

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Département de Mathématiques

Spécialité : Probabilités

Option : Calcul Stochastique

Mémoire de Master

# Application du Calcul stochastique à la finance : exemple du modèle de Black and Scholes

Présenté et soutenu publiquement le 03/02/2024

par

BABACAR SADIKH NDIOR

Sous la direction du DOCTEUR ALIOUNE COULIBALY,

avec la supervision du PROFESSEUR ALASSANE DIEDHIOU.

Devant un jury composé de :

Clément MANGA	Professeur assimilé	UASZ	Président
Alassane DIEDHIOU	Professeur titulaire	UASZ	Superviseur
Emmanuel Nicolas CABRAL	Professeur assimilé	UASZ	Examinateur
Alioune COULIBALY	Maitre de conférences titulaire	UAM	Directeur

INTRODUCTION GÉNÉRALE . . . . .	5
<b>PREMIÈRE PARTIE : Préliminaires : Notions de Calcul Stochastique et Outils Financiers</b>	
<b>I PROCESSUS ET MARTINGALES</b>	<b>8</b>
I.1 Processus . . . . .	8
I.2 Martingales . . . . .	9
I.2.1 Temps discret . . . . .	9
I.2.2 Temps continu . . . . .	10
I.2.3 Inégalités de Doob . . . . .	11
I.2.4 Le mouvement brownien . . . . .	11
<b>II INTÉGRALE STOCHASTIQUE ET CALCUL D'ITO</b>	<b>14</b>
II.1 Intégrale stochastique . . . . .	14
II.2 Calcul d'Ito . . . . .	17
II.2.1 Processus d'Ito . . . . .	18
II.2.2 Formule d'Itô . . . . .	19
II.2.3 Exemple d'utilisation de la formule d'Itô . . . . .	21
II.3 Changement de probabilité, Théorème de représentation des martingales . .	23
II.3.1 Probabilités équivalentes . . . . .	23
II.3.2 Théorème de Girsanov . . . . .	23
II.3.3 Théorème de représentation des martingales browniennes . . . . .	24
<b>III ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE</b>	<b>25</b>
<b>IV PRÉSENTATIONS DES ACTIFS FINANCIERS</b>	<b>27</b>
IV.1 Option . . . . .	27
IV.2 Arbitrage . . . . .	28
IV.3 Stratégie d'investissement et portefeuille . . . . .	29
IV.3.1 Actifs financiers . . . . .	29

IV.3.2 Stratégie . . . . .	30
IV.4 Marchés viables et complets . . . . .	32
IV.4.1 Marchés viables . . . . .	32
IV.4.2 Marchés complets . . . . .	32
<b>Deuxième partie : Étude du Modèle de Black and Scholes</b>	<b>35</b>
<b>V LE MODÈLE DE BLACK AND SCHOLES</b>	<b>35</b>
V.1 Hypothèses du modèle . . . . .	35
V.2 Modélisation probabiliste du marché . . . . .	36
V.2.1 L'évolution des cours . . . . .	36
V.2.2 Solution de l'EDS de Black and Scholes . . . . .	37
V.3 Évaluation et couverture des options . . . . .	38
V.3.1 Probabilité risque neutre . . . . .	38
V.3.2 Pricing (évaluation de l'option) . . . . .	39
V.3.3 Hedging(Couverture des calls et des puts) . . . . .	45
V.3.4 Les grec (Sensibilité du Modèle) . . . . .	45
V.4 Options Américaines . . . . .	48
V.5 Cas pratique . . . . .	50
V.5.1 Cas 1 . . . . .	50
V.5.2 Cas 2 . . . . .	51
V.6 Limites du Modèle . . . . .	52
<b>VI SIMULATIONS</b>	<b>54</b>
VI.1 Rappels de quelques méthodes de simulation . . . . .	54
VI.1.1 Simulation de variables gaussiennes . . . . .	54
VI.1.2 Simulation du mouvement brownien . . . . .	55
VI.1.3 Simulation des équations différentielles stochastiques . . . . .	55
VI.2 Simulation du modèle de Black-Scholes . . . . .	56
<b>CONCLUSION</b> . . . . .	<b>62</b>
.1 Annexe A . . . . .	64
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> . . . . .	<b>69</b>

## REMERCIEMENTS

Je commence ces remerciements en rendant hommage à Dieu, source de toute sagesse et de force, pour avoir guidé mes pas tout au long de ce parcours académique.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes encadreurs, **le Professeur Alassane DIEDHIOU** et **le Docteur Alioune COULIBALY**, dont les conseils éclairés, leurs patience et leurs dévouement ont été des piliers essentiels pour la réalisation de ce mémoire. Ces enseignements resteront une source d'inspiration tout au long de ma carrière.

Je souhaite également remercier chaleureusement **le Professeur Clément MANGA**, président du jury, ainsi que **le Professeur Emmanuel Cabral** et pour avoir accepté de consacrer leur temps et leur expertise à évaluer ce travail.

Mes remerciements s'étendent aux enseignants du département de mathématiques, dont la qualité de l'enseignement a façonné ma compréhension du sujet.

Je ne saurais oublier ma famille, mon père, ma belle-mère et mes frères, pour leur amour indéfectible, leur soutien inconditionnel et leurs sacrifices qui ont rendu possible cette réalisation académique.

Enfin, un merci spécial à mes amis, qui ont été une source constante d'encouragement et de réconfort tout au long de ce voyage. Ces remerciements reflètent ma gratitude profonde envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

# Dédicaces

À ma mère, **Aissatou GAKOU**, éclat d'une étoile éteinte trop tôt, cette dédicace est tissée des larmes et des sourires que tu as semés dans ma vie. Ton absence pèse lourd, mais ton amour demeure la boussole qui guide ces mots.

À mon père bien-aimé, **Djibril NDIOR**, architecte de rêves, cette dédicace porte l'ombre de la maladie qui assombrit tes jours et la lumière de l'espoir que tu m'as enseigné. Que ces pages soient le baume pour ton âme fatiguée.

À ma belle-mère, **Anne Marie SARR**, qui a comblé le vide laissé par l'absence de ma mère. Ton amour inconditionnel, ta compréhension et ton soutien ont été une bénédiction. Ce mémoire t'est dédié en reconnaissance de tout ce que tu as apporté à ma vie.

À ma tante **Sophiatou NDIOR**, sage parmi les étoiles, cette dédicace est un hommage humble à la sagesse que tu m'as transmise. Tu es le phare qui éclaire le chemin lorsque la nuit de la tristesse s'installe.

Et à mes frères, **Moustapha, Ousmane, Lamine, Niokhor, Seydina Omar et Abdou**, cette œuvre est notre symphonie, chaque mot une note de notre histoire commune. Ensemble, nous avons porté le poids de l'absence et trouvé la force de continuer. Que ces pages soient le témoignage de notre unité indéfectible.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'intersection entre le calcul stochastique et la finance représente une avancée décisive dans la modélisation et la gestion des marchés financiers. Dans un environnement marqué par l'incertitude et la volatilité, le calcul stochastique offre des outils mathématiques essentiels pour décrypter les comportements aléatoires des variables financières. Cette fusion entre la théorie stochastique et la finance a engendré des perspectives inédites, révolutionnant l'évaluation des instruments financiers complexes, la gestion des risques et la formulation de stratégies d'investissement éclairées.

Le modèle de Black-Scholes, développé par Fischer Black, Myron Scholes et Robert C. Merton dans les années 1970, est l'un des exemples les plus emblématiques de l'application du calcul stochastique à la finance. Ce modèle a révolutionné la façon dont les options sont évaluées et négociées sur les marchés financiers. Il propose une formule mathématique permettant d'estimer la valeur d'une option en fonction de variables telles que le prix de l'actif sous-jacent, le prix d'exercice, le temps restant jusqu'à l'expiration et la volatilité du marché. Le modèle de Black-Scholes a permis aux investisseurs et aux institutions financières de mieux comprendre et évaluer les options, ce qui a eu un impact significatif sur les stratégies de gestion des risques et d'investissement. En intégrant les concepts du calcul stochastique, ce modèle a montré comment l'analyse mathématique peut aider à décoder les mouvements aléatoires des marchés, transformant ainsi la manière dont les actifs financiers sont évalués. Dans cette optique, notre étude se fixe pour objectif d'explorer de manière approfondie l'application du calcul stochastique à la finance, avec un accent particulier sur le modèle de Black-Scholes en tant qu'exemple emblématique. Pour ce faire, notre démarche sera rythmée par plusieurs étapes cruciales, chacune contribuant à une compréhension approfondie de la synergie entre les mathématiques et la finance.

**Étape 1 : Exploration du Calcul Stochastique** Une compréhension solide du calcul stochastique constituera le socle de notre analyse. En explorant les processus stochastiques et les équations différentielles stochastiques, nous illustrerons concrètement comment ces outils mathématiques donnent forme aux mouvements aléatoires des marchés financiers.

**Étape 2 : Présentation des Actifs Financiers** Commencer par exposer les concepts fondamentaux des actifs financiers, des options aux obligations, permettra de jeter les bases nécessaires pour comprendre les défis financiers qui motivent l'application du calcul stochastique.

**Étape 3 : Étude du Modèle de Black and Scholes** Le cœur de notre travail résidera dans l'étude du modèle de Black and Scholes. Ce modèle, dont la pertinence révolutionnaire dans l'évaluation des options est indéniable, sera exploré en profondeur, enrichissant ainsi notre compréhension des outils disponibles.

**Étape 4 : Simulations et Mise en Pratique** Pour consolider notre compréhension, des simulations concrètes seront réalisées. En créant des scénarios stochastiques, nous évaluerons le modèle étudié et interpréterons les résultats obtenus, ancrant ainsi les concepts théoriques dans un contexte financier réaliste.

**Étape 5 : Conclusion et Perspectives** La conclusion synthétisera les enseignements clés de notre étude, mettant en lumière les avantages et les limites de l'application du calcul stochastique à la finance. Nous explorerons également les perspectives futures de ce domaine

en constante évolution, identifiant les défis et les opportunités pour les chercheurs et les praticiens.

En somme, cette étude vise à éclairer de manière exhaustive l'application du calcul stochastique à la finance, en utilisant le modèle de Black-Scholes comme pivot central. Chaque étape de notre travail vise à offrir une vision approfondie de cette fusion entre les mathématiques et les marchés financiers, ouvrant la voie à de nouvelles opportunités de compréhension et d'innovation dans le domaine financier.

**PREMIÈRE PARTIE : Préliminaires**  
**(Notions de Calcul Stochastique et**  
**Outils Financiers)**

Dans toute la suite on se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

## I.1 Processus

**Définition I.1.1.** *Processus [8]*

Un processus (aléatoire) sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est une famille  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  de variables aléatoires à valeurs dans un espace  $E$  muni d'une tribu  $\mathcal{F}$ .

**Remarque I.1.1.**

La variable  $t$  représente le temps.

On peut voir un processus comme une fonction aléatoire : à chaque  $\omega$  dans  $\Omega$  on associe une fonction de  $[0, T]$  dans  $E$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$ , appelé trajectoire du processus.

**Définition I.1.2.** *Filtration [8]*

Une **filtration** sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est une famille croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ .

La tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information dont on dispose à l'instant  $t$ . On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est **adapté** à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , si pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Définition I.1.3.** [8]

Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est **prévisible** si  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et que pour tout  $t \geq 1$   $X_t$  est  $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable.

**Définition I.1.4.** *Un temps d'arrêt [5]*

Un temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\{\tau \geq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

On associe à un temps d'arrêt  $\tau$  une tribu que l'on note  $\mathcal{F}_\tau$  définie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid \text{pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire  $\tau$ .

**Proposition I.1.1.** [5] .

- Si  $S$  est un temps d'arrêt,  $S$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable.
- Si  $S$  est un temps d'arrêt fini presque sûrement, et  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus adapté continu, alors  $X_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable.
- Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt tels que  $S \leq T$  presque sûrement, alors  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ .
- Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt, alors  $S \cap T = \inf(S, T)$  est un temps d'arrêt. En particulier, si  $S$  est un temps d'arrêt et  $t$  est un temps déterministe,  $S \cap T$  est un temps d'arrêt.

## I.2 Martingales

### I.2.1 Temps discret

On considère un espace de probabilité fini  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , avec  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et pour tout  $w \in \Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{w\}) > 0$ , muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n < N}$ .

**Définition I.2.1.** Une suite adaptée  $(M_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires réelles est une

- martingale si  $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$  pour tout  $n \leq N - 1$  ;
- sur-martingale si  $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq M_n$  pour tout  $n \leq N - 1$  ;
- sous-martingale si  $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq M_n$  pour tout  $n \leq N - 1$ .

**Proposition I.2.1.** [5]

Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une martingale et  $(H_n)_{n \geq 0}$  une suite prévisible par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ . On pose  $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ . La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$X_0 = H_0 M_0,$$

$$X_n = H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_n \Delta M_n \text{ pour } n \geq 1,$$

est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ .

La suite  $(X_n)$  est parfois appelée la transformée de la martingale  $(M_n)$  par la suite  $(H_n)$ .

**Démonstration I.2.1.** Il est clair que  $(X_n)$  est une suite adaptée. De plus, pour  $n \geq 0$ , on

a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= H_{n+1} \mathbb{E}(\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \quad (\text{car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0,$$

ce qui prouve que  $(X_n)$  est une martingale.

□

**Théorème I.2.1.** *Théorème d'arrêt [5].*

*Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale continue par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , et si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux temps d'arrêt tels que  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$ ,  $K$  étant une constante réelle finie, alors  $M_{\tau_2 - \tau_1}$  est intégrable et :*

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

## I.2.2 Temps continu

**Définition I.2.2.** *Un processus stochastique à valeurs réelles est appelé martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) si*

1.  $M_t$  est intégrable pour tout  $t \geq 0$ .
2. Pour tous  $0 \leq s \leq t$ ,  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$  (resp.  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$ ,  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ , p.s).

**Proposition I.2.2.** *Toute martingale  $M$  vérifie  $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ , pour tout  $t \geq 0$ .*

**Démonstration I.2.2.** *On a  $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0]$ , pour tout  $t \geq 0$ .* □

**Proposition I.2.3.** *Soit  $M$  une  $\mathcal{F}$ -martingale de carré intégrable (c'est-à-dire  $\mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty$ , alors*

$$\mathbb{E}[|M_t - M_s|^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s],$$

*pour tout  $0 \leq s \leq t$ .*

**Démonstration I.2.3.** :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_t - M_s|^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[|M_t|^2 | \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[M_t M_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[|M_s|^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[|M_t|^2 | \mathcal{F}_s] - 2M_s \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] + |M_s|^2 \\ &= \mathbb{E}[|M_t|^2 - |M_s|^2 | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

□

On retrouve donc que  $|M|^2$  est une  $\mathcal{F}$ -sous-martingale. On note  $\mathcal{M}^2$  l'ensemble des martingales réelles de carré intégrable, continues à droite, ayant des limites à gauche (c.a.d.l.a.g.).

### I.2.3 Inégalités de Doob

#### **Théorème I.2.2.** [Inégalité maximale de Doob] [6]

Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une sous, sur-martingale réelle continue. Alors, pour tout  $t, \varepsilon > 0$  :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{s \leq t} |X_s| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{3}{\varepsilon} \sup_{s \leq t} \mathbb{E}[|X_s|].$$

**Théorème I.2.3.** [Inégalité de moment de Doob] [6] Soit  $p \geq 1$  et  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une martingale réelle continue telle que  $X_t \in L^p$  pour tout  $t \geq 0$ . Alors, pour tout  $t \geq 0$  :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} |X_s|^p \right] \leq q^p E[|X_t|^p],$$

où  $q$  est le nombre conjugué de  $p$  défini comme  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Pour la démonstration de ces inégalités voir [6].

Une décomposition de Doob existe aussi.

#### **Théorème I.2.4.** [Doob-Meyer] [6]

Soit  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une sous-martingale continue.

1. Il existe une unique décomposition  $M_t = X_t + A_t$  pour tout  $t \geq 0$ , où  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale continue et  $(A_t)_{t \geq 0}$  est un processus croissant tel que  $A_0 = 0$ .
2. Dans le cas particulier où  $M$  est une martingale de carré intégrable, son crochet  $\langle M \rangle$  est l'unique processus continu, croissant et nul en 0, tel que  $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  soit une martingale.

On peut aussi définir la notion de crochet,

#### **Définition I.2.3.** (Proposition)[6]

Soit  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une sur-martingale ou sous-martingale de carré intégrable, c'est-à-dire que  $M_t^2$  est intégrable pour tout  $t \geq 0$ , et que  $M$  est continue. Il existe un processus continu, croissant et nul en 0, noté  $\langle M \rangle$  et appelé crochet de  $M$ , tel que lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a la propriété de convergence dans  $L^2$  suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n t} \left( \frac{M_{k+1}}{2^n} - \frac{M_k}{2^n} \right)^2 \rightarrow \langle M \rangle_t, \quad \forall t \geq 0.$$

### I.2.4 Le mouvement brownien

#### **Définition I.2.4.** [2]

On appelle mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles,  $(B_t)_{t \geq 0}$ , qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :

- Continuité :  $\mathbb{P}$ -p.s., la fonction  $s \mapsto B_t(w)$  est une fonction continue.
- Indépendance des accroissements : Si  $s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ .

