

Université Assane Seck de Ziguinchor



UFR des Sciences et Technologies

Département De Mathématiques

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées

OPTION : Biomathématiques

Sujet :

**Observateur numérique intervalle : Application
à un modèle de pêche discret**

Présenté par : Cheikh FALL

Sous la direction de :

Pr Diène NGOM

Soutenu le : 27 avril 2024

Devant le jury composé de :

Prénoms et noms	Grade	Qualité	Etablissement
M. Edouard DIOUF	Professeur assimilé	Président	UASZ
M. Mouhamadou DIABY	Maitre de Conférences Assimilé	Examineur	UGB
M. Timack NGOM	Maitre de Conférences Titulaire	Examineur	UASZ
M. Diène NGOM	Professeur Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2022-2023

Dédicace

*A mon défunt idole, père et oncle Cheikh FALL,
Un rocher dont rêve un grain de sable.
A ma défunte mère Sokhna Oumy MBACKE,
Une étoile qui ne cesse de scintiller dans l'ombre de mes doutes.*

Remerciements

Je commence par exprimer ma profonde gratitude envers Dieu le Tout-Puissant pour m’ avoir octroyé la santé et la volonté nécessaires pour initier et achever ce travail de mémoire. Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury pour leur présence et assistance qui revêtent un grand honneur dans l’évaluation de ce travail.

Je suis également reconnaissant envers mon encadreur, Monsieur Diéne NGOM, pour m’ avoir proposé ce sujet de mémoire aussi intéressant et d’ avoir accepté de m’ encadrer malgré ses lourdes charges administratives. Ses orientations scientifiques, son acuité intellectuelle et son engagement social ont grandement enrichi ce travail de recherche. Je tiens à le remercier pour sa supervision de haute dimension.

Je remercie mes camarades et amis de promo, tels qu’ Elhadj GOUDIABY, Abdoul Aziz SOW, Abdou Aziz DIALLO, Ibrahima DIALLO, Elimane Malick SAMB, Fatou MBATHIE, Fallou DIAGNE, Fatoumata Binta BA ainsi que tous les autres de l’ Université Assane Seck de Ziguinchor, pour leurs soutiens et encouragements variés.

Entreprendre le travail de mémoire a constitué un défi, mais le soutien de mes proches a été déterminant pour surmonter ces obstacles. Je tiens à exprimer ma gratitude envers ma mère Khady T. DIAGNE, Mame Diarra FALL, Sokhna Mously FALL, Sokhna Astou FALL, Aboubakrine FALL, Ndeye FALL, Mouhamadann FALL, et un merci particulier à Pape Yoro SOW, une source d’ inspiration pour moi.

Je suis profondément reconnaissant envers mes amis qui m’ ont constamment soutenu : Ismaila DIOCOU, Cheikh Oumar NDIAYE, Abdou NDIAYE, Aliou BA, Saliou DIAW, Josiane Elga PREIRA, Coumba SOUMARE, Fatim NIANG, Mika NDIAYE, Matalla Karim FALL, Pierre E. NIANG et Jean Benoit DIAME.

Je ne pourrai jamais assez remercier mes amis et colocataires qui constituent une seconde famille lors de mon séjour sur Ziguinchor. Sans eux, ce travail serait tellement difficile à achever mais grâce à leur soutien et esprit de partage l’ objectif est finalement atteint haut les mains. Je veux nommément citer : Mame Diarra FALL, Reine Marieme SAMBOU, Mouhamadou Lamine FAYE, Mame Djilane Ndiaye CAMARA et Ouleymatou DIENG. Je veux remercier particulièrement une personne formidable et pleine de vie, Maimouna SECK. Elle n’ a ménagé aucun effort pour mon épanouissement.

Enfin, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers Murielle E. BANDAGNY, une personne d’ une dimension exceptionnelle qui m’ a grandement motivé et soutenu tout au long de ce processus.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de présenter un observateur numérique intervalle pour un système dynamique discret décrivant l'évolution d'une population de poissons sous l'activité de la pêche. Un observateur numérique intervalle avec sortie mesurable consiste à trouver un intervalle évoluant en fonction du temps et contenant les états du système dynamique. Il assure que les trajectoires issues de ces estimations demeurent à l'intérieur de la mesure bornée de la sortie. Pour estimer les états du modèle de pêche structuré en classe d'âge, tel que décrit dans [13], nous allons utiliser une méthode numérique de synthèse d'observateur intervalle dont l'algorithme est appelé Interval Moving Horizon State Estimation (IMHSE). Cette méthode consiste à minimiser le critère de sortie représentant la norme euclidienne de la différence entre la sortie mesurée et la sortie estimée d'un système dynamique sur une fenêtre de temps définie. Cette approche, bien détaillée dans [45], permet de prendre en compte l'incertitude dans les mesures et les modèles, offrant ainsi une estimation robuste des états du système avec une propriété de convergence globale garantie. Ce travail vise également à implémenter la méthode IMHSE en utilisant des données réelles provenant du site de la FAO [11], afin d'obtenir des résultats concrets.

Mots-clés : Systèmes discrets non-linéaires, observateur numérique intervalle, dynamique des populations, optimisation globale par intervalle, analyse des intervalles, méthode d'estimation à horizon mobile par intervalle.

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Table des figures	vi
Introduction Générale	1
1 Rappels de quelques notions halieutiques et d'outils mathématiques	4
1.1 Introduction	4
1.2 Notions halieutiques	4
1.3 Systèmes dynamiques discrets	5
1.4 Stabilité des systèmes dynamiques discrets	6
1.4.1 Stabilité des systèmes linéaires	7
1.4.2 Stabilité des systèmes non-linéaires	9
1.5 Observabilité des systèmes dynamiques discrets	12
1.6 Théorie des observateurs	14
1.6.1 Observateurs pour les systèmes linéaires	15
1.6.2 Observateurs pour les systèmes non-linéaires	19
1.7 Conclusion	23
2 Modèles de la dynamique d'évolution des populations de poissons soumises à l'action de pêche	24
2.1 Introduction	24
2.2 Modèle structuré en classe d'âge d'une population de poissons	25
2.2.1 Recrutement dans la première classe	26
2.2.2 Passage d'une classe à la suivante	27

2.2.3	Modèle de capture des poissons	28
2.3	Modèle structuré en classe de stade d'une population de poissons	30
2.4	Conclusion	30
3	Synthèse d'un observateur numérique intervalle : Application à un modèle de pêche discret	31
3.1	Introduction	31
3.2	Présentation d'un observateur numérique intervalle : Interval Moving Horizon State Estimation (IMHSE)	32
3.2.1	Principe de la méthode	32
3.2.2	Analyse des intervalles	34
3.2.3	Algorithmes de synthèse d'un observateur numérique	36
3.3	Implémentation d'un observateur numérique à un système de pêche discret . . .	46
3.3.1	Définition du domaine admissible	47
3.3.2	Observabilité du système de pêche	48
3.3.3	Simulations numériques	49
3.4	Application	51
3.5	Discussion	55
	Conclusion et perspectives	58
	Bibliographie	62

TABLE DES FIGURES

1.6.1 Un ensemble système-observateur	15
3.2.1 La méthode IMHSE globalement convergente	33
3.3.2 Trajectoires de l'état x_1 et de son observateur pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.	50
3.3.3 Trajectoires de l'état x_2 et de son observateur pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.	50
3.3.4 Trajectoires de l'état x_3 et de son observateur pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.	50
3.4.5 Trajectoires de l'état x_1 et de son observateur.	54
3.4.6 Trajectoires de l'état x_2 et de son observateur.	54
3.4.7 Trajectoires de l'état x_3 et de son observateur.	54
3.4.8 Trajectoires de l'état x_4 et de son observateur.	54
3.4.9 Trajectoires de l'état x_5 et de son observateur.	55
3.4.10 Trajectoires de l'état x_6 et de son observateur.	55
3.4.11 Trajectoires de l'état x_7 et de son observateur.	55

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Autrefois, les ressources halieutiques étaient souvent perçues comme inépuisables et largement accessibles pour les communautés côtières. Les techniques de pêche étaient souvent traditionnelles permettant aux populations riveraines de se nourrir avec de suffisantes captures [35]. Les populations entretenaient une dépendance étroite sur les ressources dans le souci d'assurer leur subsistance. Les pressions sur les ressources halieutiques étaient moindres en raison d'une démographie non-conséquente et des méthodes de pêche rudimentaires. De plus, de nombreuses cultures côtières entretenaient de profonds liens avec la mer et développaient des pratiques respectueuses de l'environnement pour préserver ces ressources.

Cependant, avec la rapidité de la croissance démographique, de l'industrialisation exponentielle de la pêche, de la pollution marine par le jet des déchets toxiques et de la forte demande des produits de la mer, l'idée autrefois établie que les ressources halieutiques étaient inépuisables a évolué vers des politiques de gestion complexe. La nécessité de les préserver pour les générations futures relève ainsi une problématique au cours des dernières décennies. Ainsi, comme le disait [Sylvia Earle](#) [9] : "Les océans nous offrent un banquet de richesses, mais c'est notre responsabilité de pêcher de manière durable pour que ce festin puisse se perpétuer."

Pour une meilleure gestion de ces ressources, la compréhension de la dynamique d'évolution des espèces aquatiques devient fondamentale. Cependant, le monde naturel est complexe, avec des interactions multiples et souvent subtiles. C'est là qu'intervient la modélisation. Elle nous permet donc de traduire le langage complexe de la nature en un langage que nous pouvons comprendre suivant certaines hypothèses. Cela sous-entend que la modélisation mathématique ne donne qu'une idée sur l'évolution des espèces aquatiques et non son exactitude. Plusieurs modèles sur la dynamique d'évolution des populations de poissons ont été élaborés durant ces 50 dernières années par une étroite collaboration entre mathématiciens et biologistes [8, 13, 37, 37, 39, 40, 17, 43]. En comprenant ces modèles, l'utilisation des outils informatiques

aide à analyser l'évolution du comportement des ressources pour une gestion efficace. Connaître le nombre de poissons disponibles dans les zones de pêche est une tâche très difficile du fait de la complexité du milieu marin. L'estimation d'état est une branche de la théorie du contrôle qui se concentre sur la détermination des états d'un système à partir de mesures ou d'observations indirectes de celui-ci. Elle constitue un problème majeur dans les sciences halieutiques [16]. Ainsi, la théorie de contrôle permet d'élaborer des méthodes d'estimation des états des systèmes dynamiques en concevant des algorithmes, tels que les observateurs pour les modèles déterministes et les filtres pour les modèles stochastiques. L'objectif principal de ces approches est la reconstruction de ces grandeurs inconnues à partir des sorties mesurables du système. La conception de ces observateurs se base, à priori, sur la connaissance des modèles mathématiques qui instaurent le lien entre les variables d'états, les entrées et les sorties mesurables. La plupart des phénomènes biologiques sont représentés par des systèmes linéaires ou non-linéaires. Plusieurs travaux ont été effectués dans le cadre des systèmes linéaires, parmi lesquels on note une satisfaction par rapport aux résultats produits. De nos jours, la non-linéarité des systèmes dynamiques constitue un défi dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie [16]. Les systèmes non-linéaires peuvent parfois présenter des comportements imprévisibles et difficiles à étudier au fil du temps. Cette instabilité peut rendre le contrôle de ces systèmes très complexe. Pour une meilleure compréhension et maîtrise de ces systèmes, il est nécessaire de développer des techniques spécifiques à leur étude. Le contrôle des systèmes non-linéaires fait l'objet de plusieurs recherches. L'observation d'état des systèmes non-linéaires est un peu plus délicate et les approches envisageables sont soit une approximation des algorithmes linéaires [4, 41], soit des algorithmes non-linéaires spécifiques. Pour le cas des systèmes non-linéaires à temps discret, très peu de résultats existent [4, 5, 24, 33, 41, 48]. Ainsi, parmi ceux qui existent, ils sont exclusivement réservés à une classe particulière de systèmes non-linéaires. Une option consistant à résoudre un problème d'optimisation par la méthode d'estimation d'états à horizon mobile (MHSE) dont l'objectif est de minimiser le critère de sortie sur une fenêtre d'horizon temporel a été développée afin de s'affranchir de la non-linéarité des systèmes dynamiques. Dans la littérature, plusieurs méthodes de couplage avec la MHSE ont été développées et ont fourni de bons résultats. Parmi celles-ci, on retrouve la méthode quasi-Newton (MHSE-DPF) [3], un couplage de la méthode MHSE avec le recuit simulé, avec une preuve de convergence garantie [44]. Dans certains cas, un des points faibles de ces approches est le fait que l'algorithme d'optimisation peut être incapable d'obtenir un minimum global du critère de sortie et fournit à la place un minimum local. Par conséquent, il peut entraîner une instabilité sur la propriété de convergence globale de l'observateur. Dans la perspective de garantir la convergence globale de la méthode MHSE, un couplage avec l'optimisation globale par intervalle IMHSE (Interval Moving Horizon State Estimation) a été développé par [H.Valdez et al.](#) [45]. Cette approche consiste à générer à partir d'un instant $k \geq k_0$,

un intervalle X_k susceptible de contenir l'état du système à l'instant k : on parle alors de synthèse d'observateur intervalle [4, 45, 22, 38, 14]. L'utilisation des intervalles dans l'algorithme d'optimisation globale procure à la MHSE une propriété de convergence globale [26, 18]. Les nombres à intervalles sont utilisés pour représenter les états du système, et ces intervalles ont la particularité de prendre en compte les incertitudes associées aux états du modèle.

D. Ngom et al. [17] ont apporté leur contribution à la reconstruction des états du modèle de la dynamique d'évolution des populations de poissons soumises à l'action de pêche en utilisant la méthode IMHSE. Cette approche donne lieu à des résultats satisfaisants, prouvant ainsi la propriété de convergence globale de l'observateur numérique intervalle.

L'objectif de notre travail est de présenter un observateur numérique intervalle tel que l'IMHSE pour un modèle visant à décrire la dynamique d'évolution d'une population de poissons soumise à l'action de la pêche. Ce travail que nous nous proposons de mener inclut également l'implémentation de la méthode IMHSE avec des données réelles disponibles sur le net, telles que celles provenant du site de la FAO [11], pour une application concrète en se basant sur les travaux de D. Ngom et al. [17].

Ce mémoire est structuré dans la logique suivante :

Le premier chapitre débute par la définition de quelques concepts halieutiques, offrant ainsi un socle solide pour une compréhension approfondie du sujet. Ensuite, nous procédons à un rappel sur la stabilité des systèmes dynamiques décrits sous forme d'équations différentielles ordinaires discrètes. Nous abordons également la notion d'observabilité en théorie de contrôle avant d'explorer la méthode de synthèse de quelques observateurs classiques existant dans la littérature. Il est à préciser que, bien que la démonstration des résultats présentés ait été volontairement omise dans ce chapitre, les preuves correspondantes seront référencées pour consultation du lecteur.

Le second chapitre est consacré à la présentation du modèle décrivant la dynamique d'évolution des populations de poissons soumises à l'action de pêche. Étant donné la pluralité et la diversité des modèles mathématiques existants, nous fournissons une représentation détaillée du modèle structuré en classe d'âge et en stade. Cette approche permet une meilleure compréhension de l'évolution de notre système dynamique dans le but d'estimer ses états.

Dans le troisième chapitre, nous abordons la conception d'un observateur capable de reconstruire les états du système présenté dans le second chapitre. Pour atteindre cet objectif, nous présentons d'abord notre observateur numérique intervalle. Ensuite, nous détaillons l'algorithme de synthèse de cet observateur, tel que développé dans [45]. Nous procédons ensuite à l'implémentation de l'algorithme de synthèse à l'aide du logiciel Scilab, permettant ainsi le suivi de l'évolution des états reconstruits du modèle de pêche développé dans [13]. En dernier lieu, nous appliquons l'observateur à des données réelles provenant de la FAO [11], dans le but de tester sa validité.

RAPPELS DE QUELQUES NOTIONS HALIEUTIQUES ET D'OUTILS MATHÉMATIQUES

1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques sont des éléments essentiels pour la modélisation mathématique, car ils sont utilisés pour étudier et comprendre l'évolution des états au fil du temps en fonction de certaines règles ou équations. Dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques, la stabilité décrit leur comportement face aux petites perturbations. Dans cette partie, nous allons donner d'abord quelques notions halieutiques. Ensuite, nous allons aborder la stabilité et la notion d'observabilité des systèmes dynamiques. En dernier lieu, nous allons rappeler quelques résultats de la théorie des observateurs en présentant la méthode de synthèse de quelques observateurs classiques.

1.2 Notions halieutiques

L'halieutique est la science qui étudie les relations entre l'homme et les populations qu'il exploite par la pêche [16]. Elle renferme un ensemble de connaissances et de pratiques visant à comprendre, gérer et exploiter de manière durable les populations de poissons. En conséquence, l'halieutique possède son propre langage spécifique, à l'instar des autres domaines scientifiques. Ainsi, nous allons définir certains termes spécifiques de ce vocabulaire afin de faciliter la compréhension des concepts utilisés ultérieurement dans le cadre de ce travail [16].

Population : selon Daget et le Guen [6] : "Une population est un système bioénergétique ouvert qui échange constamment de l'énergie avec son environnement". Une partie de l'énergie empruntée au milieu extérieur est transformée en matière vivante. Par le jeu de la reproduction, de la croissance individuelle et de l'immigration en provenance d'autres populations de la même espèce, la biomasse, c'est à dire le poids total de matières vivantes, tend à augmenter.

Parallèlement, l'émigration et surtout la mortalité, y compris celle due à la prédation et à l'exploitation par l'homme à savoir la pêche, tendent à réduire la population de poissons.

Cohorte : elle est une population constituée par l'ensemble des animaux nés une année donnée, elle traverse au cours de sa vie des périodes successives pendant lesquelles ses caractéristiques (mortalité, fécondité, croissance,...) sont indépendantes du temps et de la densité de la population.

