UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
OPTION : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Thème :

Optimisation des coûts de transport à l'aide de la programmation linéaire

Présenté par :

FATOU DIEME

Sous la direction de : **Moussa FALL**

Sous la supervision de : **Edouard DIOUF**

Soutenu publiquement le 28 /10 / 2023 devant le jury composé de :

Mouhamadou Samsidy GOUDIABY	Professeur Assimilé	Président du Jury	UASZ
Edouard DIOUF	Professeur Assimilé	Superviseur	UASZ
Timack NGOM	Maître de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Moussa FALL	Maître de Conférences Titulaire	Directeur	UASZ

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Allah le Tout Puissant pour toute la volonté et le courage qu'Il m'a donné pour l'achèvement de ce travail.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire, Dr Moussa FALL pour avoir accepté de diriger ce travail. En plus de ses conseils et de ses suggestions, j'ai toujours bénéficié de ses encouragements et de sa disponibilité. Qu'il trouve ici, le témoignage de ma parfaite et profonde gratitude.

J'exprime ma gratitude envers le président du jury, le professeur Mouhamadou S. GOUDIABY d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire et au professeur Edouard DIOUF d'avoir supervisé ce travail. J'exprime aussi ma gratitude envers le Dr. Timack NGOM, qui a bien accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier l'Université Assane SECK de Ziguinchor, l'UFR des Sciences et Technologies, le Département de Mathématiques ainsi que tous les professeurs qui nous ont initié et donné les bases de l'étude mathématique pour exceller dans ce domaine.

Mes plus vifs remerciements à ma très chère mère Khady SAGNA, mon très cher père Ibrahima DIEME, pour tout le soutien qu'ils n'ont cessé de m'apporter.

Je remercie également mes anciens, Awa BARRY, Aziz MANGA, Fatou DIENG, Moussa DIATTA, Lala DIEME, Diénaba SAMB pour leur soutien.

J'aimerais remercier tous mes condisciples de master de maths pures et appliquées Bamba SECK, Boubacar BALDE, Serge Richard MENDY, Habibe CISS, Alioune B WADE, Mamadou DIALLO, Malick SAGNA, Malick FAYE, Abdourahmane DIALLO, Thierno Amadou DIALLO, Christ Jesus BASSE, Lamine MANE, Serigne Saliou DIONE, Mouhamed Fadel AÏDARA, Papa Aly CISSE, Serigne Saliou DIALLO, Steven Mark Diop, Omar DIOP, Pathé BA, Abdoulaye DIOUF, Ibrahima TRAORE ainsi que mes deux très chères sœurs Marie FAYE et Ramatoulaye DIALLO .

Enfin, toute ma reconnaissance à mes sœurs (Mariama DIEME, Aïssatou DIEME, Salimata DIEME (Mme SONKO), Aminata DIEME,Jeanne d'Arc DIEME, Adama SANE, Marietou DIED-

HIOU, Seynabou DIEDHIOU, Binta TALL,...), à mes frères (Mamadou L DIEME, Famara DIEME , Elhadji Omar DIEME, Adnane DIEME, Sidya DIEME, Ousmane DIEME, Ibrahima Solo DIEME (Tonton), Bourama DIEDHIOU, Moussa DIALLO, Ibrahima MANE...), à mes papas (Fodé DIEME, Cherif DIEME, Becaye DIEME...).

J'exprime aussi ma reconnaissance envers tous mes enseignants de l'école primaire, mes professeurs de mathématiques du moyen et du secondaire (Mr Abba SADIO) ainsi que ceux de l'Unversité Dakar Bourguiba particulièrement Mr Chérif TOURE .
Merci à vous !

Dédicace

Je dédie ce travail.

À la mémoire de tous les membres de ma famille qui nous ont quittés.

À mes défunts grands parents paternels Banna SANE et Landing DIEME .

À mes défuntes grandes sœurs Diénéba DIEME et Salimata DIEME .

À mon défunt oncle Aliou DIEME et à toute sa famille.

À mes grands parents maternels Binta SANE et Elhadji Omar SAGNA .

À mon oncle Ibou SANE.

À mon oncle Malick DIEDHIOU.

À ma tante Bintou DIEDHIOU.

À ma tante Yacine SAGNA.

À ma tante Fatou SAGNA.

À ma tante Mariama SAGNA.

À ma tante Amy SAGNA.

À la famille MANSALY.

À tous mes amis, plus particulièrement à

Abibatou GUEYE, Aïssatou DJIBA, Aminata SANE, Marguerite DIATTA, Germaine MANSALY,

Fanta GAYE, Diarra DIEDHIOU, Nicka MENDY, Ankyle DIATTA, Abdoulaye DIALLO,...

À toute la promotion de M.P.C.I de l'Université Dakar Bourguiba (UDB).

À tous mes frères et sœurs en ALLAH.

Sommaire

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les méthodes de programmation linéaire pour résoudre les problèmes de transport classiques. Nous présentons d'une part, les méthodes de programmation linéaire à mettre en œuvre pour optimiser les coûts de transport et d'autre part, nous présentons la formulation d'un problème de transport et son dual ainsi que le tableau de transport. Nous appliquons sur ce tableau de transport la méthode du Coin Nord-Ouest et la Méthode du Coût Minimum pour déterminer une solution de base réalisable et ensuite utiliser la méthode des coûts duaux pour trouver une solution optimale. En fin, nous utilisons le solveur d'excel pour résoudre les problèmes de transport classiques.

Introduction générale

Le transport de marchandises représente une des plus importantes activités économiques dans le pays et dans le monde. Il joue un rôle primordial dans les entreprises, c'est le moyen de déplacement des marchandises. Il permet l'acheminement des marchandises des lieux de production aux lieux de transformation puis des lieux de transformation vers les lieux de consommation.
De nos jours, le problème de transport occupe une place importante dans la vie économique de notre société. Historiquement, les problèmes de transport les plus connus sont le problème du voyageur de commerce et le problème du postier chinois (voir [4]). Le problème de tournées de véhicules est la combinaison de plusieurs problèmes de voyageur de commerce. Il a fait l'objet de nombreux travaux et classifications de ses variantes dans la littérature (voir[10]).
Dans ce mémoire, la variante des problèmes de transport étudiés concerne la catégorie des problèmes de transport classiques.
La question économique relative aux transports se limitait à certains problèmes tel que la gestion de transport. On cite parmi ces problèmes, celui de l'optimisation des coûts de transport.
Divers problèmes de planification opérationnelle des problèmes de transport (transport, affectation) sont résolus par des méthodes mathématiques (voir [12]). La méthode de programmation linéaire est utilisée pour modéliser la plupart de ces problèmes de transport. Le but de ce mémoire est de présenter des méthodes de formulation et de résolution de cette catégorie de problèmes de transport par les techniques de la programmation linéaire et le logiciel adapté, le solveur d'excel sera utilisé pour modéliser et résoudre ce type de problème.
Pour tenter de mener à bien notre travail, ce mémoire est décomposé en trois chapitres :
Le premier chapitre sera consacré aux concepts de base de la programmation linéaire.
Le deuxième chapitre sera focalisé sur les concepts de base des problèmes de transport.
Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de résolution des problèmes de transport.
Enfin, nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de la programmation linéaire nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire.

1.1 Notion de bases de la programmation linéaire

La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes.
La programmation linéaire peut être définie comme étant une méthode qui permet d'allouer de façon optimale des ressources disponibles en quantités limitées à des activités compétitrices.
En mathématiques, les problèmes de programmation linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires.
À partir de l'énoncé du problème qui est donné en langage naturel, il faut obtenir sa formulation mathématique : c'est la phase de modélisation.

1.1.1 Modélisation d'un programme linéaire

La modélisation d'un problème de programmation linéaire consiste à identifier :

— **les variables de décision** : une variable (ou inconnue) de décision est toute quantité utilisée à la résolution du problème, et dont on doit déterminer sa valeur. Si le probléme contient n variables de décision, on les note x_j, où $j = 1, \ldots, n$.

— **La fonction objectif** : on appelle fonction objectif, l'expression qui modélise la quantité à optimiser en fonction des n variables de décision du problème. La forme générale d'une fonction objectif est :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n.$$

Le nombre c_j est le coefficient de contribution de la variable x_j dans la fonction objectif.

— **Les contraintes** : on appelle contrainte, toute relation limitant le choix des valeurs possibles pour une variable ou des variables. La forme générale d'une contrainte est :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \leq, =, \geq b_i, \text{ où } i = 1, \ldots, m.$$

Les nombres a_{ij} et b_i sont des constantes réelles. L'entier naturel m est le nombre de contraintes du programme linéaire.

Toutes les variables de décision satisfont à la contrainte de positivité : $x_j \geq 0 \ \forall j = 1, 2, \ldots, n$.
La forme générale d'un problème de programmation linéaire que nous noterons (**PL**) est la suivante :

$$\begin{cases} Optimiser\, Z(x_1 \ldots x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Voici un exemple de modélisation d'un programme linéaire.

Exemple 1.1.1 *Une usine fabrique* 2 *pièces* P_1 *et* P_2 *usinées dans deux ateliers* A_1 *et* A_2*. Les temps d'usinage sont :*

— *pour* P_1 *: de* 3 *heures dans l'atelier* A_1 *et de* 6 *heures dans l'atelier* A_2*.*
— *Pour* P_2 *: de* 4 *heures dans l'atelier* A_1 *et de* 3 *heures dans l'atelier* A_2*.*
— *Le temps de disponibilité hebdomadaire de l'atelier* A_1 *est de* 160 *heures et celui de l'atelier* A_2 *est de* 180 *heures.*

La marge bénéficiaire est de 12 *UM (Unité Monétaire) pour une pièce* P_1 *et* 10 *UM pour une pièce* P_2 *(voir [8]).*
L'objectif est de déterminer la production optimale pour maximiser le bénéfice.

On commence d'abord par établir le tableau technologique :

► **Tableau technologique**

	Pièce P_1	Pièce P_2	Disponibilté
A_1	3	4	160
A_2	6	3	180
Bénéfice	12	10	

▶ **Choix des variables de décision :** on a deux variables

x_1= nombre de pièces P_1 à fabriquer.
x_2= nombre de pièces P_2 à fabriquer.

