UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE de MASTER

DOMAINE :	**Sciences et Technologies**
MENTION :	**Mathématiques et Applications**
SPECIALITE :	**Mathématiques Appliquées**
OPTION :	**Optimisation**

Sujet :

Optimisation de la Gestion Optimale des Finances Publiques du Sénégal

Présenté par : Moussa Diatta

Le 23 Juin 2021

Sous la direction des Professeurs : Babacar Mbaye NDIAYE & Diéne NGOM

Devant le Jury ci-aprés :

Prénom et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Université**
Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président du jury	UASZ
Mouhamadou S. GOUDIABY	Maitre de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Edouard DIOUF	Professeur Assimilé	Examinateur	UASZ
Babacar MBAYE NDIAYE	Professeur Assimilé	Co-Directeur	UCAD
Diéne NGOM	Professeur Assimilé	Co-Directeur	UASZ

Année universitaire : 2019-2020

Dédicaces

A Mamadou DIATTA, mon père qui a tout sacrifié pour moi.

A Benoit COLY, mon oncle, Judith BADJI, Raimonde COLY, mes deux mamans, mes frères et sœurs, dans le giron duquel je n'ai manqué de rien.

A Jean Benoit Clément COLY, mon ami, frère et confident.

A mon amie et défunte maman, Ramatoulaye TRAORE (paix à son âme). Que la terre du cimetière de Boucotte lui soit très légère. Ce mémoire t'est entièrement dédié.

Remerciements

Merci, dit le panégyriste de Wangrin, est un bien modeste petit mot mais il ne sort de la bouche que sous l'effet d'un acte qui inspire la gratitude.

Je voudrais d'abord dire merci aux professeurs Babacar Mbaye NDIAYE et Diéne NGOM pour avoir accepté sans aucune formalité la direction du mémoire, pour leur orientation, leurs indications bibliographiques très appropriées, leur disponibilité à me recevoir chaque fois que j'en ai eu besoin et à lire et apporter leurs observations aux différentes notes que je leur présentais.

Je remercie ensuite les professeurs Salomon SAMBOU, Edouard DIOUF et Mouhamadou Samsidy GOUDIABY, qui ont répondu volontiers à notre invitation à participer au jury de soutenance et ont apporté leurs contributions à l'amélioration du travail ; et le Docteur Abdoulaye DIOUF, pour sa disponibilité, ses conseils, recommandations et encouragements utiles et motivants.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à tous les enseignants du département de Mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ). Je me permets de citer entre autres Pr Salomon SAMBOU, Pr Alassane DIEDHIOU, Pr Oumar SALL, Pr Edouard DIOUF, Pr Clément MANGA, Pr Timack NGOM, Pr Daouda Niang DIATTA, Pr Mouhamadou Samsidy GOUDIABY, Pr Mansour SANE, Pr Amoussou Thomas GUEDENON et Pr Emmanuel Nicolas CABRAL.

Mes remerciements vont enfin à l'endroit des condisciples Abdourahmane Mbaye, Lala Diémé, Malick Diba, Mamadou Boye Diallo, Mame Fatou Ndiaye, Emile Ndéné Ndong, Amadou Ndiaye, Bernard Manga, Jean Diatta, Seydou Diba, Algassimou Diallo et Ibrahima Dramé, ceux avec qui j'ai partagé ces deux dernières années de Master ; de Fatou DIENG et Mohamed NIAMBA, étudiant en master 2 de Mathématiques ; de Lamine Dièdhiou, étudiant à l'ISM de Ziguinchor ; de Benoit COLY, mon oncle, sa femme Judith BADJI, et de mon frére Jean Benoit Clément COLY appelé Junior.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons résolu les problèmes de la gestion optimale des finances publiques. Il s'agit pour un Gouvernement, de gérer de façon optimale les ressources de son État afin de contribuer à l'amortissement des oscillations économiques et de favoriser le maintien d'une économie progressive assurant un degré élevé d'emploi et affranchie de toute poussée excessive d'inflation. C'est donc un problème très important. Nous nous sommes basés sur le modèle de Jean François. L et al. dans [6] pour décomposer le problème en huit (8) sous-problèmes dont chacun traduit une réalité donnée. Les résultats théoriques et numériques de ces problèmes sont satisfaisants et reflètent la réalité.

Sigles

PIB : Produit intérieur brute.

CBI :Contrainte Budgétaire intertemporelle

Liste des tableaux

Introduction générale

Dans la plupart des secteurs d'activité (entreprise, administration classique, groupement économique privé ou publique) le concept de l'optimisation est de plus en plus incontournable dans l'étude de prise de décision. Avec l'optimisation on peut résoudre un problème complexe de décision en se focalisant sur un objectif de son choix pour évaluer la performance ou mesurer la décision [Stephen M. Pollock, Michael D. Maltz [11], (1994)]. Par exemple, on peut mesurer, le bénéfice ou la perte dans le cadre économique, l'énergie ou la distance dans le cadre physique. On peut maximiser la vitesse ascensionnelle d'un aéronef ou d'un véhicule spatial en fonction de la longueur de la piste, du poids de décollage, du taux de consommation de carburant et la limite des déformations structurelles dans le domaine aéronautique. On peut aussi maximiser le revenu attendu dans un environnement incertain d'investissement. En bref un problème d'optimisation consiste à maximiser ou à minimiser une fonction objectif selon la formulation du problème sous les contraintes des variables de la décision. Dés lors, en présence de problèmes du monde réel, les aptitudes à modéliser, à cerner les éléments essentiels d'un problème et à faire un choix judicieux dans l'interprétation des résultats, sont nécessaires pour obtenir une meilleure conclusion. Ces capacités ne s'acquièrent qu'avec des expériences pratiques et une compréhension profonde des théories correspondantes. D'où l'importance de pouvoir distinguer les modèles résolubles de ceux qui ne le sont pas en se basant sur les techniques disponibles. Comme exemple la gestion optimale des finances publiques qui consiste à élaborer une bonne politique budgétaire, apprécier l'acceptabilité d'un déficit et des marges de manœuvre en fonction du cycle économique et de la dette publique accumulée est l'un des aspects capitaux pour la bonne gouvernance d'un État. La politique budgétaire active est le processus consistant à manipuler les impôts et les dépenses publiques afin de : contribuer à amortir les oscillations économiques, favoriser le maintien d'une économie progressive assurant un degré élevé d'emploi et affranchie de toute poussée excessive d'inflation [Jean Koudi[5], (2018)]. L'État est ainsi confronté à la résolution d'un problème d'optimisation afin de trouver la bonne décision à prendre en ce qui concerne les finances publiques. Ce problème dépend de plusieurs paramètres tels que le taux d'imposition, le taux d'intérêt, le taux de croissance de l'économie en part de PIB par habitant etc.

Le mémoire est organisé comme suit : le chapitre 1 est consacré à la programmation non linéaire, le chapitre 2 est consacré à la gestion optimale des finances publiques et le chapitre 3 présente les résultats numériques des différents problèmes.

Nous terminons par la conclusion et les perspectives.

Chapitre 1

Programmation non linéaire

1.1 Introduction

La programmation non-linéaire regroupe un ensemble de sujets dans l'étude de problèmes d'optimisation. Parfois tous les points de $\mathbb{R}^n$ sont candidats(on parle d'optimisation sans contraintes), parfois, des contraintes limites le domaine de recherche(on parle d'optimisation avec contraintes). On suppose qu'au moins une des fonctions (cout,contraintes) est non linéaire. En général, on suppose que toutes ces fonctions sont continues et même différentiables. Les méthodes classiques d'optimisation non-linéaires permettent d'obtenir un maximum local, mais pas nécessairement le maximum global. On utilise des résultats d'analyses mathématiques pour caractériser les points candidats. Un premier pas consiste donc à obtenir des conditions vérifiables satisfaites pour les minima ou les maxima recherchés. Lorsqu'un point ne satisfait pas à ces conditions d'optimalités, on en déduit une manière de calculer un point meilleur, et finalement un algorithme itératif réduisant (pour la minimisation) progressivement la fonction [7].

1.2 Optimisation

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé, muni de la norme $\|.\|$, on s'intéresse au problème suivant, noté :

$$(\mathrm{P}) : \begin{array}{l} \inf \ f(x) \\ x \in \mathrm{S} \end{array} \tag{1.1}$$

où $\mathrm{S} \subset \mathbb{E}$ et $f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction objectif (appelé aussi fonction cout ou critère).

• Si S $=$ $\mathbb{E}$, on dit que (P) est un problème d'optimisation sans contraintes.

• Si S $\subsetneq$ $\mathbb{E}$, on dit que (P) est un problème d'optimisation avec contraintes.

• Si dim.S $< +\infty$ (resp dim. S $= +\infty$), on dit que (P) est un problème d'optimisation à dimension finie (resp. dim. infinie).

Remarque 1. *Ce formalisme englobe tous les problèmes d'optimisation, y compris les problèmes de maximisation puisque maximiser une quantité revient à minimiser son opposé.*

Nous adopterons la convention suivante : si l'on veut indiquer que la valeur du minimum est atteinte, on écrira :

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &x \in \mathrm{S} \end{aligned} \tag{1.2}$$

tandis que nous utiliserons la notation << inf >> quand on ne sait pas à priori si la valeur de la borne inférieure est, ou non atteinte.

Enfin, rappelons que toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, caractérisée de la façon suivante :

Théorème 1. *Soit $\mathbb{X}$ une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $m = \inf\{ x, x \in \mathbb{X} \}$.
2. $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ x \in \mathbb{X} \mid m \leq x < m + \epsilon$.
3. *m est un minorant de $\mathbb{X}$ et il existe $(x_n) \in \mathbb{X}$ appelée suite minimisante convergente vers m.*

1.2.1 Existence et unicité des solutions

Nous rappelons que la compacité fournie des résultats d'existence, et la convexité un cadre favorable pour l'unicité.

Dans cette partie, on suppose que $f : \mathrm{S} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, S désignant une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème noté toujours (P) :

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &x \in \mathrm{S} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Remarque 2. *L'existence n'est pas toujours assurée comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \longrightarrow \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 2. *(Existence en dimension finie)*
On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant f(x_0)\}$ soit borné. Alors le problème (P) a au moins une solution globale x^*.

