UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Algèbre

Titre : MODULES ANTI-YETTER-DRINFELD STABLES

Présenté par : Mohamed Fadel AIDARA

Directeur : Pr Thomas GUÉDÉNON
Co-directeur : Dr Christophe Lopez NANGO

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Oumar SALL	Professeur Titulaire	Président du jury	UASZ
Thomas GUEDENON	Professeur Assimilé	Directeur	UASZ
Moussa FALL	Maitre de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Christophe Lopez NANGO	Docteur	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2021−2022

MODULES ANTI-YETTER-DRINFELD STABLES

Mohamed Fadel AIDARA

25 mars 2023

Remerciements

Louange et Gloire à l'**UNIQUE DIEU** ; Paix et Salut sur son **Prophète Mohamed**

Je rends grâce à l'**ÉTERNEL DIEU** de m'avoir donné toute la force, le courage et la persévérance d'accomplir ce modeste travail. Je commence mes remerciements de très haute facture à mon Directeur de mémoire **Pr Thomas GUEDENON** et à mon Co-directeur **Dr Christophe Lopez NANGO**, pour l'orientation, les conseils, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bon port. Qu'ils trouvent dans ce travail un hommage vivant à leur haute personnalité.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à **tous les professeurs** qui m'ont enseigné en particulier ceux du département de Mathématiques, qui par leurs compétences m'ont soutenu dans la poursuite de mes études.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury **Pr Oumar SALL**, **Dr Moussa FALL** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon projet en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.
Mes remerciements s'adressent aussi **aux autorités de l'académie de Ziguinchor** qui ont autorisé mes inscriptions à l'Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ). Je n'oublie pas **l'administration de mon lycée (LEOLB)** et son personnel en particulier les collègues de la **cellule pédagogique de Mathématiques** pour tout leur soutien. Un grand merci aux **camarades de promotion** de Master 2 à l'UASZ et particulièrement à mon ami et collègue enseignant du Lycée de Nyassia **Papa Aly CISSE**.

Mes chaleureux et cordiaux remerciements vont à mon père **Chérif Cheikh EL Koutoub** et son frère **Chérif Cheikh Hadar**, à ma mère **Khadjétou DIENG**, à mes oncles, à mes tantes, et mes frères particulièrement **Chérif Mamina AIDARA**, **Chérif Ousmane AIDARA**, **Chérif EL Hadji Néma AIDARA**, **Chérif Malaïny AIDARA**, **Ibrahima Demba DIAO** pour leur amour inestimable, leur confiance et leur soutien.

Mes remerciements spéciaux vont à l'endroit de mes enfants et de mes épouses **Aïssatou mint Cheikh Ahmed Tijane** et **Souadou mint Cheikh Abba** pour leurs affections et encouragements. Que ces remerciements constituent pour les enfants un paquet de motivations sans relâche à leurs études.

Je termine mes remerciements à l'endroit de toute la famille chérifienne et en particulier **AL Hatabiyoune** dont le Khalife **Cheikh Sidaty ould Cheikhna Cheikh Hatab** et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Résumé

Soient H une algèbre de Hopf d'antipode S sur un corps $\Bbbk$ et M un H-module et un H-comodule. Notre mémoire porte sur les modules anti-Yetter-Drinfeld stables, résultats de Piotr M. Hajac, Masoud Khalkhali, Bahram Rangipour, Yorck Sommerhäuser. Ces derniers ont étudié la stabilité des modules anti-Yetter-Drinfeld et établi la connexion entre ceux-ci et les $A(H)$-modules avec $A(H) = H^* \otimes H$ où H est une algèbre de Hopf de dimension finie et $H^* = Hom_{\Bbbk}(H, \Bbbk)$ son dual linéaire. Dans cette étude, la structure de H-comodule d'un module anti-Yetter-Drinfeld M est convertie en une structure de H^*-module sur M.

Table des matières

Introduction

Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S sur un corps $\Bbbk$ et M un H-module à gauche et un H-comodule à droite.
Nous présentons dans ce mémoire de master des résultats de Piotr M. Hajac, Masoud Khalkhali, Bahram Rangipour, Yorck Sommerhäuser sur les modules anti-Yetter-Drinfeld stables parus dans ELSEVIER C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 587–590. [7]
Tout au long de ce travail, nous utiliserons la notation de Sweedler-Heyneman avec sommation et parenthèses omises et la notation $\otimes$ signifie $\otimes_{\Bbbk}$. Toutes les applications seront supposées $\Bbbk-$linéaires. Notre étude est composée de trois parties.
Dans la première partie nous avons rappelé les prérequis à savoir une bialgèbre, une algèbre de Hopf et son dual.
Dans la deuxième partie nous avons parlé d'algèbre de $H-$comodule, des modules de Hopf et leurs catégories, les produits tensoriels de H-module et de $H-$comodule. Nous avons aussi évoqué la transformation des modules de Yetter-Drinfeld et le fait que le produit tensoriel entre un module de Yetter-Drinfeld et un module anti-Yetter-Drinfeld est un module anti-Yetter-Drinfeld à travers le théorème 2.2.1. Nous avons aussi parlé de la stabilité des modules anti-Yetter-Drinfeld à travers les théorèmes 2.2.2 et 2.2.3.
Dans la troisième et dernière section nous avons parlé des extensions de Hopf-Galois et l'action opposée de Miyashita-Ulbrich puis l'algèbre de comodule du double de Drinfeld. En effet avec l'action modifiée de Miyashita-Ulbrich, les auteurs du papier ont obtenu un module anti-Yetter-Drinfeld stable à partir d'une H-extension de Hopf-Galois d'après la proposition 3.1.1. Ils ont établi une connexion entre les A(H)-modules et les modules anti-Yetter-Drinfeld avec $(A(H) := H^* \otimes H)$ par la proposition 3.2.2 et ont aussi montré que A(H) est un D(H)-comodule avec $D(H) := (H^*)^{cop} \otimes H$ où $(H^*)^{cop}$ est la co-opposée du dual H^* de H à partir de la proposition 3.2.3.

Les théorèmes ci-dessous représentent quelques résultats(principaux) de cette étude.

Théorème 2.2.1 *[7, Lemme 2.3]*
Soient N un module de Yetter-Drinfeld et M un module anti-Yetter-Drinfeld. Alors :

i) $N \otimes M$ est un module anti-Yetter-Drinfeld gauche gauche via l'action
$$h(n \otimes m) = h_1 n \otimes h_2 m$$
et la coaction
$$_{N\otimes M}\rho(n \otimes m) = n_{-1}m_{-1} \otimes n_0 \otimes m_0,$$

ii) $N \otimes M$ est un module anti-Yetter-Drinfeld gauche droite via l'action
$$h(n \otimes m) = h_2 n \otimes h_1 m$$
et la coaction
$$\rho_{N\otimes M}(n \otimes m) = n_0 \otimes m_0 \otimes n_1 m_1,$$

De même

iii) $M \otimes N$ est un module anti-Yetter-Drinfeld droite gauche via l'action
$$(m \otimes n)h = mh_2 \otimes nh_1$$
et la coaction
$$_{M\otimes N}\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0,$$

iv) $M \otimes N$ est un module anti-Yetter-Drinfeld droite droite via l'action

$$(m \otimes n)h = mh_1 \otimes nh_2$$

et la coaction

$$\rho_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1.$$

Théorème 2.2.2 *[7, Lemme 2.2]*
Considérons le corps $\Bbbk$ comme un $H-$module à droite via un caractère δ et comme un $H-$comodule à gauche via un élément de type-groupe σ. Alors $\Bbbk = {}^{\sigma}\Bbbk_{\delta}$ est un module anti-Yetter-Drinfeld stable si et seulement si (δ, σ) est une paire modulaire en involution.

Théorème 2.2.3 *[7, Lemme 2.4]*
Soit M une algèbre et un $H-$comodule à gauche. Supposons que $\pi : H \longrightarrow M$ est un épimorphisme d'algèbre et l'action $hm = \pi(h)m$ fait de M un module anti-Yetter-Drinfeld. Supposons également que $\pi(1_{-1})1_0 = 1$. Alors M est un module anti-Yetter-Drinfeld stable.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Bialgèbres

Définition 1.1.1 (Algèbre)

Soit A un $\Bbbk-$module. On considère $A \otimes_{\Bbbk} A = A \otimes A$ le produit tensoriel sur $\Bbbk$.
Une $\Bbbk-$algèbre associative unitaire A est un triplet du type (A, m_A, μ_A) où A est un $\Bbbk-$module, $\begin{array}{rl} m_A : & A \otimes A \longrightarrow A \\ & a \otimes a' \longmapsto aa', \forall a, a' \in A \end{array}$ *et* $\begin{array}{rl} \mu_A : & \Bbbk \longrightarrow A \\ & \lambda \longmapsto \lambda 1_A, \forall \lambda \in \Bbbk \end{array}$ *sont des applications $\Bbbk-$linéaires satisfaisant les deux axiomes suivants :*

- $m_A \circ (m_A \otimes id_A) = m_A \circ (id_A \otimes m_A)$ *: c'est l'associativité*
- *et* $m_A \circ (id_A \otimes \mu_A) = id_A = m_A \circ (\mu_A \otimes id_A)$ *: c'est l'unité.*

L'application m_A est appelée le produit ou la multiplication, l'application μ_A est l'application unité et $\mu_A(1_{\Bbbk})$ est l'élément unité de A.

Pour définir les axiomes de cogèbres, nous allons dualiser ceux définissant les algèbres.

Définition 1.1.2 (Coalgèbre)

Une co-algèbre (ou coalgèbre) C est un triplet $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$; où C est un $\Bbbk-$module, $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon_C : C \longrightarrow \Bbbk$ sont des applications $\Bbbk-$linéaires satisfaisant les deux axiomes suivants :

- $(\Delta_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = (id_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C$, *c'est la co-associativité,*
- $(id_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C = (\varepsilon_C \otimes id_C) \circ \Delta_C$, *c'est la co-unité.*

L'application Δ_C est appelée la co-multiplication ou le co-produit de C et l'application ε_C est appelée la co-unité de C.

1.1.1 Notation de Sweedler-Heyneman

Définition 1.1.3

Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre.
Un élément de $C \otimes C$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i$. Pour une uniformisation d'écriture et par convention, on utilise la notation de Sweedler-Heyneman : Soit $c \in C$, on a :

$$\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_1 \otimes c_2 = c_{(1)} \otimes c_{(2)} = c_1 \otimes c_2.$$

L'intérêt pour ces notations de Sweedler est de faciliter les calculs dans les coalgèbres. On peut aussi utiliser les exposants, dans les notations, à la place des indices.
Dans la suite de tout ce travail, nous utiliserons la notation $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.
Avec cette notation, l'axiome de la co-associativité se traduit par :

$$\Delta_C(c_1) \otimes c_2 = c_1 \otimes \Delta_C(c_2);$$

c'est-à-dire,

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3, \quad \forall c \in C.$$

L'axiome de la co-unité se traduit par :

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2), \quad \forall c \in C.$$

Ainsi pour montrer qu'un $\mathbb{k}-$module C est une $\mathbb{k}-$coalgèbre, il suffit de montrer qu'il existe deux applications $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon_C : C \longrightarrow \mathbb{k}$ telles que : $\forall c \in C$, avec $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$, on a :

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}$$

et

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2).$$

Lemme 1.1.1

Soient (B, m_B, μ_B) une algèbre et $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ une coalgèbre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Δ_B et ε_B sont des morphismes d'algèbres ;

ii) m_B et μ_B sont des morphismes de coalgèbres ;

iii)pour tous $a, b \in B$;

$$\Delta_B(ab) = a_1b_1 \otimes a_2b_2, \quad \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B,$$

$$\varepsilon_B(ab) = \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b), \quad \varepsilon_B(1_B) = 1_{\mathbb{k}}.$$

Définition 1.1.4 (Bialgèbre)

Une bi-algèbre (ou bialgèbre) B est un quintuplet $(B, m_B, \mu_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ tel que (B, m_B, μ_B) est une algèbre, $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ est une coalgèbre et l'une des propriétés du Lemme 1.1.1 est satisfaite.

