

UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



**U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES**

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire de Master

**DOMAINE :** SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
**MENTION :** MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS  
**SPÉCIALITÉ :** MATHÉMATIQUES PURES  
**OPTION :** ANALYSE GÉOMÉTRIE

**Thème : L'INFLUENCE D'UNE PERTURBATION  $L^p$  SUR  
L'INÉGALITÉ DE HARDY-SOBOLEV AVEC SINGULARITÉ UNE  
COURBE**

**Présenté par : ABDOURAHMANE DIATTA**

**Sous l'encadrement de : Dr El Hadji Abdoulaye THIAM & Dr Mamadou Eramane  
BODIAN**

**Sous la supervision du : Pr Marie Salomon SAMBOU**

**Soutenu publiquement le 20 Juin 2023 devant le jury ci-après :**

<b>Prénom(s) et Nom</b>	<b>Grade</b>	<b>Qualité</b>	<b>Établissement</b>
Amoussou Thomas GUEDENON	Professeur Assimilé	Président du jury	UASZ
Timack NGOM	Maître de Conférences Titulaire	Examineur	UASZ
Mamadou GUEYE	Maître de Conférences Assimilé	Examineur	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Directeur	UASZ
El Hadji Abdoulaye THIAM	Maître de Conférences Assimilé	Directeur	UIDT
Mamadou Eramane BODIAN	Maître de Conférences Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2021-2022

## Remerciements

Avant tout, je remercie **ALLAH** de m'avoir donné la force, le courage et la patience pour terminer ce mémoire.

Je profite de l'occasion que me donne la présentation de ce travail pour adresser ma reconnaissance envers toutes les personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire.

Un remerciement très particulier va à mon superviseur **Pr. Marie Salomon SAMBOU** pour son engagement durant toute la réalisation de ce travail. J'ai eu l'honneur et le plaisir d'être son étudiant. Je dois dire que ses années passées avec lui ont été fructueuse et très profitables.

Je suis très reconnaissant envers lui, pour m'avoir encadré, encouragé et conseillé. Ses orientations et sa disponibilité m'ont été très utiles. C'est avec un grand plaisir que nous avons mené à bien ce travail.

Je suis aussi très reconnaissant envers mes encadreurs **Dr. El Hadji Abdoulaye THIAM** et **Dr. Mamadou Eramane BODIAN** qui ont accepté de travailler avec moi. Ils m'ont beaucoup aidé et guidé dans l'amélioration de mes connaissances dans le domaine de l'analyse géométrique. C'est avec un honneur que j'ai travaillé sous leur encadrement.

Je remercie chaleureusement le président du jury **Pr. Amoussou Thomas GUEDENON** pour avoir accepté de présider le jury.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement **Dr. Timack NGOM** qui a accepté de lire et d'expertiser ce travail et me fait un grand honneur de faire partie du jury. De même nous exprimons notre reconnaissance au **Dr. Mamadou GUEYE** pour l'honneur qu'il nous a fait de bien vouloir accepter de faire parti du jury et d'examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux personnels et aux enseignants de l'UFR sciences et technologies et en particulier ceux du département de mathématiques.

Un remerciement spécial à Dr. Souhaibou SAMBOU, Dr. Guillaume Iitbadio SADIO, Mr. Papa BADIANE, Mr. Mamadou CISS et l'ensemble de mes camarades de promotion en particulier Marie FAYE, Malick FAYE, Christ Jesus BASSE, Thierno Amadou DIALLO, Abdoulaye DIOUF, Ibrahima TRAORE, Mohamed Fadel AIDARA, Papa Aly CISSE, Omar DIOP, Pathé BÂ et Mark Stiven DIOP et à tout ceux qui font Mathématiques-appliquées.

Je ne pourrai clôturer ces remerciements sans citer ma famille : mes parents, frères et sœurs qui ont participé à ma formation et m'ont encouragé jusqu'à la finalisation de ce mémoire. Je suis fier de pouvoir leur dédier ce travail.

Ce mémoire est dédié à tous les enseignants qui ont participé à ma formation et à toute ma famille.

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>1 PRÉLIMINAIRES</b>	<b>4</b>
1.1 Courbes régulières sur $\mathbb{R}^N$	4
1.1.1 Courbe paramétrée par longueur d'arc	6
1.1.2 Courbure d'une courbe plane	8
1.1.3 Torsion d'une courbe de gauche	11
1.2 Les espaces $L^p$	14
1.2.1 Théorème de convergence dominée de Lebesgue	16
1.2.2 Théorème de Fubini	17
1.2.3 Théorème du changement de variable	18
1.3 Espaces de Sobolev	19
1.3.1 Espace des fonctions test	20
1.3.2 Dérivation faible	20
1.3.3 Espace $H^1(\Omega)$	21
1.3.4 Espace $H_0^1(\Omega)$	22
1.3.5 Formule de Green	24
1.3.6 Un résultat de compacité	25
1.3.7 Espaces $H^m(\Omega)$	25
<b>2 L'ÉQUATION DE HARDY-SOBOLEV NON PERTURBÉE</b>	<b>27</b>
2.1 Paramétrisation et métrique	28
2.2 L'inégalité de Hardy-Sobolev cylindrique sur $\mathbb{R}^N$	35
2.3 Construction d'une fonction test et existence du minimiseur pour $\mu_h(\Omega, \Gamma)$ de dimension $N \geq 4$	39
2.4 Construction d'une fonction test et existence de minimiseur pour $\mu(\Omega, \Gamma, h)$ de dimension trois	45
<b>3 L'ÉQUATION DE HARDY-SOBOLEV PERTURBÉE</b>	<b>56</b>
3.1 Construction d'une fonction test existence de minimiseur pour $\mu(\Omega, \Gamma, h, b)$ de dimension $N \geq 4$	56
3.2 Construction d'une fonction test et existence de minimiseur pour $\mu(\Omega, \Gamma, h, b)$ de dimension trois	58
<b>CONCLUSION</b>	<b>60</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>61</b>

# Notations et abréviations

Nous utiliserons un certain nombre de notations et d'abréviations.

*EDP* : Équation aux Dérivés Partielles.

$\mathbb{R}$  : Espace des nombres réels.

$\mathbb{R}^N$  : Produit cartésien de  $\mathbb{R}$  de dimension  $N$ .

$\mathbb{N}$  : Espace des nombres entiers.

$\Omega$  : Domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ .

$\partial\Omega$  : Bord de  $\Omega$ .

$\Gamma$  : Une courbe fermée et régulière dans  $\Omega$ .

$C_c^\infty(\Omega)$  : Espace des fonctions  $C^\infty$  dans  $\Omega$  à support compact.

$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  : Le complété de  $C_c^\infty(\Omega)$  pour la norme  $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$ .

$tr(\cdot)$  : La fonction trace d'une matrice.

p.p : Presque partout.

$$C^{0,\varrho}(Q_{r_0/2}) = \left\{ u \in C(Q_{r_0/2}); \sup_{x,y \in C(Q_{r_0/2})} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\varrho} < \infty, \quad 0 < \varrho < 1 \right\}.$$

$$C^{1,\varrho}(Q_{r_0/2}) = \{u \in C^1(Q_{r_0/2}); Du \in C^{0,\varrho}(Q_{r_0/2})\}.$$

## Résumé

Dans ce mémoire, on considère un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 4$ , et  $b, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. Soit  $\Gamma$  une courbe fermée et régulière dans  $\Omega$ . Il s'agit d'étudier l'existence des solutions positives  $u \in H_0^1(\Omega)$  de l'équation de Hardy-Sobolev perturbée :

$$-\Delta u + hu + bu^{1+\delta} = \rho_\Gamma^{-\sigma} u^{2_\sigma^*-1} \text{ dans } \Omega,$$

où  $2_\sigma^* := \frac{2(N-\sigma)}{N-2}$  est l'exposant critique de Hardy-Sobolev,  $\sigma \in [0, 2[$ ,  $0 < \delta < \frac{4}{N-2}$  et  $\rho_\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction distance à  $\Gamma$ . Elle est donnée par :

$$\rho_\Gamma(x) := \inf_{y \in \Gamma} d(x, y) \quad \forall x \in \Omega.$$

Nous allons étudier la solution de l'équation en deux cas :

- le cas de l'équation de Hardy-Sobolev non perturbée ( $b = 0$ ),

$$-\Delta u + hu = \rho_\Gamma^{-\sigma} u^{2_\sigma^*-1} \text{ dans } \Omega.$$

Trouver une solution de l'équation de Hardy-Sobolev non perturbée revient à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dy + \int_\Omega hu^2 dy}{\left( \int_\Omega \rho_\Gamma^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dy \right)^{2/2_\sigma^*}}.$$

Pour résoudre le problème, nous démontrons que pour toute dimension  $N \geq 4$ , l'existence d'une solution (ou plutôt une condition suffisante d'existence) dépend de la géométrie locale autour de la singularité. En revanche, dans le cas où la dimension  $N = 3$ , c'est la géométrie globale (particulièrement, la masse de la fonction de Green).

- Le cas de l'équation de Hardy-Sobolev perturbée ( $b \neq 0$ ).

Trouver une solution de l'équation de Hardy-Sobolev perturbée revient à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dy + \frac{1}{2} \int_\Omega hu^2 dy + \frac{1}{2+\delta} \int_\Omega bu^{2+\delta} dy - \frac{1}{2_\sigma^*} \int_\Omega \rho_\Gamma^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dy.$$

Pour résoudre ce problème, nous démontrons que l'existence d'une solution dépendra uniquement de la perturbation pour les dimensions  $N \geq 4$  et qu'une interaction entre la géométrie globale dans un domaine  $\Omega$  et la perturbation apparaîtra en dimension 3.

# INTRODUCTION

Les inégalités fonctionnelles constituent un outil standard en théorie des équations aux dérivées partielles (EDP), en calculs des variations, en théorie géométrique de la mesure, en géométrie riemannienne, en géométrie différentielle et dans beaucoup d'autres branches importantes de l'analyse. Elles ont beaucoup d'applications en physique mathématique, en théorie spectrale, en biologie, en astrophysique, en ingénierie etc. Particulièrement dans ce mémoire, nous allons étudier les inégalités de Hardy-Sobolev avec singularité cylindrique. Avant d'étudier ces inégalités de Hardy-Sobolev, il est nécessaire de connaître les inégalités de Hardy et de Sobolev. En faisant une interpolation entre les inégalités de Hardy et de Sobolev, on obtient les inégalités de Hardy-Sobolev.

Le célèbre théorème de Sobolev [9] affirme que, pour tout entier  $N \geq 3$ , il existe une constante  $C$  dépendant de  $N$  tel que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_0^*} dx \right)^{2/2_0^*} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \quad (1)$$

avec  $2_0^* = \frac{2N}{N-2}$  est l'exposant critique de Sobolev et  $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  est le complété de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

pour la norme  $u \mapsto \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$ . La meilleure constante  $C$  pour l'inégalité de Sobolev est atteinte par les fonctions de la forme  $w(x) = C \left( 1 + |x|^2 \right)^{\frac{2-N}{2}}$ , voir [7].

L'inégalité classique de Hardy avec singularité cylindrique s'écrit :

$$\left( \frac{N-k-2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 |z|^{-2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad (2)$$

où  $|z|^{-2}$  le poids, c'est-à-dire, une fonction mesurable positive p.p dans  $\mathbb{R}^N$ . Contrairement à l'inégalité de Sobolev la constante  $\left( \frac{N-k-2}{2} \right)^2$  est optimale mais jamais atteinte, (voir Brézis et Nirenberg [10]).

En interpolant les inégalités (1) et (2), on obtient l'inégalité de Hardy-Sobolev avec singularité cylindrique : pour tout  $0 \leq k \leq N-1$  et  $\sigma \in [0, 2]$ , il existe  $C = C(N, \sigma, k)$  telle que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dx \right)^{2/2_\sigma^*} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad (3)$$

où  $x = (t, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$  et  $2_\sigma^* = \frac{2(N-\sigma)}{N-2}$  est l'exposant critique de Hardy-Sobolev.

Cependant, on observe que :

- si  $\sigma = 0$ , on retrouve l'inégalité de Sobolev (1).
- Si  $\sigma = 2$  et  $k \neq N-2$ , alors nous obtenons l'inégalité de Hardy avec singularité cylindrique (2).

Enfin pour  $\sigma \in [0, 2[$ , la meilleure constante pour l'inégalité de Hardy-Sobolev est donnée par

$$S_{N,\sigma} := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dx = 1 \right\}. \quad (4)$$

La constante  $S_{N,\sigma}$  est atteinte par des fonctions strictement positives  $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ . De plus Fabbri, Sandeep [12] ont montré que la constante est atteinte par la fonction de la forme  $w(x) = \theta(|t|, |z|)$ , où  $\theta$  est une fonction définie par :  $\theta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Il existe un cas particulier par exemple lorsque  $k = 0$  (voir Lieb [4], Aubin [19] et Talenti [7]),  $S_{N,\sigma}$  est atteinte par :

$$w(x) = ((N-2)(N-\sigma))^{\frac{2-N}{2(2-\sigma)}} \left( (1+|x|^{2-\sigma})^{\frac{2-N}{2-\sigma}} \right).$$

Si  $\sigma = 1$ , Fabbri et Sandeep [12] ont montré que chaque minimiseur s'écrit comme suit

$$w(x) = [(N-k)(k-1)]^{\frac{N-2}{2}} \left( (1+|z|)^2 + |t|^2 \right)^{\frac{2-N}{2}},$$

excepté du cas  $\sigma = 1$ , les minimiseurs ne sont pas connus explicitement (voir [20] et [12]).

Dans ce mémoire, nous allons travailler sur  $\Omega$ , un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  avec  $N \geq 4$ ,  $N = 3$  et  $k = 1$ .

Notre objectif principal est d'étudier l'existence d'une solution positive  $u \in H_0^1(\Omega)$  de l'équation de Hardy-Sobolev perturbée

$$-\Delta u + hu + bu^{1+\delta} = \rho_\Gamma^{-\sigma} u^{2_\sigma^*-1} \quad \text{dans } \Omega. \quad (5)$$

On distingue deux cas.

- Si  $b = 0$ , alors nous obtenons l'équation non perturbée de Hardy-Sobolev avec singularité une courbe

$$-\Delta u + hu = \rho_\Gamma^{-\sigma} u^{2_\sigma^*-1} \quad \text{dans } \Omega. \quad (6)$$

Trouver une solution de l'équation (6) revient à minimiser la fonctionnelle (voir [5] proposition 4.5)

$$J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega hu^2 dx}{\left( \int_\Omega \rho_\Gamma^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dx \right)^{\frac{2}{2_\sigma^*}}}.$$

Par la suite, nous allons introduire l'infimum

$$\mu_h(\Omega, \Gamma) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(u) \quad (7)$$

et nous montrons que si

$$\mu_h(\Omega, \Gamma) < S_{N,\sigma},$$

alors  $\mu_h(\Omega, \Gamma)$  admet un minimiseur.

- Si  $b \neq 0$ , alors nous obtenons l'équation (5).

Chercher une solution de l'équation (5) revient à minimiser la fonctionnelle (voir [5] proposition 4.5)

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega hu^2 dx + \frac{1}{2+\delta} \int_\Omega bu^{2+\delta} dx - \frac{1}{2_\sigma^*} \int_\Omega \rho_\Gamma^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dx.$$

Ensuite, nous allons utiliser l'infimum

$$\mu_\sigma(\Omega, \Gamma, h, b) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(u)$$

pour montrer que si

$$\mu_\sigma(\Omega, \Gamma, h, b) < S_{N,\sigma},$$

alors  $\mu_\sigma(\Omega, \Gamma, h, b)$  admet un minimiseur.

Ce travail est composé de trois parties.

- Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions : dans la première section, nous rappelons les courbes régulières (les courbes paramétrées par longueur d'arc, la notion de courbure et de torsion). En suite, dans la deuxième section nous rappelons les espaces  $L^p(\Omega)$  (l'inégalité de Hölder, le lemme de Fatou, le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini et le théorème de changement de variable) et enfin nous terminons par les espaces de Sobolev (la dérivation faible, les espaces des fonctions test, les espaces  $H^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski, l'inégalité de Poincaré, formule de Green et un résultat de compacité).

- Dans le deuxième chapitre, nous allons développer une paramétrisation locale et une métrique pour résoudre l'équation de Hardy-Sobolev sans terme de perturbation, ensuite nous allons donner un développement de la fonctionnelle  $J$  et terminer par les conditions suffisantes pour l'existence de minimiseur pour l'infimum  $\mu(\Omega, \Gamma, h)$  de dimension  $N \geq 4$  et  $N = 3$ . L'objectif de ce chapitre est de démontrer le théorème (2.0.1).

Ce chapitre est une présentation détaillée du travail de Fall-Thiam [14].

- Dans le troisième chapitre, nous traitons brièvement l'existence d'un minimiseur pour l'infimum  $\mu(\Omega, \Gamma, h, b)$  de dimension  $N \geq 4$  et  $N = 3$  de l'équation de Hardy-Sobolev avec perturbation. L'objectif de ce chapitre est de démontrer le théorème (3.0.1). Le contenu de ce chapitre n'est autre qu'une présentation détaillée et développée du travail de Ijaodoro-Thiam [11].



# Chapitre 1

## PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre est consacré aux courbes régulières sur  $\mathbb{R}^N$  dans la première section, pour cela on se réfère aux livres de Do Carmo [17], C. Bär [3], et M. Berger [15]. Dans la seconde section, nous rappelons les espaces  $L^p$  et les espaces de Sobolev, les principales références de la section sont : G. Allaire-F. Alouges [5], Franck Boyer [6]. H. Boumaza [8] et T. Aubin [9].

### 1.1 Courbes régulières sur $\mathbb{R}^N$

#### Généralités

L'objectif de cette partie est de caractériser les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^N$  appelés courbes qui sont des objets unidimensionnels et auxquels les méthodes de calculs différentiels peuvent être appliquées. Une manière naturelle de définir de tels sous-ensembles consiste à utiliser des fonctions différentiables. On dit qu'une fonction réelle d'une variable réelle est différentiable (ou lisse) si elle a, en tout point indéfiniment dérivable. Une première définition de la courbe, pas entièrement satisfaisante mais suffisante pour les besoins du document, est la suivante.

**Définition 1.1.1.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une courbe paramétrée est une application  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  de classe  $C^k$ .

Le mot classe  $C^k$  dans cette définition signifie que  $\alpha$  est une relation qui applique chaque  $t \in I$  en un point  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  de telle sorte que les fonctions  $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$  sont de classe  $C^k$ . La variable  $t$  est appelée paramètre de la courbe. L'ensemble  $C = \alpha(I) = \{\alpha(t), t \in I\}$  est appelé support géométrique (ou trace). On dit que  $C$  est une courbe géométrique et  $\alpha$  est une paramétrisation de  $C$ . On notera une courbe paramétrée par  $(\alpha, I)$ . La paramétrisation  $(\alpha, I)$  donne plus d'informations que la courbe géométrique.

**Exemple 1.1.1.** Une paramétrisation du cercle d'équation  $x^2 + y^2 = R^2$  est l'application  $\alpha : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $\alpha(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$ .

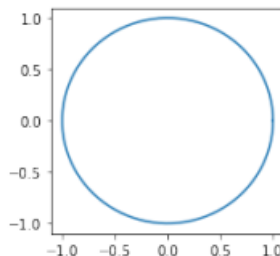


FIGURE 1.1 – Représentation du cercle unité.

**Exemple 1.1.2.** (Hélice) Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt).\end{aligned}$$

Cette courbe est représentée (géométriquement) par la figure 1.2.

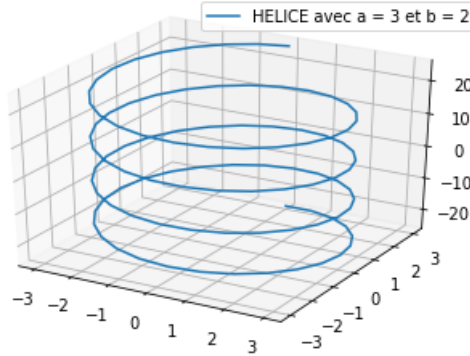


FIGURE 1.2 – Hélice avec  $a = 3$  et  $b = 2$ .

**Définition 1.1.2.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée. L'application

$$\begin{aligned}\alpha' : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t_0 &\longmapsto \alpha'(t_0) = \frac{d\alpha(t_0)}{dt} = (\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0), \dots, \alpha'_n(t_0)),\end{aligned}$$

est appelée *vecteur vitesse* (ou *vecteur tangent*) de la courbe  $\alpha$  en  $t_0$ . La droite engendrée par ce vecteur au point  $\alpha(t_0)$  est appelée *droite tangente* à  $\alpha$  en ce point.

**Définition 1.1.3.** Soit  $\alpha' : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  le vecteur vitesse d'une courbe paramétrée  $(\alpha, I)$ . La fonction  $v : t \longmapsto v(t) = \|\alpha'(t)\|$  est appelée *vitesse* de  $\alpha$  où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  et l'application  $\alpha'' : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \alpha''(t)$  est appelée *accélération* de  $\alpha$ .

Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée. Pour chaque  $t \in I$  où  $\alpha'(t) \neq 0$ , il existe une droite, qui contient le point  $\alpha(t)$  et le vecteur  $\alpha'(t)$ . Cette droite est appelée *droite tangente* de  $\alpha$  en  $t$ . Pour l'étude de la géométrie différentielle d'une courbe, il est essentiel qu'il existe une telle droite tangente en chaque point. Un point  $t$  où  $\alpha'(t) = 0$  est un point singulier de  $\alpha$ .

**Définition 1.1.4.** Un point  $p = \alpha(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  est dit *régulier* si  $\alpha'(t_0) \neq 0$ . La courbe est dite *régulière* si tous ses points sont réguliers. Autrement dit  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$ .

**Proposition 1.1.1.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$ . Soit  $t_0 \in I$ , si  $\alpha'(t_0) \neq 0$ , alors  $\alpha'(t_0)$  est un vecteur tangent à la courbe  $\alpha$  en  $\alpha(t_0)$ .

**Démonstration.** Un vecteur  $v_0$  est dit tangent à  $\alpha$  au point  $\alpha(t_0)$  si  $(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \lambda(t)v_0 + \lambda(t)\epsilon(t)$ , avec  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = 0$ .

Puisque  $\alpha$  est de classe  $C^1$ , on a :

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0) + (t - t_0)\epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = 0,$$

ce qui permet de conclure. □

**Remarque 1.1.1.** Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point. Mais la réciproque n'est pas vraie.

**Définition 1.1.5.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe régulière. On dit que  $\alpha$  est birégulière au point  $t_0 \in I$  si les vecteurs  $\alpha'(t_0)$  et  $\alpha''(t_0)$  sont linéairement indépendants. Si c'est le cas, on définit le plan osculateur de  $\alpha$  au point  $t_0$  par :

$$\Pi_{t_0}(\alpha) = \alpha(t_0) + \text{vect}(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0)).$$

Le plan osculateur de  $\alpha$  au point  $t_0$  est le plan qui passe par  $\alpha(t_0)$  et d'espace directeur  $\text{vect}(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0))$ .

