



Numéro d'ordre : 3141592653589793238

## UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

École doctorale **Sciences, Technologies et Ingénierie.**

Unité de recherche **Laboratoire de Mathématiques et Applications**

Thèse présentée par **Yaya YOUSOUF YAYA**

Soutenue le **22 janvier 2022**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université Assane Seck de Ziguinchor

Discipline **Mathématiques**

Spécialité **Biomathématiques**

# Sur les systèmes d'advection-diffusion : étude de quelques modèles de populations de la chaîne trophique.

Thèse dirigée par Ngom DIENE

### Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Aboudramane GUIRO	professeur à l'UBD (Burkina Faso)	
	Mamadou Abdoul DIOP	professeur à l'UGB (Sénégal)	
	Juan Antonio INFANTE	professeur à l'UC(Espagne)	
<i>Examineurs</i>	Hamidou TOURÉ	professeur à l'UJKZ(Burkina Faso)	président du jury
	Mamadou SY	professeur à l'UGB (Sénégal)	
	Edouard DIOUF	MCF à l'UASZ (Sénégal)	
<i>Directeur de thèse</i>	Marie Salomon SAMBOU	professeur à l'UASZ (Sénégal)	
	Ngom DIENE	MCF à l'Université Assane Seck de Ziguinchor (Sénégal)	

## COLOPHON

Mémoire de thèse intitulé « Sur les systèmes d'advection-diffusion : étude de quelques modèles de populations de la chaîne trophique. », écrit par Yaya YOUSOUF YAYA, achevé le 26 janvier 2022, composé au moyen du système de préparation de document  $\text{\LaTeX}$  et de la classe yathesis dédiée aux thèses préparées en France.



## UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

Doctoral School **Sciences, Technologies et Ingénierie.**

University Department **Laboratoire de Mathématiques et Applications**

Thesis defended by **Yaya YOUSOUF YAYA**

Defended on **January 22, 2022**

In order to become Doctor from Université Assane Seck de Ziguinchor

Academic Field **Mathematics**

Speciality **Biomathematics**

# On the advection-diffusion systems: Study of some trophic chain's population

Thesis supervised by Ngom DIENE

### Committee members

<i>Referees</i>	Aboudramane GUIRO	Professor at UBD (Burkina Faso)	
	Mamadou Abdoul DIOP	Professor at UGB (Sénégal)	
	Juan Antonio INFANTE	Professor at UC(Espagne)	
<i>Examiners</i>	Hamidou TOURÉ	Professor at UJKZ(Burkina Faso)	Committee President
	Mamadou SY	Professor at UGB (Sénégal)	
	Edouard DIOUF	Associate Professor at UASZ (Sénégal)	
	Marie Salomon SAMBOU	Professor at UASZ (Sénégal)	
<i>Supervisor</i>	Ngom DIENE	Associate Professor at Université Assane Seck de Ziguinchor (Sénégal)	



**Mots clés :** diffusion, convection , plancton, nutriment, edo, edp, ens, abm, upwelling, proie & prédateur

**Keywords:** diffusion, convection, plakton, nutrient, ode, pde, nse, abm, upwelling, prey & predatory



Cette thèse a été préparée au

**Laboratoire de Mathématiques et Applications**

UFR des Sciences et Technologies  
Département de Mathématiques  
Université Assane Seck de Ziguinchor  
BP 523 Ziguinchor  
Sénégal

☎ (+221) 775266400

📠 (+221) 33 991 68 09

Site <https://intranet.uasz.sn/>





*À la mémoire de mon père Youssouf Yaya ! Qui n'a ménagé aucun effort afin que j'ai  
une éducation en or.*

*À ma mère Khadidja Taha ! Un inestimable trésor !*

*À ma Khaliéta, une étoile qui brille !*

*À mes sœurs, frères et tous les membres de ma famille !*

*À mon mentor Mamadou Sy !*

*À mes chers ami(e)s ! Une compagnie éternelle.*

*À la communauté Tchadienne de Ziguinchor !*

*À mon pays d'accueil, le pays de la Téranga, le Sénégal !*

*Et, à tous ceux qui voient dans les mathématiques une discipline qui permet à l'Homme  
de développer ses capacités humaines.*