Définition 1.1.5 (Morphisme de bialgèbre)

Soient B et B' deux bialgèbres. On dit que $f : B \longrightarrow B'$ est un morphisme de bialgèbres si f est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de coalgèbres.

1.1.2 Elément de type-groupe et élément primitif

Définition 1.1.6

Soit B une bialgèbre. On dit qu'un élément non nul g de B est de type-groupe si :

$$\Delta_B(g) = g \otimes g \text{ et } \varepsilon_B(g) = 1_{\mathbb{k}}.$$

On dit qu'un élément x de B est un élément (g,h)-primitif si :

$$\Delta_B(x) = g \otimes x + x \otimes h \text{ et } \varepsilon_B(x) = 0$$

où g et h sont des éléments de type-groupe de B.
On dit qu'un élément x d'une bialgèbre B est un élément primitif si :

$$\Delta_B(x) = x \otimes 1_B + 1_B \otimes x \text{ et } \varepsilon_B(x) = 0.$$

1.2 Algèbre de Hopf

Soient (A, m_A, μ_A) une algèbre et $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. On note $Hom_{\Bbbk}(C, A)$ l'ensemble des applications $\Bbbk-$linéaires de C dans A.

1.2.1 Produit de convolution

Définition 1.2.1 (Produit de convolution)
Soient $f, g \in Hom_{\Bbbk}(C, A)$. La convolution est définie par :

$$f \star g = m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C.$$

Avec la notation de Sweedler, le produit de convolution devient :
pour tout $c \in C$ on a :

$$(f \star g)(c) = f(c_1)g(c_2).$$

Proposition 1.2.1
Soient (A, m_A, μ_A) une algèbre et $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. Alors $(Hom_{\Bbbk}(C, A); \star)$ est une algèbre unitaire d'élément unité $\mu_A \circ \varepsilon_C$. En particulier, le dual $C^* = Hom_{\Bbbk}(C, \Bbbk)$ de C est une algèbre d'élément unité $\mu_{\Bbbk} \circ \varepsilon_C = \varepsilon_C$.

Remarque 1.2.1
Dans la proposition précédente, si $C = A$ est une bialgèbre, alors $(Hom_{\Bbbk}(A, A), \star, \mu_A \circ \varepsilon_A) = (End_{\Bbbk}(A), \star, \mu_A \circ \varepsilon_A)$ l'ensemble des endomorphismes de A est une algèbre.

Proposition 1.2.2
Soit (A, m_A, μ_A) une algèbre de dimension finie. Alors son dual $A^* = Hom_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$ est une coalgèbre :
le co-produit : $\Delta_{A^*} = m_A^* : A^* \longrightarrow (A \otimes A)^* \approx A^* \otimes A^*$,
on a : $\Delta_{A^*}(f) = f_1 \otimes f_2, \quad \forall f \in A^*$. Donc on a :

$$(\Delta_{A^*}(f))(x \otimes y) = (f_1 \otimes f_2)(x \otimes y) = f_1(x)f_2(y) = f(xy), \quad \forall x, y \in A$$

et $\varepsilon_{A^*} = \mu_A^* : A^* \longrightarrow \Bbbk^* = \Bbbk$ est définie par :

$$\varepsilon_{A^*}(f) = f(1_A), \quad \forall f \in A^*.$$

Définition 1.2.2 (Algèbre de Hopf)
Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ *une bialgèbre. On considère* $End_{\Bbbk}(H)$ *l'ensemble des endomorphismes de* H *d'élément unité* $\mu_H \circ \varepsilon_H$.
On appelle antipode de H *l'unique inverse (s'il existe) de* id_H *noté* S_H *dans* $End_{\Bbbk}(H)$.
Donc $S_H \in End_{\Bbbk}(H)$ *et*

$$S_H \star id_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = id_H \star S_H.$$

On appelle algèbre de Hopf, toute bialgèbre possédant une antipode.
On note alors $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ *l'algèbre de Hopf d'antipode* S_H.

1.2.2 Formule de l'antipode et Propriétés de l'antipode

Soit H une algèbre de Hopf d'antipode S_H. Donc :

$$S_H \star id_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = id_H \star S_H.$$

On a : $\forall h \in H$;

$$\begin{aligned}(S_H \star id_H)(h) &= \mu_H \circ \varepsilon_H(h)\\ S_H(h_1)id_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\Bbbk})\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)1_H.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(id_H \star S_H)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h)\\ id_H(h_1)S_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\Bbbk})\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)1_H.\end{aligned}$$

D'où la formule :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

Théorème 1.2.1
Soit H *une algèbre de Hopf d'antipode* S_H.

i) Soit $g, h \in H$,

$$S_H(gh) = S_H(h)S_H(g),$$

on dit que S_H *est un antimorphisme d'algèbres et* $S_H(1_H) = 1_H$.

ii) Pour tout $h \in H$,

$$\Delta_H(S_H(h)) = S_H(h_2) \otimes S_H(h_1),$$

on dit que S_H *est un antimorphisme de coalgèbres et* $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H$.

iii) Si H *est commutative ou co-commutative alors :*

$$S_H^2 = id_H, \text{ c'est-à-dire, } S_H^{-1} = S_H.$$

Preuve :

i) Soient $g, h \in H$. Montrons que : $S_H(gh) = S_H(h)S_H(g)$.

On a :
$$\begin{aligned}
S_H(gh) &= S_H[\varepsilon_H((gh)_1)(gh)_2] \\
&= S_H[\varepsilon_H(g_1h_1)(g_2h_2)] \\
&= \varepsilon_H(g_1h_1)S_H(g_2h_2) \\
&= \varepsilon_H(g_1)\varepsilon_H(h_1)S_H(g_2h_2) \\
&= \varepsilon_H(g_1)\varepsilon_H(h_1)1_H S_H(g_2h_2) \\
&= \varepsilon_H(g_1)S_H(h_{11})h_{12}S_H(g_2h_2) \\
&= S_H(h_{11})\varepsilon_H(g_1)1_H h_{12}S_H(g_2h_2) \\
&= S_H(h_{11})S_H(g_{11})g_{12}h_{12}S_H(g_2h_2) \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)g_2h_2S_H(g_3h_3) \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)(gh)_2S_H((gh)_3) \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)\varepsilon_H((gh)_2 1_H \\
&= S_H(h_1)S_H(g_1)\varepsilon_H(g_2)\varepsilon_H(h_2)1_H \\
&= S_H(h_1\varepsilon_H(h_2))S_H(g_1\varepsilon_H(g_2))1_H \\
S_H(gh) &= S_H(h)S_H(g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_H(1_H) &= 1_H \otimes 1_H. \text{ Donc :} \\
S_H(1_H) &= 1_H S_H(1_H) = \varepsilon_H(1_H)1_H = 1_H \\
&\quad \text{ou bien} \\
S_H(1_H) &= S_H(1_H)1_H = 1_H\varepsilon_H(1_H) = 1_H; \\
\text{d'où} \quad & S_H(1_H) = 1_H.
\end{aligned}$$

ii) Soit $h \in H$. Montrons que $(\varepsilon_H \circ S_H)(h) = \varepsilon_H(h)$.

On a :
$$\begin{aligned}
\varepsilon_H(S_H(h)) &= \varepsilon_H[S_H(h_1\varepsilon_H(h_2))] \\
&= \varepsilon_H[S_H(h_1)\varepsilon_H(h_2)] \\
&= \varepsilon_H(S_H(h_1))\varepsilon_H(h_2) \\
&= \varepsilon_H(S_H(h_1)h_2) \\
&= \varepsilon_H(\varepsilon_H(h)1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)\varepsilon_H(1_H) \\
\varepsilon_H(S_H(h)) &= \varepsilon_H(h).
\end{aligned}$$

Soit $h \in H$. Montrons que $\Delta_H(S_H(h)) = S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } S_H(h_2) \otimes S_H(h_1) &= S_H(h_{12}\varepsilon_H(h_{22})) \otimes S_H(h_1) \\
&= S_H(h_2\varepsilon_H(h_3)) \otimes S_H(h_1) \\
&= S_H(h_2)\varepsilon_H(h_3)1_H \otimes S_H(h_1)1_H \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)][\varepsilon_H(h_3)1_H \otimes 1_H] \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)][\varepsilon_H(h_3)\Delta_H(1_H)] \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)]\Delta_H[\varepsilon_H(h_3)1_H] \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)]\Delta_H[h_{31}S_H(h_{32})] \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)]\Delta_H[h_3S_H(h_4)] \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)]\Delta_H(h_3)\Delta_H(S_H(h_4)) \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)](h_{31} \otimes h_{32})\Delta_H(S_H(h_4)) \\
&= [S_H(h_2) \otimes S_H(h_1)](h_3 \otimes h_4)\Delta_H(S_H(h_5)) \\
&= [S_H(h_2)h_3] \otimes [S_H(h_1)h_4]\Delta_H(S_H(h_5)) \\
&= [S_H(h_{21})h_{22}] \otimes [S_H(h_1)h_3]\Delta_H(S_H(h_4)) \\
&= [\varepsilon_H(h_2)1_H] \otimes [S_H(h_1)h_3]\Delta_H(S_H(h_4)) \\
&= 1_H \otimes [S_H(h_1)\varepsilon_H(h_2)h_3]\Delta_H(S_H(h_4)) \\
&= 1_H \otimes [S_H(h_1)\varepsilon_H(h_{21})h_{22}]\Delta_H(S_H(h_3)) \\
&= (1_H \otimes S_H(h_1)h_2)\Delta_H(S_H(_3)) \\
&= (1_H \otimes S_H(h_{11})h_{12})\Delta_H(S_H(_2)) \\
&= (1_H \otimes \varepsilon_H(h_1)1_H)\Delta_H(S_H(h_2)) \\
&= (1_H \otimes 1_H)\Delta_H[\varepsilon_H(h_1)S_H(h_2)] \\
&= (1_H \otimes 1_H)\Delta_H[S_H(\varepsilon_H(h_1)h_2)] \\
&= \Delta_H(1_H)\Delta_H(S_H(h)) \\
&= \Delta_H(1_HS_H(h)) \\
S_H(h_2) \otimes S_H(h_1) &= \Delta(S_H(h)).
\end{aligned}$$

iii) Soit $h \in H$. Montrons que $S_H^2 = id_H$.

Pour cela il s'agira de montrer que :

$$S_H^2 \star S_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = S_H \star S_H^2.$$

Deux cas se présentent.