**Définition 1.1.6.** Soit  $(\alpha, I)$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$ . Une courbe paramétrée  $(\beta, J)$  est une reparamétrisation de  $(\alpha, I)$  s'il existe une bijection  $\phi : J \rightarrow I$  de classe  $C^1$  et que sa réciproque soit de classe  $C^1$  telle que

$$\forall t \in J, \beta(t) = \alpha \circ \phi(t).$$

On dit que  $\beta$  est une reparamétrisation de  $\alpha$  et  $\phi$  est un changement de paramètre.

**Proposition 1.1.2.** Soient  $(\alpha, I)$  une courbe régulière de  $\mathbb{R}^n$  et  $(\beta, J)$  une reparamétrisation de  $\alpha$ . Alors  $\beta$  est régulière.

**Démonstration.**  $(\beta, J)$  étant une reparamétrisation de  $(\alpha, I)$  alors il existe un difféomorphisme  $\phi : J \rightarrow I$  telle que  $\beta = \alpha \circ \phi$ . Ce qui implique que  $\beta'(t) = \phi'(t)\alpha'(\phi(t)) \neq 0$  car  $\phi$  est un difféomorphisme.  $\square$

### 1.1.1 Courbe paramétrée par longueur d'arc

**Définition 1.1.7.** Soit  $(\alpha, I)$  une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^n$  et  $[a, b]$  un intervalle inclus dans  $I$ . La longueur de la courbe  $\alpha$  sur  $[a, b]$  est définie par :

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

**Proposition 1.1.3.** La longueur d'une courbe est invariante par changement de paramètre, c'est-à-dire si  $\beta$  est une reparamétrisation de  $\alpha$ , alors  $L(\alpha) = L(\beta)$ .

**Démonstration.** Soit  $\beta = \alpha \circ \phi$  avec  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Posons  $t = \phi(u)$  donc  $dt = \phi'(u)du$ . Alors

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \|\alpha'(\phi(u))\| \phi'(u) du \\ &= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \|\phi'(u)\alpha'(\phi(u))\| du \\ &= \int_c^d \|\beta'(u)\| du. \end{aligned}$$

D'où le résultat.  $\square$

La Proposition 1.1.3 nous dit que la longueur ne dépend pas de la paramétrisation particulière. En effet, la longueur d'une courbe ne dépend pas de la vitesse à laquelle nous l'avons parcourue.

**Définition 1.1.8.** Une paramétrisation  $(\alpha, I)$  d'une courbe est dite normale ou par abscisse curviligne si pour tout  $[t_1, t_2] \subset I$ , la longueur de la courbe géométrique entre les points  $\alpha(t_1)$  et  $\alpha(t_2)$  est  $t_2 - t_1$ . En d'autres termes

$$L(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = t_2 - t_1.$$

**Définition 1.1.9.** On appelle fonction longueur d'arc d'origine  $t_0 \in I$  de la courbe paramétrée régulière  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la fonction définie par :

$$\sigma : t \mapsto \sigma(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du, \quad \forall t \in I.$$

**Proposition 1.1.4.** Si la courbe est paramétrée par longueur d'arc, alors

$$\|\alpha'(t)\| = 1, \quad \forall t \in I.$$

**Démonstration.** La courbe est paramétrée par longueur d'arc donc

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0.$$

En dérivant ci-dessus, on obtient pour tout  $t \in I$  :  $\sigma'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$ . □

**Proposition 1.1.5.** Toute courbe régulière peut être paramétrée par la fonction longueur d'arc (c'est-à-dire il existe une reparamétrisation  $(\beta, J)$  de  $(\alpha, I)$ ) telle que  $\|\beta'(t)\| = 1, \quad \forall t \in J$ .

**Démonstration.** Soit  $\sigma$ , la fonction longueur d'arc de  $\alpha$  d'origine  $t_0$  :

$$\begin{aligned} \sigma : I &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \sigma(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du. \end{aligned}$$

La courbe  $\alpha$  est de classe  $C^1$ , donc elle est dérivable de dérivée continue. Par conséquent,  $\sigma$  est dérivable et sa dérivée  $\sigma'(t) = \|\alpha'(t)\| \geq 0$ . Comme la courbe est régulière, alors  $\|\alpha'(t)\| > 0$ . D'où  $\sigma$  est strictement croissante et donc injective de  $I$  vers  $\sigma(I) = J$ .

Soit  $\tau : J \rightarrow I$  l'inverse de  $\sigma$  telle que  $\sigma(\tau(s)) = s \quad \forall s \in J$ ; sa différentielle est

$$\frac{d(\sigma(\tau(s)))}{ds} = \sigma'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) = 1.$$

Soit  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  une reparamétrisation de  $\alpha$  définie par  $\beta = \alpha \circ \tau$ . En dérivant cette relation on obtient

$$\beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \tau'(s),$$

d'où

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\tau(s)) \tau'(s)\| = 1.$$

Ainsi  $\beta(s) = \alpha \circ \tau(s)$  est une courbe paramétrée par longueur d'arc. □

**Remarque 1.1.2.** Dans la suite de ce document, nous travaillons avec les courbes paramétrées par longueur d'arc.

**Corollaire 1.1.1.** Soient  $(\alpha, I)$  une courbe régulière de classe  $C^1$  et  $t_0 \in I$ . Alors l'abscisse curviligne  $\tau = \sigma^{-1} : J \rightarrow I$  est un changement de paramètre admissible et

$$\beta = \alpha \circ \tau,$$

est une paramétrisation normale qui a le même support géométrique que  $\alpha$ .

**Exemple 1.1.3.** Considérons la courbe paramétrée  $\alpha : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$\alpha(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$  avec  $R$  un réel strictement positif. L'abscisse curviligne est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma : [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t R du = Rt. \end{aligned}$$

La fonction  $\sigma$  est bijective et sa bijection réciproque

$$\begin{aligned}\sigma^{-1} = \tau : [0; 2\pi R] &\longrightarrow [0; 2\pi] \\ s &\longmapsto \tau(s) = \frac{s}{R}.\end{aligned}$$

La reparamétrisation

$$\beta = \alpha \circ \tau : [0; 2\pi R] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

est donnée par :

$$\beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{R}\right) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

On montre que  $\|\beta'(t)\| = 1$ . Ainsi  $\beta$  est une reparamétrisation normale de  $\alpha$ .

**Définition 1.1.10.** Une courbe paramétrée  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est dite périodique de période  $T$  si pour tout  $t \in I$ ,  $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ ,  $T > 0$  et il n'existe pas  $T' < T$  tel que  $\alpha(t + T') = \alpha(t)$  pour tout  $t \in I$ . Une courbe est dite fermée si elle a une paramétrisation régulière périodique.

**Définition 1.1.11.** Une courbe fermée est dite fermée simple si elle a une paramétrisation régulière périodique  $\alpha$  de période  $T$  telle que :  $\alpha$  soit injective sur  $[0, T]$ .

Cette condition dit que la courbe n'a pas de point multiple, à part le point où elle se ferme. Comme les changements de paramètres sont bijectifs, la condition d'injectivité vaut non seulement pour une paramétrisation périodique de la courbe fermée, mais automatiquement pour tous ses paramétrisations périodiques. Le choix de la paramétrisation périodique de la courbe fermée ne joue aucun rôle pour déterminer s'il s'agit d'une courbe fermée simple ou non.

### 1.1.2 Courbure d'une courbe plane

Dans cette partie, nous nous focalisons sur les courbes planes c'est-à-dire celles qui prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . La particularité d'une courbe est la possibilité de définir son champ normal. En effet, soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane à vitesse unité. On définit le champ normal par

$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha'(t).$$

Cette définition est faite de manière que  $(\alpha'(t), n(t))$  forme une base orthonormée orientée positivement vers  $\mathbb{R}^2$ . En d'autres termes, nous faisons tourner le vecteur vitesse de 90 degrés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Comme  $\alpha$  est une courbe à vitesse unité, on a :

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1.$$

La différentielle de cette équation donne

$$0 \equiv \langle \alpha'', \alpha' \rangle + \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 2 \langle \alpha'', \alpha' \rangle.$$

Ainsi les vecteurs  $\alpha'(t)$  et  $\alpha''(t)$  sont perpendiculaires. Donc le vecteur  $\alpha''(t)$  est un multiple du vecteur normal

$$\alpha''(t) = \kappa(t) \cdot n(t).$$

**Définition 1.1.12.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée par longueur d'arc. On définit sa courbure comme la fonction

$$\begin{aligned}\kappa : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \kappa(t) = \|\alpha''(t)\|.\end{aligned}$$

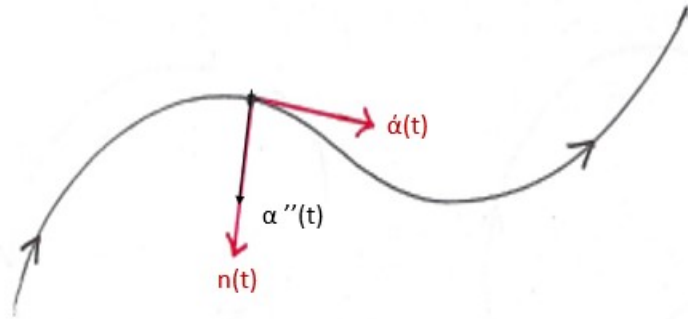


FIGURE 1.3 – Représentation de la courbure en un point.

La courbure mesure la manière dont une courbe s'éloigne localement d'une ligne droite. Elle évalue le rapport entre la variation de la direction de la tangente à la courbe et un déplacement d'une longueur infinitésimale sur celle-ci : plus ce rapport est important, plus la courbure est importante.

**Remarque 1.1.3.** Si la courbure est non nulle on définit le rayon de courbure comme étant l'inverse de la courbure.

**Définition 1.1.13.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière à vitesse unité de classe  $C^1$ . Le repère de Frenet de  $\alpha$  au point  $\alpha(t)$  est le repère orthonormé

$$(\alpha(t), v(t), n(t)),$$

où  $v(t) = \alpha'(t)$  est le vecteur tangent à la courbe au point  $\alpha(t)$  et  $n(t)$  est le vecteur normal à la courbe au point  $\alpha(t)$ .

Le repère de Frenet est défini en chaque point d'une courbe paramétrée régulière. Les formules de Frenet expriment la façon dont ce repère bouge le long de la courbe plus précisément, elles donnent les dérivées de ce repère dans la base de Frenet.

**Proposition 1.1.6. (Formules de Frenet)** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée normale régulière de classe  $C^2$ , posons  $v(s) = \alpha'(s)$ . Soient  $\kappa$  la courbure de  $\alpha$  et  $n(s)$  le vecteur normal. Alors pour tout  $s \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} v'(s) &= \kappa(s)n(s), \\ n'(s) &= -\kappa(s)v(s). \end{aligned}$$

**Démonstration.** La première formule a déjà été montrée. Le vecteur normal  $n$  étant unitaire donc

$$n(t) \cdot n(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient

$$2n(t) \cdot n'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Ainsi  $n'(t)$  est colinéaire à  $v(t)$ , c'est-à-dire il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$n'(t) = \lambda v(t).$$

D'autre part  $n(t) \cdot v(t) = 0$ , par dérivation on a :

$$n'(t) \cdot v(t) + n(t) \cdot v'(t) = 0.$$

La première formule de Frenet entraîne que  $n(t) \cdot v'(t) = \kappa(t)$ , il en résulte que

$$n'(t) \cdot v(t) = -\kappa(t),$$

d'où le résultat. □

Pour les courbes planes fermées quelconques, on introduit un nombre d'enroulement qui dit de combien le vecteur tangent tourne lorsque l'on parcourt la courbe une fois.

**Définition 1.1.14.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane à vitesse unité et de période  $T$ . Soit  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  la courbure de  $\alpha$ . On définit

$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \kappa(s) ds.$$

Ce nombre en apparence curieux a une signification topologique précise : il est toujours un entier relatif qui représente le nombre de tours fait par la tangente autour d'un point, en comptant positivement les tours effectués dans le sens direct, et négativement ceux effectués dans le sens rétrograde.

**Théorème 1.1.1. (Umlaufsatz)**

Une courbe plane fermée simple a un nombre d'enroulement égale à  $\pm 1$ .

**Démonstration.** Voir [3]. □

**Définition 1.1.15.** Deux courbes fermées, de classe  $C^1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont dites homotopes s'il existe une homotopie

$$F \in C^0([0, 1] \times \mathbb{S}^1; \mathbb{R}^2),$$

telle que pour tout  $t$  de  $[0, 1]$  l'application  $F_t : x \mapsto F(t, x)$  de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  soit de classe  $C^1$  et que  $F_0 = \alpha$  et  $F_1 = \beta$ . Autrement dit, on exige que, pour chaque  $t$ ,  $F_t$  soit une courbe fermée.

**Théorème 1.1.2. (Whitney-Grauert)**

Soient deux courbes fermées  $\alpha$  et  $\beta$  homotopes de  $\mathbb{R}^n$ . On a

$$n_\alpha = n_\beta.$$

C'est-à-dire les nombres d'enroulements de  $\alpha$  et de  $\beta$  sont égaux.

**Définition 1.1.16.** Une courbe plane est dite convexe si sa frontière est un ensemble convexe.

**Proposition 1.1.7.** Soient  $\alpha$  est une courbe plane paramétrée par longueur d'arc et  $n$  le vecteur normal le long de  $\alpha$ , alors la condition de convexité en un point  $\alpha(t_0)$  est équivalente à

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \text{ pour tout } t \in I$$

ou

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

**Démonstration.** Voir [3]. □

**Définition 1.1.17.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane normale. Nous disons que  $\alpha$  a un sommet en  $t_0 \in I$  si  $\kappa'(t_0) = 0$ .

**Théorème 1.1.3. (des quatre sommets)**

Si  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe convexe fermée simple normale et de période  $T$ , alors  $\alpha$  a au moins quatre sommets.

**Démonstration.** Voir [3]. □

L'inégalité isopérimétrique relie la longueur d'une courbe plane fermée simple à l'aire de son intérieur. Plus précisément :

**Théorème 1.1.4. (Inégalité isopérimétrique)**

Soit  $L$  la longueur d'une courbe fermée simple  $\alpha$  et  $A$  l'aire de la portion du plan englobée par  $\alpha$ . Alors

$$L^2(\alpha) \geq 4\pi A(\alpha)$$

et  $L^2(\alpha) = 4\pi A(\alpha)$  si et seulement si  $\alpha$  est un cercle.

**Démonstration.** Voir [3]. □

On termine cette partie par le théorème de Jordan qui dit que le complémentaire d'une courbe plane fermée simple a deux composantes connexes, dont l'une compacte est appelée intérieur de la courbe.

**Théorème 1.1.5. (Jordan)**

Soit  $C$  une courbe plane fermée simple de classe  $C^2$ . Alors  $C$  a exactement deux composantes connexes, notées  $C_{int}$  et  $C_{ext}$  telles que  $\overline{C}_{int}$  et  $\overline{C}_{ext}$  sont des domaines de  $\mathbb{R}^2$  de frontière commune

$$\partial\overline{C}_{int} = \partial\overline{C}_{ext} = \partial C.$$

**Démonstration.** Voir [15]. □

**Remarque 1.1.4.** L'ouvert  $C_{int}$  s'appelle l'intérieur de  $C$  et  $C_{ext}$  s'appelle l'extérieur de  $C$ .

### 1.1.3 Torsion d'une courbe de gauche

Ici on se focalise sur les courbes de gauches, c'est-à-dire  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Contrairement aux courbes planes, il n'est plus simple de définir un champ normal. Si  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe de l'espace  $\mathbb{R}^3$  paramétrisée par longueur d'arc, alors les vecteurs perpendiculaires au vecteur unitaire  $\alpha'(t)$  forment un plan, les vecteurs unitaires perpendiculaires au vecteur vitesse forment un cercle.

Dans le cas des courbes planes, nous avons deux vecteurs unitaires perpendiculaires ;  $\alpha'(t)$  et  $\alpha''(t)$ . Nous allons utiliser le vecteur  $\alpha''(t)$  pour définir le vecteur normal. Quel vecteur normal devons nous choisir dans le cas des courbes dans l'espace ?

La définition de la courbure est à priori aussi un problème puisqu'elle nécessite le vecteur normal. Rappelons que le signe de la courbure décrit si une courbe particulière se courbe vers la gauche ou la droite. Qu'est ce que cela devrait signifier dans le contexte des courbes dans l'espace ? Cependant, il existe un moyen d'éviter ce problème. Rappelons que pour les courbes planes

$$\alpha''(t) = \kappa(t) \cdot n(t).$$

En passant au norme

$$|\kappa(t)| = \|\alpha''(t)\|.$$

Si nous abandonnons le signe de la courbure, nous pouvons la définir sans se référer au champ normal. On définira donc la courbure d'une courbe dans l'espace comme suit :

**Définition 1.1.18.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe dans l'espace paramétrée par longueur d'arc. La fonction

$$\begin{aligned} \kappa : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \kappa(t) = \|\alpha''(t)\|, \end{aligned}$$

est appelée courbure de  $\alpha$ .

**Remarque 1.1.5.** Encore une fois, la courbure est une mesure de l'écart d'une courbe par rapport à une ligne droite. Concrètement, si  $\alpha$  est une courbe dans l'espace paramétrée par longueur d'arc, alors  $\alpha$  est une ligne droite si et seulement si  $\alpha'' \equiv 0$ , c'est-à-dire si  $\kappa = 0$ . Mais dans l'espace la courbure est toujours positive. Cela n'a plus de sens de parler d'une courbe se courbant vers la droite ou la gauche.

**Définition 1.1.19.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée par longueur d'arc. La normale  $n$  et la binormale  $b$  sont définies respectivement par  $n(s) = \alpha''(s)$  et  $b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s)$ .

**Définition 1.1.20.** La base orthonormale  $(\alpha'(t), n(t), b(t))$  est appelée trièdre de Frenet.



Le trièdre de Frenet est seulement défini pour les  $t$  tels que  $\kappa(t) \neq 0$ . La courbure d'une courbe plane montre comment le vecteur vitesse tourne dans la direction du vecteur normal. On introduit une notion similaire pour une courbe dans l'espace. Il mesure comment le vecteur normal sort du plan engendré par lui-même et le vecteur vitesse, c'est-à-dire comment il se déplace dans la direction du vecteur binormal. Ainsi la torsion d'une courbe tracée dans l'espace mesure la manière dont la courbe se tord pour sortir de son plan osculateur (plan contenant le cercle osculateur).

**Définition 1.1.21.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe dans l'espace paramétrée par longueur d'arc. Soit  $t_0 \in I$  avec  $\kappa(t_0) \neq 0$ , soit  $(\alpha'(t_0), n(t_0), b(t_0))$  le trièdre de Frenet de  $\alpha$  en  $t_0$ . Alors

$$\tau(t_0) = \langle n(t_0), b'(t_0) \rangle$$

est appelé torsion de  $\alpha$  en  $t_0$ .

**Proposition 1.1.8.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale. Pour tout  $s \in I$ , il existe  $\tau(s)$  tel que :

$$b'(s) = -\tau(s)n(s).$$

**Démonstration.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale. En dérivant  $b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s)$  membre à membre on obtient :

$$b'(s) = \alpha''(s) \wedge n(s) + \alpha'(s) \wedge n'(s) = \alpha'(s) \wedge n'(s).$$

Donc  $b'(s)$  est orthogonal à  $\alpha'(s)$  ; puisqu'il est aussi orthogonal à  $b(s)$ . D'où il est colinéaire à  $n(s)$ . Ainsi il existe  $\tau(s)$  tel que :

$$b'(s) = -\tau(s)n(s).$$

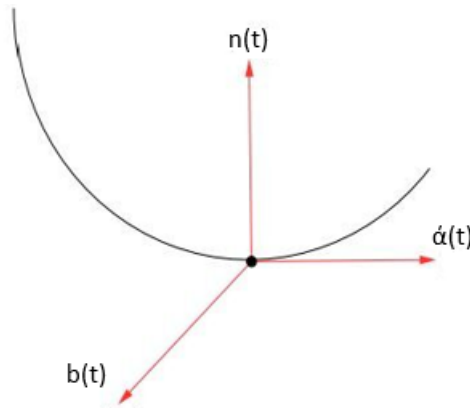


FIGURE 1.4 – Représentation de la Torsion.

□

**Exemple 1.1.4.** En reprenant l'exemple de l'hélice

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt). \end{aligned}$$

Alors  $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$ . D'où  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 1$ . Ainsi on paramétrise la courbe par longueur d'arc

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = t\sqrt{a^2 + b^2} \\ \beta(s) &= \alpha \circ \tau(s). \end{aligned}$$

De ce fait  $\beta(t) = \left( a \cos \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{tb}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$  est une reparamétrisation normale de  $\alpha$

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \beta''(t) &= \left( -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right).\end{aligned}$$

Ainsi la courbure est :

$$\kappa(t) = \|\beta''(t)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

La normale principale est égale à :

$$n = \frac{\beta''(t)}{\kappa(t)} = \left( -\cos \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \sin \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right).$$

La binormale est égale à :

$$b = \beta' \times n = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \left( \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

La torsion est alors égale à :

$$\tau(t) = \langle b', n \rangle = 1.$$

La torsion est donc constante tout le long de la courbe.

**Définition 1.1.22.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R}^3$  une courbe régulière paramétrée normale et  $\alpha(s)$  un point birégulier. Le trièdre de Frenet de  $\alpha$  au point birégulier  $\alpha(s)$  est le repère orthonormé direct :

$$(\alpha(s), \alpha'(s), n(s), b(s)).$$

**Proposition 1.1.9. (Formules de Frenet)**

Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale régulière de classe  $C^3$  en  $\alpha(s)$  un point birégulier en posant  $\alpha'(s) = v(s)$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}v'(s) &= \kappa(s)n(s), \\ n'(s) &= -\kappa(s)v(s) + \tau(s)b(s), \\ b'(s) &= -\tau(s)n(s).\end{aligned}$$

**Démonstration.** La première et la dernière relation ont déjà été montrées. Pour la deuxième relation, puisque  $n$  est unitaire donc en dérivant, on obtient que

$$n(t) \cdot n'(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Ainsi, le vecteur  $n'(t)$  est orthogonal  $n(t)$ , d'où ils existent  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que :

$$n'(t) = \lambda_1 v(t) + \lambda_2 b(t), \quad \forall t \in I.$$

Le repère  $(\alpha(s), v(s), n(s), b(s))$  étant orthonormé donc

$$n(t) \cdot v(t) = 0 \quad \text{et} \quad n(t) \cdot b(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

En différenciant, on obtient que

$$n'(t) \cdot v(t) = -n(t) \cdot v'(t) \quad \text{et} \quad n'(t) \cdot b(t) = -n(t) \cdot b'(t) \quad \forall t \in I.$$

Il résulte de la première et la dernière relation que

$$n'(t) \cdot v(t) = -\kappa(t) \quad \text{et} \quad n'(t) \cdot b(t) = \tau(t), \quad \forall t \in I.$$

Ainsi, on a le résultat. □

**Théorème 1.1.6.** Soit  $\alpha : [0, L] \subset \mathbb{R}^3$  une courbe fermée paramétrée par longueur d'arc alors

$$\int_0^L \kappa(s) ds \geq 2\pi,$$

avec égalité si et seulement si  $\alpha$  est une courbe plane convexe.