*Ce que j'aime dans les Mathématiques Appliquées, c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir. Et, de toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure. Du coup, ce qui m'intéresse, c'est de savoir jusqu'où on peut aller dans ce domaine de la modélisation des systèmes, c'est d'atteindre les limites.*

---

**Jacques Louis Lions, 1928-2001.**



*Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries.*

Marcel Proust, 1871-1922

## REMERCIEMENTS

Faire une thèse de doctorat est une entreprise scientifique certes difficile mais passionnante. Cette longue aventure n'aurait pu être menée à bien sans la contribution de quelques personnes physiques ou morales à qui, je témoigne ici ma profonde gratitude.

Je voudrais en premier lieu, remercier solennellement le professeur Diene NGOM, d'avoir accepté la direction de ma thèse et de m'avoir ouvert les portes de son bureau comme celle de sa maison. D'être à l'écoute et de donner les orientations avec promptitude illuminant ainsi mon chemin dans le monde de la recherche.

Toute ma gratitude à mon mentor Mamadou SY, professeur à l'Université Gaston Berger de Saint-Louis qui, fut le premier à m'initier à la recherche en supervisant mon mémoire de (D.E.A). Depuis lors, il n'a cessé de me transmettre des connaissances en Analyse Mathématiques et plus particulièrement sur les modèles d'écoulements. Il est exigeant mais très amical, ce sont des valeurs humaines qui me marquent à jamais.

Je suis infiniment reconnaissant aux rapporteurs, les professeurs Abdouramane Guiro, Juan Antonio Infante et Mamadou Abdoul Diop. Leurs critiques du manuscrit m'ont permis d'améliorer hautement sa qualité notamment les articles en cours de rédaction.

Je sais gré au réseau EDP Modélisation & Contrôle pour le support financier inestimable dont j'ai bénéficié durant toute ma thèse. Sur ce, je remercie Pr. Hamidou Touré pour sa coordination, Dr. Leif Abrahamsson pour son leadership à l'International Science Programme (ISP) et Pranvia Gajjar pour son travail remarquable quant à l'organisation des voyages et hébergement.

Toute ma gratitude au Laboratoire de Mathématiques de l'UASZ pour l'appui financier et matériel.

Ma reconnaissance va aussi à l'endroit de l'équipe de recherche "Collective Behavior" de l'Université d'Uppsala, dirigé par le Professeur David Sumpter qui a bien voulu m'encadrer pendant mes séjours de recherche à ladite institution. Par la même occasion, j'ai fait la connaissance de Dr. Maksym Romenskyy et Dr. Stamatias Nicolis qui ont toujours été disponibles à discuter, augmenter et clarifier mes idées, et qui ont su toujours me communiquer un élan d'enthousiasme nécessaire pour repartir de l'avant dans les moments difficiles.

Je remercie aussi Dr. Jimmy Garnier, Chargé de Recherche CNRS à l'Université Savoie-Mont Blanc, qui m'a aidé à l'établissement d'un modèle du phénomène d'upwelling. Je note ici l'appui du séjour par l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD).

Enfin, je suis honoré par les professeurs Marie Salomon Sambou et Edourd Diouf qui ont bien voulu examiné cette thèse.

## ACRONYMES & MOTS CLÉS

**Convection**<sup>1</sup> : désigne l'ensemble des mouvements internes (verticaux ou horizontaux) qui animent un fluide et qui impliquent alors le transport des propriétés des particules de ce fluide au cours de son déplacement [1].

**Diffusion** : C'est le mouvement résultant des forces d'interaction entre particules dans un fluide. Elle se caractérise par le mouvement des particules le long d'un gradient de concentration. Ainsi, les particules se mélangent jusqu'à ce qu'elles soient uniformément réparties. Le terme « diffusion » vient du mot latin *diffundere*, qui signifie « s'étaler » .