- Stationnarité des accroissements : Si  $s \leq t$ , la loi de  $B_t - B_s$  est identique à celle de  $B_{t-s} - B_0$ .

**Théorème I.2.5.** [2]

Si  $(B_t)_{t>0}$  est un mouvement brownien, alors  $B_t - B_0$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $rt$  et de variance  $\sigma^2 t$ , où  $r$  et  $\sigma$  étant des constantes réelles.

**Remarque I.2.1.** Un mouvement brownien est dit standard si :

$$B_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

$$\mathbb{E}[B_t] = 0, \quad \mathbb{E}[B_t^2] = t.$$

Dans la suite, lorsque l'on parlera de mouvement brownien, sans autre précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard. Dans ce cas, la loi de  $B_t$  prend la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

où  $dx$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

On peut démontrer une propriété précisant le caractère gaussien du mouvement brownien. On vient de voir que pour tout  $t$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire gaussienne. On a une propriété plus forte :

**Théorème I.2.6.** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien, et si  $0 < t_1 < \dots < t_n$ , alors  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur gaussien.

**Démonstration I.2.4.** Soit  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , alors le vecteur aléatoire

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

est composé de variables aléatoires gaussiennes (d'après le théorème I.2.5) et indépendantes (par définition du mouvement brownien). Ce vecteur est donc un vecteur gaussien. Il en est donc de même pour  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . □

**Définition I.2.5.** On appellera  $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :

- Pour tout  $t \geq 0$ ,  $B_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.
- Si  $s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s$ .
- Si  $s \leq t$ , la loi de  $B_t - B_s$  est identique à celle de  $B_{t-s} - B_0$ .

**Définition I.2.6. (Mouvement brownien issu de  $X_0$ )** [2]

Un mouvement brownien issu de  $X_0$  est un processus de la forme  $X_t = X_0 + B_t$  avec condition initiale  $X_0$  indépendante du brownien  $B$ .

**Définition I.2.7. (Mouvement brownien avec dérive)**[2]

Un mouvement brownien issu de  $X_0$  de dérive (ou tendance)  $b$  et de coefficient de diffusion  $\sigma$  est un processus de la forme  $X_t = X_0 + \sigma B_t + bt$  avec condition initiale  $X_0$  indépendant du brownien  $B$ .

**Proposition I.2.4.** *Si  $(B_t)_{t>0}$  est un  $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien standard, alors :*

1.  $(B_t)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale.
2.  $(B_t - t)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale.
3.  $(\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t))$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale.

Le crochet du mouvement brownien est donc l'identité.

## CHAPITRE II

# INTÉGRALE STOCHASTIQUE ET CALCUL D'ITO

### II.1 Intégrale stochastique

On veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dB_s.$$

Lorsque l'on intègre une fonction  $g$  par rapport à une fonction  $f$  dérivable, si  $g$  est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s) df(s) = \int_0^T g(s) f'(s) ds$$

Si jamais  $f$  n'est pas dérivable mais simplement à variation bornée, on s'en sort encore en définissant l'intégrale par :

$$\int_0^T g(s) df(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) (f(t_{i+1}) - f(t_i)).$$

L'intégrale ainsi définie s'appelle intégrale de Stieltjes. Dans notre cas, le mouvement brownien n'est pas à variation bornée, donc **on ne peut pas définir cette limite trajectoire par trajectoire**. Par contre, comme il est à variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport au mouvement brownien comme une limite dans  $L^2$  (convergence au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ ) de cette variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Attention, la convergence est au sens de la convergence des variables aléatoires dans  $L^2(\Omega)$ . Pour cela, nous allons donc devoir **imposer au processus  $\theta$  d'être dans  $L^2(\Omega, [0, T])$** . On demandera également à l'intégrand  $\theta$  d'être  $\mathcal{F}$ -adapté afin que  $\theta_{t_i}$  soit indépendant de  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ . En effet, dans les applications en finance,  $\theta_t$  représentera la quantité d'actif risqué contenue dans notre portefeuille à l'instant  $t$  et  $dB_t$  la variation infinitésimale de cet actif risqué. Il est donc naturel de vouloir imposer que  $\theta$  soit  $\mathcal{F}$ -adapté.

**Définition II.1.1.** *Processus élémentaire [8]*

Un processus  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$  et un processus discret  $(\theta_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  avec  $\theta_i$  mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_{t_i}$  et dans  $L^2(\Omega)$  tel que :

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t).$$

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des processus élémentaires, qui est un sous-espace de  $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0, T])$ .

**Définition II.1.2.** [8]

L'intégrale stochastique entre 0 et  $t \leq T$  d'un processus élémentaire  $\theta \in \mathcal{E}$  est la variable aléatoire définie par :

$$\int_0^t \theta_s dB_s := \sum_{k=0}^{n-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i (B_t - B_{t_k}) \text{ sur } [t_k, t_{k+1}],$$

soit

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}).$$

On associe donc à  $\theta \in \mathcal{E}$  le processus

$$\left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)_{0 \leq t \leq T}.$$

**Propriété II.1.1. Propriétés de l'intégrale Stochastique sur  $\mathcal{E}$ .**

Sur l'ensemble des processus élémentaires  $\mathcal{E}$ , l'intégrale stochastique satisfait les propriétés :

1.  $\theta_t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$  est linéaire.
2.  $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$  est continue presque sûrement.
3.  $\left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté.
4.  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T \theta_s dB_s \right] = 0$  et  $\text{Var} \left[ \int_0^T \theta_s dB_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \theta_s^2 ds \right]$ .
5. Propriété d'isométrie :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T \theta_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \theta_s^2 ds \right].$$

6. De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \int_s^t \theta_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0$$

et

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v^2 dv \right) \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

7. On a même le résultat plus général :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right) \left( \int_s^u \phi_v dB_v \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^{t \wedge u} \theta_v \phi_v dv \right) \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

8.  $\left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale.

9. Le processus

$$\left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds,$$

est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.

10. Le crochet de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

11. Le crochet entre deux intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \psi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t \wedge u} \theta_s \psi_s ds.$$

voir ([8]) pour la démonstration de ces propriétés.

Finalement, l'intégrale stochastique d'un élément de  $\mathcal{E}$  est une martingale continue de carré intégrable. Nous noterons  $\mathcal{M}^2([0, T])$  l'ensemble des martingales continues de carré intégrable :

$$\mathcal{M}^2([0, T]) := \left\{ M\mathcal{F}\text{-martingales telles que } \mathbb{E}[M_t^2] < \infty \text{ pour tout } t \in [0, T] \right\}.$$

Pour le moment, l'intégrale stochastique est une fonction de  $\mathcal{E} \times [0, T]$  dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$ .

On va maintenant, étendre la définition de l'intégrale stochastique à des processus adaptés ayant un moment d'ordre 2, c'est-à-dire à :

$$L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T]) = \left\{ (\theta_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ processus càdlàg } \mathcal{F}\text{-adapté tels que } \theta \in L^2(\Omega, [0, T]) \right\}.$$

**Théorème II.1.1.** *Il existe une unique application linéaire  $I$  de  $L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$  dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$  qui coïncide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires  $\mathcal{E}$  et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E}[I(\theta)_t^2] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right]$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Démonstration II.1.1.** .

**Approximation :** Soit  $\theta$  un processus élément de  $L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ . Puisque  $\mathcal{E}$  est dense dans  $L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ , il existe une suite  $\theta_n$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  telle que :

$$\|\theta - \theta^n\|_2' = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds \right]^{1/2} \longrightarrow 0.$$

**Convergence** : La propriété d'isométrie entre 0 et  $t \leq T$  sur l'intégrale stochastique du processus  $(\theta^{n+p} - \theta^n)$  de  $\mathcal{E}$  nous donne :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n) dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds \right] \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds \right]$$

ce qui s'écrit en termes de norme :

$$\left\| \int_0^t \theta_s^{n+p} dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s \right\|_2 \leq \|\theta^{n+p} - \theta^n\|'_2.$$

Comme  $\theta^n$  converge dans  $L^2(\Omega, [0, T])$ , elle est de Cauchy et donc  $\int_0^T \theta_s^n dB_s$  est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Or  $L^2(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_2$  est un espace de Banach (donc complet), par conséquent la suite  $\int_0^T \theta_s^n dB_s$  converge dans  $L^2(\Omega)$ . En notant  $\int_0^T \theta_s dB_s$  sa limite, on obtient

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds \right].$$

**Unicité** : Cette propriété implique que la limite ne dépend pas de la suite approximante choisie, en effet, si on avait deux suites approximantes  $\theta_n$  et  $\phi_n$ , la condition d'isométrie donnerait :

$$\left\| \int_0^t \theta_s^n dB_s - \int_0^t \phi_s^n dB_s \right\|_2 = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^n - \phi_s^n)^2 ds \right]^{1/2} \leq \|\theta^n - \phi^n\|'_2 \longrightarrow 0.$$

Donc les deux suites approximantes donnent la même limite dans  $L^2(\Omega)$  qui sont donc égales p.s.

**Convergence dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$**  : Le processus limite  $M$  est un élément de  $\mathcal{M}^2([0, T])$  car chaque  $M_t$  s'écrit comme limite dans  $L^2(\Omega)$  de  $M_t^n$  avec  $M^n$  une suite de martingales  $\mathcal{F}$ -adaptées telles que  $\mathbb{E}[|M_t^n|^2] < \infty$  pour tout  $t$ .

**Linéarité et Isométrie** : La linéarité est immédiate, reste à prouver la propriété d'isométrie qui s'écrit en passant à la limite la propriété d'isométrie sur les éléments de  $\mathcal{E}$  :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s^n dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds \right] \Rightarrow \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right].$$

□

**Remarque II.1.1.** Sur  $L^2(\Omega, [0, T])$ , l'intégrale stochastique satisfait les mêmes propriétés que celles énoncées dans  $\mathcal{E}$ .

## II.2 Calcul d'Ito

Voici l'outil qui permet de calculer les intégrales stochastiques sans repasser par des suites approximantes. Commençons par préciser la définition de la classe de processus pour laquelle on peut énoncer la formule d'Ito.

## II.2.1 Processus d'Ito

**Définition II.2.1.** [9]

*Un processus d'Ito est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad (\text{II.1})$$

avec  $X_0$  mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_0$ ,  $\phi$  et  $\theta$  deux processus  $\mathcal{F}$ -adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty \text{ p.s. et } \int_0^T |\phi_s| ds < \infty \text{ p.s.}$$

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \phi_t dt + \theta_t dB_t.$$

L'étude que nous avons menée jusqu'à présent nécessitait des conditions d'intégrabilité plus fortes sur les processus  $\theta$  et  $\phi$ . Afin de pouvoir présenter ici la démonstration de certains résultats de cette partie, nous aurons besoin d'imposer **les conditions d'intégrabilité (CI)** suivantes :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\theta_s|^2 ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^T |\phi_s| ds \right] < \infty.$$

**Proposition II.2.1.** *Si  $M$  est une martingale continue qui s'écrit sous la forme  $M_t = \int_0^t \phi_s ds$  avec  $\phi \in L^2(\Omega, [0, T])$ , alors  $\mathbb{P}$ -p.s.*

$$M_t = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Ceci entraîne que :

- La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si, pour tout  $t$ ,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s = X'_0 + \int_0^t \phi'_s ds + \int_0^t \theta'_s dB_s.$$

Alors,  $X_0 = X'_0$   $d\mathbb{P}$  p.s.  $\theta_s = \theta'_s$   $ds \times d\mathbb{P}$  p.p.  $\phi_s = \phi'_s$   $ds \times d\mathbb{P}$  p.p.

- Si  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  est une martingale de la forme  $X_0 + \int_0^t \phi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s$ , alors  $\phi_t = 0$   $dt \times d\mathbb{P}$  p.p.

**Proposition II.2.2.** *Le crochet d'un processus d'Itô  $X$  donné par (II.1) vaut :*

$$\langle X \rangle_t = \left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

**Proposition II.2.3.** *Le crochet entre deux processus d'Itô  $X_1$  et  $X_2$  donnés par :*

$$dX_t^i = \phi_t^i dt + \theta_t^i dB_t$$

vaut :

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \int_0^t \theta_s^1 \theta_s^2 ds.$$

**Démonstration II.2.1. :**

Par définition, le crochet est donné par :

$$\begin{aligned}\langle X_1, X_2 \rangle &:= \frac{1}{2} \left( \langle X^1 + X^2 \rangle - \langle X^1 \rangle - \langle X^2 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^t (\theta_s^1 + \theta_s^2)^2 ds - \int_0^t (\theta_s^1)^2 ds - \int_0^t (\theta_s^2)^2 ds \right) \\ &= \int_0^t \theta_s^1 \theta_s^2 ds\end{aligned}$$

**II.2.2 Formule d'Itô**

**Définition II.2.2.** La notion d'intégrale stochastique par rapport à un processus d'Itô se définit de la manière naturelle suivante. Pour  $\theta$  élément de  $L^2(\Omega, [0, T])$ , satisfaisant de bonnes conditions d'intégrabilité, on définit :

$$\int_0^t \varphi_s dX_s := \int_0^t \varphi_s d\theta_s dB_s + \int_0^t \varphi_s \phi_s ds.$$

La formule d'Itô se généralise aux processus d'Itô.

**Théorème II.2.1.** Soit  $f$  une fonction  $C^2$ , on a alors :

$$\begin{aligned}f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \phi_s ds + \int_0^t f'(X_s) \theta_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \theta_s^2 ds.\end{aligned}\tag{II.2}$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X \rangle_t.\tag{II.3}$$

**Démonstration II.2.2. :**

La démonstration revient à faire un développement de Taylor :

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n f'(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(X_{\theta_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2.$$

Le premier terme va converger vers l'intégrale stochastique  $\int_0^t f'(X_s) dX_s$  et le deuxième terme vers le terme  $\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$  par définition du crochet.

Notons que grâce à l'extension de l'intégrale stochastique à  $L^2_{\mathcal{F},loc}(\Omega, [0, T])$ , l'intégrale stochastique  $\int_0^t f'(X_s) \theta_s dB_s$  est bien définie puisque par continuité de  $X$  et de  $f'$ , le processus  $f'(X) \theta$  est bien dans  $L^2_{\mathcal{F},loc}(\Omega, [0, T])$ . □

**La formule d'Itô sous toutes ses formes :**

1. Pour le mouvement brownien avec  $f \in C^2(\mathbb{R})$  :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

2. Pour un processus d'Itô avec  $f \in C^2(\mathbb{R})$  :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s.$$

3. Pour un processus d'Itô avec  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$  fonction du temps et de l'espace :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s.$$

4. Pour un processus d'Itô multidimensionnel avec  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  :

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X_i, X_j \rangle_s.$$

Pour démontrer ces formules de plus en plus générales, la méthode est toujours la même : faire un développement de Taylor et ne pas négliger les termes provenant de la dérivée seconde par rapport au mouvement brownien ou au processus d'Ito dans le développement de Taylor car  $dB_t$  se comporte comme  $dt$  et  $dX_t$  se comporte comme  $\sqrt{dt}$ . Une des conséquence de la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties stochastique.

**Propriété II.2.1. Formule d'intégration par partie** Soient  $X$  et  $Y$  deux processus d'Itô, on a :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s.$$

Soit en notation infinitésimale :

$$d(XY)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

**Démonstration II.2.3.** En appliquant la formule d'Itô à  $X_t^2$  et à  $Y_t^2$ , on obtient :

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + \frac{2}{2} d\langle X \rangle_t \quad \text{et} \quad dY_t^2 = 2Y_t dY_t + \frac{2}{2} d\langle Y \rangle_t$$

Et en l'appliquant à  $(X + Y)^2$ , on obtient :

$$d(X + Y)_t^2 = 2(X_t + Y_t) d(X_t + Y_t) + \frac{2}{2} d\langle X + Y \rangle_t$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2} (d(X + Y)_t^2 - dX_t^2 - dY_t^2) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2} (d\langle X + Y \rangle_t - d\langle X \rangle_t - d\langle Y \rangle_t) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t. \end{aligned}$$

□

### II.2.3 Exemple d'utilisation de la formule d'Itô

**Montrons que :**  $\int_0^t B_s dB_s \neq \frac{1}{2} B_t^2$ .

Si  $f(x) = x^2$  et  $X_t = B_t$ , on a  $\phi_s = 0$  et  $\theta_s = 1$ , donc en appliquant la formule d'Itô à  $B_t^2$

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds.$$

On obtient

$$\frac{1}{2}(B_t^2 - t) = \int_0^t B_s dB_s \neq B_t^2.$$

Comme  $E\left(\int_0^t B_s^2 ds\right) < +\infty$ , on retrouve le fait que  $W_t^2 - t$  est une martingale.