<u>1^{er} *cas :*</u> H commutative

$$\begin{aligned}
(S_H^2 \star S_H)(h) &= S_H^2(h_1)S_H(h_2) \\
&= S_H(S_H(h_1))S_H(h_2) \\
&= S_H(h_2S_H(h_1)) \\
&= S_H(S_H(h_1)h_2), \text{ car } H \text{ est commutative.} \\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)1_H \\
(S_H^2 \star S_H)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h) \text{ (1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_H \star S_H^2)(h) &= S_H(h_1)S_H^2(h_2)\\
&= S_H(h_1)S_H(S_H(h_2))\\
&= S_H(S_H(h_2)h_1)\\
&= S_H(h_1S_H(h_2))\\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\\
(S_H \star S_H^2)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h) \ \mathit{(2)}
\end{aligned}$$

$$\mathit{(1)} \text{ et } \mathit{(2)} \quad \Rightarrow S_H^2 \star S_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = S_H \star S_H^2.$$

<u>2^{ieme}*cas :*</u> H co-commutative

$$\begin{aligned}
(S_H^2 \star S_H)(h) &= S_H^2(h_1)S_H(h_2)\\
&= S_H(S_H(h_1))S_H(h_2)\\
&= S_H(h_2S_H(h_1))\\
&= S_H(h_1S_H(h_2))\\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\\
(S_H^2 \star S_H)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h) \ \mathit{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_H \star S_H^2)(h) &= S_H(h_1)S_H^2(h_2)\\
&= S_H(h_1)S_H(S_H(h_2))\\
&= S_H(S_H(h_2)h_1)\\
&= S_H(S_H(h_1)h_2)\\
&= S_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)S_H(1_H)\\
&= \varepsilon_H(h)1_H\\
(S_H \star S_H^2)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h) \ \mathit{(2)}
\end{aligned}$$

$$\mathit{(1)} \text{ et } \mathit{(2)} \quad \Rightarrow S_H^2 \star S_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = S_H \star S_H^2.$$

■

Définition 1.2.3

Soient H et H' deux algèbres de Hopf d'antipodes respectives S_H et $S_{H'}$.
Une application $\Bbbk-$linéaire $f : H \longrightarrow H'$ est un morphisme d'algèbres de Hopf si f est un morphisme d'algèbres, un morphisme de coalgèbres tel que :

$$S_{H'} \circ f = f \circ S_H.$$

Proposition 1.2.3

Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode S_H inversible. On a alors :

$$S_H^{-1}(h_2)h_1 = \varepsilon_H(h)1_H = h_2S_H^{-1}(h_1), \quad \forall h \in H.$$

Preuve : Soit $h \in H$. On a :

$$\begin{aligned}
S_H^{-1}(h_2)h_1 &= S_H^{-1}[S_H(S_H^{-1}(h_2)h_1)] \\
&= S_H^{-1}[S_H(h_1)S_H(S_H^{-1}(h_2))] \\
&= S_H^{-1}[S_H(h_1)h_2] \\
&= S_H^{-1}[\varepsilon_H(h)1_H] \\
&= \varepsilon_H(h)S_H^{-1}(1_H) \\
S_H^{-1}(h_2)h_1 &= \varepsilon_H(h)1_H.
\end{aligned}$$

De même : $$\begin{aligned}
h_2S_H^{-1}(h_1) &= S_H^{-1}[S_H(h_2S_H^{-1}(h_1))] \\
&= S_H^{-1}[S_H(S_H^{-1}(h_1))S_H(h_2)] \\
&= S_H^{-1}[h_1S_H(h_2)] \\
&= S_H^{-1}[\varepsilon_H(h)1_H] \\
&= \varepsilon_H(h)S_H^{-1}(1_H) \\
h_2S_H^{-1}(h_1) &= \varepsilon_H(h)1_H.
\end{aligned}$$

■

1.2.3 Dual d'une algèbre de Hopf

Théorème 1.2.2

Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors son dual $H^* = Hom_{\Bbbk}(H, \Bbbk) = (H^*, m_{H^*}, \mu_{H^*}, \Delta_{H^*}, \varepsilon_{H^*}, S_{H^*})$ est une algèbre de Hopf d'antipode $S_{H^*} = S_H^*$. Donc

$$S_{H^*}(f) = f \circ S_H, \quad \forall f \in H^*.$$

Preuve : Soit $H = (H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ une bialgèbre de dimension finie. Alors son dual $H^* = (H^*, m_{H^*}, \mu_{H^*}, \Delta_{H^*}, \varepsilon_{H^*})$ est aussi une bialgèbre.
Vérifions maintenant la formule de l'antipode S_{H^*}.
Soit $f \in H^*$. A-t-on

$$f_1 \star S_{H^*}(f_2) = \varepsilon_{H^*}(f) \star 1_{H^*} = S_{H^*}(f_1) \star f_2?$$

C'est à dire, comme $1_{H^*} = \varepsilon_H$, a-t-on $f_1 \star S_{H^*}(f_2) = \varepsilon_{H^*}(f)\varepsilon_H = S_{H^*}(f_1) \star f_2$?
Soit $h \in H$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } [f_1 \star S_{H^*}(f_2)](h) &= f_1(h_1)[S_{H^*}(f_2)](h_2)\\
&= f_1(h_1)[f_2 \circ S_H](h_2)\\
&= f_1(h_1)f_2(S_H(h_2))\\
&= f(h_1 S_H(h_2))\\
&= f(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= f(1_H)\varepsilon_H(h)\\
[f_1 \star S_{H^*}(f_2)](h) &= \varepsilon_{H^*}(f)\varepsilon_H(h).\\
\text{On a bien : } & \quad f_1 \star S_{H^*}(f_2) = \varepsilon_{H^*}(f) \star \varepsilon_H. \qquad \textit{(i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{H^*}(f_1) \star f_2](h) &= [S_{H^*}(f_1)](h_1)f_2(h_2)\\
&= [f_1 \circ S_H](h_1)f_2(h_2)\\
&= f_1(S_H(h_1))f_2(h_2)\\
&= f(S_H(h_1)h_2)\\
&= f(\varepsilon_H(h)1_H)\\
&= f(1_H)\varepsilon_H(h)\\
[S_{H^*}(f_1) \star f_2](h) &= \varepsilon_{H^*}(f)\varepsilon_H(h).\\
\text{On a aussi : } & \quad S_{H^*}(f_1) \star f_2 = \varepsilon_{H^*}(f) \star \varepsilon_H. \qquad \textit{(ii)}
\end{aligned}$$

(i) et *(ii)* montrent que la formule de l'antipode est bien vérifiée.
Donc H^* est une algèbre de Hopf.

■

1.2.4 Opposée et co-opposée d'une algèbre de Hopf

Soit $(H, m_H, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode bijective. Alors on a les algèbres de Hopf suivantes :

i) $H^{op} = (m_H \circ \tau_{H\otimes H}, \mu_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$,

ii) $H^{cop} = (m_H, \mu_H, \tau_{H\otimes H} \circ \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$,

iii) $H^{op,cop} = (m_H \circ \tau_{H\otimes H}, \mu_H, \tau_{H\otimes H} \circ \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$,

iv) $H^{cop,op} = (m_H \circ \tau_{H\otimes H}, \mu_H, \tau_{H\otimes H} \circ \Delta_H, \varepsilon_H, S_H^{-1})$.

Chapitre 2

Algèbre de H-comodule et la transformation des modules de Yetter-Drinfeld

Dans ce chapitre qui est le cœur de notre sujet, nous parlerons de modules anti-Yetter-Drinfeld. En effet, si on modifie le concept d'un module de Yetter-Drinfeld en remplaçant l'antipode par son inverse dans la condition de compatibilité de Yetter-Drinfeld entre l'action et la coaction, on obtient alors un module anti-Yetter-Drindeld. Nous étudierons en particulier leur stabilité.

2.1 Algèbre de H-comodule

2.1.1 Comodule

On dualise la notion de module pour obtenir celle de comodule.

Définition 2.1.1 (Comodule)
Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. Un $\mathbb{k}-$module à gauche M est un $C-$co-module (ou $C-$comodule) à droite s'il existe une application $\mathbb{k}-$linéaire $\varphi_M : M \longrightarrow M \otimes C$, telle que :

- $(id_C \otimes \Delta_C) \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes id_C) \circ \varphi_M$;
- $(id_M \otimes \varepsilon_M) \circ \varphi_M = id_M$.

L'application φ_M est appelée la $C-$coaction ou la coaction de C sur M.

Soit $M = (M, \varphi_M)$ un $C-$comodule à droite. Pour $m \in M$, en utilisant Sweedler on a : $\varphi_M(m) = m_0 \otimes m_1$.

Avec cette notation, les deux axiomes ci-dessus se traduisent par :

$$m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$$

et

$$m_0 \varepsilon_C(m_1) = m.$$

Définition 2.1.2 (Sous-comodule)

Soient C une algèbre et M un $C-$comodule à droite.
Un sous–$\Bbbk-$module N de M est un sous–$C-$comodule à droite de M si

$$\varphi_M(N) \subseteq N \otimes C.$$

Pour définir un morphisme de comodules, on dualise tout simplement la notion de morphisme de modules.

Définition 2.1.3 (Morphisme de comodules)

Soit C une coalgèbre et soient M et N deux $C-$comodules à droite.
Une application $\Bbbk-$linéaire $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de $C-$comodules ou une application $C-$colinéaire si le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[d, "\varphi_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire : $\varphi_N \circ f = (f \otimes id_C) \circ \varphi_M$*. Donc* $\forall m \in M$ *on a :*

$$(\varphi_N \circ f)(m) = [(f \otimes id_C) \circ \varphi_M](m)$$

$$(f(m))_0 \otimes (f(m))_1 = f(m_0) \otimes (m_1)$$
$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

Ainsi, f est $C-$colinéaire si et seulement si

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

La catégorie dont les objets sont des $C-$comodules à droite et les morphismes des applications $C-$colinéaires à droite est notée $\mathcal{M}^C$.
Soient M et N deux objets de $\mathcal{M}^C$. On note $Hom^C(M, N)$, le $\Bbbk-$module des applications $C-$colinéaires à droite de M vers N.

Remarque 2.1.1

On peut aussi définir un $C-$comodule à gauche M avec la coaction à gauche définie par :

$$\varphi_M(m) = m_{-1} \otimes m_0 \in C \otimes M.$$

La catégorie dont les objets sont des $C-$comodules à gauche et les morphismes des applications $C-$colinéaires à gauche est notée ${}^C\mathcal{M}$.

2.1.2 Module de Hopf

Définition 2.1.4 (Module de Hopf)
Soit H une algèbre de Hopf. Un $\Bbbk-$module M est un module de Hopf à droite s'il est simultanément :

- *un $H-$module à droite ;*
- *un $H-$comodule à droite ;*

tel que :

$$\varphi_M(mh) = m_0h_1 \otimes m_1h_2, \quad \forall m \in M, h \in H.$$

C'est-à-dire :

$$(mh)_0 \otimes (mh)_1 = m_0h_1 \otimes m_1h_2.$$

On note $\mathcal{M}_H^H$ la catégorie des modules de Hopf à droite. Les objets sont les modules de Hopf à droite et les morphismes sont les morphismes de modules de Hopf; c'est à dire les morphismes qui sont simultanément des morphismes de $H-$modules à droite et des morphismes de $H-$comodules à droite.
On définit de façon analogue :

- *${}_H\mathcal{M}^H$ la catégorie des modules de Hopf à gauche à droite ;*
- *${}^H\mathcal{M}_H$ la catégorie des modules Hopf à droite à gauche ;*
- *et ${}_H^H\mathcal{M}$ la catégorie des modules de Hopf à gauche.*

2.1.3 Produit tensoriel de $H-$modules et Produit tensoriel de $H-$comodules

Proposition 2.1.1 ($H-$module)
Soit H une algèbre de Hopf. Soient M et N deux $H-$modules à gauche, alors $M \otimes N$ est un $H-$module à gauche :
$h(m \otimes n) = (h_1m) \otimes (h_2n)$ où $\Delta_H(h) = h_1 \otimes h_2 \in H \otimes H$.
De même si M et N sont deux $H-$modules à droite, alors $M \otimes N$ est un $H-$module à droite :
$(m \otimes n)h = (mh_2) \otimes (nh_1)$.

