UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Analyse et Géométrie Complexe

Thème : Régularité L^p du $\bar{\partial}$ sur le produit de boules unités

Présenté par : Dieynaba SAMB

Sous la direction de : Dr Mamadou Eramane BODIAN & Dr Souhaibou SAMBOU

Sous la supervision du : Pr Marie Salomon SAMBOU

Soutenu publiquement le 18 **Février** 2022 **devant le jury ci-après :**

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président	UASZ
Amoussou Thomas GUEDENON	Professeur Assimilé	Examinateur	UASZ
Timack NGOM	Maître de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Mamadou Eramane BODIAN	Maître de Conférences Assimilé	Directeur	UASZ
Souhaibou SAMBOU	Chercheur	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2020-2021

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, il est question du problème de régularité L^p du $\bar{\partial}$ sur le produit de domaines dans $\mathbb{C}^n$. Pour cela, nous nous intéressons d'abord aux travaux de Chakrabarti et Shaw qui traitent le cas L^2. Les auteurs montrent que l'opérateur $\overline{\partial}$ est d'image fermée dans l'espace L^2 sur le produit de domaines relativement compacts avant de déduire la régularité de la solution canonique sur les $(p, 1)$ formes différentielles dans l'espace de Sobolev partiel. Il s'agit donc de prouver les Théorèmes (0.1) et (0.2).
Ensuite il s'agit d'étendre ces résultats aux espaces L^p sur le produit de boules unités : ce qui correspond au travail fait par Khidr. Il s'agit alors de prouver les Théorèmes (0.3) et (0.4).

Remerciements

Ce présent mémoire est dédié, avec amour et gratitude, à toutes les personnes qui m'ont soutenue, encouragé dans mes études.

Etant dans l'embarras par rapport à la branche des mathématiques à suivre, j'ai fait la rencontre du Dr Souhaibou SAMBOU qui en ce moment rédigeait sa thése en analyse et géométrie complexe. Cette rencontre a révélé mon intuition sur ce domaine jusqu'au jour où j'ai assisté en licence au cours d'analyse complexe d'une variable, enseigné par Dr Mansour SANE. La suite de ce cours en master 1 et 2 par le professeur Marie Salomon SAMBOU a favorisé mon amour du domaine et mon choix à rédiger mon mémoire sur l'analyse et la géométrie complexe.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au professeur Marie Salomon SAMBOU pour la supervision, à mes directeurs de mémoire Dr Mamadou Eramane BODIAN et Dr Souhaibou SAMBOU, pour leur patience, leur disponibilité et surtout leur judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Leur vision des mathématiques, claire et synthétique, reste un modéle pour moi.

L'enseignement de qualité dispensé par le corps professoral du département de Mathématiques de l'UASZ (Université Assane Seck de Ziguinchor) a également su nourrir mes réflexions et a représenté une profonde satisfaction intellectuelle, merci donc aux professeurs. Je remercie en particulier les professeurs : Marie Salomon SAMBOU, Amoussou Thomas GUEDENON, Timack NGOM qui ont bien voulu être membres du jury de ma soutenance.

Ma reconnaissance va à l'endroit du Dr Sény DIATTA, de Mr Cheikh Ahmed Tidiane Ndiaye et de Mr Amadou Sokhna pour avoir corrigé mon document de la meilleure des manières.

Je remercie sincèrèment les participants du séminaire (Abdoulaye DIOUF, Papa BADIANE, Pape Modou SARR, Christophe NANGO, Moustapha CAMARA, Nestor DJINTELBE,Winnie Ossette INGOBA...) du département de Mathématiques qui se tient tous les samedis et qui est riche d'enseignements mathématiques.

Je tiens énormément à remercier mes camarades de promotion pour leur soutien pendant toute la période de ce mémoire en particulier mes camarades du groupe de recherche analyse et géométrie complexe : Amadou Seydi (Monsieur Ho) et Daouda Diack (Diacki-Neumann). Je retiendrai d'eux ces nombreuses contributions et les critiques mathématiques qui surgissent lors de nos rencontres de recherche, qui se tiennent journalièrement à ZIP(Ziguinchor Institut polytechnique).

Je remercie très chaleureusement les responsables de Ziguinchor Institut Polytechnique, Alassane TAMBOURA et Souhaibou SAMBOU, pour m'avoir permis d'effectuer mes recherches dans leurs locaux.

Les motivations et les encouragements, les chamailleries qui rendent enfantin, me divertis quand il le faut.

J'adresse mes sincéres remerciemments à :

Mon père Malick Amadou SAMB et toute la famille SAMB sans exception !

Ma mère Oulèye LOUM, ton amour et ton affection inestimable, ta confiance et tes sacrifices sans fin. Pour toutes les valeurs que tu as su m'inculquer, je te suis redevable d'une éducation dont je suis fière ! ! !

Mes oncles Mamadou LOUM, Youssoupha LOUM, et Mamadou DIALLO pour leurs soutiens ineffable

dés le bas âge et toute la famille LOUM et DIALLO sans exception !

Mon maître coranique Elhadi Ibrahima THIAM avec son dahira Rouhoul Adab à Nioro du Rip et la DETBN UASZ(Dahira des Elèves et Etudiants Talibé Baye Niass).

Mes frères (Cheikh Ahmed Tidiane NDIAYE (Adoré) et Mouhameth Djim DIOP), ma soeur Adja Lamanatou DIOP pour leur soutiens inconditionnels et leur amour inestimable qu'ils ont su m'apporter !

Toutes les personnes avec qui j'ai eu à cohabiter aux pavillons de l'UASZ (Dienabou BALDE, Elisabette GUEYE...) de la chambre 30C à la chambre 37E en passant par les chambres 27C, 28C et 39C pour la belle cohésion sociale dans une parfaite harmonie.

Mes plus que sœurs (Marie FAYE, Awa BARRY, Souhadou DIALLO, Fatou DIENG...).

Mes filleules que j'aime et que je chéris tant (Fatou DIEYE, Ndeye Aida SARR, Rokhaya SECK, Tacko Siré BA, Mariama CISSOKHO, Yacine THIAM, Salimata DIALLO,...).

Toutes les personnes que j'ai acceuillies au sein de l'UASZ (garçons comme filles).

Ma tutrice Fatim THIAM et toute la famille GUEYE à Boucotte Ziguinchor.

Aissatou BARRY (Maman de Awa BARRY) et toute la famile DIALLO à Alwar Ziguinchor.

Gaissiry SOUMARE (Maman de Lala DIEME) et toute la famille DIEME à Boucotte Ziguinchor.

Yacine DIAHABY (tante de Adama DIOUF) à Belfort Ziguinchor.

Toute la team Jeunesse Consciente (J.C) de Nioro du Rip.

Mes soeurs, mes fréres, mes neveux et nièces, ami(e)s, mes cousins(e)s, mes tantes, oncles et parents pour vos encouragements, que ce travail soit le témoignage sincère et affectueux de ma profonde reconnaissance. Et pour tout ce que vous avez fait pour moi ! Enfin à tous ceux qui ont participé à ma reussite,
A vous tous, je vous dédie ce travail et vous dis merci.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail :

A ma défunte
grand mère éducatrice
feue Maïmouna BOUSSO
que le Miséricordieux a pris le 1 Novembre 2021.

Introduction

L'étude de la régularité pour le problème du $\overline{\partial}$ sur le produit de domaine a une longue histoire dans la théorie de l'analyse complexe de plusieurs variables. Sergeev et Henkin (1981) ont prouvé que si D et G sont des domaines strictement pseudoconvexes a bord lisse dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$, respectivement, alors pour toute $(0,q)$-forme différentielle f, $\overline{\partial}$ fermée, a coefficients de classe C^∞ dans $D \times G$ et continues dans $\overline{D} \times \overline{G}$, alors il existe une $(0,q-1)$-forme différentielle u définie dans $D \times G$ avec des coefficients de même régularité que ceux de f telle que $\overline{\partial}u = f$ avec $q = 1, \cdots, n+m$.
Jakobczak (1991) a prouvé que si D et G sont deux domaines d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$, E et F sont des ouverts respectivement de ∂D et ∂G tels que ∂D et ∂G soient lisses et strictement pseudoconvexes en tous points de E et F, et si K est un sous-ensemble fermé de $E \times F$, alors pour toute $(0,q)$-forme différentielle f tel que $1 \leq q \leq n+m$, $\overline{\partial}$ fermée, a coefficients lisses dans $D \times G$ et continue dans $(D \cup E) \times (D \cup F) \setminus K$, alors il existe une $(0,q-1)$-forme différentielle u telle que $\overline{\partial}u = f$ et qui a les mêmes propriétés de régularité que la donnée f.
La régularité de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann et l'opérateur $\overline{\partial}$ sur un polydisque a été largement étudiée dans [4] et [9].

L'objectif dans ce mémoire c'est de faire la preuve des résultats de Khidr en partant des résultats de Chakrabarti et Shaw. La technique c'est de montrer d'abord que le $\overline{\partial}$ est d'image fermée puis d'en déduire la régularité de la solution canonique de l'équation $\overline{\partial}u = f$.
Chakrabarti et Shaw dans [2], ont établi les résultats suivants :
■ pour $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N$ un produit de domaines Ω_j relativement compacts, à bord lipschitzien. Le résultat est le suivant :

Th*é*orème 0.1.

Pour $j = 1, \ldots N$, soit Ω_j un domaine relativement compact à bord lipschitzien dans une variété hermitienne complexe M_j.
Soit $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N \subset M_1 \times \ldots \times M_N$ un produit de domaines.
Supposons que l'opérateur $\overline{\partial}$ est d'image fermée dans $L^2(\Omega_j)$ pour chaque j et en tout bidegré, alors l'opérateur $\overline{\partial}$ est d'image fermée dans $L^2(\Omega)$ en tout bidegré.
De plus, on a la formule de Kunneth pour la L^2 cohomologie :

$$\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega) = \mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega_1)\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega_N),$$

où $\widehat{\otimes}$ désigne le complété du produit tensoriel entre plusieurs espaces de Hilbert.

Ils ont aussi obtenu un résultat de régularité de la solution canonique de l'opérateur $\overline{\partial}$ pour les $(p,1)$-formes différentielles dans l'espace de Sobolev partiel noté $\tilde{W}^k(\Omega)$. Ils ont établi le résultat suivant :

Th*é*orème 0.2.

Soit Ω comme dans le Théorème (0.1).
Alors l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann N existe pour tous les (p,q)-formes différentielles à coefficients dans $L^2(\Omega)$. On suppose que pour chaque j, l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann N préserve l'espace des formes différentielles à coefficients dans $W^k(\Omega_j)$ pour chaque entier $k \geq 0$. Pour tout p avec $0 \leq p \leq dim_{\mathbb{C}}\Omega$, soit f une $(p,1)$-forme différentielle, $\overline{\partial}$-fermée sur Ω et orthogonale aux $(p,1)$ formes harmoniques. On suppose que les coefficients de f sont dans l'espace de Sobolev partiel $\tilde{W}^k(\Omega)$ pour tout entier $k \geq 0$. Alors la solution canonique $u = \overline{\partial}^* Nf$ de l'équation $\overline{\partial}u = f$ a aussi des coefficients dans $\tilde{W}^k(\Omega)$.

■ Khidr dans [13] a étendu les résultats de Chakrabarti et Shaw vers l'espace L^p sur $\Omega = B_1 \times \ldots \times B_N$ où les $B_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ sont des boules unités. D'abord, il énonce le résultat suivant :

Théorème 0.3.

Pour $j = 1, \ldots, N$, *soit* $B_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ *une boule unité et soit* $\Omega = B_1 \times \ldots \times B_N$ *un domaine de* $\mathbb{C}^n$ *tel que* $n = n_1 + \ldots + n_N$ *et* $n_j \geq 2$ *pour chaque* j.
Alors l'opérateur $\overline{\partial}$ *est d'image fermée dans* $L^p_{r,q}(\Omega)$, $0 \leq r \leq n$, $1 \leq q \leq n$, $1 \leq p \leq \infty$. *De plus, on a la formule de Kunneth pour les groupes de cohomologie* L^p *donnée par*

$$\mathbf{H}^{r,q}_{L^p}(\Omega) = \mathbf{H}^{r,q}_{L^p}(B_1)\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}\mathbf{H}^{r,q}_{L^p}(B_N),$$

où $\widehat{\otimes}$ désigne le complété du produit tensoriel entre plusieurs espaces de Banach.
Ensuite il montre que la solution canonique du problème du $\overline{\partial}$ gagne $\dfrac{1}{2}$ en régularité qui provient de l'espace de Sobolev partiel. Il établit ainsi le résultat suivant :

Théorème 0.4.

Soit Ω *comme dans le Théorème* (0.3).
Alors l'opérateur $\overline{\partial}$*-Neumann* N *existe pour tous les bidegrés sur* $L^p_{r,q}(\Omega)$ *et préserve l'espace des formes différentielles à coefficients dans* $\tilde{W}^{k,p}(\Omega)$ *pour tout entier* $k \geq 0$ *et* $1 < p < \infty$. *Si* f *est une forme différentielle* $\overline{\partial}$*-fermée dans* $\tilde{W}^{k,p}_{r,1}(\Omega)$ *qui est orthogonale à l'espace des* $(r, 1)$*-formes harmoniques, alors la solution canonique* u *de l'équation* $\overline{\partial}u = f$ *est dans* $\tilde{W}^{k+\frac{1}{2},p}_{r,0}(\Omega)$.
De plus, la projection de Bergman B *est une application continue sur* $W^{k,p}(\Omega)$ *sur elle-même pour tous* $1 < p < \infty$ *et* $k \in \mathbb{N}$.

Les principaux outils de la preuve des résultats sont : l'homotopie canonique de l'opérateur $\overline{\partial}$ dans la boule unité due à Harvey et Polking en (1984) dans [11], la densité de formes lisses jusqu'au bord dans la norme du graphe L^p sur *dom*(∂) due à Ruppenthal en (2011) dans [16], la construction du produit tensoriel due à Defant et Floret dans [6].
Nous commencerons notre étude par le cas du produit de domaines relativement compacts dû Chakrabarti et Shaw. Nous terminerons cette étude par le cas du produit de boules unités dû à Khidr.

1 Préliminaires

1.1 Géométrie différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty, \omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois différentiables et de dérivée k-ième continue et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

Définition 1.1 (Carte)**.**

Soit M une variété topologique.
Une carte sur M est un couple (U, φ) où $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

Définition 1.2 (Atlas)**.**

Un atlas de classe C^k est une collection d'homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$, appelée carte différentielle où $(U_\alpha)_{\alpha \in I \subset \mathbb{N}}$ constitue un recouvrement d'ouverts de X, $(V_\alpha)_\alpha$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous $\alpha \ et \ \beta \in I$, si $(U_\alpha \cap U_\beta) \neq 0$ les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^k [1].
Les composantes $\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ sont appelées coordonnées locales sur U_α définies par la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Définition 1.3 (Variété différentiable)**.**

Une variété différentiable X de dimension n et de classe C^k est un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4 (Vecteur tangent)**.**

Soit X une variété différentiable de classe C^k et de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert et $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$.
Une fonction f est de classe C^s sur Ω si $fo\varphi_\alpha^{-1}$ est de classe C^s sur $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \Omega)$ pour tout $\alpha \in I$.
L'ensemble des fonctions de classe C^s sur Ω est noté $C^s(\Omega, \mathbb{R})$.
Un vecteur v, tangent à X au point x_0, est par définition un opérateur différentiel qui agit sur les fonctions, c'est-à-dire pour tout $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on associe $v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$; où les v_j sont des réels.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ autour de x_0 sur Ω, on écrit simplement

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définition 1.5 (Espace tangent, Espace cotangent)**.**

L'ensemble des vecteurs tangents en x_0 est appelé espace tangent en x_0.
Par conséquent, pour tout $x_0 \in \Omega$, le n-uplet $\{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\}_{1 \leq j \leq n}$ constitue une base de l'espace tangent à X au point x_0; noté $T_{x_0}X$.
Son dual $T_{x_0}^*X$ est l'espace vectoriel cotangent à X au point x_0.
Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, sa différentielle au point x_0 est une forme linéaire sur $T_{x_0}X$, définie par :

$$df_{x_0}(v) = v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \ \ \forall \ \ v \in T_{x_0}X.$$

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $U \subset E$, $V \subset F$ deux ouverts, $f : U \to V$ une application. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^k si f est inversible et si f et f^{-1} sont différentiables de classe C^k.

En particulier, si $v_j = dx_j(v)$, alors localement $df = \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$.

La famille $\{dx_1, ..., dx_n\}$ est la base duale de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ et c'est la base de l'espace cotangent $T^*_{x_0}X$.