▶ **Définition des contraintes :** on a deux types de contraintes :

- **De disponibilité des ateliers**

$$A_1 : 3x_1 + 4x_2 \leq 160 \qquad et \qquad A_2 : 6x_1 + 3x_2 \leq 180.$$

- **De positivité des variables de décisions**

$$x_1 \geq 0 \qquad et \qquad x_2 \geq 0.$$

▶ **Fonction économique :** la fonction économique est définie par :

$$Z = 12x_1 + 10x_2.$$

▶ **Objetif :** maximiser la fonction Z. On le note :

$$\max Z = 12x_1 + 10x_2.$$

▶ **Programme linéaire (PL) :** le système obtenu est appelé programme linéaire (**PL**) sa formulation mathématique est la suivante :

$$\begin{cases} \max Z = 12x_1 + 10x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.1.2 Les formes d'écriture d'un programme linéaire

On donne ici trois formes d'écriture d'un programme linéaire.

Définition 1.1.1 ***(Forme canonique)*** *Un programme linéaire est sous forme canonique lorsque toutes ses variables sont non-négatives et toutes ses contraintes sont des inégalités du type :* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$*. Le programme linéaire écrit sous forme canonique est de la forme :*

$$\begin{cases} Optimiser\ Z(x_1 \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

– Si une contrainte est de la forme $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, on la multiplie par -1.
– Si une variable x_j est négative, on pose $x'_j = -x_j$.
– Si une variable x_j est quelconque, on pose $x_j = x_j^+ - x_j^-$ avec $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$ et vérifiant la condition d'exclusion $x_j^+ x_j^- = 0$.

Définition 1.1.2 ***(Forme standard)*** *Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives (voir[9]).*
À partir de la forme canonique, on ajoute une variable d'écart x_{n+i} *à chaque contrainte numéro* i *des* m *contraintes. Le programme linéaire sous forme standard est de la forme :*

$$\begin{cases} Optimiser\ Z(x_1 \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+m. \end{cases}$$

De l'écriture canonique, on peut obtenir facilement l'écritue matricielle d'un programme linéaire :

Définition 1.1.3 *Soit le programme linéaire écrit sous forme canonique*

$$\begin{cases} Optimiser\ Z(x_1 \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables, $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur coût ou profit associé aux variables et $b \in \mathbb{R}^m$ est le second membre des contraintes et $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est la matrice des contraintes.
L'écriture matricielle d'un programme linéaire est :

$$\begin{cases} \text{Optimiser } Z(x) = c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

1.1.3 Résolution d'un programme linéaire

1.1.3.1 Domaine réalisable

Définition 1.1.4 ***(Région réalisable)*** *La région réalisable ou domaine réalisable est l'ensemble des points qui satisfont aux contraintes du problème (voir[14])*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, \ x \geq 0\}.$$

Définition 1.1.5 ***(Solution admissible ou réalisable)*** *Un élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une solution réalisable si x satisfait à l'ensemble des contraintes du programme linéaire c'est-à-dire si $x \in \mathcal{D}$ (voir[14]).*

Définition 1.1.6 ***(Solution optimale)*** *Une solution réalisable x^* de la fonction économique $Z(x)$ est :*

- *un minimum Si $Z(x^*) \leq Z(x) \ \forall x \in \mathcal{D}$;*
- *un maximum Si $Z(x^*) \geq Z(x) \ \forall x \in \mathcal{D}$.*

On dit que la fonction Z est optimale en x^*. Notons que l'optimum x^* n'est pas forcément unique (voir[14]).
Pour trouver la solution optimale, on utilise des méthodes de résoltuion que nous présentons dans la sous-section suivante.

1.1.3.2 Méthodes de résolution

Il existe plusieurs méthodes de résolution d'un programme linéaire parmi lesquelles on peut citer :

- la méthode graphique dans le cas de deux variables qui utlisent une représentation graphique du domaine réalisable.
- La méthode du simplexe et dual simplexe. Le simplexe est une méthode itérative qui permet de trouver la solution optimale à un nombre fini d'itérations.
- La méthode de séparation et évaluation progressive et des coupes de GOMORY.
- L'utilisation de logiciels comme le solveur d'excel, le PHP Simplex, Lindo et CPLEX.

À partir d'un programme linéaire appelé primal, on peut définir un autre programme linéaire appelé dual par une théorie appelée la dualité.

1.2 La dualité dans la programmation linéaire

1.2.1 Introduction à la dualité

La dualité, c'est la théorie qui nous permet de trouver avec confiance une solution optimale d'un programme linéaire. Si on a une solution réalisable qui n'est pas optimale, la dualité nous donne la capacité de savoir pourquoi cela n'est pas optimale. C'est possible de trouver une solution optimale, et vérifier que c'est optimale, sans la dualité.
Pour comprendre comment fonctionnent les logiciels, il faut comprendre les concepts de la dualité. Pour une utlilisation (éventuelle) plus approfondie des outils et méthodes d'optimisation, il faut comprendre ces concepts. L'analyse de sensibilité : la dualité nous permet d'acceder à beaucoup d'informations sur des effets éventuels des changements des données d'un programme linéaire, sans que nous soyons obligés de le résoudre à nouveau.
Chaque programme linéaire peut être considéré comme un problème primal.
Il y'a un autre programme linéaire associé avec le primal, uniquement défini par celui-là. Ce programme linéaire-ci est le problème dual.
Ces deux programmes sont toujours symétriques, dans les sens suivants (entre autres) :

- il y'a une contrainte duale pour chaque variable primale, et une variable duale pour chaque contrainte primale.
- Les coefficients de la fonction objectif des variables primales deviennent les côtés droits des contraintes duales, et les cotés droits des contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction objectif des variables duales.
- Le dual du dual est le primal.

Ainsi, on peut maintenant donner la formulation du problème dual.

1.2.2 Formulation du problème dual

Définition 1.2.1 *Soit le programme linéaire primal écrit sous forme matricielle*

$$\begin{cases} Maximiser\, Z(x) = c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Le programme linéaire dual, associé au programme linéaire primal est

$$\begin{cases} Minimiser\, W(y) = b^t y \\ A^t y \geq c \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Le vecteur $y = (y_1, \dots y_m)^t$ est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ des variables du dual.

Exemple 1.2.1 *Soit le problème (le **PL** précédent) suivant :*
le problème primal est :

$$\max Z = 12x_1 + 10x_2$$

$$sous \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Le problème dual est :

$$\min Z = 160y_1 + 180y_2$$

$$sous \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \geq 12) \\ 4y_1 + 3y_2 \geq 10 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.2.3 Relation entre le primal et le dual

On donne quelques théorèmes sur la dualité qui lient le primal et le dual.

Théorème 1.2.1 ***(Dualité faible)*** *Soit le programme linéaire primal*

$$\begin{cases} Maximiser\, Z(x) = c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

et son dual

$$\begin{cases} Minimiser\, W(y) = b^t y \\ A^t y \geq c \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Si x est une solution réalisable du problème primal, et y une solution réalisable du problème dual, alors nécessairement

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

En particulier, si $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$, alors x est une solution optimale du primal, et y est solution optimale du dual.

Preuve 1.2.1 *(Voir [14]).*

La dualité faible nous permet d'énoncer le théorème de la dualité forte suivant :

Théorème 1.2.2 ***(Dualité forte)*** *Le problème primal possède une solution optimale $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, si et seulement si le problème dual possède une solution optimale $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ dans ce cas, on a necéssairement :*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

.

a) Si l'un des problèmes primal ou dual admet une solution, alors l'autre problème admet aussi une solution.

b) Si l'un des problèmes primal ou dual n'admet pas une solution, alors l'autre problème n'admet pas de solution.

Preuve 1.2.2 *(Voir [14]).*

Du théorème de la dualité forte, on déduit le théorème des écarts complémentaires suivant :

Théorème 1.2.3 ***(Théorème des écarts complémentaires)*** *Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_m)$ deux solutions réalisables respectivement du problème primal et du problème dual. Une condition nécessaire et suffisante pour que x et y soient optimales simultanément est que :*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}\,,\ \textit{si}\ x_j > 0,\ \textit{alors}\ \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i = c_j$$
$$\textit{et}$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}\,,\ \textit{si}\ y_i > 0,\ \textit{alors}\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i.$$

Preuve 1.2.3 *(Voir [14]).*

Corollaire 1.2.1 ***(condition nécessaire et suffisante d'optimalité)*** *L'égalité des fonctions économiques du primal et du dual est donc une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour des solutions admissibles des deux problèmes.*

1.2.4 Interprétation économique de la dualité

Un programme linéaire a une interprétation économique très large :

— Sans ressource, le profit serait nul. D'où l'idée d'essayer d'évaluer la contribution de chaque ressource au profit observé. Dans ce contexte, les

$$y_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m \text{ (voir [14])};$$

représentent les valeurs unitaires des ressources i : y_i est la mesure de la contribution d'une unité de i au profit. C'est donc aussi le prix auquel on évalue la ressource i (prix auquel on serait prêt à vendre la ressource au lieu de l'utiliser).

— Un système de prix $(y_1 \ldots y_n)$ (auxquels on serait prêt à vendre nos ressources) pour être acceptable doit nous compenser pour le profit qu'on aurait pu faire en utilisant ces ressources. Donc, il faut que :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ce qu'on interprète aussi comme le fait que la valeur des ingrédients doit justifier entièrement le profit attribué à chaque produit.

— Enfin, l'acheteur de nos ressources veillera à minimiser le coût total d'achat

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Chapitre 2

Généralité sur les problèmes de transport

2.1 Positionnement du problème de transport

Les problèmes de transport (PT) sont des problèmes de programmation linéaire associant des producteurs et des consommateurs. Il s'agit d'un type de problème de programmation linéaire qui peut être énoncé comme suit :
Comment transporter aux moindres coûts entre m origines $X_i = \{x_1, \ldots, x_m\}$ et n destinations $Y_j = \{y_1, \ldots, y_n\}$, les disponibilités $a_i (i = 1, \ldots, m)$ existantes aux origines $X_i (i = 1, \ldots, m)$, afin de satisfaire les demandes $b_j (j = 1, \ldots, n)$ des destinations $Y_j (j = 1, \ldots, n)$ étant données $m \times n$ coûts de transport c_{ij} ?
Ainsi, le problème de transport peut être défini comme l'action de transporter des marchandises ou des produits fabriqués par m origines (ou usines) vers n destinations (ou clients), d'une manière à ce que le coût total de transport soit minimal. Donc, la résolution d'un problème de transport consiste à organiser le transport de façon à minimiser le coût total de transport (voir[1]). Les problèmes de transport s'inscrivent dans le cadre des problèmes de programmation linéaire en nombres entiers et ont une structure particulière que l'on peut exploiter dans la résolution. On peut les résoudre comme d'habitude par un simplexe, mais on peut aussi les résoudre plus simplement et en utilisant des méthodes plus éfficaces.

