = r_k \cos\theta_k, \quad y = r_k \sin\theta_k,$$
$$r_k = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta_k = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour une fonction u_J^k, les dérivées partielles en coordonnées cartésiennes peuvent être réécrites en coordonnées polaires grâce à la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial u_J^k}{\partial x} = \frac{\partial r_k}{\partial x}\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k} + \frac{\partial \theta_k}{\partial x}\frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k},$$
$$\frac{\partial u_J^k}{\partial y} = \frac{\partial r_k}{\partial y}\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k} + \frac{\partial \theta_k}{\partial y}\frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}.$$

Les dérivées partielles de r_k et θ_k par rapport à x et y :

$$\frac{\partial r_k}{\partial x} = \frac{x}{r_k}, \quad \frac{\partial r_k}{\partial y} = \frac{y}{r_k},$$
$$\frac{\partial \theta_k}{\partial x} = -\frac{y}{r_k^2}, \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial y} = \frac{x}{r_k^2}.$$

Pour la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}\frac{\partial r_k}{\partial x} + \frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\right),\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}\right)\frac{\partial r_k}{\partial x} + \frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}\frac{\partial^2 r_k}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}\right)\frac{\partial \theta_k}{\partial x} + \frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}\frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2},\\
&= \left(\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k^2}\frac{\partial r_k}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k \partial \theta_k}\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\right)\frac{\partial r_k}{\partial x} + \frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}\frac{\partial^2 r_k}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k \partial r_k}\frac{\partial r_k}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k^2}\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta_k}{\partial x} + \frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}\frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2},\\
&= \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k^2}\left(\frac{x}{r_k}\right)^2 + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k \partial \theta_k}\left(\frac{x}{r_k}\right)\left(\frac{-y}{r_k^2}\right) + \frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}\left(\frac{y^2}{r_k^3}\right) + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k \partial r_k}\left(\frac{x}{r_k}\right)\left(\frac{-y}{r_k^2}\right) + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k^2}\left(\frac{-y}{r_k^2}\right)^2 +\\
&\qquad \frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}\left(\frac{2xy}{r_k^4}\right).
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles secondes sont continues, alors on a :

$$\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k \partial r_k} = \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k \partial \theta_k}.$$

Donc,

$$\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k^2}\left(\frac{x^2}{r_k^2}\right) + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k \partial \theta_k}\left(\frac{-2xy}{r_k^3}\right) + \frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}\left(\frac{y^2}{r_k^3}\right) + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k^2}\left(\frac{y^2}{r_k^4}\right) + \frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}\left(\frac{2xy}{r_k^4}\right). \tag{III.20}$$

Et de la même façon, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k^2}\left(\frac{y^2}{r_k^2}\right) + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k \partial \theta_k}\left(\frac{2xy}{r_k^3}\right) + \frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}\left(\frac{x^2}{r_k^3}\right) + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k^2}\left(\frac{x^2}{r_k^4}\right) + \frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}\left(\frac{-2xy}{r_k^4}\right). \tag{III.21}$$

En sommant (III.20) et (III.21) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k}\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2}\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k^2}.$$

Donc l'opérateur de Laplacien en coordonnées polaires est :

$$\Delta_k u_J^k = \frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k}\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2}\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k^2}. \tag{III.22}$$

Ainsi l'équation (III.18) devient

$$\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial r_k^2}(z_k) + \frac{1}{r_k}\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}(z_k) + \frac{1}{r_k^2}\frac{\partial^2 u_J^k}{\partial \theta_k^2}(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k). \tag{III.23}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables en coordonnées polaires, on pose :

$$u_j^k(z_k) = R(r_k)\Theta(\theta_k) \neq 0, \tag{III.24}$$

où $R(r_k)$ est une fonction de r_k et $\Theta(\theta_k)$ est une fonction de θ_k.
Maintenant, nous calculons la dérivée seconde par rapport à r_k

$$\frac{\partial^2 u_j^k}{\partial r_k^2}(z_k) = R''(r_k)\Theta(\theta_k), \tag{III.25}$$

et la dérivée seconde par rapport à θ_k

$$\frac{\partial^2 u_j^k}{\partial \theta_k^2}(z_k) = R(r_k)\Theta''(\theta_k). \tag{III.26}$$

On remplaçons (III.24), (III.25) et (III.26) dans (III.23), on obtient :

$$R''\Theta + \frac{1}{r_k}R'\Theta + \frac{1}{r_k^2}R\Theta'' = -\lambda_k R\Theta.$$

En divisant les deux côtés par $R\Theta$ et en multipliant les deux côtés par r_k^2, on obtient :

$$r_k^2\frac{R''}{R} + r_k\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = -r_k^2\lambda_k.$$

Si on déplace d'un côté tous les termes qui dépendent de r_k et de l'autre les termes qui dépendent de θ_k, on obtient

$$r_k^2\frac{R''}{R} + r_k\frac{R'}{R} + r_k^2\lambda_k = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \tag{III.27}$$

Pour que cette égalité soit possible, chaque côté de l'équation (III.27) doit être égal à une constante et on note cette constante par ν, ce qui donne

$$r_k^2\frac{R''}{R}+r_k\frac{R'}{R}+r_k^2\lambda_k=\frac{-\Theta''}{\Theta}=\nu.$$

Cela nous donne deux équations différentielles ordinaires suivantes :