**Théorème II.2.2.** Soit  $\sigma, \mu$  deux nombres réels,  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien et  $T$  un réel strictement positif. Pour tout réel  $x_0$ , il existe un processus d'Itô unique  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  qui vérifie, pour tout  $t \leq T$ ,

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu ds + \sigma dB_s). \quad (\text{II.4})$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right). \quad (\text{II.5})$$

**Démonstration II.2.4.** On a la réécriture de (II.4) sous la forme

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0. \quad (\text{II.6})$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté  $(S_t)_{t > 0}$  tel que les intégrales  $\int_0^t S_s ds$  et  $\int_0^t S_s dB_s$  aient un sens, et qui vérifie, pour chaque  $t$ ,

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s, \quad \mathbb{P}p.s.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel. Posons  $y_t = \log(S_t)$  où  $S_t$  est une solution de l'équation (II.4).  $S_t$  est un processus d'Itô avec  $\phi_s = \mu S_s$  et  $\theta_s = \sigma S_s$ . Appliquons la formule d'Itô à  $f(x) = \log(x)$ . On obtient, en supposant que  $S_t$  est positif :

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{-1}{S_s^2}\right) \sigma^2 S_s^2 ds$$

soit en utilisant (II.5)

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2) ds + \int_0^t \sigma dB_s,$$

puis

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t.$$

On a ainsi montré que, si  $(S_t, t > 0)$  est un processus strictement positif vérifiant (II.4), on a bien

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right).$$

Vérifions maintenant que ce processus est bien solution. On a  $S_t = f(t, B_t)$ , où

$$f(t, x) = x_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right).$$

La formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, B_t) \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t f'_s(s, B_s) ds + \int_0^t f'_x(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, B_s) d\langle B, B \rangle_s. \end{aligned}$$

Mais comme  $d\langle B, B \rangle_t = t$  on peut écrire

$$S_t = X_0 + \int_0^t S_s \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds,$$

et finalement

$$S_t = X_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s.$$

Montrons maintenant l'unicité d'une solution de l'équation ((II.4)). Notons que

$$S_t = x_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right)$$

est une solution de ((II.4)), et supposons que  $(X_t)_{t>0}$  en soit une autre. On va chercher à exprimer la différentielle stochastique de  $X_t S_t^{-1}$ . Posons

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} \exp \left( \left( -\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma B_t \right),$$

$\mu' = -\mu + \sigma^2$  et  $\sigma' = -\sigma$ . Alors,  $Z_t = \exp \left( \left( \mu' - \frac{\sigma'^2}{2} \right) t + \sigma' B_t \right)$  et le calcul fait précédemment prouve que

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s (\mu' ds + \sigma' dB_s) = 1 + \int_0^t Z_s ((-\mu + \sigma^2) ds - \sigma dB_s).$$

On peut alors exprimer la différentielle de  $X_t Z_t$  grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :

$$d\langle X_t, Z_t \rangle = X_t dZ_t + Z_t dX_t + \langle X, Z \rangle_t$$

ici on a

$$\langle X, Z \rangle_t = \left\langle \int_0^\cdot X_s \sigma dB_s, - \int_0^\cdot Z_s \sigma dB_s \right\rangle_t = - \int_0^t \sigma^2 X_s Z_s ds.$$

On en déduit que

$$d\langle X_t, Z_t \rangle = X_t Z_t ((-\mu + \sigma^2) dt - \sigma dB_t) + X_t Z_t (\mu dt + \sigma dB_t) - X_t Z_t \sigma^2 dt = 0.$$

$X_t Z_t$  est donc égal à  $X_0 Z_0$ , ce qui entraîne que

$$\forall t > 0, \mathbb{P}p.s. \quad X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t.$$

□

## II.3 Changement de probabilité, Théorème de représentation des martingales

### II.3.1 Probabilités équivalentes

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est dite absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$  si, pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$ .

#### **Théorème II.3.1.** [5]

Une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$  si, et seulement si, il existe une variable aléatoire positive  $Z$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que,

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(w) d\mathbb{P}(w).$$

La variable aléatoire  $Z$  est appelée densité de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$  et est notée  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ .

Les probabilités  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sont dites **équivalentes** si chacune d'elles est absolument continue par rapport à l'autre. Noter que si  $\mathbb{Q}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , de densité  $Z$ , alors  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sont équivalentes si et seulement si  $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ .

### II.3.2 Théorème de Girsanov

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  indexé par l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Le résultat suivant est connu sous le nom de **Théorème de Girsanov**.

**Théorème II.3.2.** [4] Soit  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté vérifiant  $\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty$  p.s et tel que le processus  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par

$$L_t = \exp \left( - \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

soit une martingale.

Alors, sous la probabilité  $\mathbb{P}^{(L)}$  de densité  $L_T$  par rapport à  $\mathbb{P}$ , le processus  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par

$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$  est un  $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien standard.

**Remarque II.3.1.** Une condition suffisante pour que  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  soit une martingale est que l'on ait

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt \right) \right] < \infty.$$

Cette condition est connue sous le nom de critère de Novikov. (cf Karatzas et Shreve (1988) [4])

### II.3.3 Théorème de représentation des martingales browniennes

Soit  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  un mouvement brownien standard, défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et soit  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  sa filtration naturelle. Rappelons que si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus adapté tel que  $\mathbb{E} \left( \int_0^T H_t^2 dt \right) < \infty$ , le processus  $(\int_0^t H_s dB_s)$  est une martingale de carré intégrable nulle en 0. Le théorème suivant montre que toutes les martingales browniennes peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.

**Théorème II.3.3.** [4]

Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration brownienne  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Il existe un processus adapté  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $\mathbb{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty$  et ,

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s, \quad p.s. \quad (\text{II.7})$$

Il résulte du théorème que si  $U$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, de carré intégrable, on peut écrire

$$U = \mathbb{E}(U) + \int_0^T H_s dB_s, \quad p.s.$$

où  $(H_t)$  est un processus adapté tel que  $\mathbb{E} \left( \int_0^T H_t^2 dt \right) < +\infty$ . Il suffit, pour montrer cela, de considérer la martingale  $M_t = \mathbb{E}(U | \mathcal{F}_t)$ . On démontre aussi (cf., par exemple, Karatzas et Shreve (1988)) que si  $M$  est une martingale (non nécessairement de carré intégrable), il existe une représentation de la forme (II.7), mais avec un processus  $H$  vérifiant seulement  $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ , p.s.

# CHAPITRE III

## ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

Une équation différentielle stochastique est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

avec  $b$  et  $\sigma$  des applications boréliennes de  $\mathbb{R} \times [0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Ces équations permettent de construire la plupart des modèles d'actifs utiles en finances, aussi bien lorsque l'on cherche à modéliser des actifs que des taux d'intérêt. Nous allons étudier quelques propriétés des solutions de ces équations.

### Définition III.0.1. [2]

On se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On considère deux fonctions  $b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sigma : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Z$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. Une solution à l'équation (III.1) est un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  continu et  $\mathcal{F}_t$ -adapté, qui vérifie :

— Pour tout  $t \geq 0$ , les intégrales  $\int_0^t b(s, X_s) ds$  et  $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$  ont un sens, c'est-à-dire :

$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty \text{ presque sûrement sous } \mathbb{P}.$$

—  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie (III.1), c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}p.s \quad X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

**Remarque III.0.1.** On ré-écrit formellement l'équation (III.1) sous la forme

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 &= Z. \end{cases}$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur  $b$  et  $\sigma$  pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation (III.1).

**Théorème III.0.1.** *Si  $b$  et  $\sigma$  sont des fonctions continues telles qu'il existe  $K < +\infty$  avec les propriétés suivantes :*

1.  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$

2.  $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$

3.  $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$

*Alors, pour tout  $T \geq 0$ , l'équation (III.1) admet une solution unique dans l'intervalle  $[0, T]$ . De plus, cette solution  $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$  vérifie*

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < +\infty.$$

*L'unicité signifie que si  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  sont deux solutions de l'équation (III.1), alors  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,  $X_t = Y_t$ .*

La démonstration de ce théorème utilise, comme toujours pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations différentielles, le théorème du point fixe.

# CHAPITRE IV

## PRÉSENTATIONS DES ACTIFS FINANCIERS

Le monde de la finance est un paysage dynamique et complexe où des milliards de dollars sont échangés chaque jour. Au cœur de cette activité financière effervescente se trouvent une multitude d'actifs financiers. Les **actifs financiers**, en général, sont des instruments qui ont une valeur monétaire et peuvent être négociés sur les marchés. Ils englobent une gamme diversifiée d'entités, notamment **des actions, obligations, devises et des produits dérivés**. Parmi ces produits dérivés, **les options** se distinguent comme l'un des exemples les plus remarquables et puissants de la pertinence des méthodes de calcul stochastique en finance. **Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons aux options.**

**Notation** Dans ce chapitre, nous utiliserons toujours  $t$  pour désigner le temps, et le temps est dans le cas continu puisque les modèles étudiés sont continus.

### IV.1 Option

#### Définition IV.1.1. [5]

*Une option est un contrat financier qui confère à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (option d'achat, également appelée "call") ou de vendre (option de vente, également appelée "put") un actif sous-jacent à un prix prédéterminé, appelé prix d'exercice, à une date future spécifiée, connue sous le nom de date d'expiration(ou échéance).*

#### Description d'une Option

La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

- **L'actif Sous-Jacent** : C'est l'actif auquel l'option est liée. Il peut s'agir d'actions, de devises, de matières premières ou d'autres instruments financiers.
- **Le Prix d'exercice (ou Strike)** : C'est le prix auquel l'actif sous-jacent peut être acheté (dans le cas d'une option d'achat) ou vendu (dans le cas d'une option de vente) à la date d'expiration.
- **La Date d'expiration** : C'est la date à laquelle l'option expire. À partir de cette date, l'option perd sa validité.

- **Le Prix de l'option (ou Prime) :** C'est le coût initial que l'acheteur de l'option paie au vendeur. Il est souvent exprimé en termes de pourcentage par rapport au prix de l'actif sous-jacent.

Ces éléments constituent les caractéristiques fondamentales d'une option et déterminent son fonctionnement et sa valeur sur les marchés financiers.

## Types d'options

Il existe plusieurs types d'options, chacun avec ses propres caractéristiques et utilisations :

- **Options Européennes :** Les options qui ne peuvent être exercées qu'à la date d'expiration.
- **Options Américaines :** Les options qui peuvent être exercées à tout moment entre la date d'achat et la date d'expiration.
- **Options de Style Asiatique :** Dans le cas des options de style asiatique, le paiement dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent sur une période donnée plutôt que du prix à un moment précis. Cela peut réduire la volatilité par rapport aux options de style européen ou américain.
- **Options Exotiques :** Les options exotiques sont des contrats plus complexes et personnalisés que les options standard. Elles peuvent avoir des caractéristiques spéciales, telles que des dates d'exercice flexibles ou des mécanismes de paiement non conventionnels.
- **Options Binaires :** Les options binaires sont des contrats où le paiement dépend de savoir si l'actif sous-jacent atteint ou dépasse un certain seuil à la date d'expiration. Elles sont souvent utilisées pour les paris sur les marchés financiers.

Dans le cadre de cette étude, nous nous limiterons aux options de type européen et américain.

**Exemple 1.** Dans le cas d'un call européen d'échéance  $T$ , sur une action dont le cours à l'instant  $t$  est  $S_t$ , de prix d'exercice  $K$ .

Le détenteur de l'option gagne à l'instant  $T$   $(S_T - K)_+$ . En effet, il gagne  $S_T - K$  par action en exerçant son option si  $S_T > K$  (en achetant au prix  $K$  et en revendant au prix du marché  $S_T$ ).

Et il ne gagne ni ne perd rien en n'exerçant pas son option si  $S_T \leq K$ .

Par un raisonnement analogue, dans le cas d'un put, le gain du détenteur de l'option à l'instant  $T$  est  $(K - S_T)_+$ . Le gain du détenteur (donc de l'acheteur) de l'option est la perte du vendeur de l'option. La prime est censée compenser cette perte.

## IV.2 Arbitrage

De manière générale, la notion d'opportunité d'arbitrage fait référence à une situation où un individu rationnel a la possibilité de prendre une décision qui lui permet de tirer profit de manière certaine de l'avenir.

Une des hypothèses que l'on est amené à faire dans l'étude mathématique des options est **l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)**, c'est-à-dire l'impossibilité de gagner de l'argent sans risque. Cette hypothèse entraîne une **relation dite de parité entre call et put** européens :

**Proposition IV.2.1.** *Si le modèle ne présente pas d'opportunité d'arbitrage, alors les prix  $C_t$  et  $P_t$  à l'instant  $t$  d'une option d'achat et d'une option de vente d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  vérifient la relation*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}; \quad (\text{IV.1})$$

où  $r$  est le taux d'intérêt du compte rémunéré.

**Démonstration IV.2.1. :**

Supposons la relation de parité non satisfaite, c'est-à-dire, supposons qu'à l'instant  $t$  on ait par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)};$$

(un raisonnement analogue peut être fait dans le cas  $<$ ). On va montrer qu'il existe alors une opportunité d'arbitrage. À l'instant  $t$ , on achète une action (ou obligation, ou ...) et un put, et on vend un call. Cette opération dégage un profit net égal à :

$$X_t = C_t - P_t - S_t$$

Si  $X_t > 0$ , on place  $X_t$  aux taux  $r$  jusqu'à la date  $T$ ; sinon, on emprunte  $-X_t$  au même taux jusqu'à la date  $T$ .

À la date  $T$ , deux cas peuvent se présenter :

1.  $S_T > K$  : le call est alors exercé (et on n'exerce pas le put) : on encaisse  $K$ , et on solde le prêt (ou l'emprunt), donc on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$$

2.  $S_T \leq K$  : on exerce le put (le call n'est pas exercé), et on solde comme ci-dessus, donc on se retrouve avec la même richesse que ci-dessus.

Dans les deux cas, on réalise à l'instant  $T$  un gain supérieur à 0, avec une mise de fonds nulle à l'instant  $t$  : c'est un exemple d'arbitrage.  $\square$

## IV.3 Stratégie d'investissement et portefeuille

### IV.3.1 Actifs financiers

Un modèle de marché financier est construit sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  :  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T$ . La tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information disponible à l'instant  $t$  et est appelée *tribu des événements antérieurs à l'instant  $t$* . L'horizon  $T$  sera le plus souvent, dans la pratique, la date d'échéance des options.

Le marché est constitué de (2) actifs financiers, dont les prix à l'instant  $t$  sont donnés par des variables aléatoires  $S_t^0, S_t$  à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu  $\mathcal{F}_t$  (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs).

Le vecteur  $A_t = (S_t^0, S_t)$ , est le vecteur des prix à l'instant  $t$ .

L'actif numéroté 0 est **l'actif sans risque** et on pose, par convention,  $S_0^0 = 1$  de sorte que  $S_t^0 = e^{rt}$ , pour  $t \geq 0$ .

Le coefficient  $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$  apparaît comme le coefficient d'actualisation : c'est la somme d'argent qui, investie à l'instant 0 dans l'actif sans risque, permet de disposer de 1 euro à l'instant  $t$  (si on compte les prix en euros).

L'actif  $S_t$  est appelé **actif risqué**.

### IV.3.2 Stratégie

Une **stratégie d'investissement** est définie par un processus aléatoire  $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T} = (\varphi_t^0, \varphi_t)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  du mouvement brownien, les composantes  $\varphi_t^0$  et  $\varphi_t$  de  $\phi_t$  représentant respectivement les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué détenues en portefeuille à la date  $t$ .

La valeur du portefeuille à l'instant  $t$  est donnée par le produit scalaire

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot A_t = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t.$$

Sa valeur actualisée est :

$$\tilde{V}_t(\phi) = \beta_t(\phi_t \cdot A_t) = \varphi_t^0 + \varphi_t \tilde{S}_t$$

où  $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$  et  $\tilde{S}_t = \beta_t S_t$  est le prix actualisé de actifs risqué.