Démonstration. Le problème (P) équivaut à minimiser f sur l'ensemble compact

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant f(x_0)\}$$

Or, une fonction continue sur un compact atteint sa borne inférieure. □

Remarque 3. *On obtient immédiatement l'existence (donc le théorème reste vérifié) si :*

1. *Si l'on suppose que f est semi continue inférieurement, c'est à dire $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \{f \leq \alpha\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.*
2. *L'ensemble S est compact, en utilisant la continuité de f.*
3. *la fonction f est coercive (on dit aussi infini à l'infini), c'est à dire*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

et S est fermée.

Théorème 3. *Soit le problème (P) avec f convexe et S convexe (éventuellement en dimension infinie). Alors,*

1. *Tout minimum local est un minimum global.*
2. *Si f est strictement convexe, il y a au plus un minimum.*

Démonstration. Soit x^*, un minimum local pour le problème (P).

1. Par l'absurdité supposons qu'il existe $y \in \mathrm{S}$ tel que $\{\ f(y) < f(x^*)\}$.
   Soit $z = ty + (1-t)x^*$, avec $t \in]0;1[$.
   Alors $f(z) > f(x^*)$ si t est suffisamment petit.
   la convexité de f implique que $f(x^*) \leqslant f(z) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x^*)$, ce qui montre que $f(y) < f(x^*) \leqslant f(y)$. C'est absurde et il s'en suit que x^* minimise f sur S.
2. Si x_1 et x_2 sont deux solutions globales de (P), alors $x_1 \neq x_2$,

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) = f(x1)$$

   ce qui est absurde. Cela implique donc l'unicité.

□

1.3 Optimisation sans contraintes

On s'intéresse dans cette section au problème noté (P_{sc}) dans [7].

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 4. ***(Conditions nécessaires)***
Soit x^* un minimum local pour le problème (P_{sc}).

1. *Si f est différentiable en x^*. Alors $\nabla f(x^*) = 0$. On dit que x^* est un point stationnaire ou critique.*
2. *Si f est deux fois différentiables en x^* alors $Hessf(x^*)$ est semi définie positive.*

Démonstration. On écrit :

1. $$f(x^*) \leqslant \nabla f(x^* + \epsilon h) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), \epsilon h \rangle + |\epsilon h| \phi(\epsilon h)$$
   avec $\phi(\epsilon h)$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. On divise par $\epsilon > 0$ puis on fait tendre ϵ vers 0^+. Ensuite en choisissant dans le développement précédent $\pm h$ pour $h \in \mathbb{R}^n$, la conclusion s'ensuit.
2. On utilise un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 et on utilise les mêmes notations que précédemment. On a :
   $$\begin{aligned} f(x^* + h) &= f(x^*) + \langle \nabla f(x^*),\, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hessf(x^*)h, h \rangle + \|h\|^2 \varphi(h) \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2} \langle Hessf(x^*)h, h \rangle + \|h\|^2 \varphi(h) \end{aligned}$$
   Comme précédemment, on remplace h par ϵ, h quelconque, ϵ petit puis on divise par ϵ^2 et on fait tendre ϵ vers 0

□

Remarque 4. *L'exemple $f(x) = x^3$ montre que ce théorème est une condition nécessaire mais pas suffisante.*

Théorème 5. ***(Conditions suffisantes)***
Soit f deux fois différentiables en $x^* \in \mathbb{R}^n$, tel que $\nabla f(x^*) = 0$ et de plus :

1. *Soit Hess $f(x^*)$ est définie positive.*

2. *Soit f(x) deux fois différentiables au voisinages de x^*, et la Hess f(x^*) est semi définie positive dans ce voisinage.*

Alors x^* est un minimum local pour f.

Démonstration. 1. *Hess f(x^*)* est définie positive, par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\langle \textit{Hess } f(x^*)h,h\rangle > \alpha\| \ h\|^2$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ (rappelons que α doit être inférieure à la plus petite valeur propre de la matrice hessienne en x^*). On écrit alors d'après Taylor-Young à l'ordre 2 en x^*

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \frac{1}{2}\langle Hessf(x^*)h, h\rangle + \|h\|^2\varphi(h) \geqslant f(x^*) + [\frac{\alpha}{2} + \varphi(h)]\|h\|^2 > f(x^*)$$

pourvu que h soit choisit assez petit, puisque $\varphi(h)$ tend vers 0 quand h tend 0

2. f étant supposée deux fois différentiable, au voisinage de x^*, on écrit la formule de Taylor-Mac Laurin. Ainsi il existe $t \in [0, 1]$ tel que

$$f(x^*+h) = f(x^*) + \frac{1}{2}\langle \textit{Hess } f(x_t)h,h\rangle \geqslant f(x^*)$$

où $x_t = x^* + th$ est proche de x^* si h est petit

□

Remarque 5. *Le caractère semi-définie positive de la hessienne en x^* ne suffit pas pour conclure, comme en atteste l'exemple $f(x) = x^3$. En revanche le caractère définie positive de la hessienne n'est pas nécessaire comme en témoigne l'exemple $f(x) = x^4$.*

Remarque 6. *Un point critique qui n'est pas un extremum local porte le nom de point selle.*

Théorème 6. ***(Condition nécessaire et sufisante C.N.S, cas convexe)***
Soit f convexe et différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Une condition nécessaire et suffisante pour que x^* soit un minimum local (donc global) de f est que x^* soit un point critique de f, autrement dit, que $\nabla f(x^*) = 0$.

Démonstration. La condition nécessaire résulte immédiatement du Théorème 4 tandis que l'équivalence local-globale résulte du Théorème 3. Quant à la condition suffisante , elle résulte de l'application du Théorème. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$f(x) > f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^*\rangle = f(x^*)$.
On en déduit que x^* est bien un minimum. □

1.4 Optimisation avec contraintes

Dans cette section, on cherche à énoncer des conditions d'optimalité au premier ordre pour des problèmes d'optimisation avec contraintes noté (P_{ac}) du type :

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s \cdot c \\ &h_i(x) = 0, \forall\ i = 1, \ldots, p \\ &g_j(x) \leqslant 0, \forall\ j = 1, \ldots, q \end{aligned} \tag{1.5}$$

où

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

$$h_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ \forall i = 1, \ldots, p. \tag{1.7}$$

$$g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ \forall\ j = 1, \ldots, q. \tag{1.8}$$

où p et q désignent deux entiers naturels non nuls.
En posant

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0 \quad \forall\ i = 1, \ldots, p\ et\ g_j(x) \leqslant 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, q\}$$

le problème peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &x \in S \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.4.1 Conditions nécessaires d'optimalité

Le théorème de Karus -Kunh et Tucker joue un rôle essentiel dans la pratique. Il permet de caractériser les optimum locaux d'un problème non linéaire. Son application impose une condition dite *condition de qualification des contraintes* que nous énonçons ci-dessous.

Définition 1. (**Contrainte active, Qualification des Contraintes**)
Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

1. L'ensemble $I(x) = \left\{ j \in \{1, \ldots, q\},\ g_j(x) = 0 \right\}$ est appelé ensemble des contraintes actives en x.
2. On dit que les contraintes sont qualifiées en $x \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement si il existe une direction $d \in \mathbb{R}^n$ telle que l'on ait pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $j \in I(x)$,

$$\langle \nabla h_i(x), d \rangle = 0$$

et

$$\langle \nabla g_j(x), d\rangle < 0$$

et si les vecteurs $\nabla h_i(x)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$ sont linéairement indépendants.

Remarque 7. ***(Une autre condition de qualification des contraintes)***
Il est intéressant de constater que les principales Conditions suffisantes connues pour que (QC) soit vérifiée sont :
Les fonctions $g_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, q\}$ sont convexes, les fonctions $h_i(x), i \in \{1, \ldots, p\}$ linéaires ou affines et il existe $\bar{x} \in S$ telles que les $g_j(\bar{x}) < 0 \quad \forall j \in I$ et $h_i(\bar{x}) = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$.
En $\bar{x} \in S, \nabla h_i(\bar{x}), i \in \{1, \ldots, p\}$ et les $\nabla g_j(\bar{x})$, $i \in \{1, \ldots, q\}$ sont linéairement indépendants.

Définition 2. Le lagrangien L du problème (P_{ac}) est une fonction définie par :

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j(x) \tag{1.10}$$

Théorème 7. (***Karush-Kuhn-Tucker***)
Soit x^* un minimum local pour le problème (P_{ac}). On suppose que les contraintes sont qualifiées en x^*.
Alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in {\mathbb{R}_+}^q$ tel que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0 \qquad (\textit{condition du gradient})$$

$$h_i(x^*) = 0 \textit{ et } g_j(x^*) \leqslant 0 \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, p \ \ \forall j = 1, \ldots, q \ \ (\textit{condition d'admissibilité}$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \ \ \forall j = 1 \ldots, q \ \ (\textit{condition de complémentarité}).$$

pour la preuve voir [5]

Les nombres $\lambda_i \ \ \forall i = 1, \ldots, p$ et $\mu_j \ \ \forall j = 1, \ldots, q$ s'appellent les multiplicateurs de KKT du problème d'optimisation avec contrainte.
Lorsqu'il n'y a pas de contrainte d'inégalité $q = 0$ les multiplicateurs s'appellent "multiplicateurs de Lagrange".
Le multiplicateur associé à une contrainte d'inégalité doit être positif ou nul, un multiplicateur associé à une contrainte d'égalité est de signe quelconque.

1.4.2 Conditions suffisantes : la convexité

Le théorème de KKT fournit des conditions nécessaires d'optimalité locale. Cela signifie que ces conditions :

1. sont vérifiés en des points qui sont des minima, des maxima ou encore des points selles.

2. ne permettent pas de savoir si on a affaire à un optimum global.

L'étude de la convexité (ou de la concavité) des fonctions intervenant dans les modèles permettent de résoudre ces questions en établissant des conditions suffisantes d'optimalité globale.

Remarque 8. *Il faut savoir que les problèmes non convexes sont difficiles à résoudre, notamment pour les problèmes de grande taille(rencontrés en entreprise), il vaut mieux dans une approche se limiter à une bonne connaissance des problèmes convexes, pour lesquels les conditions de KKT constituent des conditions suffisantes.*

Définition 3. Le programme (P_{ac}) est dit convexe si la fonction f est convexe, si les fonctions g_j sont convexes et les fonctions h_i affines.