- Une équation différentielle angulaire pour $\Theta(\theta_k)$:

$$\Theta''+\nu\Theta=0, \tag{III.28}$$

- Une équation différentielle radiale pour $R(r_k)$:

$$r_k^2R''+r_kR'+(r_k^2\lambda_k-\nu)R=0. \tag{III.29}$$

Pour résoudre l'équation (III.28), il est nécessaire d'imposer des conditions aux bords appropriées. La fonction $\Theta(\theta_k)$ doit être périodique avec une période de 2π sinon la fonction obtenue ne serait pas une fonction propre pour l'opérateur Δ_k. On obtient donc :

$$\Theta(\theta_k+2\pi)=\Theta(\theta_k).$$

Cette périodicité nous amène au problème suivant :

$$\Theta''+\nu\Theta=0,\quad 0\leqslant\theta_k<2\pi, \tag{III.30}$$

$$\Theta(0)=\Theta(2\pi),\quad \Theta'(0)=\Theta'(2\pi). \tag{III.31}$$

- Pour $\nu=0$
  L'équation différentielle est :
  $$\Theta''=0.$$
  La solution générale est :
  $$\Theta(\theta_k)=A\theta_k+B.$$
  Pour que cette solution soit périodique, il faut que :
  $$\begin{aligned}\Theta(0)=\Theta(2\pi)&\Rightarrow B=2\pi A+B,\\ &\Rightarrow A=0.\end{aligned}$$
  Donc
  $$\Theta(\theta_k)=B,$$
  où B est une constante.
  En conséquence, la seule solution périodique pour $\nu=0$ est une constante.
  En normalisant la solution, on obtient :
  $$\Theta(\theta_k)=1\quad\text{pour}\quad\nu=0.$$

- Pour $\nu<0$.
  On peut définir $\nu=-\alpha^2$. Alors, l'équation devient :
  $$\Theta''-\alpha^2\Theta=0.$$
  Les solutions générales sont :
  $$\Theta(\theta_k)=C_1e^{\alpha\theta_k}+C_2e^{-\alpha\theta_k}.$$

Pour que ces solutions soient périodiques, elles doivent satisfaire les conditions :

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi).$$

$$\begin{aligned}\Theta(0) = \Theta(2\pi) &\Rightarrow C_1 e^{2\pi\alpha} + C_2 e^{-2\pi\alpha} = C_1 + C_2, \\ &\Rightarrow e^{2\pi\alpha} = 1 \quad et \quad e^{-2\pi\alpha} = 1.\end{aligned}$$

Ce qui est vrai uniquement si $\alpha = 0$ (ce qui nous ramène au cas à $\nu = 0$).

- Pour $\nu > 0$.
  Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
  La solution générale est la suivante :

$$\Theta(\theta_k) = A\cos(\theta_k\sqrt{\nu}) + B\sin(\theta_k\sqrt{\nu}). \tag{III.32}$$

Les conditions de périodicité (III.31) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\Theta(0) = \Theta(2\pi) &\Rightarrow A = A\cos(2\pi\sqrt{\nu}) + B\sin(2\pi\sqrt{\nu}), \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) &\Rightarrow B = -A\sin(2\pi\sqrt{\nu}) + B\cos(2\pi\sqrt{\nu}).\end{aligned}$$

Les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle (système d'équations linéaires homogènes) :

$$\begin{pmatrix} -1+\cos(2\pi\sqrt{\nu}) & \sin(2\pi\sqrt{\nu}) \\ -\sin(2\pi\sqrt{\nu}) & -1+\cos(2\pi\sqrt{\nu}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe une infinité de solutions non triviales (ie $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$) si et seulement si le déterminant de la matrice est nul :

$$(-1+\cos(2\pi\sqrt{\nu}))^2 + \sin^2(2\pi\sqrt{\nu}) = 0$$

donc $\cos(2\pi\sqrt{\nu}) = 1$ de sorte que $\sqrt{\nu} = n_k$ ou les n_k sont des entier nature.
Donc, les solutions non-triviales $\Theta(\theta_k)$ qui satisfont à l'équation $\Theta'' + \nu\Theta = 0$ et aux conditions de périodicité sont les combinaisons linéaires des fonctions trigonométriques $\cos(n_k\theta_k)$ et $\sin(n_k\theta_k)$ pour des entiers n_k.
La solution générale est :

$$\Theta(\theta_k) = A\cos(n_k\theta_k) + B\sin(n_k\theta_k). \tag{III.33}$$

Les formules d'Euler sont données par :

$$\begin{aligned}\cos(\theta_k) &= \frac{e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}}{2}, \\ \sin(\theta_k) &= \frac{e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_k}}{2i}.\end{aligned}$$

En appliquant ces formules à notre solution (III.33), on obtient :

$$\begin{aligned}\Theta(\theta_k) &= A\frac{e^{in_k\theta_k} + e^{-in_k\theta_k}}{2} + B\frac{e^{in_k\theta_k} - e^{-in_k\theta_k}}{2i}, \\ &= \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right)e^{in_k\theta_k} + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2i}\right)e^{-in_k\theta_k}.\end{aligned}$$

On pose $C = \frac{A}{2} + \frac{B}{2i}$ et $D = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i}$, on a alors :

$$\Theta(\theta_k) = Ce^{in_k\theta_k} + De^{-in_k\theta_k},$$

où C et D sont des constantes complexes.
Par convention et pour simplification, on utilise souvent la solution $e^{in_k\theta_k}$ comme base de solutions périodiques, car les deux solutions exponentielles $e^{in_k\theta_k}$ et $e^{-in_k\theta_k}$ sont conjuguées complexes. Donc pour $\nu > 0$ on a :

$$\Theta(\theta_k) = e^{in_k\theta_k} \quad \nu = n_k^2.$$

D'où les solutions de l'équation (III.28) sont :

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} 1 \;\; pour \;\; \nu = 0. \\ pas \; de \; solution \;\; pour \;\; \nu < 0 \\ e^{in_k\theta_k} \;\; pour \;\; \nu > 0 \end{cases} \tag{III.34}$$

Une propriété similaire du théorème II-4 s'applique aux solutions angulaires $\{e^{in_k\theta_k}\}$.