#### Définition IV.3.1. [5]

Une stratégie de portefeuille  $V_t$  est dit autofinancée si

$$dV_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t. \tag{IV.2}$$

En utilisant le calcul d'Itô, nous vérifions que

$$dV_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t + S_t^0 d\varphi_t^0 + S_t d\varphi_t + d\langle \varphi^0, S^0 \rangle_t + d\langle \varphi, S \rangle_t$$

puisque  $dV_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$  est la condition d'auto financement, on dira aussi qu'une stratégie est autofinancée si

$$S_t^0 d\varphi_t^0 + d\langle \varphi^0, S \rangle_t + S_t d\varphi_t + d\langle \varphi, S \rangle_t = 0.$$

Pour que l'égalité (IV.2) ait un sens, on impose la condition  $\int_0^T |\varphi_t^0| dt < +\infty$  p.s. et  $\int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty$  p.s. l'égalité (IV.2) s'interprète de la façon suivante :

- $dV_t(\phi)$  représente la variation infinitésimale de la valeur du portefeuille  $\phi$  à la date  $t$ , c'est-à-dire le changement instantané de la valeur du portefeuille.
- $\varphi_t^0 dS_t^0$  représente la variation infinitésimale de la valeur de l'actif sans risque ( $S_t^0$ ) pondérée par la quantité d'actif sans risque détenue dans le portefeuille ( $\varphi_t^0$ ), indiquant ainsi comment la détention d'actif sans risque affecte la valeur du portefeuille.
- $\varphi_t dS_t$  représente la variation infinitésimale de la valeur de l'actif risqué ( $S_t$ ) pondérée par la quantité d'actif risqué détenue dans le portefeuille ( $\varphi_t$ ), indiquant ainsi comment la détention d'actif risqué affecte la valeur du portefeuille.

Ensemble, cette équation reflète la façon dont la valeur du portefeuille évolue au fil du temps en réponse aux variations des actifs sans risque et risqués. Une stratégie est dite autofinancée lorsque cette équation est vérifiée, ce qui signifie que la variation de la valeur du portefeuille est entièrement expliquée par les variations des actifs qui le composent, sans nécessiter d'injection ou de retrait de capital supplémentaire. Cela permet de comprendre comment une stratégie peut être construite pour maintenir son équilibre financier sans avoir besoin de capitaux externes.

**Définition IV.3.2.** Une stratégie auto-financée est définie par un couple  $(\varphi_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$  de processus adaptés vérifiant :

$$1. \int_0^T |\varphi_t^0| dt + \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty p.s.$$

$$2. \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = \varphi_0^0 S_0^0 + \varphi_0 S_0 + \int_0^t \varphi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \varphi_u dS_u p.s. \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

**Proposition IV.3.1.** Soit  $\phi = (\varphi_t^0, \varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant  $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty p.s.$  On pose  $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$  et  $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ . Alors,  $\phi$  définit une stratégie auto-financée si et seulement si

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u p.s. \quad (IV.3)$$

**Démonstration IV.3.1. :**

Supposons la stratégie  $\phi$  est auto-financée. De l'égalité

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -rV_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi),$$

qui résulte de la différenciation du produit des processus  $(e^{-rt})$  et  $(V_t(\phi))$  (noter que le terme de crochet  $d\langle e^{-r\cdot}, V_t(\phi) \rangle_t$  est nul), on déduit

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}(\varphi_t^0 e^{rt} + \varphi_t S_t)dt + e^{-rt}\varphi_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}\varphi_t dS_t \\ &= \varphi_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\ &= \varphi_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

D'où l'égalité (IV.3). La démonstration de la réciproque repose sur un raisonnement similaire.  $\square$

**Définition IV.3.3.** [5]

Une stratégie  $\phi$  est dite admissible si elle est auto-financée et si  $V_t(\phi) \geq 0$  pour tout  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ . i. e, si l'agent qui utilise cette stratégie reste solvable à chaque instant.

**Définition IV.3.4.** [5]

Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle  $V_0(\phi) = 0$  et de valeur finale non nulle  $V_T(\phi) \neq 0$ , ou équivalamment  $V_0(\phi) = 0$  et  $\tilde{V}_T(\phi) \neq 0$ .

## IV.4 Marchés viables et complets

### IV.4.1 Marchés viables

**Définition IV.4.1.** [5]

*On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.*

Le théorème suivant est appelé en anglais Fundamental Theorem of Asset Pricing

**Théorème IV.4.1.** [5]

*Le marché est viable si, et seulement si, il existe une probabilité  $\mathbb{P}^*$  équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

### IV.4.2 Marchés complets

Nous définirons une option européenne d'échéance  $T$  par la donnée d'une variable aléatoire

$h \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, représentant le profit que permet l'exercice de l'option.

Ainsi, pour une option d'achat ou call sur une unité d'actif au prix d'exercice  $K$ , on a  $h = (S_T^1 - K)_+$ , et, pour une option de vente ou put sur le même actif sous-jacent, avec le même prix d'exercice  $K$ ,  $h = (K - S_T^1)_+$ .

Dans ces deux exemples (les plus importants dans la pratique), la variable aléatoire  $h$  est une fonction de  $S_T$  seulement.

**Définition IV.4.2.** [5]

*On dit que l'option européenne d'échéance  $T$ , définie par la variable aléatoire  $h$ , est simulable (ou atteignable) s'il existe une stratégie admissible  $\phi$  dont la valeur à l'instant  $T$  est égale à  $h$ .*

**Remarque IV.4.1.** *Dans un marché viable, pour que l'option  $h$  soit simulable, il suffit qu'il existe une stratégie auto-financée  $\phi$  de valeur égale à  $h$  à l'instant  $T$ .*

*En effet,*

*si  $\phi$  est une stratégie auto-financée et si  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle les prix actualisés sont des martingales, alors, sous  $\mathbb{P}^*$ ,  $(\tilde{V}_t(\phi))$  est une martingale (comme transformée de martingale).*

*On a donc, pour  $t \in \{0, \dots, T\}$ ,*

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}^* \left[ \tilde{V}_T(\phi) \mid \mathcal{F}_t \right] \geq 0$$

*dès que  $\tilde{V}_T(\phi) \geq 0$  (en particulier si  $V_T(\phi) = h \geq 0$ ).*

**Définition IV.4.3.** [5]

*On dit que le marché est complet si toute option européenne d'échéance  $T$  est simulable.*

**Théorème IV.4.2.** *Un marché viable est complet si, et seulement si, il existe une seule probabilité  $\mathbb{P}^*$  équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.*

Maintenant que nous avons posé les bases des actifs financiers et des concepts de base en finance, la théorie mathématique des options traite deux problèmes :

1. Fixation du prix de l'option (en anglais *pricing*), autrement dit du montant de la prime que l'acheteur de l'option devra régler à son vendeur au moment de la signature du contrat ;
2. Couverture : comment le vendeur de l'action va pouvoir gérer la prime qu'il encaisse au moment de la signature du contrat, pour compenser, dans le cas d'une option européenne une perte de  $(S_T - K)_+$  (resp.  $(K - S_T)_+$ ).

Ainsi, si les raisonnements par arbitrage fournissent de nombreuses relations intéressantes, ils ne sont pas suffisants pour obtenir des formules de prix. Pour cela, on a besoin de modéliser de façon plus précise l'évolution des cours. **Black et Scholes** ont été les premiers à proposer un modèle conduisant à une formule explicite pour **le prix d'un call** européen sur une action ne donnant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui, dans le cadre du modèle, permet au vendeur de l'option de **se couvrir** parfaitement, c'est-à-dire d'éliminer totalement le risque.

## DEUXIÈME PARTIE : Étude du Modèle de Black and Scholes

## CHAPITRE V

# LE MODÈLE DE BLACK AND SCHOLES

En quittant le terrain des actifs financiers et des fondements de la finance, notre attention se tourne désormais vers un domaine essentiel de la théorie financière : l'évaluation et couverture des options. Ce passage marque le point où les principes théoriques se transforment en applications concrètes, répondant à deux questions cruciales dans le monde des marchés financiers : la fixation du prix de l'option et la gestion du risque associé à son détenteur.

L'évaluation des options constitue un défi mathématique complexe, nécessitant un modèle qui puisse capturer de manière réaliste l'évolution des prix des actifs financiers. Le modèle de Black-Scholes, une percée majeure dans la finance, se profile comme une réponse à cette problématique. Plutôt que de simplement exploiter des raisonnements par arbitrage, **Fischer Black et Myron Scholes** ont conçu un cadre mathématique qui va au-delà, offrant une formule explicite pour le prix des options européennes sur des actions sans dividendes.

### V.1 Hypothèses du modèle

Le modèle de Black-Scholes repose sur plusieurs hypothèses clés. Voici les principales hypothèses du modèle :

1. **Pas de dividendes** : Le modèle suppose que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes pendant la durée de vie de l'option. Cela signifie que l'actif génère uniquement des gains en capital.
2. **Volatilité constante** : La volatilité du rendement de l'actif sous-jacent est supposée constante au fil du temps. En d'autres termes, le modèle suppose que la distribution des rendements est stationnaire.
3. **Pas de coûts de transaction** : Le modèle suppose l'absence de coûts de transaction pour acheter ou vendre l'actif sous-jacent ou l'option.
4. **Taux d'intérêt constant** : Le taux d'intérêt sans risque est supposé constant pendant la durée de vie de l'option.
5. **Distribution log-normale des rendements** : Les rendements de l'actif sous-jacent sont supposés suivre une distribution log-normale, ce qui signifie que les fluctuations des

prix sont symétriques et que les rendements futurs sont indépendants des rendements passés.

6. **Possibilité de vente à découvert** : Le modèle suppose qu'il est possible de vendre à découvert l'actif sous-jacent, ce qui signifie que les investisseurs peuvent parier sur une baisse des prix.

## V.2 Modélisation probabiliste du marché

Nous réalisons la modélisation des aléas du marché financier via un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ .

- $\Omega$  est l'ensemble de tous les scénarios de marché possibles.
- la tribu  $\mathcal{F}$  représente la structure d'information globale disponible sur le marché.
- les aléas sont générés par un mouvement brownien réel qui engendre une filtration croissante, décrivant l'information disponible pour tous les acteurs du marché au fil du temps ( tout le monde a la même information, pas de délit d'initié).
- la probabilité  $\mathbb{P}$  est appelée **probabilité historique ou objective**.

### V.2.1 L'évolution des cours

Nous supposons que notre marché est constitué d'un actif sans risque  $S^0$  et d'un actif risqué  $S$  sur la période  $[0, T]$ .

- **Actif sans risque** On suppose l'évolution de  $S_t^0$  est régie par l'équation différentielle (ordinaire)

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad (\text{V.1})$$

où  $r$  est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à  $r$  (noter que  $r$  est ici un taux d'intérêt instantané).

On pose  $S_0^0 = 1$ , de sorte que  $S_t^0 = e^{rt}$  pour  $t \geq 0$ .

- **Actif risqué** On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad (\text{V.2})$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont deux constantes, appelés respectivement tendance et volatilité de l'actif  $S$ , et  $B_t$  est un mouvement brownien standard.

l'EDS (V.2) peut être réécrit de la façon suivante :

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u(\mu du + \sigma dB_u), \quad t \in [0, T] \quad (\text{V.3})$$

où  $S_0$  est une constante positive.

Ainsi, pour s'assurer qu'un tel modèle est bien défini, il nous faut résoudre l'EDS de Black & Scholes.

## V.2.2 Solution de l'EDS de Black and Scholes

**Théorème V.2.1.** *L'EDS (V.3) admet une solution unique qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \quad \mathbb{P} - p.s. \quad (\text{V.4})$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Démonstration V.2.1.** *Vérifions tout d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS en appliquant la formule d'Ito à  $f(t, B_t)$  avec*

$$f : (t, x) \mapsto S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} df(t, B_t) &= f_x(t, B_t)dB_t + f_t(t, B_t)dt + \frac{1}{2}f_{xx}(t, B_t)dB_t^2 \\ &= \sigma f(t, B_t)dB_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) f(t, B_t)dt + \frac{\sigma^2}{2} f(t, B_t)dt. \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit donc :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t).$$

Donc  $S$ , processus  $\mathcal{F}$ -adapté, est bien solution de l'EDS (V.3) Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer : soit  $Y$  un processus solution de l'EDS (V.3) Remarquons que  $S_t$  ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de  $\frac{1}{S_t}$  :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2}dS_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{S_t^3}d\langle S \rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t}(\mu dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{S_t}\sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Donc la formule d'intégration par parties donne la dynamique de  $Y_t/S_t$  :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t}dY_t + d\left\langle \frac{1}{S}, Y \right\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t}((\sigma^2 - \mu)dt - \sigma dB_t) + \frac{Y_t}{S_t}(\mu dt + \sigma dB_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarquez que l'on aurait pu obtenir directement le résultat en appliquant la formule d'Itô à la fonction  $(y, s) \mapsto y/s$ . On a donc :

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0 dB_s = 1.$$

Donc les processus  $Y$  et  $S$  sont égaux presque sûrement et l'EDS admet une unique solution.  $\square$

## V.3 Évaluation et couverture des options

Dans cette section nous nous limiterons à l'étude des options européennes

### V.3.1 Probabilité risque neutre

La **probabilité risque neutre** est la probabilité  $\mathbb{P}^*$  sous laquelle le prix actualisé de l'actif est **une martingale**.

Établissons les dynamiques des prix actualisés des actifs, on a :

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt, \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t. \end{aligned}$$

Rappelons que  $B_t$  est un  $\mathbb{P}$ -mouvement brownien standard.

Soit les prix actualisé des actifs ci dessous :

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_t^0 &= \frac{S_t^0}{S_t^0} = 1, \\ \widetilde{S}_t &= \frac{S_t}{S_t^0} = e^{-rt} S_t. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t^0 &= 0, \\ d\widetilde{S}_t &= d(e^{-rt} S_t). \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par partie stochastique pour  $d\widetilde{S}_t$  on a :

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= d(e^{-rt} S_t) \\ &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \langle -re^{-r(\cdot)} d(\cdot), \mu S_{(\cdot)} d(\cdot) + \sigma S_{(\cdot)} dB_{(\cdot)} \rangle_t. \end{aligned}$$

Remarquons que  $\langle -re^{-r(\cdot)} d(\cdot), \mu S_{(\cdot)} d(\cdot) + \sigma S_{(\cdot)} dB_{(\cdot)} \rangle_t = 0$ .

Donc,

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t dt + \sigma \widetilde{S}_t dB_t \quad (\text{V.5})$$

est la dynamique du prix de l'actif risqué actualisé.

On cherche maintenant :

$$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds, \text{ qui est un } \mathbb{P}^* \text{-mouvement brownien,}$$

donc  $dW_t = dB_t + \theta_t dt$  et (V.5) devient :

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r - \sigma\theta_t)\widetilde{S}_t dt + \sigma \widetilde{S}_t dW_t. \quad (\text{V.6})$$

D'après Girsanov il s'agira ici de rendre nul le coefficient de dérive pour éviter les friction, donc :

$$\mu - r - \sigma\theta_t = 0 \Rightarrow \theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma} \text{ est ce que l'on appelle le } \mathbf{prime \ de \ risque}.$$

Ainsi, a  $\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$ , le théorème de Girsanov (II.3.2) montre que :

$W_t = B_t + \int_0^t \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) ds$   $t \in [0, T]$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{P}^*$  définie par :

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp \left( -\frac{\mu - r}{\sigma} B_t - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} t \right).$$

Par conséquent le **processus de prix actualisé** donné par

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= (\mu - r)\widetilde{S}_t dt + \sigma\widetilde{S}_t dB_t \quad t \in [0, T] \\ d\widetilde{S}_t &= \sigma\widetilde{S}_t dW_t. \end{aligned} \tag{V.7}$$

est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ , donc  $\mathbb{P}^*$  est la **probabilité neutre du risque**

### V.3.2 Pricing (évaluation de l'option)

#### Approche EDP

Une option européenne est définie par une variable aléatoire positive  $\mathcal{F}_t$ -mesurable  $h = f(S_T)$ , ( $f(x) = (x - K)^+$  dans le cas d'un *call*,  $f(x) = (K - x)^+$  dans le cas d'un *put*). On désire trouver son prix.

soit  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $[0, T] \times \mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  par rapport à  $t$  et  $C^2$  par rapport à  $x$ .