Définition 1.6 (Fibré tangent, Fibré cotangent)**.**

Les unions disjointes $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ et $T^*X = \bigcup_{x \in X} T^*_x X$ sont appelées respectivement fibré tangent et fibré cotangent.

Définition 1.7 (Champ de vecteurs)**.**

Soient X une variété différentiable de classe C^s avec $s > k$ et Ω un ouvert de X. On appelle champ de vecteurs de classe C^k sur Ω toute application $s : \Omega \longrightarrow TX$ de classe C^k telle que $s(x) \in T_x X$ pour tout $x \in X$.
On note $\Gamma^k(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^k sur X.

Définition 1.8 (Section de fibré cotangent)**.**

Soient X une variété différentiable, Ω un ouvert de X et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Une section de classe C^k de T^*X sur Ω est une application $s : \Omega \to T^*X$ de classe C^k telle que $s(x) \in T^*_x X$ pour tout $x \in \Omega$. On note $C^k(\Omega, T^*X)$ l'espace des sections de classe C^k de T^*X.
Si $\Omega = X$, on parle de section globale.

Localement, une section du fibré cotangent s'écrit : $s(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i(x) dx_i$.

Remarque 1.1.

Un champ de vecteurs sur Ω est une section de fibré tangent TX définie sur Ω.

Définition 1.9 (1-forme différentielle)**.**

Une 1-forme différentielle sur U est une application

$$\begin{aligned} w :\ & U \longrightarrow T^*U = \bigcup_{a \in U} T^*_a U \\ & a \longmapsto w_a \end{aligned}$$

à valeurs dans l'espace cotangent à U en tout points a.
Si $a = (x_1, \ldots, x_n)$, on a :
$w(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i(x_1, \ldots, x_n)(dx_i)_a$
où les coefficients $w_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ dépendent de a :
L'expression générale d'une 1-forme différentielle est donc $w = \sum_{i=1}^{n} w_i dx_i$, où les coefficients $(w_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des fonctions $w : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
Une 1-forme différentielle est de classe C^k si les coefficients w_i le sont.
On note $\Omega^1(U)$ l'ensemble des 1-formes différentielles de classe C^∞ sur U.

Remarque 1.2.

Une 1-forme différentielle est une section de fibré cotangent T^*X définie sur Ω.

Exemple 1.1 (1-forme différentielle)**.**

1. dx est une 1-forme différentielle de coefficient 1.

2. $w(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}dx - \dfrac{y}{x^2+y^2}dy$ est une 1-forme différentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Définition 1.10 (r-forme différentielle)**.**

Soient n et r deux éléments de $\mathbb{N}$, et X une variété différentiable de classe C^k de dimension n, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Une r-forme différentielle de classe C^k sur X est une section de classe C^k du fibré des r-formes extérieures noté $\Lambda^r T^* X$.
Ainsi, une r-forme différentielle ω associe à tout x dans X, une r-forme linéaire alternée ω_x sur l'espace tangent $T_x X$ à X en x.

Dans un ouvert de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$, pour chaque $a \in X$, nous avons la base $\{(dx_1)_a, \dots, (dx_n)_a\}$ de l'espace cotangent $T_a^* M$. On a

$$\Lambda^r T_a^* M = vect\{(dx_{i_1})_a \wedge \dots \wedge (dx_{i_r})_a\}_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n}.$$

Une r-forme différentielle u de classe C^k s'écrit
$u(x) = \sum_{|I|=r}^{'} u_I(x) dx_I$ où $u_I \in C^k$
$I = (i_1, ..., i_r) \in \mathbb{N}^n$ avec $1 \le i_1 < ..... < i_r \le n$
$dx_I = dx_{i_1} \wedge .... \wedge dx_{i_r}$.

On note $C^s(X, \Lambda^r T^* X)$ l'espace des r-formes différentielles de classe C^s.

On peut effectuer plusieurs opérations avec les r-formes différentielles, par exemple.

• **Produit extérieur**
Pour $w \in \Lambda^p T_x^* X$ et $\eta \in \Lambda^q T_x^* X$, on a $w \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge w$.
Localement, si

$$v(x) = \sum_{|J|=q}^{'} v_J(x) dx_J$$

est une q-forme différentielle sur X et

$$u(x) = \sum_{|I|=p}^{'} u_I(x) dx_I$$

est une p-forme différentielle sur X,
alors le produit extérieur de u avec v est la forme de degré $(p+q)$ définie par :

$$u \wedge v(x) = \sum_{|I|=p, |J|=q}^{'} u_I(x) v_J(x) dx_I \wedge dx_J \text{ avec } 0 \le p+q \le n$$

$$I = (i_1, ...i_p) \text{ avec } 1 \le i_1 < .... < i_p \le n$$

$$J = (j_1, ...j_q) \text{ avec } 1 \le j_1 < .... < j_q \le n$$

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge ..... \wedge dx_{i_p}$$

et

$$dx_J = dx_{j_1} \wedge ..... \wedge dx_{j_q}.$$

• **Dérivée extérieure**
La dérivée extérieure des p-formes différentielles est un opérateur différentiel

$$d : C^s(X, \Lambda^p T^*X) \longrightarrow C^{s-1}(X, \Lambda^{p+1}T^*X)$$

défini localement par la formule

$$du = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I$$

et vérifie les propriétés suivantes :

1. $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ (Règle de Leibniz)

2. $d^2 u = 0$ (idempotence).

Une forme différentielle u est dite fermée si $du = 0$, et elle est dite exacte s'il existe une forme différentielle v, telle que $deg(v) = deg(u) - 1$ vérifiant $u = dv$.

• **Pull-back**
Soit $F : X \to Y$ une application de classe C^∞ entre deux variétés orientées de dimension respectives n_1, n_2. Si $v(y) = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p} v_I(y) dy_I$ est une p-forme différentielle sur Y, le pull-back (tiré-en-arrière) F^*v est la p-forme différentielle sur X obtenue en remplaçant y par $F(x)$ dans l'écriture de v, c'est-à-dire

$$F^*v(x) = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p} v_I(F(x)) dF_{i_1} \wedge ... \wedge dF_{i_p}.$$

Remarque 1.3. *(cf[7])*

1. Si $G : Y \to Z$ est une autre application et si w est une forme différentielle sur Z, alors $F^*(G^*w)$ est obtenu en remplaçant z par $G(y)$ et y par $F(x)$ et on a $F^*(G^*w) = (G \circ F)^*w$.

2. $d(F^*v) = F^*(dv)$.

3. Si v est fermée (respectivement exacte), alors F^*v est fermé (respectivement exact).

Définition 1.11 (Domaine Lipschitzien)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit que son bord $\partial\Omega$ est lipschitzien si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ et des coordonnées locales $(y_1, \dots, y_n)$ tel que :

1. V est un cube dans les nouvelles coordonnées

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \mid -1 < y_j < 1, \;\; 1 \leq j \leq n\},$$

2. il existe une fonction lipschitzienne φ définie dans

$$V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid -1 < y_j < 1, \;\; 1 \leq j \leq n-1\}$$

tels que

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n < \varphi(y')\}$$
$$\partial\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n = \varphi(y')\}.$$

Autrement dit, dans un voisinage de x, Ω est sous le graphe d'une fonction lipschitzienne φ et $\partial\Omega$ est le graphe de φ.

Définition 1.12 (Variété complexe)**.**

Une variété complexe X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$, où les U_α sont des ouverts de X tels que $X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$
et $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes pour lesquels on a : si

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *alors* $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *sont des biholomorphismes.*

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sont appelées cartes locales.

$$z \in U_\alpha, \varphi_\alpha(z) = (z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha) \in \mathbb{C}^n.$$

$(z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha)$ *sont appelés coordonnées locales autour de* z.

La collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ est appelée atlas complexe.

Définition 1.13 (Domaine de classe C^k)**.**

Un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ est dit à bord de classe C^k s'il existe un voisinage U de $\overline{D}$ et ρ une fonction de classe C^k tel que :
$D \cap U = \{z \in U : \rho(z) < 0\}$, où $\rho : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définissante de D. Si $d\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial D$, on dit que D est à bord lisse de classe C^k.

Définition 1.14 (Domaine Etoilé)**.**

1. On dit qu'un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ est étoilé en un point $P \in D$ si pour tout $M \in D$, le segment $[P, M]$ est contenu dans D.
2. On dit qu'un domaine est étoilé s'il est au moins étoilé par rapport à un de ses points.

Remarque 1.4.

On dit qu'un domaine est convexe s'il est étoilé par rapport à tous ses points.

Exemple 1.2.

La boule est un domaine étoilé, mais mieux, elle est aussi convexe.

1.1.1 Structure complexe

Soit X une variété analytique complexe de dimension (complexe) n.
Considérons X comme une variété différentiable de dimension $2n$.
Pour tout $z \in X$, on a l'espace cotangent T_z^*X de X en z et la structure complexe J_z de T_z^*X (c'est-à-dire l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de T_z^*X vérifiant

$$J_z \circ J_z = -Id_{T_z^*X}$$

et définie localement par

$$J_z(dx_j) = dy_j$$

et

$$J_z(dy_j) = -dx_j).$$

Soit $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ le complexifié de T_z^*X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme

$$u + iv$$

où

$$u, v \in T_z^*X$$

et

$$i = \sqrt{-1}.$$

J_z se prolonge en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ noté encore J_z tel que $J_z^2 = -Id_{T_z^*X^{\mathbb{C}}}$ par

$$J_z(u + iv) = J_z(u) + iJ_z(v)$$

pour tous $u, v \in T_z^*X$.
On a

$$T_z^*X^{\mathbb{C}} = T_{z1,0}^*X \oplus T_{z0,1}^*X$$

où

$$T_{z1,0}^*X = \{v \in T_z^*X^{\mathbb{C}} / J_z v = iv\}$$

$$T_{z0,1}^*X = \{v \in T_z^*X^{\mathbb{C}} / J_z v = -iv\}$$

$$T_{1,0}^*X = \bigcup_{z \in X} T_{z1,0}^*X$$

et

$$T_{0,1}^*X = \bigcup_{z \in X} T_{z0,1}^*X$$

sont respectivement des fibrés cotangents holomorphes et antiholomorphes.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p, q \leq n$, notons par $\Lambda^p T_{z1,0}^*X$ et $\Lambda^q T_{z0,1}^*X$ respectivement les espaces vectoriels des p-formes alternées sur $T_{z1,0}^*X$ et des q-formes alternées sur $T_{z0,1}^*X$.
Dans un système de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$,

$$\Lambda^p T_{z1,0}^*X = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n}$$

$$\Lambda^q T_{z0,1}^*X = vect\{d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}_{1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n}$$

où $(dz_1, ..., dz_n)$ et $(d\bar{z}_1, ..., d\bar{z}_n)$ sont des bases locales de $T_{z1,0}^*X$ et $T_{z0,1}^*X$
donc

$$\Lambda^p T_{1,0}^*X := \bigcup_{z \in X} \Lambda^p T_{z1,0}^*X$$

et

$$\Lambda^q T_{0,1}^*X := \bigcup_{z \in X} \Lambda^q T_{z0,1}^*X$$

sont respectivement les fibrés des p-formes extérieures sur le fibré $T_{1,0}^*X$ et des q-formes extérieures sur le fibré $T_{0,1}^*X$.

On pose

$$\Lambda^{(p,q)}T_z^*X^{\mathbb{C}} = \Lambda^p T_{z1,0}^*X \oplus \Lambda^q T_{z0,1}^*X$$

donc

$$\Lambda^{(p,q)}T_z^*X^{\mathbb{C}} = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ..... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}$$

avec $1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$.

Définition 1.15.

Le fibré $\Lambda^{(p,q)}T^*X^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T_{1,0}^*X \otimes \Lambda^q T_{0,1}^*X$ est appelé fibré des (p,q)-formes extérieures sur le fibré cotangent complexifié $T^*X^{\mathbb{C}} := \bigcup\limits_{z \in X} T_z^*X^{\mathbb{C}}$.

Définition 1.16 (Formes différentielles)**.**

Soit $\Omega \subset X$ un ouvert. On appelle forme différentielle de bidegré (p,q) (ou (p,q)-forme différentielle) et de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) sur Ω, toute section définie sur Ω de classe C^k du fibré $\Lambda^{(p,q)}T^*X^{\mathbb{C}}$.

On note $C^k_{p,q}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur X et $C^\infty_{p,q}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^∞ sur X.
Dans un ouvert $\Omega \subset X$ de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$, une (p,q)-forme différentielle u de classe C^k s'écrit

$$u(z) = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} u_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les u_{IJ} sont des fonctions de classe C^k, $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ sont des multi-indices d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$,

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p}$$

$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

et $\sum'$ indique que la somme se fait suivant les indices croissants. On note par $D^k_{p,q}(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par les (p,q)-formes différentielles de classe C^k à support compact dans X et par $D_{p,q}(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty_{p,q}(X)$ formé par les (p,q)-formes différentielles de classe C^∞ à support compact dans X. Toute fonction $f \in D_{0,0}(X)$ est appelée fonction test.

Définition 1.17 (Produit scalaire hermitien)**.**

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Le produit scalaire hermitien sur X est la donnée en tout point $z_0 \in X$ d'une application
$h : T_{z_0}X \times T_{z_0}X \to \mathbb{C}$, définie par :
pour deux vecteurs

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad v = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \textit{appartenant à } T_{z_0}X;$$

$$h(u,v) = \sum_{j,k=1}^n h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0) u_j \bar{v}_k = \sum_{j,k=1}^n h_{j,k} u_j \bar{v}_k$$

où

$$h_{j,k}(z_0) = h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $h(\lambda u, v) = \lambda h(u, v), \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

2. $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$,

3. $h(u, u) \geq 0$,

4. $h(u, u) > 0 \ \forall \ u \neq 0$,

5. $h(u + v, w) = h(u, w) + h(v, w), \ \forall \ u, \ v \ et \ w \in T_{z_0}X$.

On note $her(T_{z_0}X)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur $T_{z_0}X$.

Remarque 1.5.

$(h_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$ est une matrice hermitienne, définie positive et dépend de façon C^∞ du point z_0.
Cette forme hermitienne, définie sur l'espace tangent à X en un point, s'étend aux formes différentielles sur X comme suit :
soient

$$u = \sum_{|I|=p,|J|=q}' u_{I,J} \ dz_I \wedge d\overline{z}_J \quad et \quad v = \sum_{|K|=p,|L|=q}' v_{K,L} \ dz_K \wedge d\overline{z}_L$$

$$h(u, v) = \sum_{|K|=|L|=p \quad |I|=|J|=q} u_{I,J} \ \overline{v}_{K,L} \ h^{i_1 k_1} ... h^{i_p k_p} \overline{h^{j_1 l_1}} ... \overline{h^{j_q l_q}},$$

où $(h^{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ est l'inverse de la matrice hermitienne $(h_{ij}) = h(\dfrac{\partial}{\partial z_i}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j})_{i,j=1,\ldots,n}$
et $(\overline{h^{jl}})_{j,l=1,\ldots,n}$ les conjugués des $(h^{jl})_{j,l=1,\ldots,n}$.

Définition 1.18 (Métrique hermitienne)**.**

Soit X une variété complexe de dimension n et soit $T^{1,0}X$ son fibré tangent holomorphe.
Une métrique hermitienne sur X est la donnée pour tout $n \in X$ d'un produit scalaire hermitien h_n sur $T_n^{1,0}X$ qui varie de manière C^∞ en fonction de X.

Définition 1.19 (Variété hermitienne)**.**

Soit X une variété complexe et h une métrique hermitienne. Alors le couple (X, h) est appelé variété hermitienne.

1.2 Fonctions plurisousharmoniques

Dans ce paragraphe, nous définissons au cas de plusieurs variables complexes la notion de fonction sousharmonique. Ces fonctions nous serviront à définir la pseudoconvexité.
Les résultats sont tirés de [14].

1.2.1 Fonctions sousharmoniques

Nous commençons d'abord par définir l'harmonicité dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.20 (Fonction harmonique)**.**

Une fonction complexe f deux fois continûment différentiables dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est harmonique dans Ω si elle satisfait la condition suivante :

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Remarque 1.6.

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on va voir que les fonctions harmoniques sont très liées aux fonctions holomorphes.
La partie réelle d'une fonction holomorphe ou anti-holomorphe sur un ouvert de $\Omega \subset \mathbb{C}$ est harmonique.

On rappelle qu'une fonction $f : z \in \Omega \mapsto f(z)$ continue est holomorphe si elle est différentiable et satisfait les équations de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Définition 1.21 (Fonction sousharmonique)**.**

Une fonction u définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

u est semi-continue supérieurement (s.c.s), c'est-à-dire $\{z \in \Omega : u(z) < s\}$ est ouvert pour tout $s \in \mathbb{R}$ ou bien $\overline{\lim}_{z \to a} u(z) \leq u(a)$ si $a \in \Omega$;

pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute fonction h continue sur K, harmonique sur $\mathring{K}$, telle que $h \geq u$ sur ∂K, alors $h \geq u$ sur K.