**Plancton**<sup>2</sup> : Ensemble des animaux et végétaux flottant passivement dans les milieux aquatiques. On distingue le plancton végétal, ou **phytoplancton**, et le plancton animal, ou **zooplancton**. En allemand *Plankton*, du grec *plagktos* qui signifie errant [26].

**Chaîne Trophique** Ensemble des relations qui s'établissent entre des organismes en fonction de la façon dont ceux-ci se nourrissent. Comprend des producteurs (phytoplanctons), des consommateurs primaires (herbivores) et secondaires (carnivores) et des "recycleurs" (bactéries);

**Proie** : Individu animal vivant, en tant que victime et nourriture d'un animal d'une autre espèce;

**Prédation**<sup>3</sup> : Exprime le fait de se saisir de quelqu'un ou de capturer une proie déterminée par sa poursuite. C'est une interaction trophique directe, de nature antagoniste, entre deux organismes, par laquelle une espèce dénommée **prédateur**, consomme entièrement ou partiellement une à plusieurs espèces dénommées proies, généralement en les tuant, pour s'en nourrir ou pour alimenter sa progéniture [2].

**Upwelling** : C'est un processus océanique où les eaux profondes et froides montent en surface le long des côtes.

**Cycle Limite** : C'est une orbite périodique isolée i.e, les trajectoires voisines ne sont pas périodiques; Elles spiralent en s'en éloignant ou en s'en approchant. Dans le cas où elles s'approchent de l'intérieur comme de l'extérieur, on dit que le cycle est **stable**; Sinon, le cycle est dit **instable** . Dans les rares cas où les trajectoires voisines s'approchent de l'extérieur mais s'éloignent de l'intérieur ou vice versa, on parle de cycle **semi-stable**.

**EDO** Équations Différentielles Ordinaires.

**EDP** Équations aux Dérivées Partielles.

**ENS** Équations de Navier-Stokes.

**ABM** Agent-Based-Model (Modèle Centré Individu).

**SPP** Self-Propelled-Particles (Particules Auto-Propulsés).

---

**SUR LES SYSTÈMES D'ADVECTION-DIFFUSION : ÉTUDE DE QUELQUES MODÈLES DE POPULATIONS DE LA CHAÎNE TROPHIQUE.**
**Résumé**

Nous abordons dans cette thèse la dynamique d'évolution des nutriments, des phytoplanctons et zoo-planctons (NPZ) sous trois approches axées sur des modèles de convection et de diffusion. Ce sont les équations différentielles ordinaires (EDO), les équations aux dérivées partielles (EDP) et les modèles basés sur individu (ABM ou SPP). Nous avons dans un premier temps proposé un modèle d'EDO d'évolution des nutriments, des phytoplanctons, et des zoo-planctons. Dans notre modèle d'EDO, nous montrons l'existence et l'unicité des solutions puis nous établissons des résultats sur la stabilité des points d'équilibre. Les simulations numériques de ce modèle mettent en évidence l'existence de solutions périodiques et de cycles limites. Nous déterminons numériquement l'espace des paramètres admissibles pour que le système présente des solutions périodiques ou des cycles limites. Par la suite, en intégrant dans le modèle EDO la diffusion dans l'espace des composantes de la chaîne trophique, nous obtenons un modèle EDP de la dynamique d'évolution des nutriments, des phytoplanctons et zoo-planctons. Nous prouvons l'existence et l'unicité de solutions faibles de ce modèle EDP en utilisant respectivement la méthode de monotonie et des estimations a priori. Enfin, nous mettons en évidence des simulations du modèle de type Lotka-Volterra en utilisant l'approche de l'algorithme ABM; cette dernière partie a été réalisée en tenant compte de la dimension stochastique dans les hypothèses. L'analyse mathématique des modèles que nous avons proposé fait appel à des outils mathématiques tels que les méthodes de Lyapunov, de monotonie ou les mouvements Browniens.