On suppose qu'il existe  $C \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que ;

$$\begin{aligned} \pi(h)_t &= C(t, S_t), \quad t < T \\ f(x) &= C(T, x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Soit  $Y_t = C(t, S_t)$ , d'après la formule d'Itô on a :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t)d\langle S \rangle_t \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t)dt. \end{aligned}$$

$\implies$

$$dY_t = \left( \mu S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) dB_t. \tag{V.8}$$

Notons  $\mathcal{L}$  le générateur infinitésimal de la diffusion  $S_t$  défini sur  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  par

$$\mathcal{L}C = \mu x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

On peut réécrire (V.8) comme

$$dY_t = \mathcal{L}C(t, S_t)dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)dB_t. \tag{V.9}$$

Supposons qu'il existe un stratégie  $\phi$  finançant  $h$  telle que ;

$$\phi = (\varphi_t^0, \varphi_t)_{0 < t < T}$$

où  $\varphi_t^0$  représente la quantité d'actif sans risque et  $\varphi_t$  la quantité d'actifs risqué.  
On a ainsi, la valeur du portefeuille autofinancé :

$$V_t(\phi) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = C(t, S_t) = Y_t.$$

d'où une nouvelle ecriture de  $dY_t$  :

$$\begin{aligned} dY_t &= \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t \\ &= r\varphi_t^0 S_t^0 dt + \varphi_t \mu S_t dt + \sigma \varphi_t S_t dB_t \\ &= \left( r\varphi_t^0 S_t^0 + \mu \varphi_t S_t \right) dt + \sigma \varphi_t S_t dB_t. \end{aligned} \tag{V.10}$$

On compare (V.9) et (V.10), en identifiant les termes en  $dt$  on obtient :

$$\mathcal{L}C(t, S_t) = r\varphi_t^0 S_t^0 + \mu \varphi_t S_t. \tag{V.11}$$

En identifiant les termes de  $dB_t$  on a

$$\sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) = \sigma \varphi_t S_t. \tag{V.12}$$

En plus on a toujours

$$C(t, S_t) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t. \tag{V.13}$$

Ainsi, de (V.12) on tire

$$\varphi_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$$

que l'on reporte dans (V.13) :

$$\varphi_t^0 = \left( C(t, S_t) - S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) \right) \times \frac{1}{S_t^0}.$$

Nous avons ainsi obtenu la stratégie finançant  $h$  en fonction du prix. En reportant dans (V.11)

$$\mathcal{L}C(t, S_t) = r[C(t, S_t) - S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)] + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t).$$

En explicitant  $\mathcal{L}C$  cette dernière égalité s'écrit après simplification

$$rS_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) + \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t) = rC(t, S_t), \quad t \in [0, T]p.s$$

A la maturité  $C(T, S_T) = f(S_T)$  p.s appelé **pay-off**

En résumer le résultat obtenu est illustrer par le théorème suivant :

**Théorème V.3.1.** Soit  $S_t^0$  le prix d'un actif sans risque et  $S_t$  le prix de l'actif risqué, vérifiant  $dS_t^0 = rS_t^0 dt$  et  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ . Soit  $h = f(S_T)$  une option européenne et  $\pi(h)_t$  son prix implicite. On suppose qu'il existe  $C \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que ;

$$\pi(h)_t = C(t, S_t), \quad t < T$$

$$f(x) = C(T, x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Alors  $C$  vérifie l'équation parabolique

$$\begin{cases} rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t) + \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(t, S_t) = rC(t, S_t), & t \in [0, T] \\ C(T, S_T) = f(S_T). \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

Une stratégie  $\phi$  finançant  $h$  est donnée par  $\phi = (\varphi^0, \varphi)$  où

$$\varphi_t = \frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t),$$

$$\varphi_t^0 = \left( C(t, S_t) - S_t \frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t) \right) \times \frac{1}{S_t^0}.$$

Afin d'aboutir à une formule explicite du prix nous réinterprétons la solution de (V.14) comme une espérance à travers le théorème suivant :

**Théorème V.3.2.** Soit la stratégie  $\phi$  ci dessus finançant  $h$ . l'EDP (V.14) étant parabolique linéaire, on peut déduire donc la solution d'après **la formule de Feynman-Kac** :

$$C(t, S_t) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

avec  $\mathbb{E}^*$  espérance sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{P}^*$ .

### Approche martingale

**Définition V.3.1.** [5]

Une stratégie  $\phi = (\varphi_t^0, \varphi_t)_{0 < t < T}$  est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée  $\tilde{V}_t(\phi) = \varphi_t^0 + \varphi_t S_t$  du portefeuille correspondant est, pour tout  $t$ , positive et telle que  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ .

On dira qu'une option est **simulable** si sa valeur l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible. Il est clair avec cette définition que, pour que l'option définie par  $h$  soit simulable, il est nécessaire que  $h$  soit de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ . Dans le cas du call ( $h = (S_T - K)_+$ ), cette propriété est bien vérifiée puisque  $\mathbb{E}^*[S_T^2] < \infty$ ; notons que dans le cas du put,  $h$  est même bornée.

**Théorème V.3.3.** Dans le modèle de Black-Scholes, toute option définie par une variable aléatoire  $C$ , positive  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, de carré intégrable sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$ , **est simulable** et la valeur à l'instant  $t$  de tout portefeuille simulant est donnée par :

$$V_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} C | \mathcal{F}_t). \quad (\text{V.15})$$

**Démonstration V.3.1.** Supposons d'abord qu'il existe une stratégie admissible  $(\varphi^0, \varphi)$  simulant l'option. La valeur à l'instant  $t$  du portefeuille  $(\varphi_t^0, \varphi_t)$  est donnée par

$$V_t = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t,$$

et on a, par hypothèse,  $V_T = C$ . Soit  $\tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$  la valeur actualisée

$$\tilde{V}_t = \varphi_t^0 + \varphi_t \tilde{S}_t.$$

Puisque la stratégie est auto-financée, on a, d'après la Proposition IV.3.1 et l'égalité (V.7),

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t \varphi_u \sigma \tilde{S}_u dW_u. \end{aligned}$$

Sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$ ,  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable, d'après la définition des stratégies admissibles, et l'égalité qui précède fait apparaître le processus  $(\tilde{V}_t)$  comme une intégrale stochastique par rapport à  $(W_t)$ . Il en résulte (cf.[5]. Chapitre 3, Proposition 3.4.4 et Exercice 18) que  $(V_t)$  est une martingale de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ . D'où

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t),$$

et par conséquent

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(C | \mathcal{F}_t).$$

Nous avons ainsi montré que si le portefeuille  $\phi$  simule l'option définie par  $C$ , sa valeur est donnée par  $V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*(C | \mathcal{F}_t)$ . Pour achever la démonstration du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est-à-dire à trouver des processus  $(\varphi_t^0)$  et  $(\varphi_t)$  définissant une stratégie admissible, et tels que

$$\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} C | \mathcal{F}_t).$$

Or, sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$ , le processus défini par  $M_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT} C | \mathcal{F}_t)$  est une martingale de carré intégrable. La filtration  $(\mathcal{F}_t)$ , filtration naturelle de  $(B_t)$ , est aussi la filtration naturelle de  $(W_t)$  et, d'après le Théorème de Représentation des Martingales (cf. Théorème II.3.3), il existe un processus adapté  $(\psi_t)_{0 < t < T}$  tel que

$$\mathbb{E}^* \left( \int_0^T (\psi_s)^2 ds \right) < +\infty \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T], M_t = M_0 + \int_0^t \psi_s dW_s \quad p.s.$$

La stratégie  $\phi$ , avec  $\varphi_t = \frac{\psi_t}{\sigma \tilde{S}_t}$  et  $\varphi_t^0 = M_t - \varphi_t \tilde{S}_t$ , est alors, d'après la Proposition IV.3.1 et l'égalité (V.7), une stratégie auto-financée dont la valeur à l'instant  $t$  est donnée par

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = \mathbb{E}^* \left( e^{-r(T-t)} C | \mathcal{F}_t \right).$$

Il est clair sur cette expression que  $V_t(\phi)$  est une variable aléatoire positive, que  $\sup_{0 < t < T} V_t(\phi)$  est de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ , et que  $V_T(\phi) = C$ . On a donc bien une stratégie admissible simulant  $C$ .  $\square$

La valeur de l'option à l'instant  $t$  est donc définie de façon naturelle par l'expression

$$\mathbb{E}^* \left( e^{-r(T-t)} C | \mathcal{F}_t \right).$$

En cas où la valeur  $V_t$  du portefeuille à l'instant  $t \in [0, T]$  est une fonction  $C(t, S_t)$  de  $t$  et  $S_t$ , elle peut être calculée à partir de (V.15) comme

$$V_t = C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* [f(S_T) | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec  $f(x) = (x - K)_+$  est la pay-off

**Proposition V.3.1.** *Le prix à l'instant  $t$  d'une option d'achat européenne avec un prix d'exercice  $K$  et une échéance  $T$  est donné par*

$$\boxed{C(t, S_t) = S_t \mathcal{N}(d_+) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-), \quad t \in [0, T].} \quad (\text{V.16})$$

où  $\mathcal{N}$  est la fonction de répartition de la loi normale standard, et  $d_+$  et  $d_-$  sont définis comme

$$d_+ = \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}},$$

$$d_- = d_+ - \sigma \sqrt{T - t}.$$

**Démonstration V.3.2.** *La preuve de la Proposition découle de (V.15) et du Lemme V.3.1 ci-dessous.*

*En utilisant la relation*

$$S_T = S_t e^{(r(T-t) + \sigma(W_T - W_t) - \sigma^2(T-t)/2)}, \quad t \in [0, T].$$

*Selon le théorème V.3.1, le prix du portefeuille couvrant  $C$  est donné par*

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* [C | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* [(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ \left( S_t e^{(r(T-t) + \sigma(W_T - W_t) - \sigma^2(T-t)/2)} - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ \left( x e^{(r(T-t) + \sigma(W_T - W_t) - \sigma^2(T-t)/2)} - K \right)^+ \Big|_{x=S_t} \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ \left( e^{m(x)+X} - K \right)^+ \Big|_{x=S_t} \right], \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

où

$$m(x) = r(T - t) - \frac{\sigma^2(T - t)}{2} + \log x,$$

et  $X = \sigma(W_T - W_t)$ , une variable aléatoire gaussienne centrée avec une variance

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[\sigma(W_T - W_t)] = \sigma^2 \text{Var}[W_T - W_t] = \sigma^2(T - t), \quad \text{sous la probabilité } \mathbb{P}^*.$$

Par conséquent, selon le Lemme V.3.1 ci-dessous, nous avons

$$\begin{aligned}
V_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ (e^{m(x)+X} - K)^+ \right]_{x=S_t} \\
&= e^{-r(T-t)} e^{m(S_t) + \sigma^2(T-t)/2} \mathcal{N}(v + (m(S_t) - \log K)/v) \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}((m(S_t) - \log K)/v) \\
&= S_t \mathcal{N}(v + (m(S_t) - \log K)/v) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}((m(S_t) - \log K)/v) \\
&= S_t(d_+) - K e^{-r(T-t)}(d_-),
\end{aligned}$$

pour  $0 \leq t \leq T$ . □

**Lemme V.3.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne centrée avec une variance  $v^2$ . Alors, nous avons

$$\mathbb{E}[(e^{m+X} - K)^+] = e^{m + \frac{v^2}{2}} \mathcal{N}(v + (m - \log K)/v) - K \mathcal{N}((m - \log K)/v).$$

Pour la démonstration Voir : (cf.[7])

En désignant par

$$P(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ (K - S_T)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

**le prix de l'option de vente** avec un prix d'exercice  $K$  et une échéance  $T$ , nous vérifions à partir du théorème V.3.1 que

$$\begin{aligned}
C(t, S_t) - P(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ (S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] - e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ (K - S_T)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* \left[ (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^* [S_T - K | \mathcal{F}_t] \\
&= S_t - K e^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

Cette relation est appelée **la parité put-call**, et elle montre que

$$\begin{aligned}
P(t, S_t) &= C(t, S_t) - S_t + K e^{-r(T-t)} \\
&= S_t \mathcal{N}(d_+) + e^{-r(T-t)} K - S_t - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-) \\
&= -S_t (1 - \mathcal{N}(d_+)) + e^{-r(T-t)} K (1 - \mathcal{N}(d_-)) \\
&= -S_t \mathcal{N}(-d_+) + e^{-r(T-t)} K \mathcal{N}(-d_-).
\end{aligned}$$

### V.3.3 Hedging(Couverture des calls et des puts)

Dans l'approche martingale de l'évaluation de l'option, nous avons invoqué le Théorème de Représentation des Martingales pour montrer l'existence d'un portefeuille simulant l'option. Dans la pratique, il importe de pouvoir construire effectivement le portefeuille simulant afin de couvrir l'option et on ne peut se contenter d'un simple théorème d'existence.

Nous allons voir comment, dans le cas où l'option est définie par une variable aléatoire positive de la forme  $h = f(S_T)$ , on peut expliciter le portefeuille de couverture.

On se constitue la stratégie  $\varphi^0, \varphi$  On pose :

$$V_t = C(t, S_t).$$

Un portefeuille de simulation doit avoir, à chaque instant  $t$ , une valeur actualisée égale à

$$\tilde{V}_t = e^{-rt}C(t, S_t).$$

qui est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ .

En appliquant la formule d'Itô à  $C(t, S_t)$  on a

$$dC(t, S_t) = \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t)(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(t, S_t)dt$$

En égalant le coefficient du terme de  $dB_t$  à zéro on retrouve EDS(V.14).

En décomposant  $C(t, S_t)$  en

$$C(t, S_t) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$$

on trouve aisément le portefeuille de couverture avec comme processus de couverture

$$\varphi_t = \frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t)$$

$$\varphi_t^0 = \left( C(t, S_t) - S_t \frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t) \right) \times \frac{1}{S_t^0}.$$

**Remarque V.3.1.** Dans le cas du call, on a, avec les notations de la proposition V.3.1,

$$\frac{\partial C}{\partial S_t}(t, S_t) = \mathcal{N}(d_+),$$

et, dans le cas du put,

$$\frac{\partial F}{\partial S_t}(t, S_t) = -\mathcal{N}(-d_+).$$

### V.3.4 Les grec (Sensibilité du Modèle)

**Le delta d'un call (dépendance de  $C$  par rapport à  $S_t$ )**

Il est intéressant de voir comment évolue le prix du *call* en fonction de l'actif sous-jacent, c'est à dire d'évaluer la quantité  $\frac{\partial C}{\partial S_t}$  cette quantité est appelé **le delta** notée  $\Delta$ .

c'est la quantité d'actif risqué qui compose un portefeuille de couverture construit sur l'actif risqué et l'actif sans risque.

En dérivant (V.16) on établit que La formule du delta pour une option d'achat (call) est donnée par :

$$\frac{\partial C}{\partial S_t} = \mathcal{N}(d_+) = \Delta_{call}$$

La formule du delta pour une option de vente (put) est donnée par :

$$\frac{\partial P}{\partial S_t} = \mathcal{N}(d_+) - 1 = \Delta_{put}$$

les graphiques si dessous représentent les fonctions de prix et du delta pour une option d'achat (call) et de vente (put) :

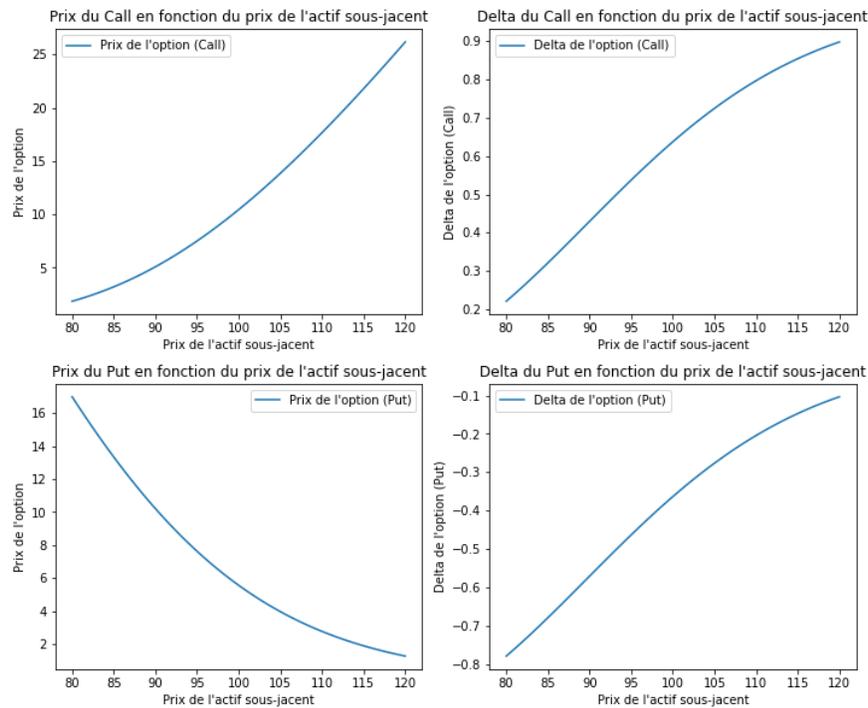


FIGURE V.1 – les fonctions de prix et du delta pour une option d'achat (call) et de vente (put)

### Analyse

- **Pour l'option d'achat (Call) :**

- Prix de l'Option (Call) : La courbe du prix de l'option d'achat montre une relation croissante avec le prix de l'actif sous-jacent. Cela est conforme à l'attente, car le prix d'une option d'achat augmente généralement avec le prix de l'actif sous-jacent.
- Delta de l'option (Call) : La courbe du delta pour l'option d'achat est comprise entre 0 et 1, ce qui est conforme aux attentes. Plus le prix de l'actif sous-jacent augmente, plus le delta approche de 1, indiquant une sensibilité accrue aux variations du prix de l'actif sous-jacent.

