UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Analyse et Géométrie Complexe

Thème :

Théorème d'existence et de régularité intérieure pour l'opérateur $\bar{\partial}$ sur un domaine q-convexe.

Présenté par : Amadou SEYDI

Sous la direction de : Dr Mamadou Eramane BODIAN & Dr Souhaibou SAMBOU

Sous la supervision de : Professeur Salomon SAMBOU

Soutenu publiquement le 11 Août 2022 devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	grade	Qualité	Université
Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président	UASZ
Mansour SANE	Maître de Conférence Titulaire	Examinateur	UASZ
Moussa FALL	Maître de Conférence Assimulé	Examinateur	UASZ
Mamadou E. BODIAN	Maitre de Conférences Assimulé	Directeur	UASZ
Souhaibou SAMBOU	Chercheur	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2020-2021

Table des matières

Remerciements :

D'abord, je rends grâce à Dieu de m'avoir donné la force et le courage de surmonter toutes les épreuves que j'ai traversées depuis le début de ce travail et de m'accorder une bonne santé afin de mener à bien mes recherches.

Les personnes, les plus importantes quant à la réalisation de ce mémoire sont sans nul doute Docteur Mamadou Eramane Bodian et Docteur Souhaibou Sambou. Je jure devant le bon Dieu qu'une page entière de remerciements à leur égard ne serait suffire ! Je leur en serai éternellement reconnaissant, je n'aurais pas pu accomplir tout ce travail s'ils n'ont pas été là pour me guider et me (re-) motiver si souvent. Ce sujet qu'ils m'ont choisi est riche et passionnant, au carrefour de plusieurs disciplines.

Je vous remercie de m'avoir fait confiance, de m'avoir accompagné le long de ce travail et pour toutes ces discussions et séances de travail à ZIP (Ziguinchor Institut Polytechnique). J'ai beaucoup appris à vos côtés et j'espère que nous pourrons continuer à travailler ensemble à l'avenir.

Je tiens à exprimer une profonde gratitude envers notre grand père dans le domaine, le Professeur Salomon Sambou, pour toute la qualité de connaissances qu'il nous a transmise, de nous avoir fait aimer son domaine et d'avoir supervisé ce travail, **MERCI INFINIMENT !**

Je remercie les Docteurs Mansour SANE et Moussa FALL pour leur participation à mon jury.

Je tiens aussi à remercier profondément tous les professeurs du département de mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement qu'ils nous ont dispensée ; leur vision des mathématiques reste un modèle pour nous.

Je n'oublie pas le Professeur Diaraf SECK de l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar et au Docteur Omar Diop de l'Université Virtuelle du Sénégal. Merci encore !

J'exprime un remerciement particulier à Monsieur Papa BADIANE, Doctorant à L'UASZ, qui a beaucoup participé à la réalisation de ce mémoire, de par ses conseils, son aide et son soutien.

Je remercie également tous mes camarades du groupe de recherche analyse et géométrie complexe : Dieynaba SAMB et Daouda DIACK. Je retiendrais en eux, les contributions et critiques mathématiques qui surgissaient lors de nos échanges durant ce travail.

Je remercie très chaleureusement les responsables de ZIP, mention spéciale à Monsieur Alassane Tamboura, pour m'avoir permis d'effectuer mes recherches documentaires dans leurs locaux.

Je profite de l'occasion pour remercier tous mes promotionnaires de classe. Ces remerciements s'adressent en particulier à Awa Barry, Dieynaba Samb, Daouda Diack, Abdoulaye Sagna, Mamadou Nazir Diallo, Abdourahmane Ba, Yaya Coulibaly, Azize Manga, ceux avec qui j'ai partagé ces deux dernières années de Master. Une mention spéciale aux étudiants de Maths Appliquées particulièrement à Mamadou korka Ba, Doudou Mané, Amadou Baldé, Fatou Dieng, Mouhamed Niamba, Seydi Diamil Diouf et Saliou Diaw.

Je remercie tous les Docteurs et Doctorants participant aux séminaires NLAGA (Non-Linear Analys and Geometry Algebra) qui se tiennent régulièrement les samedis, je retiens en eux cette belle qualité de présentation de leurs travaux ; particulièrement l'exposé de Papa BADIANE portant sur " Les Fonctions Plurisousharmoniques". Qui m'a permis d'avancer et de bien comprendre mon sujet.

Je remercie également toute la première et deuxième promo MPI. En particuliers, Marie Faye, Lala Diémé, Idrissa Biaye, Ibrahima Ndao, Malick Diba, Lamine Mané, Algassimou Diallo, Papa Mayel Diop, Mor Pouye et Feu Mamour Diouf. Je retiens en eux, de très bons moments passés ensemble.

J'en profite pour exprimer toute ma gratitude à ma très chère sœur Adama Awa BARRY DIALLO et sa belle famille à Peyrissac ; sans oublier son mari avec sa sœur Madame Diop et son mari ; pour le soutien, les conseils et les prières.

Je remercie du fond du cœur la famille Gaye à la Sicap liberté 2, qui m'a toujours accueilli pendant mes déplacements et séjours à Dakar. Merci pour tout ce que vous m'avez apporté, pour votre disponibilité, soutien, gentillesse et amitié. En particuliers, je veux citer ma Maman Satou Gaye, Mohammed Fall dit Mouha et ses sœurs, la famille toute entière.

J'adresse mes sincères remerciements à toute ma famille surtout mon père, pour le soutien et les encouragements qu'il ne cesse de renouveler. Je suis infiniment reconnaissant à mes parents pour l'éducation qu'ils m'ont donné et de m'avoir appris à acquérir la connaissance avec passion et patience surtout mon grand-père paternel (Feu Amadou Seydi). J'en profite pour remercier tous les membres de ma large famille : Yama Sané et sa famille à Kolda, le couple Baldé à Cité Peulh, ma maman Aissatou Barry et sa famille à Alwar, ma belle sœur Nafisatou Camara établi au Maroc, Madame Béatrice Manga Professeur de Français au Lycée Bouna Kane de Kolda, Monsieur Laurent Fiacre Manga instituteur au Privé Catholique Saint Charles de Kolda, Caporal Moussa Baldé, Mamadou Aliou Diallo, Karimatou Barry, Fatoumata Lamarana Barry, Hawawou Barry, Youssoupha Sall Professeur de Maths/ SVT au Cem Saré Moussa de Kolda, Awa wade, Marème Aïdara, Fatoumata Bernadette Diédhiou, Moussa Aïdara, Adama Baldé établi en Espagne et sa femme Adama SEYDI.
Enfin, merci à celles et ceux qui auront la patience de lire ce mémoire.

Dédicace :

Je dédie ce mémoire :

♣ A mon père Ibrahima SEYDI ;

♣ A ma très chère sœur Adama Awa BARRY (Madame DIALLO) ;

♣ A mon défunt grand-père paternel et homonyme ;

♣ A Yama SANE ;

♣ A ma fille chérie Fatou SEYDI ;

♣ A mon fils Mouhamed Al Amine SEYDI ;

♣ A ma nièce chérie Fatoumata Binta DIALLO ;

♣ A ma maman Aissatou BARRY ;

♣ A ma maman Satou GUEYE ;

♣ A ma défunte petite sœur Assamaou SEYDI ;

♣ A ma tante Adama SEYDI ;

♣ A Mouhamed Fall ;

♣ A Marie FAYE ;

♣ A Mariama DIALLO ;

♣ A mes sœurs et frères.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions un résultat d'existence et de régularité intérieure dû à Martino Fassina et Stefano Pinton pour l'opérateur $\bar{\partial}$ sur un domaine q-convexe.
Cette étude porte sur la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}u = f$ dans le cas d'un domaine q-convexe de $\mathbb{C}^n$ où $f \in L^2_{p,k}(\Omega,\ loc) \cap \ker(\bar{\partial})$.

Introduction

L'étude de l'équation de Cauchy-Riemann $\bar{\partial} u = f$ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est l'un des problèmes fondamentaux dans l'analyse complexe de plusieurs variables. Ici la donnée f est une (p,k)-forme différentielle définie sur Ω qui vérifie la condition $\bar{\partial} f = 0$. Lorsque Ω est pseudoconvexe, l'existence d'une solution est généralement prouvée en utilisant des techniques de l'analyse fonctionnelle, en considérant l'espace des formes différentielles à coefficients de carrés intégrables et en regardant le $\bar{\partial}$ comme un opérateur borné dense et défini entre deux espaces de Hilbert. Dans ce cas, la recherche de la solution revient à trouver une estimation.
Cette approche remonte aux travaux de Hörmander [7], Kohn [8, 9] et Morrey [11].
Si Ω est lisse et borné, l'estimation nécessite l'exploitation de la formule de base de Hörmander-Kohn-Morrey.
Ils profitent du fait que les intégrales sur le bord apparaissant dans la formule sont positives par l'hypothèse de pseudoconvexité. Cette méthode s'étend également aux domaines non lisses et non bornés. Dans ces cas, la conclusion est obtenue en prouvant d'abord l'existence d'une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique ψ puis en appliquant la formule de base aux domaines d'approximation $\Omega_j := \{z \in \Omega : \psi(z) < j\}$.
Toujours dans la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann, Ho dans [5], résout l'équation pour un domaine faiblement q-convexe, la donnée f est une $(0,r)$-forme différentielle.
Dans ce mémoire, on va s'intéresser aux travaux de Martino Fassina et Stefano Pinton dans [3], où ils montrent d'abord, que tout domaine Ω q-convexe admet une fonction d'exhaustion lisse strictement q-sousharmonique en partant du fait qu'il est possible de construire une fonction d'exhaustion lisse q-sousharmonique à partir d'une fonction semi-continue supérieure. Cela leur permet à leur tour d'obtenir des résultats d'existence dans L^2 ainsi que dans le cadre C^∞ pour l'équation de Cauchy-Riemann dans le cas d'un domaine Ω q-convexe non lisse.

Ils ont établi les deux théorèmes suivants :

Théorème 0.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine q-convexe. Alors Ω admet une fonction d'exhaustion lisse strictement q-sousharmonique.

Le deuxième résultat est énoncé comme suit :

Théorème 0.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine q-convexe.

1) Pour tout $f \in L^2_{p,k}(\Omega,\ loc)$ avec $\bar{\partial} f = 0$ et $k \geq q$, il existe une forme différentielle $u \in L^2_{p,k-1}(\Omega,\ loc)$ telle que $\bar{\partial} u = f$.

2) Pour tout $f \in C^\infty_{p,k}(\Omega)$ avec $\bar{\partial} f = 0$ et $k \geq q$, il existe une forme différentielle $u \in C^\infty_{p,k-1}(\Omega)$ telle que $\bar{\partial} u = f$.

Notre objectif est d'écrire avec plus de détails les preuves de ces deux théorèmes.
Ce mémoire comprend deux parties et est organisé comme suit :
Dans la première partie, nous introduisons les notions de base essentielles pour la compréhension du sujet abordé ainsi que les définitions et notations qui concerneront tout le reste du manuscrit.
La deuxième partie intitulé "La Résolution du $\bar{\partial}$ dans le cas d'un domaine q-convexe" est le cœur de ce mémoire. Dans cette partie, nous commençons par rappeler quelques propriétés élémentaires des fonctions q-sousharmoniques nous permettant de faire la démonstration du Théorème (0.1), ensuite on donne une série de lemmes nous permettant de faire la démonstration du Théorème (0.2) et on termine cette partie par un exemple de domaine q-convexe non lisse.

1 Préliminaires

Dans cette section, nous allons définir les notions de base que nous utiliserons dans la suite du document.

1.1 Quelques outils de la géométrie réelle et complexe

Dans cette partie, l'objectif est de donner quelques notions de la géométrie réelle et complexe. Les résultats sont tirés de [2].

1.1.1 Notions de variétés

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois continument différentiables et C^w celle des fonctions analytiques réelles.

Définition 1.1. (Carte)
Soit M un espace topologique.
Une carte locale de dimension n en un point p de M, est un couple $(U; \varphi)$, où U est un voisinage ouvert de p dans M et φ un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$, ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'ouvert U est appelé le domaine de la carte $(U; \varphi)$ et $\varphi(U)$ son codomaine.

Remarque 1.1. Si $(U; \varphi)$ est une carte locale en p, alors $(U; \varphi)$ est une carte locale en tout point de U.

Définition 1.2. (Atlas de classe C^k)
Soit X un espace topologique.
Un atlas de classe C^k est une collection d'homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$
$\alpha \in I$, appelée carte différentielle où $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ constitue un recouvrement d'ouverts de X, $(V_\alpha)_\alpha$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous α et $\beta \in I$ tel que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^k [1].
Les composantes $\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ sont appelées coordonnées locales sur U_α définies par la carte φ_α.

Définition 1.3. (Variété différentiable)
Une variété différentiable X de dimension n et de classe C^k est un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.

- $(\mathbb{R}^n, Id)$ est une variété différentiable de dimension n.
- Tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n, avec comme atlas l'application identité définie sur l'ouvert Ω.