2.2 Modélisation d'un problème de transport

Un problème de transport se modélise de la même façon qu'un programme linéaire standard. Supposons qu'une entreprise ait m entrepôts et n points de vente, un seul produit doit être expédié des entrepôts aux points de vente. Chaque entrepôt (origine) a un niveau d'approvisionnement donné (disponibilité), et chaque point de vente (destination) a un niveau de demande donné. On nous donne également le coût de transport entre chaque paire d'entrepôt et de destination, telles que :

— la disponibilité de chaque entrepôt i est : a_i unité, où $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

— La demande de chaque destination j est : b_j unité, où $j = 1, 2, 3 \ldots, n$.

— Le coût de transport d'une unité du produit de l'entrepôt i à la destination j est égale c_{ij} unité. Où $i = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ et $j = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ le coût total d'une expédition est linéaire en taille d'expédition.

Pour modéliser un problème de transport, il faut d'abord définir :

► **Variables de décision** : les variables du modèle de programmation linéaire **(PL)** du problème de transport sont des entiers naturels représentant des unités transportées d'une source vers une destination. Les variables de décision sont les suivantes :
x_{ij} est la quantité à transporter de la source i vers la destination j, où $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ et $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

► **Fonction objectif** : le problème consiste à déterminer les quantités x_{ij} à transporter de façon que le coût total de transport noté CT soit minimal, où

$$CT = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

► **Les contraintes** : les contraintes sont les conditions qui obligent à satisfaire la demande et épuiser la disponibilité. Dans un problème de transport, il existe une contrainte pour chaque sommet.
Notons a_i la capacité d'une source i (disponibilité) et b_j désigne le besoin d'une destination j (demande).
Les contraintes sont :

— La disponibilité à chaque source i doit être épuisée : $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, 3, \ldots, m.$

— La demande à chaque destination j doit être satisfaite : $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots, n.$

— La non négativité des quantités : $x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$

La modélisation nous permet de donner la forme générale d'un problème de transport (PT).

2.2.1 Formulation mathématique d'un PT

Avec les notations ci-dessus, la forme générale d'un (PT) est :

$$\begin{cases} \min Z = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \sum\limits_{j}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,3,\dots,m \quad \text{(offre)} \\ \sum\limits_{i}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,3,\dots,n \quad \text{(demande)} \\ a_i \geq 0; \ b_j \geq 0, \quad i = 1,2,3,\dots,m \ et \ j = 1,2,3,\dots n \\ x_{ij} \geq 0; \quad i = 1,2,3,\dots,m \ et \ j = 1,2,3,\dots n. \end{cases}$$

Il s'agit d'un programme linéaire avec mn variables de décision, $m+n$ contraintes fonctionnelles et mn contraintes non négatives, où

m : Nombre de sources.

n : Nombre de destinations.

a_i : Disponibilité de la $i^{\text{ème}}$ source.

b_j : Demande de la $j^{\text{ème}}$ destination.

c_{ij} : Coût unitaire de transport de la i$^{\text{ème}}$ source à la $j^{\text{ème}}$ destination .

x_{ij} : Quantité transportée de la $i^{\text{ème}}$ source à la $j^{\text{ème}}$ destination.

Proposition 2.2.1 *(voir [11]) Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution réalisable au problème de transport est :*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Preuve 2.2.1 *Si x est une solution qui vérifie les contraintes, on a :*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \Longrightarrow \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \Longrightarrow \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Ceci implique,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Inversement, si
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = T.$$
Posons,
$$x_{i,j} = \frac{a_i b_j}{T} \geq 0.$$
Montrons que ce choix de x vérifie les contraintes. En effet :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = a_i \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j}{T} = a_i;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{m} a_i b_j = b_j \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i}{T} = b_j.$$

De plus, l'ensemble des solutions réalisables est borné. Il suffit d'observer que, pour une paire d'indice i et j,
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq x_{ij} \leq a_i.$$
Par conséquent, le problème admet une solution optimale.

L'ensemble des contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad et \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

représente $m + n$ équations dans $m \times n$ variables non négatives.

Exemple 2.2.1 *Une entreprise recherche un plan d'acheminement à coût minimal de ses laboratoires aux centres de distribution. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'unités disponibles de chaque laboratoire*

Destinations	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Deamndes	120	130	145	125	140

TABLEAU 2.1 – Tableau des demandes des laboratoires

Les offres des laboratoires sont donnés dans le tableau suivant :

Origines	L_1	L_2	L_3
Offres	240	160	260

TABLEAU 2.2 – Tableau des offres des laboratoires

Les coûts unitaires de transport des origines ($\mathcal{O}$) vers les destinations ($\mathcal{D}$) sont donnés dans le tableau suivant :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
L_1	1	8	1	5	4
L_2	5	5	3	6	7
L_3	2	9	5	9	8

TABLEAU 2.3 – Le tableau des coûts unitaires de transport

On constate que la quantité totale disponible dans les laboratoires coïncide avec la demande totale dans les différents centres de distribution, soit 660 tonnes dans chaque cas.
Ainsi, pour satisfaire la demande des centres, chaque laboratoire devra expédier toutes les unités dont il dispose et chaque centre recevra exactement le nombre d'unités requise pour satisfaire la totalité de sa demande.

Modélisation du problème de transport de l'exemple

► x_{ij}= quantité (nombre unités) à transporter du laboratoire L_i au centre C_j, où $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

► L'objectif consiste à minimiser le coût total de transport Z, où

$$\begin{aligned} Z = \; & 1x_{11} + 8x_{12} + 1x_{13} + 5x_{14} + 4x_{15} + 5x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} \\ & +6x_{24} + 7x_{25} + 2x_{31} + 9x_{32} + 5x_{33} + 9x_{34} + 8x_{35}. \end{aligned}$$

Les contraintes technologiques exigent que chaque laboratoire expédie tout ce qui est disponible et que chaque centre de distribution reçoive exactement la quantité demandée :

$$
\text{sous contraintes}
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=240\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=160\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=260 \quad \text{(dues aux origines)}\\
et\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}=120\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}=130\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}=145\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}=125\\
x_{15}+x_{25}+x_{35}=140. \quad \text{(dues aux destinations)}
\end{cases}
$$

2.2.2 Propriétés de la matrice de PT

Le problème de transport suivant

$$
\begin{cases}
\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\\
\sum_{j}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,2,3,\ldots,m \quad \text{(offre)}\\
\sum_{i}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,2,3,\ldots,n \quad \text{(demande)}\\
a_i \geq 0;\ b_j \geq 0, \quad i=1,2,3,\ldots,m \text{ et } j=1,2,3,\ldots n\\
x_{ij} \geq 0; \quad i=1,2,3,\ldots,m \text{ et } j=1,2,3,\ldots n,
\end{cases}
$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$
\begin{cases}
\min Z = c^t x\\
Ax = d\\
x \geq 0,
\end{cases}
$$

où

► $x=(x_{11},\ldots,x_{1n},x_{21}\ldots x_{2n},\ldots,x_{1m}\ldots x_{mn})$ est le vecteur des variables de décision.

► $c=(c_{11},\ldots,c_{1n},c_{21}\ldots c_{2n},\ldots,c_{1m}\ldots c_{mn})$.

► A est une matrice de type $(n+m,nm)$ c'est-à-dire à $n+m$ lignes et nm colonnes.

► $d=(a_1,\ldots a_m,b_1,\ldots b_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Définition 2.2.1 *Soit un problème de transport écrit sous forme matricielle*

$$\begin{cases} minZ = c^t x \\ Ax = d \\ x \geq 0. \end{cases}$$

La matrice A associée à l'écriture matricielle du probléme de transport est appelée matrice de transport c'est une matrice à $m+n$ lignes et nm colonnes.

Illustrons la matrice A pour $m = 2$ et $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La somme des m premières lignes de la matrice A donne :

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_m = (1, 1, \ldots, 1).$$

Aussi, la somme des lignes $m+1$ à $m+n$ donne

$$L_{m+1} + L_{m+2} + \ldots + L_{m+n} = (1, 1, \ldots, 1).$$

Si on combine ces deux résultats, on obtient

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_m - L_{m+1} - L_{m+2} - \cdots - L_{m+n} = 0.$$

Ceci implique que $rg(A) < m + n$.
La matrice A du problème de transport a les propriétés suivantes :

Proposition 2.2.2 *On a les propriétés suivantes pour la matrice A.*

1) Le rang de A est égal à $m + n - 1$.

2) Chaque colonne contient exactement deux entrées non nulles et qui sont égales à 1.

3) Il y'a toujours une ligne de trop que l'on peut éliminer.

4) Il y'a exactement $m + n - 1$ variables de base réalisables.

Preuve 2.2.2 *Donnons une idée de la preuve que le rang de A est $m + n - 1$. En renumérotant si nécessaire, il suffit de montrer que les lignes $L_2, \ldots, L_n, L_{n+1}, L_{n+2}, \ldots, L_{n+m}$ sont linéairement indépendantes. Pour cela, considérons la combinaison*

$$\lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 \ldots + \lambda_n L_n + \lambda_{n+1} L_{n+1} + \lambda_{n+2} L_{n+2}, \cdots, \lambda_{n+m} L_{n+m} = 0.$$

À cause de la structure particulière de la matrice A, ceci implique immédiatement que

$$\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \ldots \lambda_{n+m} = 0.$$

Par la suite, on aura les relations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_2 + \lambda_{m+1} = 0 & \Longrightarrow & \lambda_2 = 0; \\ \lambda_3 + \lambda_{m+1} = 0 & \Longrightarrow & \lambda_3 = 0; \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_m + \lambda_{m+1} = 0 & \Longrightarrow & \lambda_m = 0. \end{array}.$$

Puisque la famille est libre, alors $rg(A) = n + m - 1$.