Stock : par définition, le stock est l'ensemble des poissons exploitables.

Classe d'âge : la classe d'âge à laquelle appartient un poisson est définie en fonction du nombre d'années que l'animal a vécues. La population comporte en général à tout moment des animaux d'âges différents.

Accessibilité : elle correspond à une présence physique des poissons sur les lieux de pêche. Elle est donc quantifiée.

Capture : elle est définie comme étant le nombre de poissons pêchés dans une période donnée.

Capturabilité : elle est la probabilité pour un poisson d'être capturé par une unité d'effort. Elle est notée q .

Effort de pêche : l'effort de pêche appliqué à un stock d'animaux aquatiques est une mesure de l'ensemble des moyens de capture mis en œuvre par les pêcheurs sur le stock, pendant un intervalle de temps donné.

Recrutement : on appelle recrutement le processus par lequel la fraction la plus jeune de la population de poissons s'intègre pour la première fois à l'ensemble des populations accessibles. Ainsi, on définit un âge de recrutement, auquel on associe une taille moyenne au recrutement. Un poisson franchissant l'âge seuil est une recrue.

Âge de la première capture : il correspond à l'âge à partir duquel le poisson court le risque d'être capturé. Cet âge est relatif par rapport à la taille des mailles et de la croissance des poissons. Donc, entre l'âge du recrutement t_r et l'âge à la première capture t_c , les poissons sont en général épargnés par décision des exploitants.

Reforme : on parle de réforme, dans le cas général, l'âge à partir duquel quelle qu'en soit la cause, les poissons ne sont plus exploitables.

NB : un poisson n'est pas nécessairement exploité dès le recrutement, qui correspond à l'entrée en phase exploitable. Donc, on précise ce concept comme étant la vulnérabilité.

1.3 Systèmes dynamiques discrets

Les systèmes dynamiques discrets sont largement utilisés pour analyser l'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes naturels. Ils offrent une représentation mathématique précise en reliant trois variables : les entrées, les sorties et les états. Sous certaines conditions, ces

systèmes peuvent être exprimés sous forme d'équations aux différences.

Dans la suite, nous allons donner une représentation générale d'un système dynamique discret comme suit :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

- $x(k)$ représente l'état du système au temps discret k .
- $u(k)$ est l'entrée ou l'influence sur le système au temps k .
- $x(k+1)$ est l'état du système au temps $k+1$, qui dépend de l'état précédent $x(k)$ et de l'entrée $u(k)$.
- $f(x(k), u(k))$ est une fonction qui décrit comment l'état évolue en fonction de l'état précédent et de l'entrée.
- $y(k)$ représente la sortie au temps discret k .
- $h(x(k))$ est une fonction qui décrit comment la sortie mesurable $y(k)$ est générée à partir des variables d'état $x(k)$.

Maintenir la stabilité des systèmes dynamiques est fondamental pour assurer leur bon fonctionnement. Nous allons donc commencer par étudier la stabilité qui constitue un concept primordial dans l'analyse de ces systèmes.

1.4 Stabilité des systèmes dynamiques discrets

La résolution des systèmes dynamiques non-linéaires de façon explicite s'avère être une tâche très difficile dans la pratique car la plupart des techniques de résolutions se limite seulement aux systèmes linéaires et à certains cas de systèmes non-linéaires spécifiques. L'étude qualitative des systèmes dynamiques consiste à analyser le comportement général d'un système au cours du temps sans nécessairement obtenir les solutions exactes. La stabilité des systèmes constitue un rôle fondamental dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Elle permet de comprendre comment le système réagit face aux perturbations et son évolution au fil du temps autour de ses points d'équilibres.

On considère le système suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (1.2)$$

où f est une fonction continue.

Nous allons donner quelques définitions nécessaires dans l'étude qualitative des systèmes dy-

namiques discrets [10] :

Définition 1 x^* appartenant à Ω est un point d'équilibre du système (1.2) si $x^* = f(x^*, u(k))$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, on note $x(x_0, k_0, k)$ la solution du système (1.2) à l'instant k avec comme condition initiale x_0 au temps initial k_0 .

Définition 2 x^* appartenant à Ω est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour le système (1.2) si :

$\forall \epsilon > 0, \forall k_0 > 0, \exists \eta$ tel que $\|x_0 - x^*\| < \eta$ implique que $\|x(x_0, k_0, k) - x^*\| < \epsilon; \forall k \geq k_0$.

On dit que l'équilibre x^* est uniformément stable si le réel η est indépendamment choisi par rapport à k_0 .

Définition 3 x^* appartenant à Ω est un point d'équilibre attractif du système (1.2) s'il existe $\mu(k_0) = \mu$ tel que $\|x_0 - x^*\| < \mu$ implique que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(x_0, k_0, k) = x^*$.

On dit que l'équilibre x^* est uniformément attractif si le réel μ est indépendamment choisi par rapport à k_0 . L'équilibre x^* est globalement attractif pour le système (1.2) si $\mu = \infty$.

Définition 4 $x^* \in \Omega$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système (1.2) s'il est stable et attractif pour le système (1.2).

$x^* \in \Omega$ est dit uniformément asymptotiquement stable pour le système (1.2) s'il est uniformément stable et uniformément attractif pour le système (1.2).

Définition 5 $x^* \in \Omega$ est un point d'équilibre exponentiellement stable du système (1.2) si :

$\exists \delta > 0, M > 0, \eta \in]0, 1[$ tel que $\|x_0 - x^*\| < \delta$ implique que $\|x(x_0, k_0, k) - x^*\| < M\|x_0 - x^*\|\eta^{k-k_0}$.

Définition 6 Un point x est appelé point oméga limite dans Ω s'il existe une suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de Ω telle que x_n tend vers x lorsque n tend vers l'infinie.

L'ensemble des points oméga limite est appelé ensemble oméga limite.

1.4.1 Stabilité des systèmes linéaires

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires discrets est essentielle en théorie de contrôle. Nous allons rappeler dans cette partie, quelques résultats classiques de stabilité pour les systèmes dynamiques linéaires non autonomes et autonomes respectivement donnés par :

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad (1.3)$$

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (1.4)$$

où A et $A(k)$ sont des matrices carrées d'ordre n .

Soit x^* un point d'équilibre du système (1.3).

On pose le changement de variables $y(k) = x(k) - x^*$.

On remarque que l'étude de la stabilité du point d'équilibre x^* du système (1.3) ou (1.4) se ramène à l'étude de la stabilité à l'équilibre zéro. Nous considérerons dans la suite l'équilibre zéro des systèmes (1.3) ou (1.4).

Soit $x(k_0) = x_0$ une condition initiale du système (1.3), la solution du système au temps k est donnée par :

$$x(k) = A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0)x(k_0).$$

On pose :

$$\Phi(k) = A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0),$$

$\Phi(k)$ est appelée la matrice fondamentale du système (1.3).

Dans le cas des systèmes autonomes de type (1.4), on a :

$$\Phi(k) = A^{k-k_0}.$$

Notons que la preuve des résultats émis dans cette section est bien détaillée dans [10].

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.1 [10]

(i) *L'équilibre zéro du système (1.3) est stable si et seulement si il existe une constante positive M telle que :*

$$\|\Phi(k)\| \leq M \text{ pour } k \geq k_0 \geq 0.$$

(ii) *L'équilibre zéro du système (1.3) est uniformément stable si et seulement si il existe une constante positive M telle que :*

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M \text{ pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty$$

où $\Phi(k_1, k_2) = A(k_2)A(k_2-1) \dots A(k_1)$.

(iii) *L'équilibre zéro du système (1.3) est asymptotiquement stable si et seulement si :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi(k)\| = 0.$$

(iv) *L'équilibre zéro du système (1.3) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si il existe une constante positive M et $\eta \in]0, 1[$ telles que :*

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M\eta^{k_1-k_2} \text{ pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty.$$

Du théorème 1.1, nous avons le corollaire :

Corollaire 1.2 [10]

(i) *L'équilibre zéro du système (1.3) est stable si et seulement si toutes les solutions sont bornées.*

(ii) *L'équilibre zéro du système (1.3) est exponentiellement stable si et seulement si il est uniformément asymptotiquement stable.*

Notons par $a_{ij}(k)$ les composantes de la matrice $A(k)$ du système (1.3), nous avons le résultat :

Théorème 1.3 [10]

(i) *Si $\sum_{i=1}^n |a_{ij}(k)| \leq 1$, $1 \leq j \leq n$, $k \geq k_0$ alors l'équilibre zéro du système (1.3) est uniformément stable.*

(ii) *Si $\sum_{i=1}^n |a_{ij}(k)| \leq 1 - v$, $v > 0$, $1 \leq j \leq n$, $k \geq k_0$ alors l'équilibre zéro du système (1.3) est uniformément asymptotiquement stable.*

Nous donnons maintenant un résultat de stabilité propre aux systèmes linéaires autonomes. $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de la matrice A .

Théorème 1.4 [10]

(i) *L'équilibre zéro du système (1.4) est stable si et seulement si $\rho(A) \leq 1$ et les valeurs propres dont les modules sont égaux à 1 sont semi-simples.*

(ii) *L'équilibre zéro du système (1.4) est asymptotiquement stable si et seulement si $\rho(A) < 1$.*

Après avoir examiné la stabilité des systèmes linéaires, nous allons maintenant aborder le cas des systèmes non-linéaires.

1.4.2 Stabilité des systèmes non-linéaires

La stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires est un domaine complexe de la théorie des systèmes dynamiques. A l'opposé des systèmes linéaires, où la stabilité peut être analysée de manière méthodiquement simple, les systèmes non-linéaires peuvent avoir des comportements plus variés.

Il existe différentes méthodes pour étudier la stabilité des systèmes non-linéaires.

Dans cette section, nous allons donner quelques résultats classiques de la notion de stabilité des systèmes non-linéaires.

Nous considérons dans cette partie les systèmes discrets non-linéaires de la forme :

$$x(k + 1) = f(x(k), u(k)) \tag{1.5}$$

où f est une application non linéaire continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n .

1.4.2.1 Stabilité par approximation linéaire

La stabilité par approximation linéaire est une des techniques couramment utilisée pour évaluer la stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires en se basant sur une approximation linéaire autour d'un point d'équilibre.

Dans cette section, on peut supposer sans perdre de généralité que l'équilibre x^* du système (1.5) est égal à zéro.

On pose $A(k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, k)$ le jacobien de f à l'équilibre zéro. Alors nous pouvons écrire le système (1.5) sous la forme :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + g(x(k), k) \quad (1.6)$$

où g est telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{g(x, k)}{\|x\|} = 0$.

Ainsi, le système :

$$x(k+1) = A(k)x(k) \quad (1.7)$$

est appelé le linéarisé du système (1.6) autour de l'équilibre zéro.

Nous énonçons le résultat de stabilité suivant :

Théorème 1.5 [10]

Si le système (1.7) est uniformément asymptotiquement stable à l'équilibre zéro alors le système (1.6) est exponentiellement stable en zéro.

Pour la preuve de ce théorème, confère [34] pages 23-24.

Considérons maintenant le cas particulier des systèmes autonomes :

$$x(k+1) = f(x(k)). \quad (1.8)$$

On suppose que zéro est un équilibre du système (1.8), alors on peut écrire (1.8) sous la forme :

$$x(k+1) = Ax(k) + g(x(k)) \quad (1.9)$$

où A est la matrice jacobienne de f à l'équilibre zéro et g est telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{g(x, k)}{\|x\|} = 0$.

Théorème 1.6 [10]

- Si $\rho(A) < 1$ alors l'équilibre zéro du système (1.9) est exponentiellement stable.
- Si $\rho(A) > 1$ et $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} g(x) = 0$ alors l'équilibre zéro du système (1.9) est instable.

La preuve de ce théorème est donnée dans [25].

1.4.2.2 Stabilité par la méthode de Lyapunov

Elle est une technique mathématique utilisée pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires. Elle se base sur la construction d'une fonction de Lyapunov qui évalue la stabilité d'un point d'équilibre du système.

Dans cette partie, nous allons donner quelques résultats classiques de la stabilité des systèmes non-linéaires par la méthode de Lyapunov [10].

Soit x^* équilibre du système (1.5) et V une fonction réelle définie sur un ensemble U inclus dans \mathbb{R}^n .

Définition 7 V est une fonction de Lyapunov du système (1.5) sur un ensemble U si :

- V est définie, positive et continue sur U ;
- $V(x^*) = 0$;
- $V(f(x)) - V(x) \leq 0$ pour tout x et $f(x)$ dans U .

Théorème 1.7 Si V est une fonction de Lyapunov du système (1.5) dans un voisinage W de l'équilibre x^* et $V(f(x) - V(x)) \leq 0$ pour tout x et $f(x)$ dans W , $x \neq x^*$ alors x^* est asymptotiquement stable.

De plus si $W = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$, alors x^* est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 1.8 Si V est une fonction de Lyapunov sur $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| > \alpha > 0\}$ et $V(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$ alors les solutions du système (1.5) sont bornées.

Théorème 1.9 (Principe de Lasalle [25])

Soit V une fonction de Lyapunov du système (1.5) dans un ensemble G de \mathbb{R}^n .

On pose :

$$E = \{x \in \bar{G} / \Delta V(x) = 0\}.$$

Soit M le plus grand ensemble invariant inclus dans E . Toutes les solutions qui restent invariantes dans G sont non bornées ou convergent dans M .

Théorème 1.10 Si ΔV est définie positive sur un voisinage de l'origine et s'il existe une suite $(a_i)_{i \geq 0}$ telle que a_i converge vers 0 avec $V(a_i) > 0$, alors l'origine est instable pour le système (1.5).

Une fois que la notion de stabilité des systèmes dynamiques discrets est bien assimilée, il est tout aussi crucial de pouvoir suivre l'état interne d'un système à partir de ses sorties. Pour

cela, nous devons d'abord nous assurer de l'observabilité des systèmes dynamiques discrets. Rappelons que les systèmes que nous considérons s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (1.10)$$

où $x(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$; f et h sont respectivement des fonctions continues de $\Omega \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n et de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

1.5 Observabilité des systèmes dynamiques discrets

L'observabilité des systèmes dynamiques fait référence à la capacité de déterminer l'état interne d'un système à partir de ses sorties.

Dans cette partie, nous allons donner quelques définitions et théorèmes sur l'observabilité des systèmes dynamiques discrets [1].

On considère le système (1.10).

Nous notons U l'ensemble des contrôles admissibles de ce système. Pour simplifier les notations, on pose : $f(x(k), u(k)) = f_u(x)$.

Définition 8 Deux états x_1 et x_2 dans Ω sont indistinguables pour le système (1.10) si pour tout entier n et pour toute suite de contrôle $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dans U^n , on a :

$$h(f_{u_1} \circ f_{u_2} \circ \dots \circ f_{u_n}(x_1)) = h(f_{u_1} \circ f_{u_2} \circ \dots \circ f_{u_n}(x_2)).$$

Définition 9 x_0 dans Ω est dit observable pour le système (1.10) si pour tout $x \in \Omega$, x et x_0 sont indistinguables implique que $x = x_0$.

Définition 10 x_0 dans Ω est localement faiblement observable pour le système (1.10) s'il existe un voisinage W de x_0 tel que pour tout x dans W tel que x et x_0 sont indistinguables alors $x = x_0$.

Définition 11 x_0 dans Ω est localement fortement observable pour le système (1.10) s'il existe un voisinage W de x_0 tel que pour tout x_1 et x_2 dans W tel que x_1 et x_2 sont indistinguables alors $x_1 = x_2$.

Si un point x_0 dans Ω est observable alors il est localement faiblement observable. Par contre l'observabilité en x_0 n'implique pas forcément que x_0 est localement fortement observable.

Définition 12 Le système (1.10) est observable dans Ω s'il est observable en tout point x de Ω .

Définition 13 *Le système (1.10) est localement faiblement observable (respectivement localement fortement observable) dans Ω s'il est localement faiblement observable (respectivement localement fortement observable) en tout point x de Ω .*

On définit quelques ensembles de fonctions qui seront utilisés pour obtenir le critère d'observabilité.

On pose pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \{h(\cdot)\}; \\ \Theta_k &= \{h(f_{u_j} \circ f_{u_{j-1}} \circ \dots \circ f_{u_1}(\cdot)) / \forall i = 1, \dots, j; u_i \in U \text{ et } 1 \leq j \leq k-1\}; \\ \Theta &= \bigcup_{k \geq 1} \Theta_k.\end{aligned}$$

Théorème 1.11 [1]

1. Si $\dim d\Theta(x_0) = n$ alors le système (1.10) est localement fortement observable en x_0 .
2. Si le système (1.10) est localement faiblement observable alors il existe un ouvert $A \subset \Omega$ tel que $\dim d\Theta(x) = n$ pour tout $x \in A$.

La preuve de ce théorème est donnée dans [1].

Proposition 1.12 *Considérons le système (1.10) et x_0 un point fixé dans Ω . Supposons qu'il existe un voisinage W de x_0 tel que $d\Theta$ est de dimension constante.*

Alors nous avons les équivalences suivantes :

1. x_0 est localement fortement observable ;
2. x_0 est localement faiblement observable ;
3. $\dim \Theta(x_0) = n$.

Pour les besoins de preuve, consulter [1].

Remarque 1 *Pour les systèmes linéaires de la forme :*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k), \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1.11)$$

où A et C sont respectivement des matrices $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\Theta(x) = \bigcup_{k \geq 0} CA^k x.$$

Le système (1.11) est observable si et seulement si $\dim \bigcup_{k \geq 0} CA^k x = n$.