**Mots clés :** diffusion, convection, plancton, nutriment, edo, edp, ens, abm, upwelling, proie & prédateur

---

**ON THE ADVECTION-DIFFUSION SYSTEMS: STUDY OF SOME TROPHIC CHAIN'S POPULATION**
**Abstract**

We studied Dynamic of nutrients, planktons and zooplanktons (NPZ) under three approaches based on convection-diffusion models. These are dynamical systems (ODEs), partial differential equations (PDEs) & individual based model (ABM or SPP). For analysis, we used mathematical tools such as methods of Lyapunov, Monotonicity or Brownian motions. Some simulations were formulated thanks to techniques of numerical resolution of differential equations; We used in particular, "numpy" & "matplotlib" packages from "Python" language.

In the case of ODEs, one showed existence and unicity of solutions then some results on stability of equilibria. After that, we observed periodic solutions which conjectures existence of limit cycles. To justify this fact, it would be wise to optimize parameter space in order to sharpen hypotheses. Regarding PDEs, we proved existence and uniqueness of weak solutions by using respectively monotonicity method and a priori estimates. Questions about regularity and stability open up perspectives that still require optimization of parameters. Finally, we highlighted similarities between Lotka-Volterra and ABM type models; This was possible by adding stochastic dimensions to assumptions.

**Keywords:** diffusion, convection, plankton, nutrient, ode, pde, nse, abm, upwelling, prey & predatory

---



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>xiii</b>
<b>Résumé</b>	<b>xv</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Dynamique d'une Chaîne Trophique : Approche par les EDOs.</b>	<b>5</b>
<b>1 Sur les Équations Différentielles Ordinaires</b>	<b>7</b>
Introduction . . . . .	7
1.1 Définition, Vocabulaire et Résultats Préliminaires . . . . .	8
1.2 Problème de Cauchy : Existence, Unicité et Comportement des Solutions . . . . .	12
1.2.1 Résolution Théorique du Problème de Cauchy . . . . .	13
1.2.2 Dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales . . . . .	14
1.3 Étude qualitative des EDO non Linéaires . . . . .	14
1.3.1 Notion de Stabilité . . . . .	15
Stabilité par linéarisation . . . . .	16
Analyse de Stabilité des Systèmes Non-linéaires par la Théorie de Lyapunov . . . . .	18
Théorèmes de stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	19
Stabilité globale . . . . .	22
1.3.2 Théorie de bifurcation sur les systèmes dynamiques . . . . .	25
1.3.3 Orbites périodiques et Cycles Limites . . . . .	25
Conclusion . . . . .	26
<b>2 Étude Qualitative d'un Modèle NPZ</b>	<b>27</b>
Introduction . . . . .	28
2.1 <i>Modèle-NPZ</i> & Notations . . . . .	29
2.2 Étude qualitative du <i>Modèle-NPZ</i> . . . . .	33
2.2.1 Propriétés des solutions . . . . .	33
2.2.2 Points d'équilibres et stabilité. . . . .	35
2.2.3 Bifurcation autour de l'équilibre $e_3$ . . . . .	45
2.3 Résultats & Discussion . . . . .	47