Preuve
• Montrons que $M \otimes N$ est un $H-$module à gauche.
A -t-on $(hh')(m \otimes n) = h(h'(m \otimes n))$ et $1_H(m \otimes n) = m \otimes n$, $\forall h, h' \in H, m \in M, n \in N$.

i) On a :
$$\begin{aligned}(hh')(m \otimes n) &= (hh')_1(m \otimes (hh')_2n \\ &= (h_1h'_1)m \otimes (h_2h'_2)n \\ &= (h_1(h'_1m)) \otimes (h_2(h'_2n)) \text{ , car } M \text{ et } N \text{ des sont } H-\text{modules} \\ &= h((h'_1m) \otimes ((h'_2n)) \\ (hh')(m \otimes n) &= h(h'(m \otimes n)).\end{aligned}$$

ii) On sait aussi que : $\Delta_H(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, $(1_{H_1} = 1_H$, $1_{H_2} = 1_H.)$
Il vient : $1_H(m \otimes n) = (1_{H_1}m) \otimes 1_{H_2}n = 1_Hm \otimes 1_Hn = m \otimes n$

Cette action de H sur $M \otimes N$ s'appelle l'action diagonale.

• De la même manière, nous montrons que $M \otimes N$ est un $H-$module à droite :
$(m \otimes n)h = (mh_2) \otimes (nh_1)$.
On obtient alors :

$$(m \otimes n)(h'h) = ((m \otimes n)h')h$$

et

$$(m \otimes n)1_H = (m1_{H_2}) \otimes (n1_{H_1}) = (m1_H) \otimes (n1_H) = m \otimes n.$$

■

Proposition 2.1.2 **($H-$comodule)**
Soit H une algèbre de Hopf. Soient M et N deux $H-$comodules à droite, alors $M \otimes N$ est un $H-$comodule à droite :
$\rho_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1n_1$ *où* $\rho_M(m) = m_0 \otimes m_0$, $\rho_N(n) = n_0 \otimes n_1$.

En utilisant Sweedler, on a : $\rho_{M\otimes N}(m\otimes n) = (m\otimes n)_0 \otimes (m\otimes n)_1$. Donc $(m\otimes n)_0 = m_0 \otimes n_0$ et $(m \otimes n)_1 = m_1n_1$.
De même si M et N deux $H-$comodules à gauche, alors $M \otimes N$ est un $H-$comodule à gauche :
${}_{M\otimes N}\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0$.

Preuve
• Montrons que $M \otimes N$ est un $H-$comodule à droite.

i) A-t-on $\rho_{M\otimes N}((m \otimes n)_0) \otimes (m \otimes n)_1 = (m \otimes n)_0 \otimes \Delta_H((m \otimes n)_1)$?
ie A-t-on $\rho_{M\otimes N}(m_0 \otimes n_0) \otimes (m_1n_1) = (m_0 \otimes n_0) \otimes \Delta_H(m_1n_1)$?

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \rho_{M\otimes N}(m_0 \otimes n_0) \otimes (m_1n_1) &= m_{00} \otimes n_{00} \otimes (m_{01}n_{01}) \otimes (m_1n_1)\\
&= (m_0 \otimes n_0 \otimes (m_{11}n_{11}) \otimes (m_{12}n_{12})\\
&= (m_0 \otimes n_0) \otimes [(m_{11} \otimes (m_{12})(n_{11} \otimes n_{12})]\\
&= (m_0 \otimes n_0) \otimes [\Delta_H(m_1)\Delta_H(n_1)]\\
\rho_{M\otimes N}(m_0 \otimes n_0) \otimes (m_1n_1) &= (m_0 \otimes n_0) \otimes \Delta_H(m_1n_1).
\end{aligned}$$

ii) A-t-on aussi $(m \otimes n)_0\varepsilon_H((m \otimes n)_1) = m \otimes n$?
ie A-t-on $(m_0 \otimes n_0)\varepsilon_H((m_1n_1) = m \otimes n$?

$$\begin{aligned}
\text{On a : } (m_0 \otimes n_0)\varepsilon_H(m_1n_1) &= (m_0 \otimes n_0)\varepsilon_H(m_1)\varepsilon_H(n_1)\\
&= (m_0\varepsilon_H(m_1)) \otimes (n_0\varepsilon_H(n_1))\\
(m_0 \otimes n_0)\varepsilon_H(m_1n_1) &= m \otimes n.
\end{aligned}$$

• De la même manière, nous montrons que $M \otimes N$ est un $H-$comodule à gauche.
On obtient :

$$m_{-1}n_{-1} \otimes \ {}_{M\otimes N}\rho(m_0 \otimes n_0) = \Delta_H(m_{-1}n_{-1}) \otimes m_0 \otimes n_0$$

$$(m \otimes n)_0\varepsilon_H((m \otimes n)_1) = m \otimes n.$$

■

2.2 La transformation des modules de Yetter-Drinfeld

2.2.1 Modules de Yetter-Drinfeld

Définition 2.2.1 (Module de Yetter-Drinfeld)

Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S et M un $H-$module à droite et un $H-$comodule à gauche. On dit que M est un module de Yetter-Drinfeld droite gauche si :

$$(mh)_{-1} \otimes (mh)_0 = S^{-1}(h_3)m_{-1}h_1 \otimes m_0h_2 \quad \forall m \in M \quad , \quad h \in H. \tag{2.1}$$

Définition 2.2.2

On note ${}^HYD_H$ la catégorie des modules de Yetter-Drinfeld droite gauche. Les objets sont les modules de Yetter-Drinfeld droite gauche et les morphismes sont des applications simultanément $H-$linéaires et $H-$colinéaires.

Remarque 2.2.1

On peut aussi définir un module de Yetter-Drinfeld

- *droite droite : M est un $H-$module à droite et un $H-$comodule à droite satisfaisant la condition*

$$(mh)_0 \otimes (mh)_1 = m_0h_2 \otimes S(h_1)m_1h_3, \quad \forall m \in M, h \in H, \tag{2.2}$$

- *gauche gauche : M est un $H-$module à gauche et un $H-$comodule à gauche satisfaisant la condition*

$$(hm)_{-1} \otimes (hm)_0 = h_1m_{-1}S(h_3) \otimes h_2m_0, \quad \forall m \in M, h \in H, \tag{2.3}$$

- *gauche droite : M est un $H-$module à gauche et un $H-$comodule à droite satisfaisant la condition*

$$(hm)_0 \otimes (hm)_1 = h_2m_0 \otimes h_3m_1S^{-1}(h_1), \quad \forall m \in M, h \in H. \tag{2.4}$$

On obtient ainsi les catégories suivantes :

- la catégorie des modules de Yetter-Drinfeld droite droite notée YD_H^H ;
- la catégorie des modules de Yetter-Drinfeld gauche gauche notée ${}_H^HYD$;
- et la catégorie des modules de Yetter-Drinfeld gauche droite notée ${}_HYD^H$.

2.2.2 Modules anti-Yetter-Drinfeld

Définition 2.2.3 (Module anti-Yetter-Drinfeld)

Soient H une algèbre de Hopf d'antipode bijective S et M un module à droite et un comodule à gauche sur H. On dit que M est un module anti-Yetter-Drinfeld droite gauche si l'action et la coaction sont compatibles :

$${}_M\rho(mh) = (mh)_{-1} \otimes (mh)_0 = S(h_3)m_{-1}h_1 \otimes m_0h_2 \quad \forall m \in M \quad , \quad h \in H. \tag{2.5}$$

On a remplacé S par son inverse dans (2.1).

Définition 2.2.4

On note anti $-^H YD_H$ *la catégorie des modules anti-Yetter-Drinfeld droite gauche. Les objets sont des modules anti-Yetter-Drinfeld et les morphismes sont des applications simultanément* $H-$*linéaires et* $H-$*colinéaires.*
On définit de façon similaire les modules anti-Yetter-Drinfeld droite droite, gauche gauche et gauche droite.

Théorème 2.2.1 (lemme 2.3)

Soient N *un module de Yetter-Drinfeld et* M *un module anti-Yetter-Drinfeld. Alors :*

i) $N \otimes M$ *est un module anti-Yetter-Drinfeld gauche gauche via l'action*

$$h(n \otimes m) = h_1 n \otimes h_2 m$$

et la coaction

$$_{N\otimes M}\rho(n \otimes m) = n_{-1}m_{-1} \otimes n_0 \otimes m_0,$$

ii) $N \otimes M$ *est un module anti-Yetter-Drinfeld gauche droite via l'action*

$$h(n \otimes m) = h_2 n \otimes h_1 m$$

et la coaction

$$\rho_{N\otimes M}(n \otimes m) = n_0 \otimes m_0 \otimes n_1 m_1,$$

iii) $M \otimes N$ *est un module anti-Yetter-Drinfeld droite gauche via l'action*

$$(m \otimes n)h = mh_2 \otimes nh_1$$

et la coaction

$$_{M\otimes N}\rho(m \otimes n) = m_{-1}n_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0,$$

iv) $M \otimes N$ *est un module anti-Yetter-Drinfeld droite droite via l'action*

$$(m \otimes n)h = mh_1 \otimes nh_2$$

et la coaction

$$\rho_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1.$$

Preuve :

i) • On sait que $N \otimes M$ est un :

a) $H-$module à gauche d'après la proposition 1.3.1
b) $H-$comodule à gauche d'après la proposition 1.3.2.
• Maintenant vérifions la compatibilité.
A-t-on $_{N\otimes M}\rho(h(n \otimes m)) = h_1(n \otimes m)_{-1}S^{-1}(h_3) \otimes h_2(n \otimes m)_0$?

$$\begin{aligned}
\text{On a : } {}_{N\otimes M}\rho(h(n\otimes m)) &= {}_{N\otimes M}\rho(h_1 n\otimes h_2 m)) \\
&= (h_1n)_{-1}(h_2m)_{-1}\otimes(h_1n)_0\otimes(h_2m)_0 \\
&= h_{11}n_{-1}S(h_{13})(h_{21}m)_{-1}S^{-1}(h_{23})\otimes(h_{12}n)_0\otimes(h_{22}m_0) \\
&= h_1n_{-1}S(h_3)h_4m_{-1}S^{-1}(h_6)\otimes h_2n_0\otimes h_5m_0 \\
&= h_1n_{-1}S(h_{31})h_{32}m_{-1}S^{-1}(h_5)\otimes h_2n_0\otimes h_4m_0 \\
&= h_1n_{-1}\varepsilon(h_3)m_{-1}S^{-1}(h_5)\otimes h_2n_0\otimes h_4m_0 \\
&= h_1n_{-1}m_{-1}S^{-1}(h_5)\otimes h_2n_0\otimes\varepsilon(h_3)h_4m_0 \\
&= h_1n_{-1}m_{-1}S^{-1}(h_4)\otimes h_2n_0\otimes h_3m_0 \\
&= h_1n_{-1}m_{-1}S^{-1}(h_3)\otimes h_{21}n_0\otimes h_{22}m_0 \\
&= h_1(n\otimes m)_{-1}S^{-1}(h_3)\otimes h_2(n\otimes m)_0.
\end{aligned}$$

$ii)$ Il est facile de montrer que $N\otimes M$ est un $H-$module à gauche. C'est un $H-$comodule à droite (Proposition 1.3.2).
A-t-on $\rho_{N\otimes M}(h(n\otimes m)) = h_2(n\otimes m)_0\otimes h_3(n\otimes m)_1S(h_1)$?