1.6 Théorie des observateurs

Un observateur est un outil essentiel pour surveiller, contrôler et estimer l'état des systèmes dynamiques dans des situations où les mesures directes sont limitées, bruitées ou inaccessibles. Il s'avère souvent très coûteux de mesurer en pratique, l'état complet d'un système (exemple de capteurs de position et de vitesses pour un système mécanique) [16].

Dans cette partie, nous allons donner quelques méthodes de synthèse classiques d'observateurs pour les systèmes linéaires et non-linéaires.

On considère le système dynamique (1.10).

Définition 14 [16]

Un observateur du système dynamique (1.10) est un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrées et de sorties du système à observer et dont le vecteur de sortie, noté $\hat{x}(k)$ est l'état estimé du système :

$$\begin{cases} z(k+1) = \hat{f}(z(k), u(k), y(k)), \\ \hat{x}(k) = \hat{h}(z(k), u(k), y(k)). \end{cases} \quad (1.12)$$

Ce système étant tel que :

1. $\|e(k)\| = \|\hat{x}(k) - x(k)\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$;
2. Si à l'instant initial k_0 on a $\hat{x}(k_0) = x(k_0)$, alors pour tout $k \geq k_0$, on a : $\hat{x}(k) = x(k)$.

Remarque 2 L'observateur (1.12) est appelé « observateur exponentiel » lorsque la convergence de $\hat{x}(k)$ vers $x(k)$ est exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$ et pour toutes conditions initiales $(x(0), \hat{x}(0))$, les solutions correspondantes aux systèmes (1.10) et (1.12) satisfont à :

$$\|\hat{x}(k) - x(k)\| \leq \exp(-\lambda k) \|\hat{x}(0) - x(0)\|.$$

Une illustration d'un ensemble système-observateur est donnée par la figure ci-après :

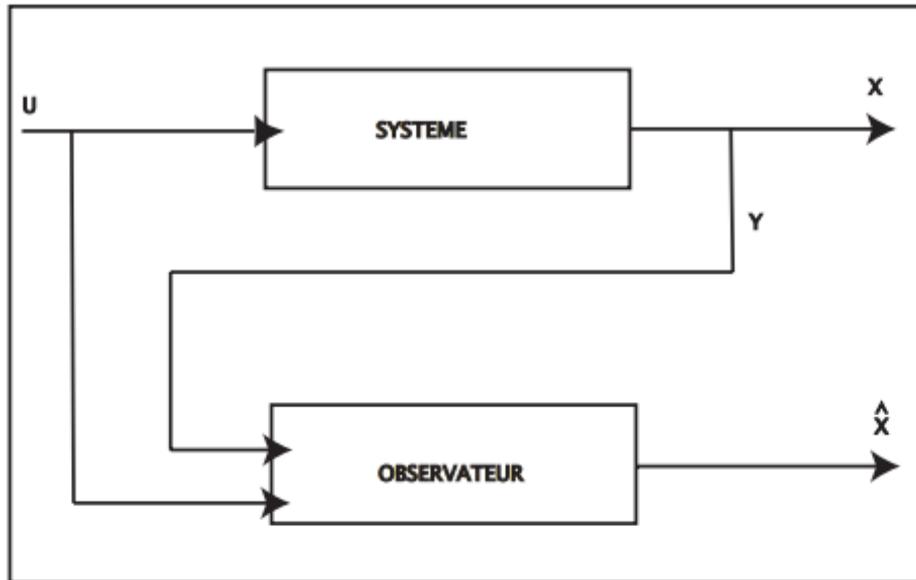


FIGURE 1.6.1 – Un ensemble système-observateur

1.6.1 Observateurs pour les systèmes linéaires

La notion d'observateur a été abordée initialement pour les systèmes linéaires. Ainsi, Luenberger introduit vers les années 1960 un observateur portant son nom Observateur de Luenberger [29]. L'observateur était réservé pour les systèmes linéaires autonomes. Ces travaux ont été généralisés plus tard pour les systèmes linéaires discrets.

Par la suite, on assiste à la publication des travaux de R. Kalman sur la synthèse d'observateur pour les systèmes stochastiques, connue sous le nom de filtre de Kalman [23].

Nous allons présenter la méthode de synthèse de l'observateur de Luenberger ainsi que celle du filtre de Kalman.

1.6.1.1 Observateur de Luenberger

On considère le système linéaire à temps discret suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1.13)$$

où $x(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u(k) \in U \subset \mathbb{R}^p$ et $y(k) \in \mathbb{R}^m$; A , B et C sont respectivement des matrices $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$ et sont bornées.

Un observateur du système (1.13) est déterminé par la méthode de Luenberger [29].

En effet, on pose l'observateur candidat comme étant :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (1.14)$$

où L est une matrice de gain.

L'erreur d'estimation est donnée par :

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (1.15)$$

Par la suite, on a :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1), \\ &= Ae(k) - L(y(k) - C\hat{x}), \\ &= Ae(k) - L(Cx(k) - C\hat{x}), \\ &= Ae(k) - LCe(k), \\ &= (A - LC)e(k). \end{aligned}$$

Pour que le système (1.14) soit un observateur du système (1.13), il faut choisir les composantes de la matrice L de sorte que les valeurs propres de la matrice $W = A - LC$ soient à l'intérieur du disque unité.

Le lemme suivant nous permet de déterminer l'existence de la matrice L .

Lemme 1.13 (*Placement des pôles*) [47]

La paire (C, A) est observable si et seulement si pour tout ensemble $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, il existe une matrice L telle que Λ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice $A - LC$.

La preuve détaillée de ce lemme est donnée dans [47].

On considère maintenant le système à temps variable de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k). \end{cases} \quad (1.16)$$

L'observateur de ce système est donné par la technique de Luenberger :

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + L_k(y(k) - C(k)\hat{x}(k)). \quad (1.17)$$

Par analogie des systèmes discrets linéaires à temps invariant, on montre que l'erreur d'estimation est : $e(k+1) = (A(k) - L_k C(k))e(k)$.

Pour que le système (1.17) soit un observateur du système (1.16), il faut choisir les matrices $L_k, k \in \mathbb{N}$ de sorte que les normes des matrices $A(k) - L_k C(k)$ soient inférieures à 1.

1.6.1.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman a été développé vers les années 1960 et a depuis été utilisé et étudié, ce qui signifie qu'il existe plusieurs travaux basés sur celui-ci [20, 42, 12, 28]. Il est capable de fournir des estimations de l'état d'un système même lorsque les mesures sont bruitées. Le filtre de Kalman utilise des techniques statistiques pour estimer l'état le plus probable du système, en tenant compte de l'incertitude. Il est principalement conçu pour minimiser l'erreur quadratique moyenne entre les estimations et l'état réel du système.

Nous allons donner quelques définitions et résultats des outils statistiques afin de pouvoir donner la méthode de synthèse du filtre de Kalman [23].

On considère deux vecteurs aléatoires X et Y de dimensions respectives m et d :

Définition 15 Une variable aléatoire z de moyenne m et de variance σ est gaussienne si sa fonction caractéristique est :

$$E[e^{i\pi\tau z}] = e^{i\pi\tau m - i\pi\sigma^2\tau^2}.$$

Définition 16 Un vecteur aléatoire est gaussien si les combinaisons linéaires de ses composantes sont des variables aléatoires gaussiennes.

Définition 17 Un estimateur de X à partir de l'observation Y est un vecteur aléatoire $\psi(Y)$ de dimension m , où ψ est une application de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^m .

Définition 18 On appelle estimateur du minimum d'erreur quadratique moyenne de X sachant Y un estimateur $\hat{X}(Y)$ tel que :

$$E[|X - \hat{X}(Y)|] \leq E[|X - \psi(Y)|]$$

pour tout estimateur $\psi(Y)$.

Proposition 1.14 L'estimateur du minimum d'erreur quadratique moyenne de X sachant Y est la moyenne conditionnelle de X sachant Y i.e :

$$\hat{X}(Y) = E[X/Y = y] = \int_{\mathbb{R}^n} x P_{X/Y=y} dx.$$

Une preuve détaillée est donnée dans [34].

En général, pour les vecteurs gaussiens, on a :

Proposition 1.15 Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien de dimension $m + d$, de moyenne et de matrice de covariance respectivement données par :

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q_X & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_Y \end{pmatrix}.$$

Si Q_X est inversible alors la densité conditionnelle $P(X/Y = y)$ est une densité gaussienne de moyenne $\hat{X}(y) = \bar{X} + Q_{XY}Q_Y^{-1}(y - \bar{Y})$ et de matrice de covariance $R = Q_X - Q_{XY}Q_Y^{-1}Q_{YX}$.

Proposition 1.16 Si $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ sont deux processus aléatoires gaussiens alors le processus $\{X_k, Y_k\}$ est gaussien de moyenne et de matrice de covariance :

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_k \\ \bar{Y}_k \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q_k^X & Q_k^{XY} \\ Q_k^{YX} & Q_k^Y \end{pmatrix}.$$

On considère le système à temps variant suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k). \end{cases} \quad (1.18)$$

On considère x_k et y_k des vecteurs aléatoires respectivement dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . Le système linéaire bruité correspondant au système (1.18) est donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k, \\ y_k = C_k x_k + v_k. \end{cases} \quad (1.19)$$

On suppose que :

- La condition initiale x_0 est gaussienne de moyenne \bar{x}_0 de covariance Q_0^x ;
- La suite $\{w_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^w ;
- La suite $\{v_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^v ;
- Les suites $\{w_k\}$ et $\{v_k\}$ sont mutuellement indépendantes.

On veut estimer le vecteur aléatoire $x(k)$ à partir de l'observation $y_{0,k} = (y_0, y_1, \dots, y_k)$.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.17 [23] (Filtre de Kalman)

Si on suppose que la matrice de covariance Q_k^v est inversible pour tout k , alors l'estimateur du minimum d'erreur quadratique moyenne \hat{x}_k de x_k sachant $y_{0,k}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_k; \\ P_k^- &= A_k P_{k-1} A_k^* + Q_k^w; \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k [y_k - C_k \hat{x}_k^-]; \\ P_k &= [I - K_k C_k] P_k^- \end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- C_k^* [C_k P_k^- C_k^* + Q_k^V]^{-1}$ est appelée le gain de Kalman, et avec les initialisations :

$$\hat{x}_0^- = \bar{x}_0 = E[x_0]; P_0^- = Q_0^x = cov(x_0).$$

Après avoir exploré les observateurs pour les systèmes linéaires, nous nous intéressons maintenant d'aborder le cas des systèmes non-linéaires qui présentent une approche plus sophistiquée.

1.6.2 Observateurs pour les systèmes non-linéaires

A l'opposé des systèmes linéaires, il n'existe pas une manière générale pour la synthèse d'observateur des systèmes dynamiques non-linéaires. Dans la littérature, deux approches sont envisageables dont l'une se base sur l'approximation des algorithmes linéaires et l'autre sur des algorithmes non-linéaires spécifiques [45]. Dans cette section, nous allons brièvement évoquer certains résultats sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes non-linéaires discrets. On considère système :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (1.20)$$

où $x(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$.

1.6.2.1 Observateur par la technique de linéarisation de l'erreur

L'observateur par la technique de linéarisation de l'erreur, également connu sous le nom d'observateur d'erreur linéarisée, est une approche pour estimer l'état d'un système non-linéaire en utilisant une linéarisation autour d'un point de fonctionnement spécifique.

Considérons le système (1.20).

On veut effectuer un changement de variable de notre système (1.20) tel que :

$$z(k) = \Phi(x(k)).$$

Le système devient :

$$\begin{cases} z(k+1) = Az(k) + G(y(k), u(k)), \\ y(k) = Cz(k) \end{cases} \quad (1.21)$$

où A , G et C sont respectivement des matrices $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$ et sont bornées.

Si la transformation Φ existe, on pose l'observateur comme étant :

$$\hat{z}(k+1) = A\hat{z}(k) + G(y(k), u(k)) + L(C\hat{z}(k) - y(k)).$$

On montre que $e(k) = \hat{z}(k) - z(k)$ est vérifiée :

$$e(k+1) = (A - LC)e(k).$$

L'observabilité de la paire (A, C) suffit à choisir L tel que l'erreur $e(k)$ converge vers zéro.

L'existence de la transformation Φ dans le cas des systèmes discrets non-linéaires autonomes requiert une condition nécessaire et suffisante [27].

On considère le système défini par :

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)), \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (1.22)$$

où F est un difféomorphisme sur un voisinage d'un point d'équilibre x_ϵ des états du système (1.22).

On pose :

$$Ad_\sigma X(p) = D_\sigma|_{\sigma^{-1}} X(\sigma^{-1}(p))$$

où D_σ est le jacobien de σ .

Lemme 1.18 [27]

Le système (1.22) est transformable sous la forme (1.21) si et seulement si il existe des entiers k_1, k_2, \dots, k_m ; $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$ et $\sum_{i=1}^m k_i = n$ tels que :

1. L'ensemble

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{\partial h^i \circ F^j}{\partial x}(x) : 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq k_i - 1 \right\}$$

engendre un espace vectoriel de dimension n dans un voisinage de x_ϵ .

2. En définissant :

$$\mathcal{Q}_i = \left\{ \frac{\partial h^j \circ F^k}{\partial x}(x) : 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq k_i - 1 \right\} - \left\{ \frac{\partial h^i \circ F^{k_i-1}}{\partial x}(x) \right\}$$

alors $Vect \{ \mathcal{Q}_i \} = Vect \{ \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_i \} ; 1 \leq i \leq m$.

1.6.2.2 Observateur basé sur l'algorithme de Newton

L'observateur basé sur l'algorithme de Newton connu sous le nom "observateur newtonien" est un observateur à horizon glissant (MHSE) qui vise à résoudre un ensemble d'équations non-linéaires par la méthode d'optimisation de Newton. Cet observateur a été conçu pour les systèmes non-linéaires à temps discret initialement par Grizzle et Moraal [15].

Nous allons décrire brièvement la méthode de synthèse de cet observateur en donnant quelques résultats classiques [15].

On considère le système non-linéaire à temps discret donné par :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (1.23)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$.

Soit $U_{[k-N+1;k]}$ et $Y_{[k-N+1;k]}$ représentant les séquences respectives de N entrées et N sorties collectionnées sur un horizon temporel glissant défini par $\{k-N+1, \dots, k\}$.

Soit $H_{[k-N+1;k]}(x)$, la séquence de N sorties prédites à partir d'un instant initial x et de la séquence d'entrée $U_{[k-N+1;k]}$:

$$H_{[k-N+1;k]}(x) = \begin{bmatrix} h_{u_{k-N+1}}(x) \\ h_{u_{k-N+2}} \circ f_{u_{k-N+1}}(x) \\ \vdots \\ h_{u_k} \circ f_{u_{[k-N+1;k-1]}}^{N-1}(x) \end{bmatrix}$$

où $f_{u_{[k-N+1;k-1]}}^{N-1}(x) = f_{u_{k-1}} \circ \dots \circ f_{u_{k-N+1}}(x)$.

La méthode consiste à trouver l'état x_{k-N+1} solution du système suivant :

$$Y_{[k-N+1;k]} = H_{[k-N+1;k]}(x_{k-N+1}). \quad (1.24)$$

L'algorithme de Newton du système (1.24) est donné dans [15] :

$$\psi^{i+1} = \psi^i + \left[\frac{\partial H}{\partial x}(\psi^i, U_{[k-N+1;k]}) \right]^{-1} (Y_{[k-N+1;k]} - H(\psi^i, U_{[k-N+1;k]})) \quad (1.25)$$

où $\left[\frac{\partial H}{\partial x}(\psi^i, U_{[k-N+1;k]}) \right]^{-1}$ est le pseudo inverse de $\left[\frac{\partial H}{\partial x}(\psi^i, U_{[k-N+1;k]}) \right]$.

Théorème 1.19 [15]

On suppose que :

1. Les fonctions f et h définies en (1.23) sont au moins trois fois différentiables par rapport à x .
2. Il existe un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n et un sous ensemble compact v de \mathbb{R}^m tels que pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe $u \in v$ tel que $f(x, u) \in \mathcal{O}$.
3. Il existe un entier N , $1 \leq N \leq n$ tel que les équations définies en (1.24) ont autant d'inconnues que d'équations, sont uniformément observables et de matrice d'observabilité de rang plein par rapport à \mathcal{O} et v^N .

Alors il existe un entier $d \geq 1$ tel que le système :

$$\begin{cases} z(k+1) = (\Theta^{Y_k, U_k})^{(d)}(f(z(k), u(k-N))), \\ \hat{x}(k) = f^{u(k-1)} \circ f^{u(k-2)} \circ \dots \circ f^{u(k-N)}(z(k)) \end{cases} \quad (1.26)$$

est un observateur exponentiel quasi-local au sens que :

- Si $x \in \mathcal{O}$ et $z_{N+1} = x_1$ alors $\hat{x}(k) = x(k)$ pour tout $k \geq N+1$.
- Il existe $\delta > 0$ tel que si $x_1 \in \mathcal{O}$, $|z_{N+1} - x_1| < \delta$ et pour tout $k \geq 0$, on a $\text{dist}(x(k), \mathcal{O}^c) \geq \epsilon$, on a $|\hat{x}(k+1) - x(k+1)| \leq \frac{1}{2}|\hat{x}(k) - x(k)|$.

1.6.2.3 Observateur du filtre de Kalman étendu

L'observateur du filtre Kalman étendu (EKF) est un algorithme qui est utilisé pour estimer l'état interne non mesurable d'un système dynamique à partir des mesures disponibles. L'observateur de Kalman étendu est une extension de l'algorithme du filtre de Kalman classique pour les systèmes non-linéaires. Il consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle qui, dont la linéarisation est effectuée par la formule de Taylor au premier degré.

Nous allons présenter en détail la méthode de synthèse de l'observateur dans [41].