Les fonctions propres $e^{in_k\theta_k}$ et $e^{-in'_k\theta_k}$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} e^{in_k\theta_k}\, e^{-in'_k\theta_k}\, d\theta_k = \int_0^{2\pi} e^{i(n_k-n'_k)\theta_k}\, d\theta_k = 2\pi\delta_{n_kn'_k}, \tag{III.35}$$

où $\delta_{n_kn'_k}$ est le symbole de Kronecker, défini comme :

$$\delta_{n_kn'_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_k = n'_k, \\ 0 & \text{si } n_k \neq n'_k. \end{cases}$$

Ces résultats montrent que les fonctions angulaires sont orthogonales sur l'intervalle $[0{,}2\pi]$.

Maintenant on s'intéresse à l'équation (III.29).
La formule de Rayleigh pour les valeurs propres est donnée par :

$$\lambda_k = -\frac{\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k}}{\int_{D_{a_k}} |u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}}. \tag{III.36}$$

En utilisant l'équation différentielle $\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k)$, on a :

$$\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} = -\lambda_k \int_{D_{a_k}} |u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}. \tag{III.37}$$

Pour calculer l'intégrale :

$$\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k}, \tag{III.38}$$

on utilise la formule d'intégration par parties pour l'opérateur Laplacien donne par :

$$\int_\Omega v\, \Delta u\, d\Omega = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v\, \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale de u sur la frontière $\partial\Omega$.
Dans notre cas, nous prenons $v = u_J^k(z_k)$ et $u = u_J^k(z_k)$. Donc :

$$\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} = -\int_{D_{a_k}} \nabla u_J^k(z_k) \cdot \nabla u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} + \int_{\partial D_{a_k}} u_J^k(z_k) \frac{\partial u_J^k(z_k)}{\partial n}\, dS.$$

Avec les conditions aux bords de Dirichlet :

$$u_J^k(z_k) = 0 \text{ sur } \partial D_{a_k},$$

on a :

$$\int_{\partial D_{a_k}} u_J^k(z_k) \frac{\partial u_J^k(z_k)}{\partial n}\, dS = 0.$$

Il en résulte que :

$$\int_\Omega (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} = -\int_\Omega |\nabla u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}. \tag{III.39}$$

En remplaçant (III.39) dans (III.58) on a :

$$\lambda_k = \frac{\int_{D_{a_k}} |\nabla u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}}{\int_{D_{a_k}} |u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}}.$$

Le numérateur $\int_{D_{a_k}} |\nabla u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}$ est positif car il représente l'intégrale d'une norme au carré, ce qui ne peut pas être négatif. Pour une fonction propre non triviale, cette intégrale est strictement positive, car $u_J^k(z_k)$ n'est pas identiquement nul à l'intérieur du domaine D_{a_k}.
Le dénominateur $\int_{D_{a_k}} |u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}$ est strictement positif pour les fonctions propres non nulles.
Les conditions aux bords de Dirichlet imposent que $u_J^k(z_k)$ est nulle sur le bord, mais à l'intérieur du domaine D_{a_k}, $u_J^k(z_k)$ n'est pas identiquement nulle (pour une fonction propre non triviale), garantissant que ce dénominateur est strictement positif.
Ainsi, λ_k est strictement positif.
On cherche les valeurs $\lambda_k > 0$ telles que :

$$r_k^2 R'' + r_k R' + (r_k^2 \lambda_k - \nu) R = 0. \tag{III.40}$$

On pose $r = \sqrt{\lambda_k} r_k$. On a :

$$\frac{dR}{dr_k} = \sqrt{\lambda_k} \frac{dR}{dr},$$
$$\frac{d^2R}{dr_k^2} = \lambda_k \frac{d^2R}{dr^2}.$$

En remplaçant ces dérivées dans l'équation différentielle (III.40), on obtient :

$$r_k^2 \left(\lambda_k \frac{d^2R}{dr^2}\right) + r_k \left(\sqrt{\lambda_k} \frac{dR}{dr}\right) + \left(r_k^2 \lambda_k - \nu\right) R = 0.$$

En utilisant $r_k = \dfrac{r}{\sqrt{\lambda_k}}$, on a :

$$\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2 \lambda_k \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\lambda_k} \frac{dR}{dr} + \left(\frac{r^2}{\lambda_k} \lambda_k - \nu\right) R = 0.$$

On obtient :

$$r^2 R'' + r R' + \left(r^2 - \nu\right) R = 0, \tag{III.41}$$

on reconnaît ainsi l'équation de Bessel d'ordre $\nu = n_k^2$.
Donc, l'équation différentielle initiale se transforme en une équation de Bessel d'ordre ν après le changement de variable. D'après le chapitre II la solution générale de l'équation (III.41) est de la forme :

$$R(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(i+\nu)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2i+\nu}.$$

Cette série est connue sous le nom de fonction de Bessel de premier espèce et est notée $J_\nu(r)$.
La condition de Dirichlet $u_J^k(a_k e^{i\theta_k}) = 0$ implique que :

$$R(a_k)\Theta(\theta_k) = 0. \tag{III.42}$$

Ce qui conduit à :

$$R(a_k) = 0.$$

Donc :

$$J_{n_k}(\sqrt{\lambda_k} a_k) = 0.$$

Les valeurs propres λ_k sont donc déterminées par les zéros des fonctions de Bessel :

$$\sqrt{\lambda_k} a_k = \lambda_{n_k,j_k},$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\lambda_{n_k,j_k}}{a_k}\right)^2,$$

où λ_{n_k,j_k} est le j_k-ème zéro de la fonction de Bessel.