- Le cercle $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ est une variété différentiable de dimension 1 , avec comme atlas $U_0 = \{\theta \neq 0[2\pi]\}$ et $U_\pi = \{\theta \neq \pi[2\pi]\}$, les applications φ_α consistant à prendre la détermination de l'angle respectivement dans les intervalles $]0, 2\pi[$ et $] - \pi, \pi[$. Le changement de carte est une application affine, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $U \subset E$, $V \subset F$ deux ouverts, $f : U \to V$ une application. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^k si f est inversible et si f et f^{-1} sont différentiables de classe C^k.

Définition 1.4. (Vecteur tangent)
Soit X une variété différentiable.
Un vecteur v, tangent à X au point x_0, est par définition un opérateur différentiel qui agit sur les fonctions, c'est-à-dire pour tout $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on associe localement

$$v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0);$$

où les v_j sont des réelles.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ autour de x_0 sur Ω, on écrit simplement,

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définition 1.5. (Espace tangent, Espace cotangent)
Soit X une variété différentiable.
L'ensemble des vecteurs tangents est appelé espace tangent. Par conséquent, pour tout $x_0 \in \Omega$, le n-uplet $\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}_{1 \leq j \leq n}$ constitue une base de l'espace tangent à X au point x_0 ; noté $T_{x_0}X$.
Son dual $T^*_{x_0}X$ est l'espace vectoriel cotangent à X au point x_0.
Si $f \in C^1(\Omega,\ \mathbb{R})$, sa différentielle au point x_0 est une forme linéaire sur $T_{x_0}X$, définie par :

$$df_{x_0}(v) = v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0);\ \forall\ v \in T_{x_0}X.$$

En particulier, si $f = x_j$, on a $v_j = dx_j(v)$. Donc localement

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

La famille $\{dx_1, \cdots, dx_n\}$ est la base duale de $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ dans l'espace cotangent $T^*_{x_0}X$.

Définition 1.6. (Champ de vecteurs)
Soit X une variété différentiable.
On appelle champ de vecteurs de classe C^k sur Ω, un ouvert de X, toute application $M : \Omega \longrightarrow TX$ de classe C^k telle que $M(x) \in T_xX$ pour tout $x \in X$. On note $\Gamma^k(\Omega)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^k sur X.

Définition 1.7. (Fibrés vectoriels)
Soient X une variété différentiable de dimention n sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un champ scalaire. Un fibré vectoriel de rang r au-dessus de X est une variété E de classe C^∞ munie d'une application $\pi : E \to X$ de classe C^∞ appelée projection et d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimention r sur chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$. Cela veut dire qu'il existe un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ de M et des C^∞-difféomorphismes θ_α appelés trivialisations

$$\theta_\alpha : E_{|V_\alpha} \to V_\alpha \times \mathbb{K}^r \quad \text{où} \quad E_{|V_\alpha} = \pi^{-1}(V_\alpha)$$

telle que pour tout $x \in V_\alpha$ l'application

$$E_x \xrightarrow{\theta_\alpha} \{x\} \times \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Pour chaque $\alpha, \beta \in I$, l'application

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r \to (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

peut se mettre sous la forme

$$\theta_{\alpha\beta}(x, \xi) = (x, g_{\alpha\beta}(x).\xi),\ (x; \xi) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

où la famille $(g_{\alpha\beta})$ est inversible à coefficients dans $C^\infty(V_\alpha \cap V_\beta, Gl(r, \mathbb{K}))$, d'inverse $(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g_{\beta\alpha})$ et satisfaisant à la condition de cocycle

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}\ sur\ V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma.$$

La collection $(g_{\alpha\beta})$ est appelée système de matrices de transition. Réciproquement, toute collection de matrices inversibles satisfaisant la condition de cocycle définit un fibré vectoriel E, obtenu en recollant les cartes $V_\alpha \times \mathbb{K}^r$ via les identifications $\theta_{\alpha\beta}$.

Exemple 1.2. Les fibrés tangent $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ et cotangent $T^*X = \bigcup_{x \in X} T_x^* X$ d'une variété différentiable X de dimension n sont des fibrés vectoriels.

Définition 1.8. (Section de fibré)
Soit X une variété différentiable.
Soit $\Omega \subset X$ un ouvert. Soient E un fibré vectoriel sur X et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty, \omega\}$. Une section de classe C^k de $E_{|\Omega}$ est une application $s : \Omega \to E$ de classe C^k telle que $s(x) \in E_x$, pour tout $x \in \Omega$ (i.e $\pi \circ s = Id_\Omega$).

Définition 1.9. (Section de fibré cotangent)
Soit X une variété différentiable.
Soient $\Omega \subset X$ un ouvert et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Une section de classe C^k de T^*X sur Ω est une application $s : \Omega \to T^*X$ de classe C^k telle que $s(x) \in T_x^*X$ pour tout $x \in \Omega$. On note $C^k(\Omega,\ T^*X)$ l'espace des C^k-sections (ou sections de classe C^k) de T^*X.
Si $\Omega = X$, on parle de section globale.
Localement, une section fibré cotangent s'écrit :

$$s(x) = \sum_{i=1}^n s_i(x) dx_i.$$

Définition 1.10. (1-forme différentielle)
Une 1-forme différentielle sur U est une application

$$w : U \longrightarrow T^*U = \bigcup_{a \in U} T_a^* U$$

$$a \longmapsto w_a$$

à valeurs dans l'espace cotangent à U en tout point a.
Si $a = (x_1, \ldots, x_n)$ où si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$w = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i\,(x_1, \ldots, x_n)\,(dx_i)_a$$

où les coefficients $w_i\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ dépendent de a :
L'expression locale d'une 1-forme différentielle est donc $w = \sum_{i=1}^n w_i dx_i$ où les coefficients $(w_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des fonctions $w : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
Une forme différentielle est de classe C^k si les coefficients w_i le sont. On note $\Omega^1(U)$ l'ensemble des 1 -formes différentielles de classe C^∞ sur U.

Exemple 1.3. dx est une forme différentielle de coefficient 1.
$w(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}dx - \dfrac{y}{x^2+y^2}dy$ est une 1-forme différentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.
Passons maintenant à la définition de la notion de variété complexe.

Définition 1.11. (Variété complexe)
Une variété complexe X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ où les U_α sont des ouverts de X tels que $X = \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ et
$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes pour lesquels :
si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ on a

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes.
Les $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ sont appelés cartes locales.
$z \in U_\alpha,\ \ \varphi_\alpha(z) = (z_1^\alpha, z_2^\alpha, \cdots, z_n^\alpha) \in \mathbb{C}^n$
$(z_1^\alpha, z_2^\alpha, \cdots, z_n^\alpha)$ sont appelés coordonnées locales autour de z.
La collection $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ est appelée atlas complexe.

Remarque 1.2. Une variété complexe de dimension n est une variété différentielle de dimension $2n$.

Exemple 1.4. $(\mathbb{C}^n, Id)$ est une variété complexe de dimension n.

1.1.2 Notion de Structure complexe

Soit X une variété analytique complexe de dimension (complexe) n.
Pour tout $z \in X$, on a l'espace cotangent T_z^*X de X en z et une structure complexe J_z de T_z^*X (c'est-à-dire l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de T_z^*X vérifiant

$$J_z \circ J_z = -Id_{T_z^*X}$$

et défini localement par

$$J_z(dx_j) = dy_j$$

et

$$J_z(dy_j) = -dx_j).$$

Soit $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ le complexifié de T_z^*X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme

$$u + iv$$

où

$$u,\ v \in T_z^*X$$

et

$$i = \sqrt{-1}.$$

J_z se prolonge en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ noté encore J_z tels que $J_z^2 = -Id_{T_z^*X^{\mathbb{C}}}$ et

$$J_z(u+iv) = J_z(u) + iJ_z(v)$$

pour tous $u,\ v \in T_z^*X$.
On a :

$$T_z^*X^{\mathbb{C}} = T_{z1,0}^*X \oplus T_{z0,1}^*X,$$

où

$$T^*_{z1,0}X = \Big\{ v \in T^*_z X^{\mathbb{C}} / J_z v = iv \Big\} \text{ et } T^*_{z0,1}X = \Big\{ v \in T^*_z X^{\mathbb{C}} / J_z v = -iv \Big\}.$$

$$T^*_{1,0}X = \bigcup_{z\in X} T^*_{z1,0}X \quad \text{et} \quad T^*_{0,1}X = \bigcup_{z\in X} T^*_{z0,1}X$$

sont respectivement des fibrés cotangents holomorphes et antiholomorphes.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p, q \leq n$, notons par $\Lambda^p T^*_{z1,0}X$ et $\Lambda^q T^*_{z0,1}X$ respectivement les espaces vectoriels des p-formes alternées sur $T^*_{z1,0}X$ et des q-formes alternées sur $T^*_{z0,1}X$.

Dans un système de coordonnées locales $(z_1, \cdots, z_n)$,

$$\Lambda^p T^*_{z1,0}X = vect\Big\{ dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \Big\}_{1\leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$$

$$\Lambda^q T^*_{z0,1}X = vect\Big\{ d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q} \Big\}_{1\leq j_1 < \cdots < j_q \leq n}$$

où $(dz_1, \cdots, dz_n)$ et $(d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_n)$ sont des bases locales de $T^*_{z1,0}X$ et $T^*_{z0,1}X$.

Donc

$$\Lambda^p T^*_{1,0}X := \bigcup_{z\in X} \Lambda^p T^*_{z1,0}X \text{ et } \Lambda^q T^*_{0,1}X := \bigcup_{z\in X} \Lambda^q T^*_{z0,1}X$$

sont respectivement les fibrés des p-formes extérieures sur le fibré $T^*_{1,0}X$ et des q-formes extérieures sur le fibré $T^*_{0,1}X$.

On pose

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = \Lambda^p T^*_{z1,0}X \otimes \Lambda^q T^*_{z0,1}X,$$

donc

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = vect\{ dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ..... \wedge d\bar{z}_{j_q} \},$$

avec $1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$.

Définition 1.12. Le fibré $\Lambda^{(p,q)} T^* X^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T^*_{1,0}X \otimes \Lambda^q T^*_{0,1}X$ est appelé fibré des (p,q)-formes extérieures sur le fibré cotangent complexifié $T^*X^{\mathbb{C}} := \bigcup_{z\in X} T^*_z X^{\mathbb{C}}$.

Définition 1.13. Soit $\Omega \subset X$ un ouvert. On appelle forme différentielle de bidegré (p,q) (ou (p,q)-forme différentielle) et de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) sur Ω, toute section définie sur Ω de classe C^k du fibré $\Lambda^{(p,q)} T^* X^{\mathbb{C}}$.

On note $C^k_{p,q}(\Omega)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur Ω.

Dans un ouvert $\Omega \subset X$ de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$, une (p,q)-forme différentielle u s'écrit :

$$u(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}' u_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les u_{IJ} sont des fonctions de classe C^k, $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ sont des multi-indices d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$,

$dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}$ et $\sum'$ indique que la somme se fait suivant les indices croissants.

On note par $D^k_{p,q}(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par des (p,q)-formes différentielles à support compact dans X (on l'appelle aussi l'espace des formes tests) et par $C^\infty_0(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par des fonctions de classe C^∞ à supports compacts sur X. Toute fonction $f \in C^\infty_0(X)$ est appelée fonction test.

Définissons à présent l'opérateur de Cauchy-Riemann.

Définition 1.14. (Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$) Soient X une variété complexe et $\Omega \subset X$ un ouvert. Si f est une fonction de classe C^1 sur un voisinage d'un point $a \in \Omega$, on a localement :

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)dy_j.$$

En passant aux coordonnées complexes, on a :

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j.$$

Posons

$$\partial f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j \text{ et } \bar{\partial} f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j,$$

donc

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

La décomposition $d = \partial + \bar{\partial}$ se généralise sur toutes les formes différentielles.
En effet, si

$w(z) = \sum'_{|I|=p,|J|=q} w_{I,J}(z)dz_I \wedge d\bar{z}_J$ est une (p,q)-forme différentielle de classe C^1, alors

$$dw(z) = \sum'_{|I|=p,|J|=q} dw_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum'_{|I|=p,|J|=q} (\partial w_{I,J}(z) + \bar{\partial} w_{I,J}(z)) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

On pose

$$\partial w(z) = \sum'_{|I|=p,|J|=q} \partial w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum'_{|I|=p,|J|=q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_{I,J}}{\partial z_j}(z)dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

et

$$\bar{\partial} w(z) = \sum'_{|I|=p,|J|=q} \bar{\partial} w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum'_{|I|=p,|J|=q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{\partial} w_{I,J}}{\partial \bar{z}_j}(z)d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants :

$$\partial : C^s_{p,q}(\Omega) \longrightarrow C^{s-1}_{p+1,q}(\Omega)$$

$$\bar{\partial} : C^s_{p,q}(\Omega) \longrightarrow C^{s-1}_{p,q+1}(\Omega)$$

$\bar{\partial}$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann et satisfait la condition $\bar{\partial}^2 = 0$ car $d^2 = 0$.