Théorème 8. *Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et convexe, alors*

$$f(x) - f(y) \geqslant \nabla f(y)(x - y) \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

pour la preuve voir [5]

Théorème 9. *(Condition Suffisante : la convexité)*
Lorsque le problème d'optimisation est convexe, les conditions de Karush-Kunh-Tucker caractérisent l'optimum global. Celui-ci est unique si la fonction f est strictement convexe.

Démonstration. Pour plus de simplicité, nous nous limiterons au cas où il n'y a pas des contraintes d'inégalités ($p = 0$). Considérons $x \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait aux conditions du théorème de KKT. Alors, il existe $\mu > 0$ tel que :
a) $\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$
b) $g_j(x) \leqslant 0, \ \forall j = 1, \ldots, q$
c) $\mu_j g_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, q$
En appliquant le théorème 8 aux fonctions f et g, on obtient les inégalités :

$$f(y) - f(x) \geqslant \nabla f(x)(y - x) \tag{1.12}$$

$$g_j(y) - g_j(x) \geqslant \nabla g_j(x)(y - x) \ \forall, g_j(y) \ \leqslant 0 \tag{1.13}$$

On en déduit la suite d'inégalités :

$$f(y) - f(x) \geqslant \nabla f(x)(y - x) = -\sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla g_j(x)(y - x) \tag{1.14}$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{q} \mu_j (g_j(x) - g_j(y)) \tag{1.15}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j(x) - \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j(y) = 0 - \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j(y) \geqslant 0 \tag{1.16}$$

tel que la valeur de la fonction f en y est supérieure à la valeur prise en x. D'où l'optimalité globale du point x.

Lorsque la fonction f est strictement convexe l'inégalité (8) est stricte et ceci assure l'unicité de l'optimum en x.

□

Exemple 1. soit $f(x) = -24x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2$
Soit le modèle de programmation suivant :

$$\begin{gathered} minf \\ sc \\ x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{gathered} \tag{1.17}$$

Utiliser les conditions de KKT pour déterminer une solution optimale. Est t-elle globale ?

On a $p = 0$ et $q = 4$ avec $g_1 = x_1 - 8$, $g_2 = x_2 - 7$, $g_3 = -x_1$ et $g_4 = -x_2$. Et les conditions de KKT donnent :

$$-24 + 2x_1 + \mu_1 - \mu_3 = 0 \tag{1.18}$$

$$-10 + 2x_2 + \mu_2 - \mu_4 = 0 \tag{1.19}$$

$$\mu_1(x_1 - 8) = 0 \tag{1.20}$$

$$\mu_2(x_2 - 7) = 0 \tag{1.21}$$

$$\mu_3 x_1 = 0 \tag{1.22}$$

$$\mu_4 x_2 = 0 \tag{1.23}$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 8 \tag{1.24}$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant 7 \tag{1.25}$$

$$\mu_1 \geqslant 0, \mu_2 \geqslant 0, \mu_3 \geqslant 0, \mu_4 \geqslant 0 \tag{1.26}$$

Dans (1.20) si $\mu_1 = 0$ alors $x_1 \neq 8$, alors (1.18) donne :

$$-24 + 2x_1 = \mu_3 \tag{1.27}$$

L'équation (1.22) $\Longrightarrow \mu_3 = 0$ *ou* $x_1 = 0$
Si $x_1 = 0$ alors (1.27) donne $\mu_3 = -24$ contradiction d'aprés (1.24). Donc, on en déduit que $\mu_1 > 0$
Pour $\mu_1 > 0$ l'équation (1.20) $\Longrightarrow x_1 = 8$. Alors dans (1.22) on tire la valeur de μ_3 c'est à dire que $\mu_3 = 0$ (Au passage, on remarque si $\mu_3 = 0$, si l'on remplace dans (1.18) $\Longrightarrow x_1 = 12$ qui est n'est pas réalisable d'aprés (1.24))

Dans (1.21), si $\mu_2 = 0$ alors (1.19) donne .

$$-10 + 2x_2 = \mu_4 \tag{1.28}$$

L'équation (1.23) $\Longrightarrow \mu_4 = 0$ ou $x_2 = 0$
Si $x_2 = 0$ alors (1.28) $\Longrightarrow \mu_4 = -10$, contradiction d'aprés (1.26) donc $\mu_4 = 0$

L'équation (1.23) donne $\mu_4 = 0$ et $x_2 \neq 0$ (même remarque : (1.21) $\Longrightarrow x_2 = 7$ et on le met dans (1.19) qui donne $-10 + 14 + \mu_2 = 0 \Longrightarrow \mu_2 = -4$, contradiction d'aprés (1.26), d'où $x_2 \neq 7$).
L'équation (1.29) donne $-10 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = 5$. Dans les équations (1.18) et (1.19) nous pouvons en déduire μ_1 et μ_2.

(1.18) $\Longrightarrow$ -24+16+μ_1=0 $\Longrightarrow \mu_1 = 8$.

(1.19) $\Longrightarrow$ -10+10+μ_2=0 $\Longrightarrow \mu_2 = 0$.

La solution optimale est le point $(x_1^*, x_2^*) = (8, 5)$ et la valeur optimale est $z = f(8, 5) = -153$

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi les théorèmes qui nous permettent de résoudre les problèmes d'optimisation avec ou sans contrainte. Le chapitre suivant présente les différents problèmes issus de la gestion optimale des finances publiques et leurs résolutions théoriques.

Chapitre 2

Gestion optimale des finances publiques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons résoudre des problèmes issus de la recherche d'une méthode optimale de gestion des finances publiques.

En effet, la conduite de la politique budgétaire et l'appréciation du déficit acceptable et des marges de manœuvre en fonction du cycle économique et de la dette publique accumulés sont des sujets récurrents de controverses. La littérature économique est relativement riche d'articles comme ceux de Dietsch et Garnier [2] (1989), explique la nature de la contrainte budgétaire ou encore ceux d'Hamilton et Flavin ([3](1986)) testent la ténacité de la politique budgétaire (Wilcox [14], (1989) ; Trehan et Walsh [12, 13], 1988 et 1991).

Par politique budgétaire active, nous entendons le processus consistant à manipuler les impôts et les dépenses publiques afin de contribuer à un amortissement des oscillations économiques et au maintien d'une économie progressive assurant un degré élevé d'emploi et affranchie de toute poussée excessive d'inflation.

En ce qui concerne l'optimalité de la politique budgétaire et les contraintes auxquelles elle est soumise les débats ont été essentiellement centrés sur la question du lissage des impôts (Tax Smoothing) à partir du modèle proposé par Barro (1979) [1] partant de l'hypothèse que l'impôt introduit des distorsions dont le coût est une fonction convexe du taux global d'imposition. En effet Barro montre que la politique de taxation optimale consiste à fixer un taux d'imposition constant juste suffisant pour satisfaire la contrainte budgétaire intertemporelle de l'État. Roubini et Sachs (1989) [8] remettent en cause le réalisme de cette approche en constatant qu'elle n'apparait pas corroborée par les faits : depuis le premier choc pétrolier, la dette publique a augmenté beaucoup plus vite que le PIB dans la plupart des pays de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economique), les taux d'imposition s'ajustant avec retard à une dépense publique croissante en part de PIB. L'ajustement au niveau de la politique budgétaire se traduit par la détermination de niveau et structure de dépenses de même, pour les recettes, par un nouveau taux de taxation.

2.2 Exposé théorique du modèles

On suppose que le gouvernement a un objectif à la fois sur les recettes et les dépenses exprimées en pourcentage du PIB (g^* , t^*). L'existence de coûts d'ajustements importants conduit le gouvernement à corriger progressivement sa situation de façon à tendre vers son objectif, en l'absence de contraintes. On admet ici un ajustement exponentiel des recettes de la forme :

$$t_s^{opt} = \theta_1 t_{s-1} + (1-\theta_1)t^* \tag{2.1}$$

avec $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$

t_s : est la recette publique exprimée en pourcentage du PIB à la date s.

De la même manière, on admet un ajustement exponentiel des dépenses de la forme :

$$g_s^{opt} = \theta_0 g_{s-1} + (1-\theta_0)g^* \tag{2.2}$$

avec $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 1$;

g_s : est la dépense publique exprimée en pourcentage du PIB à la date s.

Le gouvernement supporte sur les recettes un coût instantané quadratique en écart à cette trajectoire qui s'écrit à la date s :

$$\begin{aligned} C_t(s) &= (1-c)[t_s - t_s^{opt}]^2 \\ &= (1-c)[t_s - \theta_1 t_{s-1} - (1-\theta_1)t^*]^2 \\ &= (1-c)[(t_s - t^*) - \theta_1(t_{s-1} - t^*)]^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

De manière analogue le gouvernement supporte sur les dépenses un coût symétrique à celui sur les recettes publiques, qui s'écrit à l'instant s par :

$$\begin{aligned} C_g(s) &= c[g_s - g_s^{opt}]^2 \\ &= c[g_s - \theta_0 g_{s-1} - (1-\theta_0)g^*]^2 \\ &= c[(g_s - g^*) - \theta_0(g_{s-1} - g^*)]^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le gouvernement finance sa dépense publique par l'impôt et par émission d'emprunt. Comme Barro en (1979), nous ignorons les ressources issues de l'émission monétaire, ce qui revient à les assimiler à une ressource fiscale.

Ainsi, la fonction de cout du gouvernement s'écrit donc :

$$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \left[c[(g_s - g^*) - \theta_0(g_{s-1} - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*) - \theta_1(t_{s-1} - t^*]^2\right] \tag{2.5}$$

où : $\dfrac{(1+n)}{(1+\tau)}$ est le facteur d'actualisation exprimé en pourcentage du PIB.

τ est le taux d'actualisation.

n est le taux de croissance de l'économie à long terme supposé constant pour tout $s > 0$.