Les fonctions propres radiales associées aux valeurs propres λ_k pour l'opérateur Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet sur le disque sont de la forme :

$$R(r_k) = J_{n_k}\left(\frac{\lambda_{n_k,j_k}}{a_k} r_k\right). \tag{III.43}$$

Une propriété similaire du théorème II-4 s'applique aux fonctions radiales.
Les fonctions propres $J_{m_k}(\beta_{n_k,n_k} r_k)$ et $J_{m_k}(\beta_{j_k,n_k} r_k)$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^{a_k} J_{n_k}(\beta_{m_k,n_k} r_k) J_{n_k}(\beta_{j_k,n_k} r_k) r_k \, dr_k = 0, \quad \text{pour } m_k \neq j_k, \tag{III.44}$$

où β_{m_k,n_k} est défini par :

$$\beta_{m_k,n_k} = \frac{\lambda_{m_k,n_k}}{a_k},$$

et λ_{m_k,n_k} est le m_k-ième zéro positif de la fonction de Bessel $J_{n_k}(r)$.

La solution générale de l'équation différentielle $\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k)$, en coordonnées polaires avec des conditions de Dirichlet sur le disque $|z_k| < a_k$, est donnée par :

$$u_J^k(z_k) = \underbrace{J_{n_k}\left(\frac{\lambda_{n_k,j_k}}{a_k} r_k\right)}_{\text{radial}} \underbrace{e^{in_k\theta_k}}_{\text{angulaire}}.$$

Pour le cas particulier où $n_k = 0$, la solution se simplifie à :

$$u_J^k(z_k) = J_0\left(\frac{\lambda_{0,j_k}}{a_k} r_k\right),$$

ce qui correspond à une solution purement radiale.

En intégrant sur l'ensemble du domaine $z_k = (r_k,\theta_k)$, on obtient :

$$\int_D u_j^k(z_k)\overline{u_{j'}^{k'}(z_k)}\,dA_k = \int_0^{a_k}\int_0^{2\pi} R_{m_k}(r_k)\Theta_{n_k}(\theta_k)\overline{R_{m'_k}(r_k)\Theta_{n'_k}(\theta_k)}\,r_k\,d\theta_k\,dr_k,$$

où $dA_k = r_k\,dr_k\,d\theta_k$ est l'élément de surface en coordonnées polaires.
En séparant les intégrales radiale et angulaire :

$$\int_D u_j^k(z_k)\overline{u_{j'}^{k'}(z_k)}\,dA_k = \left(\int_0^{a_k} R_{m_k}(r_k)\overline{R_{m'_k}(r_k)}r_k\,dr_k\right)\left(\int_0^{2\pi}\Theta_{n_k}(\theta_k)\overline{\Theta_{n'_k}(\theta_k)}\,d\theta_k\right).$$

En utilisant les relations d'orthogonalité des fonctions radiales et angulaires :

— La partie radiale donne 0 si $m_k \neq m'_k$,

— La partie angulaire donne 0 si $n_k \neq n'_k$.

Ainsi, la fonction $u_j^k(z_k)$ est orthogonale si $(m_k,n_k) \neq (m'_k,n'_k)$.

III-3-1.2 Spectre du Laplacien avec condition de Neumann

Nous examinerons ici le problème avec condition aux bords de Neumann en utilisant la méthode de séparation des variables en coordonnées polaires. Pour éviter les répétitions, nous nous concentrerons sur les aspects distinctifs de cette condition par rapport à celle de Dirichlet, sans reprendre les calculs déjà réalisés.

Le problème des valeurs propres avec des conditions aux bords de Neumann sur chaque disque $|z_k| < a_k$ se formule comme suit :

$$\Delta_k u_J^k = -\lambda_k u_J^k(z_k), \tag{III.45}$$

avec la condition aux bords :

$$\frac{\partial u_J^k}{\partial \bar{z}_k}(a_k e^{i\theta_k}) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad \theta_k \in [0,2\pi]\,. \tag{III.46}$$

La méthode de séparation des variables en coordonnées polaires pour le problème des valeurs propres sous conditions de Neumann conduit à l'équation suivante :

$$r_k^2\frac{R''}{R} + r_k\frac{R'}{R} + r_k^2\lambda_k = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \tag{III.47}$$

Pour que cette égalité soit possible, chaque côté de l'équation (III.47) doit être égal à une constante et on note cette constante par μ, on obtient :

$$r_k^2\frac{R''}{R} + r_k\frac{R'}{R} + r_k^2\lambda_k = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu \quad \text{(constant)}.$$

Cela nous donne deux équations différentielles ordinaires suivantes :

- Pour la partie angulaire :

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0, \tag{III.48}$$

- Pour la partie radiale :

$$r_k^2 R'' + r_k R' + (r_k^2\lambda_k - \mu)R = 0. \tag{III.49}$$

Les dérivée des fonctions propres par rapport à $\overline{z}_k$ est donnée par :

$$\frac{\partial u_J^k}{\partial \overline{z}_k}(z_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_J^k}{\partial r_k}(z_k) + \frac{i}{r_k}\frac{\partial u_J^k}{\partial \theta_k}(z_k)\right). \tag{III.50}$$

En posant $u_J^k(z_k) = R(r_k)\Theta(\theta_k)$ et en utilisant les conditions aux bords de Neumann, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(R'(a_k)\Theta(\theta_k) + \frac{i}{a_k}R(a_k)\Theta'(\theta_k)\right) = 0.$$

Cette équation implique que :

$$R'(a_k)\Theta(\theta_k) = -\frac{i}{a_k}R(a_k)\Theta'(\theta_k).$$

En divisant cette équation par $R(a_k)\Theta(\theta_k)$, on obtient :

$$\frac{R'}{R}(a_k) = -\frac{i}{a_k}\frac{\Theta'}{\Theta}(\theta_k). \tag{III.51}$$