On considère le système bruité suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k, \\ y_k = h(x_k, u_k) + v_k \end{cases} \quad (1.27)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^p$ et $u_k \in \mathbb{R}^m$; w_k et v_k respectivement dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p sont des bruits blancs gaussiens de matrices de covariances respectives \mathcal{Q}_k^w et \mathcal{Q}_k^v . La méthode consiste à linéariser les fonctions f et h respectivement autour de \hat{x}_{k-1} et \hat{x}_k^- .

On obtient :

$$\begin{aligned} f(x, u_k) &\simeq f(\hat{x}_{k-1}, u_k) + \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}_{k-1}, u_k)(x - \hat{x}_{k-1}), \\ g(x, u_k) &\simeq h(\hat{x}_k^-, u_k) + \frac{\partial}{\partial x} h(\hat{x}_k^-, u_k)(x - \hat{x}_k^-). \end{aligned}$$

On remplace le système (1.27) par le système linéarisé :

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + f_k + w_k, \\ y_k = H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k \end{cases} \quad (1.28)$$

où $F_k \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}_{k-1}, u_k)$, $f_k \equiv f(\hat{x}_{k-1}, u_k)$, $H_k \equiv \frac{\partial}{\partial x} h(\hat{x}_k^-, u_k)$, $h_k \equiv h(\hat{x}_k^-, u_k)$.

En appliquant le filtre de Kalman-Bucy au système linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}, u(k)); \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^* + Q_k^w; \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h(\hat{x}_k^-)]; \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-; \\ K_k &= P_k^- H_k^* [H_k P_k^- H_k^* + Q_k^v]^{-1}.\end{aligned}$$

1.7 Conclusion

Nous avons récapitulé et présenté, dans ce chapitre, quelques résultats concernant la stabilité des systèmes dynamiques à temps discret, ainsi que l'observabilité des systèmes dynamiques. La méthode de synthèse de quelques observateurs classiques, abordée dans ce chapitre, décrit notamment les systèmes linéaires et non-linéaires existant dans la littérature. Les résultats de stabilité et de synthèse des observateurs mentionnés dans ce chapitre ne seront pas directement utilisés dans la suite. Néanmoins, nous les évoquons pour permettre aux lecteurs de les mettre en perspective par rapport à la méthode que nous allons adapter pour concevoir l'observateur numérique par intervalle destiné au modèle de pêche que nous étudions.

MODÈLES DE LA DYNAMIQUE D'ÉVOLUTION DES POPULATIONS DE POISSONS SOUMISES À L'ACTION DE PÊCHE

2.1 Introduction

Les populations de poissons constituent un élément crucial des écosystèmes marins et une source de subsistance pour de nombreuses communautés à travers le monde. Pour assurer une gestion durable de ces ressources, il est impératif de surveiller de près la dynamique de la taille des populations de poissons.

Le suivi de la dynamique des populations de poissons est un processus très complexe qui vise à recueillir des informations capitales sur ces espèces. La modélisation mathématique est une composante fondamentale du processus de suivi, car elle fournit un outil puissant pour comprendre et prendre des décisions précises concernant les stocks. Un modèle mathématique peut être défini comme étant une entité mathématique que l'on substitue à une partie de la réalité pour rendre celle-ci plus maniable [34].

Un modèle de pêche est une représentation mathématique d'un écosystème aquatique, généralement d'une zone de pêche particulière, conçu pour analyser et prédire les interactions entre les populations de poissons, les prédateurs, les proies, les facteurs environnementaux et les activités de pêche humaine.

Les types de modèles couramment utilisés en évaluation des pêches sont les modèles globaux et les modèles structuraux.

Les modèles globaux sont des outils de la modélisation qui visent à représenter de manière globale la dynamique des populations de poissons et les interactions entre les espèces marines, sans nécessairement tenir compte des détails structurels complexes des écosystèmes. Ces approches prennent en compte l'ensemble du stock, en examinant notamment sa quantité totale (en poids ou en nombre) ainsi que son évolution sous l'influence de la pêche. Cependant, elles ne tiennent pas compte de la répartition par âge ou par taille au sein du stock [16].

Un exemple de modèle global connu sous le nom de "modèle global généralisé" élaboré par

Pella et Tomlinson [36] est donné par :

$$\frac{1}{B_t} \frac{dB_t}{dt} = H.(B_t^{m-1} - B_v^{m-1}).q.f_t,$$

où :

B_t est la biomasse totale au temps t .

f_t est l'effort de pêche instantané déployé au temps t .

q est la capturabilité.

B_v est la biomasse vierge, c'est à dire il n'y a pas d'effort de pêche et H et m sont des constantes.

Cependant, leur simplicité peut parfois limiter leur capacité à représenter avec précision les détails des écosystèmes marins, ce qui peut être nécessaire dans certaines situations.

Les modèles structuraux sont des outils de modélisation plus détaillés et précis que les modèles globaux. Ils requièrent une discrétisation du stock entre structure de classe d'âge ou de stade [34]. Les modèles structuraux visent à représenter les interactions entre les espèces marines, y compris les espèces de poissons, les prédateurs, les proies, ainsi que les détails de l'écosystème marin, tels que les conditions environnementales, la compétition, la prédation et les migrations. Ces modèles prennent en compte la composition du stock en fonction de l'âge et examinent comment cette composition évolue au fil du temps. Ils reconnaissent principalement que le stock à un moment donné est constitué d'individus provenant de différentes cohortes, présentant ainsi divers âges et longueurs. En conséquence, ces modèles permettent d'analyser et de prédire les éventuels changements dans le stock et les captures, en suivant l'évolution des différentes cohortes qui le composent [16]. La modélisation structurale des stocks halieutiques a été élaboré par [Beverton](#) et [Holt](#) [2].

Dans la suite de ce travail, nous allons donner la représentation structurale de la dynamique des populations de poissons développée par [W. M. Getz](#) et [R. G. Haight](#) [13].

2.2 Modèle structuré en classe d'âge d'une population de poissons

Un modèle discret structuré en classe d'âge est un outil mathématique utilisé en gestion des ressources halieutiques pour étudier les populations de poissons en les divisant en différentes classes d'âges discrètes. Ce type de modèle prend en considération des informations détaillées sur la croissance, la mortalité, la reproduction et l'effort de pêche.

Ainsi, pour bien modéliser la dynamique d'évolution des populations de poissons, nous allons considérer les hypothèses suivantes développées dans [13] :

1. les processus de mortalité naturelle et de fécondité ne dépendent pas de la densité de la population et du temps.

2. la reproduction des femelles est indépendante du nombre de mâle dans la population de poissons considérée.

Ces hypothèses ainsi émises ont pour but de simplifier le modèle afin de réduire sa complexité. Notons que la population de poissons est divisée en n classes indicées par $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On pose :

k : pas de temps de discrétisation ;

$x_i(k)$: nombre d'individus de la classe d'âge i au temps k ;

M_i : mortalité naturelle des individus de la classe i ;

q_i : capturabilité des individus de la classe i ;

$E(k)$: effort de pêche au temps k ;

τ : temps de pêche ;

$q_i E(k) \tau$: mortalité due à la pêche au temps k de la classe i .

2.2.1 Recrutement dans la première classe

Le recrutement dans la première classe se réfère à l'entrée de nouveaux individus dans la première classe d'âge d'une population de poissons. Cette première classe est généralement constituée des poissons les plus jeunes. Ce processus de recrutement est essentiel pour la croissance de la population. Cette fonction est très difficile à calculer en raison de plusieurs phénomènes, notamment la température et la profondeur du milieu marin, la vitesse du vent qui influe sur la survie des nouvelles naissances, la compétition entre les poissons et la prédation par d'autres espèces. Ainsi, ces facteurs ont un impact sur la croissance des nouvelles naissances.

Par convention, $x_0(k)$ désigne la population de poissons à l'âge 0, c'est à dire plus explicitement, la classe constituée par les œufs, les larves et les juvéniles. Elle est appelée classe des pré-recrutées (cette classe n'est jamais soumise à la pêche).

On note aussi, à partir de la première classe d'âge, ie $i = 1$, les individus sont capables de procréer.

La génération de nouvelles naissances est obtenue par :

$$x_0(k) = \sum_{i=1}^n x_i(k) b_i \quad (2.1)$$

avec b_i étant le taux de fécondité de la classe i .

Le recrutement dans la première classe est donné par :

$$x_1(k+1) = g \left(\sum_{i=1}^n x_i(k) b_i \right) \quad (2.2)$$

où g est une fonction de recrutement.

On note l'existence de plusieurs fonctions de recrutement dont les plus utilisées sont [13, 39, 2, 30, 40] :

$$\begin{aligned}
 \text{Beverton et Holt } g(x_0) &= \frac{\alpha x_0}{(1 + \beta x_0)}; \\
 \text{Ricker } g(x_0) &= \alpha x_0 \exp(-\beta x_0); \\
 \text{Power Function } g(x_0) &= \alpha x_0^{1-\beta}; \\
 \text{Shepherd } g(x_0) &= \frac{\alpha x_0}{(1 + \beta x_0^c)}, (c > 0); \\
 \text{Deriso-Schnute } g(x_0) &= \alpha x_0 (1 - \beta x_0)^{\frac{1}{\gamma}}; \\
 \text{Saila-Lorda } g(x_0) &= \alpha x_0^\gamma \exp(-\beta x_0).
 \end{aligned}$$

2.2.2 Passage d'une classe à la suivante

La survie d'une classe à une autre est souvent caractérisée par un taux relatif à la mortalité. Les individus de la population de poissons peuvent vivre pendant plusieurs années, nous pouvons procéder par une discrétisation du temps en prenant un pas d'une année (ce choix est arbitraire). Dans ce mémoire, nous considérons t comme étant une variable continue du temps et k dénotera les valeurs entières discrètes du temps. Nous supposons aussi que la pêche ne dure qu'une période sur l'intervalle de temps annuelle $[k, k + 1[$, c'est à dire $\tau \in]0, 1[$ avec τ qui est le temps de pêche [13].

Ainsi, la variation de la taille du stock de la classe i en ne tenant compte que de la mortalité naturelle est donnée par :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -M_i x_i(t) \quad (2.3)$$

avec $t \in [k + \tau, k + 1[$.

À partir de l'âge de recrutement, il est observé que la mortalité peut être attribuée soit à la pêche, soit à des causes naturelles. Donc la mortalité totale est la somme respective de la mortalité naturelle M_i et celle due à la pêche $q_i E(k) \tau$:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -(M_i + q_i E(k) \tau) x_i(t) \quad (2.4)$$

où $t \in [k; k + \tau]$.

En intégrant suivant $[k, k + 1[$, on aura :

$$x_{i+1}(k + 1) = x_i(k) \exp(-M_i - q_i E(k) \tau). \quad (2.5)$$

La structure de transition vers la dernière classe présente quelques différences par rapport aux autres. En effet, on suppose que la dernière classe comprend tous les individus d'âge supérieur à n . Ainsi, pour évaluer l'abondance de la population dans la dernière classe après l'intervalle de temps $[k, k + 1[$, en plus des individus provenant de la classe $n - 1$, il est nécessaire de prendre en compte ceux qui avaient déjà atteint l'âge n et qui ont survécu après l'intervalle de temps $[k, k + 1[$ [34]. La dynamique de l'abondance de la dernière classe est alors exprimée par :

$$x_n(k + 1) = x_{n-1}(k) \exp(-M_{n-1} - q_{n-1}E(k)\tau) + x_n(k) \exp(-M_n - q_nE(k)\tau). \quad (2.6)$$

La dynamique d'évolution de la population de poisson est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k + 1) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i(k)b_i\right), \\ x_2(k + 1) = x_1(k) \exp(-M_1 - q_1E(k)\tau), \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ x_n(k + 1) = x_{n-1}(k) \exp(-M_{n-1} - q_{n-1}E(k)\tau) + x_n(k) \exp(-M_n - q_nE(k)\tau). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

2.2.3 Modèle de capture des poissons

La population de poissons ainsi considérée est soumise à l'action de pêche. Le nombre de capture pendant l'instant $[k, k + 1[$ est disponible par mesure, autrement dit la sortie du système est mesurable.

Le nombre de capture total à l'instant k est donné par :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \int_k^{k+1} q_i E(k)\tau x_i(k) dt. \quad (2.8)$$

On pose :

$$\begin{aligned}
C_i(k) &= \int_k^{k+1} q_i E(k) \tau x_i(k) dt, \\
&= \frac{q_i E(k) \tau}{M_i + q_i E(k) \tau} (x_i(k) - x_{i+1}(k+1)), \\
&= \frac{q_i E(k) \tau}{M_i + q_i E(k) \tau} (x_i(k) - x_i(k) \exp(-M_i - q_i E(k) \tau)), \\
&= \frac{q_i E(k) \tau}{M_i + q_i E(k) \tau} x_i(k) (1 - \exp(-M_i - q_i E(k) \tau)).
\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i E(k) \tau}{M_i + q_i E(k) \tau} (1 - \exp(-M_i - q_i E(k) \tau)) x_i(k). \quad (2.9)$$

Pour simplifier le modèle (2.7) et (2.9), nous allons donner la représentation suivante :

$$x(k+1) = f(x(k), E(k)), \quad (2.10)$$

$$y(k) = h(x(k), E(k)) \quad (2.11)$$

où f et h sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\
(x(k), E(k)) &\mapsto (g(\sum_{i=1}^n x_i(k) b_i), v_1(k) x_1(k), \dots, v_n(k) x_n(k))^t, \\
h &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
(x(k), E(k)) &\mapsto \sum_{i=1}^n C_i(k) x_i(k).
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
x(k) &= (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^t; \\
v_i(k) &= \exp(-M_i - q_i E(k) \tau), i = 1, \dots, n; \\
C_i(k) &= \frac{q_i E(k) \tau}{M_i + q_i E(k) \tau} (1 - \exp(-M_i - q_i E(k) \tau)).
\end{aligned}$$

2.3 Modèle structuré en classe de stade d'une population de poissons

Les modèles structurés en classes de stade présentent plusieurs avantages dans le domaine de l'halieutique car ils tiennent en compte des différences biologiques significatives entre les stades de développement. Cela permet une représentation beaucoup plus précise de la dynamique des poissons, car il est plus réaliste de modéliser la croissance, la mortalité, la reproduction et d'autres processus en fonction des caractéristiques propres à chaque stade [16].

On note les hypothèses suivantes [13] :

Soit p_i la proportion d'individus ($i = 1, \dots, n$) de la classe i qui arrive dans la classe $i + 1$ après écoulement de l'intervalle de temps $[k, k + 1[$;

$1 - p_i$ est la proportion d'individus de la classe i qui n'atteignent pas le stade de classe $i + 1$;
 $p_n = 0$ car les individus qui atteignent le stade n y demeurent jusqu'à leur mort naturelle ou jusqu'à ce qu'ils soient capturés ;

$e^{-M_{i-1}-q_{i-1}E(k)\tau}$ est le taux de survie des individus de la classe i .

Ainsi, la dynamique de la classe de stade i avec $i = 2, \dots, n$ est alors décrite par :

$$x_i(k + 1) = (1 - p_i)e^{-M_i-q_iE(k)\tau}x_i(k) + p_{i-1}e^{-M_{i-1}-q_{i-1}E(k)\tau}x_{i-1}(k). \quad (2.12)$$

Le processus de recrutement au premier stade à l'instant $k + 1$ est donné par :

$$x_1(k + 1) = (1 - p_1)e^{-M_1-q_1E(k)\tau}x_1(k) + s_0g\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right). \quad (2.13)$$

2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté le modèle mathématique structuré en classes d'âge et de stade de notre population de poissons. Ces modèles représentent un instrument précieux et fondamental pour la gestion des ressources marines. Ils offrent ainsi aux décideurs en matière de pêche la possibilité de prendre des mesures éclairées basées sur des données, afin d'assurer la durabilité des stocks de poissons. Par la suite, nous allons exploiter le modèle basé sur les classes d'âge dans la conception de notre observateur numérique.

SYNTHÈSE D'UN OBSERVATEUR NUMÉRIQUE INTERVALLE : APPLICATION À UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET

3.1 Introduction

La représentation d'état décrit le comportement d'un système qui évolue au fil du temps à travers les variations de ses états. Pour bien contrôler un système dynamique, la connaissance de ses états à tout instant devient fondamentale. L'observation d'état permet ainsi de reconstruire les états d'un système à partir de sa sortie mesurable. Un observateur numérique intervalle est une méthode d'estimation utilisée pour travailler avec des intervalles à la place des valeurs exactes. Cela signifie que les états du système sont définies non pas comme des nombres précis, mais comme des plages possibles dans lesquelles les valeurs réelles peuvent se situer [45]. L'objectif de ce chapitre est de donner la méthode de synthèse d'un observateur numérique intervalle qui consiste à estimer les états du modèle de pêche discret développé dans [13] en générant à partir d'un instant $k \geq k_0$ un intervalle X_k susceptible de contenir ses états à l'instant k . Nous allons présenter d'abord notre observateur numérique intervalle. Ensuite, nous allons donner l'algorithme de synthèse de cet observateur. En dernier lieu, nous allons adapter à notre modèle de pêche discret notre observateur numérique intervalle. On considère le modèle de pêche donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i(k)b_i\right), \\ x_2(k+1) = x_1(k) \exp(-M_1 - q_1 E(k)\tau), \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) \exp(-M_{n-1} - q_{n-1} E(k)\tau) + x_n(k) \exp(-M_n - q_n E(k)\tau) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où g représente une fonction de recrutement et paramètres sont les mêmes que ceux du modèle à structure d'âge défini au chapitre précédent.