Définition 1.15. Soient X une variété analytique complexe et Ω un ouvert de X.
Une forme différentielle w de type (p,q) de classe C^k définie sur Ω est dite $\bar{\partial}$-fermée si $\bar{\partial} w = 0$.
Une (p,q) forme différentielle w de classe C^k définie sur un ouvert Ω est dite $\bar{\partial}$-exacte s'il existe une $(p,q-1)$ forme différentielle u de classe C^k telle que $\bar{\partial} u = w$.

Définition 1.16 (Produit scalaire hermitien)**.**

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Le produit scalaire hermitien sur X est la donnée en tout point $z_0 \in X$ d'une application
$h : T_{z_0}X \times T_{z_0}X \to \mathbb{C}$, définie par :
pour deux vecteurs

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \text{appartenant à } T_{z_0}X;$$

$$h(u,v)=\sum_{j,k=1}^{n} h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j},\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)u_j\overline{v}_k=\sum_{j,k=1}^{n} h_{j,k}u_j\overline{v}_k$$

où

$$h_{j,k}(z_0)=h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j},\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $h(\lambda u,v)=\lambda h(u,v),\ \forall\lambda\in\mathbb{C},$
2. $h(u,v)=\overline{h(v,u)},$
3. $h(u,u)\geq 0,$
4. $h(u,u)>0\ \forall\ u\neq 0,$
5. $h(u+v,w)=h(u,w)+h(v,w),\ \forall\ u,\ v\ et\ w\in T_{z_0}X.$

On note $her(T_{z_0}X)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur $T_{z_0}X$.

Remarque 1.3.

$(h_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$ est une matrice hermitienne, définie positive et dépend de façon C^∞ du point z_0. Cette forme hermitienne, définie sur l'espace tangent à X en un point, s'étend aux formes différentielles sur X comme suit :
soient

$$u=\sum_{|I|=p,|J|=q}' u_{I,J}\ dz_I\wedge d\overline{z}_J\quad et\quad v=\sum_{|K|=p,|L|=q}' v_{K,L}\ dz_K\wedge d\overline{z}_L$$

$$h(u,v)=\sum_{|K|=|L|=p\quad |I|=|J|=q} u_{I,J}\ \overline{v}_{K,L}\ h^{i_1k_1}...h^{i_pk_p}\overline{h^{j_1l_1}}...\overline{h^{j_ql_q}}$$

où $(h^{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ est l'inverse de la matrice hermitienne $(h_{ij})=h(\dfrac{\partial}{\partial z_i},\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_j})_{i,j=1,\ldots,n}$
et $(\overline{h^{jl}})_{j,l=1,\ldots,n}$ les conjugués des $(h^{jl})_{j,l=1,\ldots,n}$.

Définition 1.17 (Métrique hermitienne)**.**

Soit X une variété complexe de dimension n et soit $T^{1,0}X$ son fibré tangent holomorphe. Une métrique hermitienne sur X est la donnée pour tout $n\in X$ d'un produit scalaire hermitien h_n sur $T^{1,0}_nX$ qui varie de manière C^∞ en fonction de X.

Définition 1.18 (Variété hermitienne)**.**

Soit X une variété complexe et h une métrique hermitienne alors le couple (X,h) est appelé variété hermitienne.

1.2 Fonctions plurisousharmoniques

Dans cette partie, nous allons définir la notion de fonction plurisousharmonique. Ces fonctions nous serviront à définir la pseudoconvexité. Les résultats sont tirés de [10] et [6].

1.2.1 Fonctions sousharmoniques

Nous commençons d'abord par définir l'harmonicité dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.19. (Fonction harmonique)
Une fonction complexe f deux fois continûment différentiables dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dite harmonique dans Ω si elle satisfait la condition suivante :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Remarque 1.4. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on voit que les fonctions harmoniques sont très liées aux fonctions holomorphes.

- La partie réelle d'une fonction holomorphe ou anti-holomorphe sur un ouvert de Ω est harmonique. La réciproque de cette propriété est fausse, par contre on a *:*
- Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$; toute fonction harmonique sur Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur Ω.

On rappelle qu'une fonction $f : z = (z_1, \cdots, z_n) \in \Omega \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ différentiable est holomorphe si elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann $\partial f / \partial \bar{z}_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Définition 1.20. (Fonction sousharmonique)
Une fonction u définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

i) u est semi-continue supérieurement (s.c.s), c'est-à-dire $\{z \in \Omega : u(z) < s\}$ est un ouvert pour tout $s \in \mathbb{R}$ ou bien $\overline{\lim}_{z \to a} u(z) \leq u(a)$ pour $a \in \Omega$ *;*

ii) pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute fonction h continue sur K, harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, telle que $h \geq u$ sur bK(bord de K), alors $h \geq u$ sur K.

Remarque 1.5. Une telle fonction h est parfois appelée majorant harmonique de la fonction u, la majoration se transférant du bord vers l'intérieur. Être sousharmonique, c'est alors quelque sorte être « en-dessous » des fonctions harmoniques.

Proposition 1.1. Une fonction u de classe C^2 est sousharmonique si et seulement si $\Delta u \geq 0$. Lorsque $\Delta u > 0$, on dit que u est strictement sousharmonique.

Exemple 1.5. Soient $a \in \mathbb{C}$ fixé et $c > 0$. Alors la fonction $z \mapsto c \log |z - a|$ est sousharmonique.

Remarque 1.6. Si $u : \ \Omega \subset \mathbb{C} \to [-\infty; +\infty[$ est sousharmonique sur Ω et $\chi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante sur un intervalle I contenant $u(\Omega)$, alors $\chi \circ u$ est sousharmonique sur Ω.

Cette remarque est valable pour les fonctions plurisousharmoniques et les fonctions q-sousharmoniques.

1.2.2 Fonctions plurisousharmoniques

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$:

Définition 1.21. Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est plurisousharmonique si elle est semi-continue supérieurement et pour toute droite complexe $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, la restriction $u|_{\Lambda \cap \Omega}$ est sousharmonique sur $\Omega \cap \Lambda$. Cette dernière propriété peut être reformulée comme suit : pour tout $a \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{C}^n$ avec $|\xi| = 1$, et $r > 0$ tels que $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\theta}\xi\right) d\theta.$$

Cette inégalité est dite inégalité de la sous moyenne.

Autre définition d'une fonction plurisousharmonique est :

Définition 1.22. (Fonction plurisousharmonique)
Une fonction u de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique sur Ω, si u est semi-continue supérieurement et si pour tout $a \in \Omega$ et $w \in \mathbb{C}^n$, la fonction $\lambda \mapsto u(a + \lambda w)$ est sousharmonique dans l'ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda w \in \Omega\}$.
On note $\mathrm{PSH}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur Ω.

Définition 1.23. (Forme de Levi)
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et φ une fonction de classe C^2 sur Ω.
On appelle forme de Levi de φ en $z \in \Omega$, la hessienne complexe $L_z\varphi$ en z, c'est-à-dire la forme hermitienne

$$\zeta \mapsto L_z\varphi(\zeta) = \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\zeta_j\overline{\zeta}_k \quad \text{avec } \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Définition 1.24. (Fonction strictement plurisousharmonique)
Une fonction $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ est dite strictement plurisousharmonique dans Ω si pour tout $z \in \Omega$ la forme de Levi $L_z\varphi$ au point z est une forme hermitienne définie positive.

Exemple 1.6. $u = \log|z|$ est une fonction plurisousharmonique.

Définition 1.25. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et K un compact de Ω. On appelle enveloppe plurisousharmonique de K dans Ω, l'ensemble :

$$\hat{K}^p_\Omega = \left\{z \in \Omega :\ \forall\ u \in PSH(\Omega),\ u(z) \leq \sup_{\zeta \in K} u(\zeta)\right\}.$$

1.3 Domaines pseudoconvexes

Dans ce paragraphe, nous allons étudier une nouvelle classe d'ouverts de $\mathbb{C}^n$: les ouverts pseudoconvexes. Les résultats sont tirés de [1] et [10].Nous commençons par définir une fonction d'exhaustion.

Définition 1.26. Soit φ une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que φ est une fonction d'exhaustion dans Ω si pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$$

est relativement compact.

Définition 1.27. (domaine de classe C^k)
Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit à bord de classe C^k s'il existe un voisinage U de $\overline{\Omega}$ et φ une fonction de classe C^k tels que $\Omega = \{z \in U,\ \varphi(z) < 0\}$. φ est appelé fonction définissante de Ω.
Si $d\varphi \neq 0$ au voisinage du bord de Ω, on dit que Ω est à bord lisse de classe C^k.

Définition 1.28. (Domaine pseudoconvexe et strictement pseudoconvexe)
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ défini par $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < 0\}$ où φ est une fonction de classe C^2.
On dit que Ω est pseudoconvexe au point $p \in b\Omega$, si sa forme de Levi est positive en tout $t \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial\varphi(p)}{\partial z_j} t_j = 0$.
On dit que Ω est strictement pseudoconvexe (ou fortement pseudoconvexe) en $p \in b\Omega$ si

$$\sum_{1\leq j,k\leq n} \frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} t_j \bar{t}_k > 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial\varphi(p)}{\partial z_j} t_j = 0$ avec $t \neq 0$.

Remarque 1.7. *:*
On dit que Ω est pseudoconvexe (resp. strictement pseudoconvexe), si Ω est pseudoconvexe (resp. strictement pseudoconvexe) en tout point de $b\Omega$.

On a cette relation entre plurisousharmonicité, la pseudoconvexité et la convexité.

Remarque 1.8. Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné de $\mathbb{C}^n$.
- Si Ω est pseudoconvexe (resp. strictement pseudoconvexe) de classe C^k, $k = 2, \cdots, \infty$ alors il admet une fonction définissante psh (resp. strictement psh) de classe C^k.
- Si Ω est pseudoconvexe alors Ω est strictement pseudoconvexe si et seulement si pour tout $p \in b\Omega$, Ω est localement biholomorphiquement équivalent à un convexe de $\mathbb{C}^n$.
- Si Ω est pseudoconvexe de classe C^∞, alors Ω admet une fonction strictement plurisousharmonique de classe C^∞.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ n'est pas borné, on définit la pseudoconvexité comme suit :

Définition 1.29. *:* Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit pseudoconvexe si Ω admet une fonction d'exhaustion φ plurisousharmonique continue.

Remarque 1.9. *:*
Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est pseudoconvexe et φ une fonction d'exhaustion de classe C^∞ strictement pseudoconvexe, alors les domaines $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$ sont strictement pseudoconvexes et approximent $\Omega = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} \Omega_c$.

1.4 Fonctions q-sousharmoniques

Dans cette partie, nous allons introduire quelques définitions et propriétés sur les fonctions q-sousharmoniques. Pour plus de détails voir [3] et [5].

Définition 1.30. (Fonction q-sousharmonique au sens de [3])
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $1 \leq q \leq n$.
Une fonction $\psi : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ semi-continue supérieurement est q-sousharmonique si pour chaque sous espace W de $\mathbb{C}^n$ de dimension q, la restriction $\psi_{|W}$ est une fonction sousharmonique sur $W \cap \Omega$.

Remarque 1.10. Notons que les fonctions 1-sousharmoniques sont plurisousharmoniques et que les fonctions n-sousharmoniques sont sousharmoniques.

Remarque 1.11. Si $\psi \in C^2(\Omega)$ et $\lambda_1^\psi \leq ... \leq \lambda_n^\psi$ sont les valeurs propres de la hessienne complexe $\partial\bar{\partial}\psi$(c'est une (1,1)-forme différentielle), alors la q-sousharmonicité de ψ est équivalente à la condition

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^\psi \geqslant 0. \tag{2}$$

Si l'inégalité (2) est stricte, on dit que ψ est strictement q-sousharmonique.

Définition 1.31. (Fonction q-sousharmonique au sens de Ho [5])
Soit φ une fonction de classe C^2 définie sur un domaine $U \subset \mathbb{C}^n$. Pour chaque $q \geq 1$, on définit une matrice $\Phi^{(q)}(x)$ d'ordre $\dfrac{n!}{q!(n-q)!}$ associée à φ.
En fait les valeurs de la matrice sont les $\Phi_{I,J}$ où I et J sont des q-uplets croissants d'entiers entre 1 et n. On définit :

$$\Phi_{I,J}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in I} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \text{ si } I = J, \\ \displaystyle\varepsilon_{iK}^I \varepsilon_{jK}^J \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \text{ si } I =< iK >,\ J =< jK > \text{ et } i \neq j, \\ 0 \qquad\qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

où $< iK >$ est l'ordre croissant des indices de l'ensemble $\{i\} \cup K$, et ε_{iK}^I est le signe de la permutation de iK à I, qui est égale à 0 si $< iK > \neq I$.
On dit que φ est q-sousharmonique (resp. strictement q-sousharmonique) sur $U \subset \mathbb{C}^n$ si la matrice associée à $\Phi^{(q)}(x)$ est semi-définie positive (resp. définie positive) pour tout $x \in U$.