Remarque 1.7.

Une fonction u de classe C^2 est sousharmonique si et seulement si $\Delta u \geq 0$. Lorsque $\Delta u > 0$, on dit que u est strictement sousharmonique.

Exemple 1.3.

Soient $a \in \mathbb{C}$ fixé et $c > 0$. Alors la fonction $z \mapsto c \log |z - a|$ est sousharmonique.

1.2.2 Fonctions plurisousharmoniques

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$.
Nous caommençons par définir une fonction d'exhaustion.

Définition 1.22.

Soit φ une fonction continue et définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que φ est une fonction d'exhaustion de Ω si pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$$

est relativement compact dans Ω.

Définition 1.23 (Fonction plurisousharmonique)**.**

Une fonction u de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique sur Ω notée $PSH(\Omega)$, si u est semi-continue supérieurement et si pour tout $a \in \Omega$ et $w \in \mathbb{C}^n$, la fonction $\lambda \mapsto u(a + \lambda w)$ est sousharmonique dans l'ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda w \in \Omega\}$.

Définition 1.24 (Forme de Lévi)**.**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et ρ une fonction de classe C^2 sur Ω. On appelle forme de Lévi de ρ en $z \in \Omega$ la Hessien complexe $L_z\rho$ de ρ en z, c'est-à-dire la forme hermitienne

$$w \longmapsto L_z\rho(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k.$$

Définition 1.25 (Fonction strictement plurisousharmonique)**.**

Soit ρ une fonction de classe C^k, $k = 2, ..., +\infty$.
On dit que ρ est strictement plurisousharmonique si sa forme de Lévi $L_z\rho$ au point z est une forme hermitienne définie positive.

1.3 Domaines pseudoconvexes

Définition 1.26 (Espace tangent complexe).

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné. L'espace tangent complexe noté $T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$ est donné par :

$$T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_j} w_j = 0\}.$$

Définition 1.27 (Domaine pseudoconvexe et strictement pseudoconvexe).

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné.
On dit que Ω est pseudoconvexe si $L_z\rho(w) \geq 0$ pour tout $z \in \partial\Omega$ et $w \in T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$.
On dit que Ω est strictement pseudoconvexe si $L_z\rho(w) > 0$ pour tout $z \in \partial\Omega$ et $w \in T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)\backslash\{0\}$.

On a cette relation entre la plurisousharmonicité, la pseudoconvexité et la convexité.

Remarque 1.8.

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné de $\mathbb{C}^n$.

- Si Ω est strictement pseudoconvexe de fonction définissante ρ de classe C^k, $k = 2, ...$, alors Ω admet une fonction définissante strictement plurisousharmonique de classe C^k, $k = 2, ...$
- Si Ω est pseudoconvexe, alors Ω est strictement pseudoconvexe si et seulement si pour tout $p \in \partial\Omega$, Ω est localement biholomorphiquement équivalent à un convexe de $\mathbb{C}^n$.
- Si Ω est pseudoconvexe de classe C^∞, alors Ω admet une fonction strictement plurisousharmonique de classe C^∞.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ n'est pas borné, on définit la pseudoconvexité comme suit :

Définition 1.28.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine non borné. On dit que Ω est pseudoconvexe si Ω admet une fonction d'exhaustion φ plurisousharmonique continue.

Remarque 1.9.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est pseudoconvexe et φ une fonction d'exhaustion de classe C^∞ strictement plurisousharmonique, alors les domaines $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$ sont strictement pseudoconvexes et approximent $\Omega = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} \Omega_c$.

Définition 1.29 (Domaine d'holomorphie).

Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est appelé domaine d'holomorphie s'il n'existe pas d'ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{C}^n$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$,

2. Ω_2 est connexe et n'est pas contenu dans Ω,

3. Pour toute fonction f holomorphe dans Ω, il existe une fonction f_2 holomorphe dans Ω_2 telle que $f = f_2$ sur Ω_1.

Remarque 1.10.

Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie s'il existe une fonction holomorphe dans Ω qui ne se prolonge pas à un ouvert strictement plus grand.

Exemple 1.4.

Tout domaine convexe de $\mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie.

Remarque 1.11.

Si Ω est un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$, alors Ω est pseudoconvexe.

1.4 Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$

Définition 1.30 (Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$)**.**

Soient X une variété complexe et $\Omega \subset X$ un ouvert. Si f est une fonction de classe C^1 sur un voisinage d'un point $a \in \Omega$, on a localement

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)dy_j,$$

posons

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}) \ et \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})$$

$$dz_j = dx_j + idy_j \ et \ d\overline{z}_j = dx_j - idy_j.$$

Cette transformation permet d'écrire df_a sous la forme qui suit

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(a)d\overline{z}_j.$$

Posons

$$\partial f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j \ et \ \overline{\partial} f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(a)d\overline{z}_j,$$

donc

$$df = \partial f + \overline{\partial} f.$$

La décomposition

$$d = \partial + \overline{\partial}$$

se généralise sur toutes les formes différentielles.
En effet, si

$$w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} w_{I,J}(z)dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

est une (p, q)-forme différentielle de classe C^1

$$dw(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} dw_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} (\partial w_{I,J}(z) + \overline{\partial} w_{I,J}(z)) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

On pose

$$\partial w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \partial w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J \ et \ \overline{\partial} w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \overline{\partial} w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants :

$$\partial : C^s_{p,q}(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow C^{s-1}_{p+1,q}(\Omega, \mathbb{C})$$

$$\overline{\partial} : C^s_{p,q}(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow C^{s-1}_{p,q+1}(\Omega, \mathbb{C}).$$

Propriétés 1.1.

1. $d = \partial + \overline{\partial}$.
2. $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial = 0$.

Soient X une variété analytique complexe et Ω un ouvert de X.
Une forme différentielle w de type (p,q), de classe C^k et définie sur Ω est dite $\overline{\partial}$-fermée si $\overline{\partial}w = 0$.
On note

$$Z^k_{p,q}(\Omega) = \{w \in C^k_{p,q}(\Omega)/\overline{\partial}w = 0\}.$$

$Z^k_{p,q}(\Omega)$ est un sous groupe de $C^k_{p,q}(\Omega)$.
Une (p,q)-forme différentielle w de classe C^k définie sur un ouvert Ω d'une variété analytique complexe X est dite $\overline{\partial}$-exacte s'il existe une $(p, q-1)$-forme différentielle u de classe C^k telle que $\overline{\partial}u = w$.
On note

$$B^k_{p,q}(\Omega) = \{w \in C^k_{p,q}(\Omega)/\exists u \in C^k_{p,q-1} \text{ avec } \overline{\partial}u = w\}.$$

Puisque $\overline{\partial}^2 = 0$ donc $B^k_{p,q}(\Omega) \subset Z^k_{p,q}(\Omega)$.
L'espace vectoriel

$$H^k_{p,q}(\Omega) = \frac{Z^k_{p,q}(\Omega)}{B^k_{p,q}(\Omega)}$$

est appelé le (p,q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe C^k définies sur Ω.

1.5 Outils d'analyse fonctionnelle

Définition 1.31 (Distribution)**.**
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a

$$D(V) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)/supp\varphi \subset V compact\}$$

avec

$$supp\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n/\varphi(x) \neq 0\}}.$$

Une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(V)$ converge vers φ dans $D(V)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

1. pour tout indice j, le support de φ_j et φ sont contenus dans un compact $K \subset V$,
2. $D^\alpha\varphi_j(x)$ converge uniformément vers $D^\alpha\varphi(x)$ sur $K \subset V$,
   pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$
   $(i.e \;\; \alpha = (\alpha_1, \ldots.., \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N})$
   $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots.. \partial {x_n}^{\alpha_n}}$ est la dérivée d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots.. + \alpha_n$.

Une forme linéaire T sur $D(V)$ est dite séquentiellement continue sur $D(V)$ si l'application T : $D(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$; si $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ dans $D(V)$, alors la suite des nombres complexes $T(\varphi_j) \longrightarrow T(\varphi)$.
Désignons par D_K l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K.
Une distribution T sur V est une forme linéaire sur $D(V)$ dont la restriction à chaque D_K est continue.
De plus, si T est une distribution réelle, l'application $\varphi \mapsto -< T, \dfrac{d\varphi}{dx} >$ est une distribution.
Par définition, c'est la dérivée de T notée $\dfrac{dT}{dx}$.

Exemple 1.5.

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ la fonction définie par :
$\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ qui a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe
$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) =< \delta_a, \varphi >$ est une distribution appelée mesure de Dirac.
2) Soit f une fonction localement intégrable[2] sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors l'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe $T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ définit une distribution sur Ω.

Définition 1.32 (Norme)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle norme sur E l'application
$||.|| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \quad \forall \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad et \quad x \in E,$

2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall \quad x, y \in E,$

3. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Définition 1.33 (Produit scalaire)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
Un produit scalaire sur E est une application

$$\begin{aligned} <,>: \ & E \times E \to \mathbb{R} \\ & (u, v) \to < u, v > \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés ci-dessous :
Soient $u, u', v \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $< \lambda(u + u'), v >= \lambda < u, v > +\lambda < u', v >,$

2. $< u, v >=< v, u >,$

3. $< u, u >\geq 0 \quad et \quad < u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Soit E un espace vectoriel.
$(E, || \cdot ||)$ est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.34 (Espace de Banach)**.**

$(E, || \cdot ||)$ est complet si toute suite de cauchy dans E est convergente dans E.
Un tel espace est dit espace de Banach.

Exemple 1.6 (Espace de Banach)**.**

Soient (E, T, m) un espace mesuré et f une fonction définie de E vers $\mathbb{R}$ mesurable,

$$L^p(\Omega) = \{f \in E \mid \int_E |f|^p dm < +\infty\}$$

2. Une fonction à valeurs complexes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact de Ω est intégrable au sens de Lebesgue.

est un espace de Banach avec la norme associée

$$||f||_p = \Big(\int |f|^p dm \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad dm$$

étant l'élément de volume.

Définition 1.35 (Espace de Hilbert)**.**

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach.
On dit que $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Hilbert si la norme est issue d'un produit scalaire.

Exemple 1.7 (Espace de Hilbert)**.**

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine.

$$L^2(\Omega) = \{f \in \Omega \mid \int_\Omega |f|^2 dm < +\infty\}$$

muni de la norme $||f||_2 = \Big(\int_\Omega |f|^2 dm \Big)^{\frac{1}{2}}$ qui provient du produit scalaire : $\forall f, g \in \Omega$ on a

$$< f, g >= \int_\Omega (f \times \overline{g}) dm$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.36 (Espace de Sobolev)**.**

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, on définit les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty, m \in \mathbb{N}$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Les normes pour ces espaces sont données par :

$$||f||_{W^{m,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}, p < +\infty$$

et

$$||f||_{W^{m,\infty}(\Omega)} := max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ces normes font de $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{m,\infty}(\Omega)$ des espaces de Banach.
Pour p=2

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

$H^m(\Omega)$ muni de la norme

$$||f||_{H^m(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

qui provient du produit scalaire

$$< u, v >_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2}$$

est un espace de Hilbert(cf [1]).

1.6 Espace de Sobolev partiel

On considère $D = D_1 \times D_2 \subset\subset \mathbb{R}^n$ un produit de deux domaines bornés $D_1 \subset\subset \mathbb{R}^{n_1}$ et $D_2 \subset\subset \mathbb{R}^{n_2}$ où $n = n_1 + n_2$.
Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice d'entiers. On peut écrire $\alpha = \alpha(1) + \alpha(2)$ où $\alpha(1) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2})$ et $\alpha_2 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_n)$.
Alors $D^{\alpha(1)}$ n'agit que sur les variables qui proviennent de D_1 et $D^{\alpha(2)}$ n'agit que sur les variables qui proviennent de D_2 dans le domaine D, et on a $D^\alpha = D^{\alpha(1)} D^{\alpha(2)}$. Alors l'espace de Sobolev partiel noté $\tilde{W}^{k,p}(D)$ est un espace normé sur D défini par

$$\tilde{W}^{k,p}(D) = W^{k,p}(D_1) \otimes W^{k,p}(D_2)$$

avec la norme
$$||u||^p_{\tilde{W}^{k,p}}(D) = \sum_{|\alpha(1)| \leq k, |\alpha(2)| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{L^p(D)}, 1 \leq p < \infty.$$

Cette définition peut être généralisée en un produit fini de domaines. Si $D = D_1 \times \dots \times D_N$, alors la norme $\tilde{W}^{k,p}$ sur D est définie comme suit :

$$||u||^p_{\tilde{W}^{k,p}}(D) = \sum_{|\alpha(j)| \leq k, 1 \leq j \leq N} ||D^\alpha u||^p_{L^p(D)}, 1 \leq p < \infty,$$

où $\alpha(j)$ est la partie de α correspondant au facteur D_j, défini par analogie avec le cas où $N = 2$.
L'espace de Sobolev des (r, q)-formes différentielles sur chaque domaine D_j est noté par $W^{k,p}_{r,q}(D_j)$.

1.7 Théorie des Opérateurs

Tout au long de cette sous-section H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert.

Définition 1.37 (Opérateur)**.**

Un opérateur dans H_1 est une application T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset H_1$ à valeurs dans H_2.
$$T : D(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$$
$D(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur.
On note un opérateur par $(T, D(T))$ s'il n'y a pas d'ambiguité concernant son domaine on note simplement par T.

Définition 1.38 (Graphe d'un opérateur)**.**

Soit $T : D(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur. Le graphe de T est le sous-espace de $H_1 \times H_2$ donné par

$$\Gamma(T) = \{(x, T_x) : x \in D(T)\} \subset H_1 \times H_2.$$

Définition 1.39 (Opérateur fermé)**.**

On dit que $(T, D(T))$ est fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est un fermé de $H_1 \times H_2$.

Remarque 1.12.

Un opérateur $(T, D(T))$ est fermé si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D(T)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \to +\infty} T x_n = y$$

alors $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Définition 1.40 (Opérateur borné)**.**

On considère deux espaces de Hilbert E et F.
On dit que T est un opérateur borné de E vers F si $D(T) = E$ et s'il existe C tel que

$$||Tu||_F \leq C||u||_E \ \ \forall \ \ u \in E. \tag{1}$$

On pose alors :

$$||T|| = \sup_{u\in E, u\neq 0} \frac{||Tu||_F}{||u||_E}.$$

Si $D(T) \neq E$ et s'il existe une constante C telle que :

$$||Tu||_F \leq C||u||_E \ \ \forall \ \ u \in D(T) \tag{2}$$

alors l'opérateur T se prolonge en un opérateur borné de $\overline{D(T)}$ vers F, où $\overline{D(T)}$ désigne l'adhérence de $D(T)$ dans E.

Définition 1.41 (Opérateur non borné)**.**

On dit que T est un opérateur non borné s'il n'existe pas de constante C telle que (2) soit satisfait. En d'autres termes, T est non borné s'il existe une suite $u_n \in D(T)$ telle que

$$||u_n||_E = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} ||Tu_n||_F = +\infty.$$

Proposition 1.1. *(cf [17])*

Soit $(T, D(T))$ un opérateur fermé.
Alors T est borné si et seulement si $D(T) = H_1$.

Définition 1.42 (Opérateur dense)**.**

On dit qu'un opérateur $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est à domaine dense si $\overline{D(T)} = H_1$.

Définition 1.43 (Adjoint d'un opérateur)**.**

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in L(E, F)$, $T^* \in L(F, E)$ est l'unique application linéaire telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$ on ait

$$< T(x), y >=< x, T^*(y) > .$$

T^* est appelée adjoint de T.

1.8 Le $\overline{\partial}$-Neumann

Dans cette partie, on va introduire l'opérateur $\overline{\partial} - Neumann$ (cf [5]). Ainsi, le $\overline{\partial}$ défini sur les (p, q)-formes différentielles s'étend aux espaces $L^2(\Omega)$ au sens des distributions.

$$L^2_{p,q}(\Omega) = \{f \in C^\infty_{p,q}(\Omega) \mid \int_\Omega |f|^2 dm < +\infty\}.$$

On utilise $L^2_{p,q}(\Omega)$ pour désigner l'espace des (p, q)-formes différentielles à coefficients dans $L^2(\Omega)$.
Si

$$f = \sum_{I,J}{}' f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

$$g = \sum_{I,J}{}' g_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

sont deux (p,q)-formes différentielles dans $L^2_{p,q}(\Omega)$, nous définissons le produit scalaire et la norme comme suit :

$$< f, g >= \sum_{I,J}{}' < f_{I,J}, g_{I,J} >, \quad |f|^2 =< f, f >= \sum_{I,J}{}' |f_{I,J}|^2$$

$$||f||^2 = \int_\Omega < f, f > dm = \sum_{I,J}{}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 dm.$$

Puisque $L^2_{p,q}(\Omega)$ est muni d'un produit scalaire, on sait définir l'adjoint du $\overline{\partial}$

$$\overline{\partial} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega)$$

$$\overline{\partial}^* : L^2_{p,q+1}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega).$$

Ainsi le laplacien s'écrit comme suit :

$$\Box_{p,q} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

et

$$\Box_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega).$$

Il a pour domaine

$$Dom(\Box) = \{f \in Dom(\overline{\partial}) \cap Dom(\overline{\partial}^*), \ | \ \overline{\partial} f \in Dom(\overline{\partial}^*), \ \overline{\partial}^* f \in Dom(\overline{\partial})\}.$$

Proposition 1.2.