Conclusion . . . . .	49
Appendix . . . . .	50
<b>II Systèmes de Convection-Diffusion : Approche des EDPs.</b>	<b>53</b>
<b>3 Approche des Équations aux Dérivées Partielles : EDPs</b>	<b>55</b>
Introduction . . . . .	55
Différence entre une EDO et une EDP . . . . .	58
3.1 Systèmes de Convection- Réaction-Diffusion . . . . .	59
3.2 Étapes de Résolution d'une EDP à travers des Exemples. . . . .	60
3.2.1 Conditions aux bords, initiales & solution bien posée. . . . .	61
3.2.2 Consistance , Stabilité & Problème bien Posé . . . . .	62
3.3 Espaces Fonctionnelles. . . . .	63
3.3.1 Théorème de Représentation de Riesz . . . . .	63
3.3.2 La paire $\mathbf{V}$ et $\mathbf{H}$ . . . . .	63
3.3.3 Topologie Faible dans les Espaces Normés . . . . .	65
3.3.4 Espace de Fonctions du type espace-temps . . . . .	66
3.4 Étude de EDP Elliptique & Équation de Navier Stokes (ENS) . . . . .	68
3.4.1 Étude d'une EDP Elliptique . . . . .	69
Concept de Solution Faible . . . . .	69
3.4.2 Sur Les Équations de Navier-Stokes . . . . .	70
Bref aperçu sur l'analyse des Équations de Navier-Stokes . . . . .	74
3.5 Résolution numérique des Équations de Diffusion. . . . .	78
Conclusion . . . . .	78
<b>4 Modèle NPZ Couplé avec un Système de Convection-Diffusion</b>	<b>79</b>
Introduction . . . . .	79
4.1 Matériels & Méthodes . . . . .	80
4.1.1 <i>Modèle</i> & Notations . . . . .	80
4.1.2 Position du problème continu (PC). . . . .	83
4.1.3 Propriété des opérateurs. . . . .	84
4.1.4 Formulations variationnelles. . . . .	88
Formulation variationnelle du (PSC) . . . . .	88
Formulation variationnelle du (PC) linéarisé (4.1.2) . . . . .	88
4.2 Résultats . . . . .	90
4.2.1 Étude du problème linéarisé. . . . .	90
Propriétés locales des opérateurs. . . . .	90
Estimations a priori . . . . .	92
Existence de la solution faible du problème linéarisé. . . . .	92
4.3 Discussion . . . . .	95
Conclusion . . . . .	96
<b>III Convection-Diffusion : Approche ABMs</b>	<b>97</b>

<b>5</b>	<b>Dynamique collective et cycle périodique dans un modèle du type proie-prédateur des particules auto-propulsées</b>	<b>99</b>
	Introduction . . . . .	100
5.1	Modèles et Réglages de Simulations . . . . .	101
5.1.1	Modèle des Proies . . . . .	101
5.1.2	Modèle des Prédateurs. . . . .	102
5.1.3	Le Modèle de Proie-Prédateur . . . . .	104
	Hypothèses sur la Dynamique des Proies . . . . .	105
	Hypothèses sur la Dynamique des Prédateurs. . . . .	106
5.2	Résultats et Discussions. . . . .	107
5.2.1	Analyse du Modèle de Proie-Prédateur. . . . .	107
5.2.2	Comparaison du Modèle Prédateur-Proie et celui de Lotka-Voltera . . . . .	111
	Dynamique de Proies . . . . .	112
	Dynamique de Prédateurs . . . . .	113
	<b>Conclusion</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Supplément des Outils Mathématiques</b>	<b>117</b>
A.1	Principales inégalités . . . . .	117
A.1.1	Inégalités sur les espaces vectoriels normés . . . . .	117
	Inégalité de Cauchy-Schwartz . . . . .	117
	Inégalité de Young . . . . .	118
	Inégalité de Hölder . . . . .	118
A.1.2	Formules intégrales . . . . .	118
A.1.3	Inégalités Sur les Espaces de Sobolev. . . . .	119
	Inégalité de Poincaré. . . . .	119
	Inégalité d'Interpolation . . . . .	119
A.2	Notations Sur le EDP . . . . .	119
A.2.1	Notions géométriques . . . . .	119
A.2.2	Notations pour les dérivées . . . . .	119
	Notations des Multi-index . . . . .	119
A.2.3	Espaces fonctionnels "abstraites" . . . . .	119
A.2.4	Espaces fonctionnels "concrets" . . . . .	120
A.3	Résultats d'Analyse EDO . . . . .	120
A.3.1	Inégalité Sur les EDO . . . . .	120
A.4	Outils d'Algèbre . . . . .	121
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>127</b>