Pour que $\Theta(\theta)$ soit périodique avec une période 2π, on impose :

$$\Theta(\theta_k + 2\pi) = \Theta(\theta_k). \tag{III.52}$$

Ainsi d'après (III.48), (III.49), (III.51) et (III.52) on obtient :

$$\Theta''(\theta_k) + \mu\Theta(\theta_k) = 0 \quad et \quad \Theta(\theta_k + 2\pi) = \Theta(\theta_k), \tag{III.53}$$

$$r_k^2R'' + r_kR' + (r_k^2\lambda_k - m_k^2)R = 0 \quad et \quad \frac{R'}{R}(a_k) = -\frac{i}{a_k}\frac{\Theta'}{\Theta}(\theta_k). \tag{III.54}$$

Commençons par l'équation (III.53),

$$\Theta''(\theta_k) + \mu\Theta(\theta_k) = 0 \quad et \quad \Theta(\theta_k + 2\pi) = \Theta(\theta_k).$$

Les solutions de l'équation (III.53) sont :

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} 1 \;\; pour \;\; \mu = 0 \\ pas \; de \; solution \;\; pour \;\; \mu < 0 \\ e^{im_k\theta_k} \;\; pour \;\; \mu > 0 \end{cases}. \tag{III.55}$$

Une propriété similaire du théorème II-4 s'applique aux solutions angulaires $\{e^{in_k\theta_k}\}$.

Les fonctions propres $e^{in_k\theta_k}$ et $e^{-in'_k\theta_k}$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} e^{in_k\theta_k}\, e^{-in'_k\theta_k}\, d\theta_k = \int_0^{2\pi} e^{i(n_k - n'_k)\theta_k}\, d\theta_k = 2\pi\delta_{n_kn'_k}, \tag{III.56}$$

où $\delta_{n_kn'_k}$ est le symbole de Kronecker, défini comme :

$$\delta_{n_kn'_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_k = n'_k, \\ 0 & \text{si } n_k \neq n'_k. \end{cases}$$

Ces résultats montrent que les fonctions angulaires sont orthogonales sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

On s'intéresse maintenant à l'équation

$$r_k^2 R'' + r_k R' + (r_k^2 \lambda_k - \mu) R = 0. \tag{III.57}$$

La formule de Rayleigh pour les valeurs propres est donnée par :

$$\lambda_k = -\frac{\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k}}{\int_{D_{a_k}} |u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}}. \tag{III.58}$$

En utilisant l'équation différentielle $\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k)$, on a :

$$\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} = -\lambda_k \int_{D_{a_k}} |u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}. \tag{III.59}$$

Pour calculer cette l'intégrale :

$$\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k}, \tag{III.60}$$

on utilise la formule d'intégration par parties pour l'opérateur Laplacien est :

$$\int_{D_{a_k}} v\, \Delta u\, dD_{a_k} = -\int_{D_{a_k}} \nabla v \cdot \nabla u\, dD_{a_k} + \int_{\partial D_{a_k}} v\, \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale de u sur la frontière $\partial\Omega$. Dans notre cas, nous prenons $v = u_J^k(z_k)$ et $u = u_J^k(z_k)$. Donc :

$$\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} = -\int_{D_{a_k}} \nabla u_J^k(z_k) \cdot \nabla u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} + \int_{\partial D_{a_k}} u_J^k(z_k) \frac{\partial u_J^k(z_k)}{\partial n}\, dS.$$

Avec les conditions aux bords de Neumann :

$$\frac{\partial u_J^k}{\partial \bar{z}_k}(z_k) = 0 \text{ sur } \partial D_{a_k},$$

on a :

$$\int_{\partial\Omega} u_J^k(z_k) \frac{\partial u_J^k(z_k)}{\partial n}\, dD_{a_k} = 0.$$

Il en résulte que :

$$\int_{D_{a_k}} (\Delta_k u_J^k(z_k)) u_J^k(z_k)\, dD_{a_k} = -\int_{D_{a_k}} |\nabla u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}. \tag{III.61}$$

En remplaçant (III.61) dans (III.58) on a :

$$\lambda_k = \frac{\int_{D_{a_k}} |\nabla u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}}{\int_{D_{a_k}} |u_J^k(z_k)|^2\, dD_{a_k}}. \tag{III.62}$$

— Le numérateur $\int_{D_{a_k}} |\nabla u_J^k|^2\, dD_{a_k}$ représente une norme au carré et est donc toujours **positif**.

— Le dénominateur $\int_{D_{a_k}} |u_J^k|^2\, dD_{a_k}$ est **positif** car $u_J^k(z_k)$ ne peut pas être identiquement nul sur l'ensemble D_{a_k} (en vertu du principe du maximum pour les solutions des équations elliptiques).