Le laplacien $\Box_{p,q}$ est un opérateur dense, fermé et auto-adjoint.

Démonstration.

Soit $D^{p,q}(\Omega)$ l'ensemble des (p,q)-formes différentielles à support compact.
$\Box_{p,q}$ étant un opérateur, il est donc linéaire par définition.
On sait que :

$$D^{p,q}(\Omega) \subset Dom(\Box_{p,q}) \subset L^2_{p,q}(\Omega)$$

le passage à l'adhérance nous donne les inclusions suivantes :

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} \subset \overline{Dom(\Box_{p,q})} \subset \overline{L^2_{p,q}(\Omega)}$$

or

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} = L^2_{p,q}(\Omega) = \overline{L^2_{p,q}(\Omega)}$$

donc

$$L^2_{p,q}(\Omega) \subset \overline{Dom(\Box_{p,q})} \subset L^2_{p,q}(\Omega)$$

d'où

$$\overline{Dom(\Box_{p,q})} = L^2_{p,q}(\Omega)$$

ce qui montre que $\Box_{p,q}$ est dense.
Montrons que $\Box_{p,q}$ est fermé :

soit $f_n \in Dom(\Box_{p,q})$.

$$\begin{aligned} < \Box_{p,q} f_n, f_n > &=< (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) f_n, f_n > \\ &=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* f_n + \bar{\partial}^*\bar{\partial} f_n, f_n > \\ &=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* f_n, f_n > + < \bar{\partial}^*\bar{\partial} f_n, f_n > \\ &=< \bar{\partial}^* f_n, \bar{\partial}^* f_n > + < \bar{\partial} f_n, \bar{\partial} f_n > \\ &= \|\bar{\partial}^* f_n\|^2 + \|\bar{\partial} f_n\|^2 \end{aligned}$$

ainsi $\overline{\partial}^* f_n$ *et* $\overline{\partial} f_n$ convergent respectivement dans $L^2_{p,q-1}(\Omega)$ *et* $L^2_{p,q+1}(\Omega)$. Puisque $\overline{\partial}$ *et* $\overline{\partial}^*$ sont des opérateurs fermés, nous avons $f \in Dom(\overline{\partial}) \cap Dom(\overline{\partial}^*)$ et

$$\overline{\partial} f_n \longrightarrow \overline{\partial} f \quad et \quad \overline{\partial}^* f_n \longrightarrow \overline{\partial}^* f \quad dans \quad L^2.$$

Or $\overline{\partial}$ *et* $\overline{\partial}^*$ sont des opérateurs fermés, donc

$$\bar{\partial}\bar{\partial}^* f_n \longrightarrow \bar{\partial}\bar{\partial}^* f \quad et \quad \bar{\partial}^*\bar{\partial} f_n \longrightarrow \bar{\partial}^*\bar{\partial} f.$$

Nous venons donc de montrer que $\Box_{p,q} f_n \longrightarrow \Box_{p,q} f$ donc $\Box_{p,q}$ est un opérateur fermé.
Soit $u, v \in Dom(\Box_{p,q})$, a-t-on $< \Box_{p,q} u, v >=< u, \Box_{p,q} v >$?

$$\begin{aligned} On \quad a \quad < \Box_{p,q} u, v > &=< (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) u, v > \\ &=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* u + \bar{\partial}^*\bar{\partial} u, v > \\ &=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* u, v > + < \bar{\partial}^*\bar{\partial} u, v > \\ &=< \bar{\partial}^* u, \bar{\partial}^* v > + < \bar{\partial} u, \bar{\partial} v > \\ &=< u, \bar{\partial}\bar{\partial}^* v > + < u, \bar{\partial}^*\bar{\partial} v > \\ &=< u, (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) v > \\ &=< u, \Box_{p,q} v > \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\Box_{p,q}$ est auto-adjoint. $\Box$

L'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann consiste à chercher un inverse à $\Box$ noté $N_{p,q}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :
Soit Ω un domaine, il existe

$$N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega)$$

tel que

1. $\Box N_{p,q} = N_{p,q} \Box = I$ dans Dom $(\Box) \subset Dom(\overline{\partial}) \cap Dom(\overline{\partial}^*)$ où I désigne l'opérateur identité,

2. $\overline{\partial} N_{p,q} = N_{p,q+1} \overline{\partial}$ dans $Dom(\overline{\partial})$,

3. $\overline{\partial}^* N_{p,q+1} = N_{p,q+1} \overline{\partial}^*$ dans $Dom(\overline{\partial}^*)$,

4. $f = \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} f \oplus \bar{\partial}^*\bar{\partial} N_{p,q} f$.

2 Produits tensoriels et espaces de fonctions

Dans cette section, il est question de construire un opérateur appelé opérateur produit tensoriel noté $(A \otimes B)$ qui vérifie la relation suivante

$$(A \otimes B)(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta,$$

pour tout $\xi \in L^p(\Omega_1, \mu_1)$ et $\eta \in L^p(\Omega_2, \mu_2)$.

2.1 Outils de Mesure

Définition 2.1 (Tribu)**.**

Soit E un ensemble, T une famille de parties de E. La famille T est une tribu (on dit aussi une σ-algébre) sur E si T vérifie :

1. $\emptyset \in T, \quad E \in T,$
2. T est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$,
3. T est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$,
4. T est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire pour tout $A \in T$, on a $A^c \in T$.

Pour montrer qu'une partie T de $\mathcal{P}(E)$ est une tribu, il n'est pas nécessaire de vérifier les 4 propriétés de la définition précédente. Il suffit de vérifier par exemple $\emptyset \in T$(ou $E \in T$), 2(*ou* 3) et 4.
Les élèments de T sont appelées parties mesurables de E.
Le couple (E, T) est appelé espace mesurable.

Exemple 2.1 (Exemples de Tribu sur E)**.**

$\{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des tribus sur E.

Définition 2.2 (Tribu engendrée)**.**

Soit F une famille de parties de E. On note

$$\sigma(F) = \bigcap_{T \supset F} T.$$

Alors, $\sigma(F)$ est une tribu sur E appelé tribu engendrée par F. C'est la plus petite tribu sur E qui contient F.

Définition 2.3 (Mesure)**.**

Soit C un ensemble de parties de E.
Une application μ définie sur C à valeurs dans $[0, +\infty]$ est appelée mesure lorsque les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

a) $\emptyset \in C \;\; et \;\; \mu(\phi) = 0,$

b) $\mu \;\; est \;\; \sigma - additive \;\; i.e. \;\; \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ si $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$

Le triplet (E, T, μ) est appelé espace mesuré.
Parfois on le note (E, μ).

Exemple 2.2 (Exemples de Mesures)**.**

1. Mesure de comptage sur un ensemble E :
Sur $(E, \mathcal{P}(E))$, on définit la mesure de comptage $\mu(A), \;\; A \subset E$ par

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & si \quad A \;\; est \;\; fini \\ \infty \;\; sinon & \end{cases}$$

Cette mesure s'applique généralement aux ensembles discrets $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots)$.

2. Mesure de Dirac en un point :
Soit (E, T) un ensemble mesurable, avec $E \neq \emptyset$ et $x \in E$. On définit
$\mu : T \longrightarrow [0, +\infty]$ par

$$\mu(A) = \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 \;\; sinon & \end{cases}$$

On note souvent $\mu = \delta_x$.

Définition 2.4 (Mesure σ-finie)**.**
Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.
La mesure μ est dite σ-finie s'il existe une suite d'ensembles mesurables $E_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \;\; n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < \infty \;\; et \;\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E.$$

Autrement dit, E est la réunion dénombrable d'ensembles de mesures finies pour μ.

Proposition 2.1 (Propriétés d'une mesure)**.**

1. Monotonie :
si $A, \;\; B \in T$ *et* $A \subset B$*, alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$,

2. sous-additivité :
si $A_n \in T$, $\forall \;\; n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n),$$

3. si $A_n \in T$, $\forall \;\; n \in \mathbb{N}$ *et si* $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$*, alors*

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n),$$

4. si $A_n \in T$, $\forall \;\; n \in \mathbb{N}$ *et si* $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *avec* $\mu(A_0) < \infty$*, alors*

$$\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Démonstration.

1. On a $B = A \cup (B \setminus A)$, union disjointe d'éléments de T donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Si $\mu(A) < \infty$, on déduit que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. Posons $B_0 = A_0$, et $\forall \;\; n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$. En outre, les $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2 à 2 disjoints alors par la formule $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ on a

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n).$$

Ainsi d'après la définition d'une mesure, on a

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Comme $B_n \subset A_n$ et $\mu(B_n) \le \mu(A_n)$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Ainsi

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3. Posons $B_0 = A_0$ et $\forall\ n \ge 1,\ B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.
   Alors les B_n sont 2 à 2 disjoints et $\forall n \ge 1,\ A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.
   Ainsi
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(\bigcup_{k=0}^{n}(B_k))$$
   or par définition de la mesure,
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(\bigcup_{k=0}^{n}(B_k)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k).$$
   Ainsi on a
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k)$$
   et
   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k).$$
   Par conséquent
   $$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$
   On a donc
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

4. Posons $B_n = A_0 \setminus A_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
   En outre, $\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$ car $\mu(A_0) < \infty$.
   On a
   $$\mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n).$$
   D'après 3), on a donc
   $$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n).$$
   Ainsi par construction des B_n, on a
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \mu(A_0) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$
   Alors
   $$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$

$\square$

Remarque 2.1.

La condition $\mu(A_0) < \infty$ de l'assertion (4) de la proposition précédente est nécessaire.
En effet, considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage et considérons $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, alors $A_n \supset A_{n+1}$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, mais $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = +\infty$.

Définition 2.5 (Mesure produit)**.**

Soient (X,T,μ_1) et (Y,S,μ_2) deux espaces mesurés σ-finis. On note $T \otimes S$ la tribu sur $X \times Y$ engendrée par les parties de la forme $A \times B$ avec $A \in T$ et $B \in S$. On l'appelle tribu produit des tribus T et S. Alors il existe une unique mesure ν sur $T \otimes S$ vérifiant $\nu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ pour tout $A \in T \ \ et \ \ tout \ \ B \in S$.
On la note par $\mu_1 \otimes \mu_2$.

Définition 2.6 (Isomorphisme isométrique)**.**

Soient E et F deux espaces de Banach et $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires.
On dit que $a \in L(E, F)$ est un isomorphisme si a est bijective.
Si l'isomorphisme existe, on dit que E et F sont isomorphes.
On dit que $a \in L(E, F)$ est une isométrie si $||a\xi|| = ||\xi||$ pour tout $\xi \in E$.
Si l'isométrie de E vers F est surjective, on dit que E et F sont isométriquement isomorphe.

2.2 Produit tensoriel

Dans cette partie, nous allons donner quelques résultats sur le produit tensoriel. Ces résultats sont tirés de [6]

Proposition 2.2.

Soient E_i et F_i $i = 1, 2$ des espaces vectoriels.
Soit $T_i \in L(E_i, F_i)$. Alors il existe un unique opérateur $S \in L(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$ avec la propriété suivante :

$$S(x_1 \otimes x_2) = T_1x_1 \otimes T_2x_2$$

pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.
L'opérateur S est noté par $T_1 \otimes T_2$,
par conséquent

$$(T_1 \otimes T_2)(x_1 \otimes x_2) = T_1x_1 \otimes T_2x_2.$$

Remarque 2.2.

Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes :

1. si T_1 et T_2 sont surjectives, alors $T_1 \otimes T_2$ est surjective,

2. si T_1 et T_2 sont injectives, alors $T_1 \otimes T_2$ est injective,

3. en particulier, si G est un sous espace vectoriel de E, alors $G \otimes F$ est un sous-espace de $E \otimes F$,

4. on a la formule suivante :

$$ker(T_1 \otimes T_2) = (kerT_1) \otimes E_2 + E_1 \otimes (kerT_2) \subset E_1 \otimes E_2.$$

Définition 2.7 (Produit tensoriel de Hilbert)**.**

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.
On définit un produit scalaire sur le produit tensoriel algébrique $H_1 \otimes H_2$ par

$$< x \otimes y, z \otimes w >=< x, z >_{H_1}< y, w >_{H_2} .$$

$H_1 \otimes H_2$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien, et son complété est un espace de Hilbert noté $H_1 \widehat{\otimes} H_2$ et est appelé produit tensoriel de Hilbert des espaces H_1 et H_2.

Soient (Ω_1, μ_1) et (Ω_2, μ_2) deux espaces mesurés avec μ_1 et μ_2 des mesures finies.
Notons par $\mu_1 \otimes \mu_2$ la mesure produit sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.
Posons $H_1 = L^p(\Omega_1, \mu_1)$ et $H_2 = L^p(\Omega_2, \mu_2)$.
D'après [6] Corollaire 2, la norme de $\sum_{j=1}^{n} f_j \otimes g_j \in L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2)$ est définie par

$$|| \sum_{j=1}^{n} f_j \otimes g_j || = (\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} | \sum_{j=1}^{n} f_j g_j |^p d\mu_1 d\mu_2)^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier, le théorème de Fubini donne $||f \otimes g|| = ||f|| ||g||$.
Ces résultats nous seront utiles dans la preuve du Théorème principal de cette partie.
Le théorème ci-dessous est tiré de la page 498 de [6].

Théorème 2.1 (Fubini-Tonelli)**.**

Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de $\mathbb{C}^n$.
Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}(où[-\infty, +\infty])$ est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable,

$$\{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid f(x, y) \neq 0\} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$$

est σ-finie(pour la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$) et si l'une des intégrales itérées de $|f|$ existe, alors f est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrale.

Définition 2.8 (Step-fonction)**.**

Soit Ω un domaine.
Si (Ω, μ) est un espace mesuré et E un espace (réel ou complexe) normé, alors la fonction $f : \Omega \longrightarrow E$ est appelé un μ-step fonction si :

$$f(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(\cdot) x_k$$

avec $A_k \subset \Omega$ est μ-mesurable, $x_k \in E$ et l'intégrale

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sum_{k=1}^{n} \mu A_k(\cdot) x_k \in E$$

est bien défini.

Définition 2.9.

Soit x une fonction définie sur un espace mesuré $(S, \mathcal{B}, \mu)$ à valeurs dans un espace X par

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} x_i(s) \mu(B_i) \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

La fonction x est dite μ-Bochner intégrable s'il existe une suite de fonctions x_n qui converge vers x μ. pp c'est-à-dire

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_S ||x(s) - x_n(s)|| \mu(ds) = 0.$$

Soit $1 \leq p < +\infty$, l'espace des fonctions p-intégrables de Bochner définies de $\Omega \longrightarrow E$ est noté par $\mathcal{L}^p(\mu, E)$.

Définition 2.10.

Soient E_j et F_j deux sous espaces vectoriels de $L^0(\mu_j)$ et $L^0(\nu_j)$ respectivement et soit $\mu_j : E_j \longrightarrow F_j$ un opérateur $(j = 1, 2)$.
On note par 1_X l'opérateur identité pour l'espace vectoriel X, et par $u_{|_{X_1}}$ la restriction d'un opérateur $u : X \longrightarrow Y$ à un sous espace X_1 de X.

On peut maintenant énoncer le resultat suivant tiré du Théorème 1.1 de [10].

Théorème 2.2. *Soient* $(S, \sum, \mu)$ *et* (T, Ω, ν) *deux espaces mesurés, et* $0 < p \leq q$.
Soit E *un sous-espace vectoriel de* $L^p(\mu)$ *et soit* $u : E \longrightarrow L^q(\nu)$ *un opérateur borné. Alors pour tout espace mesuré* (Z, Λ, σ), *l'opérateur*

$$\mathbf{1}_{L^p(\sigma)} \otimes u : L^p(\sigma) \otimes E \longrightarrow L^p(\sigma) \otimes L^q(\nu)$$

admet une unique extension

$$L^p(\sigma)_u : L^p(\sigma) \otimes_p E \longrightarrow L^{p,q}(\sigma \times \nu)$$

qui est un opérateur borné.