*La vie est comme un livre, ne sautez aucun chapitre et continuez de tourner les pages, tôt ou tard vous comprendrez pourquoi chaque chapitre était important.*

**Cheikh Amadou Bamba, 1853-1927**

## INTRODUCTION

Si l'on dépose des carreaux de sucre dans l'eau, on observe une dilution après une certaine période. Ce processus anodin peut se complexifier si on change certaines conditions comme la température, la pression ou si on ajoute d'autre composante comme le café. Sans entrer dans les détails, il s'agit d'un phénomène de convection-réaction-diffusion. Ce processus a suscité l'intérêt des scientifiques depuis belle lurette, nous retenons le modèle de morphogenèse<sup>4</sup> d'Alan Turing vers 1952 [60]. Ce modèle déclencha ainsi la multiplication des modèles de **réaction-diffusion** dans diverses domaines aussi théoriques que pratiques. Dans les cas où la matière évolue dans un fluide, on considère le transport des particules diluées : c'est le phénomène de **convection**<sup>5</sup>. On peut représenter formellement un tel système<sup>6</sup> par l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \Phi u(t, x) = F(u(t, x)). \quad (0.0.1)$$

Où  $u(t, x)$  est la concentration de matière à l'instant  $t$  à la position  $x$ ,  $\Phi$  est l'opérateur de convection-diffusion et  $F(u)$  est la réaction (ou source); ces fonctions sont généralement non-linéaires comme l'illustre l'équation de Smoluchowski [14].

En suivant le même paradigme, Boltzmann a formalisé au XIXe siècle les concepts d'équations cinétiques introduites comme moyen d'unifier diverses perspectives comme en biologie avec des applications au mouvement cellulaire (chimiotaxie). Elles sont caractérisées par une fonction de densité qui satisfait une EDP dans l'espace des phases. L'un des premiers succès de la théorie cinétique a été de récupérer des équations macroscopiques à partir de descriptions microscopiques et ainsi de pouvoir théoriquement calculer des coefficients de transport. Bien que la modélisation de ces systèmes est issue des hypothèses très simples ou des lois classiques, la complexité de leur analyse mathématique a suscité le développement

4.  WIKIPÉDIA- La morphogenèse (<https://fr.wikipedia.org/wiki/Morphogenèse>) est l'ensemble des lois qui déterminent la forme, la structure des tissus, des organes et des organismes.

5.  WIKIPÉDIA-La convection (<https://fr.wikipedia.org/wiki/Convection>) désigne l'ensemble des mouvements internes (verticaux ou horizontaux) qui animent un fluide et qui impliquent alors le transport des propriétés des particules de ce fluide au cours de son déplacement.

6. Système de Convection-diffusion

de plusieurs branches comme la théorie des EDO, la théorie spectrale, l'analyse fonctionnelle et l'analyse numérique des équations différentielles déterministes ou stochastiques.

Ces modèles sont aussi fréquemment utilisés en Biomathématique pour simuler l'interaction des phénomènes comme la propagation d'une maladie "intra-sujet"<sup>7</sup>, des épidémies ou encore la dynamique des populations de la chaîne trophique [55, 51, 42, 66, 45]. En regardant avec plus de détails ces dernières références, l'on remarque qu'il y a plusieurs approches de modélisation dont celui des EDO est le plus souvent utilisé. Le pléthore et la différence d'échelle des paramètres sont des points communs à ces modèles; ce qui soulève la question de l'optimisation et de l'adimensionnement de ces paramètres. Il y a aussi la non-linéarité qui complique l'étude et la classification de tels systèmes.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation mathématique des phénomènes de convection-diffusion avec l'approche eulérienne ou lagrangienne. Pour l'approche eulérienne, nous commençons par représenter la dynamique d'évolution dans le temps des composantes d'une chaîne trophique par un système d'équations différentielles ordinaires. Puis en tenant compte de la diffusion spatiale, nous proposons un modèle d'EDP de type convection-diffusion de la dynamique de l'évolution de la chaîne trophique. Pour ce qui est de l'approche lagrangienne, nous présentons des simulations numériques du modèle de type Lotka-Voltera en utilisant l'approche de l'algorithme ABM; cette dernière partie a été réalisée en tenant compte de la dimension stochastique dans les hypothèses.