2.3 Problème de transport non équilibré

Définition 2.3.1 *Le problème de transport PT*

$$\begin{cases} \min Z = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum\limits_{j}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, m \quad \textit{(offre)} \\ \sum\limits_{i}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, 2, 3, \ldots, n \quad \textit{(demande)} \\ a_i \geq 0; \ b_j \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m \textit{ et } j = 1, 2, 3, \ldots n \\ x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m \textit{ et } j = 1, 2, 3, \ldots n. \end{cases}$$

— *Le PT est dit problème équilibré si*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

— *Le PT est dit non équlibré si*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Un problème de transport non équlibré est connu comme un problème de transport déséquilibré. On a deux cas de déséquilibre :

1. L'offre est supérieur à la demande, on a :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

2. L'offre est inférieur à la demande, on a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

On pourra se ramener au cas d'équilibre de la manière suivante :

— Si

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

il suffit d'introduire une destination fictive y_{n+1} de coût de transport égal à zéro ($c_{i,n+1} = 0$) entre x_i et y_{n+1}, $(\, i = 1, \ldots, m)$ dont la demande :

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

— Si

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

il suffit d'introduire une source fictive x_{n+1} de coût de transport égal à zéro ($c_{m+1,j} = 0$) entre x_{m+1} et y_j, $\;(j = 1, \ldots, n)$ dont la disponibilité est

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

2.4 Dual d'un problème de transport

Un probléme de transport est de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
\min Z = c^t x & \Longleftrightarrow & \min Z = \sum\limits_{i,j} c_{ij} x_{ij} & & \\
A_1 x = a & \Longleftrightarrow & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & & \forall i = 1, \ldots, m \\
A_2 x = b & \Longleftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & & \forall j = 1, \ldots, n \\
x \geq 0 & \Longleftrightarrow & x_{ij} \quad \geq 0. & &
\end{array}$$

Sous forme compact, ceci s'écrit :

$$\min Z = c^t x$$
$$\begin{bmatrix} A_1 \\ -A_1 \\ A_2 \\ -A_2 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{bmatrix}$$
$$x \geq 0.$$

En utilisant l'équivalence primal-dual on obtient le dual qui s'écrit sous la forme

$$\max Z = a^t u_+ - a^t u_- + b^t \upsilon_+ - b^t \upsilon_-$$
$$\begin{bmatrix} A_1^t & -A_1^t & A_2^t & -A_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \\ \upsilon_+ \\ \upsilon_- \end{bmatrix} \leq c$$
$$u_+, u_-, \upsilon_+, \upsilon_- \geq 0.$$

C'est-à-dire avec $u = u_+ - u_-$ et $\upsilon = \upsilon_+ - \upsilon_-$, on obtient

$$\max Z = a^t u + b^t \upsilon$$
$$A_1^t u + A_2^t \upsilon \leq c$$
$$u, \upsilon \text{ libres .}$$

Or

$$A_1^t u + A_2^t \upsilon \leq c \Longleftrightarrow u_i + \upsilon_j \leq c_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots, m \; et \; \forall j = 1, \ldots, n.$$

Supposons que x soit la solution optimale du problème ; Selon les conditions KKT(Karush Kuhn Tuker), on a :

$$x^t(c - A_1^t u - A_2^t \upsilon) = 0.$$

On obtient les relations

$$u_i + \upsilon_j = c_{ij} \quad \forall x_{ij} \geq 0.$$

Si x est solution de base non dégénérée, on a bien la décomposition $u_i + \upsilon_j = c_{ij}$ pour les indices des variables de base.

2.5 Tableau de transport

Le problème de transport peut être décrit en utilisant un modèle mathématique de programmation linéaire, et habituellement, il apparaît dans un tableau de transport. Le modèle d'un problème de transport peut être représenté sous forme de tableau concis avec tous les paramètres pertinents. Le tableau de transport (un problème de transport typique est représenté sous forme de matrice standard), où la disponibilité d'approvisionnement (a_i) à chaque source est affichée dans la colonne droite du tableau, et les demandes de destination (b_j) sont affichées dans la ligne inférieure. Chaque cellule représente une voie, le coût de transport unitaire (c_{ij}) est indiqué dans le coin supérieur droit de la cellule, la quantité de matériel transporté est affichée au centre de la cellule, le tableau de transport exprime implicitement les contraintes de l'offre et de la demande et le coût de transport entre chaque source et destination (voir[2]).

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	$\cdots$	D_j	$\cdots$	D_n	a_i
O_1	c_{11} x_{11}	$\vdots$	c_{1j} x_{1j}	$\vdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
O_i	c_{i1} x_{i1}	$\vdots$	c_{ij} x_{ij}	$\vdots$	c_{in} x_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
O_m	c_{m1} x_{m1}	$\vdots$	c_{mj} x_{mj}	$\vdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n	

TABLEAU 2.4 – Tableau de transport

2.6 Réseau de transport

Graphiquement, le problème du transport est souvent visualisé comme un graphe biparti-complet orienté c'est à dire un réseau avec m noeuds sources, n noeuds destinations et un ensemble de $m \times n$ "arcs orientés". Ceci est représenté dans la figure 2.1 (voir[2]) :

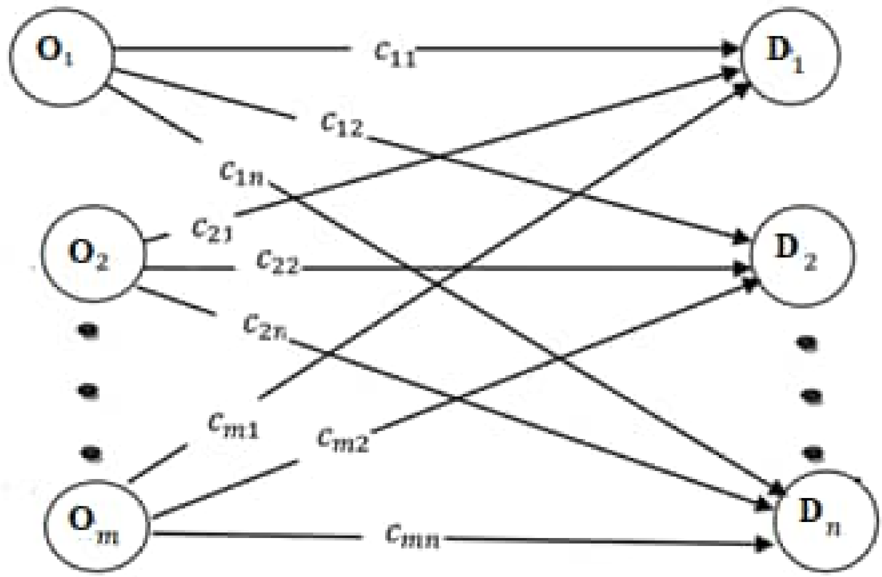

FIGURE 2.1 – Réseau de transport

Dans la figure 2.1, il y a $O_1, O_2, \ldots O_m$ origines (ou sources) et $D_1, D_2, \ldots D_n$ destinations. Les arcs orientés montrent des flux de transport des sources vers les destinations. Chaque destination est liée à chaque source par une flèche.

Le nombre c_{ij} au-dessus de chaque flèche représente le coût du transport sur cette route. Les problèmes avec la structure ci-dessus se posent dans de nombreuses applications. Par exemple, les sources pourraient représenter des entrepôts, des puits,. . . etc, et les destinations pourraient représenter des populations, des clients,...etc.

Chapitre 3

Résolution du problème de transport

Comme dans la méthode du simplexe, la résolution d'un problème de transport se déroule en deux parties :

1. recherche d'une solution de base réalisable ;
2. optimisation de la solution.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter deux méthodes de recherche d'une solution de base réalisable à savoir la méthode du coin nord-ouest et la méthode du coût minimum, ensuite présenter deux méthodes pour la recherche de la solution optimale à savoir la méthode de la distribution modifiée(ou méthode des coûts duaux) et la méthode de la résolution par le solveur excel.

3.1 Structure de la résolution du problème de transport

Considérons un problème de transport impliquant m origines et n destinations. Étant donné que la somme des disponibilités des origines est égale à la somme des demandes des destinations, une solution réalisable existe toujours. La $(m + n)^{\text{ème}}$ contrainte est redondante et peut donc être supprimée. Cela signifie également qu'une solution de base réalisable pour un problème de transport peut avoir au plus $(m + n - 1)$ composants strictement positifs, sinon la solution sera dégénérée.
Il est toujours possible d'assigner une solution réalisable initiale à un problème de transport. De telle sorte que les exigences des destinations soient satisfaites. Cela peut être réalisé soit par une inspection, soit par des règles simples. Nous commençons par imaginer que le tableau de transport est vide, c'est-à-dire initialement tout $x_{ij} = 0$ (voir[5]).

3.1.1 Solution de base réalisable et solution optimale

Définition 3.1.1 *Soit un problème de transport impliquant m origines et n destinations.*

— *On appelle solution de base réalisable une solution vérifiant les contraintes du problème comportant exactement $(m-1)\times(n-1)$ flux nuls.*

— *Si le nombre d'allocations dans une solution de base réalisable est inférieur à $(m+n-1)$, alors cette solution de base est dégénérée.*

Remarque 3.1.1 *La dégénérescence peut être observée soit lors de l'attribution initiale lorsque la première entrée dans une ligne où une colonne satisfait à la fois aux exigences de la ligne et de la colonne ou bien lors de l'application d'une méthode de résolution de problème de transport lorsque les valeurs ajoutées et soustraites sont égales.*
Pour résoudre la dégénérescence, les variables positives sont augmentées par autant de variables à valeur nulle que nécessaire pour compléter les $(m+n-1)$ variables de base.