Démonstration.

Observons d'abord que sans perte de généralité, on peut supposer que

1. E est de dimension finie.
2. Toutes les mesures en question sont σ-finies.

En effet, étant donné un espace semi-normé X, notons $\mathcal{F}(X)$ la famille de tous les sous-espaces de dimension finie de X. Maintenant pour 1 observons que pour tout sous espace E de $L^p(\mu)$,

$$||u|| = sup\{||u_{|F}|| : F \in \mathcal{F}(E)\},$$

$$||\mathbf{1}_{L^p(\sigma)} \otimes u|| = ||sup\{\mathbf{1}_{L^p(\sigma)} \otimes u_{|F}|| : F \in \mathcal{F}(E)\}.$$

Pour 2, soit τ une mesure, tout sous-espace de dimension finie de $L^p(\tau)$, est isométriquement isomorphe à un sous-espace de $L^p(\tau_0)$ pour une mesure σ-finie τ_0 ; de plus

$$||\mathbf{1}_{L^p(\tau)} \otimes u|| = sup\{||\mathbf{1}_F \otimes u|| : F \in \mathcal{F}(L^p(\tau))\}.$$

En supposant 1 et 2, et pour $0 < p \leq q < \infty$,
soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ une base de E, posons $g_j = u(f_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$.
Alors pour tous scalaires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on a

$$||\sum_{j=1}^{n} c_j g_j||_{L^q(\nu)} \leq ||u|| ||\sum_{j=1}^{n} c_j f_j||_{L^p(\mu)}.$$

Par conséquent, pour des fonctions scalaires arbitraires $c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot)$ dans $L^p(\sigma)$,

$$(\int_T |\sum_{j=1}^{n} c_j(z) g_j(t)|^q \nu(dt))^{\frac{p}{q}} \leq ||u||^p \int_S |\sum_{j=1}^{n} c_j(z) f_j(s)|^p \mu(ds)$$

pour tout z σ-pp.
En intégrant sur Z, on obtient

$$\int_Z (\int_T |\sum_{j=1}^{n} c_j(z) g_j(t)|^q \nu(dt))^{\frac{p}{q}} \sigma(dz) \leq ||u||^p \int_Z \int_S |\sum_{j=1}^{n} c_j(z) f_j(s)|^p \mu(ds) \sigma(dz).$$

□

A présent, nous allons énoncer et démontrer le théorème principal de cette partie tiré de [15].

Théorème 2.3. *Soient* (Ω_1, μ_1) *et* (Ω_2, μ_2) *deux espaces mesurés et soit* $1 \leq p < \infty$. *Alors il existe un unique isomorphisme isométrique*

$$L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \cong L^p(\Omega_1, \mu_1) \widehat{\otimes} L^p(\Omega_2, \mu_2)$$

qui pour tout $\xi \in L^p(\Omega_1, \mu_1)$ *et* $\eta \in L^p(\Omega_2, \mu_2)$ *identifie l'élément* $\xi \otimes \eta$ *à la fonction*

$$(x, y) \longmapsto \xi(x)\eta(y) \tag{3}$$

sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. *En outre,*

1. *sous l'identification* (3), *l'ensemble*

$$S = \{\xi \otimes \eta \mid \xi \in L^p(\Omega_1, \mu_1) \ \ et \ \ \eta \in L^p(\Omega_2, \mu_2)\}$$

   est dense dans $L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$,

2. *si* (Γ_1, ν_1) *et* (Γ_2, ν_2) *sont des espaces mesurés de mesure finie et*

$$A : L^p(\Omega_1, \mu_1) \longrightarrow L^p(\Gamma_1, \nu_1)$$

   et

$$B : L^p(\Omega_2, \mu_2) \longrightarrow L^p(\Gamma_2, \nu_2)$$

   sont des opérateurs bornés, alors il existe un opérateur

$$A \otimes B : L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \longrightarrow L^p(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$$

   appelé opérateur produit tensoriel tel qu'on a la relation suivante

$$(A \otimes B)(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta,$$

   pour tout $\xi \in L^p(\Omega_1, \mu_1)$ *et* $\eta \in L^p(\Omega_2, \mu_2)$,

3. *l'opérateur produit tensoriel* $A \otimes B$ *défini en* (2) *est bilinéaire, associatif, et satisfait*

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1 A_2 \otimes B_1 B_2,$$

4. *l'opérateur produit tensoriel* $A \otimes B$ *de* (2) *satisfait l'égalité* $||A \otimes B|| = ||A|| ||B||$.

Démonstration.

Pour la démonstration de l'assertion (1),
on a pour $1 \leq p < \infty$ et E un espace de Banach, l'ensemble des fonctions μ-mesurables $f : \Omega \longrightarrow E$ muni de la loi $+$ et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^p(E, \mu)$.
Son quotient par rapport aux fonctions μ-nulles (i.e $||f(\cdot)||_E = 0 \ \ \mu \ \ pp$) noté

$$L^p(E, \mu) := \mathcal{L}^p(E, \mu) / \sim$$

muni de la norme définie par

$$||\tilde{f}||_{L^p(E)} := \left(\int_\Omega ||f(w)||_E^p \mu(dw)\right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace vectoriel normé qui est complet si E est un espace de Banach.
Montrons que $S(\mu) \otimes E$ est dense dans $\mathcal{L}^p(E, \mu)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(\mu) \otimes E$ qui converge vers f.
De [18], Théorème 1, en modifiant le cas $p = 1$, on a $||f_n(\cdot) - f(\cdot)||_E^p$ est μ-intégrable et
$\int_S ||f_n(\cdot) - f(\cdot)||_E^p \mu(dw) \longrightarrow 0.$

Donc, d'après [6] $f \in \mathcal{L}^p(E, \mu)$.
Ainsi, pour $1 \leq p < \infty$, l'ensemble des μ-step-fonctions

$$S(\mu) \otimes E = \{\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \otimes x_k \mid n \in \mathbb{N}, A_k \ \text{ mesurable}, \, x_k \in E\}$$

est dense dans $\mathcal{L}^p(E, \mu)$.
Alors

$$S(\mu) \otimes E = \{\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \otimes x_k \mid n \in \mathbb{N}, A_k \ \text{ intégrable}, \, x_k \in E\} \diagup \sim,$$

est dense dans $L^p(E, \mu)$.
Pour la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, le Théorème de Fubini- Tonelli montre que

$$L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2) \hookrightarrow L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

est isométrique. En effet, soit

$$\begin{aligned} T: \ L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2) &\longrightarrow L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \\ \xi \otimes \eta &\longmapsto \xi(x)\eta(y) \end{aligned}$$

$\forall \ (x, y) \in (\Omega_1 \times \Omega_2)$.
Donc on a

$$T(\xi \otimes \eta) = \xi(x)\eta(y) = \xi \otimes \eta$$

, car l'élément $\xi \otimes \eta$ est identifié à la fonction $(x, y) \mapsto \xi(x)\eta(y)$.
Par passage à la norme on a

$$||T(\xi \otimes \eta)||_{L^p(\Omega_1,\mu_1)\otimes L^p(\Omega_2,\mu_2)} = ||\xi \otimes \eta||_{L^p(\Omega_1\times\Omega_2,\mu_1\otimes\mu_2)}. \tag{4}$$

Ce qui fait que l'intégrale défini sur le produit tensoriel est bien défini donc la norme est bien définie.
Puisque l'ensemble des step-fonctions $(S(\mu_1) \otimes S(\mu_2)) \otimes (\Omega_1 \times \Omega_2)$ est dense dans $L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, et

$$(S(\mu_1) \otimes S(\mu_2)) \otimes (\Omega_1 \times \Omega_2) \subset L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2)$$

, alors

$$L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2) \ \ \textit{est dense dans} \ \ L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

et donc par la relation (4), on a

$$L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2) = L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2).$$

Par conséquent, l'ensemble S est dense dans $L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.
Les assertions (2) et (3) constituent un cas particulier du Théorème (2.2).
En effet, en prouvant l'assertion (1), on a montré que

$$L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2) \text{ est dense dans } L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$$

et mieux, on a

$$L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2) = L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2). \tag{5}$$

Par le Théorème (2.2), on prouve l'existence d'un opérateur de la forme

$$\mathbf{1}_{L^p(\sigma)} \otimes u : L^p(\sigma) \otimes E \longrightarrow L^p(\sigma) \otimes L^q(\nu).$$

Ainsi, en remplaçant $\mathbf{1}_{L^p(\sigma)}$ par A et u par B on a :

$$A \otimes B : L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2) \longrightarrow L^p(\Gamma_1, \nu_1) \otimes L^p(\Gamma_2, \nu_2).$$

En utilisant l'égalité (5), on a

$$A \otimes B : L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \longrightarrow L^p(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \nu_1 \otimes \nu_2).$$

La relation

$$(A \otimes B)(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta$$

n'est rien d'autre que la définition de l'opérateur produit tensoriel (cf Définition (2.2)).
Ce qui prouve l'assertion (2).
Montrons l'assertion (3) en prouvant que l'opérateur produit tensoriel est bilinéaire et associatif.
En effet, soient $\xi \in L^p(\Omega_1, \mu_1)$ et $\eta, \eta' \in L^p(\Omega_2, \mu_2)$ on a

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(\xi \otimes (\eta + \eta')) &= A\xi \otimes B(\eta + \eta') \\ &= A\xi \otimes (B\eta + B\eta') \\ &= A\xi \otimes B\eta + A\xi \otimes B\eta' \\ &= (A \otimes B)(\xi \otimes \eta) + (A \otimes B)(\xi \otimes \eta').\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(A \otimes B)(\xi \otimes (\eta + \eta')) = (A \otimes B)(\xi \otimes \eta) + (A \otimes B)(\xi \otimes \eta').$$

Calculons alors $(A \otimes B)((\xi + \xi') \otimes \eta)$ pour $\xi, \xi' \in L^p(\Omega_1, \mu_1)$ et $\eta \in L^p(\Omega_2, \mu_2)$:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)((\xi + \xi') \otimes \eta) &= A(\xi + \xi') \otimes B\eta \\ &= (A\xi + A\xi') \otimes B\eta \\ &= A\xi \otimes B\eta + A\xi' \otimes B\eta \\ &= (A \otimes B)(\xi \otimes \eta) + (A \otimes B)(\xi' \otimes \eta).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(A \otimes B)((\xi + \xi') \otimes \eta) = (A \otimes B)(\xi \otimes \eta) + (A \otimes B)(\xi' \otimes \eta).$$

Calculons $(A \otimes B)(\alpha\xi \otimes \eta)$ et $(A \otimes B)(\xi \otimes \alpha\eta)$ pour $\xi \in L^p(\Omega_1, \mu_1)$, $\eta \in L^p(\Omega_2, \mu_2)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(\alpha\xi \otimes \eta) &= A\alpha\xi \otimes B\eta \\ &= \alpha A\xi \otimes B\eta \\ &= \alpha(A \otimes B)(\xi \otimes \eta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(\xi \otimes \alpha\eta) &= A\xi \otimes B\alpha\eta \\ &= A\xi \otimes \alpha B\eta \\ &= \alpha(A \otimes B)(\xi \otimes \eta).\end{aligned}$$

Alors on a la relation suivante :

$$(A \otimes B)(\alpha\xi \otimes \eta) = (A \otimes B)(\xi \otimes \alpha\eta) = \alpha(A \otimes B)(\xi \otimes \eta).$$

Ce qui prouve la bilinéarité.
Pour ce qui est de l'associativité ; a t-on

$$(A \otimes B) \otimes A' = A \otimes (B \otimes A')?$$

On a :

$$(A \otimes B) \otimes A' = A \otimes B \otimes A' \text{ et } A \otimes (B \otimes A') = A \otimes B \otimes A'.$$

La relation

$$(A_1 \otimes B_2)(A_2 \otimes B_2) = A_1 A_2 \otimes B_1 B_2$$

découle de la définition de l'opérateur produit tensoriel (cf Définition (2.2)).
Ce qui met fin à la démonstration de l'assertion (3).
Montrons l'assertion (4).
La norme de $\sum_{j=1}^{n} \xi_j \otimes \eta_j \in L^p(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^p(\Omega_2, \mu_2)$ étant définie par

$$|| \sum_{j=1}^{n} \xi_j \otimes \eta_j || = (\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} | \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j |^p d\mu_1 d\mu_2)^{\frac{1}{p}},$$

on a

$$\begin{aligned} ||A\xi \otimes B\eta|| &= (\int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} |A\xi B\eta|^p d\nu_1 d\nu_2)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} |A\xi|^p |B\eta|^p d\nu_1 d\nu_2)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\int_{\Gamma_2} |B\eta|^p \int_{\Gamma_1} |A\xi|^p d\nu_1 d\nu_2)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\int_{\Gamma_1} |A\xi|^p d\nu_1)^{\frac{1}{p}} (\int_{\Gamma_2} |B\eta|^p d\nu_2)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||A\xi|| \cdot ||B\eta|| \end{aligned}$$

$\forall \;\; \xi \in L^p(\Omega_1, \mu_1)$ et $\forall \;\; \eta \in L^p(\Omega_2, \mu_2)$. Donc

$$||A \otimes B|| = ||A|| ||B||.$$

□

Notez que la construction ci-dessus peut être étendue à un nombre fini d'espaces vectoriels. Soient $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_N$ désignant le produit tensoriel algébrique pour N espaces vectoriels $H_1, \ldots, H_N$. Un élément de H est de la forme $x_1 \otimes \ldots \otimes x_N$.
Le produit tensoriel est défini par

$$\otimes : H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_N \longrightarrow H_1 \otimes \ldots \otimes H_N.$$

Lorsque $H_1, \ldots, H_N$ sont des espaces de (p,q)-formes différentielles sur des domaines $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, le produit tensoriel algébrique H peut être vu comme l'espace des (p,q)-formes différentielles sur le produit de domaine $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N$.
Pour $j = 1, \ldots, N$, soit H_j l'espace vectoriel complexe des formes différentielles défini sur un domaine Ω_j.
Soit f_j une forme différentielle définie dans $H_j(\Omega_j)$ et $\pi_j : \Omega \longrightarrow \Omega_j$ une projection.
L'identification

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_N = \pi_1^* f_1 \Lambda \ldots \Lambda \pi_N^* f_N,$$

que l'on appelle forme décomposable simple s'étend linéairement à une application injective de $H_1(\Omega_1) \otimes \ldots \otimes H_N(\Omega_N)$ dans l'espace des formes différentielles sur Ω noté $H(\Omega)$. En particulier, si $H_j(\Omega_j) = L^p_*(\Omega_j)$ par le Théorème (2.3), $L^p_*(\Omega_1) \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} L^p_*(\Omega_N)$ est isométriquement isomorphe à $L^p_*(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N)$, c'est-à-dire

$$L^p_*(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N) \cong L^p_*(\Omega_1) \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} L^p_*(\Omega_N). \tag{6}$$

En particulier, pour les espaces de Sobolev, on a :

$$\tilde{W}^{k,p}_{r,q}(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N) \cong W^{k,p}_{r,q}(\Omega_1) \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} W^{k,p}_{r,q}(\Omega_N).$$

3 Etude du $\overline{\partial}$ sur le produit de domaines relativement compacts

Une propriété très importante de l'opérateur

$$\overline{\partial} : L^2_*(\Omega) \longrightarrow L^2_*(\Omega)$$

est d'avoir une image fermée i.e

$$img(\overline{\partial}) \subset L^2_*(\Omega)$$

est un sous espace fermé.
Commençons par définir certaines notions qui nous seront utiles dans la suite.

Définition 3.1 (Produit de convolution).
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, leur produit de convolution noté $f \star g$ est défini par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt.$$

On a la remarque suivante :

Remarque 3.1.

1. Le produit de convolution est associatif et commutatif.
2. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Le produit de convolution est défini presque partout, il appartient à $L^p(\mathbb{R})$ avec l'inégalité

$$||f \star g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p.$$

Définition 3.2 (Produit de convolution de deux mesures).
Soient μ_1 et μ_2 deux mesures finies sur $\mathbb{R}$.
On appelle produit de convolution de μ_1 et μ_2 la mesure définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\mu_1 \star \mu_2)(A) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(\{(x,y); x+y \in A\}).$$

Autrement dit, $\mu_1 \star \mu_2$ est la mesure image de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ par l'application somme.
Le produit de convolution de deux mesures vérifie les propriétés suivantes :
• Pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d(\mu_1 \star \mu_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y)d\mu_1(x)d\mu_2(y),$$

• la masse de Dirac en 0 est l'élément neutre du produit de convolution,
• Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$,
• Si $d\mu_1 = f(x)dx$ et $d\mu_2 = g(x)dx$ sont deux mesures de densité, alors $d(\mu_1 \star \mu_2) = (f \star g)dx$.
Autrement dit, le produit de convolution des mesures est le produit de convolution des fonctions.