Sans coût d'ajustement la fonction objectif est :

$$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \left[c[(g_s - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*)]^2\right] \tag{2.6}$$

On suppose que le gouvernement est soumis à deux contraintes :

2.2.1 Les contraintes

Les contraintes sont multiples. Le gouvernement est soumis à des contraintes sur les dépenses g et sur les recettes t : la dépense publique est toujours positive et le taux d'imposition inférieur à 1. De plus, un niveau de dépense publique trop faible aura pour conséquence une baisse du taux de croissance, de même qu'un taux d'imposition trop élevé. L'objet de ce travail n'étant pas d'étudier ces interdépendances, on suppose qu'elles sont négligeables au voisinage de la cible auquel on se situe. On admet donc pour simplifier qu'il existe un niveau de dépense publique incompressible g_{inf} et un taux d'imposition maximal t_{sup}, ce dernier étant, par exemple, le taux qui maximise les recettes dans la courbe de Laffer. Ainsi à la date s on a :

$$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

En plus de tout ceci, le gouvernement est aussi soumis à des contraintes budgétaires intertemporelles (CBI). A l'instant s cette contrainte dans le cas où tout est parfait, s'écrit :

$$B_s - B_{s-1} = G_s - T_s + rB_{s-1} \tag{2.8}$$

$$= D_s + rB_{s-1} \tag{2.9}$$

où : $D_s = G_s - T_s$

B_s la dette publique à l'instant s

T_s la recette publique à l'instant s

G_s la dépense publique à l'instant s

r est le taux d'intérêt sur la dette publique.

Suite à cela la contrainte budgétaire intertemporelle (CBI) du gouvernement en part de PIB s'écrit :

$$\frac{B_s}{PIB_s} - \frac{1}{1+n}\frac{B_{s-1}}{PIB_s} = \frac{D_s}{PIB_s} + \frac{r}{1+n}\frac{B_{s-1}}{PIB_{s-1}} \tag{2.10}$$

où

$$PIB_s = PIB_{s-1} + nPIB_{s-1} = (n+1)PIB_{s-1} \tag{2.11}$$

En posant : $\dfrac{B_s}{PIB_s} = b_s$ et $\dfrac{D_s}{PIB_s} = d_s$, on a :

$$b_s - \frac{b_{s-1}}{1+n} = d_s + \frac{r}{1+n}b_{s-1} \tag{2.12}$$

Ce qui donne

$$b_s = d_s + \frac{r+1}{n+1}b_{s-1} \tag{2.13}$$

En résolvant par récurrence l'équation (2.13) $\forall\ s \geqslant 0$, on a :

$$b_0 = d_0 + \frac{r+1}{n+1}b_{-1} \tag{2.14}$$

$$b_1 = d_1 + \frac{r+1}{n+1}b_0 = d_1 + \frac{r+1}{n+1}d_0 + \left(\frac{r+1}{n+1}\right)^2 b_{-1} \tag{2.15}$$

$$b_2 = d_2 + \frac{r+1}{n+1}b_1 \tag{2.16}$$

$$\vdots \tag{2.17}$$

$$b_m = \sum_{s=0}^{m}\left(\frac{r+1}{n+1}\right)^{m-s} d_s + \left(\frac{r+1}{n+1}\right)^{m+1} b_{-1} \tag{2.18}$$

En multipliant chaque membre de l'équation (2.18) par $\left(\dfrac{r+1}{n+1}\right)^{-m}$, nous obtenons quand $n < r$.

$$\left(\frac{n+1}{r+1}\right)^m b_m = \sum_{s=0}^{m}\left(\frac{n+1}{r+1}\right)^{s} d_s + \left(\frac{r+1}{n+1}\right) b_{-1} \tag{2.19}$$

En posant $\alpha = \dfrac{n+1}{r+1}$, nous obtenons à l'infini la relation :

$$\frac{b_{-1}}{\alpha} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s(-d_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s(t_s - g_s) \tag{2.20}$$

En réalité on peut distinguer trois cas de contraintes budgétaires intertemporelles.

1. **Le Gouvernement n'est pas solvable**

   Cette situation s'écrit :

   $$\sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s(t_{sup} - g_{inf}) < \frac{b_{-1}}{\alpha} \tag{2.21}$$

   Même en se plaçant immédiatement dans la situation la plus favorable (impôt maximal, dépense minimale) le gouvernement est incapable de rembourser son endettement initial. On exclura bien sûr par la suite cette situation d'insolvabilité.

2. **Le gouvernement est assez riche pour réaliser immédiatement ses objectifs**

   Cette condition s'écrit :

   $$\sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s(t^* - g^*) > \frac{b_{-1}}{\alpha} \tag{2.22}$$

   En se plaçant immédiatement à sa cible le gouvernement parvient a rembourser intégralement sa dette initiale. Son comportement n'est donc soumis en pratique à aucune contrainte.

3. **Le gouvernement n'est pas riche et la CBI est active**

   Nous avons :

   $$\sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s(t_s - g_s) = \frac{b_{-1}}{\alpha} \tag{2.23}$$

   Ce cas est le plus intéressant car il pose la question de la politique optimale, le comportement du gouvernement n'étant pas à priori déterminer. On peut aussi distinguer un quatrième cas qui peut généraliser le premier et le troisième cas comme suit :

4. **Le gouvernement n'est pas riche et CBI n'est pas nécessairement active**

   Nous avons :

   $$\sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s(t_s - g_s) \leqslant \frac{b_{-1}}{\alpha} \tag{2.24}$$

Ce dernier cas est juste une combinaison du premier et du troisième cas. Il traduit une situation beaucoup plus courante que les cas précédents.

En résumé les problèmes à résoudre se répartissent en deux catégories : le cas où le Gouvernement ne possède pas un coût d'ajustement et le cas où le Gouvernement en possède. Selon la contrainte budgétaire intertemporelle, chaque type de problème possède quatre types de sous-problèmes. Les problèmes se présentent alors comme suit :

2.2.2 Présentation des problèmes

Nous présentons ici les problèmes sous forme de tableaux dans lesquels N_v désigne le nombre de variable et N_c désigne le nombre de contraintes.

Le Gouvernement ne possède pas de coût d'ajustement :

Problème	$N°1$
Type de CBI	**Le gouvernement n'est pas solvable**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \Big[c[(g_s - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*)]^2\Big]$
contrainte	$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s (t_{sup} - g_{inf}) - \frac{b_{-1}}{\alpha} < 0 \ \ (condition\ de\ faisabilit\acute{e}) \end{cases}$

TABLE 2.1 – sous-probl1 : absence de coût d'ajustement et insolvabilité du Gouvernement

Problème	$N°2$
Type de CBI	**Le gouvernement est assez riche**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \Big[c[(g_s - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*)]^2\Big]$
contraintes	$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s (t^* - g^*) - \frac{b_{-1}}{\alpha} > 0 \quad (condition \;\; de \;\; faisabilité) \end{cases}$

Table 2.2 – sous-probl2 : absence de coût d'ajustement et le Gouvernement est assez riche

Problème	$N°3$
Type de CBI	**Le gouvernement n'est pas riche et la CBI est active**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \Big[c[(g_s - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*)]^2\Big]$
contraintes	$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s (t_s - g_s) - \frac{b_{-1}}{\alpha} = 0 \end{cases}$

TABLE 2.3 – sous-probl3 : absence de coût d'ajustement, le Gouvernement n'est pas riche et CBI active

Problème	$N°4$
Type de CBI	**Le gouvernement n'est pas riche et la CBI est active ou non.**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \left[c[(g_s - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*)]^2\right]$
contraintes	$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s (t_s - g_s) - \frac{b_{-1}}{\alpha} \leqslant 0 \end{cases}$

TABLE 2.4 – sous-probl4 : absence de coût d'ajustement, le Gouvernement n'est pas riche et CBI active ou non

Le Gouvernement possède un coût d'ajustement

Problème	$N°5$
Type de CBI	**Le gouvernement n'est pas solvable**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \left[c[(g_s - g^*) - \theta_0(g_{s-1} - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*) - \theta_1(t_{s-1} - t^*)]^2\right]$
contraintes	$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s (t_{sup} - g_{inf}) - \frac{b_{-1}}{\alpha} < 0 \quad (condition \quad de \quad faisabilité) \end{cases}$

Table 2.5 – sous-probl5 : présence de coût d'ajustement, le Gouvernement n'est pas riche

Problème	$N°6$
Type de CBI	**Le gouvernement est assez riche**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \Big[c[(g_s - g^*) - \theta_0(g_{s-1} - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*) - \theta_1(t_{s-1} - t^*)]^2\Big]$
contraintes	$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s (t^* - g^*) - \frac{b_{-1}}{\alpha} > 0 \;\; (condition \;\; de \;\; faisabilit\acute{e}) \end{cases}$

TABLE 2.6 – sous-probl6 : présence de coût d'ajustement, le Gouvernement est assez riche

Problème	$N°7$
Type de CBI	**Le gouvernement n'est pas riche et la CBI est active**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s, g_s, t_s) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+\tau}\right)^s \left[c[(g_s - g^*) - \theta_0(g_{s-1} - g^*)]^2 + (1-c)[(t_s - t^*) - \theta_1(t_{s-1} - t^*)]^2\right]$
contraintes	$\begin{cases} t_s - t_{sup} \leqslant 0 \\ -g_s + g_{inf} \leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s(t_s - g_s) - \frac{b_{-1}}{\alpha} = 0 \end{cases}$

Table 2.7 – sous-probl7 : présence de coût d'ajustement, le Gouvernement n'est pas riche et CBI active

Problème	$N°8$
Type de CBI	**Le gouvernement n'est pas riche et la CBI n'est pas nécessairement active**
N_v	∞
N_c	∞
objectif :f(x)	$f(s,g_s,t_s)=\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\frac{1+n}{1+\tau}\Big)^s\Big[c[(g_s-g^*)-\theta_0(g_{s-1}-g^*)]^2+(1-c)[(t_s-t^*)-\theta_1(t_{s-1}-t^*)]^2\Big]$
contraintes	$\begin{cases} t_s-t_{sup}\leqslant 0 \\ -g_s+g_{inf}\leqslant 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s(t_s-g_s)-\frac{b_{-1}}{\alpha}\leqslant 0 \end{cases}$

TABLE 2.8 – sous-probl8 : présence de coût d'ajustement, le Gouvernement n'est pas riche et CBI active ou non

2.3 Résolution théorique des Problèmes

Pour la résolution de ces problèmes, nous allons définir une taille limite **N** qui peut être choisie très grande selon que l'on décide de connaitre les valeurs optimales par an ou par mois ou par jour de l'année. Rappelons que t_s^{opt} représente la valeur optimale à la date s. Chacun de ces problèmes est basé sur deux grandeurs qui sont la recette t et la dépense g. Définissons une nouvelle grandeur $x=(t,g)$. Nos problèmes dépendrons uniquement de cette grandeur x. Plaçons nous dans le cas d'horizon fini où le temps est discrétisé.