Les questions abordées dans cette thèse sont réparties en trois parties dont la première se consacre à l'étude qualitative d'un modèle du type **NPZ** (0.0.2) [65].

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = S(n_0 - n) - \frac{\beta np}{k_n + n} + \mu_n \left( \frac{\alpha \bar{\gamma} pz}{1 + \eta p} + \mu_p p + \mu_z z \right), \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\beta np}{k_n + n} - \frac{\alpha p}{1 + \eta p} z - \mu_p p, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\alpha \gamma pz}{1 + \eta p} - \mu_z z. \end{cases} \quad (0.0.2)$$

Il s'agit d'un système dynamique non linéaire "ultra-paramétré"; nous mettons en exergue l'espace de paramètres admissibles puis, étudions quelques propriétés intrinsèques du système comme la caractérisation des points d'équilibres et les solutions périodiques. Cela a été possible par la construction d'une fonction de Lyapunov et en utilisant le critère de Sylvester. La difficulté majeure est l'interprétation de paramètres et les résultats qui y sont liées. Cette partie est composée de deux chapitres, le chapitre 1 où nous faisons un rappel de quelques notions sur les

7. intra-sujet : évolution de la maladie dans le corps du sujet.

EDO utilisées dans le chapitre 2 où nous présentons le modèle EDO et faisons son analyse qualitative.

Dans la deuxième partie, nous ajoutons des effets de convection-diffusion au modèle NPZ étudié au chapitre 2, ainsi le système devient une EDP (0.0.3) et se complexifie davantage avec cette prise en compte des dimensions spatiales.

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + u \cdot \nabla n = F_1(n, p, z) + \delta \Delta n ; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \nabla p = F_2(n, p, z) + \delta \Delta p ; \\ \frac{\partial z}{\partial t} + u \cdot \nabla z = F_3(n, p, z) + \delta \Delta z . \end{cases} \quad (0.0.3)$$

Où  $F_1(n, p, z), F_2(n, p, z), F_3(n, p, z)$  sont les champs de vecteur du modèle d'EDO.  $u = (u_1(t, x_1, x_2, x_3), u_2(t, x_1, x_2, x_3), u_3(t, x_1, x_2, x_3))$  représentent les champs de vitesse de l'eau et  $\delta$  la constante de diffusion. En simplifiant les conditions aux bords et aux limites et en utilisant des techniques d'interpolation et la méthode de compacité [31, 10, 32], nous démontrons l'existence et l'unicité de solutions faibles (voir Chapitre 4). Cette partie est aussi composée de deux chapitres, le chapitre 3 dans lequel nous rappelons quelques notions sur les EDP utilisées au chapitre 4 où nous présentons l'analyse qualitative de notre modèle EDP.

Si les deux premières parties sont relativement liés, la troisième et dernière partie est indépendante des deux premières parties en ce sens que nous abordons le sujet sous l'approche des "Agent Based Model" ou "Self-Propelled Particles". Ce sont des modèles Lagrangiens où l'on décrit les interactions locales entre les individus avec des propriétés simples pour simuler le comportement asymptotique global du système [63, 59, 57, 62, 48]. On a notamment développé un modèle ("framework") du type proie-prédateur où la mobilité et l'évolution des espèces sont régies par quelques principes de convection-diffusion en y ajoutant quelques dimensions stochastiques. Nous avons alors observé plusieurs propriétés classiques liés aux modèles Eulériens du type Lotka-Volterra; ce fait garantit l'adaptation du modèle à un contexte différent de la dynamique collective. Cette partie est consacrée au chapitre 5 de notre document.