Ainsi, λ_k est toujours **positif ou nul** :

$$\lambda_k \geq 0.$$

- **Cas 1** si $\lambda_k = 0$, par la régularité elliptique intérieure, les fonctions propres doivent être polynomiales pour garantir leur régularité à l'origine. Alors la valeur propre $\lambda_k = 0$ est associée à des fonctions propres de la forme $z_k^{|m_k|}$, qui respectent les conditions aux bords de Neumann.
  Pour obtenir une solution de la forme $z_k^{|m_k|}$, nous devons exprimer $R(r_k)$ en termes de r_k pour correspondre à cette forme. En coordonnées polaires, où $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, on a :

$$z_k^{|m_k|} = (r_k e^{i\theta_k})^{|m_k|} = r_k^{|m_k|} e^{i|m_k|\theta_k}.$$

  — Vérifions que $R(r_k) = r_k^{|m_k|}$ est solution de l'équation différentielle (III.57) si et seulement si $\mu = |m_k|^2$ et $\lambda_k = 0$.
  Les dérivées de $R(r_k)$ sont :

$$R'(r_k) = |m_k| r_k^{|m_k|-1},$$

$$R''(r_k) = |m_k|(|m_k| - 1) r_k^{|m_k|-2}.$$

  En remplaçant ces dérivées dans l'équation différentielle (III.57), on obtient :

$$r_k^2 |m_k|(|m_k| - 1) r_k^{|m_k|-2} + r_k |m_k| r_k^{|m_k|-1} + (r_k^2 \lambda_k - \mu) r_k^{|m_k|} = 0.$$

  En simplifier on a :

$$\left[|m_k|(|m_k| - 1) + |m_k| - \mu\right] r_k^{|m_k|} + \lambda_k r_k^{|m_k|+2} = 0.$$

  Pour que l'équation soit vérifiée pour tout r_k, les coefficients des puissances de r_k doivent être égaux à zéro, on a :

$$\begin{cases} |m_k|(|m_k| - 1) + |m_k| - \mu = 0, \\ \lambda_k = 0. \end{cases} \tag{III.63}$$

  Cela se traduit par :

$$\begin{cases} \mu = |m_k|^2, \\ \lambda_k = 0. \end{cases} \tag{III.64}$$

  Ainsi, $R(r_k) = r_k^{|m_k|}$ est bien une solution de l'équation différentielle (III.57) si et seulement si

$$\mu = |m_k|^2 \quad et \quad \lambda_k = 0.$$

  — Vérifions que $R(r_k) = r_k^{|m_k|}$ satisfait la condition aux bords de Neumann si et seulement si

$$|m_k| = 0.$$

  La condition aux bords de Neumann sur le disque de rayon a_k est donnée par :

$$\left.\frac{\partial R}{\partial r_k}\right|_{r_k = a_k} = 0.$$

  Cela implique :

$$|m_k| a_k^{|m_k|-1} = 0.$$

Puisque $a_k \neq 0$, alors $|m_k| = 0$.
Ainsi, $R(r_k) = r_k^{|m_k|}$ satisfait la condition aux bords de Neumann si et seulement si $|m_k| = 0$.
Donc si la valeur propre $\lambda_k = 0$, la fonction propre associée à cette valeur propre est $z_k^{|m_k|}$.

- **Cas 2** si $\lambda_k > 0$,

$$r_k^2 R'' + r_k R' + (r_k^2 \lambda_k - \mu) R = 0 \quad et \quad \frac{R'}{R}(a_k) = -\frac{i}{a_k}\frac{\Theta'}{\Theta}(\theta_k). \tag{III.65}$$

En utilisant maintenant le changement de variable suivante :

$$r = r_k\sqrt{\lambda_k} \Rightarrow r_k = \frac{r}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

l'équation devient (III.65)

$$r^2 R'' + rR' + \left(r^2 - \mu\right) R = 0. \tag{III.66}$$

Ainsi, l'équation différentielle initiale se transforme en une équation de Bessel d'ordre $\mu = m_k^2$ après le changement de variable. D'après le chapitre II la solution générale de cette équation (III.66) est de la forme :

$$R(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(i+\mu)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2i+m_k}.$$

Cette série est connue sous le nom de fonction de Bessel de premier espèce et est notée $J_{m_k}(r)$.
La condition aux bords de Neumann à $r_k = a_k$ donne :

$$\frac{R'(a_k)}{R(a_k)} = -\frac{i}{a_k}\frac{\Theta'}{\Theta}(\theta_k).$$

Posons $r = a_k\sqrt{\lambda_k}$, $\Rightarrow a_k = \dfrac{r}{\sqrt{\lambda_k}}$.
On a :

$$-\frac{i}{a_k}\frac{\Theta'}{\Theta}(\theta_k) = -\frac{i}{a_k}\frac{im_k e^{im_k\theta_k}}{e^{im_k\theta_k}} = \frac{m_k}{a_k},$$

On obtient :

$$\frac{R'(r)}{R(r)} = \frac{m_k}{a_k}.$$

Ce qui implique :

$$a_k R'(r) = m_k R(r).$$

Donc, en remplaçant r par $a_k\sqrt{\lambda_k}$ on obtient :

$$a_k\sqrt{\lambda_k} R'(a_k\sqrt{\lambda_k}) = m_k R(a_k\sqrt{\lambda_k}).$$

Ainsi, l'équation devient :

$$a_k\sqrt{\lambda_k} R'(a_k\sqrt{\lambda_k}) - m_k R(a_k\sqrt{\lambda_k}) = 0.$$

La fonction de Bessel $J_{m_k+1}(r)$ vérifie la relations de récurrence suivante (voir II-3)

$$J_{m_k+1}(r) = \frac{m_k}{r}J_{m_k}(r) - J'_{m_k}(r) \tag{III.67}$$

On a :

$$J_{m_k}(r) = r^{m_k}$$

En remplaçant $J_{m_k}(r)$ par r^{m_k} dans (III.67) on obtient :

$$\begin{aligned} J_{m_k+1}(r) &= \frac{m_k}{r} r^{m_k} - m_k r^{m_k-1} \\ &= m_k r^{m_k-1} - m_k r^{m_k-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela implique que pour $r = a_k\sqrt{\lambda_k}$, on a :

$$J_{m_k+1}(a_k\sqrt{\lambda_k}) = 0.$$

En notant λ_{m_k+1,j_k} les zéros de la fonction de Bessel J_{m_k+1}, on a donc :

$$\sqrt{\lambda_k} a_k = \lambda_{m_k+1,j_k},$$

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{\lambda_{m_k+1,j_k}}{a_k}.$$