## 1.2 Les espaces $L^p$

Pour la bonne compréhension des résultats à établir dans le cadre de ce mémoire, il est nécessaire de rappeler certaines notions importantes. Il s'agit principalement des éléments de la théorie de mesure et intégration et de l'analyse fonctionnelle. Nous référons aux documents suivants : Allaire - Allouges [5], Franck Boyer [6], H. Boumaza [8], T. Aubin [9] et Brezis - Nirenberg [10].

Dans toute cette section  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2.1.** Soit  $1 \leq p < +\infty$ . On note  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions  $f$ , mesurable de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty.$$

On appelle espace  $L^p(\mathbb{R}^n)$  l'espace des classes de fonctions égales presque partout qui sont dans  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ . Plus précisément, on définit la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  par :

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p.}$$

et on définit l'espace  $L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \sim$ . On identifie la classe d'équivalence de  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  qui est un élément de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  avec son représentant  $f$ . Ainsi nous avons

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable tel que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\| = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

qui est la norme associée à  $L^p(\Omega)$ . Le passage à la limite de l'exposant  $p$  aboutit à la construction des espaces  $L^\infty(\Omega)$  de fonctions bornées.

**Définition 1.2.2.** On définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable} : \exists c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

On définit  $\|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p. dans } \Omega \}$ , la norme associée à  $L^\infty(\Omega)$ .

**Lemme 1.2.1. (Inégalité de Young)**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs et  $1 < p, q < +\infty$  deux exposants conjugués i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Théorème 1.2.1. (Inégalité de Hölder)**

Soient  $p$  et  $q$  deux exposants conjugués. Si  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ , le produit  $fg$  est dans  $L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.1)$$

**Démonstration.** Soient  $1 < p < \infty$  et  $q$  le conjugué de  $p$ . D'après l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall a \geq 0 \text{ et } \forall b \geq 0.$$

Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ . Posons  $a = |f(x)|$  et  $b = |g(x)|$ .

On a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Comme  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ , alors  $fg \in L^1(\Omega)$ .

On a par intégration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |g(x)|^q \, dx \\ &= \frac{1}{p} \|f(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|g(x)\|_{L^q(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Posons  $f = \lambda f$  avec  $\lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx &\leq \lambda^p \frac{1}{p} \|f(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|g(x)\|_{L^q(\Omega)}^q \\ \int_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx &\leq \lambda^{p-1} \frac{1}{p} \|f(x)\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g(x)\|_{L^q(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Posons

$$\lambda = \|f\|_{L^p(\Omega)}^{-1} \|g\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{q}{p}}.$$

Remplaçons  $\lambda$  par sa valeur, on obtient

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx \leq \frac{1}{p} \|f(x)\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}^{q-\frac{q}{p}} + \frac{1}{q} \|g(x)\|_{L^q(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)}^{q-\frac{q}{p}}.$$

Puisque  $q - \frac{q}{p} = 1$ , alors

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx \leq \frac{1}{p} \|f(x)\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} + \frac{1}{q} \|g(x)\|_{L^q(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right).$$

D'où

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

**Définition 1.2.3.** (les espaces  $L_{loc}^p$ ) Soit  $p \in [1, +\infty]$ . Une fonction mesurable  $f$  sur  $\Omega$  est un élément de  $L_{loc}^p(\Omega)$  lorsque pour tout compact  $K \subset \Omega$ ,  $\mathbf{1}_K f \in L^p(\Omega)$ .

Il n'existe pas de norme  $\|\cdot\|$  sur  $L_{loc}^p(\Omega)$  tel que  $(L_{loc}^p(\Omega), \|\cdot\|)$  soit un espace de Banach. On peut en revanche définir une notion de convergence sur  $L_{loc}^p(\Omega)$ .

**Définition 1.2.4.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de  $L_{loc}^p(\Omega)$ , et  $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ . On dit que  $(f_n)_n$  tend vers  $f$  dans  $L_{loc}^p(\Omega)$  (ou que cette suite converge localement dans  $L^p(\Omega)$  vers  $f$ ), lorsque pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ ,  $(\mathbf{1}_K f_n)_n$  converge vers  $\mathbf{1}_K f$  dans  $L^p(\Omega)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### 1.2.1 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Nous présentons le théorème de convergence dominée ou TCD en abrégé. Ce théorème affirme que

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n$$

lorsque  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite simplement convergente de fonctions intégrables dominée par une fonction positive intégrable  $g$  au sens suivant :  $|f_n| \leq g$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le fait qu'il suffise d'avoir une convergence simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  est un grand progrès par rapport aux énoncés qui peuvent être rencontrés dans le cadre de l'intégrale de Riemann. D'une manière générale, le théorème de convergence dominée est, comme nous le verrons, d'une grande utilité pratique.

#### Lemme 1.2.2. (de Fatou)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$  telle que :  
pour chaque  $n$ ,  $f_n(x) \geq 0$  p.p sur  $\Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

alors  $f \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \quad (1.2)$$

avec  $\mu$  une mesure de Lebesgue.

**Démonstration.** Soit  $g_n := \inf_{k \leq n} f_k$  et  $g := \liminf_n f_n = \lim_n g_n$ .

D'une part, comme  $g$  est la limite d'une suite de fonction croissante  $(g_n)$ , par application du théorème de Beppo Levi (voir [10]) on obtient :

$$\int_{\Omega} g d\mu = \lim_n \int_{\Omega} g_n d\mu. \quad (1.3)$$

D'autre part,  $g_n \leq f_n$  donc par la monotonie de l'intégrale, on a

$$\int_{\Omega} g_n d\mu \leq \int_{\Omega} f_n d\mu$$

et par passage à la limite

$$\liminf_n \left( \int_{\Omega} g_n d\mu \right) \leq \liminf_n \left( \int_{\Omega} f_n d\mu \right)$$

d'après l'égalité (1.3), on a

$$\int_{\Omega} g d\mu = \lim_n \int_{\Omega} g_n d\mu = \liminf_n \int_{\Omega} g_n d\mu = \int_{\Omega} \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_{\Omega} f_n d\mu$$

d'où on obtient la relation (1.2). □

#### Théorème 1.2.2. (de la convergence dominée de Lebesgue)

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$  et  $g \in L^1(\Omega)$ . Si on suppose que :

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p sur  $\Omega$ ,
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p sur  $\Omega$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ ,  
en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

**Démonstration.** D'abord montrons que  $f$  est intégrable. Puisque  $f$  est la limite simple d'une suite de fonction  $f_n$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ . Donc  $|f(x)| \leq g(x)$ . Ensuite posons  $h_n = 2g - |f_n - f| \geq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = 2g(x)$ . Par le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} h_n(x) d\mu \\ \int_{\Omega} 2g d\mu &\leq - \int_{\Omega} 2g d\mu + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( - \int_{\Omega} |f_n - f| \right) d\mu \\ 0 &\leq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \leq 0,$$

et on n'a aussi que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0.$$

De ce fait, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

□

## 1.2.2 Théorème de Fubini

Lorsque l'on calcule l'intégrale d'une fonction  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$  de plusieurs variables, le premier outil auquel on doit penser est le théorème de Fubini. Celui ci s'énonce sous la forme suivante :

### Théorème 1.2.3.

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+p})$ , où  $p$  et  $d \in \mathbb{N}$ . Alors les fonctions suivantes sont définies presque partout

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx$$

et sont respectivement dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $L^1(\mathbb{R}^p)$ . De plus, on a la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx \right) dy. \quad (1.4)$$

### Démonstration.

Soient  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  et  $[c, d] \subset \mathbb{R}^m$  avec  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Posons  $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  et  $h(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ . Montrons que

$$\int_a^b g(x) dx = \int_c^d h(y) dy. \quad (1.5)$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$\psi(x, t) := \int_c^t f(x, y) dy. \quad (1.6)$$

Posons

$$\varphi(t) = \int_a^b \psi(x, t) dx. \quad (1.7)$$

En dérivant sous le signe intégrale,

$$\varphi'(t) = \int_a^b \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx. \quad (1.8)$$

Rappel

$$\alpha(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy$$

par dérivation,

$$\alpha'(x) = b'(x)f(x, b(x)) - a'(x)f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy. \quad (1.9)$$

Utilisons la relation (1.9) pour dériver la relation (1.6) par rapport à  $t$ , on obtient

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = f(x, t).$$

Alors par la relation (1.8), on a

$$\varphi'(t) = \int_a^b f(x, t) dx = h(t).$$

Ainsi par intégration, on a

$$\begin{aligned} \int_c^d h(t) dt &= \int_c^d \varphi'(t) dt \\ &= \varphi(d) - \varphi(c). \end{aligned}$$

Donc par la relation (1.7) et (1.6), on obtient

$$\varphi(c) = \int_c^d \psi(x, c) dx = 0$$

par conséquent

$$\varphi(d) = \int_c^d h(t) dt = \int_a^b g(x) dt.$$

D'où on obtient la relation (1.5). □

### 1.2.3 Théorème du changement de variable

L'autre outil essentiel permettant de calculer une intégrale est le théorème de changement de variable. On note pour  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction différentiable sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^d$  et pour  $x \in U$ , la matrice jacobienne de  $\varphi$  en  $x$  par  $J_{\varphi(x)}$ . C'est la matrice  $\left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial_j}(x) \right]_{1 \leq i, j \leq d}$  de la différentielle de  $\varphi$  au point  $x$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ .

### **Théorème 1.2.4.**

Soit  $\varphi : U \rightarrow V = \varphi(U)$  un  $C^1$ -difféomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ . Alors,

1. pour toute fonction  $g$  mesurable et positive,  $g : \varphi(U) \rightarrow [0, +\infty)$ ,

$$\int_{\varphi(U)} g(y)dy = \int_U g(\varphi(x)) |det(J_\varphi(x))| dx.$$

2. Une fonction mesurable  $f : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrable sur  $\varphi(U)$  si et seulement si  $(f \circ \varphi)|det(J_\varphi(\cdot))|$  est intégrable sur  $U$  et on a

$$\int_{\varphi(U)} f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|det(J_\varphi(x))|dx.$$

Les changements de variable qui interviennent le plus souvent dans ce document sont les changements de variables en coordonnées polaire et les changements de variable linéaires. Pour le changement de variables en coordonnées polaire on a :

**Corollaire 1.2.1.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , nous avons le changement de variables en coordonnées polaire

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Ce qui devient dans  $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{[0, +\infty[} f(r\theta) r^{N-1} dr d\theta$$

avec

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in \mathbb{S}^{N-1} \quad \text{et} \quad \theta \text{ la mesure de la sphère.}$$

En effet, le changement en coordonnées polaires dans  $\mathbb{R}^2$  est donné par le difféomorphisme  $\Phi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  dont le jacobien en tout point est donné par :

$$J_\Phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

**Exemple 1.2.1.** Pour calculer l'intégrale gaussienne :  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ , on applique Fubini pour obtenir que

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Enfin, en appliquant le changement de variables en coordonnées polaires de dimension 2, on a :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi.$$

D'où  $I = \sqrt{\pi}$ .

## **1.3 Espaces de Sobolev**

En mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme  $L^p(\Omega)$  de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises au sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach ou des espaces de Hilbert. Les espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$  sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. Dans cette partie, nous référons aux documents suivants : G. Allaire - F. Allouges [5], Franck Boyer [6], J. Royer [13] et Bony J.-M [2].



### 1.3.1 Espace des fonctions test

Un multi-indice  $\alpha$  est un  $N$ -uplet,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ . On appelle longueur de  $\alpha$  l'entier  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ . On définit la factorielle de  $\alpha$  par  $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_N!$ . Si  $x \in \mathbb{R}^N$ , on pose aussi  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\alpha_N}$  et

$$\partial^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{\alpha_N}.$$

Dans la suite,  $C^0$  désigne l'espace des fonctions continues.  $C^k$  l'espace des fonctions  $k$  fois dérivables et dont les dérivées  $k$ -ièmes sont continues. Ainsi la fonction  $\Phi \in C^k$  si pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  tel que  $|\alpha| \leq k$ , la fonction  $\partial^\alpha \Phi$  est continue dans  $\Omega$ .

**Définition 1.3.1.** Soit  $\Phi$  une fonction réelle ou complexe. On appelle support de  $\Phi$ , noté  $\text{supp}(\Phi)$ , l'adhérence dans  $\mathbb{R}^N$  de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas. En d'autres termes

$$\text{supp}(\Phi) = \overline{\{x \in \Omega, \Phi(x) \neq 0\}}.$$

C'est-à-dire  $x_0 \notin \text{supp}(\Phi)$  si et seulement si, il existe  $V_{x_0}$  de  $x_0$  tel que pour tout  $x \in V_{x_0}$  on a  $\Phi(x) = 0$ .

**Définition 1.3.2.** L'espace des fonctions test noté  $C_0^\infty(\Omega)$  ou  $C_c^\infty(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  indéfiniment dérivables tel qu'il existe un compact  $K \in \Omega$ ,  $K = \text{supp}(\Phi)$ .

**Exemple 1.3.1.** 1. La fonction nulle  $0 \in C_0^\infty(\Omega)$ , car son support est l'ensemble vide qui est considéré comme un compact.  
2. Considérons la fonction  $\Phi$

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \Phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

#### Quelques propriétés de $C_0^\infty(\Omega)$

- L'espace des fonctions  $C_0^\infty(\Omega)$  est stable par de nombreuses opérations, par exemple la combinaison linéaire, le produit de convolution de deux fonctions dans  $C_0^\infty(\Omega)$  est une fonction dans  $C_0^\infty(\Omega)$ .
- Si  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  et  $g \in C^\infty(\Omega)$  alors  $fg \in C_0^\infty(\Omega)$ .

### 1.3.2 Dérivation faible

On définit tout d'abord le concept de dérivée faible dans  $L^2(\Omega)$ . Cette notion généralise la dérivation usuelle (parfois appelée, par opposition, dérivation forte) et est un cas particulier de la dérivation au sens des distributions (voir [2]).

**Définition 1.3.3.** Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ . On dit que  $v$  est dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$  s'il existe des fonctions  $w_i \in L^2(\Omega)$ , pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , telles que, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx. \quad (1.10)$$

Chaque  $w_i$  est appelée la  $i$ -ème dérivée partielle faible de  $v$  et notée désormais  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ .

**Remarque 1.3.1.** En dimensions supérieures, si  $u$  et  $v$  sont dans l'espace  $L_{loc}^1(\Omega)$  et  $\alpha$  un multi-indice, on dit que  $v$  est la dérivée faible d'ordre  $\alpha$  de  $u$  si

$$\int_{\Omega} u(t) \partial^\alpha \phi(t) dt = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(t) \phi(t) dt, \quad (1.11)$$

pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  et

$$\partial^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

### 1.3.3 Espace $H^1(\Omega)$

**Définition 1.3.4.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (1.12)$$

où  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est la dérivée partielle faible de  $v$  au sens de la définition 1.3.3.

**Proposition 1.3.1.** Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) \, dx \quad (1.13)$$

et la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

Nous allons utiliser les deux résultats suivants pour la preuve de la proposition 1.3.1.

**Théorème 1.3.1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soit  $H^1(\Omega)$  un espace de Hilbert. Soient  $u, v \in H^1(\Omega)$ . Alors

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (1.14)$$

**Démonstration.**

1. Si  $v = 0$  vrai.

2. Supposons que  $v \neq 0$ .

Soit  $t > 0$  et considérons que  $\langle u + tv, u + tv \rangle \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned} \langle u + tv, u + tv \rangle &= \langle u, u \rangle + 2t\langle u, v \rangle + t^2\langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

est un polynôme en  $t$  qui est toujours supérieur ou égal à 0. Donc son discriminant est  $\Delta' \leq 0$ ; c'est-à-dire

$$\langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0, \quad \text{alors} \quad \langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Donc

$$\sqrt{\langle u, v \rangle^2} \leq \|u\| \|v\|.$$

D'où, on obtient le résultat. □

**Proposition 1.3.2. (Inégalité de Minkowski)**

Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ ,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (1.15)$$

**Démonstration.** Développons  $\|u + v\|^2$ , on a

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

par l'inégalité de Schwarz

$$\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u + v\|)^2.$$

D'où, on obtient le résultat. □

**Démonstration de la proposition 1.3.1.** Il est évident de voir que la relation (1.13) définit bien un produit scalaire dans  $H^1(\Omega)$ . Vérifions que  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  est une norme dans  $H^1(\Omega)$ .

1. Soit  $u \in H^1(\Omega)$ , on a  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 0 \iff u = 0$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{H^1(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} (|\lambda u(x)|^2 + |\nabla \lambda u(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( |\lambda|^2 \int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \left( \int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\|\lambda u\|_{H^1(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

3. Pour tout  $u, v \in H^1(\Omega)$  on a

$$\|u + v\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|u(x) + v(x)|^2 + |\nabla u(x) + \nabla v(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

en appliquant l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\|u + v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Montrons que  $H^1(\Omega)$  est un espace complet pour la norme associée. Cela revient à montrer que toute suite de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$  converge dans  $H^1(\Omega)$ .

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$ . Par définition de la norme de  $(u_n)_{n \geq 1}$  dans  $H^1(\Omega)$ , on a

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = \|u_n\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

ainsi que  $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n \geq 1}$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  sont des suites de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Comme  $L^2(\Omega)$  est complet, il existe des limites  $u$  et  $w_i$  telles que  $u_n$  converge vers  $u$  et  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$  converge vers  $w_i$  dans  $L^2(\Omega)$ . Or, par définition de la dérivée faible de  $u_n$ , pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} u_n(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \phi(x) dx.$$

Par passage à la limite pour  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx,$$

ce qui prouve que  $u$  est dérivable au sens faible et  $w_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ . Donc  $u \in H^1(\Omega)$  et  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ . Donc  $H^1(\Omega)$  est complet. D'où  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.  $\square$

### 1.3.4 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  et qui nous sera très utile pour l'étude de notre problème.

**Définition 1.3.5.** Soit  $C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . L'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

**Proposition 1.3.3.** Muni du produit scalaire (1.13) de  $H^1(\Omega)$ , l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Démonstration.** Par définition,  $H_0^1(\Omega)$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  qui est un espace de Hilbert donc  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.  $\square$

**Théorème 1.3.2. (Inégalité de Poincaré)**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx. \quad (1.16)$$

**Démonstration.** Pour  $u \in H_0^1(\Omega)$  et  $]a, x[ \subset \Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on a

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x \nabla u(t) dt \right| \leq \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Alors

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} dt \right)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega} |u(t)| dt \leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)},$$

comme  $q$  est le conjugué de  $p$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  avec  $1 \leq p < \infty$ , d'après l'inégalité de Hölder

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} 1_{\Omega}(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ainsi

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{p}} \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{q}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{mes}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Or

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \text{mes}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

donc

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (\text{mes}(\Omega) + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Posons  $C = (\text{mes}(\Omega) + 1)$ . Alors

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En tenant compte de la norme de  $H^1(\Omega)$  et celle de  $L^2(\Omega)$ , on obtient

$$\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

donc

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

d'où

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq (C - 1) \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

$\square$

**Remarque 1.3.2. (a)** L'inégalité de Poincaré permet de dire que si  $\Omega$  est borné dans au moins une direction, la norme du gradient dans  $L^2(\Omega)$  contrôle la norme de la fonction dans  $L^2(\Omega)$ . Ainsi la norme du gradient dans  $L^2(\Omega)$  peut être définie comme une norme sur  $H_0^1(\Omega)$ .

**(b)** L'inégalité de Poincaré (1.16) n'est pas vraie pour les fonctions de  $H^1(\Omega)$ . En effet, les fonctions constantes (non nulles) annulent le terme de droite dans (1.16) mais pas le terme de gauche. L'hypothèse sous-jacente essentielle dans l'inégalité de Poincaré est que les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$  de l'ouvert  $\Omega$ .

**Corollaire 1.3.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.17)$$

est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme usuelle induite par celle de  $H^1(\Omega)$ .

**Démonstration.** Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . La première inégalité

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|v(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \left( C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq ((C+1))^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (C+1)^{\frac{1}{2}} |v|_{H_0^1(\Omega)},$$

d'où  $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C|v|_{H_0^1(\Omega)}$ , ce qui prouve que  $|v|_{H_0^1(\Omega)}$  est une norme équivalente à  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ .  $\square$

### 1.3.5 Formule de Green

**Théorème 1.3.3. (Formule de Green)**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ . Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) ds, \quad (1.18)$$

où  $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$  est la normale unité extérieure à  $\partial\Omega$ .

**Démonstration.** Soient  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ , on pose  $X(x) = u(x)v(x)e_i$ . Pour tout  $x \in \Omega$ , on a alors

$$\operatorname{div}(X)(x) = \partial_i(uv)(x) = v(x)\partial_i u(x) + u(x)\partial_i v(x).$$

Par intégration, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(X)(x) dx = \int_{\Omega} v(x)\partial_i u(x) dx + \int_{\Omega} u(x)\partial_i v(x) dx.$$

Ainsi par la formule de Stokes (voir [13]), on obtient

$$\int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) ds = \int_{\Omega} v(x)\partial_i u(x) dx + \int_{\Omega} u(x)\partial_i v(x) dx.$$

$\square$

**Corollaire 1.3.2. (Formule d'intégration par parties)**

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soient  $u$  une fonction de  $C^2(\bar{\Omega})$  et  $v$  une fonction de  $C^1(\bar{\Omega})$ , toutes deux à support borné dans le fermé  $\Omega$ . Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds, \quad (1.19)$$

où  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$  est le vecteur gradient de  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ .

**Démonstration.** Soient  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  et  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ , posons  $w(x) = v(x)\nabla u(x)$  et

$$\operatorname{div}(v(x)\nabla u(x)) = v(x)\Delta u(x) + \nabla v(x) \cdot \nabla u(x).$$

D'après la formule de Stokes (voir [13]),

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w(x))dx = \int_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) + \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot n(x)v(x)d\sigma.$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} \Delta uv dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

□

**Remarque 1.3.3.** Il n'y a pas de terme au bord dans cette formule d'intégration par parties, si le support de  $u$  est compact.

**Corollaire 1.3.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  coïncide avec le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$ .

### 1.3.6 Un résultat de compacité

**Théorème 1.3.4. (Théorème de Rellich)**

Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , alors de toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$ , on peut extraire une sous-suite convergente dans  $L^2(\Omega)$  (on dit que l'injection canonique de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte).

### 1.3.7 Espaces $H^m(\Omega)$

On peut aisément généraliser la définition 1.3.4 de l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  aux fonctions qui sont  $m \geq 0$  fois dérivables au sens faible. Commençons par donner une convention d'écriture bien utile. Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  un multi-indice, c'est-à-dire un vecteur à  $N$  composantes entières

positives  $\alpha_i \geq 0$ . On note  $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ , pour une fonction  $v$ ,

$$\partial^{\alpha} v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x).$$

À partir de la définition 1.3.3 de la dérivée première faible, on définit par récurrence sur  $m$  la dérivée d'ordre  $m$  faible : on dit qu'une fonction  $v \in L^2(\Omega)$  est  $m$  fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles faibles d'ordre  $m - 1$  sont dérivables faiblement au sens de la définition 1.3.3. Remarquons que, dans la définition d'une dérivée croisée, l'ordre de dérivation n'est pas important, à cause du théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i},$$

ce qui justifie la notation  $\partial^{\alpha} v$  où l'ordre de dérivation n'est pas indiqué.