- **Pour l'option de Vente (Put) :**

- Prix de l'option (Put) : La courbe du prix de l'option de vente montre une relation décroissante avec le prix de l'actif sous-jacent. Cela est conforme à l'attente, car le prix d'une option de vente diminue généralement avec le prix de l'actif sous-jacent.
- Delta de l'option (Put) : La courbe du delta pour l'option de vente est comprise entre -1 et 0, ce qui est également conforme aux attentes. Plus le prix de l'actif sous-jacent augmente, plus le delta approche de 0, indiquant une sensibilité négative aux variations du prix de l'actif sous-jacent.

Les deltas montrent la sensibilité des options aux variations du prix de l'actif sous-jacent. Plus le delta est élevé, plus l'option réagit fortement aux changements de prix. Les opérateurs peuvent utiliser les deltas pour mettre en œuvre des stratégies de couverture. Un delta proche de zéro indique une position delta neutre. La courbe du delta pour l'option de vente (put) montre une asymétrie par rapport à l'option d'achat (call). Cela reflète le fait que les options de vente ont une sensibilité négative aux variations du prix de l'actif sous-jacent.

**Interprétation des Résultats :**

- Option d'Achat (Call) :

- Prix de l'Option (Call) : L'augmentation du prix de l'actif sous-jacent conduit à une augmentation du prix de l'option d'achat. Cela s'explique par le fait que l'option d'achat donne le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix fixe, et cette option devient plus précieuse lorsque le prix de l'actif augmente.
- Delta de l'Option (Call) : Le delta positif indique que l'option d'achat est sensible aux hausses de prix de l'actif sous-jacent. Un delta de 0,5 signifie que l'option suit environ la moitié des variations du prix de l'actif. Plus le prix de l'actif augmente, plus le delta se rapproche de 1, montrant une sensibilité plus forte.

- Option de Vente (Put) :

- Prix de l'Option (Put) : L'augmentation du prix de l'actif sous-jacent conduit à une diminution du prix de l'option de vente. Cela est dû au fait que l'option de vente donne le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix fixe, et cette option devient moins précieuse lorsque le prix de l'actif augmente.
- Delta de l'Option (Put) : Le delta négatif indique une sensibilité négative aux hausses de prix de l'actif sous-jacent. Un delta de -0,5 signifie que l'option de vente réagit environ à la moitié des variations du prix de l'actif. Plus le prix de l'actif augmente, plus le delta se rapproche de 0, montrant une diminution de la sensibilité.

Les deltas indiquent la sensibilité relative des options aux variations du prix de l'actif sous-jacent. Plus le delta est élevé, plus l'option réagit aux mouvements du marché. Les opérateurs peuvent ajuster leur exposition au marché en utilisant des stratégies de couverture basées sur le delta. Une position delta neutre peut être atteinte en combinant des options d'achat et de vente.

## **Le gamma**

Pratiquement la sensibilité du delta aux variations du cours du support est un paramètre important de la gestion. on introduit le gamma de l'option qui est la dérivée du delta par

rapport au cours de l'action, soit  $\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}$  comme  $\frac{\partial C}{\partial S_t} = \mathcal{N}(d_+)$ , alors

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_+),$$

où

$$\mathcal{N}'(d_+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_+^2}{2}\right).$$

Le prix du call est une fonction convexe du prix du sous-jacent.

## Le Rho

Le rho mesure la sensibilité du prix de l'option aux changements du taux d'intérêt.

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r},$$

où  $r$  est le taux d'intérêt.

Sensibilité aux Taux d'Intérêt : Le rho indique comment le prix de l'option réagit aux changements dans le taux d'intérêt sans risque. Un rho positif signifie que le prix de l'option augmente lorsque le taux d'intérêt augmente, et vice versa.

Effet sur le Call et le Put : Pour une option d'achat (call), le rho est généralement positif, indiquant une sensibilité positive au taux d'intérêt. Pour une option de vente (put), le rho est généralement négatif.

## Le Theta

Le Theta mesure la variation du prix de l'option par rapport au temps  $t$ .

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Sensibilité au Temps : Le Theta mesure comment le prix de l'option change en fonction du temps qui passe. Un Theta négatif indique que le prix de l'option diminue avec le temps, toutes choses égales par ailleurs.

Effet sur le Call et le Put : Le Theta est généralement négatif pour les deux options d'achat (call) et de vente (put). Cela signifie que le temps qui passe a un effet négatif sur le prix de l'option.

## V.4 Options Américaines

C'est à partir de stratégies de gestion avec consommation que nous allons traiter les options américaines dans le modèle de Black-Scholes.

### Définition V.4.1. [5]

Une stratégie de gestion avec consommation est la donnée d'un processus adapté  $\phi = (\varphi_t^0, \varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant les propriétés suivant :

1.  $\int_0^T |\varphi_t^0| dt + \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty$  p.s
2.  $\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = \varphi_0^0 S_0^0 + \varphi_0 S_0 + \int_0^t \varphi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \varphi_u dS_u - P_t$  pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $(C_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus croissant continu adapté, nul en  $t = 0$ ;  $P_t$  représentant la consommation cumulée jusqu'à l'instant  $t$ .

Une option américaine est naturellement définie par un processus adapté, à valeurs positives  $(h_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Pour simplifier, nous nous limiterons à des processus de la forme  $h_t = \psi(S_t)$ , où  $\psi$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ , vérifiant  $\psi(x) \leq A + Bx$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives. Pour un call, on a  $\psi(x) = (x - K)_+$  et pour un put  $\psi(x) = (K - x)_+$ .

Nous dirons que la stratégie de gestion avec consommation  $\phi = (\varphi_t^0, \varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$  couvre l'option américaine définie par  $h_t = \psi(S_t)$  si, en notant  $V_t(\phi) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$ , on a

$$\forall t \in [0, T], \quad V_t(\phi) \geq \psi(S_t) \quad \text{p.s.}$$

Notons  $\Phi^\psi$  l'ensemble des stratégies de gestion avec consommation qui ouvrent l'option définie par  $h_t = \psi(S_t)$ . Si le vendeur de l'option suit une stratégie  $\phi \in \Phi^\psi$ , il dispose, à chaque instant  $t$ , d'une richesse au moins égale à  $\psi(S_t)$ , qui est la somme à fournir en cas d'exercice de l'option à la date  $t$ . Le théorème suivant caractérise la valeur minimale d'une stratégie de couverture d'une option américaine.

**Théorème V.4.1.** *Soit  $u$  l'application de  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par*

$$u(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbb{E}^* [e^{-r(\tau-t)} \psi(x \exp((r - (\sigma^2/2))(\tau - t) + \sigma(W_\tau - W_t)))],$$

où  $\mathcal{T}_{t, T}$  désigne l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans l'intervalle  $[t, T]$ . Il existe une stratégie  $\bar{\phi} \in \Phi^\psi$ , telle que  $V_t(\bar{\phi}) = u(t, S_t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . De plus, pour toute stratégie  $\phi \in \Phi^\psi$ , on a  $V_t(\phi) \geq u(t, S_t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Voir [4] pour la démonstration

**Remarque V.4.1.** *Soit  $\tau$  un temps d'arrêt à valeurs dans  $[0, T]$ . La valeur à l'instant 0 d'une stratégie admissible au sens de la Définition V.3.1 et de valeur  $\psi(S_\tau)$  à l'instant  $\tau$  donnée par  $E^*(e^{-r\tau} \psi(S_\tau))$ , puisque la valeur actualisée de toute stratégie admissible est une martingale sous  $\mathbb{P}^*$ . La quantité  $u(0, S_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T}} \mathbb{E}^*(e^{-r\tau} \psi(S_\tau))$  est donc bien la richesse initiale minimale permettant de couvrir tous les exercices possibles sur l'intervalle  $[0, T]$ .*

**Proposition V.4.1.** *Si, dans le Théorème V.4.1, la fonction  $\psi$  est donnée par  $\psi(x) = (x - K)_+$  pour tout réel  $x$ , alors on a*

$$u(t, x) = C(t, x),$$

où  $C$  est la fonction donnant le prix du call européen.

Voir [5] pour la preuve

## V.5 Cas pratique

### V.5.1 Cas 1

(NDIOR SMART CAPITAL(NSC)) envisage d'émettre des options sur actions pour ses employés afin de les inciter à rester et à performer. Cette étude vise à évaluer le coût potentiel de l'émission d'une option d'achat en utilisant le modèle de Black-Scholes.

#### Paramètres du Modèle

- Prix actuel de l'action ( $S_0$ ) : 120 USD
- Prix d'exercice de l'option ( $K$ ) : 130 USD
- Taux sans risque ( $r$ ) : 3% par an
- Volatilité ( $\sigma$ ) : 25% par an
- Durée de l'option ( $T$ ) : 2 ans

#### Calcul du Prix de l'Option

$$d_+ = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \approx -0.33$$

$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T} \approx -1.33$$

$$C = S_0 \cdot N(d_+) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_-)$$

En utilisant une table de distribution normale standard,

$$C \approx 120 \cdot 0.37 - 130 \cdot e^{-0.03 \cdot 2} \cdot 0.09 \approx 9.15$$

Le prix théorique de l'option d'achat est d'environ 9.15 USD.

#### Interprétation

NSC peut utiliser cette estimation pour prendre des décisions éclairées sur son programme d'options sur actions et sa politique de rémunération des employés.

## V.5.2 Cas 2

ABC Bank envisage d'émettre des options sur indices pour ses clients et souhaite mettre en place une stratégie de couverture pour gérer les risques associés à ces positions. Cette étude vise à évaluer le coût potentiel de l'émission des options et à discuter d'une stratégie de couverture delta neutre.

### Paramètres du Modèle

- Prix actuel de l'indice ( $S_0$ ) : 1500 points
- Prix d'exercice de l'option ( $K$ ) : 1520 points
- Taux sans risque ( $r$ ) : 2% par an
- Volatilité ( $\sigma$ ) : 20% par an
- Durée de l'option ( $T$ ) : 3 mois
- Nombre d'unités d'options émises : 1000

### Calcul du Prix de l'Option

$$\begin{aligned}d_+ &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.17 \\d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{T} \approx -0.13 \\C &= S_0 \cdot N(d_+) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_-) \\&\approx 1500 \cdot 0.57 - 1520 \cdot e^{-0.02 \cdot \frac{3}{12}} \cdot 0.13 \approx 658.38\end{aligned}\tag{V.17}$$

Le coût théorique de l'émission des options sur indices est d'environ 658.38 USD.

### Stratégie de Couverture

ABC Bank maintiendra une position delta neutre en ajustant continuellement sa position en actifs sous-jacents pour minimiser les risques liés aux mouvements du marché.

$$\Delta = N(d_+) \approx 0.57$$

### Conclusion

Cette étude démontre comment ABC Bank peut utiliser le modèle de Black-Scholes pour évaluer le coût de l'émission d'options sur indices et mettre en place une stratégie de couverture efficace.

## V.6 Limites du Modèle

Le modèle de Black-Scholes est largement utilisé dans la finance, mais il présente certaines limites et a fait l'objet de critiques. Voici quelques-unes des principales limitations et critiques associées au modèle de Black-Scholes :

- **Hypothèses simplificatrices** : Le modèle repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices, dont la constance de la volatilité, l'absence de dividendes, et l'hypothèse de rendements continus. Ces hypothèses peuvent ne pas refléter fidèlement la réalité des marchés financiers.
- **Volatilité implicite non constante** : La volatilité implicite observée sur le marché peut varier au fil du temps, ce qui peut entraîner des erreurs d'estimation dans les prix des options.
- **Absence de coûts de transaction et de taxes** : Le modèle ne prend pas en compte les coûts de transaction ni les implications fiscales, ce qui peut avoir un impact significatif dans des environnements réels.
- **Modèle basé sur le rendement continu** : Le modèle suppose que les rendements de l'actif sous-jacent sont continus, alors que dans la réalité, les rendements sont souvent discrets.
- **Non-prise en compte des sauts de prix** : Le modèle ne prend pas en compte les sauts de prix (jumps) qui peuvent se produire sur les marchés financiers. Certains actifs, en particulier les actions, peuvent connaître des mouvements brusques qui ne sont pas bien représentés par un modèle à diffusion géométrique continue.
- **Non-prise en compte des changements de régime** : Le modèle suppose que les paramètres du marché, tels que la volatilité, restent constants au fil du temps. Dans la réalité, ces paramètres peuvent changer en réponse à des événements économiques ou financiers.
- **Non-prise en compte des distributions asymétriques** : Les marchés financiers réels peuvent présenter des distributions de rendements asymétriques, ce que le modèle de Black-Scholes ne capture pas de manière précise.
- **Dépendance à l'égard des taux d'intérêt** : Le modèle suppose un taux d'intérêt constant, ce qui peut ne pas être réaliste dans des environnements de marché changeants.
- **Problèmes liés aux queues épaisses** : Le modèle peut sous-estimer le risque de mouvements extrêmes du marché, car il est basé sur une distribution normale des rendements, ce qui ne capture pas efficacement les queues épaisses (fat tails) observées dans certaines distributions de rendements réelles.
- **Échec dans la prédiction de la volatilité implicite** : Le modèle peut parfois échouer à prédire correctement la volatilité implicite observée sur le marché, en particulier pendant des périodes de stress financier.

Malgré ces limitations, le modèle de Black-Scholes reste un outil important dans la finance, mais il est crucial de comprendre ses hypothèses et ses limites lors de son utilisation. De nombreuses extensions et variantes ont été développées pour traiter certaines de ces critiques et améliorer la précision des évaluations d'options.

La pertinence du modèle de Black-Scholes peut être remise en question dans plusieurs situations en raison de ses hypothèses simplificatrices. Voici une discussion approfondie sur

les situations où le modèle peut ne pas être applicable de manière appropriée :

**Volatilité non constante :** Le modèle suppose une volatilité constante, ce qui peut ne pas refléter la réalité des marchés financiers. Dans des situations où la volatilité varie considérablement au fil du temps, le modèle peut sous-estimer ou surestimer les prix des options.

**Présence de coûts de transaction :** Le modèle de Black-Scholes ne prend pas en compte les coûts de transaction associés à l'achat et à la vente d'actifs. Dans des marchés réels, ces coûts peuvent être significatifs, en particulier pour les transactions fréquentes, et peuvent affecter les résultats du modèle.

**Impact des dividendes :** Le modèle suppose l'absence de dividendes versés sur l'actif sous-jacent. Dans le cas d'actions versant des dividendes, l'évaluation précise des options nécessite la prise en compte de ces paiements, ce que le modèle de Black-Scholes ne fait pas.

**Événements extrêmes :** Le modèle repose sur l'hypothèse de rendements continus, ce qui signifie qu'il ne capture pas efficacement les sauts de prix ou les mouvements brusques observés sur les marchés financiers, en particulier pendant des périodes de crise.

**Changements de régime :** Le modèle suppose que les paramètres du marché, tels que la volatilité, restent constants au fil du temps. Dans des environnements où ces paramètres changent en réponse à des événements économiques ou financiers, le modèle peut être inadéquat.

**Distributions de rendements asymétriques :** Les marchés financiers réels présentent souvent des distributions de rendements asymétriques, ce que le modèle de Black-Scholes ne capture pas de manière précise. Les queues épaisses dans la distribution des rendements ne sont pas bien reflétées par la distribution normale utilisée dans le modèle.

**Options exotiques :** Le modèle de Black-Scholes est spécifiquement conçu pour évaluer les options européennes simples. Il peut ne pas être approprié pour les options exotiques avec des caractéristiques telles que des barrières, des cliquets, ou des options avec des fonctionnalités de rachat anticipé.

**Taux d'intérêt variables :** Le modèle suppose un taux d'intérêt constant, ce qui peut ne pas être réaliste dans des environnements de marché où les taux d'intérêt varient.

**Faible liquidité du marché :** Dans des marchés peu liquides, où l'achat ou la vente d'actifs peut avoir un impact significatif sur les prix, le modèle peut ne pas fournir des évaluations précises.

**Situations de stress financier :** Le modèle peut échouer à prédire correctement la volatilité implicite pendant des périodes de stress financier, où les marchés peuvent réagir de manière imprévisible.

En conclusion, bien que le modèle de Black-Scholes soit un outil puissant pour l'évaluation des options dans certaines conditions, il est important de reconnaître ses limitations et de l'utiliser avec précaution dans des situations où ses hypothèses ne sont pas respectées. Des approches alternatives, telles que les modèles stochastiques plus complexes ou l'utilisation de données de marché spécifiques, peuvent être nécessaires pour des évaluations plus précises dans des contextes particuliers.

L'analyse des modèles financiers requiert souvent une évaluation pratique de leur performance et de leur capacité à capturer les dynamiques du marché. Dans cette section, nous mettrons en œuvre des simulations pour examiner les implications du modèle de Black-Scholes et du modèle de Vasicek dans des scénarios réalistes. Ces simulations nous permettront de générer des trajectoires de prix d'options et de taux d'intérêt, offrant ainsi un aperçu dynamique des comportements attendus.