Les valeurs propres λ_k pour l'opérateur Laplacien avec conditions aux bords de Neumann sur le disque sont de la forme :

$$\lambda_k = \left(\frac{\lambda_{m_k+1,j_k}}{a_k}\right)^2.$$

Les fonctions propres associées aux valeurs propres λ_k pour le Laplacien avec des conditions aux bords de Neumann sur le disque sont données par :

$$R(r) = J_{m_k}\left(\frac{\lambda_{m_k+1,j_k}}{a_k} r_k\right). \tag{III.68}$$

Une propriété similaire du théorème II-4 s'applique aux fonctions radiales.
Les fonctions propres $J_{m_k}(\beta_{n_k,m_k} r_k)$ et $J_{m_k}(\beta_{j_k,m_k} r_k)$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^{a_k} J_{m_k}(\beta_{n_k,m_k} r_k) J_{m_k}(\beta_{j_k,m_k} r_k) r_k \, dr_k = 0, \quad \text{pour } n_k \neq j_k, \tag{III.69}$$

où β_{n_k,m_k} est défini par :

$$\beta_{n_k,m_k} = \frac{\lambda_{n_k+1,m_k}}{a_k},$$

et λ_{n_k+1,m_k} représente le $n_k + 1$-ième zéro positif de la fonction de Bessel $J_{m_k}(r)$.
Ces résultats montrent que les fonctions radiales sont orthogonales sur l'intervalle $[0,a_k]$.

La solution générale de l'équation différentielle $\Delta_k u_J^k(z_k) = -\lambda_k u_J^k(z_k)$, en coordonnées polaires avec des conditions de Neumann sur le disque $|z_k| < a_k$, est donnée par :

$$u_J^k(z_k) = \underbrace{J_{m_k}\left(\frac{\lambda_{m_k+1,j_k}}{a_k} r_k\right)}_{radial} \underbrace{e^{i m_k \theta_k}}_{angular}$$

Pour le cas particulier où $m_k = 0$, la solution se simplifie à :

$$u_J^k(z_k) = J_0\left(\frac{\lambda_{1,j_k}}{a_k} r_k\right)$$

ce qui correspond à une solution purement radiale.

En intégrant sur l'ensemble du domaine $z_k = (r_k,\theta_k)$, on obtient :

$$\int_D u_j^k(z_k)\overline{u_{j'}^{k'}(z_k)}\, dA_k = \int_0^{a_k}\int_0^{2\pi} R_{m_k}(r_k)\Theta_{n_k}(\theta_k)\overline{R_{m_k'}(r_k)\Theta_{n_k'}(\theta_k)}\, r_k\, d\theta_k\, dr_k,$$

où $dA_k = r_k\, dr_k\, d\theta_k$ est l'élément de surface en coordonnées polaires.
En séparant les intégrales radiale et angulaire :

$$\int_D u_j^k(z_k)\overline{u_{j'}^{k'}(z_k)}\, dA_k = \left(\int_0^{a_k} R_{m_k}(r_k)\overline{R_{m_k'}(r_k)} r_k\, dr_k\right)\left(\int_0^{2\pi} \Theta_{n_k}(\theta_k)\overline{\Theta_{n_k'}(\theta_k)}\, d\theta_k\right).$$

En utilisant les relations d'orthogonalité des fonctions radiales et angulaires :
— La partie radiale donne 0 si $m_k \neq m_k'$,
— La partie angulaire donne 0 si $n_k \neq n_k'$.
Ainsi, la fonction $u_j^k(z_k)$ est orthogonale si $(m_k,n_k) \neq (m_k',n_k')$.

La multiplicité infinie des valeurs propres du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur le polydisque découle de la structure complexe de l'espace et des fonctions de Bessel impliquées. En effet, les valeurs propres sont déterminées par les zéros des fonctions de Bessel $J_{m_k}(r)$, dont il existe une infinité pour chaque indice m_k, ce qui conduit à une série infinie de valeurs propres. Cette propriété est renforcée par la géométrie du polydisque, permettant ainsi une infinité de solutions associées à chaque valeur propre.

III-3-2 Étude des valeurs propres de l'opérateur $\Box_q$ sur le polydisque P

Après avoir déterminé les valeurs propres et les fonctions propres sur le disque D_{a_k}, nous pouvons maintenant en déduire celles sur le polydisque P. En effet, puisque P est le produit de n disques dans $\mathbb{C}$, ses valeurs propres correspondent à la somme des valeurs propres des disques individuels. Par ailleurs, les fonctions propres sur P s'obtiennent comme le produit des fonctions propres associées à chaque disque. Ainsi le spectre de $\Box_q$ sur le polydisque P contient les valeurs propres

$$\frac{1}{4}\sum_{k\in J}\left(\frac{\lambda_{m_k,j_k}}{a_k}\right)^2 \tag{III.70}$$

de multiplicité infinie avec les formes propres associées

$$\prod_{k\in J}\left(J_m\left(\frac{\lambda_{m_k,j_k}}{a_k}r\right)e^{im_k\theta_k}\right)\prod_{k\notin J} z_k^{|m_k|} d\bar{z}_J \tag{III.71}$$

et les valeurs propres

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{m_k,j_k}}{a_k}\right)^2 \tag{III.72}$$

avec les formes propres associées

$$\prod_{k\in J} J_m\left(\frac{\lambda_{m_k,j_k}}{a_k}r\right)e^{im_k\theta_k}\prod_{k\notin J} J_{m_k-1}\left(\frac{\lambda_{m_k,j_k}}{a_k}r\right)e^{i(m_k-1)\theta_k} d\bar{z}_J \tag{III.73}$$

pour tout n-uplet strictement croissant J, $m_k \in \mathbb{Z}$, et $j_k \in \mathbb{N}$. Il est intéressant de noter que les valeurs propres sous la forme de (III.72) sont indépendantes de q, tandis que ceux sous la forme de (III.70) dépendent de q.