**Définition 1.3.6.** Pour un entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ et } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (1.20)$$

où la dérivée partielle  $\partial^\alpha v$  est à prendre au sens faible.

**Proposition 1.3.4.** Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx \quad (1.21)$$

et de la norme  $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Définition 1.3.7. (Transformation Kelvin)** Soit  $D$  un domaine dans  $\mathbb{R}^N$  pour  $N \geq 3$ . Si  $u$  est une fonction harmonique dans un domaine  $D$ , alors sa transformée de Kelvin est la fonction

$$V(y) = \left( \frac{R}{|y|} \right)^{N-2} u \left( \frac{R^2}{|y|^2} y \right), \quad V(\infty) = 0$$

qui est harmonique dans le domaine  $D'$  obtenu à partir de  $D$  par inversion dans la sphère  $S_R = \{x : |x| = R\}$  défini par

$$x \longrightarrow y = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad 0 \longrightarrow \infty,$$

où  $x = (x_1 \dots x_n)$ ,  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ .

Dans ce chapitre, nous avons rappelé des notions d'une courbe régulière et enfin des notions d'analyse à savoir la mesure, l'intégration et l'analyse fonctionnelle. Particulièrement les espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$  qui seront utiles pour trouver un minimiseur de l'équation de Hardy-Sobolev.

## Chapitre 2

# L'ÉQUATION DE HARDY-SOBOLEV NON PERTURBÉE

Les équations non perturbées sont les équations pour lesquelles le terme perturbatif est nul, dans notre cas d'étude, le terme  $b$  du problème (5) est nul. Dans cette partie, il s'agira d'étudier l'existence de solution de l'équation (6) dans l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$ , pour  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  avec  $N \geq 4$ . Soient  $\sigma \in ]0, 2[$  et  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Soit  $\Gamma$  une courbe fermée régulière de  $\Omega$ . On considère l'infimum de Hardy-Sobolev suivant :

$$\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy + \int_{\Omega} hu^2 dy}{\left( \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u|^{2^*} dy \right)^{\frac{2}{2^*}}}. \quad (2.1)$$

Rappelons que la meilleure constante de Hardy-Sobolev avec singularité cylindrique est donnée par [14] :

$$S_{N,\sigma} = \min_{v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left( \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-\sigma} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}, \quad (2.2)$$

avec  $x = (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ . L'objectif est de montrer que si  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma) < S_{N,\sigma}$ , alors l'infimum  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma)$  est atteint. Le résultat principal de cette partie est le suivant :

**Théorème 2.0.1.** *Soient  $N \geq 4$ ,  $\sigma \in ]0, 2[$  et  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $\Gamma$  une courbe fermée contenue dans  $\Omega$  et  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que l'opérateur  $-\Delta + h$  soit coercif. Alors il existe une constante  $C_{N,\sigma}$  strictement positive, dépendant uniquement de  $N$  et de  $\sigma$  avec la propriété que si  $y_0 \in \Gamma$  est telle que*

$$h(y_0) < -C_{N,\sigma} |k(y_0)|^2. \quad (2.3)$$

*Alors la fonctionnelle  $J$  admet un minimiseur  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Ici  $k : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$  est la courbure de la courbe  $\Gamma$ .*

L'inégalité (2.3) du théorème 2.0.1 montre que le signe de la courbure n'est pas important mais sa norme l'est. Dans ce chapitre, nous allons démontrer le théorème 2.0.1. Pour cela, on construit des fonctions tests pour pouvoir comparer  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma)$  et  $S_{N,\sigma}$ . Il est toujours vrai que  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma) \leq S_{N,\sigma}$ , notre méthode consiste à trouver une fonction test pour laquelle  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma) < S_{N,\sigma}$ , cela permet de retrouver de la compacité, ainsi pour toute suite minimisante de  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma)$ , il existe une sous suite qui converge vers un minimiseur. La fonction test sera construite à partir du minimiseur  $w$  de  $S_{N,\sigma}$ . En faisant un changement de variable et en utilisant le système de coordonnées locales, on voit que l'influence de la géométrie locale de la courbe pour obtenir une condition suffisante d'existence de minimiseur.



Ce chapitre est divisé en 4 sections : dans la section 2.1, nous faisons une paramétrisation locale et nous définissons une métrique. Dans la section 2.2, nous étudions l'inégalité de Hardy-Sobolev cylindrique sur  $\mathbb{R}^N$ . Nous terminons par une construction des fonctions tests pour l'existence d'un minimiseur : pour la dimension  $N \geq 4$  dans la section 2.3 et pour  $N = 3$  dans la section 2.4. La référence principale de ce chapitre est Fall-Thiam [14].

## 2.1 Paramétrisation et métrique

Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$  une courbe fermée et lisse. Soit  $(E_1, \dots, E_N)$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^N$ . Pour tout  $y_0 \in \Gamma$  et  $r > 0$  petit, on considère la courbe  $\gamma : ]-r, r[ \rightarrow \Gamma$ , paramétrée par longueur d'arc, tel que  $\gamma(0) = y_0$ . Pour une translation et une rotation, nous supposons que  $\gamma'(0) = E_1$  et aussi un champ orthonormal lisse  $(E_2(t), \dots, E_N(t))$  sur le fibré normal de  $\Gamma$  de telle sorte que  $(\gamma'(t), E_2(t), \dots, E_N(t))$  soit une base orienté de  $\mathbb{R}^N$  pour tout  $t \in ]-r, r[$ , avec  $E_i(0) = E_i$ . Posons

$$Q_r := ]-r, r[ \times B_{\mathbb{R}^{N-1}}(0, r),$$

où  $B_{\mathbb{R}^k}(0, r)$  est une boule de  $\mathbb{R}^k$  de rayon  $r$  et de centre 0. Si  $r > 0$  suffisamment petit, la fonction  $F_{y_0} : Q_r \rightarrow \Omega$  définie par

$$(t, z) \mapsto F_{y_0}(t, z) := \gamma(t) + \sum_{i=2}^N z_i E_i(t), \quad (2.4)$$

est régulière et paramétrée par longueur d'arc au voisinage de  $y_0 = F_{y_0}(0, 0)$ . Nous considérons  $\rho_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction distance à la courbe

$$\rho_\Gamma(y) = \min_{\bar{y} \in \Gamma} |y - \bar{y}|.$$

Dans le système de coordonnées locales ci-dessus, nous avons

$$\rho_\Gamma(F_{y_0}(x)) = |z| \quad \forall x = (t, z) \in Q_r. \quad (2.5)$$

Puisque  $\gamma$  est une courbe paramétrée, pour tout  $t \in ]-r, r[$  et  $i, j = 2, \dots, N$

$$E'_i(t) = k_i(t)\gamma'(t) + \sum_{j=2}^N \tau_i^j(t)E_j(t), \quad (2.6)$$

la quantité  $k_i(t)$  est une courbure de direction  $E_i(t)$ , tandis que  $\tau_i^j(t)$  est une torsion du plan d'osculateur parcouru par  $\{\gamma'(t), E_j(t)\}$  de direction  $E_i$ . On note  $r > 0$  suffisamment petit,  $k_i(t)$  et  $\tau_i^j(t)$  sont des fonctions régulières sur  $]-r, r[$ . De plus  $\tau_i^j(t) = -\tau_j^i(t)$  pour tout  $i, j = 2, \dots, N$ . Le vecteur courbure  $k : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$  est défini par :

$$k(\gamma(t)) := \sum_{i=2}^N k_i(t)E_i(t) \quad \text{et sa norme est} \quad |k(\gamma(t))| := \sqrt{\sum_{i=2}^N k_i^2(t)}. \quad (2.7)$$

Ensuite, nous dérivons l'expansion de la métrique induite par la paramétrisation  $F_{y_0}$  définie ci-dessus. Pour tout  $x = (t, z) \in Q_r$ , nous définissons

$$g_{11}(x) = \partial_t F_{y_0}(x) \cdot \partial_t F_{y_0}(x), \quad g_{1i}(x) = \partial_t F_{y_0}(x) \cdot \partial_{z_i} F_{y_0}(x) \quad \text{et} \quad g_{ij}(x) = \partial_{z_j} F_{y_0}(x) \cdot \partial_{z_i} F_{y_0}(x).$$

Nous avons les résultats suivants.

**Lemme 2.1.1.**

Il existe  $r > 0$ , dépendant seulement de  $\Gamma$  et  $N$ , tel que pour tout  $x = (t, z) \in Q_r$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11}(x) = 1 + 2 \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) + 2t \sum_{i=2}^N z_i k_i'(0) + \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + \sum_{ij=2}^N z_i z_j \beta_{ij} + O(|x|^3), \\ g_{1i}(x) = \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(0) + t \sum_{j=2}^N z_j (\tau_j^i)'(0) + O(|x|^3), \\ g_{ij}(x) = \delta_{ij}, \end{array} \right.$$

où

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{l=2}^N \tau_i^l(t) \tau_j^l(t).$$

**Démonstration.** Posons  $F = F_{y_0}$  pour simplifier les notations, on a :  
les dérivées partielles de la relation (2.4) par rapport à  $t$

$$\partial_t F(x) = \gamma'(t) + \sum_{j=2}^N z_j E_j'(t). \quad (2.8)$$

Les dérivées partielles de la relation (2.4) par rapport à  $z_i$

$$\partial_{z_i} F(x) = E_i(t). \quad (2.9)$$

Ainsi, on a la dérivée de l'expansion de la métrique induite par la paramétrisation  $F_{y_0}$  :

▷ pour  $g_{ij}(x)$  : on a

$$g_{ij}(x) = \partial_{z_j} F_{y_0}(x) \cdot \partial_{z_i} F_{y_0}(x),$$

d'après (2.9)

$$g_{ij}(x) = E_i(t) E_j(t) = \delta_{ij}. \quad (2.10)$$

▷ Pour  $g_{1i}(x)$  : d'après les relations (2.8) et (2.9), on a

$$\begin{aligned} g_{1i}(x) &= \partial_t F_{y_0}(x) \cdot \partial_{z_i} F_{y_0}(x) \\ &= \left( \gamma'(t) + \sum_{j=2}^N z_j E_j'(t) \right) \cdot E_i(t) \\ &= \gamma'(t) \cdot E_i(t) + \sum_{j=2}^N z_j E_j'(t) \cdot E_i(t), \end{aligned}$$

or  $E_1(t) = \gamma'(t)$  un vecteur tangent et orthogonal à  $E_i(t)$  alors  $E_1(t) \cdot E_i(t) = 0$ , donc

$$g_{1i}(x) = \sum_{j=2}^N z_j E_j'(t) E_i(t).$$

En remplaçant l'expression de  $E_j'(t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} g_{1i}(x) &= \sum_{j=2}^N z_j \left( k_j(t) \gamma'(t) + \sum_{i=2}^N \tau_j^i(t) E_i(t) \right) E_i(t) \\ &= \sum_{j=2}^N z_j k_j(t) E_1(t) \cdot E_i(t) + \sum_{il=2}^N \tau_j^i(t) z_l E_i(t) E_i(t), \end{aligned}$$

or  $E_i(t)E_i(t) = 1$ , alors

$$g_{1i}(x) = \sum_{l=2}^N z_l E'_l(t) \cdot E_i(t) = \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(t). \quad (2.11)$$

Appliquons la formule de Taylor de  $\tau_j^i(t)$  à l'ordre 2 au point 0, on a

$$\tau_j^i(t) = \tau_j^i(0) + t(\tau_j^i)'(0) + O(|t^2|).$$

Cependant, on obtient  $g_{1i}(x)$ .

▷ Pour  $g_{11}(x)$  : on a

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= \partial_t F(x) \cdot \partial_t F(x) = \left( \gamma'(t) + \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \right)^2 \\ &= \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) + 2\gamma'(t) \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) + \left( \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \right)^2, \end{aligned}$$

puisque la courbe  $\Gamma$  est paramétrée par longueur d'arc, alors  $\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = |\gamma'(t)|^2 = 1$ , car  $\gamma'(t)$  est un vecteur tangent, alors

$$g_{11}(x) = 1 + 2 \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \gamma'(t) + \left( \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \right)^2, \quad (2.12)$$

or

$$\left( \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \right)^2 = \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \sum_{i=2}^N z_i E'_i(t) = \sum_{ij=2}^N z_j z_i E'_j(t) E'_i(t).$$

En appliquant la relation (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \right)^2 &= \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( k_i(t) \gamma'(t) + \sum_{j=2}^N \tau_i^j(t) E_j(t) \right) E'_j(t) \\ &= \left[ \sum_{ij=2}^N z_j z_i k_i(t) \gamma'(t) + \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( \sum_{j=2}^N \tau_i^j(t) E_j(t) \right) \right] E'_j(t) \\ &= \sum_{ij=2}^N z_j z_i k_i(t) k_j(t) \gamma'(t) \gamma'(t) + \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( \sum_{j=2}^N \tau_i^j(t) E_j(t) \right) k_j(t) \gamma'(t) \\ &\quad + \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( \sum_{i=2}^N \tau_j^i(t) E_i(t) \right) k_i(t) \gamma'(t) + \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( \sum_{j=2}^N \tau_i^l(t) \tau_j^l(t) E_j(t) E_i(t) \right), \end{aligned}$$

comme  $\tau_i^j(t) = -\tau_j^i(t)$  et  $\gamma'(t) \gamma'(t) = 1$  et  $E(t)E(t) = 1$ , on obtient la relation suivante :

$$\left( \sum_{j=2}^N z_j E'_j(t) \right)^2 = \sum_{ij=2}^N z_j z_i k_i(t) k_j(t) + \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( \sum_{j=2}^N \tau_i^l(t) \tau_j^l(t) \right).$$

Donc par la relation (2.12), on obtient

$$g_{11}(x) = 1 + 2 \sum_{j=2}^N z_j k_i(t) + \sum_{ij=2}^N z_j z_i k_i(t) k_j(t) + \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( \sum_{j=2}^N \tau_i^l(t) \tau_j^l(t) \right). \quad (2.13)$$

Par la formule de Taylor de  $k_i(t)$  au point 0 et d'ordre 2,  $k_i(t) = k_i(0) + tk_i'(0) + O(|t^2|)$ . Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= 1 + 2 \sum_{j=2}^N z_j k_i(0) + 2t \sum_{j=2}^N z_j k_i'(0) + \sum_{ij=2}^N z_j z_i k_i(0) k_j(0) \\ &+ \sum_{ij=2}^N z_j z_i \left( \sum_{l=2}^N \tau_i^l(0) \tau_j^l(0) \right) + O(|x|^3). \end{aligned}$$

Posons  $\beta_{ij}(0) = \sum_{l=2}^N \tau_i^l(0) \tau_j^l(0)$ .

Ainsi, on obtient  $g_{11}(x)$ .

□

**Lemme 2.1.2.**

Il existe  $r > 0$ , dépendant seulement de  $\Gamma$  et  $N$ , tel que pour tout  $x \in Q_r$ , nous avons :

$$\sqrt{|g|(x)} = 1 + \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) + t \sum_{i=2}^N z_i k_i'(0) + \frac{1}{2} \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + O(|x|^3), \quad (2.14)$$

où  $|g|$  représente le déterminant de  $g$  et  $g^{-1}(x)$  la matrice inverse de  $g(x)$  avec des composantes

$$\left\{ \begin{aligned} g^{11}(x) &= 1 - 2 \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) - 2t \sum_{i=2}^N z_i k_i'(0) + 3 \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + O(|x|^3), \\ g^{i1}(x) &= - \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(0) - t \sum_{j=2}^N z_j (\tau_j^i)'(0) + 2 \sum_{j=2}^N z_l z_j k_l(0) \tau_j^i(0) + O(|x|^3), \\ g^{ij}(x) &= \delta_{ij} + \sum_{lm=2}^N z_l z_m \tau_l^j(0) \tau_m^i(0) + O(|x|^3). \end{aligned} \right. \quad (2.15)$$

**Démonstration.** Par définition,  $g(x) = id + H(x)$  avec  $g : Q_r \rightarrow \Omega$ ,  $id$  représente la matrice identité de  $M_N(\mathbb{R})$  et d'après le lemme 2.1.1,  $H$  est une matrice symétrique avec des composantes suivants :  $\alpha, \beta = 1, \dots, N$  donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} H_{11}(x) &= 2 \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) + 2t \sum_{i=2}^N z_i k_i'(0) + \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + \sum_{ij=2}^N z_i z_j \beta_{ij}(0) + O(|x|^3), \\ H_{1i}(x) &= \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(0) + O(|x|^2), \\ H_{ij}(x) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

Rappelons que  $|g|$  est le déterminant de la matrice  $g$ . On a  $|g| = \det(H + id)$ , posons  $I = id$ , alors

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{\det(H + I)}.$$

Par la formule de développement limité d'ordre 1, lorsque  $H \rightarrow 0$ , on a

$$\sqrt{\det(H + I)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \det(I + H) + O(|H|).$$

Le développement du polynôme caractéristique  $P_H(X)$  d'une matrice  $H$  d'ordre  $n$  est donné par :

$$P_H(X) := \det(XI_n + H) = X^n - C_{n-1}X^{n-1} + \dots + C_1X + C_0,$$

avec  $C_{n-1}$  et  $C_{n-2}$  sont des coefficients du polynôme caractéristique. Pour  $X = 1$  et  $n = 2$ , on a

$$\det(I + H) = 1 - C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Comme  $C_{n-1} = -trH$  et  $C_{n-2} = \frac{tr(H)^2 - tr(H^2)}{2}$ , alors on obtient

$$\det(I + H) = 1 + trH + \frac{tr(H)^2 - tr(H^2)}{2}.$$

Cependant

$$\sqrt{\det(I + H)} = 1 + \frac{trH}{2} + \frac{tr(H)^2}{4} - \frac{tr(H^2)}{4} + O(|H|^3),$$

d'où

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{\det(I + H)} = 1 + \frac{trH}{2} + \frac{tr(H)^2}{4} - \frac{(trH^2)}{4} + O(|H|^3). \quad (2.17)$$

Lorsque  $|x| \mapsto 0$ , comme  $H$  est une matrice symétrique et  $g(x) = H(x) + id$ , on a  $trH(x) = H_{11}(x) + H_{ij}(x)$ . En appliquant la relation (2.16), nous avons

$$trH = 2 \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) + 2t \sum_{i=2}^N z_i k'_i(0) + \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + \sum_{ij=2}^N z_i z_j \beta_{ij}(0) + O(|x|^3).$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{trH}{2} = \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) + t \sum_{i=2}^N z_i k'_i(0) + \frac{1}{2} \sum_{ij}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + \frac{1}{2} \sum_{ij=2}^N z_i z_j \beta_{ij}(0) + O(|x|^3). \quad (2.18)$$

Ce dernier entraîne que

$$\left(\frac{trH}{2}\right)^2 = \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + O(|x|^3). \quad (2.19)$$

Comme  $H$  est une matrice symétrique,  $H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha}$  et

$$\begin{aligned} tr(H^2) &= \sum_{\alpha=1}^N (H^2(x))_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha\beta=1}^N H_{\alpha\beta}(x) H_{\beta\alpha}(x) \\ &= \sum_{\alpha\beta=1}^N H_{\alpha\beta}^2(x) \\ &= H_{11}^2 + 2 \sum_{ij=2}^N H_{1i} H_{1j} + H_{ij}^2. \end{aligned}$$

Or  $H_{1i} H_{1j} = H_{1i}^2$  et  $H_{ij} = 0$ , alors

$$tr(H^2) = H_{11}^2 + 2 \sum_{i=2}^N H_{1i}^2(x). \quad (2.20)$$

Calculons  $H_{11}^2(x)$ , on a :  $trH = H_{11} + H_{ij}$

$$(trH)^2 = (H_{11} + H_{ij})^2 = H_{11}^2 \text{ car } H_{ij} = 0.$$

Donc

$$H_{11}^2(x) = 4 \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + O(|x|^3). \quad (2.21)$$

Calculons  $H_{1i}^2(x)$ , on a

$$H_{1i}(x) = \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(0) + O(|x|^3),$$

ainsi

$$H_{1i}^2(x) = \left( \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(0) \right)^2 + O(|x|^3) = \left( \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^l(0) \right) \left( \sum_{i=2}^N z_j \tau_i^l(0) \right) + O(|x|^3)$$

donc

$$H_{1i}^2(x) = \sum_{ij=2}^N z_i z_j \tau_i^l(0) \tau_j^l(0) + O(|x|^3). \quad (2.22)$$

En utilisant les relations (2.21) et (2.22) dans la relation (2.20), on obtient :

$$\text{tr}(H^2) = 4 \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + 2 \sum_{ij=2}^N z_i z_j \tau_i^l(0) \tau_j^l(0) + O(|x|^3).$$

Ce dernier entraîne que,

$$\frac{-\text{tr}(H^2)}{4} = - \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) - \frac{1}{2} \sum_{ij=2}^N z_i z_j \tau_i^l(0) \tau_j^l(0) + O(|x|^3). \quad (2.23)$$

En tenant compte des relations (2.18), (2.19) et (2.23) dans la relation (2.17), on obtient la relation (2.14).

Enfin déterminons la matrice inverse  $g^{-1}$  de  $g$ . Posons

$$g(x) = id + A(x) + B(x) + O(|x|^3),$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques de composants  $(A_{\alpha\beta})$  et  $(B_{\alpha\beta})$ , pour tout  $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ .