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \rho_{N\otimes M}(h(n\otimes m)) &= \rho_{N\otimes M}(h_2n\otimes h_1m) \\
&= (h_2n)_0\otimes(h_1m)_0\otimes(h_2n)_1(h_1m)_1 \\
&= h_{22}n_0\otimes h_{12}m_0\otimes h_{23}n_1S^{-1}(h_{21})h_{13}m_1S(h_{11}) \\
&= h_5n_0\otimes h_2m_0\otimes h_6n_1S^{-1}(h_4)h_3m_1S(h_1) \\
&= h_4n_0\otimes h_2m_0\otimes h_5n_1S^{-1}(h_{32})h_{31}m_1S(h_1) \\
&= h_4n_0\otimes h_2m_0\otimes h_5n_1\varepsilon(h_3)m_1S(h_1) \\
&= \varepsilon(h_3)h_4n_0\otimes h_2m_0\otimes h_5n_1m_1S(h_1) \\
&= h_3n_0\otimes h_2m_0\otimes h_4n_1m_1S(h_1) \\
&= h_{22}n_0\otimes h_{21}m_0\otimes h_3n_1m_1S(h_1) \\
&= h_2(n\otimes m)_0\otimes h_3(n\otimes m)_1S(h_1).
\end{aligned}$$

$iii)$ Il est facile de montrer que $M\otimes N$ est un $H-$module à gauche et un $H-$comodule à droite (Proposition 1.3.2).
A-t-on ${}_{M\otimes N}\rho((m\otimes n)h) = S(h_3)(m\otimes n)_{-1}h_1\otimes(m\otimes n)_0h_2$?

$$\begin{aligned}
\text{On a : } {}_{M\otimes N}\rho((m\otimes n)h) &= {}_{M\otimes N}\rho(mh_2\otimes nh_1) \\
&= (mh_2)_{-1}(nh_1)_{-1}\otimes(mh_2)_0\otimes(nh_1)_0 \\
&= S(h_{23})m_{-1}h_{21}S^{-1}(h_{13})n_{-1}h_{11}\otimes m_0h_{22}\otimes n_0h_{12} \\
&= S(h_6)m_{-1}h_4S^{-1}(h_3)n_{-1}h_1\otimes m_0h_5\otimes n_0h_2 \\
&= S(h_5)m_{-1}h_{32}S^{-1}(h_{31})n_{-1}h_1\otimes m_0h_4\otimes n_0h_2 \\
&= S(h_5)m_{-1}\varepsilon(h_3)n_{-1}h_1\otimes m_0h_4\otimes n_0h_2 \\
&= S(h_5)m_{-1}n_{-1}h_1\otimes m_0\varepsilon(h_3)h_4\otimes n_0h_2 \\
&= S(h_4)m_{-1}n_{-1}h_1\otimes m_0h_3\otimes n_0h_2 \\
&= S(h_3)m_{-1}n_{-1}h_1\otimes m_0h_{22}\otimes n_0h_{21} \\
&= S(h_3)(m\otimes n)_{-1}h_1\otimes(m\otimes n)_0h_2.
\end{aligned}$$

$iv)$ Il est facile de montrer que $M\otimes N$ est un $H-$module à droite. C'est un $H-$comodule à droite (Proposition 1.3.2).
A-t-on $\rho_{M\otimes N}((m\otimes n)h) = (m\otimes n)_0h_2\otimes S(h_1)(m\otimes n)_1h_3$?

$$\begin{aligned}
\text{On a : } \rho_{M\otimes N}((m\otimes n)h) &= \rho_{M\otimes N}(mh_1\otimes nh_2)\\
&= (mh_1)_0\otimes (nh_2)_0\otimes (mh_1)_1(nh_2)_1\\
&= m_0h_{12}\otimes n_0h_{22}\otimes S(h_{11})m_1h_{13}S^{-1}(h_{21})n_1h_{23}\\
&= m_0h_2\otimes n_0h_5\otimes S(h_1)m_1h_3S^{-1}(h_4)n_1h_6\\
&= m_0h_2\otimes n_0h_4\otimes S(h_1)m_1h_{31}S(h_{32})n_1h_5\\
&= m_0h_2\otimes n_0h_4\otimes S(h_1)m_1\varepsilon(h_3)n_1h_5\\
&= m_0h_2\otimes n_0\varepsilon(h_3)h_4\otimes S(h_1)m_1n_1h_5\\
&= m_0h_2\otimes n_0h_3\otimes S(h_1)m_1n_1h_4\\
&= m_0h_{21}\otimes n_0h_{22}\otimes S(h_1)m_1n_1h_3\\
&= (m\otimes n)_0h_2\otimes S(h_1)(m\otimes n)_1h_3.
\end{aligned}$$

■

Définition 2.2.5 (Stabilité)

Soit M un module anti-Yetter-Drinfeld. M est stable si $\lambda_M\circ\rho_M = id_M$ et $\lambda_M\circ_M\rho = id_M$ (où λ_M, ρ_M et $_M\rho$ désignent respectivement l'action, la coaction à droite et la coaction à gauche de H sur M), c'est-à-dire :

- *Pour l'action à droite et la coaction à gauche, la stabilité du module anti-Yetter-Drinfeld se traduit par $m_0m_{-1} = m$.*

  De même, nous avons :

- $m_0m_1 = m$ *pour l'action à droite et la coaction à droite,*

- $m_{-1}m_0 = m$ *pour l'action à gauche et la coaction à gauche,*

- $m_1m_0 = m$ *pour l'action à gauche et la coaction à droite.*

Définition 2.2.6 (Paire modulaire) *[1]*

Soient H une algèbre de Hopf et $\Bbbk$ un corps. Soit $\delta : H \longrightarrow \Bbbk$ un morphisme d'algèbres et $\sigma\in H$ un élément de type-groupe tel que $\delta(\sigma) = 1$. Alors (δ,σ) est appelé une ***paire modulaire****.*

Le caractère δ donne naissance à une antipode δ-tordue $\tilde{S}=S_\delta : H \longrightarrow H$ définie par :

$$\tilde{S}(h) = \delta(h_1)S(h_2)\ \ \forall\ h\in H. \tag{2.6}$$

$\tilde{S}$ est un antimorphisme d'algèbres :

$$\tilde{S}(hh') = \tilde{S}(h')\tilde{S}(h)\ \text{ et }\ \tilde{S}(1) = 1\ \forall\ h_1, h_2\in H,$$

et un antimorphisme de coalgèbres tordu :

$$\Delta(\tilde{S}(h)) = S(h_2)\otimes\tilde{S}(h_1)\ \ \forall\ h\in H.$$

De plus $\tilde{S}$ satisfait les identités suivantes :

$$\varepsilon\circ\tilde{S} = \delta\quad\text{et}\quad\delta\circ\tilde{S} = \varepsilon.$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} \bullet\ (\varepsilon \circ \tilde{S})(h) &= \varepsilon(\tilde{S}(h)) \\ &= \varepsilon(\delta(h_1)S(h_2)) \\ &= \delta(h_1)\varepsilon(S(h_2)) \\ &= \delta(h_1)\varepsilon(h_2) \\ &= \delta(h_1\varepsilon(h_2)) \\ &= \delta(h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \text{On a : } (\delta \circ \tilde{S})(h) &= \delta(\tilde{S}(h)) \\ &= \delta(\delta(h_1)S(h_2)) \\ &= \delta(h_1)\delta(S(h_2)) \\ &= \delta(h_1S(h_2)) \\ &= \delta(\varepsilon(h)1_H) \\ &= \delta(1_H)\varepsilon(h) \\ &= 1_k\varepsilon(h) \\ &= \varepsilon(h). \end{aligned}$$

Définition 2.2.7 (Paire modulaire en involution) *[1]*
Une paire modulaire (δ, σ) est dite en involution si :

$$\tilde{S}^2(h) = \sigma h \sigma^{-1}.$$

Théorème 2.2.2 (lemme 2.2)
Considérons le corps $\Bbbk$ comme un H-module à droite via un caractère δ et comme un H-comodule à gauche via un élément de type-groupe σ. Alors $\Bbbk = {}^{\sigma}\Bbbk_{\delta}$ est un module anti-Yetter-Drinfeld stable si et seulement si (δ, σ) est une paire modulaire en involution.

Preuve :
$\Bbbk$ est un H-module à droite via $\delta : H \longrightarrow \Bbbk$ si :

$$\forall \quad h \in H, x \in \Bbbk; \quad x.h = x\delta(h).$$

$\Bbbk$ est un H-comodule à gauche via l'élément de type-groupe σ si :

$$\begin{aligned} {}_{\Bbbk}\rho : \quad & \Bbbk \longrightarrow H \otimes \Bbbk \\ & x \longmapsto x_{-1} \otimes x_0 = \sigma \otimes x. \end{aligned}$$

$i)$ Supposons que (δ, σ) est une paire modulaire en involution et montrons que $\Bbbk$ est un module anti-Yetter-Drinfeld stable.
On a :

$$\forall x \in \Bbbk,\ x_0x_{-1} = x\sigma = x\delta(\sigma) = x1 = x\,;\ \text{d'où la stabilité.}$$

$ii)$ Supposons que $\Bbbk$ est un module anti-Yetter-Drinfeld stable et montrons que (δ, σ) est une paire modulaire en involution.
On a : $\Bbbk$ est un module anti-Yetter-Drinfeld stable alors $\rho(x.h) = S(h_3)\sigma h_1 \otimes x.h_2$.
Or $\rho(x.h) = \rho(x\delta(h)) = \sigma \otimes x\delta(h)$.
Il vient :

$$\sigma \otimes x\delta(h) = S(h_3)\sigma h_1 \otimes x.h_2.$$

$$\sigma x \otimes \delta(h) = \delta(h_2)S(h_3)\sigma h_1 \otimes x$$
$$x \otimes \delta(h) = \tilde{S}(h_2)\sigma h_1 \otimes x$$
$$x \otimes \delta(h) = \tilde{S}(h_2)\sigma x h_1$$
$$x \otimes \delta(h) = \tilde{S}(h_2)xh_1$$

pour $x = 1_{\Bbbk}$ et $h = \sigma$, légalité ci-dessus devient :

$$1_{\Bbbk} \otimes \delta(\sigma) = \tilde{S}(\sigma)1_{\Bbbk}\sigma$$

$$\delta(\sigma) = \sigma^{-1}\sigma$$
$$\delta(\sigma) = 1.$$

■

Si l'antipode est égale à son inverse, alors la différence entre les conditions de Yetter-Drinfeld et de anti-Yetter-Drinfeld disparait.
Lorsque l'algèbre de Hopf est un anneau de groupe $\Bbbk$G où G est un groupe, un H-comodule à gauche est simplement un espace vectoriel gradué $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ où la coaction est définie par $M_g \ni m \longmapsto g \otimes m$.
Une action de G sur M définit un module anti-Yetter-Drinfeld si et seulement si pour tout $g, h \in G$ et $m \in M_g$, on a $hm \in M_{hgh^{-1}}$.
La condition de stabilité signifie que $gm = m$ pour tout $g \in G$, $m \in M_g$.
Le théorème suivant donne l'exemple d'un module anti-Yetter-Drinfeld stable.

Théorème 2.2.3 (lemme 2.4)

Soit M une algèbre et un H-comodule à gauche. Supposons que $\pi : H \longrightarrow M$ est un épimorphisme d'algèbre et l'action $hm = \pi(h)m$ fait de M un module anti-Yetter-Drinfeld. Supposons également que $\pi(1_{-1})1_0 = 1$.
Alors M est un module anti-Yetter-Drinfeld gauche gauche stable.

Preuve :
Comme M est déjà un module anti-Yetter-Drinfeld, on a :

$$_M\rho(hm) = {}_M\rho(\pi(h)m) = h_1 m_{-1} S^{-1}(h_3) \otimes h_2 m_0.$$

Pour la stabilité de M, on a :

$$\begin{aligned}
\pi(m_{-1})m_0 &= \pi((m \otimes 1)_{-1})(m \otimes 1)_0 \\
&= \pi(m_{-1} \otimes 1_{-1})(m_0 \otimes 1_0) \\
&= \pi(m_{-1}) \otimes \pi(1_{-1})(m_0 \otimes 1_0) \\
&= \pi(m_{-1})m_0 \otimes \pi(1_{-1})1_0 \\
&= m_{-1}m_0 \otimes 1 \\
&= m_{-1}m_0 \\
&= m.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que M est stable.