Rappelons aussi que le nombre de capture total à tout instant est donné par :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \int_k^{k+1} q_i E(k) \tau x_i(k) dt. \quad (3.2)$$

Afin de simplifier les notations, nous notons les équations (3.1) et (3.2) respectivement par :

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad (3.3)$$

$$y(k) = h(x(k)). \quad (3.4)$$

3.2 Présentation d'un observateur numérique intervalle : Interval Moving Horizon State Estimation (IMHSE)

Avant de présenter la méthode de l'estimation des états à horizon mobile par intervalle (IMHSE), définissons ce qu'est un observateur numérique intervalle.

Définition 19 [34]

On dira que $(X_k)_{k \geq k_0} \subset \mathbb{R}^n$ est un observateur intervalle de (3.3) de précision ϵ s'il existe $k_0 \geq 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$ les états $x(k)$ du système (3.3) vérifient $x(k) \in X_k$ et le diamètre de X_k est inférieur ou égal à ϵ .

3.2.1 Principe de la méthode

La théorie de contrôle des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui étudie la façon de concevoir et de mettre en œuvre des structures de contrôle pour la régulation de ces systèmes. La représentation d'état est une approche qui permet d'observer le comportement du système en fonction du temps comme le décrit (3.3). Parfois, l'accès aux vecteurs d'état est une tâche difficile. Cela peut être dû, dans plusieurs cas, à l'imprécision de la mesure de ces états, qui sont sujets à des erreurs significatives [45]. L'estimation d'état permet ainsi d'obtenir les meilleures valeurs possibles des états d'un système. Ainsi, pour reconstruire ces états, il faudrait analyser tout l'espace de recherche dans le but de trouver les solutions du problème. L'approche ponctuelle ne permet de rechercher qu'une partie de cet espace. Donc, on ne peut pas prétendre trouver la ou les solutions du problème dans le cadre des systèmes non-linéaires. Pour surmonter cette difficulté, une méthode appelée estimation des états à horizon mobile par intervalle (IMHSE) a été développée par [H.Valdez et al.](#) [45]. Le but de cette approche est de résoudre un problème d'optimisation sur un domaine de recherche. L'idée est

de minimiser l'écart entre la sortie réelle et celle estimée sur un horizon temporel avec sh le début de l'horizon et lh la longueur :

$$j_{sh}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=sh}^{sh+lh-1} (h(x_k, E(k)) - y(k))^2 \quad (3.5)$$

où $x_{sh} = x$ et $x_k = f(x_{k-1}, E(k-1))$ pour $k = sh + 1, \dots, sh + lh - 1$.

L'estimation d'état ne fournit pas la valeur actuelle de l'état mais plutôt sa borne inférieure et supérieure. Grâce à cette méthode, le minimum global est assuré d'être trouvé, ce qui garantit la convergence globale de l'observateur, et elle est applicable à plusieurs systèmes non-linéaires discrets. Pour appliquer cette méthode, nous allons d'abord présenter l'analyse des intervalles qui nous permettra de représenter les états par des nombres à intervalles.

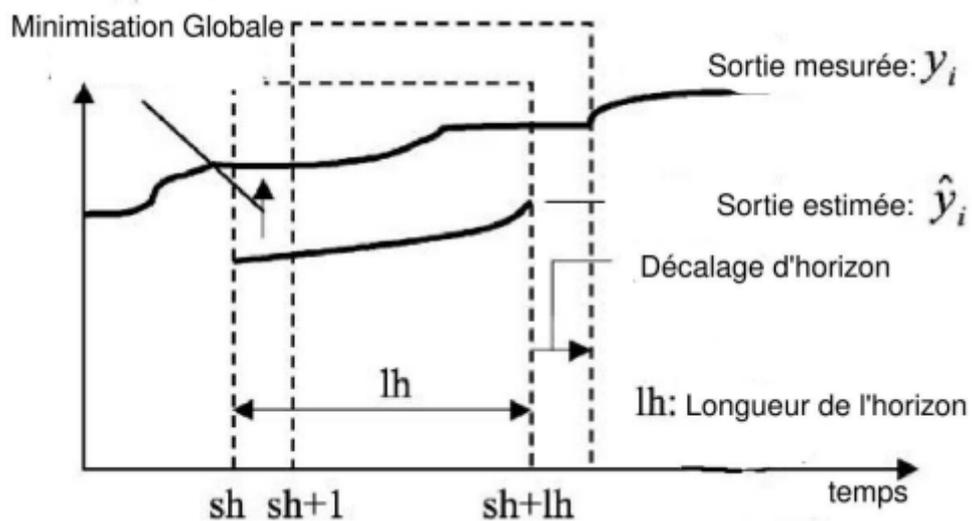


FIGURE 3.2.1 – La méthode IMHSE globalement convergente

3.2.2 Analyse des intervalles

Dans les années 1970, l'analyse des intervalles a été élaborée par Moore [32] dans le but d'évaluer l'incertitude issue de la précision limitée des calculs en virgule flottante sur les ordinateurs. Actuellement, cette méthode est largement utilisée pour résoudre des équations ou inéquations non-linéaires, ainsi que pour minimiser des fonctions coût non convexes [21]. Nous allons maintenant présenter quelques résultats utiles issus de l'analyse des intervalles.

3.2.2.1 Arithmétique des intervalles

Définition 20 [44]

Un intervalle $I = [a, b]$ est un ensemble fermé, borné et connecté de nombres réels tel que : $\forall a, b \in \mathbb{R}$;

$$[a, b] = \{x/a \leq x \leq b\}.$$

L'utilisation des quatre opérations arithmétiques est étendue sur les intervalles comme suit :

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d]; \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c]; \\ [a, b] \times [c, d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]; \\ [a, b] \div [c, d] &= [a, b] \times [1/d, 1/c] \text{ si } \{0\} \notin [c, d]. \end{aligned}$$

Définition 21 [44]

Un vecteur intervalle $[I]$ (ou pavé) est constitué de n intervalles tel que $[I] \subset \mathbb{R}^n$ et est noté par :

$$[I] = [[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n]]^t.$$

En plus de l'extension des opérations arithmétiques sur les nombres à intervalles, d'autres concepts sont aussi développés dans [31] parmi lesquels :

- La *largeur* d'un intervalle étant définie comme le plus grand de ses cotés :
 - si I est un intervalle : $w(I) = b - a$;
 - si $[I]$ est un vecteur intervalle : $w([I]) = \max \{w([I_1]), w([I_2]), \dots, w([I_n])\}$.On précise qu'un intervalle nul a une largeur égale à 0.
- Le *centre* d'un intervalle est défini par :
 - si I est un intervalle : $C(I) = \frac{b + a}{2}$;
 - si $[I]$ est un vecteur intervalle : $\vec{C}([I]) = [C([I_1]), C([I_2]), \dots, C([I_n])]^t$.

- La *valeur absolue* d'un intervalle est donnée par :
 si I est intervalle : $|I| = \max \{|a|, |b|\}$;
 si $[I]$ est un vecteur intervalle : $|[I]| = \max \{|I_1|; |I_2|, \dots, |I_n|\}$.

3.2.2.2 Opérations ensemblistes

Les opérations ensemblistes sont des opérations issues de la logique mathématique étendues sur les intervalles, visant à manipuler, combiner et analyser les nombres dans des plages spécifiques. Parmi ces opérations, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cap \mathbb{B} &= \{[I] \subset \mathbb{R}^n / [I] \subset \mathbb{A} \wedge [I] \subset \mathbb{B}\}; \\ \mathbb{A} \cup \mathbb{B} &= \{[I] \subset \mathbb{R}^n / [I] \subset \mathbb{A} \vee [I] \subset \mathbb{B}\}; \\ \mathbb{A} \subset \mathbb{B} &= \{[I] \subset \mathbb{R}^n / [I] \subset \mathbb{A} \Rightarrow [I] \subset \mathbb{B}\}; \\ \mathbb{A} = \mathbb{B} &= \{[I] \subset \mathbb{R}^n / \mathbb{A} \subset \mathbb{B} \wedge \mathbb{B} \subset \mathbb{A}\}. \end{aligned}$$

3.2.2.3 Fonctions d'inclusion

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction réelle et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ un ouvert de \mathbb{R} .

Une fonction d'inclusion est une fonction qui prend en entrée des intervalles et renvoie un intervalle en sortie.

Définition 22 *On dit que $\mathcal{F} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une fonction d'inclusion de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si : $\forall X \subset B, B \subset \mathbb{R}^n, x \in B, f(x) \in \mathcal{F}(X)$ et $w(B)$ tend vers 0 implique $w(\mathcal{F}(B))$ converge vers 0.*

Remarque 3 [45]

Il existe plusieurs méthodes de représenter et d'évaluer les fonctions d'inclusion dans le cadre de l'analyse des intervalles telles que l'extension naturelle et l'extension numérique des intervalles. La plus simple est l'extension naturelle qui consiste à remplacer x par l'intervalle correspondant en utilisant les opérateurs arithmétiques étendus sur les intervalles.

Nous allons utiliser, dans la suite, l'extension naturelle comme fonction d'inclusion. Considérons les fonctions d'inclusion représentant respectivement la dynamique du système (3.3) et la fonction objectif j_{sh} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ (I, E) &\mapsto \mathcal{F}(I, E) = \{f(x, E) / x \in I\}, \\ \mathcal{J}_{sh} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ I &\mapsto \mathcal{J}_{sh}(I) = \{j_{sh}(x) / x \in I\}. \end{aligned}$$

Nous cherchons à déterminer un intervalle, d'une largeur inférieure à ϵ , défini comme la tolérance du capteur, choisi arbitrairement à la fin de l'horizon temporel ($sh + lh$), qui englobe les états du système (3.3). Pour ce faire, nous devons définir d'abord un domaine admissible pour y chercher la ou les solutions du problème par la méthode d'optimisation globale par intervalle développée dans [18].

On considère le problème d'optimisation :

$$\min_{z \in \Omega} j_{sh}(z). \quad (3.6)$$

3.2.3 Algorithmes de synthèse d'un observateur numérique

3.2.3.1 Optimisation globale par intervalle

L'optimisation globale par intervalle est une méthode qui vise à trouver le minimum global d'une fonction dans un domaine donné en utilisant des intervalles pour représenter l'incertitude sur les valeurs [26]. Cette approche garantit que la solution se trouve dans un certain intervalle. Elle procède de manière itérative pour éliminer les intervalles qui ne contiennent pas le minimum global. En effet, des parties du domaine admissible $[\Omega]$ sont éliminées quand elles ne contiennent pas le minimum global de la fonction, les parties non éliminées seront donc incorporées dans une liste. Cette liste contiendra toutes les sous boîtes du domaine admissible $[\Omega]$ où le minimum global de la fonction objectif peut être localisé. Ainsi, l'union de tous les éléments contenus dans la liste, incluent tous les minimums globaux du critère j_{sh} qui doit être minimisé. Nous allons donner quelques hypothèses essentielles pour la formulation de l'algorithme d'optimisation globale [18] :

- Soit $[\Omega]$ un domaine invariant des états du système (3.3).
- Soit ϵ arbitrairement fixé le diamètre maximal souhaité des ouverts contenant une solution du problème (3.6).
- Soit $J^* = \min_{x \in \Omega} j_{sh}(x)$.
- Soit L une liste vide d'ouvert.

Pour prendre en compte ces hypothèses, un algorithme très simple minimisant globalement une fonction non-linéaire est détaillé de la manière suivante :

1. On initialise L à Ω :

$$L := \Omega.$$

2. On enlève le premier élément A de la liste L .

Soit $A = A_1 \cup A_2$ une subdivision de A à partir de son point médian β_{sh} .

On pose :

$$UJ^* = j_{sh}(\beta_{sh});$$

$$[L_{A_1}, U_{A_1}] = J_{sh}(A_1);$$

$$[L_{A_2}, U_{A_2}] = J_{sh}(A_2).$$

3. Si $L_{A_1} > UJ^*$ alors A_1 ne contient pas de point où le minimum J^* est atteint on supprime A_1 de la liste L .

Sinon A_1 contient un point où J^* est atteint, on ajoute A_1 à la fin de la liste L .

Si $L_{A_2} > UJ^*$ alors A_2 ne contient pas de point où le minimum J^* est atteint on supprime A_2 de la liste L .

Sinon A_2 contient un point où J^* est atteint, on ajoute A_1 à la fin de la liste L .

4. On recommence la boucle à partir de 2) tant que la liste est non vide et le diamètre du premier élément de la liste est supérieur à ϵ .

A la fin de la boucle, soit la liste L est vide (pas de minimum de j_{sh} sur Ω) ou L contient tous les ouverts de diamètres inférieurs ou égaux à ϵ et contenant un minimum global de $j_{sh}(x)$.

Algorithme 1 GlobalOptimisation($[\Omega]$, ϵ , $j_{sh}(\cdot)$)

Entrée: $[\Omega]$: Domaine initial admissible sur \mathbb{R}^n , ϵ : Tolérance ou précision d'optimisation,
 $j_{sh}(\cdot)$: Critère à optimiser

Sortie: Liste $\{[x]\}$: liste de boîtes dans lesquelles le minimum global est contenu

- 1: Liste $\{[x]\} := \{[\Omega]\}$
 - 2: $d := w([\Omega])$
 - 3: $\mathcal{J}_{sh}([\Omega]) := [LJ_{\Omega} UJ_{\Omega}]$
 - 4: $UJ := UJ_{\Omega}$
 - 5: **Tant que** $d > \epsilon$ **Faire**
 - 6: Retirer la première boîte $[X]$ de la liste Liste $\{[X]\}$
 - 7: Bisection : Couper en deux la boîte $[X]$ par son côté le plus large telle que : $[X] = [X_1] \cup [X_2]$
 - 8: $[LX_1 UX_1] := \mathcal{J}_{sh}(X_1)$
 - 9: **Si** $LX_1 \leq UJ$ **Alors**
 - 10: Ajouter X_1 à la fin de la liste
 - 11: **Si** X_1 est listé **Alors**
 - 12: $UJ_{X_1} := \mathcal{J}_{sh}(\beta_{X_1})$ où β_{X_1} est le centre de X_1
 - 13: **Si** $UJ_{X_1} < UJ$ **Alors**
 - 14: $UJ := UJ_{X_1}$
 - 15: **Fin Si**
 - 16: **Fin Si**
 - 17: **Fin Si**
 - 18: $[LX_2 UX_2] := \mathcal{J}_{sh}(X_2)$
 - 19: **Si** $LX_2 \leq UJ$ **Alors**
 - 20: Ajouter X_2 à la fin de la liste
 - 21: **Si** X_2 est listé **Alors**
 - 22: $UJ_{X_2} := \mathcal{J}_{sh}(\beta_{X_2})$ où β_{X_2} est le centre de X_2
 - 23: **Si** $UJ_{X_2} < UJ$ **Alors**
 - 24: $UJ := UJ_{X_2}$
 - 25: **Fin Si**
 - 26: **Fin Si**
 - 27: **Fin Si**
 - 28: Allouer la largeur de la boîte suivante $[X]$ à d
 - 29: $d := w([X])$
 - 30: **Fin Tant que**
-

3.2.3.2 Trajectoire d'un intervalle

Pour appliquer la méthode IMHSE, nous avons besoin d'évaluer l'ensemble des valeurs des trajectoires de notre système (3.3). Autrement dit, nous allons calculer à l'instant k le vecteur intervalle d'état qui contient toutes les valeurs possibles de ces états pour une condition initiale à l'instant k_0 appartenant au vecteur intervalle initial.

On calcule les intervalles contenant les états du système (3.3) au temps $sh + lh$ en utilisant la

fonction d'inclusion de la dynamique du système (3.3) :

$$X_{sh+lh} = \underbrace{\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \dots \circ \mathcal{F}}_{lh \text{ fois}}(X_{sh}). \quad (3.7)$$

L'algorithme d'évaluation des trajectoires est le suivant :

Algorithme 2 IntervalTraject($X, sh, lh, u, \mathcal{F}, \mathcal{H}$)

Entrée: X : Vecteur intervalle d'état à l'instant sh

Entrée: sh : Début de l'horizon

Entrée: lh : Fin de l'horizon

Entrée: $u \{.\}$: Valeur de l'entrée

Entrée: \mathcal{F} : Fonction d'inclusion de f

Entrée: \mathcal{H} : Fonction d'inclusion de h

Sortie: X_l : Vecteur intervalle d'état à la fin de l'horizon

Sortie: ψ_l : Intervalle de sortie du système à la fin de l'horizon

1: **Initialisation**

2: $X_{sh} = X$

3: $l = sh + lh$ // Fin de l'horizon temporel

4: **Boucle de calcul**

5: **Pour** $i = sh$ à $l - 1$ **Faire**

6: $X_{i+1} := \mathcal{F}(X_i, u_i)$

7: $\psi_i := \mathcal{H}(X_i)$

8: **Fin Pour**

3.2.3.3 La méthode d'estimation : IMHSE

L'algorithme de la méthode d'estimation des états à horizon mobile par intervalle calcule un vecteur intervalle d'état à l'instant $sh + lh$ en utilisant l'algorithme du calcul des trajectoires et de l'optimisation globale par intervalle. Nous supposons toujours qu'au temps $k = sh$ on dispose des mesures $y(sh), y(sh+1), \dots, y(sh+lh-1)$. L'algorithme de la méthode d'estimation d'état à horizon mobile par intervalle le suivant :

Algorithme 3 $\text{IMHSE}(\Omega, lh, \epsilon, \mathcal{F}, \mathcal{H}, u \{.\}, y_m)$

Entrée: Ω : Domaine initial dans \mathbb{R}^n , lh : Longueur de l'horizon, ϵ : Tolérance d'optimisation, $u \{.\}$: Valeur de l'entrée, \mathcal{F} : Fonction d'inclusion de f , \mathcal{H} : Fonction d'inclusion de h , $y_m : \{y_m(sh), \dots, y_m(l)\}$

Sortie: X_l : Vecteur intervalle d'état de l'estimation à la fin de l'horizon

- 1: Initialisation :
 - 2: $sh := 1$
 - 3: **Tant que** $sh \leq lh$ **Faire**
 - 4: Définition du domaine admissible Ω pour X_l
 - 5: Calcul de la solution de MHSE en utilisant l'optimisation globale par intervalle :
 - 6: $X_{sh} := \mathbf{GlobalOptimisation}()$
 - 7: Calculer le vecteur intervalle estimé à la fin de l'horizon :
 - 8: $X_l := \mathbf{IntervalTraject}()$
 - 9: Retourner X_l
 - 10: Retour à l'étape 2 pour calculer l'estimation suivante :
 - 11: $sh := sh + 1$
 - 12: **Fin Tant que**
-

Théorème 3.1 [34]

Supposons que le système (3.3) à sortie mesurable (3.4) est localement observable, alors l'algorithme IMHSE dont ses différentes étapes sont décrites dans la section 3.2.3.3 génère un observateur numérique intervalle du système (3.3). Le diamètre de l'observateur intervalle est fixé arbitrairement.