En utilisant les résultats du lemme 2.1.1, on identifie que la matrice  $A$  est :

$$A_{11}(x) = 2 \sum_{i=2}^N z_i k_i(0), \quad A_{1i}(x) = \sum_{j=2}^N z_j \tau_i^j(0) \text{ et } A_{ij}(x) = 0, \quad (2.24)$$

et la matrice  $B$  est :

$$B(x) = \begin{cases} B_{11}(x) &= 2t \sum_{i=2}^N z_i k_i'(0) + \sum_{i=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + \sum_{ij=2}^N z_i z_j \beta_{ij}(0), \\ B_{1i}(x) &= t \sum_{j=2}^N z_j (\tau_j^i)'(0), \\ B_{ij}(x) &= 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Lorsque  $|x| \rightarrow 0$ , par la formule de Taylor, on obtient

$$g^{-1}(x) = id - A(x) - B(x) + A^2(x) + O(|x|^3).$$

▷ Pour  $g^{11}(x)$ , d'après les relations (2.24) et (2.25), on obtient :

$$\begin{aligned} g^{11}(x) &= 1 - A_{11}(x) - B_{11}(x) + \sum_{\alpha=1}^N A_{1\alpha}^2(x) + O(|x|^3) \\ &= 1 - A_{11}(x) - B_{11}(x) + A_{11}^2(x) + \sum_{i=2}^N A_{1i}^2(x) + O(|x|^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{11}(x) &= 1 - 2 \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i(0) - 2t \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i'(0) - \sum_{ij=2}^N z_i z_j \kappa_i(0) \kappa_j(0) - \sum_{ij=2}^N z_i z_j \beta_{ij}(0) \\
&\quad + \left( 2 \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i(0) \right)^2 + \sum_{i=2}^N \left( \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(0) \right)^2 + O(|x|^3) \\
&= 1 - 2 \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i(0) - 2t \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i'(0) - \sum_{ij=2}^N z_i z_j \kappa_i(0) \kappa_j(0) - \sum_{ij=2}^N z_i z_j \beta_{ij}(0) \\
&\quad + 4 \sum_{ij=2}^N z_i z_j \kappa_i(0) \kappa_j(0) + \sum_{ijl=2}^N z_i z_j \tau_i^l \tau_j^l + O(|x|^3).
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$g^{11}(x) = 1 - 2 \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i(0) - 2t \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i'(0) + 3 \sum_{ij=2}^N z_i z_j \kappa_i(0) \kappa_j(0) + O(|x|^3). \tag{2.26}$$

▷ Pour  $g^{i1}(x)$ , on a :

$$g^{i1}(x) = -A_{1i}(x) - B_{1i}(x) + \sum_{\alpha=1}^N A_{i\alpha} A_{1\alpha} + O(|x|^3),$$

puisque

$$\sum_{\alpha=1}^N A_{i\alpha} A_{1\alpha} = A_{i1}(x) A_{11}(x) + \sum_{ji=2}^N A_{ij}(x) A_{1j}(x),$$

alors

$$g^{i1}(x) = -A_{1i}(x) - B_{1i}(x) + \sum_{ij=2}^N A_{ij}(x) A_{1j}(x) + A_{i1}(x) A_{11}(x) + O(|x|^3).$$

On sait que  $A_{ij}(x) = 0$ , alors

$$A_{i1}(x) A_{11}(x) = 2 \sum_{i=2}^N z_i \kappa_i(0) \sum_{j=2}^N z_j \tau_j^i(0) = 2 \sum_{jl=2}^N z_l \kappa_l(0) z_j \tau_j^i(0).$$

Ainsi, on obtient  $g^{i1}(x)$  de la relation (2.15).

▷ Pour  $g^{ij}(x)$  :

$$g^{ij}(x) = \delta_{ij} - A_{ij}(x) - B_{ij}(x) + (A^2)_{ij}(x) + O(|x|^3),$$

ainsi

$$(A^2)_{ij}(x) = A_{1i}(x) A_{1j}(x) + \sum_{l=2}^N A_{il}(x) A_{jl}(x) + O(|x|^3),$$

alors

$$A_{1i}(x) A_{1j}(x) = \sum_{m=2}^N z_m \tau_m^i(0) \cdot \sum_{l=2}^N z_l \tau_l^j(0) = \sum_{lm=2}^N z_m z_l \tau_m^i(0) \tau_l^j(0)$$

et  $A_{il} = 0$  et  $A_{jl} = 0$  avec  $l = 2, \dots, N$ . Enfin, on obtient  $g^{ij}(x)$  de la relation (2.15).  $\square$

## 2.2 L'inégalité de Hardy-Sobolev cylindrique sur $\mathbb{R}^N$

Nous considérons la meilleure constante de Hardy-Sobolev avec l'inégalité cylindrique donnée par :

$$S_{N,\sigma} = \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx : w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |z|^{-\sigma} |w|^{2^*_\sigma} dx = 1 \right\}.$$

Il existe une fonction positive  $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ , satisfaisant l'équation :

$$-\Delta w = S_{N,\sigma} |z|^{-\sigma} |w|^{2^*_\sigma - 1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \quad (2.27)$$

voir [14]. Pour une certaine fonction  $\theta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , donnée par :

$$w(x) = w(t, z) = \theta(|t|, |z|). \quad (2.28)$$

Ensuite, nous avons besoin des résultats des estimations de  $w$  faisant intervenir ses dérivées d'ordres supérieurs.

### Lemme 2.2.1.

Soit une fonction  $\theta$  donnée par la relation (2.28). Alors, nous avons les propriétés suivantes :

(a) la fonction  $t \rightarrow \theta(t, \rho)$  est de classe  $C^\infty$  avec tout ses dérivées uniformément bornées en fonction de  $\rho$ .

(b) Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $|(t, \rho)| \leq 1$ , nous avons

$$\theta_\rho(t, \rho) + \theta_{t\rho}(t, \rho) + \rho\theta_{\rho\rho}(t, \rho) \leq C\rho^{1-\sigma}.$$

**Démonstration.** La démonstration de (a) voir. I. Fabbri, G. Mancini and K. Sandeep [12]. La preuve de (b), en utilisant les coordonnées polaires  $|z| = \rho$ , on obtient :  $w(t, \rho) = \theta(|t|, |\rho|)$ . Ainsi

$$\Delta w(t, \rho) = \partial_t^2 \theta(|t|, |\rho|) + \partial_\rho^2 \theta(|t|, |\rho|).$$

Posons

$$\partial_t^2 \theta(|t|, |\rho|) = \theta_{tt} \quad \text{et} \quad \partial_\rho^2 \theta(|t|, |\rho|) = \theta_{\rho\rho}.$$

Alors d'après les relations (2.27) et (2.28), on obtient

$$\Delta w(t, \rho) = S_{N,\sigma} \rho^{-\sigma} w^{2^*_\sigma - 1} = S_{N,\sigma} \rho^{-\sigma} \theta^{2^*_\sigma - 1} = \theta_{tt} + \theta_{\rho\rho}$$

donc

$$\rho^{2-N} (\rho^{N-2} \theta_\rho)_\rho + \theta_{tt} = S_{N,\sigma} \rho^{-\sigma} \theta^{2^*_\sigma - 1},$$

d'où

$$(\rho^{N-2} \theta_\rho)_\rho + \rho^{N-2} \theta_{tt} = S_{N,\sigma} \rho^{N-2} \rho^{-\sigma} \theta^{2^*_\sigma - 1}. \quad (2.29)$$

En intégrant cette identité suivant la variable  $\rho$ , on obtient

$$\int_0^\rho (r^{N-2} \theta_r)_r dr + \int_0^\rho r^{N-2} \theta_{tt}(t, r) dr = S_{N,\sigma} \int_0^\rho r^{N-2} r^{-\sigma} \theta^{2^*_\sigma - 1}(t, r) dr.$$

Ceci entraîne que

$$\theta_\rho(t, \rho) = -\rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} \theta_{tt}(t, r) dr + S_{N,\sigma} \rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} r^{-\sigma} \theta^{2^*_\sigma - 1}(t, r) dr.$$

En dérivant sous le signe intégrale par rapport à  $t$ , on obtient

$$\theta_{t\rho}(t, \rho) = -\rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} \theta_{ttt}(t, r) dr + S_{N,\sigma} \rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} r^{-\sigma} \partial_t \theta(t, r) \theta^{2^*_\sigma - 2}(t, r) dr.$$



Comme  $2_\sigma^* \geq 2$ , d'après (a), on obtient

$$\begin{aligned}
|\theta_\rho(t, \rho) + \theta_{t\rho}(t, \rho)| &\leq |\theta_\rho(t, \rho)| + |\theta_{t\rho}(t, \rho)| \\
&\leq \left| -\rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} (\theta_{tt}(t, r) + \theta_{ttt}(t, r)) dr \right| + \\
&\quad \left| S_{N,\sigma} \rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} r^{-\sigma} (\theta^{2_\sigma^*-1}(t, r) + \partial_t \theta(t, r) \theta^{2_\sigma^*-2}(t, r)) dr \right| \\
&\leq \left| -\rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} dr \right| + \left| S_{N,\sigma} \rho^{2-N} \int_0^\rho r^{N-2} r^{-\sigma} dr \right| \\
&= \rho^{2-N} \frac{1}{N-1} [r^{N-1}]_0^\rho + S_{N,\sigma} \rho^{2-N} \frac{1}{N-1-\sigma} [r^{N-1-\sigma}]_0^\rho \\
&= \rho \frac{1}{N-1} + S_{N,\sigma} \frac{1}{N-1-\sigma} \rho^{1-\sigma} \\
&= C\rho + C\rho^{1-\sigma}.
\end{aligned}$$

D'où

$$|\theta_\rho(t, \rho)| + |\theta_{t\rho}(t, \rho)| \leq C\rho + C\rho^{1-\sigma} \quad \text{pour tout } |(t, \rho)| \leq 1. \quad (2.30)$$

En utilisant la relation (2.29), on obtient

$$|\theta_{\rho\rho}| = \left| S_{N,\sigma} \rho^{-\sigma} \theta^{2_\sigma^*-1} - \theta_{tt} \right| \leq \left| S_{N,\sigma} \theta^{2_\sigma^*-1} \rho^{-\sigma} \right|.$$

Posons  $C = S_{N,\sigma} \theta^{2_\sigma^*-1}$ . Alors  $|\theta_{\rho\rho}| \leq C\rho^{-\sigma}$  pour tout  $|(t, \rho)| \leq 1$ , par conséquent, on obtient

$$|\rho\theta_{\rho\rho}| \leq C\rho^{1-\sigma}. \quad (2.31)$$

Donc, par les relations (2.30) et (2.31), on a

$$|\theta_\rho(t, \rho)| + |\theta_{t\rho}(t, \rho)| + |\rho\theta_{\rho\rho}| \leq C\rho^{1-\sigma}.$$

D'où, on a la relation (b). □

### Corollaire 2.2.1.

Soit  $w$  un minimiseur  $S_{N,\sigma}$ . Alors il existe  $C_1$  et  $C_2$  deux constantes positives ne dépend que de  $N$  et  $\sigma$ , telles que :

(a) pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{C_1}{1 + |x|^{N-2}} \leq w(x) \leq \frac{C_2}{1 + |x|^{N-2}}.$$

(b) Pour  $|x| = |(t, z)| \leq 1$ ,

$$|\nabla w(x)| + |x| |D^2 w(x)| \leq C_2 |z|^{1-\sigma}.$$

(c) Pour  $|x| = |(t, z)| \geq 1$ ,

$$|\nabla w(x)| + |x| |D^2 w(x)| \leq C_2 \max(1, |z|^{-\sigma}) |x|^{1-N}.$$

**Démonstration.** Pour la preuve de (a) (voir I. Fabbri, G. Mancini and K. Sandeep [12]). la démonstration de (ii) est une conséquence de (ii) du lemme 2.2.1, rappelons que  $w(t, z) = \theta(|t|, |z|)$  et  $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est la transformation de Kelvin donnée par :

$$v(t, z) = v(x) = \theta \left( |t||x|^{-2}, |z||x|^{-2} \right) |x|^{2-N},$$

qui est un minimiseur de  $S_{N,\sigma}$ . Donc elle satisfait (ii), ainsi on obtient (iii). □

**Lemme 2.2.2.**

Soit  $v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ,  $N \geq 3$ , satisfaisant  $v(t, z) = \bar{\theta}(|t|, |z|)$ , pour toute fonction  $\bar{\theta} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Alors pour  $0 < r < R$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|_g^2 \sqrt{|g|} dx &= \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 dx + \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{Q_R \setminus Q_r} |z|^2 |\partial_t v|^2 dx \\ &+ \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{Q_R \setminus Q_r} |z|^2 |\nabla v|^2 dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla v|^2 dx\right). \end{aligned}$$

**Démonstration.** On a  $|\nabla v|^2 = \sum_{ij=2}^N \delta_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$  et  $|\nabla|_g^2 = \sum_{ij=2}^N g^{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|_g^2 \sqrt{|g|} dx &= \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 dx + \int_{Q_R \setminus Q_r} (|\nabla v|_g^2 - |\nabla v|^2) \sqrt{|g|} dx \\ &+ \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 (\sqrt{|g|} - 1) dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Rappelons que

$$|\nabla v|_g^2(x) - |\nabla v|^2(x) = \sum_{\alpha\beta} [g^{\alpha\beta}(x) - \delta_{\alpha\beta}] \partial_{z_\alpha} v(x) \partial_{z_\beta} v(x).$$

Puisque  $g$  est une matrice, d'après le lemme 2.1.2, on a

$$|\nabla v|_g^2(x) - |\nabla v|^2(x) = \sum_{ij=2}^N [g^{ij}(x) - \delta_{ij}] \partial_{z_i} v(x) \partial_{z_j} v(x) + 2 \sum_{i=2}^N g^{i1}(x) (\partial_{z_i} v \partial_{z_i} v) + (g^{11} - 1) (\partial_t v)^2.$$

Donc en multipliant par la métrique et ensuite par intégration, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{Q_R \setminus Q_r} [|\nabla v|_g^2(x) - |\nabla v|^2(x)] \sqrt{|g|} dx &= \sum_{ij=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} [g^{ij}(x) - \delta_{ij}] \partial_{z_i} v \partial_{z_j} v \sqrt{|g|} dx \\ &+ 2 \sum_{i=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} g^{i1}(x) (\partial_{z_i} v \partial_{z_i} v) \sqrt{|g|} dx + \int_{Q_R \setminus Q_r} (g^{11} - 1) (\partial_t v)^2 \sqrt{|g|} dx. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Déterminons les expressions suivantes : d'après le lemme 2.1.2, on a

$$\begin{aligned} &\bullet \sum_{ij=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} (g^{ij} - \delta_{ij}) \partial_{z_i} v \partial_{z_j} v \sqrt{|g|} dx \\ &= \sum_{ij=2}^N \sum_{lm=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} (z_l z_m \tau_j^j(0) \tau_m^i(0) + O(|x|^3)) \partial_{z_i} v \partial_{z_j} v \sqrt{|g|} dx \\ &= \sum_{ij=2}^N \sum_{lm=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} \tau_j^j(0) \tau_m^i(0) z_l z_m z_i z_j \frac{|\nabla_z v|^2}{|z|^2} \sqrt{|g|} dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla_z v|^2 dx\right). \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{ij=2}^N \tau_j^i(0) z_i z_j = \sum_{ij=2}^N (\tau_j^i(0))' z_i z_j = 0. \quad (2.34)$$

Alors

$$\sum_{ij=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} (g^{ij} - \delta_{ij}) \partial_{z_i} v \partial_{z_j} v \sqrt{|g|} dx = O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla_z v|^2 dx\right). \quad (2.35)$$

$$\bullet \text{ On a : } \partial_t v = \frac{t \bar{\theta}_t(|t|, |z|)}{|t|}, \quad \partial_z v = \frac{z_i \bar{\theta}_z(|t|, |z|)}{|z|} \quad \text{et} \quad \partial_t v \partial_z v = \frac{t z_i \bar{\theta}_{tz}(|t|, |z|)}{|t||z|}.$$

Posons

$$\gamma(|t|, |z|) = \frac{\bar{\theta}_{tz}(|t|, |z|)}{|t||z|}.$$

Ainsi

$$\sum_{i=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} g^{i1} (\partial_t v \partial_{z_i} v) \sqrt{|g|} dx = \sum_{i=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} \gamma(|t|, |z|) t z_i g^{i1} \sqrt{|g|} dx,$$

d'après le lemme 2.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} g^{i1} (\partial_t v \partial_{z_i} v) \sqrt{|g|} dx &= - \sum_{ij=2}^N \tau_j^i(0) \int_{Q_R \setminus Q_r} \gamma(|t|, |z|) t z_i z_j \sqrt{|g|} dt dz \\ &\quad - \sum_{ij=2}^N (\tau_j^i)'(0) \int_{Q_R \setminus Q_r} \gamma(|t|, |z|) t^2 z_i z_j \sqrt{|g|} dt dz \\ &\quad + 2 \sum_{ijl=2}^N k_l(0) \tau_j^i(0) \int_{Q_R \setminus Q_r} \gamma(|t|, |z|) t z_i z_j z_l \sqrt{|g|} dt dz \\ &\quad + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla_z v|^2 dx\right). \end{aligned}$$

Par la relation (2.34), on obtient

$$\sum_{i=2}^N \int_{Q_R \setminus Q_r} g^{i1} (\partial_t v \partial_{z_i} v) \sqrt{|g|} dx = O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla v|^2 dx\right). \quad (2.36)$$

- On a : 
$$\begin{aligned} &\int_{Q_R \setminus Q_r} (g^{11} - 1) |\partial_t v|^2 \sqrt{|g|} dx \\ &= \int_{Q_R \setminus Q_r} \left( -2 \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) - 2t \sum_{i=2}^N z_i k_i'(0) + 3 \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) + O(|x|^3) \right) |\partial_t v|^2 \sqrt{|g|} dx \\ &= -2 \int_{Q_R \setminus Q_r} \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) |\partial_t v|^2 dx - 2 \int_{Q_R \setminus Q_r} \sum_{i=2}^N z_i k_i'(0) t |\partial_t v|^2 dx \\ &\quad + 3 \int_{Q_R \setminus Q_r} \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) |\partial_t v|^2 dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\partial_t v|^2 dx\right) \\ &= \sum_{ij=2}^N k_i(0) k_j(0) \int_{Q_R \setminus Q_r} z_i z_j |\partial_t v|^2 dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\partial_t v|^2 dx\right), \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_{Q_R \setminus Q_r} (g^{11} - 1) |\partial_t v|^2 \sqrt{|g|} dx &= \sum_{ij=2}^N k_i(0) k_j(0) \int_{Q_R \setminus Q_r} z_i z_j |\partial_t v|^2 dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\partial_t v|^2 dx\right) \\ &= \sum_{i=2}^N |k_i(0)|^2 \int_{Q_R \setminus Q_r} |z_i|^2 |\partial_t v|^2 dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\partial_t v|^2 dx\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\int_{Q_R \setminus Q_r} (g^{11} - 1) |\partial_t v|^2 \sqrt{|g|} dx = \frac{|k(y_0)|^2}{N-1} \int_{Q_R \setminus Q_r} |z|^2 |\partial_t v|^2 dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\partial_t v|^2 dx\right). \quad (2.37)$$

En utilisant les relations (2.35), (2.36) et (2.37) dans la relation (2.33), on obtient

$$\int_{Q_R \setminus Q_r} [|\nabla v|_g^2(x) - |\nabla v|^2(x)] \sqrt{|g|} dx = \frac{|k(y_0)|^2}{N-1} \int_{Q_R \setminus Q_r} |z|^2 |\partial_t v|^2 dx + O\left(\int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla v|^2 dx\right). \quad (2.38)$$

D'après le lemme 2.1.2, on a

$$\begin{aligned}
\int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 \left( \sqrt{|g|} - 1 \right) dx &= \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 \sum_{i=2}^N z_i k_i(0) dx + \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 t \sum_{i=2}^N z_i k'_i(0) dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) dx + O \left( \int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla v|^2 dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 \sum_{ij=2}^N z_i z_j k_i(0) k_j(0) dx + O \left( \int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla v|^2 dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N |k_i(0)|^2 \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 |z_i|^2 dx + O \left( \int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla v|^2 dx \right).
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 \left( \sqrt{|g|} - 1 \right) dx = \frac{|k(y_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_R \setminus Q_r} |\nabla v|^2 |z|^2 dx + O \left( \int_{Q_R \setminus Q_r} |x|^3 |\nabla v|^2 dx \right). \quad (2.39)$$

Appliquons les relations (2.38) et (2.39) dans la relation (2.32) on obtient le résultat.  $\square$

### 2.3 Construction d'une fonction test et existence du minimiseur pour $\mu_h(\Omega, \Gamma)$ de dimension $N \geq 4$

On considère  $\Omega$ , un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , et  $\Gamma \subset \Omega$ . Une courbe fermée et régulière. Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ , on définit la fonctionnelle  $J : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$J(u) := \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy + \int_{\Omega} h u^2 dy}{\left( \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u|^{2^*_{\sigma}} dy \right)^{2/2^*_{\sigma}}}, \quad (2.40)$$

soit  $\eta \in C_c^{\infty}(F_{y_0}(Q_{2r}))$  tel que  $0 \leq \eta \leq 1$  et  $\eta \equiv 1$  dans  $Q_r$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on considère une fonction  $u_{\varepsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par :

$$u_{\varepsilon}(y) := \varepsilon^{(2-N)/2} \eta \left( F_{y_0}^{-1}(y) \right) w \left( \varepsilon^{-1} (F_{y_0}^{-1}(y)) \right). \quad (2.41)$$

En particulier, pour chaque  $x = (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ , nous avons

$$u_{\varepsilon}(F_{y_0}(x)) := \varepsilon^{(2-N)/2} \eta(x) \theta \left( \frac{|t|}{\varepsilon}, \frac{|z|}{\varepsilon} \right), \quad (2.42)$$

il est clair que  $u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ . Nous avons le résultat suivant.

#### Lemme 2.3.1.

Pour  $J$  donnée par la relation (2.40) et  $u_{\varepsilon}$  donnée par la relation (2.41), lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a

$$\begin{aligned}
J(u_{\varepsilon}) &= S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\partial_t w|^2 dx + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx \\
&- \frac{\varepsilon^2}{2^*_{\sigma}} \frac{|k(y_0)|^2}{(N-1)} S_{N,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2^*_{\sigma}} dx + \varepsilon^2 h(y_0) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx \\
&+ O \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |h(F_{y_0}(\varepsilon x)) - h(y_0)| w^2 dx \right) + O \left( \varepsilon^{N-2} \right). \quad (2.43)
\end{aligned}$$

**Démonstration.** Nous posons  $F = F_{y_0}$  pour simplifier les notations. En remplaçant dans la relation (2.41), on obtient

$$u_\varepsilon(y) = \varepsilon^{(2-N)/2} \eta \left( F^{-1}(y) \right) W_\varepsilon(y) \quad \text{où} \quad W_\varepsilon(y) = w \left( \varepsilon^{-1} F^{-1}(y) \right),$$

alors

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 = \varepsilon^{(2-N)} \left( \frac{1}{2} \nabla W_\varepsilon^2 \cdot \nabla \eta^2 + \eta^2 |\nabla W_\varepsilon|^2 + W_\varepsilon^2 |\eta|^2 \right).$$

Par la formule de l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r})} \eta^2 |\nabla W_\varepsilon^2| dy \\ &+ \varepsilon^{(2-N)} \left( \frac{1}{2} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \nabla W_\varepsilon^2 \cdot \nabla \eta^2 dy + \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} W_\varepsilon^2 \nabla \eta^2 dy \right) \\ &= \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r})} \eta^2 |\nabla W_\varepsilon^2| dy \\ &+ \varepsilon^{(2-N)} \left( -\frac{1}{2} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} W_\varepsilon^2 \Delta \eta^2 dy + \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} W_\varepsilon^2 \nabla \eta^2 dy \right) \\ &= \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r})} \eta^2 |\nabla W_\varepsilon|^2 dy + \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} W_\varepsilon^2 \left( |\nabla \eta|^2 - \frac{1}{2} \Delta \eta^2 \right) dy. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Puisque  $\int \|\nabla \eta\|^2 = - \int \eta \Delta \eta$ , on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dy = \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r})} \eta^2 |\nabla W_\varepsilon|^2 dy - \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} W_\varepsilon^2 (\eta \Delta \eta) dy,$$

par la formule de développement limité, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dy = \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r})} \eta^2 |\nabla W_\varepsilon|^2 dy + O \left( \varepsilon^{(2-N)} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} W_\varepsilon^2 dy \right). \quad (2.45)$$

Comme  $y = \frac{F_\varepsilon(x)}{\varepsilon} : Q_{r/\varepsilon} \rightarrow \Omega$  est lisse donc par changement de variable,

$$W_\varepsilon(y) = w \left( \varepsilon^{-1} F^{-1}(y) \right), \quad \text{alors} \quad W_\varepsilon \left( \frac{F(x)}{\varepsilon} \right) = w \left( \varepsilon^{-1} F^{-1} \left( \frac{F(x)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \right) = w(\varepsilon^{-1} x),$$

or  $\nabla w(\varepsilon^{-1} x) = \varepsilon^{-1} \nabla w(x)$ , alors

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dy = \varepsilon^{-N} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 \eta^2 |det(J_{F/\varepsilon}(x))| dx + O \left( \varepsilon^{2-N} \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} w^2 |det(J_{F/\varepsilon}(x))| dy \right),$$

d'après la dérivée de l'expansion de la métrique, on obtient  $|det(J_{F/\varepsilon}(x))| = \varepsilon^N \sqrt{|g_\varepsilon|}$ .