$\blacksquare$

Chapitre 3

Les extensions de Hopf-Galois, l'action opposée de Miyashita-Ulbrich et l'algèbre de comodule du double de Drinfeld

Une autre source d'exemples est fournie par la théorie de Hopf-Galois. Ces exemples sont purement quantiques dans le sens où les actions employées sont automatiquement triviales pour les algèbres commutatives. Pour fixer la notion et la terminologie, rappelons qu'une algèbre A qui est un $H-$comodule est appelée une algèbre de $H-$ comodule si la coaction est un homomorphisme d'algèbres ; c'est à dire

$$(aa')_0 \otimes (aa')_1 = a_0 a'_0 \otimes a_1 a'_1.$$

3.1 Les extensions de Hopf-Galois et l'action opposée de Miyashita-Ulbrich

3.1.1 Les extensions de Hopf-Galois

Les extensions galoisiennes de Hopf sont définies en termes de coaction.

Définition 3.1.1

Soit P une algèbre de $H-$comodule à droite avec la structure d'application $\rho : P \longrightarrow P \otimes_k H$. Alors l'extension $P^{coH} \subset P$ est $H-$Galois (ou Hopf-Galois) à droite si l'application

$$\begin{aligned} \beta : \quad & P \otimes_{P^{coH}} P \longrightarrow P \otimes_k H. \\ & p \otimes p' \longmapsto (p \otimes 1)\rho(p') = pp'_0 \otimes p'_1 \end{aligned}$$

est bijective. avec $\rho(p) = p_0 \otimes p_1$

L'hypothèse de bijectivité nous permet de définir l'application translation

$$\begin{aligned} T : \quad & H \longrightarrow P \otimes_B P. \\ & h \longmapsto \beta^{-1}(1 \otimes h) = h_{[1]} \otimes_B h_{[2]}. \end{aligned}$$

3.1.2 L'action opposée de Miyashita-Ulbrich

L'action de Miyashita-Ulbrich est une action d'une algèbre de Hopf H sur le centraliseur B^P associé à une extension $H-$ Galois.

Lemme 3.1.1
Sur un corps $\Bbbk$, le centraliseur

$$B^P = Z_B(P) := \{p \in P \mid bp = pb, b \in B\} \tag{3.1}$$

de B dans P est un sous-comodule de P.

Preuve :
Soit $p \in Z_B(P)$. Donc $pb = bp \ \forall \ b \in B$.
A-t-on $\rho_P(p) \in Z_B(P) \otimes H$?
On a :

$$\rho_P(p) = p_0 \otimes p_1 \text{ et } \rho_P(b) = b \otimes 1$$
$$\rho_P(pb) = p_0 b_0 \otimes p_1 b_1 = p_0 b \otimes p_1 \text{ et } \rho_P(bp) = b_0 p_0 \otimes b_1 p_1 = bp_0 \otimes p_1.$$

Comme $bp = pb$, on a $\rho_P(pb) = \rho_P(pb)$; donc $p_0 b \otimes p_1 = bp_0 \otimes p_1$.
On en déduit que $(p_0 b - bp_0) \otimes p_1 = 0$.
En supposant que les p_1 sont linéairement indépendants, on en déduit que les $p_0 b - bp_0$ sont nuls, c'est à dire $p_0 b = bp_0$ pour tous les p_0. Donc les p_0 appartiennent à $Z_B(P)$.
Ainsi $\rho_P(p) \in Z_B(P) \otimes H$; et par conséquent $\rho_P(Z_B(P)) \subseteq Z_B(P) \otimes H$.

■

Définition 3.1.2
La H-action à droite sur $Z_B(P)$ et définie par la formule

$$ph = h_{[1]} p h_{[2]} \tag{3.2}$$

est appelée action de Miyashita-Ulbrich.

Cette $H-$action et la $H-$coaction satisfont la condition de compatibilité de Yetter-Drinfeld. Munie de l'action (3.2), $Z_B(P)$ est un module de Yetter-Drinfeld droite droite.

La proposition suivante modifie l'action de Miyashita-Ulbrich de manière à obtenir des modules anti-Yetter-Drinfeld stables.

Proposition 3.1.1 *Soit $B \subseteq P$ une $H-$extension de Hopf-Galois telle que B est centrale dans P. Alors P est un module anti-Yetter-Drinfeld stable droite droite via l'action*

$$ph = (S^{-1}(h))_{[2]} p (S^{-1}(h))_{[1]} \tag{3.3}$$

et la coaction à droite sur P :

$$\rho_P(p) = p \otimes 1. \tag{3.4}$$

Exemples
Les exemples les plus simples sont obtenus pour $P = H$. Une classe plus large est donnée par les objets de Galois voir[9].
Pour les algèbres de Hopf de dimension finie, les modules de Yetter-Drinfeld sont des modules sur le double de Drinfeld (que nous définirons ci-dessous). De la même manière, les modules anti-Yetter-Drinfeld peuvent également être vues comme des modules sur une certaine algèbre.
A cette fin, la structure de comodule d'un module anti-Yetter-Drinfeld doit être convertie en une structure de module sur le dual linéaire H^* de l'algèbre de Hopf.

3.2 L'algèbre de comodule sur le Double de Drinfeld

3.2.1 Le Double de Drinfeld

Définition 3.2.1

Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. On appelle double de Drinfeld la coalgèbre diagonale notée $D(H) := (H^*)^{cop} \otimes H$ où $(H^*)^{cop}$ est la co-opposée de l'algèbre duale H^* de H.
Munie du produit

$$(\varphi \otimes h)(\varphi' \otimes h') = \varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2 \otimes h_2h', \tag{3.5}$$

$D(H)$ est une algèbre de Hopf.

Les modules de Yetter-Drinfeld sont aussi des $D(H)-$modules.

Définition 3.2.2

Soit $H = (H, \mu, \tau, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf de dimension finie avec une antipode inversible. Soient $\{h_i\}_{i\in I}$ une base finie de H et $\{h_i^*\}_{i\in I}$ sa base duale. Un module sur le double de Drinfeld $D(H)$ est un espace vectoriel M avec une structure de $H-$module à gauche ainsi qu'une structure de H^*-module à gauche telle que pour tout $h \in H$, $\varphi \in H^*$ et $m \in M$, on a :

$$h(\varphi m) = \varphi(S^{-1}(h_3)h_1)(h_2m). \tag{3.6}$$

3.2.2 L'algèbre de comodule sur le Double de Drinfeld

Proposition 3.2.1 (4.1)

Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. La formule

$$(\varphi \otimes h)(\varphi' \otimes h') = \varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2 \otimes h_2h' \tag{3.7}$$

transforme l'espace vectoriel $A(H) := H^* \otimes H$ en une algèbre associative d'unité $\varepsilon \otimes 1$.

Preuve :
Considérons les applications suivantes :

$$\begin{array}{rl} m_{A(H)}: & A(H)\otimes A(H)\longrightarrow A(H) \\ & (\varphi\otimes h)\otimes(\varphi'\otimes h')\longmapsto(\varphi\otimes h)(\varphi'\otimes h'),\forall\varphi,\varphi'\in A(H) \\ et\quad \mu_{A(H)}: & \Bbbk\longrightarrow A(H) \\ & \lambda\longmapsto\lambda(\varepsilon_H\otimes 1_H),\forall\lambda\in\Bbbk. \end{array}$$

$a)$ Montrons que : $m_{A(H)}\circ(m_{A(H)}\otimes id_{A(H)})=m_{A(H)}\circ(id_{A(H)}\otimes m_{A(H)})$.

Soient $\varphi,\varphi',\varphi''\in H^*$ et $h,h',h''\in H$.
On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= m_{A(H)}\circ(m_{A(H)}\otimes id_{A(H)})(((\varphi\otimes h)\otimes(\varphi'\otimes h'))\otimes(\varphi''\otimes h'')) \\ &= ((\varphi\otimes h)(\varphi'\otimes h'))(\varphi''\otimes h'') \\ &= (\varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\otimes h_2h')(\varphi''\otimes h'') \\ &= (g\otimes t)(\varphi''\otimes h'')\quad \text{avec } g=\varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\ \text{ et } t=h_2h' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(t_3))\varphi''_3(S^2(t_1))g\varphi''_2\otimes t_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}((h_2h')_3))\varphi''_3(S^2((h_2h')_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_2\otimes(h_2h')_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h_{23}h'_3))\varphi''_3(S^2(h_{21}h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_2\otimes h_{22}h'_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h_4h'_3))\varphi''_3(S^2(h_2h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_5))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_2\otimes h_3h'_2h'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= m_{A(H)}\circ(id_{A(H)}\otimes m_{A(H)})((\varphi\otimes h)\otimes((\varphi'\otimes h')\otimes(\varphi''\otimes h''))) \\ &= (\varphi\otimes h)((\varphi'\otimes h')(\varphi''\otimes h'')) \\ &= (\varphi\otimes h)[\varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'\varphi''_2\otimes h'_2h''] \\ &= (\varphi\otimes h)(g'\otimes t')\quad \text{avec } g'=\varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'\varphi''_2\ \text{ et } t'=h'_2h'' \\ &= g'_1(S^{-1}(h_3))g'_3(S^2(h_1))\varphi g'_2\otimes h_2t' \\ &= (\varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'\varphi''_2)_1(S^{-1}(h_3))(\varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'\varphi''_2)_3(S^2(h_1))\times \\ &\quad\ \varphi(\varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'\varphi''_2)_2\otimes h_2h'_2h'' \\ &= (\varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'_1\varphi''_{21})(S^{-1}(h_3))(\varphi'_3\varphi''_{23})(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_{22}\otimes h_2h'_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_3)_1)\varphi''_{21}(S^{-1}(h_3)_2)\varphi'_3(S^2(h_1)_1)\varphi''_{23}(S^2(h_1)_2)\varphi\varphi'_2\varphi''_{22}\otimes h_2h'_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_{32}))\varphi''_{21}(S^{-1}(h_{31}))\varphi'_3(S^2(h_{11}))\varphi''_{23}(S^2(h_{12}))\varphi\varphi'_2\varphi''_{22}\otimes h_2h'_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_5))\varphi''_{21}(S^{-1}(h_4))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi''_{23}(S^2(h_2))\varphi\varphi'_2\varphi''_{22}\otimes h_3h'_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h'_3))\varphi''_{21}(S^{-1}(h_4))\varphi''_{23}(S^2(h_2))\varphi''_3(S^2(h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_5))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_{22}\otimes h_3h'_2h'' \\ &= \varphi''_{11}(S^{-1}(h'_3))\varphi''_{12}(S^{-1}(h_4))\varphi''_{31}(S^2(h_2))\varphi''_{32}(S^2(h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_5))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_2\otimes h_3h'_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h'_3)S^{-1}(h_4))\varphi''_3(S^2(h_2)S^2(h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_5))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_2\otimes h_3h'_2h'' \\ &= \varphi''_1(S^{-1}(h_4h'_3))\varphi''_3(S^2(h_2h'_1))\varphi'_1(S^{-1}(h_5))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\varphi''_2\otimes h_3h'_2h'' \end{aligned}$$

On a bien $\alpha=\beta$ d'où $m_{A(H)}\circ(m_{A(H)}\otimes id_{A(H)})=m_{A(H)}\circ(id_{A(H)}\otimes m_{A(H)})$.

b) Montrons aussi que : $m_{A(H)} \circ (id_{A(H)} \otimes \mu_{A(H)}) = id_{A(H)} = m_{A(H)} \circ (\mu_{A(H)} \otimes id_{A(H)})$.
Soient $\varphi \in H^*$ et $h \in H$.
On a :

$$\begin{aligned}
[m_{A(H)} \circ (id_{A(H)} \otimes \mu_{A(H)})](\varphi \otimes h \otimes 1_{\Bbbk}) &= m_{A(H)}[(id_{A(H)}(\varphi \otimes h) \otimes \mu_{A(H)}(1_{\Bbbk}))] \\
&= m_{A(H)}[(\varphi \otimes h) \otimes (\varepsilon_H \otimes 1_H)] \\
&= (\varphi \otimes h)(\varepsilon_H \otimes (1_H)) \\
&= \varphi\varepsilon_H \otimes h1_H \\
&= \varphi \otimes h \\
&= id_{A(H)}(\varphi \otimes h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[m_{A(H)} \circ (\mu_{A(H)} \otimes id_{A(H)})](1_{\Bbbk} \otimes (\varphi \otimes h)) &= m_{A(H)}[(\mu_{A(H)}(1_{\Bbbk}) \otimes id_{A(H)}(\varphi \otimes h))] \\
&= m_{A(H)}((\varepsilon_H \otimes 1_H) \otimes (\varphi \otimes h)) \\
&= (\varepsilon_H \otimes 1_H)(\varphi \otimes h)) \\
&= \varepsilon_H\varphi \otimes 1_H h \\
&= \varphi \otimes h \\
&= id_{A(H)}(\varphi \otimes h).
\end{aligned}$$

On a bien $m_{A(H)} \circ (id_{A(H)} \otimes \mu_{A(H)}) = id_{A(H)} = m_{A(H)} \circ (\mu_{A(H)} \otimes id_{A(H)})$.