$\mathbf{S}=\{0,1,\dots,N-1\}$, $\mathbf{t}=\{t_0,t_1,\dots,t_{N-1}\}$, $\mathbf{g}=\{g_0,g_1,\dots,g_{N-1}\}$
et $x=\{t_0,t_1,\dots,t_{N-1},g_0,g_1,\dots,g_{N-1}\}$. Donc $x=\{x_0,x_1,\dots,x_{2N-2}\}$. Avec ce changement de variables, la fonction objectif du problème $N°1$ devient :

$$f(x)=\sum_{s=0}^{N-1}\gamma^s\Big((1-c)(x_s-t^*)^2+c(x_{N+s}-g^*)^2\Big) \tag{2.25}$$

où

$$\gamma=\frac{1+n}{1+\tau} \tag{2.26}$$

f est une fonction quadratique. Elle est différentiable et son gradient est :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(1-c)(x_0-t^*) \\ 2\gamma(1-c)(x_1-t^*) \\ 2\gamma^2(1-c)(x_2-t^*) \\ \vdots \\ 2\gamma^{N-1}(1-c)*(x_0-t^*) \\ 2c(x_N-g^*) \\ 2\gamma c(x_{N+1}-g^*) \\ 2\gamma^2 c(x_0-g^*) \\ \vdots \\ 2\gamma^{N-1}c(x_{2*N-1}-g^*) \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Les contraintes sont linéaires et définies par :

$$h_i(x) = x_i - t_{sup} \ \ \forall \ \ i \in \{0,1,\ldots,N-1\} \tag{2.28}$$

$$h_i(x) = -x_i + g_{inf} \ \ \forall \ \ i \in \{N,N+1,\ldots,2N-1\} \tag{2.29}$$

En posant $\mathbf{I} = \{0,1,\ldots,2N-1\}$ et $h^1(x) = (h_i(x))_i \in \mathbf{I}$ et on a :

$$\nabla h^1(x) = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

où I_N est la matrice unitaire d'ordre N

L'inégalité

$$\sum_{s=0}^{N-1} \alpha^s (t_{sup} - g_{inf}) - \frac{b_{-1}}{\alpha} < 0 \tag{2.31}$$

n'est pas une contrainte dans le problème. Mais c'est une condition de faisabilité que les données initiales doivent vérifiées.

L'expression de la fonction objectif du problème $N°5$ après le changement de variables.

$$\begin{aligned} f(x) = &\Big[(1-c)(x_0-t^*) - \Theta_1(t_{-1}-t^*\Big]^2 + c[(x_N-g^*)+\theta_0(g_{-1}-g^*)]^2 \\ &+ \sum_{s=1}^{N-1} \gamma^s \Big[c[(g_s-g^*)-\theta_0(g_{s-1}-g^*)]^2 + (1-c)[(t_s-t^*)-\theta_1(t_{s-1}-t^*)]^2\Big] \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nous notons ici que t_{-1} et g_{-1} ne sont pas des variables, ils représentent respectivement la recette initiale et la dépense initiale.

f est une fonction quadratique. Elle est différentiable et son gradient est défini par :

$$
\nabla f(x) = \begin{cases}
\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_0} = 2(1-c)[(x_0 - t_0) - \theta_1(t_{-1} - t_0)] \\
\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k} = 2\gamma^k(1-c)\Bigg[[(x_k - t^*) - \theta_1(x_{k-1} - t^*) + \theta_1\gamma[(x_{k+1} - t^*) - \theta_1(x_k - t^*)]\Bigg] \\
\forall \ \ 1 \leqslant k \leqslant N-2 \\
\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_{N-1}} = 2\gamma^{N-1}(1-c)\Bigg[[(x_{N-1} - t^*) - \theta_1(x_{N-2} - t^*)]\Bigg] \\
\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_N} = 2c\Bigg[[(x_N - g^*) - \theta_0(g_1 - g_0) + \theta_0[x_{N+1} - g_0 - (x_N - g^*)]\Bigg] \\
\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k} = 2\gamma^{k-N}\Bigg[x_k - g^* - \theta_0(x_{k-1} - g^*) + \gamma\theta_0[(x_{k+1} - g^*) - \theta_0(x_k - g^*)]\Bigg] \\
\forall \ \ N+1 \leqslant k \leqslant 2N-2 \\
\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_{2N-1}} = 2\gamma^{2N-1}c\Bigg[x_{2N-1} - g^* - \theta_0(x_{2N-2} - g^*)\Bigg]
\end{cases} \tag{2.33}
$$

En dehors des conditions de faisabilité, les problèmes $N°1, 2, 5,\ et\ 6$ ont les mêmes contraintes. Les problèmes $N°3, 7$ ont en plus celles des problèmes $N°1, 2, 5,$ et 6, la contrainte d'égalité définie par :

$$
h^2(x) = \sum_{s=0}^{N-1} \alpha^s(t_s - g_s) - \frac{b_{-1}}{\alpha} = 0 \tag{2.34}
$$

c'est a dire

$$
h^2(x) = \sum_{s=0}^{N-1} \alpha^s(x_s - x_{N+s}) - \frac{b_{-1}}{\alpha} = 0 \tag{2.35}
$$

et

$$
\nabla h^2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{N-2} \\ \alpha^{N-1} \\ . \quad -1 \\ -\alpha \\ -\alpha^2 \\ \vdots \\ -\alpha^{N-2} \\ -\alpha^{N-1} \end{pmatrix}. \tag{2.36}
$$

Rappelons en dehors des conditions de faisabilité, les problèmes $N°1, 2, 5,$ et 6 ont les mêmes contraintes. De mêmes les problèmes $N°3$ et 7 ont les mêmes contraintes ainsi que les problèmes $N°4$ et 8

En appliquant les conditions d'optimalité de KKT à chaque catégorie de problèmes on obtient les systèmes suivants :

Condition d'optimalité de KKT des problèmes $N°1, 2, 5,$ **et** 6

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum\limits_{s=0}^{2N-1} \lambda_s \nabla h_s^1(x^*) = 0 \\ \lambda_s h_s^1(x^*) = 0 \quad s \in \mathbf{I} \\ \lambda_s \geqslant 0 \quad \forall \quad s \in \mathbf{I} \end{cases} \tag{2.37}$$

Condition d'optimalité de KKT des problèmes $N°3$ **et** 7

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum\limits_{s=0}^{2N-1} \lambda_s \nabla h_s^1(x^*) + \mu h_s^2(x^*) = 0 \\ \lambda_s h_s^1(x^*) = 0 \\ h_s^2(x^*) = 0 \\ \lambda_s \geqslant 0 \quad \forall \quad s \in \mathbf{I} \\ \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.38}$$

Condition d'optimalité de KKT des problèmes $N°4$ **et** 8

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum\limits_{s=0}^{2N-1} \lambda_s \nabla h_s^1(x^*) + \lambda^{'} h_s^2(x^*) = 0 \\ \lambda_s h_s^1(x^*) = 0 \\ \lambda^{'} h_s^2(x^*) = 0 \\ \lambda_s \geqslant 0 \quad \forall \quad s \in \mathbf{I} \\ \lambda^{'} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

Les hypothèses formulées par Jean-Francois et Jondeau Eric en 1992 dans [4] sur les problèmes $N°3$ et 7 sont telles que $h_s^1 < 0 \;\; \forall \; s \in \mathbf{I}$ ne sont jamais actives pour tout $s \in \mathbf{I}$. Avec cette hypothèse nous pouvons résoudre les problèmes car $\lambda_s = 0 \;\; \forall \; s \in \mathbf{I}$.

Mathématiquement, ces solutions sont des points intérieurs. Ainsi, le système (2.38) devient :
En posant $\gamma = \dfrac{1+n}{1+\tau}$, on a :

$$\begin{cases} 2c\gamma^s(g_s - g^*) - \mu\alpha^s = 0 \\ 2(1-c)\gamma^s(t_s - t^*) + \mu\alpha^s = 0 \\ \sum\limits_{s \in \mathbf{I}} \alpha^s(t_s - g_s) - \dfrac{b_{-1}}{\alpha} = 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

Ce qui donne

$$g_s - g^* = \frac{\mu}{2c}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s \tag{2.41}$$

$$t_s - t^* = -\frac{\mu}{2(1-c)}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s \tag{2.42}$$

$$t_s - g_s = \frac{\mu}{2c(c-1)}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s + t^* - g^* \tag{2.43}$$

En remplaçant $t_s - g_s$ dans le système (2.40), nous obtenons l'équation :

$$\sum_{s\in\mathbf{I}} \alpha^s \left(\frac{\mu}{2c(c-1)}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s + t^* - g^*\right) - \frac{b_{-1}}{\alpha} = 0 \tag{2.44}$$

et

$$\frac{\mu}{2c(c-1)} \sum_{s\in\mathbf{I}} \frac{\alpha^{\ 2s}}{\gamma^s} = \frac{b_{-1}}{\alpha} - (t^* - g^*)\sum_{s\in\mathbf{I}} \alpha^s \tag{2.45}$$

$$\mu = 2c(c-1)\frac{\frac{b_{-1}}{\alpha} - (t^* - g^*)\sum_{s\in\mathbf{I}} \alpha^s}{\sum_{s\in\mathbf{I}} \frac{\alpha^{2s}}{\gamma^s}} \tag{2.46}$$

$$\mu = \frac{2c(c-1)\left[b_{-1} - (t^* - g^*)\sum_{s\in\mathbf{I}} \alpha^{s+1}\right]}{\sum_{s\in\mathbf{I}} \frac{\alpha^{2s+1}}{\gamma^s}} \tag{2.47}$$

Donc t_s et g_s sont déterminées par :

$$t_s = t^* - \frac{\frac{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s 2c(c-1)\left[b_{-1} - (t^* - g^*)\sum_{s\in\mathbf{I}} \alpha^{s+1}\right]}{\sum_{s\in\mathbf{I}} \frac{\alpha^{2s+1}}{\gamma^s}}}{2(1-c)} \tag{2.48}$$

$$t_s = t^* + \frac{c(\frac{\alpha}{\gamma})^s\left[b_{-1} - (t^* - g^*)\sum_{s\in\mathbf{I}} \alpha^{s+1}\right]}{\sum_{s\in\mathbf{I}} \frac{\alpha^{2s+1}}{\gamma^s}} \tag{2.49}$$

$$g_s = g^* + \frac{\dfrac{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s 2c(c-1)\left[b_{-1}-(t^*-g^*)\sum_{s\in\mathbf{I}}\alpha^{s+1}\right]}{\sum_{s\in\mathbf{I}}\dfrac{\alpha^{2s+1}}{\gamma^s}}}{2c} \tag{2.50}$$

$$g_s = g^* + \frac{(c-1)(\frac{\alpha}{\gamma})^s\left[b_{-1}-(t^*-g^*)\sum_{s\in\mathbf{I}}\alpha^{s+1}\right]}{\sum_{s\in\mathbf{I}}\dfrac{\alpha^{2s+1}}{\gamma^s}} \tag{2.51}$$

Rappelons que $0 < \alpha < 1$,

$$\sum_{s=1}^{\infty}\alpha^s = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{2.52}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2s+1}}{\gamma^s} = \frac{\alpha^3}{\gamma-\alpha^2} \tag{2.53}$$

En outre $\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^s$ converge vers 0. Cela conduit à la conclusion que les recettes et les dépenses tendent vers leurs cibles (t^*, g^*) à l'horizon infini.