Comme  $\eta = 1$  dans  $Q_r$ , alors  $\eta_\varepsilon = 1$  dans  $Q_{r/\varepsilon}$ , donc

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dy = \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|_{g_\varepsilon}^2 \sqrt{|g_\varepsilon|} dx + O \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx \right).$$

En utilisant le lemme 2.2.2, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|_{g_\varepsilon}^2 dx + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\partial_t w|^2 dx + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx \\ &+ O \left( \varepsilon^3 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^3 |\nabla w|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dy &= S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \frac{3|k(x_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx \\ &+ O\left(\varepsilon^3 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^3 |\nabla w|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |w|^2 dx\right). \end{aligned}$$

En utilisant le corollaire 2.2.1 et par intégration, on montre que

$$O\left(\varepsilon^3 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^3 |\nabla w|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |w|^2 dx\right) = O\left(\varepsilon^{(N-2)}\right).$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dy = S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\partial_t w|^2 dx + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx + O\left(\varepsilon^{(N-2)}\right). \quad (2.46)$$

Utilisons la relation (2.28) dans la relation (2.41), on obtient

$$u_{\varepsilon}(F_{y_0}(x)) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta(x) \theta\left(\frac{1}{\varepsilon}(|t|, |z|)\right) = \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta(x) \varepsilon^{-1} w(x) = \varepsilon^{-N/2} \eta_{\varepsilon} w,$$

ainsi, on obtient  $|u_{\varepsilon}|^{2^*} = \left(\varepsilon^{-N/2}\right)^{2^*} (\eta_{\varepsilon}(x) w)^{2^*}$ .

En utilisant le changement de variable  $y = \frac{F(x)}{\varepsilon}$  et la relation (2.5), on obtient

$$\int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2^*} dx = \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-s} w^{2^*} \sqrt{|g|_{\varepsilon}} dx + O\left(\int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} (\eta(\varepsilon x) w)^{2^*} dx\right).$$

Par le lemme 2.2.2, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2^*} dx &= \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx + \frac{|k(y_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2^*} dx \\ &+ O\left(\varepsilon^3 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^3 |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx\right). \end{aligned}$$

Cependant, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2^*} dx &= 1 + \varepsilon^2 \frac{|k(y_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2^*} dx \\ &+ O\left(\varepsilon^3 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^3 |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx\right). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (a) du corollaire 2.2.1, nous montrons par intégration que

$$\varepsilon^3 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^3 |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*} dx = O\left(\varepsilon^{N-\sigma}\right),$$

donc

$$\int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2^*} dx = 1 + \varepsilon^2 \frac{|k(y_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2^*} dx + O\left(\varepsilon^{N-\sigma}\right).$$

En utilisant la formule de développement de Taylor, on obtient

$$\left(\int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} = 1 + \varepsilon^2 \frac{|k(y_0)|^2}{2^*(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2^*} dx + O\left(\varepsilon^{N-\sigma}\right). \quad (2.47)$$

Par le même changement de variable, on montre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h u_{\varepsilon}^2 dy &= \int_{F(Q_{2r})} h u_{\varepsilon}^2 dy \\ &= \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} h(y_0) w^2 dx + O\left(\varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |h(F(\varepsilon x)) - h(y_0)| w^2 dx\right) + O(\varepsilon^N). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Finalement, en combinant (2.46), (2.47) et (2.48), on obtient le résultat escompté.  $\square$

**Proposition 2.3.1.**

Pour  $N \geq 5$ , on définit

$$A_{N,\sigma} := \frac{1}{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 |\partial_t w|^2 dx + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*_\sigma} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2^*_\sigma} \int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx > 0$$

et

$$B_{N,\sigma} := \int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx.$$

Supposons, pour un certain  $y_0 \in \Gamma$ , tel que

$$\begin{cases} h(y_0) < -\frac{A_{N,\sigma}}{B_{N,\sigma}} |k(y_0)|^2 & \forall N \geq 5, \\ h(y_0) < -\frac{3}{2} |k(y_0)|^2 & \forall N = 4. \end{cases}$$

Alors  $\mu_h(\Omega, \Gamma) < S_{N,\sigma}$ .

**Démonstration.** Il est clair que

$$S_{N,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2^*_\sigma} dx = \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx - (N-1) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + O(\varepsilon^{N-2}), \quad (2.49)$$

pour la démonstration de cette relation, on pose  $\eta(x) = \eta_\varepsilon(x)$ .

On multiplie la relation (2.27) par  $|z|^2 \eta_\varepsilon w$  et par intégration, on obtient

$$S_{N,\sigma} \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^{2-\sigma} w^{2^*_\sigma} dx = - \int_{Q_{2r/\varepsilon}} (|z|^2 \eta_\varepsilon w) \Delta w dx.$$

Comme  $\int \|\nabla w\|^2 = - \int w \Delta w$ , alors

$$\begin{aligned} S_{N,\sigma} \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^{2-\sigma} w^{2^*_\sigma} dx &= \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \nabla w \cdot \nabla (|z|^2 \eta_\varepsilon w) dx \\ &= \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^2 |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \nabla w^2 \cdot \nabla (|z|^2 \eta_\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

Par la formule de l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} S_{N,\sigma} \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^{2-\sigma} w^{2^*_\sigma} dx &= \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^2 |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{Q_{2r/\varepsilon}} w^2 \Delta (|z|^2 \eta_\varepsilon) dx \\ &= \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^2 |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{Q_{2r/\varepsilon}} w^2 (\Delta |z|^2) \eta_\varepsilon dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 (|z|^2 \Delta \eta_\varepsilon + 2 \nabla \eta_\varepsilon \nabla |z|^2) \\ &= \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^2 |\nabla w|^2 dx - (N-1) \int_{Q_{2r/\varepsilon}} w^2 \eta_\varepsilon dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 (|z|^2 \Delta \eta_\varepsilon + 4z \nabla \eta_\varepsilon). \end{aligned}$$

Comme  $\eta \equiv 1$  dans  $Q_{\varepsilon/r}$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}
S_{N,\sigma} \int_{Q_{2r/\varepsilon}} \eta_\varepsilon |z|^{2-\sigma} w^{2\sigma^*} dx &= \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx - (N-1) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx \\
+ O \left( \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2\sigma^*} dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx \right) \\
+ O \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z| |\nabla w| dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 w^2 dx \right).
\end{aligned}$$

Grâce au corollaire 2.2.1, nous obtenons par intégration que

$$\begin{aligned}
O \left( \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2\sigma^*} dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx + \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx \right) \\
+ O \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z| |\nabla w| dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 w^2 dx \right) = (\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}$$

D'où on obtient la relation (2.49).

Ensuite comme  $h$  est continue, pour  $\delta > 0$  et on peut trouver  $r_\delta > 0$  tel que

$$|h(y) - h(y_0)| < \delta \quad \text{pour tout } y \in F(Q_{r_\delta}). \quad (2.50)$$

Cas  $N \geq 5$ . En utilisant les relations (2.49) et (2.50) dans la relation (2.43), pour tout  $r \in (0, r_\delta)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
J(u_\varepsilon) &= S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 |\partial_t w|^2 dx + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma^*} \right) \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 |\nabla w|^2 dx \\
&+ \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^*} |k(x_0)|^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx + \varepsilon^2 h(y_0) \int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx + O \left( \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} \delta^2 w^2 dx \right) + O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.2.1, on obtient par estimation

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx = O(\varepsilon).$$

Il en résulte que

$$J(u_\varepsilon) = S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \left\{ A_{N,\sigma} |k(y_0)|^2 + B_{N,\sigma} h(y_0) \right\} + O(\delta \varepsilon^2 B_{N,\sigma}) + O(\varepsilon^3).$$

Supposons que

$$A_{N,\sigma} |k(y_0)|^2 + B_{N,\sigma} h(y_0) < 0.$$

On peut ainsi choisir respectivement  $\delta > 0$  petit et  $\varepsilon > 0$  petit de sorte que

$$J(u_\varepsilon) \leq S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \left\{ A_{N,\sigma} |k(y_0)|^2 + B_{N,\sigma} h(y_0) \right\} < S_{N,\sigma}.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\mu_h(\Omega, \Gamma) &= \inf_{\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(u_\varepsilon) \leq J(u_\varepsilon), \text{ on a} \\
\mu_h(\Omega, \Gamma) &< S_{N,\sigma}.
\end{aligned}$$

Cas  $N = 4$ . En tenant compte de la relation (2.50) dans (2.43), on obtient par estimation pour tout  $r \in (0, r_\delta)$

$$\begin{aligned}
J(u_\varepsilon) &\leq S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\partial_t w|^2 dx + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{|k(x_0)|^2}{N-1} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx \\
&+ \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^*} |k(x_0)|^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + \varepsilon^2 h(y_0) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + O \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} \delta^2 w^2 dx \right) + O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}$$



Ainsi, par la relation (2.49), on obtient

$$\begin{aligned} J(u_\varepsilon) &\leq S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \frac{3|k(y_0)|^2}{2(N-1)} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx - \frac{\varepsilon^2 |k(y_0)|^2}{2_\sigma^* (N-1)} S_{N,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2_\sigma^*} dx \\ &\quad + \varepsilon^2 h(y_0) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + O\left(\varepsilon^2 \delta \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx\right) + O\left(\varepsilon^{N-2}\right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

D'après la relation (2.49), on a

$$\int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^2 |\nabla w|^2 dx = S_{N,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2_\sigma^*} dx + (N-1) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + O\left(\varepsilon^{N-2}\right). \quad (2.52)$$

En tenant compte de la relation (2.52) dans la relation (2.51), on obtient

$$\begin{aligned} J(u_\varepsilon) &\leq S_{N,\sigma} + \varepsilon^2 \frac{3|k(y_0)|^2}{2(N-1)} S_{N,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2_\sigma^*} dx - \frac{\varepsilon^2 |k(y_0)|^2}{2_\sigma^* (N-1)} S_{N,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2_\sigma^*} dx \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2}|k(y_0)|^2 + h(y_0)\right) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + O\left(\varepsilon^2 \delta \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx\right) + O\left(\varepsilon^{N-2}\right). \end{aligned}$$

Par la relation (a) du corollaire 2.2.1, on montre que

$$\int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{2-\sigma} w^{2_\sigma^*} dx = O(1). \quad \text{Posons} \quad C = \left(\frac{3|k(y_0)|^2}{2(N-1)} - \frac{1}{2_\sigma^*} \frac{|k(y_0)|^2}{(N-1)}\right) S_{N,\sigma}$$

avec  $C$  une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ , ainsi

$$J(u_\varepsilon) \leq S_{4,\sigma} + \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2}|k(y_0)|^2 + h(y_0)\right) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + O\left(\varepsilon^2 \delta \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx\right) + C\varepsilon^2. \quad (2.53)$$

D'après la relation (a) du corollaire 2.2.1, nous montrons par intégration que

$$\int_{Q_{r/\varepsilon}} \frac{C_1^2}{1+|x|^2} dx \leq \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx \leq \int_{Q_{r/\varepsilon}} \frac{C_2^2}{1+|x|^2} dx.$$

On sait que  $Q_{r/\varepsilon} = ]-r/\varepsilon, r/\varepsilon[ \times B_{\mathbb{R}^3}(0, r/\varepsilon)$ , on a

$$\int_{B_{\mathbb{R}^4}(0, r/\varepsilon)} \frac{C_1^2}{1+|x|^2} dx \leq \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx \leq \int_{B_{\mathbb{R}^4}(0, 2r/\varepsilon)} \frac{C_2^2}{1+|x|^2} dx.$$

En utilisant les coordonnées polaires et par changement de variable, pour  $R > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{B_{\mathbb{R}^4}(0, R)} \frac{dx}{(1+|x|^2)^2} &= |S^3| \int_0^R \frac{t^3}{(1+t^2)^2} dt \\ &= |S^3| \int_0^{\sqrt{R}} \frac{s}{2(1+st)^2} ds \\ &= \frac{|S^3|}{2} \int_0^{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{(1+s)^2}\right) ds \\ &= \frac{|S^3|}{2} \left(\log(1+\sqrt{R}) - \frac{\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right), \end{aligned}$$

il existe donc des constantes numériques  $c, \bar{c} > 0$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$  petit,

$$c|\log \varepsilon| \leq \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx \leq \bar{c}|\log \varepsilon|. \quad (2.54)$$

Supposons que  $3|k(y_0)|^2/2 + h(y_0) < 0$ .

En utilisant la relation (2.54) dans la relation (2.53) on obtient

$$J(u_\varepsilon) \leq S_{4,\sigma} + c \left( \frac{3}{2}|k(y_0)|^2 + h(y_0) \right) \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \varepsilon^2 \delta \bar{c} |\log \varepsilon| + C\varepsilon^3.$$

Alors, en choisissant  $\delta > 0$  petit et  $\varepsilon$  petit respectivement, on obtient

$$J(u_\varepsilon) \leq S_{4,\sigma} + c \left( \frac{3}{2}|k(y_0)|^2 + h(y_0) \right) \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \varepsilon^2 \delta \bar{c} |\log \varepsilon| + C\varepsilon^3 < S_{4,\sigma},$$

alors  $J(u_\varepsilon) < S_{4,\sigma}$  pour  $\delta > 0$  et  $\varepsilon$  petit, comme

$$\mu_h(\Omega, \Gamma) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(u_\varepsilon) \leq J(u_\varepsilon), \text{ on a}$$

$$\mu_h(\Omega, \Gamma) \leq J(u_\varepsilon) < S_{4,\sigma};$$

d'où

$$\mu_h(\Omega, \Gamma) < S_{4,\sigma}.$$

□

**Démonstration. du théorème 2.0.1.** Pour tout  $r > 0$ , il existe une constante  $c_r > 0$  ne dépend que de  $\Omega, \Gamma, N, \sigma$  et  $r$  tel que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$  alors

$$S_{N,\sigma} \left( \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u|^{2^*} dy \right)^{2/2^*} \leq (1+r) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy + c_r + \left( \int_{\Omega} |u|^{2^*} dy \right)^{2/2^*}. \quad (2.55)$$

Par la proposition 2.3.1, on montre que si il existe  $y_0$  tel que  $h(y_0) < -C_{N,\sigma} |\kappa(y_0)|^2$  alors  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma) < S_{N,\sigma}$ , puisque si  $\mu_h(\Omega, \Gamma) < S_{N,\sigma}$  et par la relation (2.55) alors il existe une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  strictement positive minimiseur du problème (6). □

## 2.4 Construction d'une fonction test et existence de minimiseur pour $\mu(\Omega, \Gamma, h)$ de dimension trois

On considère une fonction

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathcal{R}(x) = \frac{1}{|x|} \quad \text{qui satisfait} \quad -\Delta \mathcal{R} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (2.56)$$

On note  $G$  la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta_x G(y, \cdot) + hG(y, \cdot) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \setminus \{y\}, \\ G(y, \cdot) = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \end{cases} \quad (2.57)$$

et  $G$  satisfait

$$G(x, y) = \mathcal{R}(x - y) + O(1) \quad \text{pour} \quad x, y \in \Omega \text{ et } x \neq y. \quad (2.58)$$

On note que  $G$  est proportionnel à la fonction de Green de  $-\Delta + h$  avec zéro Dirichlet. Soit  $\mathcal{X} \in C_c^\infty([-2, 2])$  avec  $\mathcal{X} \equiv 1$  dans  $]-1, 1[$  et  $0 \leq \mathcal{X} < 1$ . Pour  $r > 0$ , on considère la fonction cut-off cylindrique symétrique suivante :

$$\eta_r(t, z) = \mathcal{X} \left( \frac{|t| + |z|}{r} \right) \quad \text{pour tout } (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \quad (2.59)$$

Alors nous avons

$$\eta_r \equiv 1 \quad \text{dans} \quad Q_r, \quad \eta_r \in H_0^1(Q_{2r}), \quad |\nabla \eta_r| \leq \frac{C}{r} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3.$$

Pour  $y_0 \in \Omega$ , soit  $r_0 \in ]0, 1[$  tel que

$$y_0 + Q_{2r_0} \subset \Omega. \quad (2.60)$$

On définit la fonction  $M_{y_0} : Q_{2r_0} \longrightarrow \mathbb{R}$  donnée par :

$$M_{y_0}(x) := G(y_0, x + y_0) - \eta_r(x) \frac{1}{|x|} \quad \text{pour tout } r \in Q_{2r_0}, \quad (2.61)$$

il résulte de la relation (2.58) que  $M_{y_0} \in L^\infty(Q_{r_0})$ . Par les relations (2.57) et (2.56), on a

$$|-\Delta M_{y_0}(x) + h(x)M_{y_0}(x)| \leq \frac{C}{|x|} = C\mathcal{R} \quad \text{pour tout } x \in Q_{r_0},$$

tandis que  $\mathcal{R} \in L^p(Q_{r_0})$  pour  $p \in ]1, 3[$ . Ainsi, par la théorie de la régularité elliptique,  $M_{y_0} \in W^{2,p}(Q_{r_0/2})$  pour tout  $p \in ]1, 3[$ . Donc par le théorème d'incorporation de Morrey (voir [9]), on en déduit que

$$\|M_{y_0}\|_{C^{1,\varrho}(Q_{r_0/2})} \leq C \quad \text{pour tout } \varrho \in ]0, 1[. \quad (2.62)$$

Il existe une fonction continue  $\mathbf{m} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $c > 0$  une constante positive telles que

$$G(x, y) = \frac{c}{|x - y|} + \mathbf{m}(y) + o(1) \quad \text{lorsque } x \longrightarrow y. \quad (2.63)$$

Ainsi par la relation (2.63), la masse de l'opérateur  $-\Delta + h$  dans  $\Omega$  au point  $y_0 \in \Omega$  est donnée par

$$\mathbf{m}(y_0) = M_{y_0}(0). \quad (2.64)$$

Nous rappelons que le minimiseur  $w$  satisfait

$$-\Delta w = |z|^{-\sigma} w^{2^*_\sigma - 1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad \int_{\mathbb{R}^3} |z|^{-\sigma} w^{2^*_\sigma} dx = 1, \quad (2.65)$$

où  $x = (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . De plus par la relation (a) du corollaire 2.2.1, on a

$$\frac{C_1}{1 + |x|} \leq w(x) \leq \frac{C_2}{1 + |x|} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (2.66)$$

Le résultat suivant va jouer un rôle très important dans la suite de la section.

**Lemme 2.4.1.**

Considérons une fonction  $v_\varepsilon : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors il existe une constante  $\mathbf{c} > 0$  et une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (toujours noter par  $\varepsilon$ ) telles que

$$v_\varepsilon(x) \longrightarrow \frac{\mathbf{c}}{|x|} \quad p.p \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad v_\varepsilon(x) \longrightarrow \frac{\mathbf{c}}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}. \quad (2.67)$$

**Démonstration.** Par le corollaire 2.2.1,  $v_\varepsilon$  est borné dans  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\})$ .

Donc par le théorème de Arzelà-Ascoli (voir [9])  $v_\varepsilon \longrightarrow v$  dans  $C_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\})$ . En particulière

$$v_\varepsilon \longrightarrow v \quad \text{et} \quad \nabla v_\varepsilon \longrightarrow \nabla v \quad p.p \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

d'après la relation (2.66), pour tout  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  alors

$$0 < \frac{C_1}{\varepsilon + |x|} \leq v_\varepsilon(x) \leq \frac{C_2}{\varepsilon + |x|}. \quad (2.68)$$

On sait que  $v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}w(\frac{x}{\varepsilon})$ , alors  $-\Delta v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\Delta w(\frac{x}{\varepsilon})$  donc par la relation (2.27), on a

$$-\Delta v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{2-\sigma}f_\varepsilon(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^3, \quad (2.69)$$

$$\text{où } f_\varepsilon(x) = S_{3,\sigma}|z|^{-\sigma}v_\varepsilon^{2^*_\sigma-1}(x) \leq C|z|^{-\sigma}|x|^{-5+2\sigma} \quad \text{p.p. } \forall x = (t, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ . En multipliant (2.69) par  $\varphi$  ensuite par intégration, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta v_\varepsilon(x)) \varphi dx = \varepsilon^{2-\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx,$$

comme  $\varphi$  est à support compact, d'après la formule de l'intégration par partie, le terme au bord dans cette formule est null, on obtient

$$\varepsilon^{2-\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x) dx.$$

Appliquons la relation ci-dessus dans la relation (2.68) et on a

$$-C_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon + |x|} \Delta \varphi(x) dx \leq - \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \Delta \varphi(x) dx \leq -C_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon + |x|} \Delta \varphi(x) dx,$$

par le passage à la limite pour  $n \rightarrow \infty$ , on obtient

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} C_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon + |x|} \Delta \varphi(x) dx \leq - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \Delta \varphi(x) dx \leq - \lim_{n \rightarrow \infty} C_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon + |x|} \Delta \varphi(x) dx,$$

alors le théorème de la convergence dominée nous donne :

$$-C_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon + |x|} \Delta \varphi(x) dx \leq - \int_{\mathbb{R}^3} v \Delta \varphi(x) dx \leq -C_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon + |x|} \Delta \varphi(x) dx,$$

donc on peut en déduire que  $\Delta v = 0$  sur  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ . En particulier,  $v$  est équivalent à la fonction de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  qui est toujours notée par  $v$ . Grâce à la relation (2.68) et par le théorème de Bôcher (voir [1]), il existe une constante  $c > 0$  tel que  $v(x) = \frac{c}{|x|}$ .  $\square$

Nous rappelons quelques estimations utiles.