1.5 Domaines q-convexes

Nous définissons dans cette partie la notion de domaine q-convexe sous différentes formes. Nous utiliserons dans tout le manuscrite la définition au sens de [3].

Définition 1.32. (Domaine q-convexe [3])
Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit q-convexe s'il a une fonction d'exhaustion q-sousharmonique, c'est-à-dire s'il existe une fonction q-sousharmonique ψ sur Ω telle que pour tout $j \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\Omega_j = \{z \in \Omega : \psi(z) < j\}$ est relativement compact.

Les deux définitions suivantes sont tirées dans [4].

Définition 1.33. (Domaine q-convexe au sens de Androetti et Grauert)
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^2 et soit $z_0 \in b\Omega$.
Supposons que U est un voisinage ouvert de z_0, et soit $\rho \in C^2(U, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\Omega \cap U = \{z \in U : \rho(z) < 0\}$ et $d\rho \neq 0$ sur $b\Omega$.
Soit $q \geq 1$ un entier, on dit que Ω est q-convexe (resp. strictement q-convexe) en z_0 si la forme de Levi

$$L(\rho, z)(\zeta) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z) \zeta_i \overline{\zeta}_j; \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

admet au moins $(n-q)$ valeurs propres positives (resp. strictement positives) sur l'espace tangent holomorphe

$$T_z^{1,0} = \Big\{\zeta \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)\zeta_j = 0\Big\},$$

pour tout $z \in V \subset b\Omega$, où V est un voisinage ouvert de z_0 dans $\mathbb{C}^n$.
Ω est q-convexe s'il est q-convexe en tout point de $b\Omega$.

Définition 1.34. (Domaine q-convexe au sens de Henkin Leiterer)
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^2 et soit $z_0 \in b\Omega$.
Supposons que U est un voisinage ouvert de z_0, et soit $\rho \in C^2(U, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\Omega \cap U = \{z \in U : \rho(z) < 0\}$ et $d\rho \neq 0$ sur $b\Omega$. Soit $q \geq 1$ un entier, on dit que Ω est q-convexe (resp strictement q-convexe) en z_0 si la forme de Levi

$$L(\rho, z)(\zeta) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z)\zeta_i\overline{\zeta}_j; \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

admet au moins q valeurs propres positives (resp, strictement positives) sur l'espace tangent holomorphe

$$T_z^{1,0} = \Big\{\zeta \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)\zeta_j = 0\Big\},$$

pour tout $z \in V \subset b\Omega$, où V est un voisinage ouvert de z_0 dans $\mathbb{C}^n$.
Ω est q-convexe s'il est q-convexe en tout point de $b\Omega$.

Définition 1.35. *(*Domaine q-convexe au sens de Ho [5]*)*
Soient Ω un domaine à bord lisse de $\mathbb{C}^n$ et ρ une fonction définissante de Ω.
On dit que Ω est faiblement q-convexe si pour tout $x_0 \in b\Omega$, on a :

$$\sum_{k}{}' \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} u_{iK}\overline{u}_{jK} \geq 0 \quad \text{pour toute } (0,\ q)\text{-forme différentielle } u = \sum_{|K|=q}{}' u_K d\overline{z}_K$$
$$\text{telle que } \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_i} u_{iK} = 0 \text{ pour tout } |K| = q-1. \qquad (3)$$

1.6 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

Nous commençons cette partie par définir la notion de norme. Les résultats sont tirés de [1],[2] et [6].

Définition 1.36 (Norme)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle norme sur E l'application
$||.|| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $||\lambda x|| = |\lambda|||x|| \ \ \forall \ \ \lambda \in \mathbb{K} \ \ et \ \ x \in E,$

2. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \ \ \forall \ \ x, y \in E,$

3. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E.$

$(E, ||.||)$ est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.7. $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.37. Soit E un espace vectoriel. $(E, ||.||)$ est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E. Un tel espace est dit espace de Banach.

Définition 1.38 (Produit scalaire)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
Un produit scalaire sur E est une application

$$\begin{aligned} <,>: \ & E \times E \to \mathbb{R} \\ & (u, v) \to < u, v > \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés ci-dessous :
Soient $u, u', v \in E \ \ et \ \lambda \in \mathbb{K}$.

1. $< \lambda(u + u'), v >= \lambda < u, v > +\lambda < u', v >,$

2. $< u, v >=< v, u >,$

3. $< u, u >\geq 0 \quad et \quad < u, u >= 0 \quad si \quad u = 0.$

Exemple 1.8. $< u, \ v >:= \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx$ est un produit scalaire pour tout $u, v \in \Omega$.

Définition 1.39. Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach.
On dit que $(E, ||.||)$ est un espace de Hilbert si la norme est issue d'un produit scalaire .

Nous abordons à présent la notion de distribution.

Définition 1.40.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$D(V) = \Big\{ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)/supp\varphi \subset V \text{compact} \Big\}$$

où

$$supp\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n/\varphi(x) \neq 0\}}.$$

Une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(V)$ converge vers φ dans $D(V)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

i) Pour tout entier naturel j, les supports de φ_j et φ sont contenus dans un compact $K \subset V$,

ii) $D^\alpha \varphi_j(x)$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi(x)$ sur $K \subset V$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$; où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$,
$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha_{x_1} \cdots \partial^\alpha_{x_n}}$ est la dérivée d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Une forme linéaire T sur $D(V)$ est dite séquentiellement continue sur $D(V)$ si l'application $T : D(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$; si $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ dans $D(V)$, alors la suite des nombres complexes $T(\varphi_j) \longrightarrow T(\varphi)$.
Désignons par D_K l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K.

Définition 1.41. (Distribution)
Une distribution T sur V est une forme linéaire sur $D(V)$ dont la restriction à chaque D_K est continue.
De plus, si T est une distribution réelle, l'application $\varphi \mapsto -< T, \dfrac{d\varphi}{dx} >$ est une distribution.
Par définition, c'est la dérivée de T notée $\dfrac{dT}{dx}$.

Exemple 1.9. *1)* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. La fonction définie par : $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) =< \delta_a, \varphi >$$

est une distribution appelée mesure de Dirac.

2) Soit f une fonction localement intégrable[2] sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors l'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

définit une distribution sur Ω.

Nous abordons maintenant la notion d'espace L^p.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.42. (Les espaces L^p)

1) On note $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions f, mesurables presque partout, telles que :

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

Une norme dans L^p est définie par :

$$||f||_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } f \in L^p(\Omega).$$

2) Lorsque $p = \infty$, on définit l'espace L^∞ par :

$$L^\infty(\Omega) := \Big\{ f \quad \text{presque partout mesurable} : |f(x)| < \infty \Big\}.$$

et la norme dans L^∞ est *:*

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} := \inf \Big\{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C \quad \text{presque partout} \Big\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ muni de la norme $||f||_{L^p(\Omega)}$ est un espace de Banach.

Exemple 1.10. L'espace $L^2(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty \Big\}$ muni de la norme $||u|| =< u, u >^{\frac{1}{2}}$ qui provient du produit scalaire $< u,\ v >:= \int_\Omega u(x)v(x)dx$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.43. Soit E un espace de Banach de dual E'.

- On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge fortement vers $u \in E$ et on note $u_n \to u$ si :

$$||u_n - u|| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty.$$

2. Une fonction à valeur complexe sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact de Ω est intégrable au sens de Lebesgue.

- On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers $u \in E$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ si :
$$\forall\ f \in E', \quad f(u_n) :=< f,\ u_n >_{E',E} \rightharpoonup f(u).$$

Remarque 1.12. Si la suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers $u \in E$ alors u est appelée la limite faible de $(u_n)_n$.

Définition 1.44. Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans L^2 s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ telles que :

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx := -\int_\Omega w_i(x)\varphi(x)dx,\ \forall\ \varphi \in D(\Omega). \tag{4}$$

Chaque w_i est appelée la ième dérivée partielle faible de v et notée $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

Définition 1.45. On dit que $v \in L^2(\Omega)$ est m fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles d'ordre $m-1$ sont dérivables au sens faible.

On va à présent faire une brève introduction sur les espaces de Sobolev.

Définition 1.46.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un ouvert, on définit les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty,\ m \in \mathbb{N}$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall\ \alpha,\ |\alpha| \leq m \Big\}$$

où la dérivée $D^\alpha f$ est à prendre au sens faible. Les normes pour ces espaces sont données par :

$$||f||_{W^{m,p}}(\Omega) := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \parallel D^\alpha f \parallel^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < +\infty$$

et

$$||f||_{W^{m,\infty}}(\Omega) := \max_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)},$$

Ces normes font de $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{m,\infty}(\Omega)$ des espaces de Banach.

Remarque 1.13. Pour $p = 2$, on a :

$$W^{m,2} = H^m(\Omega) := \Big\{ v \in L^2(\Omega) / \forall\ \alpha :\ |\alpha| \leq m,\ D^\alpha v \in L^2(\Omega) \Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{H^m(\Omega)} := (< u, v >)^{\frac{1}{2}},$$

qui provient du produit scalaire

$$< u, v >:= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

est un espace de Hilbert.

Passons maintenant à la notion d'opérateur qui est une notion fondamentale dans ce document.

Définition 1.47. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Banach.
Un opérateur dans H est une application linéaire T définie sur un espace vectoriel $Dom(T) \subset H_1$ à valeurs dans H_2.
$Dom(T)$ est appelé domaine de l'opérateur.

Dans la suite, nous travaillerons sur un opérateur défini sur un espace de Hilbert.

Définition 1.48. On dit qu'un opérateur $(T; Dom(T))$ dans H est borné si $Dom(T) = H$ et $T : H \longmapsto H$ est continue.

Définition 1.49. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est appelée opérateur linéaire fermé si son graphe est fermé, c'est-à-dire

$$GrT := \Big\{(x,\ Tx),\quad x \in Dom(T)\Big\}$$

est fermé dans $H_1 \times H_2$.

Remarque 1.14. GrT est fermé si et seulement si pour tout $x_n \in Dom(T)$ tel que x_n converge vers x et Tx_n converge vers y, on a $Tx = y$ et $x \in Dom(T)$.

Définition 1.50. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur, on dit que T est à domaine dense si l'adhérence du domaine de définition de T notée $\overline{Dom(T)}$ est égale à H_1.

Définition 1.51. Soient H_1 , H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur. On appelle adjoint de T, l'opérateur $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ défini comme suit :

$$\forall\ u \in Dom(T),\ < Tu,\ v >_1 = < u,\ T^*v >_2 .$$

Si $H_1 = H_2$, on dit que T est auto-adjoint si

$$T = T^*.$$

Remarque 1.15. Soit $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur à domaine dense et fermé. Alors $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ est à domaine dense et fermé.

Lemme 1.1. Si $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur alors $T^{**} = (T^*)^* = T$.

Démonstration. Soient $u \in DomT$ et $v \in DomT^*$, on a :

$$\begin{aligned} < Tu,\ v >_2 &= < u,\ T^*v >_1; \\ &= \overline{< T^*v,\ u >_1}; \\ &= \overline{< v,\ T^{**}u >_2}; \\ &= < T^{**}u,\ v >_2; \end{aligned}$$

donc

$$Tu = T^{**}u.$$

Ainsi :

$$T = T^{**}.$$

□

On termine cette section par introduire l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann sans poids et à poids et quelques résultats liés à cet opérateur, ils seront d'une utilité cruciale dans la suite de nos travaux. Pour plus de détails sur cet opérateurs, voir [1].

1.6.1 L'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann

Dans cette partie, on va introduire l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann (cf [1]). Ainsi, le $\overline{\partial}$ défini sur les (p, q)-formes différentielles s'étend aux espaces $L^2(\Omega)$ au sens des distributions.

$$L^2_{p,q}(\Omega) = \{f \in C^\infty_{p,q}(\Omega) \mid \int_\Omega |f|^2 dm < +\infty\}.$$

On utilise $L^2_{p,q}(\Omega)$ pour désigner l'espace des (p, q)-formes différentielles à coefficients dans $L^2(\Omega)$. Si

$$f = \sum_{I,J}{}' f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

$$g = \sum_{I,J}{}' g_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

sont deux (p, q)-formes différentielles dans $L^2_{p,q}(\Omega)$, nous définissons le produit scalaire et la norme comme suit :

$$< f, g >= \sum_{I,J}{}' < f_{I,J}, g_{I,J} >, \quad |f|^2 =< f, f >= \sum_{I,J}{}' |f_{I,J}|^2$$

$$||f||^2 = \int_\Omega < f, f > dm = \sum_{I,J}{}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 dm.$$

Soit ϕ une fonction continue et positive sur Ω. On note $L^2_{p,q}(\Omega,\ \phi)$ l'espace vectoriel des formes différentielles f de bidegré $(p,\ q)$ qui s'écrit par :

$$f = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' f_{I,J} dz_I \wedge dz_J$$

où $f_{I,J}$ est une fonction mesurable telle que $\int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\phi} d\lambda < +\infty$ ($d\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$). Sur $L^2_{p,q}(\Omega,\ \phi)$, on définit un produit scalaire noté $< f,\ g >_\phi$ et défini par :

$$< f,\ g >_\phi = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \int_\Omega f_{I,J} \overline{g_{I,J}} e^{-\phi} d\lambda,$$

sa norme est définie par :

$$\|f\|^2_\phi = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 e^{-\phi} d\lambda.$$

Ainsi $L^2_{p,q}(\Omega,\ \phi)$ muni de cette norme est un espace de Hilbert.