Définition 3.1.2 *Une solution réalisable (pas nécessairement de base) est considérée optimale si elle minimise le coût total du transport.*

3.1.2 Algorithme général de résolution de problème de transport

Les modèles de transport ne commencent pas à l'origine où toutes les valeurs de décision sont nulles. Ils doivent plutôt recevoir une solution de base réalisable initiale. L'algorithme de résolution d'un problème de transport peut se résumer en étapes suivantes (voir[2]) :
Étape 1 : formuler et configurer le problème sous la forme matricielle ; la formulation du problème de transport est similaire à la formulation du problème de programmation linéaire . Ici, la fonction objectif est le coût total du transport et les contraintes sont l'offre et la demande disponibles à chaque source et chaque destination, respectivement.
Étape 2 : Obtenir une première solution de base réalisable ; cette solution de base initiale peut être obtenue en utilisant l'une des méthodes suivantes :

— Méthode de Coin Nord-Ouest.

— Méthode du Coût Minimum.

La solution obtenue par l'une des méthodes ci-dessus doit satisfaire les conditions suivantes :

i) La solution doit être réalisable, c'est-à-dire qu'elle doit satisfaire toutes les contraintes de l'offre et de la demande.

ii) Le nombre d'attributions positives (les cases allouées) doit être égal à $m+n-1$, où m est le nombre de lignes et n est le nombre de colonnes. La solution qui satisfait les conditions mentionnées ci-dessus est appelée une solution de base non dégénérée.

Étape 3 : Tester la solution de base initiale pour l'optimalité en utilisant la méthode de distribution modifiée.
Si la solution est optimale, l'algorithme s'arrête, sinon on détermine une nouvelle solution améliorée.
Étape 4 : Mise à jour de la solution : on répète l'étape 3 jusqu'à atteindre la solution optimale.

3.1.3 Organigramme de résolution pour le problème de transport

On résume la résolution de problème de transport sous forme d'organigramme suivant (voir[2]) :

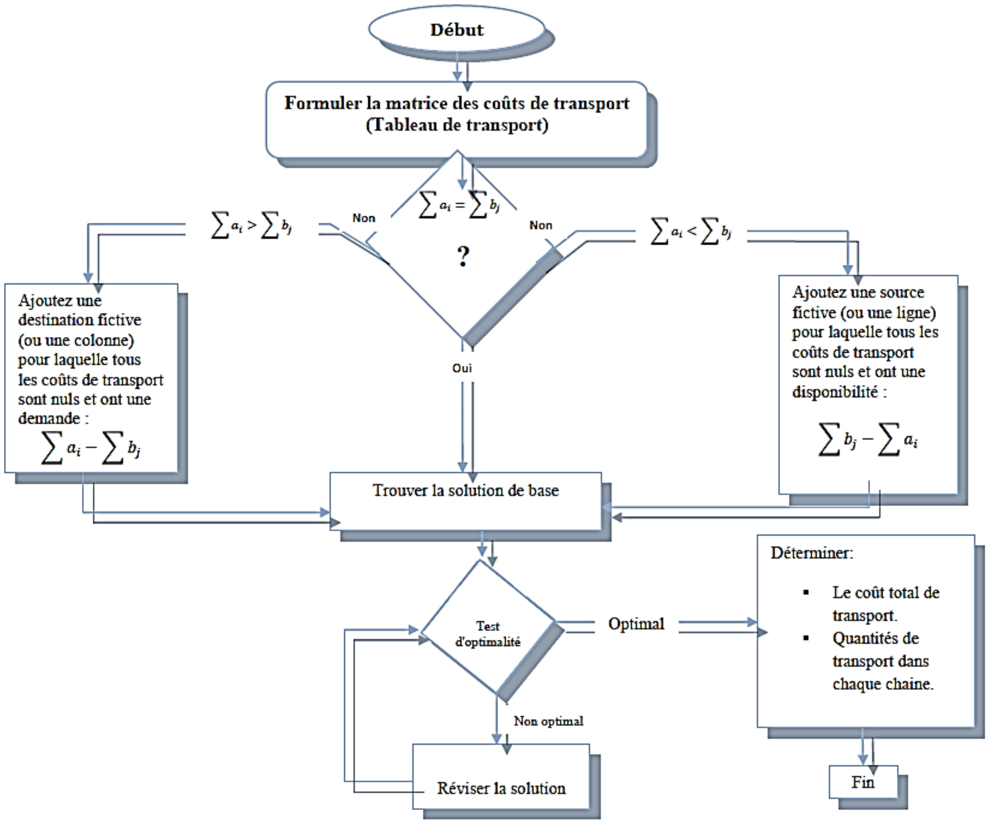

FIGURE 3.1 – Organigrame de résolution le problème de transport

3.2 Détermination d'une solution de base initiale

3.2.1 Méthode du Coin Nord-Ouest

Définition 3.2.1 *La méthode du coin nord-ouest est une méthode facile mais elle n'a pas de sens économique. Puisqu'elle consiste à affecter au coin nord-ouest de chaque grille la quantité maximum possible sans se préoccuper de l'importance du coût (voir[11]).*

Principe de la méthode

Étape 1 : Localiser la cellule $(p; q)$ qui se trouve dans le coin nord-ouest, c'est à-dire en haut à gauche de la partie non-éliminée du tableau de transport.

Étape 2 :

1. Envoyer le maximum d'unités pour la cellule $(p; q)$. Ainsi, x_{pq} est initialisé comme étant le $\min\{a_p; b_q\}$. Ajuster ensuite a_p et b_q, en tenant compte du montant x_{pq} à expédier.
2. Exprimons cette phrase à l'aide d'égalités : $x_{pq} = \min\{a_p; b_q\}$,
$$a'_p = a_p - x_{pq} \quad et \quad b'_p = b_p - x_{pq}.$$
3. Entourer (ou mettre en évidence d'une autre manière) le coût c_{pq}. À la fin de cette étape,
4. Soit a'_p ; soit b'_q, est nul, soient les deux.

Étape 3 :

1. Si $a'_p = 0$ et $b'_q > 0$, cela signifie que l'origine p a été "vidée". Il faut donc éliminer la ligne p du tableau.
2. Si $b'_q = 0$ et $a'_p > 0$, cela signifie que la destination q est entièrement satisfaite et qu'il reste des marchandises dans le dépôt p. Il faut donc éliminer la colonne q du tableau.
3. Si $a'_p = 0$ et $b'_q = 0$, nous nous trouvons dans un cas dégénéré. On élimine alors la ligne p, à moins qu'elle ne soit la seule ligne restante du tableau ; auquel cas il faut éliminer la colonne q.

Étape 4 :

1. S'il reste un total de deux ou plusieurs lignes et colonnes non encore éliminées, reprendre à l'étape 1.
2. S'il ne reste qu'une ligne non éliminée, la solution réalisable de base initiale est déterminée par les cellules entourées (voir[6]).

3.2.2 Méthode du Coût Minimum

Définition 3.2.2 *La méthode du Coût Minimum est une méthode pour calculer une solution de base réalisable d'un problème de transport où les variables de base sont choisies en fonction du coût unitaire du transport. La méthode du coût minimum trouve une meilleure solution de départ en se concentrant sur les coûts de transport les moins chers (voir[5]).*

Principe

Cette méthode ne diffère de la précédente que par le critère appliqué à l'étape (1). Exposée ici, les étapes (2) ; (3) et (4) restant les mêmes (voir[6]).
Étape 1 :
Trouver la cellule $(p; q)$, telle que c_{pq} est le plus petit coût de tout le tableau.
La méthode commence par affecter autant que possible à la case avec le coût unitaire de transport le plus petit. Ensuite, la ligne ou la colonne satisfaite est dépassée et les montants de l'offre et de la demande sont ajustés en conséquence. Si à la fois une ligne et une colonne sont satisfaites simultanément, une seule est décalée, la même que dans la méthode du coin nord-ouest. Ensuite, recherchez la case non décalée avec le coût unitaire le plus petit et répétez le processus jusqu'à ce qu'une ligne ou une colonne exactement soit laissée hors traitement.
La méthode du coût minimum donne en générale une meilleur solution que la méthode du coin nord ouest.

3.3 Détermination de la solution optimale

3.3.1 Méthode des coûts duaux

Définition 3.3.1 *La Méthode des coûts duaux (ou distribution modifiée ou encore des pénalités) est une version modifiée de la méthode de stepping stone dans laquelle les équations mathématiques remplacent les chaînes de substitutions. Cette méthode est plus pratique que stepping stone.*
En appliquant la méthode MODI, nous commençons par une solution initiale obtenue en utilisant les méthodes citées à la section précédente. Ensuite, nous devons calculer une valeur u_i pour chaque ligne i et v_j, pour chaque colonne j dans le tableau de transport (voir[5]).

Les étapes de la méthode de distribution modifiée : (voir[5])

1. Pour calculer les valeurs u_i et v_j pour chaque ligne et chaque colonne, définir les équations : $u_i + v_j = c_{ij}$.
2. Une fois que toutes les équations ont été écrites, définir l'une des deux variables u_i ou v_j à zéro, et résoudre le système d'équations pour toutes les valeurs u_i et v_j .
3. Calculer l'indice d'amélioration $\triangle_{ij}$ pour chaque cellule inutilisée par l'amélioration de la formule : $\triangle_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.
4. transférer la plus grande quantité possible à la cellule qui a $\triangle_{ij}$ le plus négatif en créant un cycle qui satisfait la demande et la disponibilité de chaque rangé.
5. Répéter les étapes 2 à 4 jusqu'à ce qu'il n'y ait pas de $\triangle_{ij}$ négatif.
6. Calculer le coût total en multipliant chaque allocation (x_{ij}) par son spécifique coût (c_{ij}).

3.3.2 Méthode de résolution avec le solveur d'excel

Définition 3.3.2 *Le solveur de excel est un outil d'optimisation très intéressant dans la mesure où il nous permet de gagner énormément de temps et de résoudre des problèmes plus ou moins complexes.*

La résolution par excel d'un modèle linéaire comprend deux parties :

1. La première consiste à créer un fichier excel qui traduise le modèle; il s'agit d'entrer toutes les données numériques pertinentes, puis de relier ces données à l'aide de formules de calcul.
2. La deuxième étape consiste à utiliser l'outil «solveur» pour obtenir une solution optimale.

3.4 Application : Résolution d'un probléme de transport

On utilisera un exemple tiré de (voir[13]).