Nous souhaitons démontrer que le spectre de $\square_q$ est constitué des valeurs propres données par (III.70) et (III.72). Pour ce faire, nous utilisons le résultat classique de la théorie des opérateurs, énoncé dans le Lemme suivant (cf. [8], Lemme 1.2.2) :

Lemme III-3.1 *Soit T un opérateur symétrique sur un espace de Hilbert H, de domaine dom(T), et soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une famille orthonormée complète dans H. Si chaque f_k appartient à dom(T) et qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $Tf_k = \lambda_k f_k$ pour tout k, alors T est essentiellement auto-adjoint. De plus, le spectre de $\bar{T}$ est la clôture, dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble des λ_k.*

En appliquant ce Lemme à l'opérateur $\square_q$, soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une famille orthonormée dans $L^2(\Omega)$, avec $\mathrm{dom}(\square_q) \subset L^2(\Omega)$, et soit λ_k les valeurs propres associées aux fonctions f_k, c'est-à-dire qu'il existe des $f_k \in \mathrm{dom}(\square_q)$ telles que

$$\square_q f_k = \lambda_k f_k.$$

D'une part, $\square_q$ est un opérateur auto-adjoint, et selon le Lemme III-3.1, il est donc essentiellement auto-adjoint. D'autre part, les valeurs propres de $\square_q$ sont de la forme (III.70) et (III.72). Par le Lemme III-3.1, le spectre de $\square_q$ est la clôture, dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_k\}$. Puisque $\square_q$ est un opérateur dense, son spectre est constitué exclusivement de ces valeurs propres.

Ainsi, nous avons montré que le spectre de $\square_q$ est uniquement composé des valeurs propres données par (III.70) et (III.72).

Pour déterminer la plus petite valeur propre du spectre, il convient de chercher le minimum des valeurs propres possibles. Ce minimum est atteint en choisissant les indices de manière à minimiser la somme. Le terme constant $\dfrac{\lambda_{0,1}^2}{4}$ ne modifie pas l'optimisation et nous minimisons la somme $\sum_{K\in J} \dfrac{1}{a_k^2}$ pour les ensembles J de taille q.

Ainsi, la plus petite valeur propre du spectre est donnée par :

$$\min_{|J|=q} \left\{ \frac{\lambda_{0,1}^2}{4} \sum_{K\in J} \frac{1}{a_k^2} \right\}, \tag{III.74}$$

qui est toujours de multiplicité infinie.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons analysé en détail le spectre du Laplacien de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann sur un polydisque dans $\mathbb{C}^n$, en tenant compte des conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann. Grâce à l'application de la méthode de séparation des variables, nous avons pu calculer explicitement les valeurs propres de cet opérateur, révélant des résultats significatifs. L'étude montre que le spectre est composé de valeurs propres, parmi lesquelles certaines, notamment les plus petites, ont une multiplicité infinie. Ces résultats soulignent l'importance des conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann dans la structure du spectre, en influençant directement sur les propriétés des valeurs propres. Les fonctions de Bessel ont joué un rôle crucial dans ce travail, offrant un cadre rigoureux pour résoudre l'équation différentielle radiale et démontrer l'orthogonalité des fonctions propres associées. L'approche employée ici renforce l'idée que ces fonctions sont des outils puissants pour l'étude des opérateurs différentiels sur des domaines complexes. Les résultats obtenus enrichissent notre compréhension du spectre du Laplacien de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann sous des conditions aux bords spécifiques.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal and D. O'Regan. *Ordinary and partial differential équations with special functions, fourier series, and boundary value problems.* Springer Science+Business Media, LLC, 2009.

[2] W. W. Bell and D. Van. *Special functions for scientists and engineers.* Nostrands Company LTD, 1967.

[3] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential geometry : manifolds, curves, and surfaces.* GTM No. 115. Springer-Verlag, 1987.

[4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[5] H. Cartan. *Formes différentielles.* Hermann, Paris, 1967.

[6] So-Chin Chen and Mei-Chi Shaw. *Partial differential equations in several complex variables.* AMS/IP, 2000.

[7] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, second edition edition, 1990.

[8] E. B. Davies. *Spectral theory and differential operators.* Cambridge University Press, 1995.

[9] Jean-Pierre Demailly. *Complex analytic and differential geometry.* Institut Fourier, Université Grenoble I, June 2007. Available online.

[10] G. B. Folland. *Introduction to partial differential équations.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[11] S. Fu. Le Spectre du Laplacien de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur le polydisque. *J. Math. Analysis and Applications*, 135(3) :725–730, 2007.

[12] F. Haslinger and B. Lamel. Spectral properties of the canonical solution operator to $\bar{\partial}$. *J. Functional Analysis*, 255 :13–24, 2008.

[13] L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables.* North-Holland Publishing Company, 1973.

[14] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Grenoble Sciences, 1996.

[15] S. L. Ross. *Differential tquations.* John Wiley & Sons, third edition edition, 1984.

[16] M. Rumin. Équations différentielles linéaires du ssecond ordre, 2014. Notes de cours S2 PeiP, année 2013-2014.

[17] M. Spivak. *Differential geometry*, volume I. Publish or Perish, Inc., 1970.

[18] W. Strauss. *Partial differential équations : an introduction.* Wiley, 2007.

[19] V. Trénoguine. *Analyse fonctionnelle.* Mir, Moscou, 1985.

[20] G. N. Watson. *A Treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, 2nd edition edition, 1948.