La simulation constitue une approche puissante pour mettre à l'épreuve les modèles théoriques en exposant leurs prédictions aux réalités changeantes du marché. Nous adopterons une approche basée sur la solution analytique du modèle de Black-Scholes, ce qui nous permettra d'obtenir directement les prix d'options à différents moments dans le temps. Pour le modèle de Vasicek, nous élaborerons des trajectoires de taux d'intérêt en utilisant des méthodes numériques appropriées.

## VI.1 Rappels de quelques méthodes de simulation

### VI.1.1 Simulation de variables gaussiennes

Une méthode classique (Algorithme de Box Muller) pour simuler les variables aléatoires gaussiennes repose sur la constatation que, si  $(U_1, U_2)$  sont deux variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes, alors

$$Z = \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

suit une loi gaussienne centrée et réduite (c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance 1). Pour simuler des gaussiennes de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ , il suffit de poser

$$X = \mu + \sigma Z,$$

où  $Z$  est une gaussienne centrée réduite.

## VI.1.2 Simulation du mouvement brownien

Il existe plusieurs méthodologies pour simuler le mouvement brownien, souvent utilisé dans le contexte de modèles financiers stochastiques tels que le modèle de Black-Scholes. Deux des méthodologies les plus couramment utilisées sont la méthode d'Euler et la simulation de trajectoires.

### Méthode d'Euler :

*Idée Principale* : Diviser le temps en petits intervalles et approximer le processus stochastique par une marche aléatoire.

*Algorithme* :

1. Choisissez un pas de temps  $\Delta t$ .
2. Initialisez  $S_0$  à la valeur initiale du processus.
3. À chaque itération  $i$ , calculez  $S_{i+1} = S_i + \mu S_i \Delta t + \sigma S_i \sqrt{\Delta t} Z_i$ , où  $Z_i$  est une variable aléatoire normale standard.
4. Répétez le processus jusqu'à la fin de la période de simulation.

### Simulation de Trajectoires :

*Idée Principale* : Générer plusieurs trajectoires du processus stochastique en utilisant des réalisations indépendantes du mouvement brownien.

*Algorithme* :

1. Choisissez le nombre de trajectoires à simuler,  $N$ .
2. Pour chaque trajectoire  $j$ , initialisez  $S_0^{(j)}$  à la valeur initiale du processus.
3. À chaque itération  $i$ , calculez  $S_{i+1}^{(j)} = S_i^{(j)} + \mu S_i^{(j)} \Delta t + \sigma S_i^{(j)} \sqrt{\Delta t} Z_i^{(j)}$ , où  $Z_i^{(j)}$  est une variable aléatoire normale standard indépendante pour chaque trajectoire.
4. Répétez le processus jusqu'à la fin de la période de simulation pour toutes les trajectoires.

Ces méthodologies peuvent être utilisées pour simuler le mouvement brownien dans le cadre de modèles financiers, en particulier pour évaluer des instruments financiers tels que les options. La méthode d'Euler est simple et souvent utilisée pour des simulations rapides, tandis que la simulation de trajectoires permet de capturer la distribution complète du processus stochastique.

## VI.1.3 Simulation des équations différentielles stochastiques

Pour la simulation des Équations Différentielles Stochastiques (EDS), nous ne parlerons ici que de la méthode la plus élémentaire : la "méthode d'Euler aléatoire".

Le principe en est le suivant : considérons une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

où  $X_t$  est le processus stochastique,  $b(X_t)$  est la fonction de dérive,  $\sigma(X_t)$  est la fonction de volatilité,  $dW_t$  est une différentielle de Wiener, et  $t$  représente le temps.

## Discrétisation du Temps

Choisissons un pas de discrétisation en temps  $\Delta t$ . Nous allons simuler le processus stochastique à des instants discrets  $t_n = n \cdot \Delta t$ , où  $n$  est un entier.

## Méthode d'Euler Aléatoire

La méthode d'Euler aléatoire est une approche simple. Elle consiste à approximer la solution de l'EDS entre deux instants discrets. Pour une simulation de  $t_n$  à  $t_{n+1}$ , la formule d'Euler aléatoire est donnée par :

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + b(X_{t_n})\Delta t + \sigma(X_{t_n})(W_{n+1} - W_n)$$

où  $W_{n+1} - W_n$  représente l'accroissement du processus de Wiener entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

## Génération de Trajectoires

Répetons le processus d'Euler aléatoire pour chaque intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  pour générer une trajectoire du processus stochastique.

## Répétition

Répetons le processus pour plusieurs trajectoires afin d'obtenir une distribution statistique des solutions.

## VI.2 Simulation du modèle de Black-Scholes

L'actif risqué est décrit dans le modèle de Black et Scholes par la solution de

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \\ S_0 = x \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

La valeur de l'actif sans risque est donnée par  $S_t^0 = e^{rt}$ . Soient  $r = 0.05\%/année$ ,  $\sigma = 20\%/√année = 0.2$  et  $x = 100$ .

Implémentation sur python de l'algorithme de simulation du modèle de Black-Scholes le programme python (Listing 1) de l'annexe (.1) nous permet de simuler les trajectoires suivant du modèle

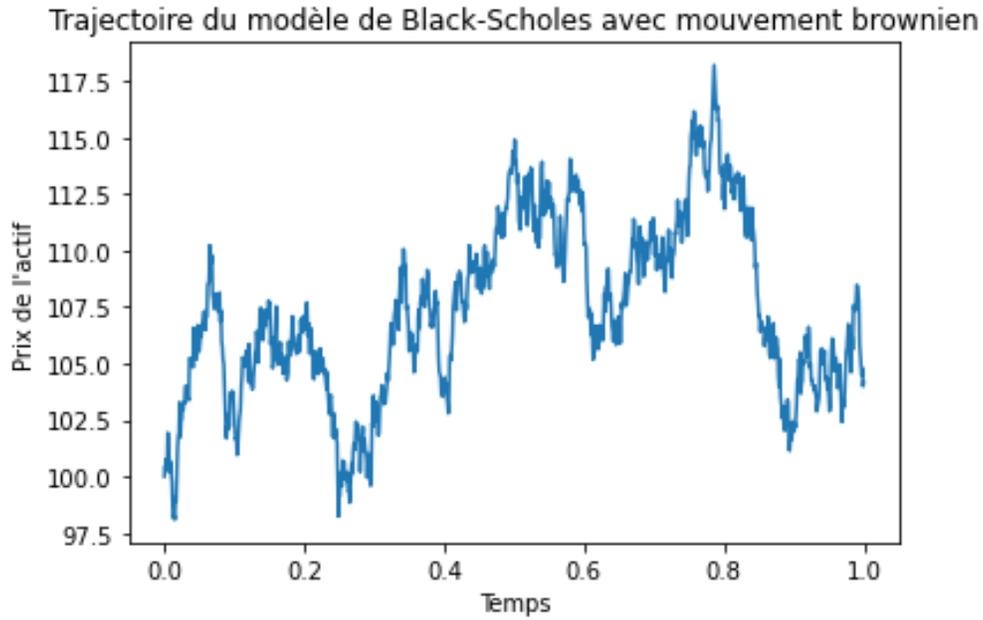


FIGURE VI.1

Pour des réalisations communes du mouvement brownien, traçons les trajectoires correspondantes du modèle de Black et Scholes pour diverses valeurs de  $\sigma$  ( $\sigma = 0.1$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $\sigma = 0.9$  par exemple)  
 Voir le programme (Listing 2) de l'annexe

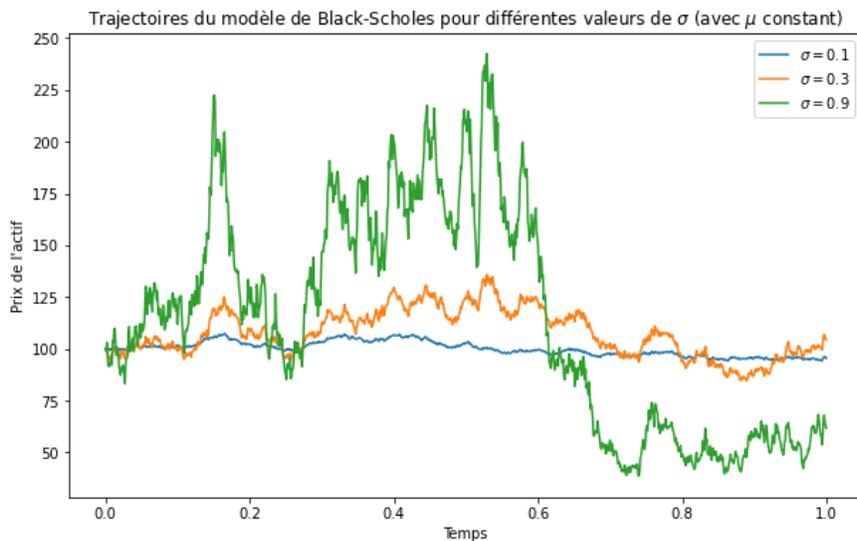


FIGURE VI.2

**Analyse et interprétation** Plus grande volatilité : Une volatilité plus élevée entraîne une probabilité plus élevée de mouvements importants des prix, ce qui augmente la valeur anticipée de l'option. Par conséquent, lorsque la volatilité est plus élevée, le prix de l'option (appelée aussi la prime) augmente.

Volatilité plus faible : Une volatilité plus faible suggère des mouvements de prix moins importants, ce qui diminue la valeur anticipée de l'option. Ainsi, lorsque la volatilité est plus basse, le prix de l'option diminue.

Impact sur la sensibilité du prix de l'option (le delta et le gamma) : La volatilité influence également la sensibilité du prix de l'option par rapport au prix du sous-jacent (delta) et la sensibilité de cette sensibilité au mouvement du sous-jacent (gamma). Des valeurs plus élevées de volatilité augmentent généralement ces sensibilités.

## Application pratique

Nous commençons par considérer le cas d'un "call" de "strike"  $K = S_0 = 100$  et de date de maturité  $T = 1an$ . Nous fixons  $\Delta t$  à 1 mois.

La formule de Black-Scholes pour le prix d'un "call" européen est donnée par :

$$C(t, S_t) = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2), \quad t \in [0, T]$$

Où :

$S_t$  est le prix initial  $t$  de l'actif sous-jacent,

$K$  est le prix exercice de l'option ("strike"),

$T$  est l'échéance de l'option en années,

$r$  est le taux d'intérêt sans risque,

$\sigma$  est la volatilité,

$\mathcal{N}$  est la fonction de distribution normale standard,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Supposons que :

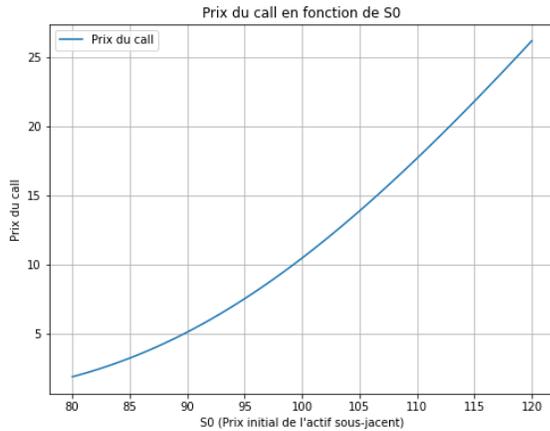
$S_0 = 100$  est le prix initial de l'actif sous-jacent,

$K = 100$ ,  $T = 1an$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ ,

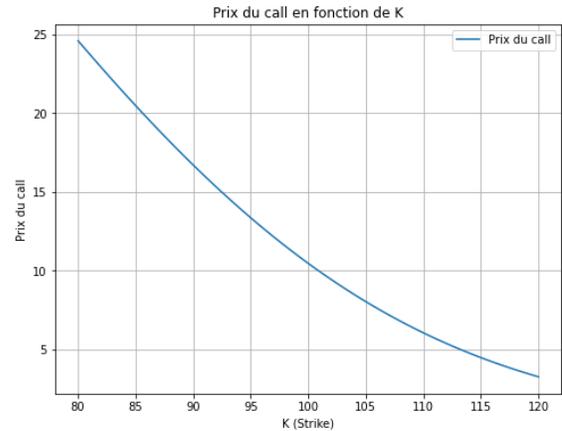
Implémentons la formule de black-scholes donnant le prix d'un call : Résultat après compilation du programme (Listing 3) :

**Le prix du call est : 10.45**

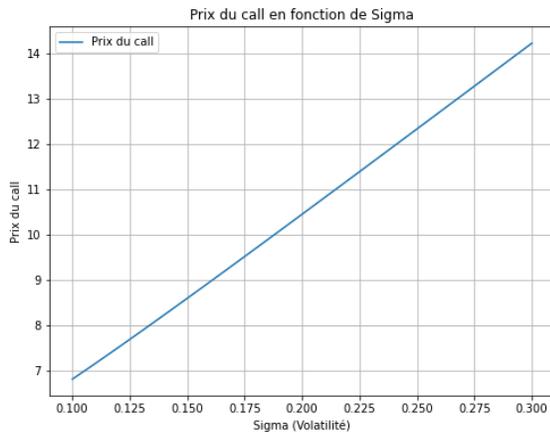
Traçons le graphe du prix de cette option comme fonction de  $S_0$ , puis de  $K$ , de  $\sigma$  et de  $r$



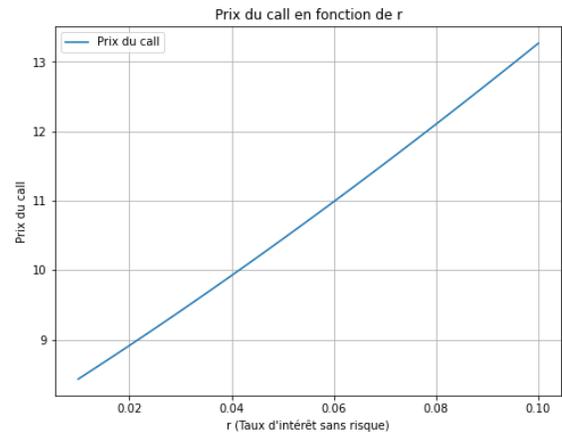
(a) Graphique 1 : Prix du Call en fonction de  $S_0$



(b) Graphique 2 : Prix du Call en fonction de  $K$



(c) Graphique 3 : Prix du Call en fonction de  $\sigma$



(d) Graphique 4 : Prix du Call en fonction de  $r$

FIGURE VI.3 – Graphiques du Prix du Call en fonction de différents paramètres

### 1. Graphique du Prix du Call en fonction de $S_0$ (Prix initial de l'actif sous-jacent)

Dans ce graphique, nous avons fait varier  $S_0$  tout en maintenant les autres paramètres constants.

Interprétation : L'augmentation de  $S_0$  conduit généralement à une augmentation du prix du call, ce qui est attendu car un prix initial plus élevé signifie un actif sous-jacent potentiellement plus cher à l'avenir.

### 2. Graphique du Prix du Call en fonction de $K$ (Strike) Ici, nous avons fait varier $K$ tout en maintenant les autres paramètres constants.

Interprétation : En général, une augmentation de  $K$  conduit à une diminution du prix du call. C'est cohérent avec l'idée que si le prix d'exercice est plus élevé, l'option a moins de

valeur.

**3. Graphique du Prix du Call en fonction de  $\sigma$  (Volatilité)** Dans ce graphique, nous avons fait varier  $\sigma$  tout en maintenant les autres paramètres constants.

Interprétation : Une augmentation de la volatilité conduit à une augmentation du prix du call. Une plus grande volatilité implique généralement une plus grande incertitude, ce qui augmente la valeur de l'option.

**4. Graphique du Prix du Call en fonction de  $r$  (Taux d'intérêt sans risque)** Ici, vous avez fait varier  $r$  tout en maintenant les autres paramètres constants.

Interprétation : Une augmentation du taux d'intérêt sans risque conduit généralement à une augmentation du prix du call. le prix d'une option d'achat (call) est influencé positivement par une augmentation du taux d'intérêt sans risque parce que la valeur actualisée du prix d'exercice augmente. Cela peut compenser la diminution de la valeur due à la décroissance exponentielle dans la formule de Black-Scholes.

Ces interprétations sont générales et basées sur les tendances attendues dans le modèle de Black-Scholes.