Dans le but de donner la preuve de ce théorème, on donne le lemme suivant :

Lemme 3.2 [3]

Si le système 3.3 avec la sortie mesurable (3.4) est localement observable, alors le problème (3.6) admet une unique solution qui correspond à l'état du système au début du temps d'observation sh .

Preuve 1 (Lemme (3.2))

j_{sh} est continue sur Ω qui est compact, alors j_{sh} atteint son minimum sur Ω . On désigne par $x(x_0, k_i, k_j)$ la solution du système (3.3) à l'instant k_j ayant la condition initiale x_0 au temps initial $k_i \leq k_j$.

Soient sh et lh deux entiers naturels fixés (avec $lh \geq n$), alors pour tout x dans \mathbb{R}^n , on pose :

$$G(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ h \circ f(x(x, sh, sh + 1)) \\ \vdots \\ h \circ f(x(x, sh, sh + lh - 1)) \end{bmatrix}.$$

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto G(x). \end{aligned}$$

Puisque le système (3.3),(3.4) est localement observable, on a :

$$\text{rang}\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x)\right) = n.$$

Donc l'application A est injective et par la suite le problème (3.6) admet une unique solution x^* .

Par ailleurs on remarque que $j_{sh}(x(sh)) = 0$, donc $x(sh)$ est un minimum global de j_{sh} , ce minimum étant unique dans Ω , alors on a $x(sh) = x^*$.

Preuve 2 (Théorème 3.1) [34]

Nous faisons la preuve du théorème pour $n = 3$, pour $n \geq 3$, le raisonnement est identique.

- **Montrons que le système (3.3), (3.4) est observable.**

Soient $x(k)$ et $\hat{x}(k)$ $k \geq 0$ deux solutions du système (3.3) telles que :

$$h(x(k)) = h(\bar{x}(k)) ; k \geq 0.$$

Rappelons que $h(x(k)) = C(k)x(k)$ où $C(k) = (C_1(k), C_2(k), C_3(k))$ et

$$C_i(k) = \frac{q_i E(k) \tau}{M_i + q_i E(k) \tau} x_i(k) (1 - \exp(-M_i - q_i E(k) \tau)).$$

On a :

$$\begin{aligned} C(k)x(k) - C(k)\bar{x}(k) &= 0, \\ C(k)(x(k) - \bar{x}(k)) &= 0, \\ C_1(k)(x_1(k) - \bar{x}_1(k)) + C_2(k)(x_2(k) - \bar{x}_2(k)) + C_3(k)(x_3(k) - \bar{x}_3(k)) &= 0. \end{aligned}$$

On pose :

$$z(k) = x(k) - \bar{x}(k).$$

On peut alors écrire :

$$C_1(k)z_1(k) + C_2(k)z_2(k) + C_3(k)z_3(k) = 0, \quad (3.8)$$

$$C_1(k+1)z_1(k+1) + C_2(k+1)z_2(k+1) + C_3(k+1)z_3(k+1) = 0, \quad (3.9)$$

$$C_1(k+2)z_1(k+2) + C_2(k+2)z_2(k+2) + C_3(k+2)z_3(k+2) = 0. \quad (3.10)$$

Tenant compte du fait pour tout $k > 0$, $i = 2, 3$, $z_i(k) = v_{i-1}(k-1)z_{i-1}(k-1)$, on a :

(3.10) implique que :

$$\begin{aligned} C_1(k+2)z_1(k+2) + C_2(k+2)v_1(k+1)z_1(k+1) + C_3(k+2)v_2(k+1)z_2(k+1) &= 0, \\ \implies C_1(k+2)z_1(k+2) + C_2(k+2)v_1(k+1)z_1(k+1) + C_3(k+2)v_2(k+1)v_1(k)z_1(k) &= 0, \\ \implies z_1(k+2) + \frac{C_2(k+2)v_1(k+1)}{C_1(k+2)}z_1(k+1) + \frac{C_3(k+2)v_2(k+1)v_1(k)}{C_1(k+2)}z_1(k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

On pose :

$$\alpha_1(k) = \frac{C_2(k+2)v_1(k+1)}{C_1(k+2)} \text{ et } \alpha_2(k) = \frac{C_3(k+2)v_2(k+1)v_1(k)}{C_1(k+2)}.$$

Rappelons que pour tout $i = 1, 2, 3$, on a :

$$v_i(k) = e^{-M_i - q_i E(k)\tau} \text{ et}$$

$$C_i(k) = \frac{q_i E(k)\tau}{M_i + q_i E(k)\tau} x_i(k) (1 - \exp(-M_i - q_i E(k)\tau)) = \frac{q_i E(k)\tau}{-\ln v_i(k)} (1 - v_i(k)).$$

On obtient par la suite :

$$\begin{aligned} z_1(k+2) + \alpha_1(k)z_1(k+1) + \alpha_2(k)z_1(k) &= 0, \\ z_1(k+2) &= -\alpha_1(k)z_1(k+1) - \alpha_2(k)z_1(k), \\ z_1(2) &= -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0), \\ z_1(3) &= -\alpha_1(1)z_1(2) - \alpha_2(1)z_1(1) = -\alpha_1(1)(-\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0) - \alpha_2(1)z_1(1)), \\ z_1(3) &= (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(0)\alpha_2(0)z_1(0). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} z_1(3) &= f_0(x(2)) - f_0(\bar{x}(2)) \text{ avec } f_0(x) = g(\sum_{i=1}^3 b_i x_i), \\ z_1(3) &= f_0(x_1(2), v_1(1)x_1(1), v_1(0)v_2(1)x_1(0)) - f_0(\bar{x}_1(2), v_1(1)\bar{x}_1(1), v_1(0)v_2(1)\bar{x}_1(0)). \end{aligned}$$

On a :

$$z_1(3) = (x_1(2) - \bar{x}_1(2))G_1 + v_1(1)(x_1(2) - \bar{x}_1(2))G_2 + v_1(0)v_2(1)(x_1(0) - \bar{x}_1(0))G_3$$

où

$$G_i = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(tz_1(2) + \bar{x}_1(2), tv_1(1)z_1(1) + v_1(1)\bar{x}_1(1), tv_1(0)v_2(1)z_1(0) + v_1(0)v_2(1)\bar{x}_1(0))dt$$

pour $i = 1, 2, 3$.

D'où

$$z_1(3) = z_1(2)G_1 + v_1(1)z_1(1)G_2 + v_1(0)v_2(1)z_1(0)G_3.$$

En remplaçant $z_1(2)$ par sa valeur dans l'expression de $z_1(3)$, on obtient :

$$\begin{aligned} z_1(3) &= G_1(-\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0)) + v_1(1)z_1(1)G_2 + v_1(0)v_2(1)z_1(0)G_3, \\ z_1(3) &= (-\alpha_1(0)G_1 + v_1(1)G_2)z_1(1) + (-\alpha_2(0)G_1 + v_1(0)v_2(1)G_3)z_1(0). \end{aligned}$$

D'après les deux expressions de $z_1(3)$, on a :

$$(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(0)\alpha_2(0)z_1(0) = (-\alpha_1(0)G_1 + v_1(1)G_2)z_1(1) + (-\alpha_2(0)G_1 +$$

$$v_1(0)v_2(1)G_3)z_1(0).$$

En mettant $z_1(0)$ et $z_1(1)$ en facteur, on obtient :

$$(v_1(0)v_2(1)G_3 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0))z_1(0) + (v_1(1)G_1 - \alpha_1(0)G_1\alpha_1(0)\alpha_1(1))z_1(1) = 0, \quad (3.12)$$

$$z_1(4) = -\alpha_1(2)z_1(3) - \alpha_2(2)z_1(2).$$

On sait que :

$$z_1(3) = (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(0)\alpha_2(0)z_1(0)$$

et

$$z_1(2) = -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0).$$

D'où

$$z_1(4) = -\alpha_1(2) ((\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0)) - \alpha_2(2)(-\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0)),$$

$$z_1(4) = \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1))z_1(0) + (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1)))z_1(1).$$

D'autre part aussi, on a :

$$z_1(4) = f_0(x(3)) - f_0(\bar{x}(3)),$$

$$z_1(4) = f_0(x_1(3), v_1(2)x_1(2), v_1(1)v_2(2)x_1(1)) - f_0(\bar{x}_1(3), v_1(2)\bar{x}_1(2), v_1(1)v_2(2)\bar{x}_1(1)),$$

$$z_1(4) = (x_1(3) - \bar{x}(3))\bar{G}_1 + v_1(2)(x_1(2) - \bar{x}_1(2))\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)(x_1(1) - \bar{x}_1(1))\bar{G}_3$$

avec

$$\bar{G}_i = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(tz_1(3) + \bar{x}_1(3), tv_1(2)z_1(2) + v_1(2)\bar{x}_1(2), tv_1(1)v_2(2)z_1(1) + v_1(1)v_2(2)\bar{x}_1(1))dt;$$

pour $i = 1, 2, 3$.

En utilisant les expressions :

$$z_1(3) = (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0)$$

et

$$z_1(2) = -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0),$$

nous obtenons :

$$z_1(4) = ((\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0))\bar{G}_1 + v_1(2)(-\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0))\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)z_1(1)\bar{G}_3.$$

En égalisant les deux expressions de $z_1(4)$, nous obtenons l'équation :

$$(\alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\bar{G}_2 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)))z_1(0) +$$

$$((\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)\bar{G}_3 -$$

$$(\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1)))z_1(1) = 0. \quad (3.13)$$

En couplant les équations (3.12) et (3.13), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (v_1(0)v_2(1)G_3 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0))z_1(0) \\ + (v_1(1)G_2 - \alpha_1(0)G_1 - \alpha_1(0)\alpha_1(1))z_1(1) = 0, \\ (\alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\bar{G}_2 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)))z_1(0) + \\ ((\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)\bar{G}_3 - \\ (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1)))z_1(1) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

On remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} (g(\sum_{i=1}^n b_i x_i)) = b_i \frac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) \Big|_{\omega = \sum_{i=1}^n b_i x_i}.$$

D'où :

$$G_i = \frac{b_i}{b_1} G_1 \text{ et } \bar{G}_i = \frac{b_i}{b_1} \bar{G}_1; \quad i = 2, 3.$$

Le système d'équations (3.14) s'écrit alors :

$$\begin{cases} (v_1(0)v_2(1)\frac{b_3}{b_1}G_1 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0))z_1(0) \\ + v_1(1)\frac{b_2}{b_1}G_1 - \alpha_1(0)G_1 - \alpha_1(0)\alpha_1(1))z_1(1) = 0, \\ (\alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)))z_1(0) \\ + ((\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 + v_1(1)v_2(2)\frac{b_3}{b_1}\bar{G}_1 \\ - (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))))z_1(1) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= v_1(0)v_2(1)\frac{b_3}{b_1}G_1 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0); \\ \Gamma_{12} &= v_1(1)\frac{b_2}{b_1}G_1 - \alpha_1(0)G_1 - \alpha_1(0)\alpha_1(1); \\ \Gamma_{21} &= \alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)); \\ \Gamma_{22} &= (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 + v_1(1)v_2(2)\frac{b_3}{b_1}\bar{G}_1 \\ &\quad - (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))). \end{aligned}$$

On écrit le système (3.15) sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}z_1(0) + \Gamma_{12}z_1(1) = 0, \\ \Gamma_{21}z_1(0) + \Gamma_{22}z_1(1) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

On considère maintenant l'ensemble des paramètres du modèle tels que le déterminant du système (3.16) soit non nul i.e :

$$-\Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} \neq 0. \quad (3.17)$$

Cet ensemble est un ensemble de mesure non nulle dans \mathbb{R}_+^n . Dans le cas où (3.17) n'est pas satisfaite, il suffit de perturber un des paramètres du modèle (2.7) pour que la relation (3.17) soit vérifiée.

D'après (3.17), on a $z_1(1) = z_1(0) = 0$.

En utilisant l'équation (3.11), nous obtenons $z_1(k) = 0 \forall k \geq 0$.

Par ailleurs $z_2(2) = v_1(1)z_1(1)$, donc $z_2(2) = 0$.

De (3.8), nous avons $z_3(2) = 0$ et par conséquent $z_2(1) = 0$ et $z_3(1) = 0$, $z_3(1) = 0$ implique $z_2(0) = 0$. D'après l'équation (3.8), on a $z_3(0) = 0$.

Finalement $z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = 0$.

Le système (3.3) et (3.4) est donc observable.

Alors d'après le lemme 3.2 le problème (3.6) admet une unique solution. Donc pour tout $sh \in \mathbb{N}$, l'algorithme d'optimisation décrit dans le chapitre 2 de la section 3.2.3.1 génère un unique ouvert X_{sh} contenant $x(sh)$.

Soit ϵ positif le diamètre souhaité de l'observateur intervalle, d'après la continuité de f , il existe $\eta > 0$ tel que $\|x - x(sh)\| < \eta$ implique que :

$$\underbrace{\|f \circ f \circ \dots \circ f(x) - f \circ f \circ \dots \circ f(x(sh))\|}_{lh \text{ fois}} < \frac{1}{2}\epsilon,$$

il suffit de déterminer X_{sh} par l'algorithme d'optimisation tel que son diamètre soit inférieur à η et de calculer l'ouvert estimateur de l'état $x(sh + lh)$ par la fonction d'inclusion \mathcal{F} ,

$$X_{sh+lh} = \underbrace{\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \dots \circ \mathcal{F}(X_{sh})}_{lh \text{ fois}}.$$

Le diamètre de X_{sh+lh} est inférieur à ϵ .

Remarque 4 [34]

Le calcul numérique de la trajectoire d'un ouvert de \mathbb{R}_+^n par un système non-linéaire est difficile à réaliser avec précision. En effet, avec la discrétisation qu'impose le numérique, l'erreur commise en calculant les trajectoires d'un ouvert croît à chaque pas de temps. Dans notre cas nous considérons un temps relativement court d'observation lh de sorte à réduire l'erreur d'estimation des trajectoires.

Remarque 5 [34]

La convergence globale de l'algorithme de synthèse de l'observateur est essentiellement liée à la capacité de l'algorithme d'optimisation à déterminer dans l'ensemble invariant des états Ω tous les ouverts de diamètre ϵ (arbitrairement choisi) qui contiennent un minimum global de la fonction objectif j_{sh} . L'observabilité nous permet d'avoir un contrôle sur le diamètre des ouverts estimateurs. Si le système est observable, l'algorithme d'optimisation génère un unique ouvert de Ω et la continuité de la fonction de la dynamique du système (3.3) nous permet de choisir convenablement le diamètre des trajectoires.

Remarque 6 [34]

L'algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle est une combinaison de deux algorithmes : un algorithme d'optimisation de la fonction objective et un algorithme de calcul de la trajectoire d'un ouvert pour un système dynamique. Ces deux algorithmes ont la particularité d'avoir des temps de calcul relativement longs qui croissent en fonction de la taille n du système considéré, de la longueur du temps d'observation lh et du raffinement de la discrétisation du domaine Ω des états. Ainsi, une bonne performance de l'algorithme de l'observateur numérique requière des outils de calculs informatiques très puissantes.

Remarque 7 Propriété de convergence globale [45]

Il est important de noter que la convergence globale de cet algorithme IMHSE d'estimation ensembliste est donnée par l'usage d'une technique globale d'optimisation. Ceci est fondé sur la capacité algorithmique de trouver tous les états \hat{x} (états indiscernables d'un ensemble $[\hat{x}]$), qui minimisent globalement la fonction objectif sur un domaine admissible $[\Omega] \subset \mathbb{R}^n$, avec une précision d'optimisation qui peut être arbitrairement petite.

3.3 Implémentation d'un observateur numérique à un système de pêche discret

La pêche, bien qu'indispensable pour répondre aux besoins alimentaires mondiaux, peut exercer une pression considérable sur ces populations. Pour garantir une exploitation durable, il est impératif de surveiller en temps réel l'état des populations de poissons et d'ajuster les pratiques de pêche en conséquence [16].

Dans cette optique, les observateurs numériques tels que la méthode Interval Moving Horizon State Estimation (IMHSE), jouent un rôle de plus en plus crucial. Ces outils permettent d'estimer l'état des poissons en temps réel. Il offre ainsi aux gestionnaires des ressources halieutiques des informations précieuses pour prendre des décisions éclairées.

Dans cette section, nous allons appliquer à notre modèle qui décrit la dynamique d'évolution des populations de poissons soumis à l'action de pêche notre observateur numérique intervalle développé dans la section précédente. Pour ce faire, nous allons définir un domaine admissible pour trouver les solutions du problème d'optimisation afin d'implémenter l'algorithme de synthèse de la méthode IMHSE.