Définition 3.3 (Opérateur de Hodge). *(cf [8])*
Soit M une variété analytique complexe de classe C^∞ de dimension m.
L'opérateur de Hodge $*$ est l'endomorphisme de $\wedge^\bullet T^*_M$ défini par un ensemble d'applications linéaires tel que

$$* : \wedge^p T^*_M \longrightarrow \wedge^{m-p} T^*_M \quad u \wedge *v =< u, v > dV \quad \forall \ u, v \in \wedge^p T^*_M,$$

où dV est l'élément de volume sur M et $<,>$ est le crochet de dualité pour cette partie.

Propriétés 3.1 (Propriétés de l'opérateur de Hodge). *(cf [8])*

• $d^* = -1^{(m+1)} * d*$, où d^* est l'adjoint de d.
• $\forall \ w \in \wedge^p T_M^*, \ \ **w = (-1)^{p(n-1)}w$. Donc l'inverse de l'isomorphisme $*$ est donné par

$$*^{-1} = (-1)^{p(n-1)}*$$

Soit maintenant Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$. Pour $1 \leq P \leq \infty$, $L^p_{r,q}(\Omega)$ désigne l'espace de Banach des (r,q)-formes différentielles à coefficients dans $L^p(\Omega)$. Si $p' \in \mathbb{R}$ de sorte que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, la dualité globale entre $L^p_{r,q}(\Omega)$ et $L^{p'}_{r,q}(\Omega)$ est définie par

$$< f, g >= \int_\Omega f \wedge *g,$$

où $*$ est l'opérateur étoilé de Hodge.
Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit le groupe de cohomologie du $\overline{\partial}$ dans $L^p(\Omega)$ par

$$\mathbf{H}^*_{L^p}(\Omega) = \frac{Ker(\overline{\partial}) \cap L^p_*(\Omega)}{img(\overline{\partial}) \cap L^p_*(\Omega)}$$

et l'espace des L^p-formes harmoniques par :

$$\mathcal{H}^*_p(\Omega) = \{f \in dom(\overline{\partial}) \cap dom(\overline{\partial}^*) \subset L^p_*(\Omega) : \overline{\partial} f = \overline{\partial}^* f = 0\}.$$

Soit

$$[\cdot] : Ker(\overline{\partial}) \longrightarrow \mathbf{H}^*_{L^P}(\Omega)$$

la projection naturelle.
Grâce à la densité des formes différentielles de classe C^∞ à support compact dans $L^P(\Omega)$ et en utilisant l'argument de la dualité, on a le résultat suivant ;

Lemme 3.1.
Soit η la restriction de $[\cdot]$ à l'espace des L^2-formes harmoniques $\mathcal{H}^*_2(\Omega)$. Alors

1. *η est injective,*
2. *Si η est surjective, alors l'image du $\overline{\partial}$ est fermée.*

Démonstration.

1. Pour les $(0,0)$-formes, i.e les fonctions, l'espace $\mathcal{H}_{0,0}(\Omega)$ coïncide par définition avec l'espace cohomologique $\mathbf{H}^{0,0}_{L^2}(\Omega)$.
   Pour les formes différentielles de degré supérieur, on a :

$$\begin{aligned} \eta : \ & \mathcal{H}^*_2(\Omega) \subset ker(\overline{\partial}) \longrightarrow \mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega) \\ & g \longmapsto [g] \end{aligned}$$

   Soit

$$g \in ker\eta,$$
$$\eta(g) = 0 \Rightarrow [g] = 0.$$

   Par conséquent

$$g = \overline{\partial} h.$$

   Or

$$\overline{\partial} g = \overline{\partial}^* g = 0.$$

   Donc

$$< g, g >=< \overline{\partial} h, g >=< h, \overline{\partial}^* g >= 0.$$

   Ainsi,

$$||g||^2 = 0 \Rightarrow g = 0.$$

   Ce qui entraine l'injectivité de η.

2.

$$\begin{aligned}\eta : \ & \mathcal{H}_2^*(\Omega) \subset ker(\overline{\partial}) \longrightarrow \mathbf{H}_{L^2}^*(\Omega) \\ & g \longmapsto [g]\end{aligned}$$

Surjectivité de η :

$$\forall \ \alpha \in \mathbf{H}_{L^2}^*(\Omega), \ \ \exists \ \ g \in \mathcal{H}_2^*(\Omega) \mid [g] = \alpha.$$

Si

$$f \in ker(\overline{\partial}) \mid \alpha = [f] \text{ alors } f = g + \overline{\partial}h.$$

$$\begin{aligned}< f, f > &=< g + \overline{\partial}h, g + \overline{\partial}h > \\ &=< g, g > + < g, \overline{\partial}h > + < \overline{\partial}h, g > + < \overline{\partial}h, \overline{\partial}h > \\ &=< g, g > + < \overline{\partial}h, \overline{\partial}h > \ \geq \ < g, g > .\end{aligned}$$

D'aprés (1), η est injective. Si η est surjective, alors η est un isomorphisme, on a donc $\mathcal{H}_2^*(\Omega)$ est isomorphe à l'espace cohomologique $\mathbf{H}_{L^2}^*(\Omega)$.
Puisque $\mathcal{H}_2^*(\Omega)$ est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L_*^2(\Omega)$, l'espace $\mathbf{H}_{L^2}^*(\Omega)$ devient un espace de Hilbert.
$\mathbf{H}_{L^2}^*(\Omega)$ est un espace de Hilbert donc son image est fermée.

□

3.1 Image fermée du $\overline{\partial}$

Il s'agit dans cette partie de démontrer le Théorème (0.1). Pour cela, nous construisons un opérateur de solution au problème du $\overline{\partial}$ sur un produit de domaines appelé opérateur de solution canonique.
Notre hypothèse fondamentale est la suivante : pour chaque j, l'opérateur $\overline{\partial}$ est d'image fermée dans $L_*^2(\Omega_j)$ pour $j = 1, \dots, N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.
Dans notre cadre d'étude, nous considérons désormais le cas $N = 2$, c'est-à-dire dans le cas où $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ avec Ω_1 et Ω_2 deux domaines relativement compacts de $\mathbb{C}^n$.
Commençons par donner quelques notions algébriques pour les formes décomposables lisses sur Ω.
Soient $f \in C_*^\infty(\overline{\Omega}_1)$ et $g \in C_*^\infty(\overline{\Omega}_2)$, on a

$$\overline{\partial}(f \otimes g) = \overline{\partial}_1 f \otimes g + \sigma_1 f \otimes \overline{\partial}_2 g \tag{7}$$

où $\overline{\partial}_1, \ \ \overline{\partial}_2 \ \ et \ \ \overline{\partial}$ représentant respectivement l'opérateur $\overline{\partial}$ sur $\Omega_1, \ \ \Omega_2 \ \ , \ \ \Omega$ et σ_1 est l'application sur $C_*^\infty(\overline{\Omega}_1)$ qui est la multiplication par $(-1)^{p+q}$ sur $C_{p,q}^\infty(\overline{\Omega}_1)$ et pour tout opérateur S de degré d sur $L_*^\infty(\Omega_1)$ i.e $deg(Sf) - deg(f) = d$ avec f une forme différentielle défini dans $dom(S)$, on a

$$\sigma_1 S = (-1)^d S \sigma_1.$$

On peut étendre 7 à $C_*^\infty(\overline{\Omega}_1) \otimes C_*^\infty(\overline{\Omega}_2)$, pour obtenir la formule de Leibniz pour les formes décomposables lisses données par

$$\overline{\partial} = \overline{\partial}_1 \otimes I_2 + \sigma_1 \otimes \overline{\partial}_2, \tag{8}$$

où I_2 est l'opérateur identité sur Ω_2.
Soient K_1 et K_2 des opérateurs de résolution canonique du $\overline{\partial}$ sur Ω_1 et Ω_2, alors on peut définir un opérateur $S : C_*^\infty(\overline{\Omega}_1) \otimes C_*^\infty(\overline{\Omega}_2) \longrightarrow L_*^2(\Omega_1) \otimes L_*^2(\Omega_2)$ par la formule suivante

$$S = K_1 \otimes I_2 + \sigma_1 P_1 \otimes K_2 \tag{9}$$

où $P_j : L_*^2(\Omega_j) \longrightarrow \mathcal{H}_*^2(\Omega_j)$ est la projection harmonique sur Ω_j de bidegré $(0, 0)$.

Lemme 3.2.

Sur l'espace des formes décomposables lisses $C_*^\infty(\overline{\Omega}_1) \otimes C_*^\infty(\overline{\Omega}_2)$, on a

$$\overline{\partial} S + S\overline{\partial} = I - P_1 \otimes P_2$$

où $I = I_1 \otimes I_2$ désigne l'application identité sur Ω.

Démonstration.

Notons d'abord que :

$$\begin{aligned}\overline{\partial} S =&(\overline{\partial}_1 \otimes I_2 + \sigma_1 \otimes \overline{\partial}_2)(K_1 \otimes I_2 + \sigma_1 P_1 \otimes K_2)\\ =&\overline{\partial}_1 K_1 \otimes I_2^2 + \overline{\partial}_1 \sigma_1 P_1 \otimes I_2 K_2 + \sigma_1 K_1 \otimes \overline{\partial}_2 I_2 + \sigma_1^2 P_1 \otimes \overline{\partial}_2 K_2\\ =&\overline{\partial}_1 K_1 \otimes I_2 + \overline{\partial}_1 \sigma_1 P_1 \otimes K_2 + \sigma_1 K_1 \otimes \overline{\partial}_2 + \sigma_1^2 P_1 \otimes \overline{\partial}_2 K_2.\end{aligned}$$

P_1 étant la projection harmonique alors $\overline{\partial}_1 P_1 = 0$. Et par définition de σ,

$$\begin{aligned}\sigma(T) =&(-1)^{p+q} T\\ \sigma^2(T) =&\sigma(\sigma(T))\\ =&\sigma((-1)^{p+q} T)\\ =&(-1)^{p+q}((-1)^{p+q} T)\\ =&((-1)^{p+q})^2 T\\ =&T.\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat suivant :

$$\overline{\partial} S = \overline{\partial}_1 K_1 \otimes I_2 + \sigma_1 K_1 \otimes \overline{\partial}_2 + P_1 \otimes \overline{\partial}_2 K_2.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}S\overline{\partial} =&(K_1 \otimes I_2 + \sigma_1 P_1 \otimes K_2)(\overline{\partial}_1 \otimes I_2 + \sigma_1 \otimes \overline{\partial}_2)\\ =&K_1 \overline{\partial}_1 \otimes I_2^2 + \sigma_1 P_1 \overline{\partial}_1 \otimes K_2 I_2 + K_1 \sigma_1 \otimes I_2 \overline{\partial}_2 + \sigma_1 P_1 \sigma_1 \otimes K_2 \overline{\partial}_2.\end{aligned}$$

Or $P_1 \overline{\partial}_1 = 0$ par la décomposition de Hodge donnée par(cf [2])

$$L_*^2(\Omega) = ((img(\overline{\partial}^*)) \oplus ((img(\overline{\partial})) \oplus \mathcal{H}_*(\Omega)$$

et avec la relation $\sigma_1 S = (-1)^d S \sigma_1$, on a

$$\begin{aligned}S\overline{\partial} =&K_1 \overline{\partial}_1 \otimes I_2 + K_1 \sigma_1 \otimes \overline{\partial}_2 + \sigma_1^2 P_1 \otimes K_2 \overline{\partial}_2\\ =&K_1 \overline{\partial}_1 \otimes I_2 + K_1 \sigma_1 \otimes \overline{\partial}_2 + P_1 \otimes K_2 \overline{\partial}_2.\end{aligned}$$

K_1 étant un opérateur qui réduit le degré de 1, on a :

$$S\overline{\partial} = K_1 \overline{\partial}_1 \otimes I_2 - \sigma_1 K_1 \otimes \overline{\partial}_2 + P_1 \otimes K_2 \overline{\partial}_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overline{\partial} S + S\overline{\partial} =&\overline{\partial}_1 K_1 \otimes I_2 + \sigma_1 K_1 \otimes \overline{\partial}_2 + P_1 \otimes \overline{\partial}_2 K_2 + K_1 \overline{\partial}_1 \otimes I_2 - \sigma_1 K_1 \otimes \overline{\partial}_2 + P_1 \otimes K_2 \overline{\partial}_2\\ =&(\overline{\partial}_1 K_1 + K_1 \overline{\partial}_1) \otimes I_2 + P_1 \otimes (\overline{\partial}_2 K_2 + K_2 \overline{\partial}_2).\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'homotopie $\overline{\partial}K + K\overline{\partial} = I - P$, on a :

$$\begin{aligned}\overline{\partial}S + S\overline{\partial} =&(I_1 - P_1) \otimes I_2 + P_1 \otimes (I_2 - P_2)\\ =&I_1 \otimes I_2 - P_1 \otimes I_2 + P_1 \otimes I_2 - P_1 \otimes P_2\\ =&I_1 \otimes I_2 - P_1 \otimes P_2.\end{aligned}$$

□

Soit Ω un domaine à bord lisse dans $\mathbb{C}^n$ et f une forme différentielle définie dans $dom(\overline{\partial}) \subset L^2_*(\Omega)$, il résulte du Théorème 3.1 dans [16] qu'il existe une suite f_j dans $C^\infty_*(\overline{\Omega})$ telle que si

$$f_j \longrightarrow f \text{ dans } L^2_*(\Omega) \text{ alors } \overline{\partial}f_j \longrightarrow \overline{\partial}f \text{ dans } L^2_*(\Omega),$$

Alors on a le résultat suivant :

Lemme 3.3.

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine lipschitzien, alors l'espace $C^\infty_*(\overline{\Omega})$ est dense dans $dom(\overline{\partial})$ pour la norme du graphe dans l'espace $L^2(\Omega)$.

Démonstration.

Soit $f \in dom(\overline{\partial})$. Puisque $\overline{\partial}$ est un opérateur fermé, on peut construire une suite $f_n \in C^\infty_*(\overline{\Omega})$ telle que

$$si \;\; f_n \longrightarrow f, \;\; alors \;\; \overline{\partial}f_n \longrightarrow \overline{\partial}f.$$

Nous montrons en premier que cela peut être fait sur un sous-ensemble compact dans Ω à partir des suites régularisantes par convolution.

Soit $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{C}^n)$ une fonction tel que $\chi \geq 0$, $\displaystyle\int \chi dv = 1$.

$\chi(z)$ ne dépend que de $|z|$ et s'annule quand $|z| \geq 1$. Nous définissons $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2n}\chi(\frac{z}{\varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$.

En prologeant f par 0 en dehors de Ω, pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $z \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned}f_\varepsilon(z) =&f \star \chi_\varepsilon(z)\\ =&\int_{\mathbb{C}^n} f(z')\chi_\varepsilon(z - z')dv(z')\\ =&\int_{\mathbb{C}^n} f(z - \varepsilon z')\chi(z')dv(z').\end{aligned}$$

De l'inégalité de Young pour la convolution donnée par

$$||f \star \chi_\varepsilon(z)|| \leq ||f|| \cdot ||\chi_\varepsilon(z)||,$$

on a :

$$||f_\varepsilon|| \leq ||f||.$$

On sait que f_ε converge uniformément vers $f \in C^\infty_0(\mathbb{C}^n)$, or $C^\infty_0(\mathbb{C}^n)$ est un sous-ensemble dense de $L^2(\mathbb{C}^n)$, on a alors

$$f_\varepsilon \longrightarrow f \;\; dans \;\; L^2(\mathbb{C}^n) \;\; pour \;\; chaque \;\; f \in L^2(\mathbb{C}^n).$$

Ce qui implique que $f_\varepsilon \longrightarrow f$ *dans* $L^2(\Omega)$.