Notons qu'en laissant les hypothèses faites par Jean-François Loué et Eric Jondeau sur l'insaturation des contraintes budgétaires et sur les recettes, les contraintes du types $\leqslant 0$ génèrent des conditions d'exclusions d'après le système de KKT. Notons que N contraintes d'inégalités engendrent 2^N sous systèmes à résoudre pendant la résolution manuelle. Raison pour laquelle la résolution dans ce cas devient compliquer surtout que la taille du problème dépend du nombre de subdivision périodique de l'année. Nous pouvons définir une subdivision trimestrielle(par trois mois), mensuelle(mois), hebdomadaire (par semaine)ou journalière (par jour). Ainsi la résolution de ces problèmes devient incontournable.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé théoriquement les modèles d'une part. D'autres part nous avons présenté et résolu théoriquement les différents problèmes. Le chapitre suivant présente les résolutions numériques de ces problèmes dans les cas trimestriels, mensuels et journaliers.

Chapitre 3

Simulations numériques

3.1 Résultats numériques

Pour les simulations, nous prenons comme données de base : taux de croissance $n = 7\%$, le taux d'intérêt $r = 11\%$, le taux d'actualisation $\tau = 7\%$, la dette initiale $b_{-1} = 12\%$, les recettes initiales $t_{-1} = 31\%$, les dépenses initiales $g_{-1} = 43\%$. La cible des dépenses $g^* = 47\%$, la cible du taux d'imposition est $t^* = 50\%$. Le choix de poids de la dette a été pris en fonction $g_{inf} = 40\%$ et de $t_{sup} = 60\%$. Nous supposons que $\theta_1 = \theta_0 = 0.9$, c'est à dire on ajuste les recettes et les dépenses avec le même rythme. $c = 1 - c = 0.5$.
Le gouvernement peut choisir de déterminer les prévisions optimales par semestre, par trimestre, par mois, par semaine ou par jour de l'année. La discrétisation du temps dépend de l'option choisie. Pour une option trimestrielle choisie le nombre de variable est $N_v = 8$ et le nombre de contrainte pour les problèmes $N°1, 2, 5$ et 6 est $N_c = 8$ et pour les autres problèmes le nombre de contraintes est $N_c = 9$. Dans le cas d'une option mensuelle $N_v = 24$ et $N_c = 24$ pour les problèmes $N°1, 2, 5$ et 6 et $N_c = 25$ pour le reste. Pour une option journalière $N_v = 730$.
Pour chaque problème, le vecteur t_{opt} est composé des valeurs optimales des recettes et g_{opt} est composé des valeurs optimales des dépenses pour une période d'un an. Lorsque le gouvernement fait le choix t_{opt} sur les recettes et g_{opt} sur les dépenses il supporte un coût annuel f_{opt}. Les résultats de la résolution de chaque problème se présentent sous forme d'un tableau.

3.1.1 Cas d'une option trimestrielle

— **Problème** $N°1$

$t_{opt} \quad = [\ 50.0000,\ 50.0000,\ 50.0000,\ 50.0000\ ]$

$g_{opt} \quad = [\ 47.0000,\ 47.0000,\ 47.0000,\ 47.0000]$

$f(x_{opt})=$ 5.1189e-13

— **Problème** $N°3$

$t_{opt} \quad = [55.7169,\ 53.8113,\ 52.5408,\ 51.6939\ ]$

$g_{opt} \quad = [\ 41.2831,\ 43.1887,\ 44.4592,\ 45.3061]$

$f(x_{opt})=$ 56.5337

— **Problème** $N°4$

$t_{opt} \quad = [\ 50.0000\ 50.0000\ 50.0000\ 50.0000]$

$g_{opt} \quad = [\ 47.0000,\ 47.0000,\ 47.0000,\ 47.0000\ ]$

$f(x_{opt})=$ 5.1503e-13

— **Problème** $N°5$

$t_{opt} \quad = [\ 60.0000,\ 41.0000,\ 58.1000,\ 42.7100]$

$g_{opt} \quad = [50.6000,\ 43.7600,\ 49.9160,\ 44.3756\ ]$

$f(x_{opt})=$ 25.2050

— **Problème** $N°7$

$t_{opt} \quad = [60.0000,\ 48.8774,\ 53.7743,\ 51.2098]$

$g_{opt} \quad = [42.1421,\ 43.4947,\ 47.3908,\ 42.0416\ ]$

$f(x_{opt})=$ 151.8878

— **Problème** $N°8$

$t_{opt} \quad = [48.9183,\ 50.9735,\ 49.1238,\ 50.7885]$

g_{opt} = [46.7793, 47.1986, 46.8212, 47.1609]

$f(x_{opt})$= 3.4841e-13

3.1.2 Cas d'une option mensuelle

— **Problème** $N°1$

t_{opt} = [50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000]

g_{opt} = [47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000]

$f(x_{opt})$= 1.5357e-12

— **Problème** $N°3$

t_{opt} = [47.5191, 48.3461, 48.8974, 49.2649, 49.5099, 49.6733, 49.7822, 49.8548, 49.9032, 49.9355, 49.9570, 49.9713]

g_{opt} = [49.4809, 48.6539, 48.1026, 47.7351, 47.4901, 47.3267, 47.2178, 47.1452, 47.0968, 47.0645, 47.0430, 47.0287]

$f(x_{opt})$= 11.0779

— **Problème** $N°4$

t_{opt} = [50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000, 50.0000]

g_{opt} = [47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000, 47.0000]

$f(x_{opt})$= 1.5368e-12

— **Problème** $N°5$

t_{opt} = [48.6659, 51.2007, 48.9193, 50.9726, 49.1247, 50.7878, 49.2910, 50.6381, 49.4257, 50.5169, 49.5348, 50.4187]

g_{opt} = [46.7714, 47.2058, 46.8148, 47.1667, 46.8500, 47.1350, 46.8785, 47.1093, 46.9016, 47.0886, 46.9203, 47.0717]

$f(x_{opt})$= 2.3720e-12

— **Problème** $N°7$

t_{opt} = [60.0000, 46.7972, 56.7101, 46.5540, 54.7841, 46.8672, 53.5447, 47.3563, 52.6736, 47.8679, 52.0151, 48.3467]

g_{opt} = [41.9546, 45.7437, 44.3031, 46.8341, 45.4666, 47.2072, 46.0884, 47.2739, 46.4592, 47.2126, 46.7125, 47.0985]

$f(x_{opt})$= 122.7864

— **Problème** $N°8$

t_{opt} = [60.0000, 41.0000, 58.1000, 42.7100, 56.5610, 44.0951, 55.3144, 45.2170, 54.3047, 46.1258, 53.4868, 46.8619]

g_{opt} = [50.6000, 43.7600, 49.9160, 44.3756, 49.3620, 44.8742, 48.9132, 45.2781, 48.5497, 45.6053, 48.2552, 45.8703]

$f(x_{opt})$= 25.2050

3.1.3 Cas d'une option journalière

Le gouvernement peut décider d'évaluer pour chaque journée le niveau optimal de ses recettes et le niveau optimal de ses dépenses.
Rappelons que la taille du problème ici est telle que le nombre de variables est $N_v = 730$ et le nombre de contraintes est $N_c = 730$ pour les problèmes $N°1, 2, 5$ *et* 6 et $N_c = 731$ pour les problèmes $N°3, 7$ *et* 8.

— **Problème** $N°1$

t_{opt} = [49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516,
49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516,
49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516, 49.9716407228516,
49.9716407228516, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.716407228231, 49.9716407228231, ..., 49.97164072282
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231,
49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231, 49.9716407228231
]

g_{opt} = [46.9901374859374, 46.9901374859374, 46.9901374859374, 46.9901374859374,
46.9901374859374, 46.9901374859374, 46.9901374859374, 46.9901374859374, 46.9901374859374,
46.9901374859374 ..., 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.990137485629
46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292,
46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292,
46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292, 46.9901374856292,
46.9901374856291, 46.9901374856291, 46.9901374856291, 46.9901374856291, 46.9901374856291,
46.9901374856291, 46.9901374856291, 46.9901374856291, 46.9901374856291, 46.9901374856291,
46.9901374856291]

$f(x_{opt}) \ = \ 0.1645$

— **Problème** $N°3$

t_{opt} = [55.0000036058935, 53.3333353261430, 52.2222229367253, 51.4814812509055, 50.9876534819418, 50.6584349216052, 50.4389558879881, 50.2926365302500, 50.1950902892594, 50.1300594842694, 50.0867055899837, 50.0578030228549, 50.0385346075406, 50.0256890245582, 50.0171252887159, 50.0114161236372, 50.0076100347599, 50.0050726091628, 50.0033810128040, 50.0022532943605, 50.0015014636985, 50.0010002700950, 50.0006661070815, 50.0004433442610, 50.0002948266996, 50.0001957966900, 50.0001298127756, 50.0000858321524, 50.0000565052991, 50.0000369526893, 50.0000238915354, 50.0000151977976, 50.0000094021088, . . . , 49.9999978178 49.9999978178740, 49.9999978178740]

g_{opt} = [42.0000028935937, 43.6666665383697, 44.7777781338092, 45.5185194984013, 46.0123471313535, 46.3415655843078, 46.5610445634394, 46.7073638559750, 46.8049100872241, 46.8699409243780, 46.9132948119874, 46.9421973648133, 46.9614657260641, 46.9743113884365, 46.9828750588000, 46.9885842156469, 46.9923903545600, 46.9949277004774, 46.9966193058523, 46.9977470728519, 46.9984988603436, 46.9990001014705, 46.9993342636932, 46.9995570242781, 46.9997055156661, 46.9998045002542, 46.9998705527053, 46.9999145287159, 46.9999438667734, 46.9999634184442, 46.9999764334368, 46.9999851429051, . . . , 47.0000025294665, 47.0000025294 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665, 47.0000025294665]