Rappelons le modèle de pêche décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i(k)b_i\right), \\ x_2(k+1) = x_1(k) \exp(-M_1 - q_1 E(k)\tau), \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) \exp(-M_{n-1} - q_{n-1} E(k)\tau) + x_n(k) \exp(-M_n - q_n E(k)\tau), \end{array} \right. \quad (3.18)$$

avec la sortie donnée par :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i E(k)\tau}{M_i + q_i E(k)\tau} (1 - \exp(-M_i - q_i E(k)\tau)) x_i(k). \quad (3.19)$$

Par hypothèse, nous supposons également que le nombre de poissons de la dernière classe d'âge qui survit après le temps de passage d'une classe à une autre est négligeable. Le modèle est finalement donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i(k)b_i\right), \\ x_2(k+1) = x_1(k) \exp(-M_1 - q_1 E(k)\tau), \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) \exp(-M_{n-1} - q_{n-1} E(k)\tau). \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Remarque 8 [34]

L'hypothèse selon laquelle dans le modèle (3.20) le nombre de poissons de la dernière classe qui survit après le temps de passage d'une classe à une autre est négligeable peut être justifiée par le fait qu'en pratique, on a surtout tendance à exercer une intensité de pêche plus importante sur les poissons matures. Nous faisons cette restriction sur notre modèle pour des raisons purement techniques liées à la synthèse de l'observateur numérique.

3.3.1 Définition du domaine admissible

Pour pouvoir implémenter l'algorithme de synthèse d'observateur, nous devons chercher le domaine admissible des états du système. Nous restreignons le système (3.20) à $n = 3$. Le

choix de la fonction de recrutement est la fonction de Beverton et Holt.

On aura :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i(k)b_i\right), \\ x_2(k+1) = x_1(k) \exp(-M_1 - q_1 E(k)\tau), \\ \cdot \\ x_3(k+1) = x_2(k) \exp(-M_2 - q_2 E(k)\tau). \end{cases} \quad (3.21)$$

Soit $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble compact et invariant du système (3.21).

Soit m le minimum des taux de mortalité naturelle et q le minimum des coefficients de capturabilité.

Soit $\{x(k)\}_{k \leq 0}$ une trajectoire du système (3.21) correspondant à la condition initiale $x(0) = x_0$. Pour attribuer une signification biologique aux trajectoires, nous optons naturellement pour une valeur initiale x_0 située dans le quadrant positif.

On note que la fonction de recrutement de Beverton et Holt est bornée. On a alors :

$$\begin{aligned} x_1(k) &= g\left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i(k-1)\right) \leq \frac{1}{\beta} \text{ car } g \text{ est croissante et majorée par } \frac{1}{\beta}; \\ x_2(k) &= e^{-M_1 - q_1 E \tau} x_1(k-1) \leq e^{-m - q E \tau} \cdot \frac{1}{\beta}; \\ x_3(k) &= e^{-M_2 - q_2 E \tau} x_2(k-1) \leq e^{-2m - 2q E \tau} \cdot \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

Le domaine invariant de notre modèle est finalement donné par :

$$\Omega_3 = \left[0, \frac{1}{\beta}\right] \times \left[0, \frac{e^{-m - q E \tau}}{\beta}\right] \times \left[0, \frac{e^{-2m - 2q E \tau}}{\beta}\right].$$

On considère la longueur de l'horizon temporel $lh = 3$.

On donne les paramètres du modèle [17] :

Paramètres de Beverton et Holt $\alpha = 1; \beta = 0.0002$;

Paramètres de fécondité $b = [5 \ 5 \ 5]$;

Coefficients de capturabilité $q = [0.24 \ 0.36 \ 0.42]$;

Taux de Mortalité naturelle $M = [0.2 \ 0.2 \ 0.2]$;

Temps de pêche par saison $\tau = 1$;

Effort de pêche $E(K) = E = \frac{8}{3}$.

3.3.2 Observabilité du système de pêche

Soit le système que décrit la dynamique d'évolution des populations de poissons soumises à l'action de pêche donné par (3.21).

En utilisant la relation (3.16) avec la valeur des paramètres donnés ci-dessus, on obtient :

$$-\Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} = 0.00734219 + 0.0055823G_1 + 0.00140772\bar{G}_1 + 0.0025079G_1\bar{G}_1$$

avec

$$G_1 = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} (tz_1(3) + x_1(3), tv_1(2)z_1(2) + v_1(2)x_1(2), tv_1(1)v_2(2)z_1(1) + v_1(1)v_2(2)x_1(1)) dt,$$

$$\bar{G}_1 = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial \bar{x}_i} (tz_1(3) + \bar{x}_1(3), tv_1(2)z_1(2) + v_1(2)\bar{x}_1(2), tv_1(1)v_2(2)z_1(1) + v_1(1)v_2(2)\bar{x}_1(1)) dt.$$

Pour g Beverton et Holt, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f_0(x) = \frac{\partial}{\partial x} xg(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{1 + \beta x} \right) = \frac{1}{(1 + \beta x)^2} \geq 0.$$

On remarque que $G_1, \bar{G}_1 \geq 0$,

d'où :

$$-\Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} \neq 0.$$

Le système avec les paramètres ci-dessus est alors observable.

Autrement dit, les états du système peuvent être reconstruits à partir de la sortie mesurée. Dans la suite, nous allons donner les résultats des simulations faites avec Scilab de notre observateur numérique intervalle.

3.3.3 Simulations numériques

Dans cette partie, nous essayons maintenant d'illustrer l'observateur numérique du modèle de pêche à structure de classe d'âge de taille 3. Pour chacune des classes, nous représentons sur une même figure les estimations des états à l'aide de notre observateur numérique intervalle. Les états réels du système sont représentés en trait plein et les bornes de l'intervalle estimateur en pointillé.

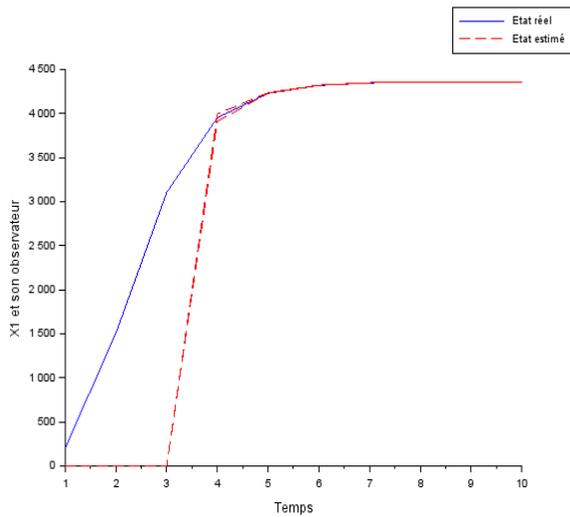


FIGURE 3.3.2 – Trajectoires de l'état x_1 et de son observateur pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.

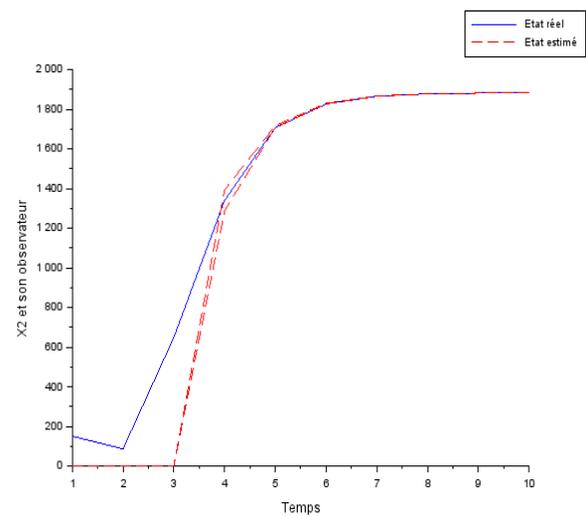


FIGURE 3.3.3 – Trajectoires de l'état x_2 et de son observateur pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.

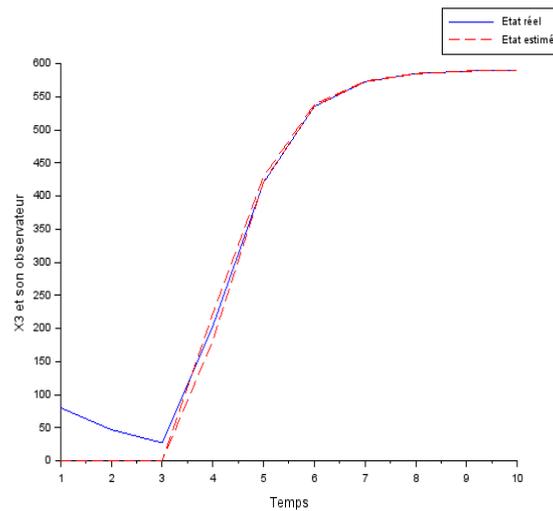


FIGURE 3.3.4 – Trajectoires de l'état x_3 et de son observateur pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.

Remarque 9 Nous avons démontré la convergence de l'observateur par intervalles et l'avons mis en évidence à l'aide d'un exemple numérique, confirmant ainsi la rapidité de cette convergence. L'utilité de cet observateur réside dans sa capacité, à partir des captures enregistrées, à prédire les réserves d'une population de poissons régies par la dynamique décrite dans le modèle de pêche (3.20).

3.4 Application

Nous appliquons l'approche de l'observateur en se basant sur les données fournies par la FAO, extraites du rapport du deuxième groupe de travail ad hoc sur les chinchards et les maquereaux de la zone nord du COPACE (Comité des Pêches pour l'Atlantique Centre-Est)[11]. Notre étude porte sur la population de poissons *Trachurus* spp qui est répartie en huit groupes d'âge distincts. Au cours de la période allant de 1972 à 1985, les estimations de la quantité totale de poissons (biomasse), de la mortalité due à la pêche, ainsi que des captures annuelles par classe d'âge sont données. La mortalité naturelle de la population est constamment fixée à 0,5.

Pour élaborer cet observateur, nous avons besoin de données concernant les captures en nombre à différents moments dans le temps (voir tableau 1), des taux de mortalité naturelle m_i (constamment égaux à 0,5), ainsi que des taux de mortalité dus à la pêche $q_i E(k)\tau$ à différents instants k (voir tableau 2). Malheureusement, les données sur l'effort de pêche minimal ne sont pas disponibles, car leur calcul requiert des informations spécifiques telles que la capturabilité initiale q_1 de la première classe d'âge, la capturabilité maximale q_M , et la durée de la pêche τ , qui ne sont pas précisées. Il est essentiel de noter que la condition liée à l'effort de pêche est un critère suffisant mais non indispensable pour garantir la convergence de l'observateur [34]. Pour estimer la biomasse de la population de *Trachurus* en nombre, nous utilisons les données des captures annuelles.

TABLE 3.4.1 – *Trachurus* spp. : Capture en millions d'individus par classe d'âge (divisions 34.1.3. et 34.3.1) et capture totale en milliers de tonnes.

Années	Âges							Captures (1000t)	Captures (10 ⁶ individus)
	1	2	3	4	5	6	7+		
1972	1492.0	798.1	403.9	188.0	106.4	52.0	18.5	390.123	3058.9
1973	2457.0	680.9	250.9	114.5	60.3	43.2	48.5	383.052	3625.3
1974	3273.2	947.3	240.4	44.9	26.2	12.3	11.8	414.63	4562.8
1975	2078.1	493.6	152.3	48.9	7.7	4.8	2.6	302.317	2803.9
1976	3202.3	685.6	97.4	35.6	16.3	4.6	1.1	394.145	4060.3
1977	2927.2	1391.2	380.3	52.1	12.0	6.3	1.4	392.572	4787.6
1978	1650.4	1162.8	338.7	78.2	16.5	3.0	0.5	294.151	3268.1
1979	1323.3	534.7	231.0	99.0	29.6	10.0	0.8	223.165	2246.1
1980	150.2	676.6	582.1	799.6	306.6	86.0	11.4	503.081	2619.6
1981	230.4	415.2	462.2	357.9	207.2	72.6	14.1	357.935	1764.0
1982	310.5	840.4	542.4	254.1	71.5	8.1	1.1	310.464	2045.5
1983	591.1	727.3	262.9	135.9	88.4	62.5	31.8	280.000	1886.6
1984	424.6	621.4	274.9	167.1	105.7	68.4	41.9	300.000	1680.6
1985	45.6	800.1	360.3	109.8	126.4	48.7	2.5	320.000	1609.4

TABLE 3.4.2 – *Trachurus* spp. : Mortalité par pêche (divisions 34.1.3 et 34.3.1). (P = poids moyen)

Années	Âges						
	1	2	3	4	5	6	7+
1972	0.511725	0.788882	0.841723	0.767820	0.616278	0.322343	0.705246
1973	0.710480	0.691405	0.962460	0.953076	0.933614	0.833445	0.850099
1974	0.911205	1.462620	0.858620	0.660721	0.921245	0.740458	0.879356
1975	0.351619	0.472105	0.686220	0.617037	0.312602	0.620453	0.488036
1976	0.387599	0.261425	0.221046	0.483193	0.632487	0.445506	0.397193
1977	0.258610	0.413621	0.318220	0.245832	0.424763	0.816728	0.332598
1978	0.184893	0.215220	0.232136	0.136975	0.167873	0.248101	0.185781
1979	0.233446	0.115179	0.082385	0.135158	0.096253	0.187148	0.132838
1980	0.030647	0.250393	0.245816	0.651817	1.229370	0.641243	0.481579
1981	0.045911	0.152152	0.383773	0.330540	0.502452	2.385422	0.283060
1982	0.098016	0.327470	0.430687	0.546851	0.139337	0.043822	0.308936
1983	0.168887	0.496638	0.224000	0.253589	0.540531	0.241525	0.337494
1984	0.134262	0.380006	0.511330	0.341390	0.457392	0.010983	0.357427
1985	0.063021	0.577001	0.577000	0.577000	0.577000	0.577000	0.530840

TABLE 3.4.3 – *Trachurus* spp. : Abondance en millions d'individus par classe d'âge (divisions 34.1.3 et 34.3.1) et biomasse totale en milliers de tonnes.

Années	Âges								Biomasse Totale (1000t)
	0+	1	2	3	4	5	6	7+	
1972	9836.6	4635.1	1800	871.7	432	286.6	236.6	45.1	1191.9
1973	11053.1	5966.2	1685.3	496	227.9	121.6	93.9	104	1066.5
1974	15718.7	674.1	1779	512	114.9	53.3	29	24.7	1080.9
1975	21772	8779.6	1634.8	379	131.6	36	12.9	8.4	1273.9
1976	30610.6	12463.9	3746.5	618.4	115.7	43.1	16	4.2	1929.9
1977	20373.3	16140.9	5130.7	1749.6	300.7	43.3	13.9	6.2	2360.9
1978	13264.6	12329.1	7563.3	2057.8	771.9	142.6	17.2	3.7	2441.4
1979	10411.7	7999.2	6215.7	3699.1	989.5	408.2	73.9	8.1	2455.6
1980	10737.7	6315	3841.6	3359.8	2066.2	524.3	224.9	37.2	2488.7
1981	6939.1	6512.7	3714.7	1813.9	1593.7	653	93	71.8	2024.3
1982	7913.9	4208.8	3772.9	1935	749.6	694.5	239.7	5.2	1738.6
1983	7041.2	4800	2314.4	1649.3	763	263.1	366.5	139.1	1533.4
1984	6000	4270.7	2458.9	854.5	799.6	359.1	93	174.6	1290.9
1985	7300	3021.4	2264.9	1019.9	310.8	357.8	137.9	7.5	1037.3

Données de la FAO (<http://www.fao.org/DOCREP/003/S4882F/S4882F09.htm>)

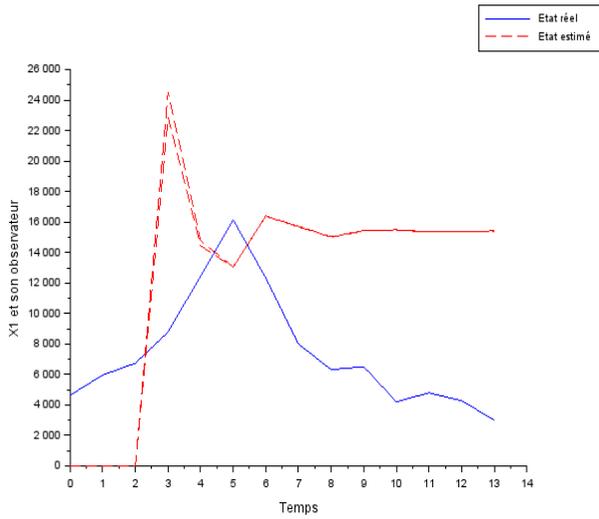


FIGURE 3.4.5 – Trajectoires de l'état x_1 et de son observateur.

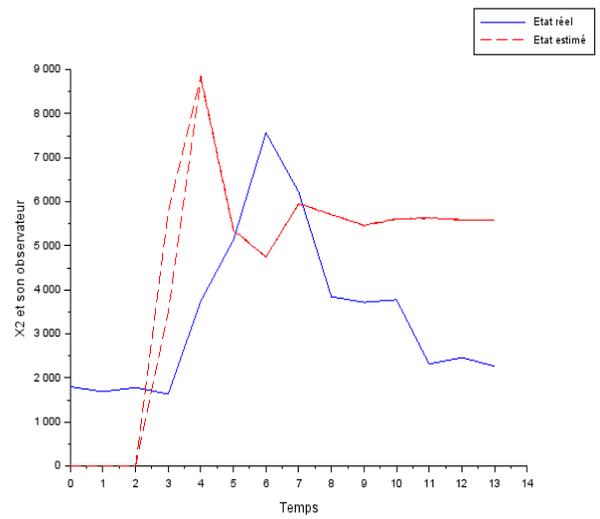


FIGURE 3.4.6 – Trajectoires de l'état x_2 et de son observateur.