$\mathcal{D}$ / $\mathcal{O}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Offres
L_1	1	8	1	5	4	240
L_2	5	5	3	6	7	160
L_3	2	9	5	9	8	260
Demandes	120	130	145	125	140	

TABLEAU 3.1 – Résumé des données du PT Sporceau

Dans cet exemple, nous allons :

- appliquer la méthode du coin nord-ouest pour déterminer une solution de base initiale ;
- appliquer la méthode des coûts duaux pour déterminer la solution optimale ;
- utiliser le solveur d'excel pour résoudre et retrouver la solution optimale.

3.4.1 Méthode du coin nord-ouest

Le tableau de transport de l'exemple (du sporcau) est :

$\mathcal{D}$ / $\mathcal{O}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	1	8	1	5	4	240
O_2	5	5	3	6	7	160
O_3	2	9	5	9	8	260
b_j	120	130	145	125	140	660

TABLEAU 3.2

L'offre est égal à la demande : $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 660$. Donc le problème de transport admet une solution.

Itération 1 : Appliquons l'algorithme au tableau 3.2.

Étape 1 : le tableau est composé de trois lignes et de cinq colonnes ; son coin nord-ouest est la cellule $(1; 1)$; x_{11} entre donc dans la base.

Étape 2 :

$$x_{11} = \min\{a_1;\, b_1\} = \min\{240;\ 120\} = 120$$
$$a_1' = a_1 - x_{11} = 240 - 120 = 120$$
$$b_1' = b_1 - x_{11} = 120 - 120 = 0.$$

Étape 3 : $a_1' = 120$ et $b_1' = 0$, on élimine donc la colonne 1.

Étape 4 : Il nous reste trois lignes et quatre colonnes , nous n'avons donc pas terminé.

On obtient le tableau suivant :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	1 120	8	1	5	4	120
O_2	5	5	3	6	7	160
O_3	2	9	5	9	8	260
b_j	0	130	145	125	140	

TABLEAU 3.3

Itération 2 : Appliquons l'algorithme au tableau 3.3.

Étape 1 : le tableau restant se compose des lignes 1, 2 et 3 ainsi que des colonnes 2, 3, 4 et 5 ; son coin nord-ouest est donc la cellule $(1; 2)$.

Étape 2 :

$$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{120; 130\} = 120$$
$$a'_1 = a_1 - x_{12} = 120 - 120 = 0$$
$$b'_1 = b_1 - x_{12} = 130 - 120 = 10.$$

Étape 3 : $a'_1 = 0$ et $b'_1 = 10$, on élimine donc la ligne 1.

Étape 4 : il nous reste deux lignes et quatre colonnes, nous n'avons donc pas terminé.

On obtient le tableau suivant :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	[1] 120	[8] 120	[1]	[5]	[4]	0
O_2	[5]	[5]	[3]	[6]	[7]	160
O_3	[2]	[9]	[5]	[9]	[8]	260
b_j	0	10	145	125	140	

TABLEAU 3.4

Itération 3 : Appliquons l'algorithme au tableau 3.4.

Étape 1 : le tableau restant se compose des lignes 2 et 3 ainsi que des colonnes 2, 3, 4 et 5 ; son coin nord-ouest est donc la cellule (2 ; 2).

Étape 2 :

$$x_{22} = \min\{a_2; b_2\} = \min\{160; 10\} = 10$$
$$a'_1 = a_2 - x_{22} = 160 - 10 = 150$$
$$b'_1 = b_2 - x_{22} = 10 - 10 = 0$$

Étape 3 : $a'_2 = 150$ et $b'_2 = 0$, on élimine donc la colonne 2.

Étape 4 : il nous reste deux lignes et trois colonnes, nous n'avons donc pas terminé.

On obtient tableau suivant :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	1 120	8 120	1	5	4	0
O_2	5	5 10	3	6	7	150
O_3	2	9	5	9	8	260
b_j	0	0	145	125	140	

TABLEAU 3.5

Itération 4 : Appliquons l'algorithme au tableau 3.5.

Étape 1 : le tableau restant se compose de deux lignes et trois colonnes, son coin nord-ouest est donc la cellule $(2; 3)$.

Étape 2 :

$$x_{23} = \min\{a_2; b_3\} = \min\{150; 145\} = 145$$
$$a'_2 = a_2 - x_{23} = 150 - 145 = 5$$
$$b'_3 = b_3 - x_{23} = 145 - 145 = 0$$

Étape 3 : $a'_2 = 5$ et $b'_3 = 0$, on élimine donc la colonne 3.

Étape 4 : il nous reste deux lignes et deux colonnes, nous n'avons donc pas terminé.

On obtient le tableau suivant :

$\mathcal{D}$ / $\mathcal{O}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	1 120	8 120	1	5	4	0
O_2	5	5 10	3 145	6	7	5
O_3	2	9	5	9	8	260
b_j	0	0	0	125	140	

TABLEAU 3.6

Itération 5 : Appliquons l'algorithme au tableau 3.6.

Étape 1 : il ne reste que deux lignes et deux colonnes, son coin nord-ouest est donc la cellule $(2; 4)$.

Étape 2 :

$$x_{24} = \min\{a_2; b_4\} = \min\{5; 125\} = 5$$
$$a_2' = a_2 - x_{24} = 5 - 5 = 0$$
$$b_4' = b_4 - x_{24} = 125 - 5 = 120.$$

Étape 3 : $a_2' = 0$ et $b_4' = 120$, on élimine donc la ligne 2.

Étape 4 : il nous reste donc une lignes et deux colonnes, il faut reprendre la demarche à l'étape (1).

On obtient le tableau suivant :

$\mathcal{D}$ \ $\mathcal{O}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	1 120	8 120	1	5	4	0
O_2	5	5 10	3 145	6 5	7	0
O_3	2	9	5	9	8	260
b_j	0	0	0	120	140	

TABLEAU 3.7

Itération 6 : Appliquons l'algorithme au tableau 3.7.

Étape 1 : il ne reste que la ligne 3 et les colonnes 4 et 5 ; son coin nord-ouest est donc la cellule (3 ; 4).

Étape 2 :

$$x_{34} = \min\{a_3; b_4\} = \min\{250; 120\} = 120$$
$$a'_3 = a_3 - x_{24} = 260 - 120 = 140$$
$$b'_4 = b_4 - x_{24} = 120 - 120 = 0.$$

Étape 3 : $a'_3 = 140$ et $b'_4 = 0$, on élimine donc la colonne 4.

Étape 4 : comme il reste une ligne et une colonne, une autre itération est nécéssaire.

On obtient le tableau suivant :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	1 120	8 120	1	5	4	0
O_2	5	5 10	3 145	6 5	7	0
O_3	2	9	5	9 120	8	140
b_j	0	0	0	0	140	

TABLEAU 3.8

Itération 7 : Appliquons l'algorithme au tableau 3.8.

Étape 1 : il ne reste que la ligne 3 et la colonne 5 ; donc le coin nord-ouest est la cellule $(3; 5)$.

Étape 2 :

$$x_{35} = \min\{a_3; b_5\} = \min\{140; 140\} = 140$$
$$a'_3 = a_3 - x_{24} = 140 - 140 = 0$$
$$b'_5 = b_5 - x_{24} = 140 - 140 = 0.$$

Étape 3 : $a'_3 = 0$ et $b'_4 = 0$, on élimine la ligne 3 et la colonne 5.

Étape 4 : il ne reste plus rien, la solution réalisable de base initiale est trouvée.

On obtient le tableau suivant :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	1 120	8 120	1	5	4	0
O_2	5	5 10	3 145	6 5	7	0
O_3	2	9	5	9 120	8 140	0
b_j	0	0	0	0	0	

TABLEAU 3.9 – Solution réalisable

Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total :

$$
\begin{aligned}
\min Z &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\
&= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} \\
&= 120(1) + 120(8) + 10(5) + 145(3) + 5(6) + 120(9) + 140(8) \\
&= 3875.
\end{aligned}
$$

Il ne s'agit pas encore du coût minimum; il sera déterminé lors de la recherche de la solution réalisable optimale par la méthode des coûts duaux.

3.4.2 Méthode des coûts duaux

Dans cet exemple nous appliquons la méthode de distribution modifiée au problème du tableau [3.2].

Itération 1.

Étape 1 : calculer pour toutes les cellules allouées, $u_i + v_j = c_{ij}$: coût de transport unitaire pour la case (i, j).

$$
\begin{aligned}
x_{11} &: \quad u_1 + v_1 = 1 \\
x_{12} &: \quad u_1 + v_2 = 8 \\
x_{22} &: \quad u_2 + v_2 = 5 \\
x_{23} &: \quad u_2 + v_3 = 3 \\
x_{24} &: \quad u_2 + v_4 = 6 \\
x_{34} &: \quad u_3 + v_4 = 9 \\
x_{35} &: \quad u_3 + v_5 = 8.
\end{aligned}
$$

Étape 2 : on met donc $u_1 = 0$ et on obtient : $v_1 = 1$, $v_2 = 8$, $v_3 = 6$, $v_4 = 9$, $v_5 = 8$, $u_2 = -3$, $u_3 = 0$.

La solution de base et les coûts duaux sont consignés dans le tableau suivant :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	u_i
O_1	[1] 120	[8] 120	[1]	[5]	[4]	0
O_2	[5]	[5] 10	[3] 145	[6] 5	[7]	-3
O_3	[2]	[9]	[5]	[9] 120	[8] 140	0
v_j	1	8	6	9	8	

TABLEAU 3.10

Étape 3 : utilisez la formule des pénalités pour évaluer toutes les cellules vides :

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ij} &= c_{ij} - u_i - v_j \\
\Delta_{13} &= c_{13} - u_1 - v_3 = 1 - 0 - 6 = -5 \\
\Delta_{14} &= c_{14} - u_1 - v_4 = 5 - 0 - 9 = -4 \\
\Delta_{15} &= c_{15} - u_1 - v_5 = 4 - 0 - 8 = -4 \\
\Delta_{21} &= c_{21} - u_2 - v_1 = 5 + 3 - 1 = 7
\end{aligned}
$$

$$\Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 7 + 3 - 8 = 2$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 2 - 0 - 1 = 1$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 0 - 8 = 1$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 5 - 0 - 6 = -1.$$

Étape 4 : on peut améliorer la solution en faisant entrer x_{13} dans la base.

$$x'_{13} = \min\{x_{12}; x_{23}\} = \min\{120; 145\} = 120$$
$$x'_{12} = x_{12} - x'_{13} = 120 - 120 = 0$$
$$x'_{22} = x_{22} - x'_{13} = 10 + 120 = 130$$
$$x'_{23} = x_{23} - x'_{13} = 145 - 120 = 25.$$

La cellule $(1; 3)$ entre dans la base ; la cellule $(1; 2)$ en sort.