$f(x_{opt}) = \ 45$

— **Problème** $N°4$

t_{opt} = [49.9999972492165, 49.9999974401671, 49.9999975674431, 49.9999976522816,
49.9999977088381, 49.9999977465392, 49.9999977716724, 49.9999977884289, 49.9999977995993,
49.9999978070454, 49.9999978120090, 49.9999978153171, 49.9999978175225, 49.9999978189945,
49.9999978199773, 49.9999978206296, 49.9999978210643, 49.9999978213563, 49.9999978215486
49.9999978216794, 49.9999978217653, 49.9999978218208, 49.9999978218586, 49.9999978218854,
..., 49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219
49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369,
49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369, 49.9999978219369
]

g_{opt} = [47.0000031081318, 47.0000029153547, 47.0000027868815, 47.0000027012496,
47.0000026441704, 47.0000026061242, 47.0000025807596, 47.0000025638514, 47.0000025525782,
47.0000025450665, 47.0000025400550, 47.0000025367195, 47.0000025344928, 47.0000025330058,
47.0000025320169, 47.0000025313558, 47.0000025309146, 47.0000025306273, 47.0000025304313,
47.0000025302986, 47.0000025302143, 47.0000025301532, 47.0000025301174, ..., 47.0000025300
47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386,
47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386,
47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386,
47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386,
47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386,
47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386, 47.0000025300386]

f_{opt} = 2.0427e-09

— **Problème** $N°5$

t_{opt} = [59.9965935826819, 39.3896781511434, 49.1000072486536, 48.1177986887414, 48.1177986887414, 48.1177986887414, 48.1177986887414, 48.1177986887414, 48.1177986887414, 48.1177986887414, 48.1177986887414, 48.1177986887413, . . . , 48.1177986887414, 48.1177986887 48.1178965904889, 48.1172361885543, 48.1167453382156, 48.1161370224358, 48.1162278900866, 48.1162285299997, 48.1162285299997, 48.1162278900867, 48.1162278900866, 48.1162278900866, 48.1162285299997, 48.1162278900867, 48.1162278900866, 48.1162278900866, 48.1162278900866, 48.1162278900866, 48.1162278900866, 48.1162278900866, 48.1162278900866, 48.1162278900867, 48.1162278900866, 48.1162278900867, 48.1162278900866, 48.1162278900867, 48.1162285299996, 48.1162278900866, . . . , 48.1146574670841, 48.1146574670840, 48.1146574670843, 48.1146574670 48.1146574670838, 48.1146574670842, 48.1146581070294, 48.1146574670842, 48.1146574670841, 48.1146574670839, 48.1146581070296, 48.1146574670839, 48.1146574670839, 48.1146574670840, 48.1146574670841, 48.1146574670843, 48.1146574670841, 48.1146574670844, 48.1146574670845, 48.1146581070291, 48.1146574670838, 48.1146574670839, 48.1146574670843, 48.1146574670843, 48.1146581070296, 48.1146581070293, 48.1146581070297, 48.1146581070294, 48.1146581070292, 48.1146581070294, 48.1146581070297, 48.1146581070294, 48.1146581070296, 48.1146581070295, 48.1146581070292, 48.1146581070297, 48.5798382319947, 44.5699121603003, 48.6826132884294, 46.2253467982734]

g_{opt} = [49.6180805776790, 46.1436807200235, 50.5604947466825, 50.0198638251367, 50.0198638251366, 50.0198638251368, 50.0198638251368, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251366, 50.0198638251368, 50.0198638251367, 50.0198638251366, 50.0198638251366, 50.0198638251368, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251366, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251366, 50.0198638251366, 50.0198638251366, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251366, 50.0198638251367, 50.0198638251366, 50.0198638251366, 50.0198638251367, 50.0198638251367, 50.0198638251368, 50.198638251366, 50.0198638251366, . . . , 50.01988847494 50.0198884749493, 50.0198884749492, 50.0198884749490, 50.0198884749492, 50.0198884749491, 50.0198884749492, 50.0198884749492, 50.0198884749493, 50.0198884749492, 50.0198884749491, 50.0198884749493, 50.0198884749492, 50.0198920451093, 50.0198616367953, 50.0198658019850, 50.0198658019850, 50.0198663970120, 50.0198652069580, 50.0198658019851, 50.0198658019851, 50.0198658019848, 50.0198658019850, 50.0198658019850, 50.0198658019851, 50.0198658019849, 50.0198658019849, 50.0198663970121, 50.0198658019850, 50.0198658019851, 50.0198658019850, 50.0198652069580, 50.0198652069580, 50.0198616367954, 50.2747991016594, 48.4773430447825, 47.7831152806493, 46.5118965016230]

f_{opt}= 8.3620e+03

— **Problème** $N°7$

t_{opt} = [59.9212204844902, 44.1258350225426, 52.7241854831235, 48.6512161099058, 47.7390045049777, 47.2701130067373, 47.1161689335012, 47.1817757721615, 47.3941792938639, 47.6977364559831, 48.0491531548316, 48.4132734131031, 48.7608420643725, 49.0696443444814, 49.3269128124345, 49.5296285453415, 49.6823183814168, 49.7933105136962, 49.8719041024784, 49.9265051361432, 49.9639812176631, 49.9894244512244, 50.0066252205417, 50.0181806149858, 50.0259354482205, 50.0311041108258, 50.0345942840040, 50.0368995293378, 50.0384364556393, 50.0394859400174, 50.0401714047417, 50.0406206947227, 50.0409380051916, 50.0411250094367, 50.0412564575235, 50.0413593858843, 50.0414172259652, 50.0414487430144, 50.0414842619169, . . . , 50.0423675795017, 50.0423449469579, 50.0423223144145, 50.0423500359416, 50.0423500359 50.0423726684854, 50.0423726684851, 50.423500359415, 50.0423500359417, 50.0423500359414, 50.0423449469580, 50.0423223144144, 50.0423500359416, 50.0423449469582, 50.0423449469581, 50.0423223144143, 50.0423223144142, 50.0423726684852, 50.0423223144145, 50.0423726684853, 50.0423449469579, 50.0423223144146, 50.0423726684850, 50.0423449469580, 50.0423223144145, 50.0423500359415, 50.0423449469579, 50.0423726684852, 50.0423726684852, 50.0423726684852, 50.0423726684855, 50.0423449469583, 50.0422945928872, 50.0422945928870, 50.0423223144143, 51.4216900640271, 48.5120415553057, 51.2733069208632, 47.4960545901384]

g_{opt} = [40.0604559065002 43.3484211012416, 47.3051074648373, 43.1594619889752 44.2113454419626, 44.9080397908770, 45.3700850082614 45.6769071730912, 45.8807831285283, 46.0163425748416, 46.1065865330368, 46.1666497319074, 46.2066572555146, 46.2333605940212, 46.2511100237804, 46.2629624991057, 46.2708222373163, 46.2760901375108, 46.2795779402480, 46.2819439527005, 46.2835152406258, 46.2845355089860, 46.2852285647276, 46.2856868613494, 46.2859779022771, 46.2862006235101, 46.2863265959183, 46.2864459987350, 46.2864908965868, 46.2865411699646, 46.2865580166407, 46.2865779588016, 46.2865710721672, 46.2866091960566, 46.2866091960565, 46.2866091960566, 46.2866091960566, 46.2866091960566, 46.2866091960566, 46.2866091960566, 46.2866091960566, . . . , 46.2865974601263, 46.2865974601262, 46.2865974601 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.2865974601263, 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601261, 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.2865974601260, 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601261, 46.2865974601261, 46.2865974601262 46.2865974601262, 46.2865974601262, 46.2865974601261, 46.2865974601261, 46.2865974601262, 46.9490789616260, 46.3562465042462, 46.8523692633350, 46.2412600706019]

$f(x_{opt})$= 614.8179

— **Problème** $N°8$

t_{opt} = [59.9955820056936, 36.0712029489669, 50.2454706990128, 49.6177905554873, 49.7705332668685, 49.8723778870294, 49.9402992679792, 49.9855768818032, 50.0157384468350, 50.0358752195343, 50.0492830578877, 50.0582321480106, 50.0642142663296, 50.0681813509998, 50.0708323743582, 50.0725911299988, 50.0737720354064, 50.0745576798561, 50.0750879387430, 50.0754193687288, 50.0756589249792, 50.0758034903766, 50.0759300100183, 50.0759885105085, 50.0760369773593, 50.0760684710356, 50.0760827762132, . . . , 50.0762028363108, 50.0762028571 50.0762028571860, 50.0762028363109, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363108, 50.0762028363108, 50.0762028363106, 50.0762028363107, 50.0762028363109, 50.0762028363107, 50.0762028363108, 50.0762028363106, 50.0762028363108, 50.0762028571860, 50.0762028571859, 50.0762028571861, 50.0762028363108, 50.0762028571860, 50.0762028363108, 50.0762028363107, 50.0762028571860, 50.0762028363109, 50.0762028571859, 50.0762028363108, 50.0762028363108, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363106, 50.0762028363106, 50.0762028571859, 50.0762028571860, 50.0762028363107, 50.0762028571858, 50.0762028363107, 50.0762028363109, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363109, 50.0762028571859, 50.0762028363108, 50.0762028363106, 50.0762028571859, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363108, 50.0762028363108, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363107, 50.0762028363108, 50.0762019386804, 50.0762156575857, 50.0762019595556, 50.0762028363109, 50.0762019595554, 50.0762156784609, 50.0762028363108, 50.0761900150367, 50.0762037339414, 50.0762028363108, 50.0762019386803, 50.0762165552160, 50.0761900150369, 50.0761917894231, 50.0761918102983, 50.761909126674, 50.0762037339413, 50.0762028363109, 50.0762028363107, 50.0762037339413, 50.0761909126676, 50.0761917894232, 50.4831597547207, 44.5354561563803, 46.4747013128982, 44.0883029423238]