■

Pour relier les $A(H)-$modules aux modules anti-Yetter-Drinfeld, rappelons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2.1

Tout $H-$comodule à droite M devient un H^*-module à gauche via $\varphi m := \varphi(m_1)m_0$. Inversement tout H^*-module à gauche devient un $H-$comodule à droite via $\rho_M(m) = \Sigma_{i=1}^n h_i^* m \otimes h_i$ où $\{h_1, ..., h_n\}$ est une base de H et $\{h_1^*, ..., h_n^*\}$ est sa base duale.

Preuve :
a) Soit M un $H-$comodule à droite. Montrons que M est un H^*-module à gauche via $\varphi m := \varphi(m_1)m_0$.
Soient $\varphi, \varphi' \in H^*$ et $m \in M$. A-t-on $(\varphi\varphi').m = \varphi.(\varphi'.m)$?
On a :

$$\begin{aligned}
\varphi.(\varphi'.m) &= \varphi.(\varphi'(m_1)m_0) \\
&= \varphi'(m_1)(\varphi.m_0) \\
&= \varphi'(m_1)(\varphi(m_{01}).m_{00} \\
&= \varphi'(m_2)(\varphi(m_1).m_0 \\
&= \varphi\varphi'(m_1).m_0 \\
&= (\varphi\varphi').m.
\end{aligned}$$

b) Supposons maintenant que M est un H^*-module à gauche, montrons que M est un $H-$comodule à droite via $\rho_M(m) = \Sigma_{i=1}^n h_i^* m \otimes h_i$.
Soit $m \in M$. A-t-on $(id_M \otimes \Delta) \circ \rho_M(m) = (\rho_M \otimes id_M) \circ \rho_M(m)$?
On a :

$$\begin{aligned}(\rho_M \otimes id_M) \circ \rho_M(m) &= (\rho_M \otimes id_M)(\Sigma_{i=1}^n h_i^* m \otimes h_i) \\ &= \rho_M(\Sigma_{i=1}^n h_i^* m) \otimes h_i \\ &= \Sigma_{i,j=1}^n h_{ij}^* m \otimes h_{ij} \otimes h_i \\ &= \Sigma_{j=1}^n h_j^* m \otimes \Delta(h_j).\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}(id_M \otimes \Delta) \circ \rho_M(m) &= (id_M \otimes \Delta)(\Sigma_{i=1}^n h_i^* m \otimes h_i) \\ &= \Sigma_{i=1}^n h_i^* m \otimes \Delta(h_i).\end{aligned}$$

Pour $i = j$, on a : $(id_M \otimes \Delta) \circ \rho_M(m) = (\rho_M \otimes id_M) \circ \rho_M(m)$.

■

Il faut noter que cette structure comodulaire ne dépend pas du choix de la base.
En utilisant ce concept, nous obtenons la connexion suivante entre les $A(H)-$modules et les modules anti-Yetter-Drinfeld à travers la proposition suivante.

Proposition 3.2.2 (4.2)

Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie.
Si M est un module anti-Yetter-Drinfeld gauche droite, il devient un $A(H)-$module à gauche par :

$$(\varphi \otimes h)m := \varphi((hm)_1)(hm)_0.$$

Réciproquement, si M est un $A(H)-$module à gauche, il devient un module anti-Yetter-Drinfeld gauche droite par :

$$hm := (\varepsilon \otimes h)m \text{ et } \rho_M(m) = \Sigma_{i=1}^n (h_i^* \otimes 1)m \otimes h_i$$

où $\{h_1, ..., h_n\}$ est une base de H et $\{h_1^*, ..., h_n^*\}$ sa base duale.

Preuve :
a) Supposons que $M \in anti -_H YD^H$ et montrons que M est un $A(H)$-module à gauche.
Soient $\varphi, \varphi' \in H^*$, $\quad h, h \in H$ et $m \in M$. A-t-on $((\varphi \otimes h)(\varphi' \otimes h'))m = (\varphi \otimes h)((\varphi' \otimes h')m)$?
On a :

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes h)((\varphi' \otimes h')m) &= (\varphi \otimes h)(\varphi'((h'm)_1)(h'm)_0) \\ &= (\varphi \otimes h)(\varphi'(h'_3 m_1 S(h'_1))h'_2 m_0) \\ &= \varphi'(h'_3 m_1 S(h'_1))(\varphi \otimes h)(h'_2 m_0) \\ &= \varphi'(h'_3 m_1 S(h'_1))\varphi((h(h'_2 m_0))_1)((h(h'_2 m_0))_0) \\ &= \varphi'(h'_3 m_1 S(h'_1))\varphi((hh'_2)m_0))_1)((hh'_2)m_0))_0) \\ &= \varphi'(h'_3 m_1 S(h'_1))\varphi((hh'_2)_3 m_{01} S((hh'_2)_1))((hh'_2)_2 m_{00}) \\ &= \varphi'(h'_3 m_1 S(h'_1))\varphi(h_3 h'_{23} m_{01} S(h_1 h'_{21}))(h_2 h'_{22} m_{00}) \\ &= \varphi'(h'_5 m_2 S(h'_1))\varphi(h_3 h'_4 m_1 S(h_1 h'_2))(h_2 h'_3 m_0). \quad (*)\end{aligned}$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
&((\varphi\otimes h)(\varphi'\otimes h'))m\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_3)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2\otimes h_2h')m\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_3)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2(((h_2h')m)_1)(((h_2h')m)_0)\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_3)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2(h_{23}h'_3m_1S(h_{21}h'_1))(h_{22}h'_2m_0)\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_5)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2(h_4h'_3m_1S(h_2h'_1))(h_3h'_2m_0)\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_5)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi(h_{41}h'_{31}m_{11}S(h_2h'_1)_1)\varphi'_2(h_{42}h'_{32}m_{12}S(h_2h'_1)_2)(h_3h'_2m_0)\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_5)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi(h_{41}h'_{31}m_{11}S(h_{22}h'_{12}))\varphi'_2(h_{42}h'_{32}m_{12}S(h_{21}h'_{11}))(h_3h'_2m_0)\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_5)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi(h_{41}h'_4m_1S(h_{22}h'_2))\varphi'_2(h_{42}h'_5m_2S(h_{21}h'_1))(h_3h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_7)\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi(h_5h'_4m_1S(h_3h'_2))\varphi'_2(h_6h'_5m_2S(h_2h'_1))(h_4h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'_1(S^{-1}(h_7)\varphi'_2(h_6h'_5m_2S(h'_1)S(h_2))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi(h_5h'_4m_1S(h_3h'_2))(h_4h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'(S^{-1}(h_7)h_6h'_5m_2S(h'_1)S(h_2)(S^2(h_1))\varphi(h_5h'_4m_1S(h_3h'_2))(h_4h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'(\varepsilon(h_51_Hh'_5m_2S(h'_1)S(h_{12})S(S(h_{11}))\varphi(h_4h'_4m_1S(h_2h'_2))(h_3h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'(h'_5m_2S(h'_1)S(h_1)_1S(S(h_1)_2))\varphi(h_4\varepsilon(h_5)h'_4m_1S(h_2h'_2))(h_3h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'(h'_5m_2S(h'_1)\varepsilon(S(h_1)))\varphi(h_4h'_4m_1S(h_2h'_2))(h_3h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'(h'_5m_2S(h'_1))\varphi(h_4h'_4m_1S(\varepsilon(h_1)h_2h'_2))(h_3h'_3m_0)\\
&\quad=\varphi'(h'_5m_2S(h'_1))\varphi(h_3h'_4m_1S(h_1h'_2))(h_2h'_3m_0).\qquad(**)
\end{aligned}
$$

Ainsi $(*)$ et $(**)$ montrent que $((\varphi\otimes h)(\varphi'\otimes h'))m=(\varphi\otimes h)((\varphi'\otimes h')m)$

$b)$ Supposons maintenant que M est un $A(H)-$module à gauche et montrons que $M\in anti-{}_HYD^H$.
Pour cela, il suffit de montrer que :
$i)$ M est un $H-$module à gauche.
Soit $m\in M$. A-t-on $h(h'm)=(hh')m$?
On a :

$$
\begin{aligned}
h(h'm)&=h((\varepsilon\otimes h')m)\\
&=(\varepsilon\otimes h)((\varepsilon\otimes h')m)\\
&=((\varepsilon\otimes h)(\varepsilon\otimes h'))m\ \text{ car } M\in{}_{A(H)}\mathcal{M}\\
&=(\varepsilon_1(S^{-1}(h_3))\varepsilon_3(S^2(h_1))\varepsilon\varepsilon_2\otimes h_2h')m\\
&=(\varepsilon(S^{-1}(h_3))\varepsilon(S^2(h_1))\varepsilon\varepsilon\otimes h_2h')m\\
&=(\varepsilon(h_3)\varepsilon(h_1)\varepsilon\otimes h_2h')m\\
&=(\varepsilon\otimes\varepsilon(h_1)h_2\varepsilon(h_3)h')m\\
&=(\varepsilon\otimes\varepsilon(h_1)h_2h')m\\
&=(\varepsilon\otimes hh')m\\
&=(\varepsilon\otimes(hh'))m\\
&=(hh')m.
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve que M est un $H-$module à gauche.
$ii)$ M est un $H-$comodule à droite via $\rho_M(m)=\Sigma_{i=1}^n(h_i^*\otimes 1)m\otimes h_i$.
Soit $m\in M$. A-t-on $(id_M\otimes\Delta)\circ\rho_M(m)=(\rho_M\otimes id_M)\circ\rho_M(m)$?
On a :

$$
\begin{aligned}
(\rho_M\otimes id_M)\circ\rho_M(m)&=(\rho_M\otimes id_M)(\Sigma_{i=1}^n(h_i^*\otimes 1)m\otimes h_i)\\
&=\rho_M(\Sigma_{i=1}^n(h_i^*\otimes 1)m)\otimes h_i\\
&=\Sigma_{i,j=1}^n(h_{ij}^*\otimes 1)m\otimes h_{ij}\otimes h_i\\
&=\Sigma_{j=1}^n(h_j^*\otimes 1)m\otimes\Delta(h_j).
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}(id_M \otimes \Delta) \circ \rho_M(m) &= (id_M \otimes \Delta)(\Sigma_{i=1}^n (h_i^* \otimes 1)m \otimes h_i)\\ &= \Sigma_{i=1}^n (h_i^* \otimes 1)m \otimes \Delta(h_i).\end{aligned}$$

Pour $i = j$, on a : $(id_M \otimes \Delta) \circ \rho_M(m) = (\rho_M \otimes id_M) \circ \rho_M(m)$.
Ce qui prouve que M est un $H-$comodule à droite.