Puisque $L^2_{p,q}(\Omega)$ (resp. $L^2_{p,q}(\Omega,\ \phi)$) est muni d'un produit scalaire on peut définir l'adjoint du $\overline{\partial}$ (resp. $\bar{\partial}_\phi$)

$$\bar{\partial} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega)$$

avec

$$Dom(\bar{\partial}) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) :\ \bar{\partial} f \in L^2_{p,q+1}(\Omega)\}$$

(resp.
$$\bar{\partial}_\phi : L^2_{p,q}(\Omega,\ \phi) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega,\ \phi)$$
avec
$$Dom(\bar{\partial}_\phi) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) :\ \bar{\partial}_\phi f \in L^2_{p,q-1}(\Omega)\})$$
,
c'est-à-dire que
$$< \bar{\partial}u,\ v >=< u,\ \bar{\partial}^* v >$$
(resp.
$$< \bar{\partial}_\phi u,\ v >_\phi =< u,\ \bar{\partial}^*_\phi v >_\phi),$$
$\forall\ u \in Dom(\bar{\partial})$ et $v \in Dom(\bar{\partial}^*)$ (resp. $\forall\ u \in Dom(\bar{\partial}_\phi)$ *et* $v \in Dom(\bar{\partial}^*_\phi)$).
Notons
$$\square_{(p,q)} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$
le laplacien complexe avec
$$Dom(\square_{(p,q)})) = \{f \in Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*) :\ \bar{\partial}f \in Dom(\bar{\partial}^*)\ et\ \bar{\partial}^* f \in Dom(\bar{\partial})\}$$
et
$$\square_{(p,q)\phi} = \bar{\partial}\bar{\partial}^*_\phi + \bar{\partial}^*_\phi\bar{\partial}$$
le laplacien complexe à poids.

Nous donnons à présent une proposition d'une grande importance pour le laplacien complexe.

Proposition 1.2. $\square_{(p,q)}$ est un opérateur linéaire, fermé, dense et auto-adjoint.

Démonstration. Soit $D^{p,q}(\Omega)$ l'ensemble des (p,q)-formes différentielles à support compact.
$\square_{(p,q)}$ est donc un opérateur linéaire.
On sait que :
$$D^{p,q}(\Omega) \subset Dom(\square_{(p,q)}) \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$
Le passage à l'adhérance nous donne les inclusions suivantes :
$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} \subset \overline{Dom(\square_{(p,q)})} \subset \overline{L^2_{p,q}(\Omega)}.$$
Or
$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} = L^2_{p,q}(\Omega) = \overline{L^2_{p,q}(\Omega)}.$$
Donc
$$L^2_{p,q}(\Omega) \subset \overline{Dom(\square_{(p,q)})} \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$
D'où
$$\overline{Dom(\square_{(p,q)})} = L^2_{p,q}(\Omega).$$
Ce qui montre que $\square_{(p,q)}$ est dense.
Montrons que $\square_{(p,q)}$ est fermé.
Soit $f_n \in Dom(\square_{(p,q)})$ telle que $f_n \to f$ avec $f \in Dom(\square_{(p,q)})$.
Montrons que $\square_{(p,q)} f_n \to \square_{(p,q)} f$:
$$\begin{aligned}
< \square_{(p,q)} f_n,\ f_n > &=< (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})f_n,\ f_n > \\
&=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* f_n + \bar{\partial}^*\bar{\partial} f_n,\ f_n > \\
&=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* f_n,\ f_n > + < \bar{\partial}^*\bar{\partial} f_n,\ f_n > \\
&=< \bar{\partial}^* f_n,\ \bar{\partial}^* f_n > + < \bar{\partial} f_n,\ \bar{\partial} f_n > \\
&= \|\bar{\partial}^* f_n\|^2 + \|\bar{\partial} f_n\|^2.
\end{aligned}$$

Puisque $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$ sont des opérateurs fermés, il existe $f \in Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$ telles que :

$$\bar{\partial} f_n \to \bar{\partial} f \ \text{ et } \ \bar{\partial}^* f_n \to \bar{\partial}^* f \text{ resp. dans } L^2_{p,q+1} \ \text{ et } \ L^2_{p,q-1}.$$

Il découle à nouveau du fait que $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$ sont des opérateurs fermés que

$$\bar{\partial}\bar{\partial}^* f_n \to \bar{\partial}\bar{\partial}^* f \ \text{ et } \ \bar{\partial}^*\bar{\partial} f_n \to \bar{\partial}^*\bar{\partial} f.$$

Nous avons donc prouvé que $\square_{(p,q)} f_n \to \square_{(p,q)} f$.
Donc $\square_{(p,q)}$ est un opérateur fermé.
Montrons que $\square_{(p,q)}$ est auto-adjoint.
Soient $u,\ v \in Dom(\square_{(p,q)})$, a-t-on $< \square_{(p,q)} u,\ v >=< u,\ \square_{(p,q)} v >$?

$$\begin{aligned}
\text{On a : } < \square_{(p,q)} u,\ v > &=< (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) u,\ v > \\
&=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* u + \bar{\partial}^*\bar{\partial} u,\ v > \\
&=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* u,\ v > + < \bar{\partial}^*\bar{\partial} u,\ v > \\
&=< \bar{\partial}^* u,\ \bar{\partial}^* v > + < \bar{\partial} u,\ \bar{\partial} v > \\
&=< u,\ \bar{\partial}\bar{\partial}^* v > + < u,\ \bar{\partial}^*\bar{\partial} v > \\
&=< u,\ (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) v > \\
&=< u,\ \square_{(p,q)} v > .
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 1.16. La proposition (1.2) reste valable si on remplace le laplacien $\square_{(p,q)}$ par $\square_{(p,q)}\phi$.

Définition 1.52. Le problème du $\bar{\partial}$ Neumann (resp du $\bar{\partial}$ Neumann à poids) consiste à chercher un inverse à $\square_{(p,q)}$ (resp. $\square_{(p,q)\phi}$), on l'appelle opérateur de Neumann noté

$$N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega)$$

(resp. opérateur de Neumann à poids noté

$$N_{p,q\phi} : L^2_{p,q}(\Omega, \phi) \to L^2_{p,q}(\Omega, \phi)).$$

C'est une méthode proposée par Donald SPENCER pour la résolution du $\bar{\partial}$.
L'opérateur $N_{p,q}$ a les propriétés suivantes :

1) $R(N_{p,q}) \subset Dom(\square_{(p,q)})$ où $Dom(\square_{(p,q)})$ désigne le domaine de $\square_{(p,q)}$ et $R(N_{p,q})$ l'image de $N_{p,q}$;

2) $\square_{(p,q)} N_{p,q} = N_{p,q} \square_{(p,q)} = I$ où I désigne l'application identité *;*

3) pour toute $f \in L^2_{p,q}(\Omega)$, $\ f = \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} f \oplus \bar{\partial}^*\bar{\partial} N_{p,q} f$ *;*

4) $\bar{\partial} N_{p,q} = N_{p,q+1}\bar{\partial}$, $\ \forall\ 1 \leq q \leq n-1$ sur $Dom(\bar{\partial})$ *;*

5) $\bar{\partial}^* N_{p,q} = N_{p,q-1}\bar{\partial}^*$, $\ \forall\ 2 \leq q \leq n$ sur $Dom(\bar{\partial}^*)$*.*

Remarque 1.17. L'opérateur $N_{p,q\phi}$ a des propriétés analogues à celles de l'opérateur $N_{p,q}$ énumérées ci-dessus.

2 La Résolution du $\bar{\partial}$ dans le cas d'un domaine q-convexe

2.1 Propriétés sur les fonctions q-sousharmoniques et domaines q-convexes

Nous commençons par rappeler quelques propriétés élémentaires des fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques, qui nous seront d'une grande importance pour la démonstration de certaines propriétés des fonctions q-sousharmoniques.

Proposition 2.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1) Si u est sousharmonique dans Ω, alors λu est sousharmonique dans Ω pour tout $\lambda > 0$.

2) Si $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fonctions sousharmoniques sur Ω telle que $u = \sup\limits_{\alpha \in A} u_\alpha$ soit finie et semi-continue supérieurement, alors u est sousharmonique sur Ω.

3) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions sousharmoniques sur Ω, alors $u = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n$ est sousharmonique.

Démonstration. La première et deuxième assertion se déduisent immédiatement de la Définition (1.20).
Pour la troisième assertion, observons que si $u = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n$, alors

$$\Big\{ z \in \Omega : u(z) < s \Big\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{ z \in \Omega : u_n(z) < s \Big\} \text{ pour tout } \ s \in \mathbb{R}.$$

C'est donc un ouvert et par conséquent u est semi-continue supérieurement.
Soient K un compact de Ω et h une fonction continue sur K, harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, telle que $h \geq u$ sur bK. Étant donné $\varepsilon > 0$, on pose :

$$E_j = \Big\{ z \in bK : u_j(z) \geq h(z) + \varepsilon \Big\},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Les ensembles E_j sont fermés sur bK, car les fonctions u_j, sont s.c.s. Ce sont donc des compacts. De plus, la suite $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante et d'intersection vide. Il existe donc un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $E_l = \varnothing$, ce qui implique que $u_l < h + \varepsilon$ sur bK. Puisque u_l est sousharmonique, d'après le principe du maximum, on a $u_l < h + \varepsilon$ sur K. D'où $u < h + \varepsilon$ sur K, car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Cela étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $u \leq h$ sur K. $\square$

On va donner la propriété de monotonie de la valeur moyenne d'une fonction sousharmonique. Pour la preuve (Voir [10]).

Proposition 2.2. Soient u une fonction sousharmonique, $a \in \Omega \subset \mathbb{C}$ et on pose $\delta(a) := \operatorname{dist}(a, b\Omega)$. Alors la valeur moyenne

$$r \mapsto M(a, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta \tag{5}$$

est croissante et continue sur $[0, \delta(a)[$; elle converge vers $u(a)$ lorsque $r \to 0$.

Corollaire 2.1. Si u est sousharmonique sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$, et $0 < r < \delta(a) = \mathrm{dist}(a, b\Omega)$, alors

$$u(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a,r)} u(z) dV(z)$$

où dV est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $a \in \Omega$,

$$u(a) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a,r)} u(z) dV(z).$$

En particulier, si u et v sont des fonctions sousharmoniques sur Ω, telles que $u \leq v$ presque partout sur Ω, alors $u \leq v$ partout sur Ω.

Lemme 2.1. *[10]* Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Si u est sousharmonique sur Ω et non identiquement à $-\infty$ dans une composante connexe de Ω, on a :

$$\int_\Omega u \Delta v d\lambda \geqslant 0, \quad \text{si } v \in C_0^2(\Omega) \text{ et } v \geq 0 \tag{6}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Si $0 < r < dist(supp\ v,\ b\Omega)$, en appliquant la formule de la sous-moyenne, on a pour tout $z \in supp\ v$,

$$2\pi u(z) \leq \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta. \tag{7}$$

En multipliant (7) par $\int_\Omega v d\lambda$ et en faisant les changements de variables $z + re^{i\theta} = \zeta$ sur le côté droit de (7) et $z = \zeta$ sur le côté gauche de (7) , on obtient :

$$2\pi \int_\Omega u(\zeta) v(\zeta) d\lambda(\zeta) \leq \int_\Omega \int_0^{2\pi} u(\zeta) v(\zeta - re^{i\theta}) d\theta d\lambda(\zeta). \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega \int_0^{2\pi} u(\zeta) v(\zeta - re^{i\theta}) d\theta d\lambda(\zeta) - 2\pi \int_\Omega u(\zeta) v(\zeta) d\lambda(\zeta) \\ 0 &\leq \int_\Omega u(\zeta) \left[\int_0^{2\pi} v(\zeta - re^{i\theta}) d\theta - 2\pi v(\zeta) \right] d\lambda(\zeta). \end{aligned} \tag{9}$$

Effectuons un développement de Taylor à l'ordre 2 de v au voisinage de ζ, on obtient :

$$\begin{aligned} v(\zeta - re^{i\theta}) = v(\zeta) &- \frac{\partial v}{\partial z}(\zeta) re^{i\theta} - \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}(\zeta) re^{-i\theta} \\ &+ r^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\zeta) e^{2i\theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}^2}(\zeta) e^{-2i\theta} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}}(\zeta) \right) + O(r^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Intégrons ensuite (10) par rapport à θ. On obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\zeta - re^{i\theta}) d\theta - v(\zeta) = 2r^2 \Delta v(\zeta) + O(r^2). \tag{11}$$

car $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial v}{\partial z}(\zeta) re^{i\theta} - \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}(\zeta) re^{-i\theta} + r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(\zeta) e^{2i\theta} + r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}^2}(\zeta) e^{-2i\theta} \right) d\theta = 0.$
Remplaçons (11) par son expression dans (9), on obtient :

$$0 \quad \leq \int_\Omega u(\zeta) 2r^2 \Delta v(\zeta) d\lambda(\zeta) + O(r^2) \ \text{ pour tout } \zeta. \tag{12}$$

En divisant par $2r^2$ et en calculant la limite quand $r \to 0$, on voit que (12) tend vers (6) pour tout ζ.
Donc :

$$\int_\Omega u\Delta v d\lambda \geqslant 0, \quad \text{si } v \in_\Omega C_0^2(\Omega) \text{ et } v \geq 0. \tag{13}$$

□

Proposition 2.3. *(cf [6])* Soit u une fonction plurisousharmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, non identiquement égale à $-\infty$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ [3] une fonction positive, identiquement nulle sur l'ensemble $\{|z| > 1\}$ et d'intégrale 1. Pour $\varepsilon > 0$, posons :

$$u_\epsilon(z) := \int u(z - \epsilon\zeta)\varphi(\zeta)d\lambda(\zeta). \tag{14}$$

Alors u_ε est bien définie, plurisousharmonique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$$\left\{ z \in \Omega : \ dist(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > \varepsilon \right\}$$

et $u_\varepsilon \searrow u$ quand $\varepsilon \searrow 0$.
De plus, toute limite d'une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques est plurisousharmonique.