Voici le tableau obtenu après le premier changement de base avec les coûts duaux :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	u_i
O_1	1 120	8	1 120	5	4	0
O_2	5	5 130	3 25	6 5	7	2
O_3	2	9	5	9 120	8 140	5
v_j	1	3	1	4	3	

TABLEAU 3.11 – Après l'itération 1

Itération 2.

Les coûts duaux sont déja donnés dans le tabbleau précédent. On passe à l'étape 3.

Étape 3 : calcul des pénalités pour le choix de la cellule entrante

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 - 3 = 5$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 5 - 0 - 4 = 1$$
$$\Delta_{15} = c_{15} - u_1 - v_5 = 4 - 0 - 3 = 1$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 5 - 2 - 1 = 2$$
$$\Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 7 - 2 - 3 = 2$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 2 - 5 - 1 = -4$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 5 - 3 = 1$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 5 - 5 - 1 = -1.$$

Étape 4 : calcul de la valeur de la variable entrante et choix de la cellule sortante

$$x'_{31} = \min\{x_{11}; x_{23}; x_{34}\} = \min\{120; 25; 120\} = 25$$
$$x'_{11} = x_{11} - x'_{31} = 120 - 25 = 95$$
$$x'_{13} = x_{13} - x'_{31} = 120 + 25 = 145$$
$$x'_{23} = x_{23} - x'_{31} = 25 - 25 = 0$$
$$x'_{24} = x_{24} - x'_{31} = 5 + 25 = 30$$
$$x'_{34} = x_{34} - x'_{31} = 120 - 25 = 95.$$

Donc la cellule $(2; 3)$ est la cellule sortante.

Voici le tableau obtenu après le deuxième changement de base avec les coûts duaux :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	u_i
O_1	[1] 95	[8]	[1] 145	[5]	[4]	0
O_2	[5]	[5] 130	[3]	[6] 30	[7]	-2
O_3	[2] 25	[9]	[5]	[9] 95	[8] 140	1
v_j	1	7	1	8	7	

TABLEAU 3.12 – Après l'itération 2

Itération 3

Les coûts duaux sont déja donnés dans le tabbleau précédent. On passe à l'étape 3

Étape 3 : calcul des pénalités pour le choix de la cellule entrante

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 - 7 = 1$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 5 - 0 - 8 = -3$$
$$\Delta_{15} = c_{15} - u_1 - v_5 = 4 - 0 - 7 = -3$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 5 + 2 - 1 = 6$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 + 2 - 1 = 4$$
$$\Delta_{25} = c_{25} - u_2 - v_5 = 7 + 2 - 7 = 2$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 1 - 7 = 1$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 5 - 1 - 1 = 3.$$

Étape 4 :

$$x'_{15} = \min\{x_{11}; x_{35}\} = \min\{140; 95\} = 95$$
$$x'_{11} = x_{11} - x'_{15} = 95 - 95 = 0$$
$$x'_{31} = x_{31} - x'_{15} = 25 + 95 = 120$$
$$x'_{35} = x_{35} - x'_{15} = 140 - 95 = 45.$$

Donc la cellule $(1; 1)$ est la cellule sortante.

Voici le tableau obtenu après le troisième changement de base avec les coûts duaux :

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	u_i
O_1	1	8	1 145	5	4 95	0
O_2	5	5 130	3	6 30	7	1
O_3	2 120	9	5	9 95	8 45	4
v_j	-2	4	1	5	4	

TABLEAU 3.13 – Après l'itération 3

Itération 4

Les coûts duaux sont déja donnés dans le tableau précédent. On passe à l'étape 3.

Étape 3 : calcul des pénalités pour le choix de la cellule entrante

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= c_{11} - u_1 - v_1 = 1 - 0 + 2 = 3 \\
\Delta_{12} &= c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 - 4 = 4 \\
\Delta_{14} &= c_{14} - u_1 - v_4 = 5 - 0 - 5 = 0 \\
\Delta_{21} &= c_{21} - u_2 - v_1 = 5 - 1 + 2 = 6 \\
\Delta_{23} &= c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 1 - 1 = 1 \\
\Delta_{25} &= c_{25} - u_2 - v_5 = 7 - 1 - 4 = 2 \\
\Delta_{32} &= c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 4 - 4 = 1 \\
\Delta_{33} &= c_{33} - u_3 - v_3 = 5 - 4 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Étape 4 : toutes les pénalités sont positives ou nulles, donc la solution optimale est atteinte et est donnée par le tableau suivant

$\mathcal{O}$ \ $\mathcal{D}$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	u_i
O_1	[1]	[8]	[1] 145	[5]	[4] 95	0
O_2	[5]	[5] 130	[3]	[6] 30	[7]	1
O_3	[2] 120	[9]	[5]	[9] 95	[8] 45	4
v_j	-2	4	1	5	4	

TABLEAU 3.14 – Après l'itération 3

$$\begin{aligned}
\min Z &= c_{13}x_{13} + c_{15}x_{15} + c_{22}x_{22} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35}. \\
&= 145(1) + 95(4) + 130(5) + 30(6) + 120(2) + 95(9) + 45(8) \\
&= 2810.
\end{aligned}$$

Remarque 3.4.1 *La solution du tableau ci-dessus n'est pas l'unique solution optimale du problème de sporcau. En effet, les variables hors base x_{14} et x_{33} admettent un coût marginal nul et peuvent, en entrant dans la base, prendre une valeur positive sans changer la valeur minimal de la fonction objectif.*

Exemple 3.4.1 *A titre d'exemple, nous appliquons la résolution par le solveur d'excel au problème du tableau 3.2.*

Étape 1 : dans un premier temps, nous allons présenter les éléments de la feuille de calcul associés au problème de sporcau. La feuille de calcul comprend deux tableaux. Le 1[er] donne les paramètres du modèle de transport c'est-à-dire les coûts unitaires de transport, la capacité de chaque laboratoire-origine et la demande de chaque centre-destination. Le 2[e] tableau contiendra les valeurs des variables de décision une fois le modèle résolu à l'aide du solveur.

Les problèmes de transport : Sporcau

z = 0

Coûts unitaires de transport

	Entrepôt					
Usine	C1	C2	C3	C4	C5	**Capacité**
L1	1	8	1	5	4	240
L2	5	5	3	6	7	160
L3	2	9	5	9	8	260
Demande	120	130	145	125	140	660

Valeurs des variables de décision

	Entrepôt					**Quantité**
Usine	C1	C2	C3	C4	C5	**expédiée**
L1	0	0	0	0	0	0
L2	0	0	0	0	0	0
L3	0	0	0	0	0	0
Qté reçue	0	0	0	0	0	0

FIGURE 3.2 – La feuille de calcul associée au problème de Sporcau

Étape 2 : pour cette étape, avant d'activer le solveur, il faut calculer la valeur de la fonction-objectif Z, ce qu'on réalise en inscrivant la formule =SOMMEPROD(coût,x) dans la cellule G4; il faut également calculer la quantité reçue par chaque centre-destination et la quantité expédiée par chaque laboratoire-origine : par exemple, pour le centre C2, inscrire la formule =SOMME(C22 :C24) dans la cellule C25 et copier cette formule pour les autres centres; de même, pour le laboratoire L3, inscrire la formule =SOMME(B24 :F24) dans la cellule G24 et copier cette formule pour les autres laboratoires.

Étape 3 : dans cette étape, nous allons configurer excel solver en fonction de ce problème. Nous allons d'abord ouvrir le solveur à partir de l'onglet **«Données»** et localiser la cellule de coût minimum total dans **«Définir l'objectif»** dans le solveur. Comme nous voulons minimiser la fonction, nous choisirons **«Min»**. Nous choisirons également notre méthode de résolution comme **«Simplex LP»**. La boîte de dialogue affichée devrait ressembler à celle de la figure3.3.

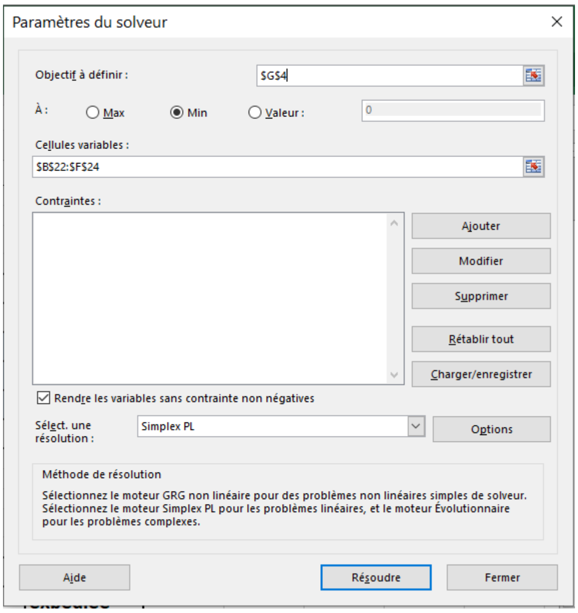

FIGURE 3.3 – La boîte de dialogue « Paramètres du solveur » pour les modèles de transport

Étape 3 : ici, nous indiquons comment compléter la zone contraintes : cliquer d'abord sur le bouton **«Ajouter»** à droite de cette zone. La boîte de dialogue affichée devrait ressembler à celle de la figure 3.4.