■

D'après le théorème 2.2.1, bien que $A(H)$ ne soit pas une algèbre de Hopf, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.2.3

Soit l'application : $\begin{aligned}\rho_{A(H)} : \quad & A(H) \longrightarrow A(H) \otimes D(H)\\ & (\varphi \otimes h) \longmapsto (\varphi_2 \otimes h_1) \otimes (\varphi_1 \otimes h_2)\end{aligned}$
$(A(H), \rho_{A(H)})$ *est une algèbre de* $D(H)-$*comodule.*

Preuve :
On sait que :
$a)$ $A(H)$ est une algèbre.
$b)$ Montrons que : $A(H)$ est un $D(H)-$comodule à droite.

A-t-on :
$i)$ $(id_{A(H)} \otimes \Delta_{D(H)}) \circ \rho_{A(H)}(\varphi \otimes h) = (\rho_{A(H)} \otimes id_{D(H)}) \circ \rho_{A(H)}(\varphi \otimes h)$?
D'une part on a :

$$\begin{aligned}(id_{A(H)} \otimes \Delta_{D(H)}) \circ \rho_{A(H)}(\varphi \otimes h) &= (id_{A(H)} \otimes \Delta_{D(H)})((\varphi_2 \otimes h_1) \otimes (\varphi_1 \otimes h_2))\\ &= (\varphi_2 \otimes h_1) \otimes \Delta_{D(H)}(\varphi_1 \otimes h_2)\\ &= (\varphi_2 \otimes h_1) \otimes ((\varphi_1 \otimes h_2)_1 \otimes (\varphi_1 \otimes h_2)_2)\\ &= (\varphi_2 \otimes h_1) \otimes (\varphi_{12} \otimes h_{21}) \otimes (\varphi_{11} \otimes h_{22})\\ &= (\varphi_3 \otimes h_1) \otimes (\varphi_2 \otimes h_2) \otimes (\varphi_1 \otimes h_3). \quad (*)\end{aligned}$$

D'autre part on a aussi :

$$\begin{aligned}(\rho_{A(H)} \otimes id_{D(H)}) \circ \rho_{A(H)}(\varphi \otimes h) &= (\rho_{A(H)} \otimes id_{D(H)})((\varphi_2 \otimes h_1) \otimes (\varphi_1 \otimes h_2))\\ &= \rho_{A(H)}(\varphi_2 \otimes h_1) \otimes (\varphi_1 \otimes h_2)\\ &= (\varphi_2 \otimes h_1)_1 \otimes (\varphi_2 \otimes h_1)_2 \otimes (\varphi_1 \otimes h_2)\\ &= (\varphi_{22} \otimes h_{11}) \otimes (\varphi_{21} \otimes h_{12})) \otimes (\varphi_1 \otimes h_2)\\ &= (\varphi_3 \otimes h_1) \otimes (\varphi_2 \otimes h_2) \otimes (\varphi_1 \otimes h_3). \quad (**)\end{aligned}$$

Ainsi $(*)$ et $(**)$ montrent bien que $i)$ est vérifié.
$ii)$ $\varepsilon_{D(H)}((\varphi_2 \otimes h_1))(\varphi_1 \otimes h_2) = \varphi \otimes h$?
Avec $\varepsilon_{D(H)}(\varphi \otimes h) = \varepsilon_{H^*}(\varphi) \otimes \varepsilon_H(h) = (\varphi \circ \varepsilon_H) \otimes \varepsilon_H(h)$.
On a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D(H)}((\varphi_2 \otimes h_1))(\varphi_1 \otimes h_2) &= (\varepsilon_{H^*}(\varphi_2) \otimes \varepsilon_H(h_1))(\varphi_1 \otimes h_2)\\ &= \varepsilon_{H^*}(\varphi_2)\varphi_1 \otimes \varepsilon_H(h_1)h_2\\ &= \varphi \otimes h.\end{aligned}$$

i) et ii) montrent que $A(H)$ est une $D(H)-$comodule à droite.
c) Terminons par la vérification de la compatibilité.
Soient $\varphi, \varphi' \in H^*$ et $h, h' \in H$. A-t-on :
$\rho_{A(H)}((\varphi\otimes h)(\varphi'\otimes h')) = \rho_{A(H)}(\varphi\otimes h)\rho_{A(H)}(\varphi'\otimes h')$ et $\rho_{A(H)}(\varepsilon_H \otimes 1_H) = (\varepsilon_H \otimes 1_H)\otimes 1_H$?
On a :

$$\begin{aligned}
&\rho_{A(H)}((\varphi\otimes h)(\varphi'\otimes h'))\\
&\quad= \rho_{A(H)}(\varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2 \otimes h_2h')\\
&\quad= ((\varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2)_2 \otimes (h_2h')_1) \otimes ((\varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2)_1 \otimes (h_2h')_2)\\
&\quad= ((\varphi'_1(S^{-1}(h_3))_2\varphi'_3(S^2(h_1))_2\varphi_2\varphi'_{22} \otimes (h_{21}h'_1) \otimes ((\varphi'_1(S^{-1}(h_3))_1\varphi'_3(S^2(h_1))_1\varphi_1\varphi'_{21} \otimes (h_{22}h'_2)\\
&\quad= ((\varphi'_{12}(S^{-1}(h_3))\varphi'_{32}(S^2(h_1))\varphi_2\varphi'_{22} \otimes (h_{21}h'_1) \otimes ((\varphi'_{11}(S^{-1}(h_3))\varphi'_{31}(S^2(h_1))\varphi_1\varphi'_{21} \otimes (h_{22}h'_2)\\
&\quad= (\varphi'_{12}(S^{-1}(h_3))\varphi'_{32}(S^2(h_1))\varphi_2\varphi'_{22})(\varphi'_{11}(S^{-1}(h_3))\varphi'_{31}(S^2(h_1))\varphi_1\varphi'_{21}) \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2)\\
&\quad= \varphi'_{11}(S^{-1}(h_3))\varphi'_{12}(S^{-1}(h_3))\varphi'_{31}(S^2(h_1))\varphi'_{32}(S^2(h_1))\varphi_1\varphi_2\varphi'_{21}\varphi'_{22} \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2)\\
&\quad= \varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2 \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2). \qquad (i)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\rho_{A(H)}(\varphi\otimes h)\rho_{A(H)}(\varphi'\otimes h')\\
&\quad= ((\varphi_2\otimes h_1)\otimes(\varphi_1\otimes h_2))((\varphi'_2\otimes h'_1)\otimes(\varphi'_1\otimes h'_2))\\
&\quad= ((\varphi_2\otimes h_1)(\varphi'_2\otimes h'_1))\otimes((\varphi_1\otimes h_2)(\varphi'_1\otimes h'_2))\\
&\quad= ((\varphi'_{21}(S^{-1}(h_{13}))\varphi'_{23}(S^2(h_{11}))\varphi_2\varphi'_{22} \otimes (h_{12}h'_1) \otimes ((\varphi'_{11}(S^{-1}(h_{23}))\varphi'_{13}(S^2(h_{21}))\varphi_1\varphi'_{12} \otimes (h_{22}h'_2)\\
&\quad= ((\varphi'_{12}(S^{-1}(h_{31}))\varphi'_{32}(S^2(h_{11}))\varphi_2\varphi'_{22} \otimes (h_{21}h'_1) \otimes ((\varphi'_{11}(S^{-1}(h_{32}))\varphi'_{31}(S^2(h_{12}))\varphi_1\varphi'_{21} \otimes (h_{22}h'_2)\\
&\quad= (\varphi'_{12}(S^{-1}(h_{31}))\varphi'_{32}(S^2(h_{11}))\varphi_2\varphi'_{22})(\varphi'_{11}(S^{-1}(h_{32}))\varphi'_{31}(S^2(h_{12}))\varphi_1\varphi'_{21} \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2)\\
&\quad= \varphi'_{11}(S^{-1}(h_{32}))\varphi'_{12}(S^{-1}(h_{31}))\varphi'_{31}(S^2(h_{12}))\varphi'_{32}(S^2(h_{11}))\varphi_1\varphi_2\varphi'_{21}\varphi'_{22} \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2)\\
&\quad= \varphi'_{11}(S^{-1}(h_{32}))\varphi'_{12}(S^{-1}(h_{31}))\varphi'_{31}(S^2(h_{12}))\varphi'_{32}(S^2(h_{11}))\varphi_{11}\varphi_{12}\varphi'_{21}\varphi'_{22} \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2)\\
&\quad= \varphi'_1((S^{-1}(h_{31}))(S^{-1}(h_{32})))\varphi'_3((S^2(h_{11}))(S^2(h_{12}))\varphi_1\varphi'_2 \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2)\\
&\quad= \varphi'_1(S^{-1}(h_3))\varphi'_3(S^2(h_1))\varphi\varphi'_2 \otimes (h_{21}h'_1)(h_{22}h'_2). \qquad (ii)
\end{aligned}$$

$(i)et(ii)$ montrent que $\rho_{A(H)}((\varphi\otimes h)(\varphi'\otimes h')) = \rho_{A(H)}(\varphi\otimes h)\rho_{A(H)}(\varphi'\otimes h')$. D'où la compatibilité.
Ce qui achève la preuve.

■

Conclusion

Le théorème 2.2.1, un des résultats principaux de notre étude, traduit le fait que le produit tensoriel d'un module anti-Yetter-Drinfeld et un module de Yetter-Drinfeld est un module anti-Yetter-Drinfeld et vice versa.
Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 donnent des exemples de modules anti-Yetter-Drinfeld stables tandis que les propositions 3.2.1 et 3.2.2 nous ont permis de voir la connexion entre les $A(H)$-modules et les modules anti-Yetter-Drinfeld.
Tous les résultats du [7] ont été établis sous condition que H soit une algèbre de Hopf de dimension finie.

Bibliographie

[1] A. Connes, H. Moscovici, Cyclic cohomology and Hopf algebra symmetry, Lett. Math. Phys. 52 (2000) 1–28.

[2] B. Pareigis, Non-additive ring and module theory II. C-categories, C-functors, and C-morphisms, Publ. Math. 24 (1977) 351–361.

[3] C. Kassel, Quantum Groups, in : Graduate Texts in Math., vol. 155, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[4] L. Dabrowski, P.M. Hajac, P. Siniscalco, Explicit Hopf–Galois description of $SL_{\exp(\frac{2i\pi}{3})}(2)$-induced Frobenius homomorphisms, in : D. Kastler, M. Rosso, T. Schucker (Eds.), Enlarged Proceedings of the ISI GUCCIA Workshop on Quantum Groups, Noncommutative Geometry and Fundamental Physical Interactions, Nova Science, Commack–New York, 1999, pp. 279–298.

[5] M. Khalkhali, B. Rangipour, Invariant cyclic homology, K-Theory 28 (2003) 183–205.

[6] P. Jara, D. ¸Stefan, Cyclic homology of Hopf Galois extensions and Hopf algebras, Preprint, math.KT/0307099.

[7] P. M. Hajac, M. Khalkhali, B. Rangipour,Y. Sommerhäuser, Stable anti-Yetter-Drinfeld modules. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004), no. 8, 587-590.

[8] P.M. Hajac, M. Khalkhali, B. Rangipour, Y. Sommerhäuser, Hopf-cyclic homology and cohomology with coefficients, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).

[9] S. Caenepeel, Brauer Groups, Hopf Algebras and Galois Theory, in : K-Monographs in Math., vol. 4, Kluwer Academic, Dordrecht, 1998.

[10] S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, Frobenius and Separable Functors for Generalized Module Categories and Nonlinear Equations, in : Lecture Notes in Math., vol. 1787, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[11] T. Brzezinski, On modules associated to coalgebra Galois extensions, J. Algebra 215 (1999) 290–317.

[12] Y. Doi, M. Takeuchi, Hopf–Galois extensions of algebras, the Miyashita–Ulbrich action, and Azumaya algebras, J. Algebra 121 (1989) 488–516.