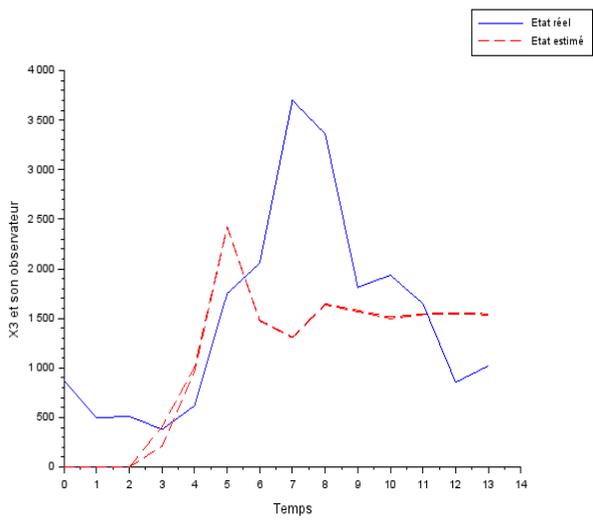


FIGURE 3.4.7 – Trajectoires de l'état x_3 et de son observateur.

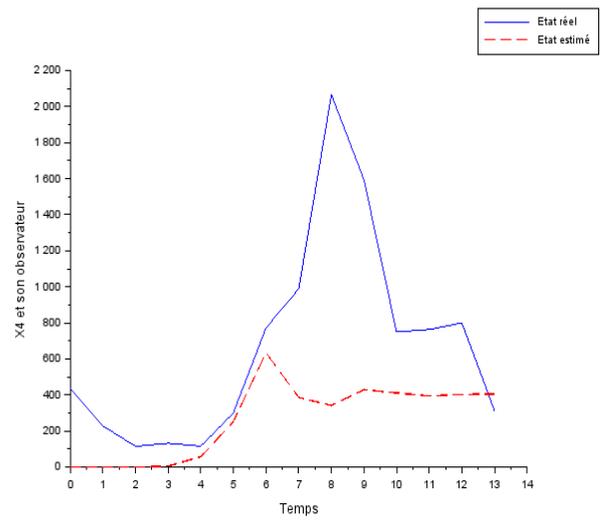


FIGURE 3.4.8 – Trajectoires de l'état x_4 et de son observateur.

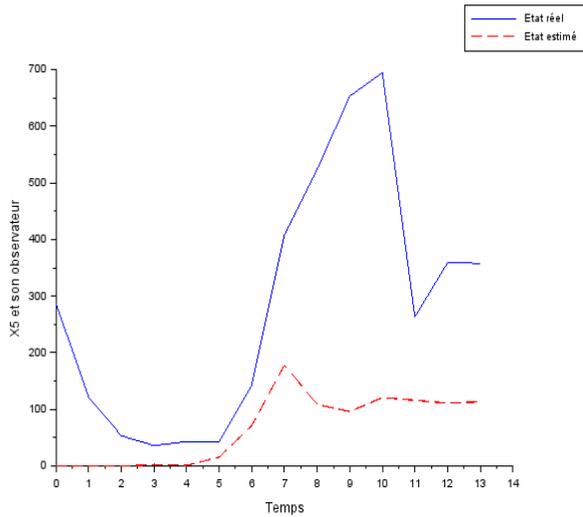


FIGURE 3.4.9 – Trajectoires de l'état x_5 et de son observateur.

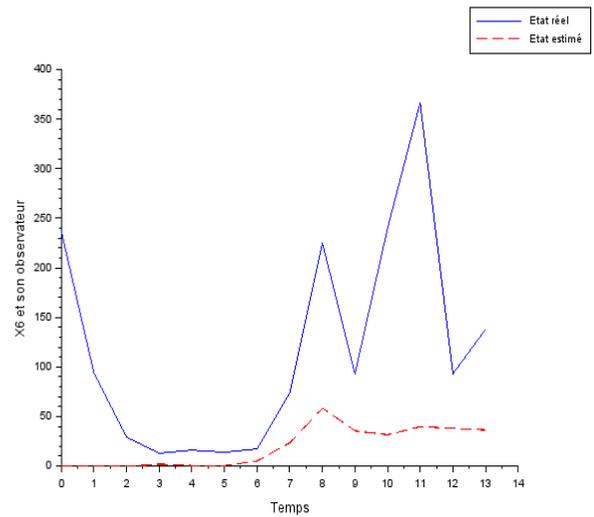


FIGURE 3.4.10 – Trajectoires de l'état x_6 et de son observateur.

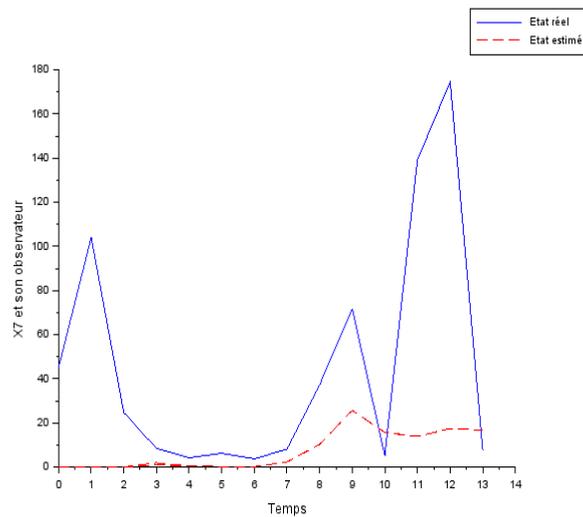


FIGURE 3.4.11 – Trajectoires de l'état x_7 et de son observateur.

3.5 Discussion

En appliquant la méthode IMHSE avec des données réelles de la FAO pour une population de poissons soumise à l'action de pêche, nous constatons que les états estimés ne convergent pas toujours vers les états réels, bien qu'ils présentent qualitativement des allures similaires. Cela peut s'expliquer par les erreurs potentielles dans les données de capture lors de la collecte, pouvant entraîner des estimations biaisées de la taille et de la composition des populations de poissons. Ces biais peuvent affecter la précision des prédictions à long terme et compromettre les efforts de gestion durable des stocks. Il est également important de noter que l'absence d'in-

dices de fécondité pour chaque classe dans les données collectées peut également influencer la convergence des états estimés vers les états réels.

De plus, la méconnaissance de la fonction de recrutement peut impacter la convergence des états estimés vers les états réels par la méthode IMHSE. En effet, dans l'application de cette méthode, le modèle de la dynamique d'évolution des populations de poissons soumises à l'action de pêche utilise une fonction de recrutement dans la première équation, modélisant ainsi l'entrée en phase d'exploitation. Cette fonction et ses paramètres ne sont pas toujours inclus dans la collecte de données, bien qu'ils soient d'une importance capitale pour la précision des états du système. Par conséquent, leur absence peut introduire des erreurs significatives dans les estimations des états futurs de la population de poissons.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la reconstruction des états d'un système discret non-linéaire qui décrit l'évolution d'une population de poissons sous l'influence de l'activité de pêche proposé dans [17]. Premièrement, nous avons fait un rappel sur quelques notions halieutiques et d'outils mathématiques tels que la stabilité des systèmes dynamiques, la notion d'observabilité et la méthode de synthèse de quelques observateurs classiques, favorisant ainsi une imprégnation et une familiarisation des concepts liés à la théorie de contrôle notamment à l'observation d'état.

Dans le second chapitre, nous avons examiné deux modèles structuraux pour comprendre la dynamique de la taille d'un stock de poissons exploité. Ces deux modèles incluent un modèle basé sur la structure d'âge et un modèle basé sur la structure de stade. Il est important de noter que le modèle basé sur la structure de stade peut être considéré comme une généralisation du modèle basé sur la structure d'âge.

Au dernier chapitre, nous avons présenté le principe de la méthode IMHSE en décrivant l'algorithme de synthèse de cet observateur. Nous avons appliqué l'algorithme IMHSE en considérant un modèle non-linéaire en temps discret pour une population de poissons exploitée. Nous notons que l'algorithme fonctionne pour n'importe quelle classe d'âge et n'importe quelle fonction de recrutement lorsque l'on peut trouver un domaine invariant pour le modèle (3.20). L'algorithme IMHSE fonctionne bien en raison de l'observabilité du système (3.20). Quelques exemples numériques sont fournis, et on peut constater lors de la simulation que la convergence de l'observateur numérique intervalle est très rapide. Nous avons appliqué en dernier lieu la méthode IMHSE avec des données extraites sur le site de la FAO [11], pour une population de poissons *Trachurus spp* qui est répartie en huit classes d'âge distinctes pour une période allant de 1972 à 1985. Bien que la convergence des états estimés vers les états réels n'a pas été atteinte du fait de la méconnaissance de la fonction de recrutement ainsi que de l'indice de fécondité pour chaque classe d'âge et de l'incertitude dans la collecte des données de capture, on remarque qu'ils présentent les mêmes allures. De plus, l'implémentation de la méthode IMHSE nécessite des calculs relativement longs. Même avec une discrétisation plus

fine du domaine admissible, le temps d'exécution demeure trop lent en raison des limitations de puissance des ordinateurs. Afin de pallier cette contrainte, nous avons choisi une discrétisation plus grossière du domaine, ce qui entraîne inévitablement une imprécision dans l'estimation des états par rapport à leurs valeurs réelles.

Dans la perspective d'améliorer la convergence des états estimés vers les états réels, il est crucial de continuer à affiner les modèles en tenant compte des connaissances biologiques actualisées, d'incorporer des données de recrutement plus précises lorsqu'elles sont disponibles et de mettre en œuvre des stratégies de collecte de données améliorées dans le but d'éviter l'incertitude au niveau des modèles. Parallèlement, on peut envisager des approches alternatives, telles que des fonctions de recrutement empiriques ou des modèles de régression pour estimer cette fonction à partir de données disponibles. Une autre perspective assez intéressante serait de poursuivre la recherche sur des techniques de parallélisation pour exploiter pleinement la puissance des ordinateurs modernes. De plus, l'avancée technologique continue pourrait éventuellement permettre d'utiliser des méthodes d'optimisation plus précises avec des temps d'exécution acceptables, donnant ainsi une solution plus robuste à long terme. L'application de cet algorithme revêt d'une importance capitale. En effet, il peut contribuer à prédire l'évolution du stock d'une population de poissons spécifique. Pour ce faire, il est essentiel de connaître la fonction de recrutement et ses paramètres. Cette prédiction s'appuie sur le modèle (3.20) en se limitant à utiliser uniquement la sortie mesurable (3.19). Par conséquent, l'observateur numérique intervalle peut être utile dans les politiques de gestion des ressources halieutiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. ALBERTINI & D. D'ALESSANDRO – « Observability and forward–backward observability of discrete-time nonlinear systems », *Mathematics of Control, Signals and Systems* **15** (2002), p. 275–290.
- [2] R. J. BEVERTON & S. J. HOLT – « On the dynamics of exploited fish populations », *Copeia* **1958** (1958), no. 3, p. 242.
- [3] L. BOILLEREAUX & J.-M. FLAUS – « A new approach for designing model-based indirect sensors », *IEEE Transactions on control systems technology* **8** (2000), no. 4, p. 601–608.
- [4] G. CHEN, J. WANG & L. S. SHIEH – « Interval kalman filtering », *IEEE Transactions on Aerospace and electronic Systems* **33** (1997), no. 1, p. 250–259.
- [5] G. CICCARELLA, M. DALLA MORA & A. GERMANI – « Observers for discrete-time nonlinear systems », *Systems & control letters* **20** (1993), no. 5, p. 373–382.
- [6] J. DAGET & J.-C. LE GUEN – « Dynamique des populations exploitées de poissons », *Dynamique des populations de Vertébrés Publ. Masson. Paris France* (1975).
- [7] D. DELOUCHE – « Observateur à horizon glissant pour les systèmes non linéaires : application au diagnostic du radiotélescope de nançay », Thèse, Université d'Orléans, 2009.
- [8] W. G. DOUBLEDAY – « Harvesting in matrix population models », *Biometrics* (1975), p. 189–200.
- [9] S. A. EARLE – *The world is blue : How our fate and the ocean's are one*, National Geographic Books, 2010.
- [10] S. ELAYDI – « The z-transform method and volterra difference equations », *An Introduction to Difference Equations* (2005), p. 273–311.
- [11] FOOD & A. O. (FAO) – « Rapport du deuxième groupe de travail ad hoc sur les chincharde et les maquereaux de la zone nord du copace », 1987.
- [12] A. GELB et al. – *Applied optimal estimation*, MIT press, 1974.

- [13] W. GETZ & R. HAIGHT – « Population harvesting : Demographic models of fish », *Forest and Animal Resources, Princeton University, Princeton, NJ* (1989).
- [14] J.-L. GOUZÉ, A. RAPAPORT & M. Z. HADJ-SADOK – « Interval observers for uncertain biological systems », *Ecological modelling* **133** (2000), no. 1-2, p. 45–56.
- [15] J. GRIZZLE & P. MORAAL – « Newton, observers and nonlinear discrete-time control », in *29th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1990, p. 760–767.
- [16] A. GUIRO – « Sur quelques problèmes d’observateurs, applications à certains modèles d’écosystème aquatique », Thèse, Université de Ouagadougou, 2009.
- [17] A. GUIRO, A. IGGIDR & D. NGOM – « Interval numerical observer : Application to a discrete time nonlinear fish model », *Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées* **11** (2008).
- [18] E. HANSEN & G. W. WALSTER – *Global optimization using interval analysis : revised and expanded*, vol. 264, CRC Press, 2003.
- [19] A. IGGIDR – « Controllability, observability, and stability of mathematical models », (2004).
- [20] O. L. R. JACOBS – « Introduction to control theory », (*No Title*) (1974).
- [21] L. JAULIN – « Le calcul ensembliste par analyse par intervalles et ses applications », Thèse, Université d’Angers, 2000.
- [22] L. JAULIN & E. WALTER – « Guaranteed parameter bounding for nonlinear models with uncertain experimental factors », *Automatica* **35** (1999), no. 5, p. 849–856.
- [23] R. E. KALMAN – « A new approach to linear filtering and prediction problems », (1960).
- [24] I. KARAFYLLIS & C. KRAVARIS – « On the observer problem for discrete-time control systems », *IEEE Transactions on Automatic Control* **52** (2007), no. 1, p. 12–25.
- [25] J. P. LASALLE – *The stability and control of discrete processes*, vol. 62, Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] A. P. LECLERC – *Efficient and reliable global optimization*, The Ohio State University, 1992.
- [27] W. LEE & K. NAM – « Observer design for nonlinear discrete-time systems », in *29th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 1990, p. 768–769.
- [28] F. L. LEWIS – « Optimal estimation : with an introduction to stochastic control theory », (*No Title*) (1986).
- [29] D. LUENBERGER – « An introduction to observers », *IEEE Transactions on automatic control* **16** (1971), no. 6, p. 596–602.

- [30] P. MAGAL & D. PELLETIER – « A fixed point theorem with application to a model of population dynamics », *Journal of Difference Equations and Applications* **3** (1997), no. 1, p. 65–87.
- [31] R. E. MOORE – *Interval analysis*, vol. 4, Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.
- [32] — , *Methods and applications of interval analysis*, SIAM, 1979.
- [33] P. E. MORAAL & J. W. GRIZZLE – « Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements », *IEEE Transactions on automatic control* **40** (1995), no. 3, p. 395–404.
- [34] D. NGOM – « Observation et régulation de certains modèles discrets d'écosystèmes », Thèse, Université Gaston Berger de Saint-Louis, 2008.
- [35] D. PAUGY & C. LÉVÊQUE – *Le lac victoria : Un écosystème bouleversé par l'homme*, Archives contemporaines, 2018.
- [36] J. J. PELLA & P. K. TOMLINSON – « A generalized stock production model », (1969).
- [37] D. PELLETIER & P. MAGAL – « Dynamics of a migratory population under different fishing effort allocation schemes in time and space », *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences* **53** (1996), no. 5, p. 1186–1199.
- [38] A. RAPAPORT & D. DOCHAIN – « Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs », *Mathematical biosciences* **193** (2005), no. 2, p. 235–253.
- [39] W. E. RICKER – « Stock and recruitment », *Journal of the Fisheries Board of Canada* **11** (1954), no. 5, p. 559–623.
- [40] J. G. SHEPHERD – « A family of general production curves for exploited populations », *Mathematical Biosciences* **59** (1982), no. 1, p. 77–93.
- [41] Y. SONG & J. W. GRIZZLE – « The extended kalman filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems », in *1992 American control conference*, IEEE, 1992, p. 3365–3369.
- [42] H. W. SORENSON – « Least-squares estimation : from gauss to kalman », *IEEE spectrum* **7** (1970), no. 7, p. 63–68.
- [43] S. TULJAPURKAR & H. CASWELL – *Structured-population models in marine, terrestrial, and freshwater systems*, vol. 18, Springer Science & Business Media, 2012.
- [44] H. VALDÉS-GONZÁLEZ, J. FLAUS & G. ACUÑA – « Moving horizon state estimation with simulated annealing algorithm applied to a biotechnological process », *Proceedings of the Foodsim* (2000), p. 166–170.
- [45] H. VALDÉS-GONZÁLEZ, J.-M. FLAUS & G. ACUÑA – « Moving horizon state estimation with global convergence using interval techniques : application to biotechnological processes », *Journal of process control* **13** (2003), no. 4, p. 325–336.

- [46] L. WESTPHAL – « Handbook of control systems engineering 2nd edition », *KLUWER INTERNATIONAL SERIES IN ENGINEERING AND COMPUTER SCIENCE* (2001).
- [47] W. WONHAM – « On pole assignment in multi-input controllable linear systems », *IEEE transactions on automatic control* **12** (1967), no. 6, p. 660–665.
- [48] M. XIAO, N. KAZANTZIS, C. KRAVARIS & A. J. KRENER – « Nonlinear discrete-time observer design with linearizable error dynamics », *IEEE Transactions on Automatic Control* **48** (2003), no. 4, p. 622–626.