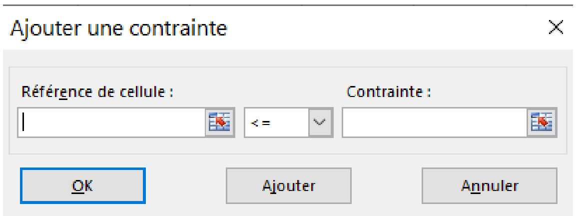

FIGURE 3.4 – La boîte de dialogue « Ajouter une contrainte »

Il y a 2 catégories de contraintes technologiques à spécifier au solveur : les contraintes de capacité des usines et les contraintes de demande des entrepôts. Convenons d'entrer d'abord les contraintes de demande des centres destinations :

(a) dans la zone de texte cellule : entrer **«in»**, le nom de plage qui réfère aux cellules contenant les quantités reçues par les centres-destinations ; choisir ensuite le signe = des contraintes et dans la zone de texte contrainte, entrer **«demande»**, le nom de plage qui réfère aux cellules contenant les demandes des centres-destinations. Cliquer ensuite sur le bouton **«Ajouter»**. Pour ajouter les contraintes de capacité des laboratoires origines, on procède de façon similaire ;

(b) dans la zone de texte cellule : entrer **«out»**, le nom de plage qui réfère aux cellules contenant les quantités expédiées à partir des laboratoires-origines ; choisir ensuite le signe = des contraintes en ouvrant le menu déroulant du bouton dans la zone de texte contrainte, entrer **«capacité»**, le nom de plage qui réfère aux cellules contenant les capacités des laboratoires-origines. Cliquer ensuite sur **«OK»** car toutes les contraintes technologiques ont été entrées. La boîte de dialogue « **Paramètres du solveur** » devrait ressembler à celle de la figure 3.5 .

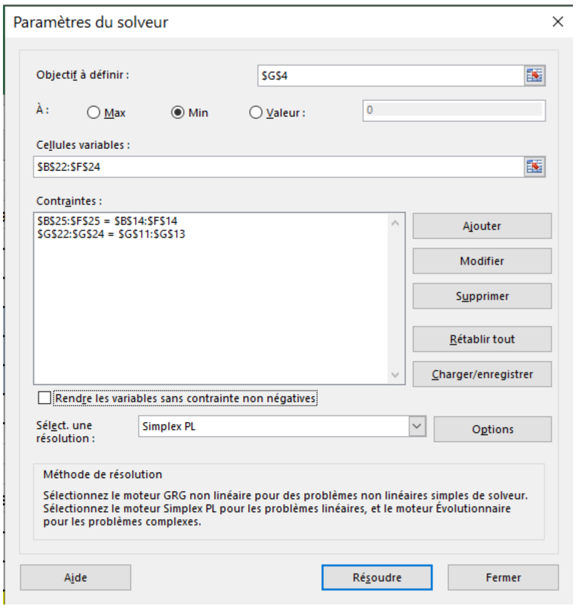

FIGURE 3.5 – La boîte de dialogue « Paramètres du solveur »

Étape 4 : Dans cette étape, certaines options doivent être spécifiées au solveur avant de résoudre le modèle. Cliquer sur le bouton « **Options** » de la boîte de dialogue « **Paramètres du solveur** ». La boîte de dialogue « **Options du solveur** » s'affiche à l'écran (avec les valeurs par défaut illustrées à la figure 3.6). Nous recommandons d'apporter les modifications suivantes aux valeurs par défaut :
cocher la case « **Rendre les variables sans contrainte non-négatives** » pour spécifier que toutes les variables de décision sont soumises à des contraintes de non-négativité.

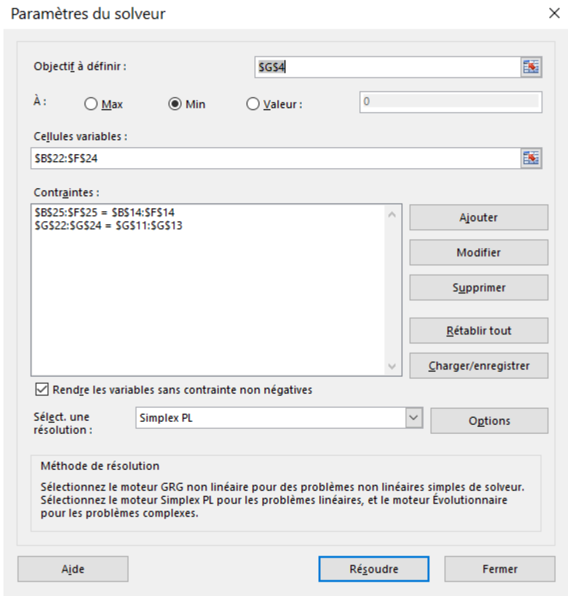

FIGURE 3.6 – La boîte de dialogue « Paramètres du solveur »

Étape 5 : après avoir modifié les valeurs par défaut de la boîte « **Options du solveur** », cliquer sur **«OK»** pour revenir à la boîte « **Paramètres du solveur** », puis sur le bouton **«Résoudre»** de cette boîte. Excel calcule alors une solution optimale du modèle linéaire associé. Dans le présent exemple, il affichera la boîte « Résultats du solveur » ; puis, l'option « **Garder la solution du solveur** » étant cochée par défaut, cliquer sur **«OK»** pour obtenir la feuille de calcul présentée à la figure3.7. Il est recommandé de sauvegarder le fichier avant de le fermer.

Les problèmes de transport : Sporcau

					z =	2810

Coûts unitaires de transport

Usine	Entrepôt					Capacité
	C1	C2	C3	C4	C5	
L1	1	8	1	5	4	240
L2	5	5	3	6	7	160
L3	2	9	5	9	8	260
Demande	120	130	145	125	140	660

Valeurs des variables de décision

Usine	Entrepôt					Quantité expédiée
	C1	C2	C3	C4	C5	
L1	0	0	145	95	0	240
L2	0	130	0	30	0	160
L3	120	0	0	0	140	260
Qté reçue	120	130	145	125	140	660

FIGURE 3.7 – La boîte de dialogue « Paramètres du solveur »

Le tableau suivant donne la liste des paramètres auxquels nous avons attribué un nom à une cellule ou à une plage de cellules

Paramètre	**Nom**	**Cellule ou plage**
Capacité des usines	capacité	G11 :G13
Demande des entrepôts	demande	B14 :F14
Coûts unitaires de transport	coût	B11 :F13
Nombre total d'unités expédiées à partir des usines	out	G22 :G24
Nombre total d'unités reçues aux entrepôts	in	B25 :F25
Valeurs des variables de décision	x	B22 :F24
Valeur de la fonction-objectif	z	G4

Conclusion générale

Le but de notre travail était de présenter les méthodes à mettre en œuvre pour optimiser les coûts de transport à l'aide de la programmation linéaire. Nous avons abordé les notions de base de la programmation linéaire et la dualité d'une part. D'autre part, le positionnement d'un problème de transport, sa structure ainsi que ses différentes méthodes de résolution. Parmi lesquelles, on peut citer les methodes du coin nord-ouest et coût minimum qui nous ont permis d'obtenir d'abord une solution de base et les méthodes des coûts duaux et la résolution par le solveur d'excel pour l'optimisation de la solution de base réalisable. En guise d'application, nous avons montré comment appliquer l'algorithme de transport pour déterminer la valeur de la variable qui minimise le coût de transport. Le problème de transport est généralement plus difficile à résoudre par la méthode des coûts duaux que par la résolution avec le solveur d'excel. Il convient toutefois de prendre des logiciels adaptés pour la rapidité dans la résolution d'un problème de transport.

Bibliographie

[1] Adil Amzaz *Résolution des problèmes de la recherche opérationnelle : Problème de transport et problème de chargemen, MEMOIRE DE FIN D'ETUDES, Licence Mathématiques et Applications,UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH, (2016).*

[2] ALFRED ASASE, *THE TRANSPORTATION PROBLEM, Theses sub- mitted to the department of mathematics faculty of physical science and technology Kumasi , Octobre 2011.*

[3] Mohamed Ben-Iken, *Problème de transport : Modélisation et résolution, MEMOIRE DE FIN D'ETUDES, Licence Mathématiques et Applications, UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH, (2017).*

[4] Christos H. Papadimitriou, The Euclidean travelling salesman problem is NP-complete, Theoretical Computer Science, Volume 4, Issue 3, 1977, Pages 237-244, ISSN 0304-3975, https ://doi.org/10.1016/0304-3975(77)90012-3. (https ://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397577900123)

[5] Mohamed Lamine DAHOU & CHETBANI Aissa, *Méthodes d'optimisation dans les réseaux de transport et applications, Mémoire de Master, Université A. Mira de Béjaia, (2017-2018).*

[6] Yadolah Dodge, *Optimisation appliquée, Université de Neuchâtel, Editeur : Sprin- ger Livre, 2005.*

[7] S. Lin, B. W. Kernighan, (1973) Un algorithme heuristique efficace pour le problème du voyageur-vendeur. Recherche opérationnelle 21(2) :498-516. https ://doi.org/10.1287/opre.21.2.498

[8] M. FALL, *COURS DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, Master Mathématiques Appliquée, Université Assane Seck de Ziguinchor, ANNÉE 2019-2020.*

[9] Bernard Fortz, *Recherche opérationnelle et applications, Université Libre de Bruxelles, Département d'informatique.*

[10] J. Fonlupt and Nachef, A. (1993). Dynamic programming and the graphical traveling salesman problem. *Journal of the ACM (JACM), 40(5), 1165-1187.*

[11] Robert Guénette, *cours problème de transport, Université de Laval, Faculter des science et de génie, 2015.*

[12] MAAMERI Nessma & SAGHI Soraya, *Recueil sur les méthodes d'optimisation combinatoire et application sur un probléme de transport réel : cas Ifri, Mémoire de Master en Mathémathique, Université A/MIRA de Béjaia, 2013.*

[13] Nobert, Ouellet et Parent, *"La recherche opérationnelle, 3e édition". Le problème retenu, "Sporcau", est décrit dans la section 7.4.1, à partir de la page 358.*

[14] François Vanderbeck *Modèles et méthodes d'optimisation, Mathématiques Appliquées Bordeaux, Licence d'Ingénierie Mathématiques.*

[15] Triqui Lamia Sari, *Cours de Recherche Opérationnelle, Université Aboubakr Belkaïd Telemcen,Faculté de TECHNOLOGIE.*

[16] Solyalı, O., & Süral, H. (2017). A multi-phase heuristic for the production routing problem. Computers & Operations Research, 87, 114–124.

[17] Zhao, X., Lai, F., & Lee, T. (2001). Evaluation of safety stock methods in multilevel material requirements planning (mrp) systems. Production Planning & Control, 12 (8), 794–803.