---

g_{opt} = [48,5760049988534, 44,5446953903249, 47.1840472077787, 46.7207323478076, 46.5454577453870, 46.4286236027076, 46.3507114632791, 46.2988079360188, 46.2641730001998, 46.2410825949350, 46.2257055870721, 46.2154531591113, 46.2086282587842, 46.2040838079521, 46.2010350803360, 46.1989879045648, 46.1976486399916, 46.1967540838008, 46.1961577435660, 46.1957600869450, 46.1954907880448, 46.1953107546553, 46.1951915541827, 46.1951123499867, 46.1950488159300, . . . , 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540509 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540278740, 46.1949540278740, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540278740, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509954, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.1949540509954, 46.1949540509953, 46.2876981281956, 44.9511682448289, 45.3680044296989, 45.4672612192355]

$f(x_{opt})$= 640.8417

3.2 Analyse des résultats théoriques

Les solutions obtenues par calcul sous les hypothèses de Loué Jean-François, Jondeau Éric dans [4] qui stipulent que les recettes n'atteindront jamais leurs niveaux supérieurs fixés et que les dépenses également ne seront jamais en dessous de leurs niveaux inférieurs fixés (c'est-à-dire ${h_s}^1(x) < 0$ pour tout $s \in I$) , montrent en effet que les choix optimaux du gouvernement proposé par le modèle tendent vers l'objectif visé par ce dernier (voir (2.49), (2.51)). Cette hypothèse peut être rapidement influencée par des phénomènes naturels parfois imprévisibles. Aussi, dans les pays du tiers-monde où le budget est principalement basé sur les taxes fiscales, les recettes sont souvent inférieures au niveau espéré. Pour éviter de se livrer davantage à des endettements le gouvernement doit réduire ses dépenses au niveau inférieur possible à certaines périodes de son exercice. Il est donc préférable de se placer dans les cas où les recettes peuvent atteindre leurs niveaux supérieurs fixés ou non et que les dépenses peuvent atteindre leurs niveaux inférieurs fixés ou non.

3.3 Analyse des Résultats Numériques

Les résultats dans ces différents cas sont ceux des tests numériques. Les tests numériques ont été réalisés en utilisant le logiciel Matlab.

Sans coût d'ajustement

Option Trimestrielle

On constate dans les problèmes $N°1$ et $N°4$ que les recettes et les dépenses s'établissent au niveau de leurs cibles (t^*, g^*) avec des minima respectifs de $f(x_{opt}) = 5.1189.10^{-13}$ et $f(x_{opt}) = 5.1503.10^{-13}$. En se plaçant immédiatement à sa cible $(t = t^*, g = g^*)$, le Gouvernement parvient à rembourser intégralement son endettement initial, son comportement n'est donc soumis, en pratique, à aucune contrainte.

On constate dans le problème $N°3$, que les recettes décroissent vers la cible de recettes du gouvernement tandis que les dépenses croissent vers la cible de dépenses avec un minimum $f(x_{opt}) = 56.5337$. Le gouvernement réalise un solde budgétaire de 39.5258% en part de *pib*. Elle indique que la somme actualisée des surplus primaires futurs $(t_s - g_s)$ doit permettre le remboursement de la dette publique initiale.

Option Mensuelle

Dans les problèmes $N°1$ et $N°4$, On constate que les recettes et les dépenses s'établissent au niveau de la cible de recettes et de dépenses du gouvernement pour un coût optimal respectif $f(x_{opt}) = 1.5357.10^{-12}$ et $f(x_{opt}) = 1.5368.10^{-12}$. Dans ce cas le gouvernement parvient à rembourser intégralement sa dette initiale. Son comportement n'est donc soumis, en pratique, à aucune contrainte.

Dans le problème $N°3$, on constate que les recettes croissent vers la cible de recettes du gouvernement tandis que les dépenses décroissent vers la cible de dépenses avec un coût minimal de $f(x_{opt}) = 11.0779$. Au cours des 3 premier mois le déficit mensuel atteint 1.4748% en part du Pib. Ceci est dû à la dette initiale. Á partir du quatrième mois, le solde mensuel est positif et atteint 21.2224% en part du pib. Cette équilibre est dû à la contrainte budgétaire intertemporelle qui indique que la somme actualisée des surplus primaires futurs $(t_s - g_s)$ permet le remboursement de la dette publique initiale.

3.3.1 En présence de coûts d'ajustement

Option trimestrielle

Dans les problèmes $N°5, 7$ et 8, on constate une oscillation économique des recettes et des dépenses du gouvernement.

Dans le problème $N°5$ le gouvernement réalise un solde annuel de $13,1584\%$ en part du pib avec un coût minimal de $f(x_{opt}) = 25.2050$.

Dans le problème $N°7$ le solde annuel du gouvernement est $38,7923\%$ en part du pib avec un coût minimal $f(x_{opt}) = 151.8878$.

Dans le problème $N°8$ le gouvernement réalise un solde annuel de 11.8441% en part du pib avec un coût minimal $f(x_{opt}) = 3.4841.10^{-13}$.

Option Mensuelle

Dans le problème $N°5$, on a une forte concentration des recettes et des dépenses autour de l'ajustement et convergeant vers la cible de recettes et de dépenses du gouvernement. Dans ce cas le gouvernement réalise un solde annuel de 35.5825% avec un coût minimal de $f(x_{opt}) = 2.3720.10^{-12}$.

Dans le cas du problème $N°7$, le gouvernement réalise un solde de 61.12625% en part de pib avec un coût minimal $f(x_{opt}) = 122.7864$.

Dans le cas du problème $N°8$, le gouvernement réalise un solde égale à $38,4171\%$ en part de pib avec un coût minimal $f(x_{opt}) = 25.2050$.

Outre le remboursement de sa dette et son déficit budgétaire de long terme, le gouvernement doit maintenant financer l'incidence de son désajustement initial.

En comparant les résultats obtenus dans le cas où le gouvernement a un coût d'ajustement par rapport au cas où il n'en a pas, on constate immédiatement que les choix sont concentrés autour de l'ajustement et convergent vers l'objectif fixé ; ce qui n'est pas le cas dans les cas où le gouvernement n'a pas de coût d'ajustement.

En observant l'évolution de la recette sur les problèmes $N°7$ et $N°8$, nous notons une forte concentration des données autour d'un ajustement que dans les autres cas. Cela montre que dans la pratique, le choix de cette option minimisera les fluctuations sur l'économie du pays.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié la programmation non linéaire : optimisation sans contrainte et l'optimisation avec contrainte d'une part. D'autre parts, les problèmes issus de la recherche d'une méthode optimale de gestion des finances publiques. L'objectif est de trouver des solutions qui tendent vers la cible (t^*, g^*) à moindre coût en présence de coût d'ajustement. Les résultats trouvés sont satisfaits et reflètent la réalité. Ce que montre les résultats théoriques (voir Eqs. (2.49) et (2.51)). La résolution numérique nous a donné les mêmes types de résultats et montre aussi la différence entre les solutions en présence de coût d'ajustement et sans ajustement. Les résultats de ces problèmes sont plus concentrés autour de l'ajustement que dans les autres cas. Cela montre que dans la pratique, le choix de cette option minimisera les fluctuations sur l'économie du pays. Néanmoins, nous envisageons de perfectionner leur convergence et de les développer de sorte qu'ils s'adaptent aux problèmes différentiables ou non différentiables en utilisant le sous différentiel. Bien que les résultats obtenus sur les problèmes de grande taille soit satisfaisants, nous étudierons la complexité de nos algorithmes afin de les raffiner.

Bibliographie

[1] Barro, R.J. : On the determination of the public debt. J. Polit. Econ. 87(5) (1979).

[2] Dietsch M., Garnier O. (1989). "La contrainte budgétaire intertemporelle des administrations publiques : conséquences pour l'évaluation des déficits publics", Economie et Prévision, $n°$90, pp.69-85.

[3] Hamilton J., Flavin MA. (1986)."On the Limitations of Government Borrowing : A Framework for Empirical Testing", The American Economic Review, vol.76, $n°$4.

[4] Jean-François, L., Eric, J. : La gestion optimale des finances publiques en présence de coûts d'ajustement, Economie & prévision, « No 104, 1992-3. Politique budgétaire, taux d'intéret, taux de change, pp. 19–38 (1992). https ://doi.org/10.3406/ecop. 1992.5292.

[5] Jean Koudi. "Thèse : Etude des multiplicateurs de Lagrange et de leur efficacité pratique en optimisation : algorithmes de minimisation asymptotiquement exacte pour la méthode de Karush-Kuhn-Tucker (2018)".

[6] Jean K., Guy D., Babacar, M.N., Mamadou, K.T : Algorithms for asymptotically exact minimizations in Karush-Kuhn-Tucker methods. J. Math. Res. 10(2) (2018) https ://doi.org/10.5539/jmr.v10n2pxx.

[7] Ndiaye Babacar. " Cours : Recherche Opérationnelle : Programmation Linéaire, Programmation Linéaire en Nombres Entiers, Programmation non Linéaire, Les Modèles sur les Réseaux " (2014-2015).

[8] Roubini N., Sachs J.D. (1989). "Political Economic Determinants of Budget Deficit in the Industrial Democracies", European Economic Review, $n°$33.

[9] Rupesh, T., Ramnik, A., Kalyanmoy, D., & Joydeep, D., (2010) : Approximate KKT points and a proximity measure for termination. Tech. Rep. 2010007, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory.

[10] Rupesh, T., Ramnik, A., Kalyanmoy, D., & Joydeep, D., (2009). Approximate KKT points for iterates of an optimizer. Tech. Rep. 2009009, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory.

[11] Stephen M. Pollock, Michael D. Maltz, (1994) : Operations Research in the Public Sector : An Introduction and a Brief History. Handbooks in OR & MS, Vol. 6 Elsevier Science B.V. All rights reserved

[12] Trehan B., Walsh C.E. (1991). Testing Intertemporal Budget Constraints : Theory and applications to the U.S. Federal Budget and Current Accounts Deficits, Journal of Money.

[13] Trehan B., Walsh C.E. (1988). Common Trends, the Government Budget Constraint, and Revenue Smoothing, Journal of Economic Dynamics Control, $n°12$.

[14] Wilcox D.W. (1989). "The Sustainability of Government Deficits : Implications of the Present-Value Borrowing Constraint", Journal of Money, Credit, and Banking, vol.21 $n°3$.