Démonstration. Le fait que u_ε décroît lorsque $\varepsilon \searrow 0$ a été prouvé pour le cas $n = 1$ dans la preuve du Théorème 1.6.11 dans [6]. L'itération de ce résultat montre que u_ε décroît aussi si $n > 1$. Et à partir du cas $n = 1$, on trouve aussi immédiatement que $u \leq u_\varepsilon$. Puisque :

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon \leq u,$$

compte tenu de la semi-continuité supérieure de u, nous concluons que $u_\varepsilon \searrow u$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$.
Par définition $u_\varepsilon \in C^\infty$ et d'après le Lemme (2.1) u_ε est plurisousharmonique.
D'après la Proposition (2.1), la limite d'une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques est plurisousharmonique. □

Nous donnons la proposition suivante qui nous sera d'une grande importance.

Proposition 2.4. *(cf [6])* Soient Ω un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, K un compact de Ω et ω un voisinage ouvert de $\hat{K}_\Omega^p$. Alors il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que :

1) u est strictement plurisousharmonique ;
2) $u < 0$ sur K et $u > 0$ dans $\Omega \setminus \omega$;
3) pour tout réel c, l'ensemble $\{ z \in \Omega : \ u(z) < c\}$ soit relativement compact dans Ω.

Démonstration. Construisons tout d'abord une fonction plurisousharmonique continue v satisfaisant 2) et 3). Soit u_0 une fonction plurisousharmonique continue dans Ω telle que, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $\Omega_{u_0}^c = \{z \in \Omega : \ u_0(z) < c\}$ soit relativement compact dans Ω. Quitte à ajouter une constante à u_0, on peut supposer $u_0(z) < 0$ sur K. Considérons les compacts

$$K' = \left\{ z \in \Omega : \ u_0(z) \leq 2 \right\} \quad \text{et} \quad L = \left\{ z \in \Omega \setminus \omega : \ u_0 \leq 0 \right\}.$$

Puisque ω est un voisinage ouvert de $\hat{K}_\Omega^p$, pour tout $z \in L$, il existe une fonction $w \in PHS(\Omega)$ telle que $w(z) > 0$ et $w < 0$ sur K. D'après la Proposition (2.3), on obtient une

3. c'est l'ensemble des fonctions à support compact dans $\mathbb{C}^n$

fonction plurisousharmonique continue w_1 au voisinage de K', négative sur K et positive dans un voisinage de z. Comme L est compact, on en déduit l'existence d'une fonction plurisousharmonique continue w_2 dans un voisinage de K' tel que $w_2 < 0$ sur K et positive sur un voisinage de L. Soit C le maximum de w_2 sur K', pour tout $z \in \Omega$, on pose :

$$v(z) = \begin{cases} \max\{w_2(z), Cu_0(z)\} & \text{si } u_0(z) < 2, \\ \\ Cu_0(z) & \text{si } u_0(z) > 1. \end{cases}$$

En fait, en des points $z \in \Omega$ tels que $1 < u_0(z) < 2$ s'accordent, puisque sur K', on a : $w_2 \leq C$ et $1 < u_0$ alors $\max\{w_2(z), Cu_0(z)\} = Cu_0(z)$, on obtient une fonction plurisousharmonique continue dans Ω qui satisfait 2) et 3) de la Proposition (2.4).
Pour tout entier j, soit $\Omega_j = \{\ z \in \Omega :\ v(z) < j\} \Subset \Omega$, avec les notations de la Proposition (2.3), posons

$$v_j(z) := \int_{\Omega_{j+1}} v(\zeta)\varphi(\frac{z-\zeta}{\epsilon})\varepsilon^{-2n} dV(\zeta) + \varepsilon|z|^2, \tag{15}$$

où ε est choisi suffisamment petit de sorte que v_j soit $\mathcal{C}^\infty$, $v_j > v$ et strictement plurisousharmonique dans un voisinage de $\bar{\Omega}_j$. En choisissant ε assez petit, on a :

$$v_0 < 0 \quad \text{et} \quad v_1 < 0 \quad \text{sur} \quad K,$$

et en choisissant tous les $\varepsilon > 0$, pour $j \geq 1$, assez petits, on a

$$v_j < v + 1 \quad \text{dans} \quad \Omega_j.$$

On considère maintenant une fonction convexe $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\chi'(t) > 0$ pour $t > 0$. On a :

$$\Omega_{j-1} := \Big\{z \in \Omega : v(z) < j - 1\Big\}$$

$$\Omega_{j-2} := \{z \in \Omega : v(z) < j - 2\}$$

$$\overline{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1} := \Big\{z \in \Omega : j - 1 \leq v(z) \leq j\Big\}.$$

$$\text{On a :} \qquad v_j > v,$$

$$v_j + 1 - j > v + 1 - j \geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1}.$$

Donc

$$v_j + 1 - j > 0 \text{ dans } \overline{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1}.$$

Ainsi la fonction $\chi(v_j + 1 - j)$ est strictement plurisousharmonique au voisinage de $\bar{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1}$, et on peut choisir des nombres positifs $a_1, a_2, \cdots$ telle que la fonction

$$u_m = v_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \chi(v_j + 1 - j)$$

soit supérieure à v et strictement plurisousharmonique dans $\bar{\Omega}_m$.
Comme $u_m = u_l$ dans Ω_j si $l, m > j$, donc $u = \lim_{m \to +\infty} u_m$ est une fonction strictement plurisousharmonique de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω, et comme $u = v_0 < 0$ sur K et $u > v$, elle satisfait les conditions de la Proposition (2.4). $\square$

Nous abordons à présent quelques propriétés élémentaires des fonctions q-sousharmoniques, que nous avons introduites dans la Définition (1.30). Les résultats sont tirés de [3].

Proposition 2.5. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $1 \leq q \leq n$.

1) Si $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fonctions q-sousharmoniques sur Ω telle que $u = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha$ soit finie et semi-continue supérieurement, alors u est q-sousharmonique sur Ω.

2) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions q-sousharmoniques sur Ω, alors $u = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n$ est q-sousharmonique.

La preuve est analogue à celle de la Proposition (2.1).

Notation :

Soient $S_r^{2q-1}(z)$ et $B_r^{2q}(z)$, la sphère et la boule de centre z et de rayon r respectivement dans un q-espace complexe. Nous désignons par $|S_r^{2q-1}(z)|$ et $|B_r^{2q}(z)|$ leur mesure euclidienne.

Le résultat suivant découle immédiatement de l'énoncé correspondant pour fonctions sousharmoniques ([[14], Theorem 1.4.2]).

Proposition 2.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Pour une fonction ψ semi-continue supérieurement sur Ω, nous avons les équivalences suivantes :

(1) ψ est q-sousharmonique sur Ω.

(2) Pour tout q-espace complexe W dans $\mathbb{C}^n$ et toute sphère $S_r^{2q-1}(z) \subset\subset W \cap \Omega$,

$$\psi(z) \leq \frac{1}{\mid S_r^{2q-1}(z) \mid} \int_{S_r^{2q-1}(z)} \psi(\zeta) dS(\zeta). \tag{16}$$

(3) Pour tout q-espace complexe W dans $\mathbb{C}^n$ et toute boule $B_r^{2q}(z) \subset\subset W \cap \Omega$,

$$\psi(z) \leq \frac{1}{\mid B_r^{2q}(z) \mid} \int_{B_r^{2q}(z)} \psi(\zeta) dV(\zeta). \tag{17}$$

Remarque 2.1. Notons que les intégrales (16) et (17) sont bien définies en raison de la semi-continuité de ψ.

Soit Δ^W le laplacien complexe sur un q-espace complexe W. Si ψ n'est pas de classe C^2, l'action de Δ^W sur ψ s'étend au sens faible des distributions.

Lemme 2.2. Soit ψ une fonction q-sousharmonique sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Alors

$$\Delta^W \psi \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \cap W \quad \text{pour tout} \quad \text{q-espace complexe } W. \tag{18}$$

Inversement, si $\psi \in C^2(\Omega)$ telle que (18) soit vérifiée, alors ψ est q-sousharmonique dans Ω.

Démonstration. Pour la première affirmation, soit W un q-espace complexe et $v \in C^2(\Omega \cap W)$ une fonction à support compact telle que $v \geqslant 0$. Nous voulons prouver que

$$\int_{(\Omega \cap W)} \psi \Delta^W v d\lambda \geqslant 0, \tag{19}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soient $0 < r < dist(supp\ v,\ \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ et $z \in supp\ v$. Par (16), nous avons :

$$\psi(z) \leq \frac{1}{|S_1^{2q-1}(0)|} \int_{S_1^{2q-1}(0)} \psi(z + r\zeta) dS(\zeta). \tag{20}$$

En multipliant par v et en intégrant par rapport à z, on obtient :

$$\int_{\Omega\cap W}\psi(z)v(z)d\lambda(z)\leq\frac{1}{|S_1^{2q-1}(0)|}\int_{\Omega\cap W}\int_{S_1^{2q-1}(0)}\psi(z+r\zeta)dS(\zeta)v(z)d\lambda(z). \tag{21}$$

En effectuant le changement de variable $z'=z+r\zeta$ sur le côté droit de (21), on obtient :

$$\int_{\Omega\cap W}\psi(z)v(z)d\lambda(z)\leq\frac{1}{|S_1^{2q-1}(0)|}\int_{\Omega\cap W}\int_{S_1^{2q-1}(0)}v(z'-r\zeta)dS(\zeta)\psi(z')d\lambda(z'). \tag{22}$$

Puisque (22) est vraie pour tout z, en particulier pour $z=z'$, on a :

$$0\leq\frac{1}{|S_1^{2q-1}(0)|}\int_{\Omega\cap W}\int_{S_1^{2q-1}(0)}v(z'-r\zeta)dS(\zeta)\psi(z')d\lambda(z')-\int_{\Omega\cap W}\psi(z')v(z')d\lambda(z'). \tag{23}$$

Donc (23) implique :

$$0\leq\frac{1}{|S_1^{2q-1}(0)|}\int_{\Omega\cap W}\left(\int_{S_1^{2q-1}(0)}\left(v(z'-r\zeta)-v(z')\right)dS(\zeta)\right)\psi(z')d\lambda(z'). \tag{24}$$

Effectuons un développement de Taylor à l'ordre 2 de $v(\zeta)$ en z' comme dans la preuve du Lemme (2.1). On obtient :

$$\frac{1}{|S_1^{2q-1}(0)|}\int_{S_1^{2q-1}(0)}\left(v(z'-r\zeta)-v(z')\right)dS(\zeta)\quad=2r^2\Delta^W v(z')+O(r^2). \tag{25}$$

Remplaçons (25) par son expression dans (24). On obtient :

$$0\leq\int_{\Omega\cap W}\psi(z')2r^2\Delta^W v(z')d\lambda(z')+0(r^2)\quad\text{pour}\quad\text{tout}\quad z'. \tag{26}$$

$$0\leq\int_{\Omega\cap W}\psi(z)2r^2\Delta^W v(z)d\lambda(z)+0(r^2). \tag{27}$$

En divisant par $2r^2$ et en calculant la limite quand $r\to 0$, on obtient :

$$0\leq\int_{\Omega\cap W}\psi(z)\Delta^W v(z)d\lambda(z). \tag{28}$$

D'où

$$0\leq\int_{\Omega\cap W}\psi\Delta^W v d\lambda. \tag{29}$$

Inversement, supposons que (18) est vraie et que W est un q-espace complexe. Alors, en désignant par $\psi|_W$ la restriction de ψ à W, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{|S_r^{2q-1}(z)|}\int_{S_r^{2q-1}(z)}\psi|_W(\zeta)dS(\zeta)\right)&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{|S_1^{2q-1}(z)|}\int_{S_1^{2q-1}(z)}\psi(r\zeta)dS(\zeta)\right)\\&=\frac{1}{|S_1^{2q-1}(z)|}\int_{S_1^{2q-1}(z)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\psi(r\zeta)\right)dS(\zeta)\\&=\frac{r}{|S_1^{2q-1}(z)|}\int_{S_1^{2q-1}(z)}\left(\nabla\psi|_W(\zeta).\zeta\right)dS(\zeta)\\&=\frac{r}{|S_1^{2q-1}(z)|}\int_{\mathbb{B}_1^{2q}(z)}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla\psi|_W(\zeta)).\zeta+\nabla\psi|_W(\zeta)\right)dV(\zeta)\\&=\frac{r}{|S_1^{2q-1}(z)|}\int_{\mathbb{B}_1^{2q}(z)}\Delta^W\psi(r\zeta)dV(\zeta)\\&\geq 0,\end{aligned} \tag{30}$$

L'inégalité (30) implique que la fonction

$$M(r) := \frac{1}{|S_r^{2q-1}|} \int_{S_r^{2q-1}} \psi|_W(\zeta) dS(\zeta) \tag{31}$$

est croissante pour $r \geq 0$. Notons que l'inégalité $M(0) \leq M(r)$ pour $r \geq 0$ correspond à la propriété de la sous-moyenne (16). D'après la Proposition (2.6), ψ est q-sousharmonique. $\square$

Notation :
Considérons

$$\Omega_\varepsilon := \Big\{ z \in \Omega : \delta(z) > \varepsilon \Big\}$$

et $\rho = \rho(|z|)$ une fonction lisse à support compact telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{C}^n} \rho dV = 1$.