Soit δ_v une suite de nombres avec $\delta_v \searrow 0$. Pour chaque δ_v, nous définissons

$$\Omega_{\delta_v} = \{z \in \Omega \mid \rho(z) < -\delta_v\}.$$

Alors Ω_{δ_v} est une suite de sous ensembles ouverts relativement compacts de Ω dont l'union est égale à Ω.
En utilisant les mêmes arguments que précédemment, pour tout opérateur différentiel de premier ordre D_i a coefficients constants, si $D_i f \in L^2(\Omega)$, on a

$$D_i f_\varepsilon = D_i(f \star \chi_\varepsilon) = D_i f \star \chi_\epsilon \longrightarrow D_i f \ \ dans \ \ L^2(\Omega_{\delta_v}) \ \ quand \ \ \varepsilon \to 0.$$

Puisque $\overline{\partial}$ est un opérateur de premier ordre, on a

$$\overline{\partial} f_\varepsilon \longrightarrow \overline{\partial} f \ \ dans \ \ L^2(\Omega_{\delta_v}) \ \ sur \ \ \Omega_{\delta_v} \ \ \text{où} \ \ f_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_{\delta_v}).$$

Pour voir que cela peut être fait jusqu'au bord, nous supposons d'abord que le domaine Ω est étoilé et $0 \in \Omega$ est le centre.
Soit

$$\Omega^\varepsilon = \{(1+\varepsilon)z \mid z \in \Omega\} \ \ et \ \ f^\varepsilon = f(\frac{z}{1+\varepsilon}),$$

alors $\Omega \subset\subset \Omega^\varepsilon$ et $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$. Egalement,

$$\overline{\partial} f^\varepsilon \longrightarrow \overline{\partial} f \in L^2(\Omega).$$

Soit

$$f_{(\varepsilon)} = f(\frac{z}{1+\varepsilon}) \star \chi_{\delta_\varepsilon},$$

où

$$\delta_\varepsilon \searrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \searrow 0 \ \ et \ \ \delta_\varepsilon \text{ est choisi suffisamment petit.}$$

On a $f_{(\varepsilon)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
On a :

$$f_{(\varepsilon)} \longrightarrow f \ \ dans \ \ L^2(\Omega), \ \ \overline{\partial} f_{(\varepsilon)} \longrightarrow \overline{\partial} f.$$

Donc, $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense pour la norme du graphe quand Ω est étoilé.
Le cas général se fait en utilisant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement fini $(U_j)_{j\in J}$ de $\overline{\Omega}$ où $(U_j)_{j\in J}$ est étoilé. □

Le lemme suivant sera énoncé et démontré dans $L^p(\Omega)$ et reste valable dans le cas $p = 2$.

Lemme 3.4.

Soit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ le produit de deux domaines bornés lisses de $\mathbb{C}^n$. Alors l'espace $C^\infty_*(\overline{\Omega}_1) \otimes C^\infty_*(\overline{\Omega}_2)$ est dense dans dom$(\overline{\partial})$ pour la norme du graphe dans l'espace $L^p(\Omega)$ défini par :

$$f \longrightarrow ||f||_{L^p} + ||\overline{\partial}||_{L^p}. \tag{10}$$

Démonstration.

D'après le Lemme(3.3), $C^\infty_*(\overline{\Omega})$ est dense dans $dom(\overline{\partial})$ donc toute forme $f \in dom(\overline{\partial})$ peut être approximée par une forme $\tilde{f} \in C^\infty_*(\overline{\Omega})$ pour la norme du graphe.
D'après la Proposition 1 de [12], $C^\infty_*(\overline{\Omega}_1) \otimes C^\infty_*(\overline{\Omega}_2)$ est dense dans $C^\infty_*(\overline{\Omega})$.
Donc chaque forme dans $C^\infty_*(\overline{\Omega})$ peut être approximée par une forme dans $C^\infty_*(\overline{\Omega}_1) \otimes C^\infty_*(\overline{\Omega}_2)$ pour la norme C^k, où $0 \leq k \leq \infty$.
Pour $k = 0$, on peut approximer $\tilde{f}$ par une forme dans $C^\infty_*(\overline{\Omega}_1) \otimes C^\infty_*(\overline{\Omega}_2)$ avec la norme C^0 (qui est plus fine que la norme du graphe puisque l'inclusion $C^0(\overline{U}) \subset L^p(U)$ est continue pour un domaine borné U).
Donc $C^\infty_*(\overline{\Omega}_1) \otimes C^\infty_*(\overline{\Omega}_2)$ est dense dans $dom(\overline{\partial})$ pour la norme du graphe. □

Sur $dom(\overline{\partial}) \subset L^2_*(\Omega)$, on a la formule de Leibniz suivante :

$$\overline{\partial} = \overline{\partial}_1 \widehat{\otimes} I_2 + \sigma_1 \widehat{\otimes} \overline{\partial}_2. \tag{11}$$

Plus loin, on peut étendre l'opérateur S défini par la relation (9) à $L^2_*(\Omega)$ par la formule

$$S = K_1 \widehat{\otimes} I_2 + \sigma_1 P_1 \widehat{\otimes} K_2. \tag{12}$$

Lemme 3.5.

La formule d'homotopie suivante

$$\overline{\partial} S + S \overline{\partial} = I - P_1 \widehat{\otimes} P_2 \tag{13}$$

est valable sur $dom(\overline{\partial}) \subset L^2_*(\Omega)$.

Démonstration.

La démonstration est identique à la démonstration du Lemme (3.2). □

Comme résultat principal de cette partie, on a :

Proposition 3.1.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines bornés à bord lipschitzien dans une variété hermitienne complexe. Posons $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et supposons que l'opérateur $\overline{\partial}$ est d'image fermée dans $L^2_*(\Omega_j)$ où $j = 1, 2$. Alors $\overline{\partial}$ est d'image fermée dans $L^2_*(\Omega)$.

Démonstration.

D'après le Lemme (3.1), si l'application $\eta(f) = [f]$ est surjective, alors le $\overline{\partial}$ est d'image fermée. En d'autres termes, nous allons montrer que pour toute classe de cohomologie α dans $\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega)$, il existe une classe de forme harmonique h dans $\mathcal{H}^*_2(\Omega)$ telle que $\alpha = [h]$. En fait, nous montrons qu'il existe une telle forme h dans le produit tensoriel $\mathcal{H}^*_2(\Omega_1) \widehat{\otimes} \mathcal{H}^*_2(\Omega_2) \subset \mathcal{H}^*_2(\Omega)$.
On prouvera également que :

$$\mathcal{H}^*_2(\Omega) = \mathcal{H}^*_2(\Omega_1) \widehat{\otimes} \mathcal{H}^*_2(\Omega_2). \tag{14}$$

En effet, soit f une forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée représentant la classe de cohomologie α, i.e. $\alpha = [f]$. En utilisant la formule d'homotopie (13), on a alors

$$f - \overline{\partial}(Sf) = (P_1 \widehat{\otimes} P_2) f.$$

Ainsi la forme

$$(P_1 \widehat{\otimes} P_2) f \in \mathcal{H}^*_2(\Omega_1) \widehat{\otimes} \mathcal{H}^*_2(\Omega_2)$$

représente la même classe de cohomologie que $[f]$ i.e. $[(P_1 \widehat{\otimes} P_2) f] = \alpha$.
Puis chaque classe de cohomologie dans $\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega)$ peut être représentée par une forme harmonique dans $\mathcal{H}^*_2(\Omega_1) \widehat{\otimes} \mathcal{H}^*_2(\Omega_2)$. On obtient l'égalité (14) du fait que η est injective. Cela montre que l'application η du Lemme (3.1) est surjective et donc l'image du $\overline{\partial}$ dans $L^2_*(\Omega)$ est fermée pour tous bidegrés.
La L^2 formule de Kunneth

$$\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega) = \mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega_1) \widehat{\otimes} \mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega_2),$$

découle par conséquent de (14) et des isomorphismes

$$\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega_1) \cong \mathcal{H}^*_2(\Omega_1)$$

$$\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega_2) \cong \mathcal{H}^*_2(\Omega_2)$$

$$\mathbf{H}^*_{L^2}(\Omega) \cong \mathcal{H}^*_2(\Omega).$$

Cela prouve la Proposition (3.1).
De la même manière, on peut étendre les résultats ci-dessus au produit de N domaines relativement compacts de $\mathbb{C}^n$. D'où la preuve du Théorème (0.1). □

3.2 Régularité de l'opérateur $\overline{\partial}$ dans l'espace L^2-Sobolev Partiel

Dans cette partie, notre objectif est de donner quelques résultats concernant la régularité de la solution canonique du $\overline{\partial}$ sur le produit de domaines relativement compacts.
Pour cela, on va utiliser les espaces de Sobolev partiels définis dans la partie (1.6) et l'opérateur S défini par la relation (9).

Définition 3.4 (Projection de Bergman)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné.
On appelle projection de Bergman sur Ω la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur le sous-espace fermé des fonctions holomorphes de $L^2(\Omega)$.

Lemme 3.6.
Pour $0 \leq p \leq n$, la restriction de l'application S sur l'espace des $(p,1)$-formes différentielles $\overline{\partial}$-fermées coïncide avec la restriction de l'opérateur solution canonique $\overline{\partial}^* N$ sur le même espace.

Démonstration.
D'après la décomposition de Hodge pour les (p,q)-formes différentielles, on a

$$ker(\overline{\partial}_{p,q}) = img(\overline{\partial}_{p,q-1}) \oplus \mathcal{H}_{p,q}(\Omega).$$

Si $q = 0$, par la relation (14) il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} ker(\overline{\partial}_{p,0}) =& \mathcal{H}_{p,0}(\Omega) \\ =& \bigoplus_{j+k=p} \mathcal{H}_{j,0}(\Omega_1)\widehat{\otimes}\mathcal{H}_{k,0}(\Omega_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Notons $S_{p,1}$ la restriction de l'application S sur l'espace des $(p,1)$-formes différentielles $\overline{\partial}$-fermées.
Montrons que l'image de $S_{p,1}$ est orthogonale à l'espace $ker(\overline{\partial}_{p,0})$. D'après la relation (15), il suffit de montrer que l'image de $S_{p,1}$ est orthogonale à toute forme du type $g_1 \otimes g_2$, où g_1 et g_2 sont des formes harmoniques de degré $(j,0)$ et $(p-j,0)$, où $0 \leq j \leq p$.
Soient f_1 et f_2 deux L^2 formes différentielles telles que $f_1 \otimes f_2$ soit de bidegré $(p,1)$.
Alors,

$$\begin{aligned} < S(f_1 \otimes f_2), g_1 \otimes g_2 >=& < K_1 f_1 \otimes f_2 + \sigma_1 P_1 f_1 \otimes K_2 f_2, g_1 \otimes g_2 > \\ =& < K_1 f_1, g_1 >< f_2, g_2 > + < \sigma_1 P_1 f_1, g_1 >< K_2 f_2, g_2 > \\ =& 0\cdot < f_2, g_2 > + < \sigma_1 P_1 f_1, g_1 > \cdot 0 \\ =& 0, \end{aligned}$$

où K_1 et K_2 sont des opérateurs solutions canoniques d'images orthogonales à toute forme harmonique.
Donc $S_{p,1}$ est orthogonal à $ker(\overline{\partial}_{p,0})$.
Si f est une $(p,1)$-forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée et orthogonale à toute forme harmonique, il découle de la formule d'homotopie (cf (13)) que $\overline{\partial}(Sf) = f$. Puisque Sf est orthogonale à toutes formes différentielles qui est dans $ker(\overline{\partial})$ et l'opérateur solution canonique $\overline{\partial}^* N$ est orthogonal à toute forme différentielle qui est dans $ker(\overline{\partial})$, alors $Sf = \overline{\partial}^* Nf$.
Pour terminer la preuve, il faut montrer que S s'annule sur l'espace des $(p,1)$-formes harmoniques.
Dés lors, il suffit de le vérifier à l'aide d'une forme harmonique du type $f \otimes g$, où f et g sont aussi des formes harmoniques. On a :

$$\begin{aligned} S(f \otimes g) =& K_1 f \otimes g + \sigma_1 P_1 f \otimes K_2 g \\ =& 0 \otimes g + \sigma_1 P_1 f \otimes 0 \\ =& 0, \end{aligned}$$

puisque K_1 et K_2 sont des opérateurs solutions canoniques sur les domaines Ω_1 et Ω_2.
Donc la restriction de l'opérateur S coïncide sur l'espace des $(p,1)$-formes différentielles $\overline{\partial}$-fermées avec la restriction de l'opérateur solution canonique $\overline{\partial}^* N$ sur le même espace. □

A présent, on peut faire la démonstration du Théorème (0.2).

Démonstration du Théorème (0.2).

Par le Lemme (3.6), l'opérateur S défini sur Ω coïncide avec l'opérateur solution canonique sur les $(p,1)$-formes différentielles $\overline{\partial}$-fermées.
Donc il suffit de montrer que

$$S : \tilde{W}^k_{p,1}(\Omega) \longrightarrow \tilde{W}^k_{p,1}(\Omega)$$

est borné.
D'après le Théorème (4.8) de [2], on a S est donné par la relation suivante :

$$S := \sum_{j=0}^{N-1} T_{N,j} \text{ avec } T_{N,j} = \tau_j Q_j \widehat{\otimes} K_{j+1} \widehat{\otimes} I_j,$$

pour un produit de N domaines, où
Q_j est la projection harmonique sur le domaine $U_j = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_j$, (le produit des j premiers domaines),

τ_j est l'application sur $L^2_*(U_j)$ qui multiplie les formes de degré d par $(-1)^d$,

I_j est l'application identité sur $\Omega_{j+2} \times \ldots \times \Omega_N$ et

on a $T_{N,0} = K_1 \widehat{\otimes} I_0$ et $T_{N,N-1} = \tau_{N-1} Q_{N-1} \widehat{\otimes} K_N$.
On a :

$$\begin{aligned} T_{N,j} =& \tau_j Q_j \widehat{\otimes} K_{j+1} \widehat{\otimes} I_j \\ =& \tau_j P_1 \widehat{\otimes} \ldots P_j \widehat{\otimes} K_{j+1} \widehat{\otimes} I_{\Omega_j+2} \ldots \widehat{\otimes} I_{\Omega_N}, \end{aligned}$$

où P_ν est la projection harmonique sur Ω_ν, K_ν est l'opérateur solution canonique et I_{Ω_ν} est l'application identité sur $L^2_*(\Omega_\nu)$.
D'après la régularité de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann, l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ noté K_ν et la projection harmonique notée P_ν sont bornés dans $W^k(\Omega_\nu)$ pour $k \geq 0$.
Donc le ν-ième facteur dans le produit tensoriel de $T_{N,j}$ est une application linéaire bornée sur $W^k_*(\Omega_\nu)$.
Il s'en suit que $T_{N,j}$ définit une application linéaire bornée du produit tensoriel $W^k_*(\Omega_1) \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} W^k_*(\Omega_N)$ sur lui même, i.e c'est une application linéaire bornée de $\tilde{W}^k_*(\Omega)$ sur lui même. L'opérateur S étant la somme des $T_{N,j}$, il est borné dans $\tilde{W}^k_*(\Omega)$. Donc $u = Sf = \overline{\partial}^* Nf \in \tilde{W}^k_*(\Omega)$ est la solution canonique de l'équation $\overline{\partial} u = f$. □

Corollaire 3.1.

Pour $j = 1, \ldots, N$, soit Ω_j un domaine borné pseudoconvexe à bord lisse dans un espace euclidien $\mathbb{C}^{n_j}$. Pour $n = n_1 + \ldots + n_N$, soit $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N \subset \mathbb{C}^n$ un produit de domaines. Si $f \in C^\infty_{p,q}(\overline{\Omega})$ et $\overline{\partial}$-fermée avec $q \neq 0$, alors il existe $u \in C^\infty_{p,q-1}(\overline{\Omega})$ telle que $\overline{\partial} u = f$.

Démonstration.

D'après le corollaire [6.1.5] de [5], il existe une solution $u \in W^k_{(p,q-1)}(\Omega)$ de l'équation $\overline{\partial} u = f$ pour tout $k > 0$.
Considérons une suite de solutions $u_k \in W^k_{(p,q-1)}(\Omega)$ de l'équation $\overline{\partial} u = f$ pour tout $k > 0$.
Montrons que $W^m_{(p,q)}(\Omega) \cap ker(\overline{\partial})$ est dense dans $W^s_{(p,q)}(\Omega) \cap ker(\overline{\partial})$ pour tout $m > s \geq 0$.