La théorie du modèle de Black et Scholes suggère de changer la composition du portefeuille de couverture à tout instant. Ceci est, bien sûr, impossible en pratique. Nous suggérons ici une technique de couverture approximative dans laquelle nous changeons la composition du portefeuille à des instants discrets régulièrement espacés  $k\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots$  (des valeurs typiques de  $\Delta t$  étant 1 heure, 1 jour, 1 mois)

L'implémentation de la couverture approximative dans le modèle de Black-Scholes :

- Initialisation : La simulation commence avec une valeur initiale du portefeuille égale à zéro. Les paramètres du modèle, tels que le prix initial de l'actif sous-jacent ( $S_0$ ), le strike ( $K$ ), l'échéance ( $T$ ), le taux d'intérêt sans risque ( $r$ ), la volatilité ( $\sigma$ ), et les intervalles de temps pour les ajustements, sont définis.
- Boucle sur les intervalles de temps : La simulation est réalisée en bouclant sur des intervalles de temps réguliers. À chaque intervalle, le delta au début de l'intervalle est calculé en utilisant la formule de Black-Scholes. La quantité d'actif risqué est déterminée en fonction du delta, et la valeur du portefeuille est mise à jour en conséquence.
- Calcul de la valeur à l'instant final  $T$  : Après la dernière itération, la valeur du portefeuille à l'instant final ( $T$ ) est calculée en utilisant la dernière quantité d'actif risqué.
- Tracé du graphique : Les résultats de la simulation sont tracés graphiquement pour visualiser l'évolution de la valeur du portefeuille au fil du temps. Des points rouges indiquent la valeur du portefeuille au début et à la fin de la simulation.

Voir le code python a l'annexe ( Listing 4)

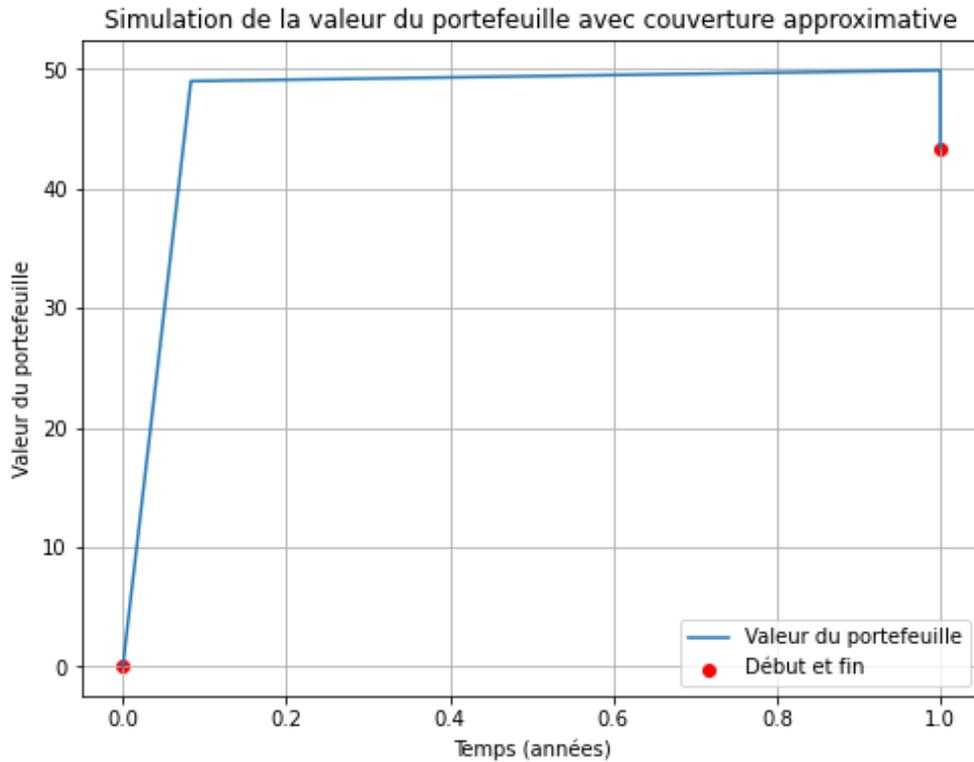


FIGURE VI.4

**Interprétation :**

★Évolution de la valeur du portefeuille : L'évolution de la valeur du portefeuille est observable sur le graphique. L'approche de couverture approximative permet de réduire le risque du portefeuille en ajustant périodiquement la quantité d'actif risqué.

★Points rouges : Les points rouges aident à évaluer l'impact de la couverture au début et à la fin de la simulation. Un écart significatif entre ces points peut indiquer l'efficacité ou les limitations de la stratégie de couverture sur la période.

★Réflexion sur les paramètres : Des expériences avec différents paramètres, tels que la fréquence des ajustements ou la volatilité, peuvent aider à comprendre l'influence de ces facteurs sur la performance de la couverture.

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

## Conclusion

En conclusion de cette étude approfondie du modèle financier de Black-Scholes, un pilier incontournable de la finance quantitative, nous avons exploré divers aspects de son application et de sa pertinence dans l'évaluation des options financières. Notre analyse a été guidée par une démarche méthodique, commençant par l'évaluation de la valeur de l'option via deux approches distinctes, à savoir l'Équation aux Dérivées Partielles (EDP) et l'approche martingale.

La mise en œuvre d'une stratégie de couverture s'est avérée être une étape cruciale dans notre démarche, nous permettant de gérer les risques associés à la détention de l'option. Cette stratégie, construite avec soin pour neutraliser les fluctuations indésirables du marché, incarne l'essence même de la gestion des risques dans le contexte financier.

L'étude de la sensibilité du modèle face à divers paramètres a mis en lumière la complexité des marchés financiers et la nécessité d'une compréhension approfondie des variables en jeu. Les simulations que nous avons réalisées ont non seulement généré des trajectoires de prix d'options, mais ont également offert une perspective dynamique sur la manière dont la volatilité influe sur ces prix. Les résultats obtenus ont souligné la nécessité de prendre en compte ces facteurs dynamiques dans l'élaboration de stratégies de couverture robustes et adaptatives.

Enfin, la simulation d'une stratégie de couverture a permis de concrétiser les concepts abstraits en une application pratique. Observer la stratégie s'ajuster en temps réel face aux fluctuations du marché a renforcé notre compréhension des mécanismes de couverture et de leur importance dans la gestion des risques.

En somme, cette étude va au-delà de la simple exploration du modèle de Black-Scholes, en offrant un aperçu complet de son utilisation pratique, de sa sensibilité aux paramètres et de l'efficacité d'une stratégie de couverture bien conçue. Elle met en exergue l'importance continue de la recherche dans le domaine de la finance quantitative pour mieux appréhender les dynamiques complexes des marchés financiers et améliorer les outils qui guident les décisions financières cruciales.

## Perspectives

Cette étude suggère plusieurs axes de recherche prometteurs pour une recherche approfondie dans le domaine de la finance quantitative :

1. **Modèles Multifacteurs** : Explorer la mise en place de modèles multifacteurs intégrant diverses variables telles que la volatilité implicite, les taux d'intérêt sans risque et d'autres facteurs économiques pertinents pour une compréhension plus holistique des marchés financiers.
2. **Extensions des modèles** : Envisager l'exploration d'extensions ou de variantes des modèles étudiés, tels que des ajustements pour tenir compte de l'asymétrie dans la volatilité ou des variations dans les paramètres au fil du temps.
3. **Machine Learning dans la Finance Quantitative** : Examiner la viabilité et l'efficacité de l'intégration de techniques de machine learning pour améliorer la prédiction

des prix d'options et des taux d'intérêt, en exploitant les vastes ensembles de données disponibles.

4. **Analyse de Risque et Gestion de Portefeuille** : Étudier l'application de ces modèles avancés dans des contextes de gestion de portefeuille, en mettant l'accent sur la gestion proactive des risques et la maximisation des rendements ajustés au risque.
5. **Études Empiriques Approfondies** : Entreprendre des études empiriques approfondies en utilisant des données réelles de marchés financiers pour valider, ajuster et améliorer les modèles, en prenant en compte les particularités des différents actifs financiers.

En envisageant ces perspectives, une thèse de doctorat pourrait apporter une contribution significative à l'évolution des modèles financiers, ouvrant la voie à des avancées tangibles dans la compréhension et la gestion des risques dans les marchés financiers contemporains.

# .1 Annexe A

## Algorithme de simulation du modèle

Implémentation sur python de l'algorithme de simulation du modèle de Black-Scholes

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def brownien_mouv_trajectoire(n, h):
5     # Générer une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées et
6     # réduites
7     gaussien_cent = np.random.randn(n)
8
9     # Calculer les incréments du mouvement brownien
10    brownien_increments = np.sqrt(h) * gaussien_cent
11
12    # Calculer la trajectoire du mouvement brownien
13    brownien_trajectoire = np.cumsum(brownien_increments)
14
15    return brownien_trajectoire
16
17 def black_scholes_trajectoire(x, mu, sigma, r, T, n, h):
18     temps = np.arange(0, T + h, h)
19     prix = np.zeros(n + 1)
20     prix[0] = x
21
22     for k in range(1, n + 1):
23         # Simulation du mouvement brownien
24         brownien_trajectoire = brownian_mov_trajectoire(1, h)
25
26         # Calcul de l'incrément pour le modèle de Black-Scholes
27         drift = (mu - 0.5 * sigma**2) * h
28         diffusion = sigma * brownien_trajectoire[-1]
29         prix[k] = prix[k - 1] * np.exp(drift + diffusion)
30
31     return temps, prix
32
33 # Paramètres du modèle
34 x0 = 100 # Prix initial
35 mu = 0.05 # Rendement attendu
36 sigma = 0.2 # Volatilité
37 r = 0.05 # Taux d'intérêt sans risque
38 T = 1 # Temps total
39 n = 1000 # Nombre de pas de temps
40 h = T / n # Pas de temps
41
42 # Simulation de la trajectoire du modèle de Black-Scholes
43 temps, prix = black_scholes_trajectoire(x0, mu, sigma, r, T, n, h)
44
45 # Affichage des résultats
46 plt.plot(temps, prix)
47 plt.title('Trajectoire du modèle de Black-Scholes avec mouvement
48    brownien')
```

```

47 plt.xlabel('Temps')
48 plt.ylabel('Prix de l\'actif')
49 plt.show()
50
51

```

Listing 1 – Simulation du modèle de Black-Scholes

Simulation du modèle de Black-Scholes pour différentes valeurs de sigma

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  def trajectoire_mouv_brow(n, h):
5  gaussien = np.random.randn(n)
6  increments_brownien = np.sqrt(h) * gaussien
7  trajectoire_brownien = np.cumsum(increments_brownien)
8  return trajectoire_brownien
9
10 def black_scholes_trajectoires(x, mu, sigma_val, r, T, n, h):
11 temps = np.arange(0, T + h, h)
12 prix = np.zeros((len(sigma_val), n + 1))
13 prix[:, 0] = x
14
15 for k in range(1, n + 1):
16 # Simulation du mouvement brownien
17 trajectoire_brownien = trajectoire_mouv_brow(len(sigma_val), h)
18
19 # Calcul de l'incrément pour le modèle de Black-Scholes pour chaque
20 # valeur de sigma
21 drift = (mu - 0.5 * np.array(sigma_val)**2) * h
22 diffusion = np.array(sigma_val) * trajectoire_brownien
23 prix[:, k] = prix[:, k - 1] * np.exp(drift + diffusion)
24
25 return temps, prix
26
27 # Paramètres du modèle
28 x0 = 100 # Prix initial
29 mu = 0.05 # Rendement attendu
30 sigma_val = [0.1, 0.3, 0.9] # Différentes valeurs de sigma
31 r = 0.05 # Taux d'intérêt sans risque
32 T = 1 # Temps total
33 n = 1000 # Nombre de pas de temps
34 h = T / n # Pas de temps
35
36 # Simulation des trajectoires du modèle de Black-Scholes pour
37 # différentes valeurs de sigma
38 temps, prix = black_scholes_trajectoires(x0, mu, sigma_val, r, T, n, h)
39
40 # Affichage des résultats
41 plt.figure(figsize=(10, 6))

```

```

40 for i in range(len(sigma_val)):
41 plt.plot(temps, prix[i, :], label=f'$\sigma = {sigma_val[i]}$')
42
43 plt.title('Trajectoires du mod3le de Black-Scholes pour differentes
44 valeurs de $\sigma$ (avec $\mu$ constant)')
45 plt.xlabel('Temps')
46 plt.ylabel('Prix de l\'actif')
47 plt.legend()
plt.show()

```

Listing 2 – Simulation du modèle de Black-Scholes pour differentes valeur de sigma

La formule de black-scholes donnant le prix d'un call

```

1
2 import numpy as np
3 from scipy.stats import norm
4
5 def black_scholes_call(S, K, T, r, sigma):
6 d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
7 d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
8 prix_call = S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
9 return prix_call
10
11 # Param3tres du mod3le
12 S0 = 100 # Prix initial de l'actif sous-jacent
13 K = 100 # Strike
14 T = 1 # Echeance
15 r = 0.05 # Taux d'int3ret sans risque
16 sigma = 0.2 # Volatilit3
17
18 # Calcul du prix du call
19 prix_call = black_scholes_call(S0, K, T, r, sigma)
20
21 print(f'Le prix du call est : {prix_call:.2f}')
22

```

Listing 3 – code de la formule de black-scholes donnant le prix d'un call

L'implémentation de la couverture approximative dans le modèle de Black-Scholes :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.stats import norm
4
5 # Fonction pour calculer le prix du call dans le modèle de Black-Scholes
6 def black_scholes_call(S, K, T, r, sigma):
7     d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
8     d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
9     prix_call = S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
10    return prix_call
11
12 # Fonction pour simuler la valeur du portefeuille avec couverture
13 # approximative
14 def simul_val_portf(S0, K, T, r, sigma, intervals, dt):
15     # Initialisation
16     portefeuil_val = [0]
17     time_points = [0]
18
19     # Boucle sur les intervalles de temps
20     for k in range(int(intervals)):
21         tk = k * dt
22         tk1 = (k + 1) * dt
23
24         # Calcul du delta au début de l'intervalle [tk, tk1]
25         d1 = (np.log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * (T - tk)) / (sigma * np.
26             sqrt(T - tk))
27         delta_initial = norm.cdf(d1)
28
29         # Calcul de la quantité d'actif risqué au début de l'intervalle [tk, tk1]
30         quantite_actif_risq_initial = delta_initial
31
32         # Calcul de la valeur du portefeuille à l'instant tk1 en utilisant la
33         # couverture de Black-Scholes
34         portefeuil_val.append(quantite_actif_risq_initial * S0 -
35             black_scholes_call(S0, K, T - tk, r, sigma))
36         time_points.append(tk1)
37
38         # Valeur du portefeuille à l'instant final T
39         portefeuil_val.append(quantite_actif_risq_initial * S0 -
40             black_scholes_call(S0, K, T, r, sigma))
41         time_points.append(T)
42
43     return time_points, portefeuil_val
44
45 # Paramètres du modèle
46 S0 = 100 # Prix initial de l'actif sous-jacent
47 K = 100 # Strike
48 T = 1 # Échéance
49 r = 0.02 # Taux d'intérêt sans risque
50 sigma = 0.2 # Volatilité
```

```

47 # Param3tres de la couverture approximative
48 intervals = 12 # Nombre d'intervalles (par exemple, 12 pour des
    ajustements mensuels)
49 dt = T / intervals # Intervalle de temps entre chaque ajustement
50
51 # Simulation de la valeur du portefeuille
52 time_points, portfeuille_val = simul_val_portf(S0, K, T, r, sigma,
    intervals, dt)
53
54 # Tracer du graphique
55 plt.figure(figsize=(8, 6))
56 plt.plot(time_points, portfeuille_val, label='Valeur du portefeuille')
57 plt.scatter([0, T], [portfeuille_val[0], portfeuille_val[-1]], color='red',
    marker='o', label='D3but et fin')
58 plt.xlabel('Temps (annees)')
59 plt.ylabel('Valeur du portefeuille')
60 plt.title('Simulation de la valeur du portefeuille avec couverture
    approximative')
61 plt.legend()
62 plt.grid(True)
63 plt.show()
64

```

Listing 4 – Couverture approximative d'une option

- [1] Rose-Anne Dana and Monique Jeanblanc-Picqué. Marchés financiers en temps continu : valorisation et équilibre. *(No Title)*, 1994.
- [2] Nicole El Karoui and Emmanuel Gobet. Les outils stochastiques des marchés financiers. *Editions de l'école polytechnique*, 2011.
- [3] Monique Jeanblanc and Thomas Simon. Eléments de calcul stochastique. *IRBID, septembre*, 2005.
- [4] Ioannis Karatzas, Steven E Shreve, I Karatzas, and Steven E Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer, 1998.
- [5] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. *(No Title)*, 1997.
- [6] Jean-François Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer, 2013.
- [7] Nicolas Privault. *Stochastic finance : An introduction with market examples*. CRC Press, 2013.
- [8] ELIE Romuald and Idris KHARROUBI. Calcul stochastique appliqué à la finance. *ENSAE, Avril*, 2006.
- [9] Fabrice Douglas Rouah. Four derivations of the black scholes pde. *Mathematical finance notes*. <http://www.frouah.com/pages/finmath.html>. Accessed July, 2020.