On a le résultat suivant qui nous sera d'une grande importance pour la preuve de notre résultat principal de cette partie :

Proposition 2.7. Soit ψ une fonction semi-continue supérieurement sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ telle que $\Delta^W \psi \geq 0$ sur $\Omega \cap W$ pour tout q-espace complexe. Pour $\varepsilon > 0$,

$$\psi_\varepsilon(z) := \int_{\mathbb{C}^n} \psi(z - \varepsilon\zeta)\rho(|\zeta|) dV(\zeta), \qquad z \in \Omega_\varepsilon. \tag{32}$$

Alors ψ_ε est q-sousharmonique sur Ω_ε pour tout $\varepsilon > 0$. De plus $\psi_\varepsilon \searrow \psi$. En particulier, ψ est q-sousharmonique sur Ω.

Démonstration. Soit W un q-espace complexe. On peut supposer en coordonnées
$z = (z', z'')$, que W est défini par $z'' = 0$. Par conséquent, nous notons Δ^W par $\Delta_{z'}$. Maintenant après changement de variables,
$z = (z', z'')$, $\zeta = (\zeta', \zeta'')$ et $z - \varepsilon\zeta = (z', z'') - \varepsilon(\zeta', \zeta'') = (z' - \varepsilon\zeta', z'' - \varepsilon\zeta'')$,
posons :

$$\eta' = z' - \varepsilon\zeta' \ \text{ et } \ \eta'' = z'' - \varepsilon\zeta'', \tag{33}$$

donc

$$\zeta' = \frac{z' - \eta'}{\varepsilon} \ \text{ et } \ \zeta'' = \frac{z'' - \eta''}{\varepsilon}, \tag{34}$$

$dV(\zeta) = (dV(\eta'), dV(\eta''))$ et on applique $\Delta_{z'}$ à $\psi_\varepsilon(z)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_{z'}\psi_\varepsilon(z) &= \Delta_{z'} \left(\int_{W^\perp} dV(\eta'') \int_W dV(\eta')\psi(\zeta', \zeta'')\rho\left(\frac{z' - \eta'}{\varepsilon}, \frac{z'' - \eta''}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= \left(\int_{W^\perp} dV(\eta'') \int_W dV(\eta')\psi(\zeta', \zeta'')\Delta_{z'}\rho\left(\frac{z' - \eta'}{\varepsilon}, \frac{z'' - \eta''}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Alors $\Delta_{z'}\psi_\varepsilon(z) \geqslant 0$ par hypothèse sur $\Omega_\varepsilon \cap W$. D'après le Lemme (2.2), ψ_ε est q-sousharmonique sur Ω_ε pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, chaque ψ_ε est également n-sousharmonique (c'est-à-dire sousharmonique) et par conséquent $(\psi_\varepsilon)_\delta$ est monotone. En prenant la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient que ψ_ε lui même est monotone. Par la semi-continuité supérieure de ψ, nous avons $\limsup \psi_\varepsilon \leq \psi$. D'où $\psi_\varepsilon \searrow \psi$. D'après la Proposition (2.5), ψ est q-sousharmonique sur Ω. $\square$

En combinant la Proposition (2.7) et le Lemme (2.2), nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2.2. Pour une fonction semi-continue supérieurement ψ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$,
ψ est q-sousharmonique sur Ω si et seulement si $\Delta^W \psi \geq 0$ sur $\Omega \cap W$ pour tout q-espace complexe W.

Passons à présent à la preuve du résultat principal de cette sous partie.

Démonstration. du Théorème (0.1)
Posons $\Omega_j := \Big\{z \in \Omega : \psi(z) < j\Big\}$ et pour $\varepsilon > 0$ très petit,

$$\psi_j(z) := \int_{\Omega_{j+1}} \psi(\zeta)\rho\left(\frac{z-\zeta}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-2n} dV(\zeta) + \varepsilon|z|^2, \qquad j = 0, 1, ... \tag{36}$$

Chaque fonction ψ_j est lisse sur Ω_j. De plus, pour un choix convenable de ε (dépendant de j), nous pouvons appliquer la Proposition (2.7) pour obtenir $\psi_j > \psi$ et ψ_j est strictement q-sousharmonique sur $\overline{\Omega}_j$. On a par semi-continuité

$$\psi_j \leq \psi + 1 \qquad \text{sur} \qquad \overline{\Omega}_j, \tag{37}$$

avec

$$\overline{\Omega}_j := \Big\{z \in \Omega : \psi(z) \leq j\Big\}.$$

Considérons maintenant une fonction convexe réelle $\chi(t),\ t \in \mathbb{R},$ telle que $\chi \equiv 0$ pour $t < 0$ et $\chi'(t) > 0$ pour $t > 0$. On a :

$$\Omega_{j-1} := \Big\{z \in \Omega : \psi(z) < j - 1\Big\}$$
$$\Omega_{j-2} := \Big\{z \in \Omega : \psi(z) < j - 2\Big\}$$
$$\overline{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1} := \Big\{z \in \Omega : j - 1 \leq \psi(z) \leq j\Big\}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \qquad & \psi_j \leq \psi + 1 \\ & \psi_j + 1 - j \leq \psi + 2 - j < 0 \quad \text{dans} \ \ \Omega_{j-2}, \\ & \psi_j + 1 - j < 0 \ \ \text{dans} \ \ \Omega_{j-2}. \\ \text{Donc} \qquad & \chi(\psi_j + 1 - j) \equiv 0 \qquad \text{dans} \ \ \Omega_{j-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \qquad & \psi_j > \psi \\ & \psi_j + 1 - j > \psi + 1 - j \geq 0 \ \ \text{dans} \ \ \overline{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1}, \\ & \psi_j + 1 - j > 0 \ \ \text{dans} \ \ \overline{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1}. \end{aligned}$$

Donc $\chi(\psi_j + 1 - j)$ est strictement q-sousharmonique dans $\overline{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1}$. On peut donc choisir successivement des nombres positifs $a_j \in \mathbb{R}$ telle que.

$$\tilde{\psi}_m := \psi_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \chi(\psi_j + 1 - j). \tag{38}$$

D'après la Proposition (2.7), on a $\tilde{\psi}_m > \psi$ et $\tilde{\psi}_m$ est q-sousharmonique sur $\overline{\Omega}_m$.
Puisque $\tilde{\psi}_m = \tilde{\psi}_l$ sur Ω_j pour $m,\ l > j$, alors la limite $\tilde{\psi} := \lim \tilde{\psi}_m$ est bien définie et satisfait

$$\begin{cases} \tilde{\psi} > \psi, \\ \\ \tilde{\psi} \text{ est strictement q-sousharmonique.} \end{cases} \tag{39}$$

□

2.2 Démonstration du Théorème (0.2)

Nous donnons dans cette partie une série de lemme qui nous facilitera la preuve du résultat principal de cette section et on va terminer cette section par un exemple de domaine q-convexe. Les résultats sont tirés de [3] et de [14] .
Commençons par la définition suivante :

Définition 2.1. *cf [14]* Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné.
On dit que $M = b\Omega$ est q-pseudoconvexe, s'il existe un recouvrement d'ouverts du bord et pour chaque ouvert, il existe un fibré $\nu \subset T^{1,0}M$ lisse de classe C^2, de rang $q_0 \leq q$, tel que :

$$\sum_{j=1}^{q+1} \lambda_j(z) - \sum_{j=1}^{q_0} r_{jj}(z) \geq 0. \tag{40}$$

Avec $\lambda_1(z) \leq \lambda_2(z) \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}(z)$ qui sont les valeurs propres de la matrice $(r_{ij})_{ij=1\cdots n-1}$ de la forme de levi L_M. L'indice q_0 peut varier sur différents ouverts.

Lemme 2.3. *[14]* Soit Ω un domaine q-pseudoconvexe tel qu'on ait

$$\sum_{|K|=q}^{\prime} \sum_{ij} r_{ij} u_{iK} \bar{u}_{jK} - \sum_{|K|=q}^{\prime} \sum_{j \leq q_0} r_{jj} |u_{jK}|^2 \geq 0$$

pour toute forme différentielle u de bidegré $(0,\ q+1)$. Alors pour $\varphi_t := (t + C) \mid z \mid^2$, $k \geq q+1$ et pour tout $u \in C^{\infty}_{0,k}(\bar{\Omega}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$, on a :

$$t||u||^2_{H^0_\varphi} \leqslant ||\bar{\partial} u||^2_{H^0_\varphi} + ||\bar{\partial}^*_\varphi u||^2_{H^0_\varphi} \qquad \text{si } k \geq q+1. \tag{41}$$

Avec $||u||^2_{H^0_\varphi} = \displaystyle\sum_{|J|=k}^{\prime} \int_\Omega e^{-\varphi} |u_J|^2 dV$.

Démonstration. On choisit $q_0 \leq q$ comme dans la Définition (2.1), on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|K|=k-1}^{\prime} \sum_{ij} r_{ij} u_{iK} \bar{u}_{jK} - \sum_{|J|=k}^{\prime} \sum_{j \leq q_0} r_{jj} |u_J|^2 \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{|K|=k-1}^{\prime} \sum_{ij} \varphi_{ij} u_{iK} \bar{u}_{jK} - \sum_{|J|=k}^{\prime} \sum_{j \leq q_0} \varphi_{jj} |u_J|^2 \geq (k - q_0)(t + C)|u|^2. \end{cases} \tag{42}$$

avec $(k - q_0) \geq 1$. D'après la formule de Hörmander, Kohn et Morrey dans [14], on a : $||\bar{\partial} u||^2_{H^0_\varphi} + ||\bar{\partial}^* u||^2_{H^0_\varphi} + C||u||^2_{H^0_\varphi}$

$$\begin{aligned} &\geqslant \sum_{|K|=k-1}^{\prime} \sum_{ij} \int_\Omega e^{-\varphi} \varphi_{ij} u_{iK} \bar{u}_{jK} dV - \sum_{|J|=k}^{\prime} \sum_{j \leqslant q_0} \int_\Omega e^{-\varphi} \varphi_{jj} |u_J|^2 dV \\ &+ \sum_{|K|=k-1}^{\prime} \sum_{ij} \int_{\partial\Omega} e^{-\varphi} r_{ij} u_{iK} \bar{u}_{jK} dS - \sum_{|J|=k}^{\prime} \sum_{j \leqslant q_0} \int_{\partial\Omega} e^{-\varphi} r_{jj} |u_J|^2 dS \\ &+ (1 - \varepsilon) \left(\sum_{|J|=k}^{\prime} \sum_{j \leqslant q_0} ||\delta_{w_j} u_J||^2_{H^0_\varphi} + \sum_{|J|=k}^{\prime} \sum_{j \geq q_0+1} ||\partial_{\bar{w}_j} u_J||^2_{H^0_\varphi} \right), \end{aligned} \tag{43}$$

avec $C>0$ et $\epsilon \leq 1$.
Remplaçons (42) par son expression dans (43), on obtient :
$||\bar{\partial}u||^2_{H^0_\varphi} + ||\bar{\partial}^* u||^2_{H^0_\varphi} + C||u||^2_{H^0_\varphi}$