**Lemme 2.4.2.**

Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon, r \in ]0, r_0/2[$ , nous avons

$$\int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx \leq C \max\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right), \quad \int_{Q_{r/\varepsilon}} |w|^2 dx \leq C \max\left(1 + \frac{r}{\varepsilon}\right); \quad (2.70)$$

$$\int_{Q_{r/\varepsilon}} w |\nabla w| dx \leq C \max\left(1, \log \frac{r}{\varepsilon}\right); \quad (2.71)$$

$$\int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w| dx \leq C \max\left(1, \frac{r}{\varepsilon}\right), \quad \int_{Q_{r/\varepsilon}} |w| dx \leq C \max\left(1, \frac{r^2}{\varepsilon^2}\right); \quad (2.72)$$

$$\varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |x|^2 w^{2^*_\sigma} dx + \varepsilon \int_{Q_{4r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*_\sigma-1} dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*_\sigma} dx \leq C r^{\sigma-3} \varepsilon^{3-\sigma}. \quad (2.73)$$

**Démonstration.** Nous utilisons le corollaire 2.2.1 pour la démonstration des estimations.  $\square$

Étant donnée  $y_0 \in \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ , soit  $r_0$  défini dans (2.60). Pour  $r \in ]0, r_0/2[$ , on considère  $F_{y_0} : Q_r \rightarrow \Omega$  par une paramétrisation au voisinage de  $y_0$  dans  $\Omega$  avec la propriété que  $F_{y_0}(0) = y_0$  donner par (2.4). Pour  $\varepsilon > 0$ , on considère  $u_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$u_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-1/2} \eta_r \left( F_{y_0}^{-1}(y) \right) w \left( \frac{F_{y_0}^{-1}(y)}{\varepsilon} \right). \quad (2.74)$$

Nous pouvons maintenant définir la fonction test  $\Psi_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\Psi_\varepsilon(y) = u_\varepsilon(y) + \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \eta_{2r} \left( F_{y_0}^{-1}(y) \right) M_{y_0} \left( F_{y_0}^{-1}(y) \right), \quad (2.75)$$

il est clair que  $\Psi \in H_0^1(\Omega)$  et

$$\Psi_\varepsilon(F_{y_0}(x)) = \varepsilon^{-1/2} \eta_r(x) w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{-1/2} \eta_r(x) M_{y_0}(x), \quad (2.76)$$

le résultat principal de cette section est contenu dans le résultat suivant.

**Lemme 2.4.3.**

On a

$$J_1(\Psi_\varepsilon) = \mathbf{S}_{3,\sigma} - \varepsilon \pi^2 \mathbf{c}^2 \mathbf{m}(y_0) + \mathcal{O}_r(\varepsilon)$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Démonstration.** La preuve de cette lemme est séparé en deux étapes données par les deux lemmes suivantes : le lemme 2.4.4 et le lemme 2.4.5. Pour simplifier les notations, on écrira  $\varepsilon$  au lieu de  $\varepsilon_n$  et on supprimera l'indice  $y_0$ , en écrivant  $M$  et  $F$  à la place de  $M_{y_0}$  et  $F_{y_0}$ , respectivement. Nous définissons :

$$\tilde{\eta}_r(y) := \eta_r \left( F^{-1}(y) \right), \quad V_\varepsilon(y) := v_\varepsilon \left( F^{-1}(y) \right) \quad \text{et} \quad \tilde{M}_{2r}(y) := \eta_{2r} \left( F^{-1}(y) \right) M \left( F^{-1}(y) \right),$$

où  $v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} w(x/\varepsilon)$ , avec ces notations la relation (2.75) devient

$$\Psi_\varepsilon(y) = u_\varepsilon(y) + \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \tilde{M}_{2r}(y) = \varepsilon^{1/2} V_\varepsilon(y) + \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \tilde{M}_{2r}(y). \quad (2.77)$$

Nous considérons d'abord le numérateur dans (2.58). □

**Lemme 2.4.4.**

On a

$$\int_{\Omega} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy + \int_{\Omega} h \Psi_\varepsilon^2 dy = S_{3,\sigma} - \varepsilon \mathbf{m}(y_0) \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon), \quad (2.78)$$

où  $\nu$  est un vecteur unitaire normal de  $Q_r$ .

**Démonstration.** En rappelant la relation (2.77), les calculs directs donnent

$$|\nabla \Psi_\varepsilon(y)|^2 = |\nabla u_\varepsilon(y)|^2 + \varepsilon \mathbf{c}^2 \left| \nabla \tilde{M}_{2r}(y) \right|^2 + 2\varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \nabla u_\varepsilon(y) \nabla \tilde{M}_{2r}(y),$$

par intégration, on a

$$\begin{aligned} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon(y)|^2 dy &= \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla (\tilde{\eta} u_\varepsilon(y))|^2 dy + \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \left| \nabla \tilde{M}_{2r}(y) \right|^2 dy \\ &+ 2\varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \nabla u_\varepsilon(y) \nabla \tilde{M}_{2r}(y) dy \\ &= \varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla (\tilde{\eta} V_\varepsilon(y))|^2 dy + \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \left| \nabla \tilde{M}_{2r}(x) \right|^2 dy \\ &+ 2\varepsilon \mathbf{c} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \nabla (\tilde{\eta} V_\varepsilon(y)) \nabla \tilde{M}_{2r}(x) dy. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Par la relation (2.59),  $\eta_r v_\varepsilon = \eta \varepsilon^{-1} w(\cdot/\varepsilon)$  est cylindrique. En utilisant le changement de variable pour  $y = F(x)$ , on obtient

$$\varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla(\tilde{\eta}_r V_\varepsilon(y))|^2 dy = \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|_g^2 \sqrt{g} dx.$$

En utilisant le lemme 2.2.2, on a

$$\varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla(\tilde{\eta}_r V_\varepsilon(y))|^2 dy = \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx + O\left(\varepsilon r^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx\right). \quad (2.80)$$

En calculant la deuxième expression de la relation (2.80), on trouve

$$\varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx = \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\eta_r \nabla v_\varepsilon + v_\varepsilon \nabla \eta_r|^2 dx.$$

Puisque  $\eta_r = 1$  dans  $Q_r$  et en développant cette expression, on obtient

$$\varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx \leq \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla v_\varepsilon|^2 + \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} v_\varepsilon^2 |\nabla \eta_r|^2 dx + 2\varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} v_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon| |\nabla \eta_r| dx.$$

Comme  $\eta_r \in H_0^1(Q_{2r})$  et  $|\nabla \eta_r| \leq \frac{C}{r}$  dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $C$  une constante, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx &\leq \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \frac{C}{r^2} \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} v_\varepsilon^2 dx + \frac{C}{r} \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} v_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon| dx. \\ &= \varepsilon \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx + \frac{C}{r^2} \varepsilon \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^2 dx + \frac{C}{r} \varepsilon \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w |\nabla w| dx. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (2.71) et (2.70), on obtient

$$\varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx \leq C \max\left(1, \frac{\varepsilon}{r}\right) + \frac{C}{r^2} \varepsilon \max\left(1, \frac{r}{\varepsilon}\right) + \frac{C}{r^2} \varepsilon \max\left(1, \log \frac{r}{\varepsilon}\right),$$

donc

$$O\left(\varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx\right) = \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.81)$$

En remplaçant la relation (2.81) dans la relation (2.80), on obtient

$$\varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla(\tilde{\eta}_r V_\varepsilon(y))|^2 dy = \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.82)$$

On procède de la même manière et on obtient le résultat suivant :

$$\varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla \widetilde{M}_{2r}(x)|^2 dy = \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla M|^2 dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.83)$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leq v_\varepsilon &\leq C|x|^{-1} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \\ |\nabla v_\varepsilon(x)| &\leq C|x|^{-2} \quad \text{pour } |x| \geq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.84)$$

En utilisant la relation (2.66), le corollaire 2.2.1 et les estimations ci dessus, par changement de variable pour  $y = F(x)$ , on obtient

$$\varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \nabla(\tilde{\eta}_r V_\varepsilon) \cdot \nabla \widetilde{M}_{2r} dx = \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla(\eta_r v_\varepsilon) \cdot \nabla M \sqrt{g} dx.$$

En utilisant le lemme 2.1.2, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \nabla(\tilde{\eta}_r V_\varepsilon) \cdot \nabla \widetilde{M}_{2r} dx &= \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla(\eta_r v_\varepsilon) \nabla M dx \\ &+ O\left(\varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla v_\varepsilon| dx + \frac{\varepsilon}{r} \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} v_\varepsilon dx\right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le corollaire 2.2.1, on montre que

$$\varepsilon \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} \nabla(\tilde{\eta}_r V_\varepsilon) \cdot \nabla \widetilde{M}_{2r} dx = \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla(\eta_r v_\varepsilon) \nabla M dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.85)$$

En tenant compte des relations (2.82), (2.83) et (2.85) dans la relation (2.79), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dx &= \varepsilon \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx \\ &+ \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla M|^2 dx + 2\varepsilon \mathbf{c} \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla(\eta_r v_\varepsilon) \nabla M dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Grâce au lemme 2.4.1 et la relation (2.84), en utilisant le théorème de la convergence dominée lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r v_\varepsilon)|^2 dx &= \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \left| \nabla \left( \eta_r \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{x}|} \right) \right|^2 dx \\ &= \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r \mathcal{R})|^2 dx + o(1). \end{aligned} \quad (2.87)$$

De même, on a par le théorème de la convergence dominée

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla(\eta_r v_\varepsilon) \nabla M dx &= \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla \left( \eta_r \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{x}|} \right) \nabla M dx \\ &= \mathbf{c} \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla(\eta_r \mathcal{R}) \nabla M dx + o(1). \end{aligned} \quad (2.88)$$

En tenant compte des relations (2.87) et (2.88) dans la relation (2.86), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy &= \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r \mathcal{R})|^2 dx \\ &+ \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla M|^2 dx + 2\varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} \nabla(\eta_r \mathcal{R}) \nabla M dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla(\eta_r \mathcal{R} + M)|^2 dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.89)$$

En procédant de la même manière pour l'expression  $h|\Psi|^2$  dans  $F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)$ , on obtient

$$\int_{F(Q_{2r}) \setminus F(Q_r)} h|\Psi_\varepsilon|^2 dy = \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} h(\cdot + y_0) |\eta_r \mathcal{R} + M|^2 dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.90)$$

Puisque le support de  $\Psi_\varepsilon$  est contenu dans  $Q_{4r}$ , alors que celui de  $\eta_r$  est dans  $Q_{2r}$ , il est facile de déduire de la relation (2.62) que

$$\int_{\Omega \setminus F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{F(Q_{4r}) \setminus F(Q_{2r})} \left| \nabla \widetilde{M}_{2r} \right|^2 dx = \mathcal{O}_r(\varepsilon)$$

et par le lemme 2.4.3, on a

$$\int_{\Omega \setminus F(Q_r)} h|\Psi_\varepsilon|^2 dy = \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{F(Q_{4r}) \setminus F(Q_{2r})} h \left| \eta_r V_\varepsilon + \widetilde{M}_{2r} \right|^2 dy = \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

Ainsi d'après les relations (2.89) et (2.90), nous concluons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy + \int_{\Omega \setminus F(Q_r)} h |\Psi_\varepsilon|^2 dy &= \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} |\nabla (\eta_r \mathcal{R} + M)|^2 dx \\ &+ \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{Q_{2r} \setminus Q_r} h(\cdot + y_0) |\eta_r \mathcal{R} + M|^2 dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \end{aligned}$$

Rappelons que  $G(x + y_0, y_0) = \eta_r(x) \mathcal{R}(x) + M(x)$  pour tout  $x \in Q_{2r}$  et que par la relation (2.57) on a

$$-\Delta_x G(x + y_0, y_0) + h(x + y_0) G(x + y_0, y_0) = 0,$$

pour tout  $x \in Q_{2r} \setminus Q_r$ . On sait que  $\Psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ , d'après la relation (2.57)

$$h(x + y_0) G(x + y_0, y_0) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

alors par les relations (2.61) et (2.56), on obtient

$$h(x + y_0) G(x + y_0, y_0) = h(x + y_0) (\eta_r \mathcal{R} + M) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

donc par le théorème de Green, on a

$$\int_{\Omega \setminus F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy + \int_{\Omega \setminus F(Q_r)} h |\Psi_\varepsilon|^2 dy = \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{\partial(Q_{2r} \setminus Q_r)} (\eta_r \mathcal{R} + M) \frac{\partial (\eta_r \mathcal{R} + M)}{\partial \bar{\nu}} \sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon),$$

où  $\bar{\nu}$  est un vecteur normal extérieur de  $Q_{2r} \setminus Q_r$ . Grâce à la relation (2.62), nous avons finalement

$$\int_{\Omega \setminus F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy + \int_{\Omega \setminus F(Q_r)} h |\Psi_\varepsilon|^2 dy = -\varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} \mathcal{R} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) - \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} M \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.91)$$

Ensuite, déterminons l'expression suivante  $\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi|^2 dy$  pour  $r$  et  $\varepsilon$  petites, on a

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = \int_{F(Q_r)} |\nabla u_\varepsilon|^2 dy + \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{F(Q_r)} |\nabla M|^2 dy + 2\varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \int_{F(Q_r)} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \widetilde{M}_{2r} dy.$$

Par le changement de variable pour  $y = F(x)/\varepsilon$ , on a

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx + \mathcal{O} \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^2 |\nabla M|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx \right) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

D'après le corollaire 2.2.1, on obtient

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

Par la formule d'intégration par partie, en utilisant la relation (2.73), on en déduit que

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = - \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\Delta w|^2 dx + \int_{\partial(Q_{r/\varepsilon})} w \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

En appliquant la relation (2.27), on obtient

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = S_{3,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w^{2^*_\sigma} dx + \int_{\partial(Q_{r/\varepsilon})} w \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

Ainsi, par le lemme 2.4.1, on a

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = S_{3,\sigma} + \varepsilon \int_{\partial Q_r} v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$



Comme  $Q_r := ]-r, r[ \times B_{\mathbb{R}^2}(0, r)$  pour  $N = 3$  et d'après la relation (2.84), on obtient

$$\int_{\partial Q_r} v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} d\sigma(x) = \int_{\partial B_{\mathbb{R}^2}^2(0, r)} \int_{-r}^r v_\varepsilon(t, z) \nabla v_\varepsilon(t, z) \cdot \frac{z}{|z|} d\sigma(z) dt + 2 \int_{B_{\mathbb{R}^2}^2} v_\varepsilon(r, z) \partial_t v_\varepsilon(t, z) dz.$$

En appliquant la relation (2.67) et le théorème de convergence dominée, pour  $r > 0$  fixé et lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q_r} v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} d\sigma(x) &= \mathbf{c}^2 \int_{\partial B_{\mathbb{R}^2}^2(0, r)} \int_{-r}^r \frac{1}{|x|} \nabla \left( \frac{1}{|x|} \right) \cdot \frac{z}{|z|} d\sigma(z) dt + 2\mathbf{c}^2 \int_{B_{\mathbb{R}^2}^2} \frac{1}{|x|} \partial_t \left( \frac{1}{|x|} \right) dz \\ &= \mathbf{c}^2 \int_{\partial B_{\mathbb{R}^2}^2(0, r)} \int_{-r}^r \mathcal{R}(t, z) \nabla \mathcal{R}(t, z) \cdot \frac{z}{|z|} d\sigma(z) dt + 2\mathbf{c}^2 \int_{B_{\mathbb{R}^2}^2} \mathcal{R}(r, z) \partial_t \mathcal{R}(r, z) dz \\ &= \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} \mathcal{R} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy = S_{3,\sigma} + \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} \mathcal{R} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + o(1) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

De plus, d'après la relation (2.72), on a

$$\int_{F(Q_r)} h \Psi_\varepsilon^2 dy = \varepsilon \int_{F(Q_r)} h \left( V_\varepsilon + \mathbf{c} \widetilde{M}_{2r} \right)^2 dy = \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

En combinant ces dernières, on obtient

$$\int_{F(Q_r)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy + \int_{F(Q_r)} h \Psi_\varepsilon^2 dy = S_{3,\sigma} + \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} \mathcal{R} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.92)$$

En combinant la relation (2.92) avec la relation (2.91), on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy + \int_{\Omega} h \Psi_\varepsilon^2 dy = S_{3,\sigma} - \varepsilon \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} M \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon) + o(\varepsilon).$$

Puisque  $M(y) = M(0) + O(r) = \mathbf{m}(y_0) + O(r)$  dans  $Q_{2r}$ , on a le résultat final

$$\int_{\Omega} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 dy + \int_{\Omega} h \Psi_\varepsilon^2 dy = S_{3,\sigma} - \varepsilon \mathbf{m}(y_0) \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

Le résultat suivant associé au lemme précédent fournit la preuve du lemme 2.4.3.  $\square$

**Lemme 2.4.5.** *On a*

$$\left( \int_{\Omega} \rho_\Gamma^{-\sigma} |\Psi_\varepsilon|^{2_\sigma^*} \right)^{2/2_\sigma^*} = 1 - \frac{2}{S_{3,\sigma}} \varepsilon \mathbf{m}(y_0) \mathbf{c}^2 \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.93)$$

**Démonstration.** Puisque  $2_\sigma^* > 2$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C(\sigma)$  positive telle que

$$\left| |a + b|^{2_\sigma^*} - |a|^{2_\sigma^*} - 2_\sigma^* ab |a|^{2_\sigma^* - 2} \right| \leq C(\sigma) \left( |a|^{2_\sigma^* - 2} b^2 + |b|^{2_\sigma^*} \right). \quad (2.94)$$

On multiplie la fonction test  $\Psi_\varepsilon$  par la fonction distance à  $\Gamma$  puis par intégration, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_\Gamma^{-\sigma} |\Psi_\varepsilon|^{2_\sigma^*} dy &= \int_{F(Q_r)} \rho_\Gamma^{-\sigma} |u_\varepsilon + \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \widetilde{M}_{2r}|^{2_\sigma^*} dy \\ &\quad + \int_{F(Q_{4r}) \setminus F(Q_r)} \rho_\Gamma^{-\sigma} |W_\varepsilon + \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \widetilde{M}_{2r}|^{2_\sigma^*} dy. \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité (2.94), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dy &= \int_{F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dy + 2_{\sigma}^* \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \int_{F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} \widetilde{M}_{2r} dy \\
&+ O \left( \int_{F(Q_{4r})} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon} \eta_r|^{2_{\sigma}^*-2} (\varepsilon^{1/2} \widetilde{M}_{2r})^2 dy + \int_{F(Q_{4r})} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\varepsilon^{1/2} \widetilde{M}_{2r}|^{2_{\sigma}^*} dy \right) \\
&+ O \left( \int_{F(Q_{4r}) \setminus F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dy + 2_{\sigma}^* \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \int_{F(Q_{4r}) \setminus F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} \widetilde{M}_{2r} dy \right) \quad (2.95)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et la relation (2.14), on a

$$\begin{aligned}
\int_{F(Q_{4r})} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon} \eta_r|^{2_{\sigma}^*-2} (\varepsilon^{1/2} \widetilde{\beta}_r)^2 dy &\leq \varepsilon \|u_{\varepsilon}\|_{L^{2_{\sigma}^*}(F(Q_{4r}), \rho_{\Gamma}^{-\sigma})}^{2_{\sigma}^*-2} \|\widetilde{M}_{2r}\|_{L^{2_{\sigma}^*}(F(Q_{4r}), \rho_{\Gamma}^{-\sigma})}^2 \\
&= \varepsilon \|w\|_{L^{2_{\sigma}^*}(Q_{4r}, |z|^{-\sigma} \sqrt{|g|})}^{2_{\sigma}^*-2} \|\widetilde{M}_{2r}\|_{L^{2_{\sigma}^*}(F(Q_{4r}), \rho_{\Gamma}^{-\sigma})}^2 \\
&\leq \varepsilon (1 + Cr) \|\widetilde{M}_{2r}\|_{L^{2_{\sigma}^*}(F(Q_{4r}), \rho_{\Gamma}^{-\sigma})}^2 = \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.96)
\end{aligned}$$

En rappelant que  $\|w\|_{L^{2_{\sigma}^*}(\mathbb{R}^3, \rho_{\Gamma}^{-\sigma})} = 1$ . De plus comme  $2_{\sigma}^* > 2$ , par la relation (2.62) on obtient

$$\int_{F(Q_{4r})} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\varepsilon^{1/2} \widetilde{M}_{2r}|^{2_{\sigma}^*} dy = o(\varepsilon). \quad (2.97)$$

De plus, par le changement de variables et par la relation (2.73), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{F(Q_{4r}) \setminus F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dy + 2_{\sigma}^* \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \int_{F(Q_{4r}) \setminus F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} \widetilde{M}_{2r} dy \\
&= \int_{Q_{4r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dx + \mathbf{c} \varepsilon \int_{Q_{4r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} M dx \\
&\leq \int_{Q_{4r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dx + \mathbf{c} \varepsilon \int_{Q_{4r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} dx = o(\varepsilon). \quad (2.98)
\end{aligned}$$

En tenant compte les relations (2.96), (2.97) et (2.98) dans la relation (2.95), on obtient

$$\int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dy = \int_{F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dy + 2_{\sigma}^* \varepsilon^{1/2} \mathbf{c} \int_{F(Q_r)} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |u_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} \widetilde{M}_{2r} dy + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

On définit  $B_{\varepsilon}(x) := M(\varepsilon x) \sqrt{|g_{\varepsilon}|}(x) = M(\varepsilon x) \sqrt{|g_{\varepsilon}|}(\varepsilon x)$ . Alors par le changement de variable  $y = F(x)/\varepsilon$  dans l'identité ci-dessus

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dy &= \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} \sqrt{|g_{\varepsilon}|} dx + 2_{\sigma}^* \varepsilon \mathbf{c} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} M \sqrt{|g_{\varepsilon}|} dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon) \\
&= \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} \sqrt{|g_{\varepsilon}|} dx + 2_{\sigma}^* \varepsilon \mathbf{c} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} B_{\varepsilon} dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon),
\end{aligned}$$

d'après la relation (2.14)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*} dx &= \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w_{\varepsilon}^{2_{\sigma}^*} dx + 2_{\sigma}^* \varepsilon \mathbf{c} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2_{\sigma}^*-1} B_{\varepsilon} dx \\
&+ \mathcal{O}_r(\varepsilon) + O \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |x|^2 w_{\varepsilon}^{2_{\sigma}^*} dx \right).
\end{aligned}$$

On sait que

$$\int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w_{\varepsilon}^{2_{\sigma}^*} dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w_{\varepsilon}^{2_{\sigma}^*} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |z|^{-\sigma} w_{\varepsilon}^{2_{\sigma}^*} dx,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}} dy &= 1 + 2^*_{\sigma} \varepsilon \mathbf{c} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}-1} B_{\varepsilon} dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon) \\ &+ O \left( \int_{\mathbb{R}^3 \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w_{\varepsilon}^{2^*_{\sigma}} dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |x|^2 w_{\varepsilon}^{2^*_{\sigma}} dx \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la relation (2.73)

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} w_{\varepsilon}^{2^*_{\sigma}} dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |x|^2 w_{\varepsilon}^{2^*_{\sigma}} dx = O(\varepsilon).$$

Il en résulte que

$$\left( \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}} dy \right)^{2/2^*_{\sigma}} = 1 + 2^*_{\sigma} \varepsilon \mathbf{c} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}-1} B_{\varepsilon} dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.99)$$