Soit $g_n \in C^\infty_{(p,q)}(\overline{\Omega})$ une suite tel que $g_n \longrightarrow g$ dans $W^s_{(p,q)}(\Omega)$.
En utilisant le Théorème [6.1.4] de [5], pour t suffisamment grand, la projection de Bergman avec poids $P_t = P_{t,(p,q)}$ est borné dans $W^m_{(p,q)}(\Omega)$. Si $\overline{\partial} g = 0$, on a $g - P_t g = \overline{\partial}^*_t N_t \overline{\partial} g = 0$. Posons $P_t g_n = g'_n \in W^m_{(p,q)}(\Omega)$, $\overline{\partial} g'_n = 0$ donc $g'_n \longrightarrow g$ dans $W^s_{(p,q)}(\Omega)$ car P_t est aussi borné dans $W^s_{(p,q)}(\Omega)$.
Donc $W^m_{(p,q)}(\Omega) \cap ker(\overline{\partial})$ est dense dans $W^s_{(p,q)}(\Omega) \cap ker(\overline{\partial})$ pour tout $m > s \geq 0$.
Puisque $u_k - u_{k+1}$ est dans $W^k_{(p,q-1)}(\Omega) \cap ker(\overline{\partial})$, il existe une $v_{k+1} \in W^{k+1}_{(p,q-1)}(\Omega) \cap ker(\overline{\partial})$ telle que

$$||u_k - u_{k+1} - v_{k+1}||_k \leq 2^{-k}, \quad k = 1, 2 \dots$$

Posons $\tilde{u}_{k+1} = u_{k+1} + v_{k+1}$, alors $\tilde{u}_{k+1} \in W^{k+1}_{(p,q-1)}(\Omega)$ et $\overline{\partial} \tilde{u}_{k+1} = f$.
Donc il existe une suite $\tilde{u}_k \in W^k_{(p,q-1)}(\Omega)$ tel que $\overline{\partial} \tilde{u}_k = f$ et

$$||\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k||_k \leq 2^{-k}, \quad k = 1, 2 \dots$$

Posons :

$$u_\infty = \tilde{u}_N + \sum_{k=N}^{\infty} (\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Alors, u_∞ est bien défini et est dans $W^N_{(p,q-1)}(\Omega)$ pour tout N.
D'après le lemme d'inclusion de Sobolev, on a $u_\infty \in C^\infty_{(p,q-1)}(\overline{\Omega})$ et $\overline{\partial} u_\infty = f$. □

4 Etude du $\overline{\partial}$ sur le produit de boules unités

4.1 Image fermée du $\overline{\partial}$

Dans cette partie, l'objectif est d'étendre les résultats de Chakrabarti et Shaw vers les espaces L^p sur le produit de boules unités.
Harvey et Polking dans [11] ont construit des formules explicites pour l'opérateur de résolution K du $\overline{\partial}$ et pour la projection harmonique P dans la boule unité dans $\mathbb{C}$ par :

$$Kf(z) = \int_{\xi \in B} K(\xi, z) \wedge f(z)$$

$$Pf(z) = \int_{\xi \in B} P(\xi, z) \wedge f(z),$$

où K est donné par la formule $K(\xi, z) = \dfrac{(2i\pi)^{-n}[d\xi d(\xi - z)]^n}{(1 - \overline{\xi} z)^{n+1}}$ est le noyau de Bergman et $P(\xi, z)$ est le noyau de projection.
De plus, nous avons la formule d'homotopie donnée par :

$$I - P = \overline{\partial} K + K \overline{\partial},$$

où I désigne l'application identité.
Nous allons nous limiter au cas de deux boules.
Soit $\Omega = B_1 \times B_2 \subset\subset \mathbb{C}^n$ le produit de deux boules unités $B_1 \subset\subset \mathbb{C}^{n_1}$ et $B_2 \subset\subset \mathbb{C}^{n_2}$ avec $n = n_1 + n_2$.
Rappelons quelques notions algébriques sur les formes décomposables lisses sur Ω.
Soient $f \in C^\infty_*(\overline{B}_1)$ et $g \in C^\infty_*(\overline{B}_2)$, alors on a

$$\overline{\partial}(f \otimes g) = \overline{\partial}_1 f \otimes g + \sigma_1 f \otimes \overline{\partial}_2 g, \tag{16}$$

où $\overline{\partial}_1$, $\overline{\partial}_2$ *et* $\overline{\partial}$ représentent l'opérateur $\overline{\partial}$ sur B_1, B_2 *et* Ω respectivement, σ_1 est l'application sur $C^\infty_*(\overline{B}_1)$ qui est la multiplication par $(-1)^{r+q}$ sur $C^\infty_{r,q}(\overline{B}_1)$ et pour tout opérateur S de degré d sur $L^\infty_*(B_1)$ i.e $deg(Sf) - deg(f) = d$ avec f une forme différentielle défini dans $dom(S)$, on a

$$\sigma_1 S = (-1)^d S \sigma_1.$$

De la relation (16), on a la formule de Leibnitz pour les formes décomposables lisses donnée par :

$$\overline{\partial} = \overline{\partial}_1 \otimes I_2 + \sigma_1 \otimes \overline{\partial}_2 \tag{17}$$

où I_2 est l'opérateur identité sur B_2.
Soient K_1 et K_2 deux opérateurs de résolution canonique du $\overline{\partial}$ sur B_1 et B_2, alors on peut définir un opérateur

$$S : C^\infty_*(\overline{B}_1) \otimes C^\infty_*(\overline{B}_2) \longrightarrow L^p_*(B_1) \otimes L^p_*(B_2)$$

par la formule

$$S = K_1 \otimes I_2 + \sigma_1 P_1 \otimes K_2 \tag{18}$$

où P_j est la projection harmonique sur B_j. Alors sur $dom(\overline{\partial}) \subset L^p_*(\Omega)$, on a la formule de Leibnitz suivante :

$$\overline{\partial} = \overline{\partial}_1 \otimes I_2 + \sigma_1 \widehat{\otimes} \overline{\partial}_2. \tag{19}$$

Plus loin, on peut étendre l'opérateur S à $L^p_*(\Omega)$ par la formule suivante :

$$S = K_1 \otimes I_2 + \sigma_1 P_1 \widehat{\otimes} K_2. \tag{20}$$

Lemme 4.1.
La formule d'homotopie suivante

$$\overline{\partial} S + S \overline{\partial} = I - P_1 \widehat{\otimes} P_2 \tag{21}$$

est valable sur $dom(\overline{\partial}) \subset L^p_*(\Omega)$.

Démonstration.
La démonstration est identique à la démonstration du Lemme (3.2). □

Proposition 4.1.
Soit $\Omega = B_1 \times B_2 \subset \mathbb{C}^n$ le produit de deux boules unités $B_1 \subset \mathbb{C}^{n_1}$ et $B_2 \subset \mathbb{C}^{n_2}$ avec $n = n_1 + n_2$. Alors l'image du $\overline{\partial}$ dans $L^p_*(\Omega)$ est fermée et on a la formule de Kunneth pour les L^p-cohomologies i.e.

$$\mathbf{H}^*_{L^p}(\Omega) \cong \mathbf{H}^*_{L^p}(B_1) \widehat{\otimes} \mathbf{H}^*_{L^p}(B_2). \tag{22}$$

Par ailleurs, la projection harmonique satisfait

$$P = P_1 \widehat{\otimes} P_2. \tag{23}$$

Démonstration.
D'après le Lemme (3.1), si l'application $\eta(f) = [f]$ est surjective, alors le $\overline{\partial}$ est d'image fermée. En d'autres termes, nous allons montrer que pour toute classe de cohomologie α dans $\mathbf{H}^*_{L^p}(\Omega)$, il existe une forme harmonique h dans $\mathcal{H}^*_p(\Omega)$ telle que $\alpha = [h]$. En fait, nous montrons qu'il existe une telle forme h dans le produit tensoriel $\mathcal{H}^*_p(B_1) \widehat{\otimes} \mathcal{H}^*_p(B_2) \subset \mathcal{H}^*_p(\Omega)$.
On prouvera également que :

$$\mathcal{H}^*_p(\Omega) = \mathcal{H}^*_p(B_1) \widehat{\otimes} \mathcal{H}^*_p(B_2). \tag{24}$$

En effet, soit f une forme différentielle, $\overline{\partial}$-fermée, représentant la classe de cohomologie de α, i.e. $\alpha = [f]$.
En utilisant la formule d'homotopie (21), on a

$$f - \overline{\partial}(Sf) = (P_1 \widehat{\otimes} P_2) f.$$

Ainsi, la forme

$$(P_1 \widehat{\otimes} P_2)f \in \mathcal{H}_p^*(B_1)\widehat{\otimes}\mathcal{H}_p^*(B_2)$$

représente la même classe de cohomologie que α, i.e. $[(P_1\widehat{\otimes}P_2)f] = \alpha$.
Puis chaque classe de cohomologie dans $\mathbf{H}^*_{L^p}(\Omega)$ peut être représentée par une forme harmonique dans $\mathcal{H}_p^*(B_1)\widehat{\otimes}\mathcal{H}_p^*(B_2) \subset \mathcal{H}^*_{L^p}(\Omega)$. Cela montre que l'application η est surjective et donc l'image du $\overline{\partial}$ dans $L^p_*(\Omega)$ est fermée pour tous degrés.
On obtient l'égalité (24) du fait que η est injective. La L^p formule de Kunneth découle par conséquent de (24) et des isomorphismes

$$\mathbf{H}^*_{L^p}(B_1) \cong \mathcal{H}_p^*(B_1)$$
$$\mathbf{H}^*_{L^p}(B_2) \cong \mathcal{H}_p^*(B_2)$$
$$\mathbf{H}^*_{L^p}(\Omega) \cong \mathcal{H}_p^*(\Omega).$$

A partir de (24), on retrouve directement l'identité (23).
Cela prouve la proposition (3.1).
De la même manière, on peut étendre les résultats ci-dessus au produit de N boules unités dans $\mathbb{C}^n$.
D'où la preuve du Théorème (0.3). □

4.2 Régularité de l'opérateur $\overline{\partial}$ dans l'espace L^p-Sobolev Partiel

Puisque la boule unité B_j est strictement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^{n_j}$, d'après le Corollaire [2.1] de [3], l'opérateur solution canonique $\overline{\partial}^* N$ est borné de $W^{k,p}(B_j)$ vers $W^{k+\frac{1}{2},p}(B_j)$ pour $k \geq 0$.
On peut à présent faire la démonstration du Théorème (0.4).

Démonstration du théorème (0.4).

Soit $\Omega = B_1 \times \ldots \times B_N \subset \mathbb{C}^n$ le produit de boules unités $B_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$, où $n = \sum_{j=1}^{n} n_j$ et $n_j \geq 2$ pour tout j.
D'après le Théorème(3.6), sur l'espace des $(p,1)$-formes différentielles $\overline{\partial}$-fermées, l'opérateur S défini sur Ω coïncide avec l'opérateur solution canonique $\overline{\partial}^* N$ de l'équation $\overline{\partial} u = f$ dans Ω.
Il suffit alors de prouver que l'opérateur S est une application bornée de $W^{k,p}(\Omega)$ vers $W^{k+\frac{1}{2},p}(\Omega)$.
L'opérateur S sur Ω est donné par la relation suivante :

$$S; = \sum_{j=0}^{N-1} T_{N,j} \text{ avec } T_{N,j} = \tau_j Q_j \widehat{\otimes} K_{j+1} \widehat{\otimes} I_j,$$

où τ_j est l'application sur $L^p_*(U_j)$ qui multiplie les formes de degré d par $(-1)^d$, où $U_j = B_1 \times \ldots \times B_j$, (le produit des j premiers boules),

Q_j est la projection harmonique sur U_j,

K_j est l'opérateur solution canonique du $\overline{\partial}$ dans U_j,

I_j est l'application identité sur $\Omega_{j+2} \times \ldots \times \Omega_N$ et

on a $T_{N,0} = K_1 \widehat{\otimes} I_0$ et $T_{N,N-1} = \tau_{N-1} Q_{N-1} \widehat{\otimes} K_N$.

Donc, le ν-iéme facteur dans le produit tensoriel représentant $T_{N,j}$ est une application linéaire borné de $W^{k,p}(B_\nu)$ vers $W^{k+\frac{1}{2},p}(B_\nu)$. Alors $T_{N,j}$ définit un opérateur linéaire borné entre les produits tensoriels

$$W^{k,p}_*(B_1)\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} W^{k,p}_*(B_N)$$

et

$$W_*^{k+\frac{1}{2},p}(B_1)\widehat{\otimes}\ldots\widehat{\otimes}W_*^{k+\frac{1}{2},p}(B_N).$$

Cela signifie que c'est un opérateur linéaire borné de $\tilde{W}^{k,p}(\Omega)$ dans $\tilde{W}^{k+\frac{1}{2},p}(\Omega)$.
L'opérateur S étant la somme des applications continues T_{N_j} de $\tilde{W}_*^{k,p}(\Omega)$ vers $\tilde{W}_*^{k+\frac{1}{2},p}(\Omega)$, il est donc borné de $\tilde{W}_*^{k,p}(\Omega)$ vers $\tilde{W}_*^{k+\frac{1}{2},p}(\Omega)$.
La continuité de la projection de Bergman sur les espaces de Sobolev partiel découle par conséquent de celles des solutions canoniques et de la formule $B = I - \overline{\partial}^* N\overline{\partial}$. □

Corollaire 4.1.

Soit $\Omega = B_1 \times \ldots \times B_N$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ tel que $n = n_1 + \ldots + n_N$ et $n_j \geq 2$ pour chaque j. Alors pour toute forme différentielle, $\overline{\partial}$-fermée, $f \in C^\infty_{r,q}(\overline{\Omega})$ qui est orthogonale à l'espace des (r,q)-formes harmoniques, $0 \leq r \leq n, 1 \leq q \leq n-1$, il existe une forme $u \in C^\infty_{r,q-1}(\overline{\Omega})$ telle que $\overline{\partial}u = f$.

Ce corollaire est un cas particulier du corollaire [3.1].

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur un article de Shaban Khidr intitulé "L^p Regularity for $\overline{\partial}$ on Products of Unit Balls" publié dans "Iran J Sci Technol trans Sci 43 : 929 − 935" en 2019.
Après avoir défini les outils nécessaires et rappelé leurs propriétés, il a fallu dans un premier temps définir la notion d'opérateur produit tensoriel noté $A \otimes B$ qui vérifie un certain nombre de propriétés (cf Théorème (2.3)).
Ensuite, on a montré par le Théorème (0.1) que $img(\overline{\partial})$ est un sous espace fermé de $L^2(\Omega)$, Ω étant le produit de domaines relativement compacts de $\mathbb{C}^n$, et le Théorème (0.2) déduit la régularité de la solution canonique de l'équation $\overline{\partial}u = f$, où f est une $(p, 1)$-forme différentielle, $\overline{\partial}$ fermée, définie sur l' espace de Sobolev partiel noté $\tilde{W}_*^k(\Omega)$.
Par la suite Ω est considéré comme produit de boules unités de $\mathbb{C}^n$. En effet, le Théorème (0.3) stipule que $img(\overline{\partial}) \subset L^p(\Omega)$ est un sous espace fermé. Pour toute $(r, 1)$-forme différentielle f, $\overline{\partial}$-fermée, on a montré dans le Théorème (0.4) que la solution canonique de l'équation $\overline{\partial}u = f$ gagne $\dfrac{1}{2}$ en régularité.

Références

[1] H. Brezis : Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[2] D. Chakrabarti, M. C. Shaw : The Cauchy-Riemann equations on product domains. Math Ann $349 : 977 - 998(2011)$.

[3] D. C. Chang : Bergen lecture on $\overline{\partial}$-Neumann problem, analysis and mathematical physics. Birkhuser, Basel, $pp\ 77 - 106(2009)$.

[4] P. Charpentier : Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\overline{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$, Ann Inst Fourier $30 : 121 - 154(1980)$.

[5] S. C. Chen, M. C. Shaw : Partial Differential Equations in Several Complex Variables AMS/IP studies in Advanced Mathematical, Vol 19, Amer.Math.Soc Providence, RI, intermatical press, Boston, MA (2001) .

[6] A. Defant, K. Floret : Tensor norms and operator ideals, North-Holland mathematics studies, vol 176. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1993).

[7] J. P. Demailly : Complex analytic and differential geometry, Institut Fourier (Grenoble I) June 21, 2012.

[8] J. P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, J. Bertin, J. Lewis : Introduction to Hodge theory- American Mathematical Society- Societe.

[9] D. Ehsani : The $\overline{\partial}$-Neumann problem on product domains in $\mathbb{C}^n$. Math Ann $337 : 797-816(2007)$.

[10] T. Figiel, T. Iwaniec, A. Pelczynski : Computing norms and critical exponents of some operators in L^p-spaces. Studia Maths $79 : 227 - 274(1984)$.

[11] F. Harvey, J. Polking : The $\overline{\partial}$-Neumann solution to the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in the ball in $\mathbb{C}^n$. Trans Am Math Soc $281 : 587 - 613(1984)$.

[12] J. Horvàth : Topological vector spaces and distributions, vol I. Addison-Wesley, Reading (1966) .

[13] S. khidr : L^p-Regularity for $\overline{\partial}$ on Products of Unit Balls Iran J Sci Technol Sci $43 : 929-935(2019)$.

[14] C. Laurent-Thiébaut : Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables, InterEditions | CNRS Editions (1997).

[15] N. C. Phillips : products of L^p operator algebras and the K-theory of Cuntz algebras on L^p spaces, preprint, arXiv : 1309.6406[$math.FA$], (2013).

[16] J. Ruppenthal : Friedrichs' extension lemma with boundary values and applications in complex analysis. Complex Var Elliptic Equ $56 : 423 - 437(2011)$.

[17] V. Trénoguine : Analyse fonctionnelle, Mir. Moscou 1985.

[18] K. Yosida : Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg Gm bH (1968).