$$\begin{aligned} &\geqslant \int_\Omega e^{-\varphi}(t+C)|u|^2 dV \\ &+ (1-\varepsilon)\left(\sum_{|J|=k}{}' \sum_{j\leqslant q_0} ||\delta_{w_j} u_J||^2_{H^0_\varphi} + \sum_{|J|=k}{}' \sum_{j\geq q_0+1} ||\partial_{\bar{w}_j} u_J||^2_{H^0_\varphi} \right), \end{aligned} \tag{44}$$

on a :

$$||\bar{\partial}u||^2_{H^0_\varphi} + ||\bar{\partial}^* u||^2_{H^0_\varphi} + C||u||^2_{H^0_\varphi} \geqslant \int_\Omega e^{-\varphi}(t+C)|u|^2 dV \tag{45}$$

car

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{|J|=k}{}' \sum_{j\leqslant q_0} ||\delta_{w_j} u_J||^2_{H^0_\varphi} + \sum_{|J|=k}{}' \sum_{j\geq q_0+1} ||\partial_{\bar{w}_j} u_J||^2_{H^0_\varphi} \right) \geq 0 \tag{46}$$

or

$$\begin{aligned} ||\bar{\partial}u||^2_{H^0_\varphi} + ||\bar{\partial}^* u||^2_{H^0_\varphi} + C||u||^2_{H^0_\varphi} &\geqslant \int_\Omega e^{-\varphi}(t+C)|u|^2 dV \\ &= t\int_\Omega e^{-\varphi}|u|^2 dV + C\int_\Omega e^{-\varphi}|u|^2 dV \\ &= t\sum_{|J|=k}{}' \int_\Omega e^{-\varphi}|u_J|^2 dV + C\sum_{|J|=k}{}' \int_\Omega e^{-\varphi}|u_J|^2 dV \\ &= t||u||^2_{H^0_\varphi} + C||u||^2_{H^0_\varphi} \end{aligned}$$

donc (45) est égale à

$$||\bar{\partial}u||^2_{H^0_\varphi} + ||\bar{\partial}^* u||^2_{H^0_\varphi} + C||u||^2_{H^0_\varphi} \geqslant t||u||^2_{H^0_\varphi} + C||u||^2_{H^0_\varphi}. \tag{47}$$

D'où

$$t||u||^2_{H^0_\varphi} \leq ||\bar{\partial}u||^2_{H^0_\varphi} + ||\bar{\partial}^* u||^2_{H^0_\varphi} \qquad \text{si } k \geq q+1.$$

□

On va énoncer un lemme similaire au lemme précédent :

Lemme 2.4. *[14]* Soit Ω un domaine q-pseudoconvexe tel qu'on ait

$$\sum_{|K|=q}{}' \sum_{ij} r_{ij} u_{iK} \bar{u}_{jK} - \sum_{|K|=q}{}' \sum_{j\leq q_0} r_{jj}|u_{jK}|^2 \geq 0$$

et pour toute forme différentielle u de bidegré $(0,\ q+1)$. Alors pour tout s, pour $t=t_s$ convenable, $k\geq q+1$ et pour tout $u \in C^\infty_{0,k}(\bar{\Omega}) \cap Dom(\bar{\partial}^*_t)$, on a :

$$||u||^2_{H^s} \lesssim ||\bar{\partial}u||^2_{H^s} + ||\bar{\partial}^*_t u||^2_{H^s} \qquad \text{si } k \geq q+1. \tag{48}$$

où $\lesssim = \leq$ à une constante positif près.

Pour la preuve (voir [14]).

Lemme 2.5. *[14]* Soit Ω un domaine q-pseudoconvexe tel qu'on ait

$$\sum_{|K|=q}^{\prime}\sum_{ij} r_{ij}u_{iK}\bar{u}_{jK} - \sum_{|K|=q}^{\prime}\sum_{j\leq q_0} r_{jj}|u_{jK}|^2 \geq 0$$

pour toute forme différentielle u de bidegré $(0,\ q+1)$. Alors si $k \geq q+1$, pour tout $f \in H^s(\Omega)^k = W^{s,2}_{(0,k)}(\Omega)$ avec $\bar{\partial} f = 0$, il existe $u = u_s$ dans $H^s(\Omega)^{k-1}$ telles que :

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f, \\ \\ ||u||_{H^s} \lesssim ||f||_{H^s}. \end{cases}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \Box_t &= \bar{\partial}\bar{\partial}_t^* + \bar{\partial}_t^*\bar{\partial} \\ \Box_t N_t f &= \bar{\partial}\bar{\partial}_t^* N_t f + \bar{\partial}_t^*\bar{\partial} N_t f \\ \bar{\partial}\bar{\partial}_t^* N_t f &= \Box_t N_t f - \bar{\partial}_t^*\bar{\partial} N_t f \\ \bar{\partial}\bar{\partial}_t^* N_t f &= \Box_t N_t f - \bar{\partial}_t^* N_t \bar{\partial} f \end{aligned}$$

or $\Box_t N_t = I$ et $\bar{\partial} f = 0$.
Ainsi

$$\bar{\partial}\bar{\partial}_t^* N_t f = f.$$

Posons

$$u = \bar{\partial}_t^* N_t f.$$

Donc

$$\bar{\partial} u = f.$$

Remplaçons u par son expression dans la partie droite de (48) on a :

$$\begin{aligned} ||u||^2_{H^s} &\lesssim ||\bar{\partial}\bar{\partial}_t^* N_t f||^2_{H^s} + ||\bar{\partial}_t^*\bar{\partial}_t^* N_t f||^2_{H^s} \\ ||u||^2_{H^s} &\lesssim ||\bar{\partial}\bar{\partial}_t^* N_t f||^2_{H^s} = ||\Box_t N_t f - \bar{\partial}_t^* N_t \bar{\partial} f||^2_{H^s} \\ ||u||^2_{H^s} &\lesssim ||f||^2_{H^s} \\ ||u||_{H^s} &\lesssim ||f||_{H^s}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2. Dans [13] S. Pinton et G. Zampieri ont montré que si Ω est borné, réel analytique et q-convexe, alors la solution canonique $u = \bar{\partial}^* N f$ de $\bar{\partial} u = f$ pour $f \in C^\infty_{p,k}(\bar{\Omega})$ appartient à $C^\infty_{p,k-1}(\bar{\Omega})$.

Passons à présent à la preuve du résultat principal de cette sous partie.

Démonstration. du Théorème (0.2)
Soit ψ une fonction strictement q-sousharmonique, c'est équivalent à dire que

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^{\psi} > 0$$

où $\lambda_1^\psi \leq \cdots \leq \lambda_n^\psi$ les valeurs propres de la hessienne complexe noté $\partial\bar{\partial}\psi$ et η une fonction réelle convexe croissante telle que $\eta(t) = 0$, si $t < 0$. On a :

$$\begin{cases} f \in L^2_{p,k}(\Omega,\ \eta(\psi)), \\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^{\eta(\psi)}(z) \geq 1 + C(z), \end{cases}$$

où $C(z)$ est la borne supérieure de la norme C^2 de ψ.
D'après le Lemme (2.3), nous avons l'estimation suivante :

$$||u||^2_{L^2_{p,k-1}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} \lesssim ||\bar{\partial}u||^2_{L^2_{p,k}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} + ||\bar{\partial}^*_{\eta(\psi)}u||^2_{L^2_{p,k-2}(\Omega_j,\ \eta(\psi))}.$$

Avec Ω_j des domaines q-pseudoconvexe qui approximent Ω.
D'après le Lemme (2.5), il existe un $u_j \in L^2_{p;k-1}(\Omega_j,\ \eta(\psi))$ telle que $\bar{\partial}u_j = f$, avec $\Omega_j \nearrow \Omega$ et

$$||u_j||_{L^2_{p,k-1}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} \lesssim ||f||^2_{L^2_{p,k}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} \leqslant ||f||^2_{L^2_{p,k}(\Omega,\ \eta(\psi))}.$$

Du fait que (u_j) converge faiblement vers u, on obtient une solution $u \in L^2_{p,k-1}(\Omega,\ \eta(\psi))$.
La preuve de l'assertion (2),
d'après le Lemme (2.5) il existe une solution

$$u := \bar{\partial}^*_{\eta(\psi)} N_{\eta(\psi)} f$$

de l'équation $\bar{\partial}u = f$ avec $\bar{\partial}^*_{\eta(\psi)}u = 0$.
Par hypoellipticité du $\bar{\partial}$ et du $\bar{\partial}^*_{\eta(\psi)}$, pour $f \in C^\infty_{p,k}(\Omega)$, on a $u \in C^\infty_{p,k-1}(\Omega)$. $\square$

Nous donnons maintenant un exemple de domaine q-convexe Ω non lisse où on peut appliquer le Théorème (0.2).

Exemple 2.1. Considérons l'espace $\mathbb{C}^3$ avec les coordonnées $z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, 2, 3$. Soit Ω le sous ensemble de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$\begin{cases} y_3 < -|z_1|^2 + |z_2|^2, \\ \\ y_2 < -|z_1|^2 + |z_3|^2, \\ \\ |z| < \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

On définit les fonctions
$f_1 = -\log(-y_3 - |z_1|^2 + |z_2|^2)$, $\quad f_2 = -\log(-y_2 - |z_1|^2 + |z_3|^2)$ et $f_3 = -\log\left(\frac{1}{16} - |z|^2\right)$.
Une fonction d'exhaustion continue 2-sousharmonique (sousharmonique) pour Ω est donnée par :

$$\psi := \sup\{f_1, f_2, f_3\} + c|z|^2,$$

pour un $c \in \mathbb{R}$ approprié.

Conclusion

Dans ce mémoire, après avoir défini les outils nécessaires et rappelé leurs propriétés, nous avons commencé par rappeler dans la première sous partie de la deuxième partie, quelques propriétés sur les fonctions q-sousharmoniques, que nous avons introduites dans la Définition (1.30). Le résultat principal de cette sous partie est le Théorème (0.1) dont la preuve est facilitée par la Proposition (2.7). Et pour terminer cette partie de notre travail, nous avons prouvé l'existence et la régularité de la solution de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans le cas d'un domaine q-convexe au sens de la Définition (1.32). Le résultat principal de cette sous partie est le Théorème (0.2), sa preuve est facilitée par les Lemmes (2.3) et (2.5), le premier lemme nous a permis d'avoir l'estimation suivante :

$$||u||^2_{L^2_{p,k-1}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} \lesssim ||\bar{\partial}u||^2_{L^2_{p,k}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} + ||\bar{\partial}^*_{\eta(\psi)}u||^2_{L^2_{p,k-2}(\Omega_j,\ \eta(\psi))},$$

le second nous a permis de voir qu'il existe une famille $u_j \in L^2_{p,k-1}(\Omega_j,\ \eta(\psi))$ solution de l'équation $\bar{\partial}u_j = f$ pour des domaines $\Omega_j \nearrow \Omega$ et d'avoir celle-ci :

$$\parallel u_j \parallel_{L^2_{p,k-1}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} \lesssim ||f||^2_{L^2_{p,k}(\Omega_j,\ \eta(\psi))} \leqslant ||f||^2_{L^2_{p,k}(\Omega,\ \eta(\psi))}.$$

Nous avons terminé cette partie par un exemple de domaine q-convexe non lisse.

Perspectives

▶ $\partial\bar{\partial}$ pour les valeurs au sens des courants ;

▶ $\bar{\partial}$ pour les valeurs au bord au sens des courants.

Références

[1] S. C. Chen, M. C. Shaw : Partial differential equation in several complex variables, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, International Press, Boston, MA 2001.

[2] J. P. Demailly : Complex analytic and differential geometry, Institut Fourier (Grenoble I) June 9, 2007. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼demailly/books.html

[3] M. Fassina, S. Pinton : Existence and Interior Regularity Theorems for $\bar{\partial}$ on q-convex Domains. Complex Anal. Oper. vol. 7. No.4 (2018)

[4] G. M. Henkin, J. Leiterer : Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas, Progress in Mathematics Volume 74, 1988.

[5] L-H. Ho : $\bar{\partial}$-problem on weakly q-convex domains. Math. Ann. $290(1), 3-18(1991)$

[6] L. Hörmander : An Introduction to Complex Analysis in SeveralVariables, vol. 7, $3rd$ edn. North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1990)

[7] L. Hörmander : L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator. Acta Math. $113, 89-152(1965)$

[8] J.J. Kohn : Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds, I. Ann. Math. 78, 112–148 (1963)

[9] J.J. Kohn :Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds, II. Ann. Math. 79, 450–472 (1964)

[10] C. Laurent-Thiébaut : Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, InterEditions/CNRS Editions.

[11] C.B. Morrey : The analysis embedding of abstract real analytic manifolds. Ann.Math. 40, 62–70 (1958)

[12] E. Straube : Lectures on the L^2-Sobolev Theory of the $\bar{\partial}$-Neumann Problem. European Mathematical Society (EMS), Zürich (2010)

[13] S. Pinton, G. Zampieri : Complex manifolds in Q-convex boundaries. Math. Ann. 362, $541-550(2015)$

[14] G. Zampieri : Complex Analysis and CR Geometry. University Lecture Series, vol. 43. American Mathematical Society, Providence (2008)