On multiplie la relation (2.65), par la fonction  $B_{\varepsilon} \in C^1(\bar{Q}_r)$  et par intégration, on obtient

$$S_{3,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}-1} B_{\varepsilon} dx = - \int_{Q_{r/\varepsilon}} (\Delta w) B_{\varepsilon} dx.$$

En utilisant l'intégration par partie, on a

$$S_{3,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}-1} B_{\varepsilon} dx = \int_{Q_{r/\varepsilon}} \nabla w \nabla B_{\varepsilon} dx - \int_{\partial Q_{r/\varepsilon}} B_{\varepsilon} \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\nu} dx.$$

Comme  $B_{\varepsilon} \rightarrow B$ , d'après le théorème de la convergence dominée, on a

$$S_{3,\sigma} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}-1} B_{\varepsilon} dx = \int_{Q_{r/\varepsilon}} \nabla w \nabla B_{\varepsilon} dx - \int_{\partial Q_{r/\varepsilon}} B_1 \frac{\partial w}{\nu} dx.$$

Puisque  $|\nabla B_{\varepsilon}| \leq C\varepsilon$ , par le lemme 2.4.1 et par la relation (2.62) donc

$$\varepsilon \int_{Q_{r/\varepsilon}} \nabla w \nabla B_{\varepsilon} dx \leq C\varepsilon \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w| = O \left( \varepsilon^2 \int_{Q_{r/\varepsilon}} |\nabla w| dx \right) = \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

D'une part,

$$S_{3,\sigma} \varepsilon \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}-1} B_{\varepsilon} dx = -\varepsilon \int_{\partial Q_r} B_1 \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

D'autre part, par le lemme 2.4.1, la relation (2.62) et le théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q_r} B_1 \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\nu} d\sigma(x) &= \int_{\partial Q_r} B_1 \frac{\partial(\mathbf{c} \frac{1}{|x|})}{\nu} d\sigma(x) + o(1) \\ &= \mathbf{c} \int_{\partial Q_r} B_1 \frac{\partial \mathcal{R}}{\nu} d\sigma(x) + o(1), \end{aligned}$$

or  $B_1 = M(x)\sqrt{g}(x) = M(x) = M(0) + \mathcal{O}_r(\varepsilon)$  donc

$$\int_{\partial Q_r} B_1 \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\nu} d\sigma(x) = \mathbf{c} M(0) \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon) + o(1).$$

Ainsi, on obtient

$$\mathbf{c} \varepsilon \int_{Q_{r/\varepsilon}} |z|^{-\sigma} |w_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}-1} B_{\varepsilon} dx = -\varepsilon \mathbf{c}^2 \frac{1}{S_{3,\sigma}} M(0) \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon) + o(1).$$

Il en résulte de la relation (2.99)

$$\left( \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}} dy \right)^{2/2^*_{\sigma}} = 1 - \varepsilon \mathbf{c}^2 \frac{1}{S_{3,\sigma}} M(0) \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

Puisque  $M(0) = \mathbf{m}(y_0)$ , alors

$$\left( \int_{\Omega} \rho_{\Gamma}^{-\sigma} |\Psi_{\varepsilon}|^{2^*_{\sigma}} dy \right)^{2/2^*_{\sigma}} = 1 - \varepsilon \mathbf{c}^2 \frac{1}{S_{3,\sigma}} \mathbf{m}(y_0) \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon).$$

□

**Démonstration. (complet du lemme 2.4.3.)**

Par le lemme 2.4.4 et le lemme 2.4.5. On a :

$$J(\Psi_\varepsilon) = S_{3,\sigma} - \varepsilon \mathbf{c}^2 \mathbf{m}(y_0) \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.100)$$

Enfin, rappelons que  $\mathcal{R} = \frac{1}{|x|}$ . Nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} d\sigma(x) &= - \int_{\partial Q_r} \frac{x}{|x|^3} v(x) d\sigma(x) \\ &= \int_{B_{\mathbb{R}^2}(0,r)} \frac{-2r}{r^2 + |z|^2} dz - 2\pi \int_{-r}^r \frac{r^3}{r^2 + t^2} dt = -\pi^2 (1 + r^2). \end{aligned}$$

D'après ce dernier et la relation (2.100), on obtient

$$J(\Psi_\varepsilon) = S_{3,\sigma} - \varepsilon \pi^2 \mathbf{c}^2 \mathbf{m}(y_0) + \mathcal{O}_r(\varepsilon). \quad (2.101)$$

□

## Chapitre 3

# L'ÉQUATION DE HARDY-SOBOLEV PERTURBÉE

L'objectif de cette partie est de montrer qu'en rajoutant un terme de perturbation à l'équation de Hardy-Sobolev, la courbure ne joue aucun rôle sur l'existence de Solution positive. Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  avec  $N \geq 3$ ,  $h$  et  $b$  deux fonctions continues. Soit  $\Gamma$  une courbe fermée régulière de  $\Omega$ . On considère la constante de Hardy-Sobolev perturbée suivante :

$$\mu_\sigma(\Omega, \Gamma, h, b) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dy + \frac{1}{2} \int_\Omega h u^2 dy + \frac{1}{2 + \delta} \int_\Omega b u^{2+\delta} dy - \frac{1}{2_\sigma^*} \int_\Omega \rho_\Gamma^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dy. \quad (3.1)$$

On s'intéresse à l'effet de  $b$  et/ou à la position de la courbe  $\Gamma$  sur l'existence d'un minimiseur pour  $\mu_\sigma(\Omega, \Gamma, h, b)$ . Nous avons le résultat principal de cette partie :

**Théorème 3.0.1.** *Soient  $N \geq 4$ ,  $\sigma \in ]0, 2[$  et  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $\Gamma$  une courbe fermée contenue dans  $\Omega$  et  $h, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues telle que l'opérateur  $-\Delta + h$  soit coercif. On suppose qu'il existe  $y_0 \in \Gamma$  telle que :*

$$b(y_0) < 0. \quad (3.2)$$

Alors la fonctionnelle  $J$  admet un minimiseur  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

L'inégalité (3.2) montre que ni la courbure de  $\Gamma$  ni le potentiel  $h$  ne jouent aucun rôle sur l'existence de la solution positive. Dans cette partie nous allons démontrer le théorème 3.0.1. Pour cela nous allons construire des fonctions tests pour comparer  $\mu_\sigma(\Omega, \Gamma, h, b)$  et  $S_{N,\sigma}$ .

Ce chapitre est divisé en deux sections : nous construisons des fonctions tests pour l'existence d'un minimiseur pour  $N = 3$  dans la section (3.1) et pour  $N \geq 4$  dans la section (3.2).

### 3.1 Construction d'une fonction test existence de minimiseur pour $\mu(\Omega, \Gamma, h, b)$ de dimension $N \geq 4$

On considère  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  et  $\Gamma \subset \Omega$  une courbe fermée et régulière. Pour  $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ , on définit la fonctionnelle

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dy + \frac{1}{2} \int_\Omega h u^2 dy + \frac{1}{2 + \delta} \int_\Omega b u^{2+\delta} dy - \frac{1}{2_\sigma^*} \int_\Omega \rho_\Gamma^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dy. \quad (3.3)$$

Soit  $\eta \in C_c^\infty(F_{y_0}(Q_{2r}))$  tel que  $0 \leq \eta \leq 1$  et  $\eta \equiv 1$  dans  $Q_r$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on considère  $u_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donné par

$$u_\varepsilon(y) := \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta(F_{y_0}^{-1}(y)) w(\varepsilon^{-1} F_{y_0}^{-1}(y)). \quad (3.4)$$

En particulier, pour tout  $x = (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ , nous avons

$$u_\varepsilon(F_{y_0}(x)) := \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} \eta(x) \theta\left(\frac{|t|}{\varepsilon}, \frac{|z|}{\varepsilon}\right). \quad (3.5)$$

Il est clair que  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ . On a la proposition suivante.

**Proposition 3.1.1.** *Pour  $N \geq 4$ , on a*

$$J(u_\varepsilon) = S_{N,\sigma} + \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} b(y_0) \int_{\mathbb{R}^N} w^{\delta+2} dx + O\left(\varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}}\right), \quad (3.6)$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Démonstration.** La preuve de la proposition 3.1.1 est divisée en deux étapes : d'une part, par le lemme 3.1.1 et d'autre part, par le lemme 3.1.2. Pour cela nous avons

$$J_1(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} h u^2 dx - \frac{1}{2_\sigma^*} \int_{\Omega} \rho_\Gamma^{-\sigma} |u|^{2_\sigma^*} dx.$$

□

**Lemme 3.1.1.**

On a

$$J_1(u_\varepsilon) = S_{N,\sigma} + \begin{cases} O(\varepsilon^2) & \forall N \geq 5, \\ O(\varepsilon^2 |\log(\varepsilon)|) & \forall N = 4. \end{cases}$$

**Lemme 3.1.2.** *On a*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} b u_\varepsilon^{2+\delta} dx = \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} b(y_0) \int_{\mathbb{R}^N} w^{\delta+2} dx + O(\varepsilon^2) & \text{pour } N \geq 4, \\ \int_{\Omega} b u_\varepsilon^{2+\delta} dx = \varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}} b(y_0) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{\delta+2} dx + O(\varepsilon^2) & \text{pour } N = 3 \text{ et } \delta \leq 1, \\ \int_{\Omega} b u_\varepsilon^{2+\delta} dx = \varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}} b(y_0) \int_{\mathbb{R}^N} w^{\delta+2} dx + O(\varepsilon^{1+\frac{\delta}{2}}) & \text{pour } N = 3 \text{ et } \delta > 1 \end{cases}$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Démonstration.** Puisque  $F_{y_0} : Q_r \rightarrow \Omega$ , on a  $\Omega = F_{y_0}(Q_r) + F_{y_0}(Q_{2r}) \setminus F_{y_0}(Q_r)$ . Donc

$$\int_{\Omega} b(x) u_\varepsilon^{2+\delta} dx = \int_{F_{y_0}(Q_r)} b(x) u_\varepsilon^{2+\delta} dx + \int_{F_{y_0}(Q_{2r}) \setminus F_{y_0}(Q_r)} b(x) u_\varepsilon^{2+\delta} dx.$$

Puisque  $b$  est continue et  $r$  petit, pour  $y = F_{y_0}/\varepsilon$ , par le théorème de changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(x) u_\varepsilon^{2+\delta} dx &= \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} b(y_0) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} \sqrt{|g|} dx \\ &+ \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} b(y_0) \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} \sqrt{|g|} dx. \end{aligned}$$

Par la relation (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(x) u_\varepsilon^{2+\delta} dx &= b(y_0) \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta}(x) dx \\ &+ O\left(\varepsilon^{4-\frac{\delta(N-2)}{2}} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^2 w^{2+\delta} dx + \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} dx\right). \end{aligned}$$

En appliquant le corollaire 2.2.1, on obtient

$$\varepsilon^{4-\frac{\delta(N-2)}{2}} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |x|^2 w^{2+\delta} dx + \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} dx = O(\varepsilon^2) \quad \forall N \geq 3.$$

Pour  $N = 3$  et  $\delta \leq 1$ , on a

$$\int_{\Omega} b(x) u_{\varepsilon}^{2+\delta} dx = b(y_0) \varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}} \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta}(x) dx + O(\varepsilon^2).$$

Pour  $N = 3$  et  $\delta > 1$ , d'après le corollaire 2.2.1, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} dx = O(\varepsilon^{\delta-1})$$

donc

$$\int_{\Omega} b(x) u_{\varepsilon}^{2+\delta} dx = b(y_0) \varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} w^{2+\delta} dx + O(\varepsilon^{1+\frac{\delta}{2}}).$$

Pour  $N \geq 4$ , on obtient, d'après le corollaire 2.2.1

$$\varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} \int_{Q_{2r/\varepsilon} \setminus Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} dx = O(\varepsilon^2),$$

ainsi

$$\int_{\Omega} b(x) u_{\varepsilon}^{2+\delta} dx = b(y_0) \varepsilon^{2-\frac{\delta(N-2)}{2}} \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} dx + O(\varepsilon^2).$$

□

### 3.2 Construction d'une fonction test et existence de minimiseur pour $\mu(\Omega, \Gamma, h, b)$ de dimension trois

**Proposition 3.2.1.** Soient  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $c$  une constante donnée par le lemme 2.4.1. Alors il existe  $r_0, n_0 > 0$  tel que pour tout  $r \in ]0, r_0[$  et  $n \geq n_0$

$$\begin{cases} J(\Psi_{\varepsilon}) = S_{3,\sigma} - \varepsilon_n \pi^2 \mathbf{m}(y_0) \mathbf{c}^2 + \frac{\varepsilon_n^{2-\frac{\delta}{2}}}{2+\delta} \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon_n) & \text{pour } \delta \leq 1, \\ J(\Psi_{\varepsilon}) = S_{3,\sigma} - \varepsilon_n \pi^2 \mathbf{m}(y_0) \mathbf{c}^2 + \frac{\varepsilon_n^{2-\frac{\delta}{2}}}{2+\delta} \int_{\mathbb{R}^3} w^{2+\delta} dx + \mathcal{O}_r(\varepsilon_n) & \text{pour } \delta > 1, \end{cases}$$

pour  $\mathcal{O}_r(\varepsilon_n)$  satisfaisant

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{-1} \mathcal{O}_r(\varepsilon_n) = 0.$$

**Démonstration.** La preuve de cette proposition est séparée en deux étapes données par le lemme 2.4.3 et le lemme 3.2.1. □

**Lemme 3.2.1.** On a

$$\int_{\Omega} |\Psi_{\varepsilon}|^{2+\delta} dy = \varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}} b(y_0) \int_{Q_{r\varepsilon}} w^{2+\delta} dx + o(\varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}}).$$

**Démonstration.** Puisque  $\delta > 0$ , par le développement de Taylor, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Psi_{\varepsilon}|^{2+\delta} dy &= \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}(y) + \varepsilon^{1/2} \widetilde{M}_{2r}(y)|^{2+\delta} dy \\ &= \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^{2+\delta} dy + O\left(\varepsilon^{1/2} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^{1+\delta} |\widetilde{M}_{2r}| dy + \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^{\delta} |\widetilde{M}_{2r}|^2 dy + \int_{\Omega} |\widetilde{M}_{2r}|^{2+\delta} dy\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et la relation (2.14), on a

$$\begin{aligned} \int_{F(Q_{4r})} |\eta u_{\varepsilon}|^{\delta} \left(\varepsilon^{1/2} \widetilde{M}_{2r}\right)^2 dy &\leq \varepsilon \|u_{\varepsilon}\|_{L^{2+\delta}(F(Q_{4r}))}^{\delta} \|\widetilde{M}_{2r}\|_{L^{2+\delta}(F(Q_{4r}))}^2 \\ &= \varepsilon^{4-\frac{\delta}{2}} \|w\|_{L^{2+\delta}(Q_{4r}; \sqrt{|g|})}^{\delta} \|\widetilde{M}_{2r}\|_{L^{2+\delta}(F(Q_{4r}))}^2 \\ &\leq \varepsilon^{4-\frac{\delta}{2}} \|\widetilde{M}_{2r}\|_{L^{2+\delta}(F(Q_{4r}))}^2 = o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Puisque  $\delta > 0$ , d'après (2.62), on obtient facilement

$$\int_{F(Q_{4r})} |\varepsilon^{1/2} \widetilde{M}_{2r}|^{2+\delta} dy = O\left(\varepsilon^{1+\frac{\delta}{2}}\right) = o(\varepsilon). \quad (3.9)$$

En tenant compte des relations (3.8) et (3.9) dans la relation (3.7), on obtient

$$\int_{\Omega} |\Psi_{\varepsilon}|^{2+\delta} dy = \int_{F(Q_r)} |u_{\varepsilon}|^{2+\delta} dy + O\left(\varepsilon^{1/2} \int_{F(Q_r)} |u_{\varepsilon}|^{1+\delta} \widetilde{M}_{2r} dy\right) + o(\varepsilon).$$

En multipliant la relation ci-dessus par la fonction  $b$  qui est continue, ensuite par application du lemme 3.1.2, on obtient

$$\int_{\Omega} |\Psi_{\varepsilon}|^{2+\delta} dy = \varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}} b(y_0) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{\delta+2} dx + O\left(\varepsilon^{1/2} \int_{F(Q_r)} |u_{\varepsilon}|^{1+\delta} \widetilde{M}_{2r} dy\right) + o(\varepsilon).$$

On défini

$$B_{\varepsilon}(x) = M(x) \sqrt{|g_{\varepsilon}|}(x) = M(\varepsilon x) \sqrt{|g|}(\varepsilon x).$$

Alors par le changement de variable  $y = \frac{F(x)}{\varepsilon}$  dans l'identité ci-dessus et en rappelant la relation (2.14), on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^{1+\delta} |\widetilde{M}_{2r}| dy &= \varepsilon^{3-\frac{\delta}{2}} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |w|^{1+\delta} M \sqrt{|g_{\varepsilon}|}(x) dx \\ &= \varepsilon^{3-\frac{\delta}{2}} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |w|^{1+\delta} B_{\varepsilon} dx. \end{aligned}$$

Par le développement de Taylor, puis en appliquant le corollaire 2.2.1, nous obtenons

$$\varepsilon^{1/2} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^{1+\delta} |\widetilde{M}_{2r}| dy = O\left(\varepsilon^{3-\delta/2} \int_{Q_{r/\varepsilon}} |w|^{1+\delta} dx\right) = O\left(\varepsilon^{3-\delta/2}\right).$$

Enfin

$$\int_{\Omega} |\Psi_{\varepsilon}|^{2+\delta} dy = \varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}} b(y_0) \int_{Q_{r/\varepsilon}} w^{2+\delta} dx + o\left(\varepsilon^{2-\frac{\delta}{2}}\right)$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

**Démonstration. du théorème 3.0.1** Puisque si

$$\mu_{\sigma}(\Omega, \Gamma, h, b) < S_{N,\sigma}, \quad (3.10)$$

alors  $\mu_{\sigma}(\Omega, \Gamma, h, b)$  est atteint par une fonction positive  $u \in H_0^1(\Omega)$ . On peut en déduire de la proposition 3.2.1 et la proposition 3.1.1 pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  que  $\mu_{\sigma}(\Omega, \Gamma, h, b)$  est atteint alors il existe un minimiseur  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème. □



# CONCLUSION

L'objectif principal de notre travail a été réalisé par une étude de l'inégalité de Hardy-Sobolev pour résoudre le problème :

$$-\Delta u + hu + bu^{1+\delta} = \rho_{\Gamma}^{-\sigma} u^{2\sigma^* - 1} \text{ dans } \Omega.$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev est très utile pour l'étude des équations aux dérivées partielles et a fait l'objet de plusieurs travaux. Nous avons utilisé l'inégalité de Hardy-Sobolev pour démontrer le théorème 3.0.1 et le théorème 2.0.1.

Nous avons utilisé la méthode des fonctions tests, elle consiste à trouver une fonction test pour laquelle  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma, h, b) < S_{N,\sigma}$ , ce qui nous a permis de retrouver la compacité. Ainsi pour toute suite minimisante de  $\mu_{h,\sigma}(\Omega, \Gamma, h, b)$ , il existe une sous-suite qui converge vers un minimiseur. La fonction test est construite à partir du minimiseur de  $S_{N,\sigma}$ . En faisant un changement de variables et en utilisant le système de coordonnées locales, on a pu voir l'influence de la géométrie locale de la courbe pour obtenir une condition suffisante d'existence de minimiseur. Le théorème 2.0.1 nous montre que le signe de la courbure n'influe pas de l'existence de la solution positive  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème, mais sa norme l'est pour le cas  $b = 0$ . Par contre, le cas  $b \neq 0$ , nous avons constaté que l'existence de la solution positive  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème ne dépend pas de la géométrie des courbes  $\Gamma$ , grâce à l'influence du terme perturbation  $b$ .

En guise de perspective, nous envisageons d'étudier :

- l'inégalité de Hardy-Sobolev avec singularité une courbe inclus entièrement sur le bord de  $\Omega$ . Nous espérons découvrir l'influence locale de la courbure moyenne du bord afin d'obtenir un minimiseur ;
- les constantes optimales pour les inégalités de Hardy, de Sobolev et de Hardy-Sobolev ;
- l'inégalité de Hardy-Sobolev sur une variété riemannienne compacte  $M$  et aussi dans le cas où  $\Gamma$  est une sous-variété fermée de  $M$ . Nous croyons que les normes de la seconde forme fondamentale et de la courbure moyenne de  $\Gamma$  vont jouer des rôles importants ainsi que les courbures scalaires de  $M$  et de  $\Gamma$ .

# Bibliographie

- [1] AXLER, Sheldon, BOURDON, Paul, et RAMEY, Wade. Bôchers theorem. The American mathematical monthly, 1992, 99, 1, 51-55.
- [2] BONY J.-M., Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier, Éditions de l'école Polytechnique, Palaiseau (2001).
- [3] C.Bär, Elementary Differential Geometry. Cambridge University Press, 2010.
- [4] E. H. Lieb, Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities, Ann. of Math. 118, (1983), 349-374.
- [5] F. Alouges, Analyse Variationnelle des Equations aux Dérivées Partielles. Cours MAP431 de l'École Polytechnique, 2018.
- [6] Franck Boyer, Analyse Fonctionnelle, 13 décembre 2015.
- [7] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality. Ann. Mat. Pura Appli. 110, (1976), 353-372.
- [8] H. Boumaza, T. Duyckaerts, E. Schenck, Théorie des distributions, Le 15 septembre 2020.
- [9] H. Brezis Analyse Fonctionnelle, Espaces de Sobolev et Equations aux Dérivées Partielles. New York : Springer, 2011.
- [10] H. Brezis et L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents, Comm. Pure Appl. Math 36, (1983), 437-477.
- [11] I. E. Ijaodoro E. H. A. Thiam, Influence of an  $L^p$ -perturbation on Hardy-Sobolev inequality with singularity a curve, Opuscula Mathematica, 2021, 41, 2, 187-204.
- [12] I. Fabbri, G. Mancini et K. Sandeep, Classification of solutions of a critical Hardy-Sobolev operator, J. Differential Equations 224 (2006), 258–276.
- [13] J. Royer, Formule de Stokes - Formule de Green, Année 2020-2021.
- [14] M. Badiale et G. Tarantello, A Sobolev–Hardy inequality with applications to a non-linear elliptic equation arising in astrophysics, Arch. Rational Mech. Anal. 163 (2002), 4, 259–293.
- [15] M. Berger and B. Gostiaux. Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces. Presses universitaires de France, 1993.
- [16] M. M. Fall et E. H. A. Thiam Hardy-Sobolev Inequality with singularity a curve, Topological Methods in Nonlinear Analysis. 51(1) (2018), 151-181.
- [17] M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [18] Nancy Sayah. La géométries des courbes et des surfaces. Primary 05C38, 15A15 Secondary 05A15, 15A18.
- [19] T. Aubin, Problèmes isopérimétriques de Sobolev, J. Differential Geom. 11 (1976), 573–598.
- [20] W. Beckner, Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality, Ann. of Math. 138, (1993), (1), 213-242.