## **Première partie**

# **Dynamique d'une Chaîne Trophique : Approche par les EDOs.**



*Among all mathematical disciplines, the theory of differential equations is the most important... It furnishes the explanation of all those elementary manifestations of nature which involve time.*

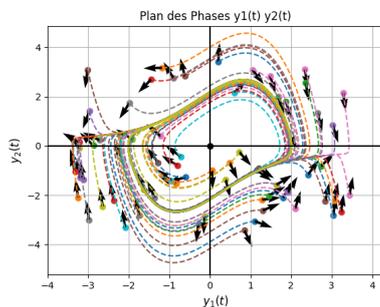
Sophus Lie, 1895

# CHAPITRE 1

## SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

### Sommaire du présent chapitre

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.1 Définition, Vocabulaire et Résultats Préliminaires</b>	<b>8</b>
<b>1.2 Problème de Cauchy : Existence, Unicité et Comportement des Solutions</b>	<b>12</b>
<b>1.3 Étude qualitative des EDO non Linéaires</b>	<b>14</b>
<b>Conclusion</b>	<b>26</b>



Oscillateur de Van Der Pol.

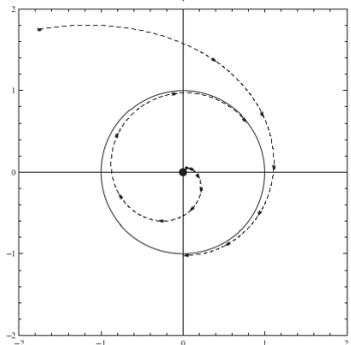
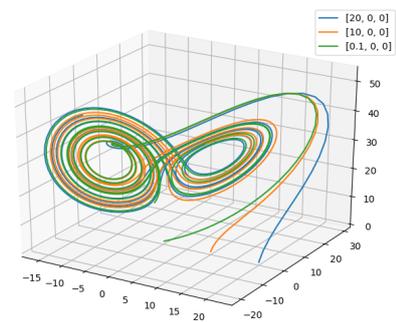


Illustration d'un cycle limite



Attracteur de Lorenz

## Introduction

Une équation ou un système d'équations fonctionnelles dont les dérivées sont liées avec une seule variable indépendante est une équation différentielle ordinaire.

La théorie des systèmes dynamiques est la mieux adaptée pour l'étude de ces genres d'équations.

Nous survolerons le long de ce chapitre, quelques lignes utiles pour l'étude du **Modèle NPZ** développé au chapitre 2. Après quelques définitions et notations, nous donnerons les résultats préliminaires avec une brève présentation de trois approches : géométriques, numériques et analytiques.

On insistera ensuite sur l'approche analytique des EDO non linéaires. Sur ce, on présentera des résultats classiques sur la stabilité à savoir les méthodes de Lyapunov et Lasalle. On bouclera par une description de la théorie de bifurcation liée aux systèmes dynamiques avec un accent particulier sur les solutions périodiques.

## 1.1 Définition, Vocabulaire et Résultats Préliminaires

Soient  $E$  et  $G$  deux  $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels normés et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R} \times E^{n+1}$  et  $F : \Omega \rightarrow G$  une application  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . On note (1.1.1) l'équation :

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0_G \quad (1.1.1)$$

Elle est appelée **équation différentielle d'ordre  $n$  en l'inconnue  $y$ , non résolue en  $y^{(n)}$** . Chercher une **solution** de (1.1.1) c'est chercher un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et une application  $n$  fois dérivable  $y : I \rightarrow E$  telle que :

- (i)  $\{(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in I \times E^{n+1}\} \subset \Omega$ ;
- (ii)  $\forall t \in I, F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0_G$ .

L'équation (1.1.1) est la forme générale, on peut la ramener dans certains cas grâce au théorème des fonctions implicites à la forme résolue en  $y^{(n)}$ , i.e :

$$y^{(n)}(t) = \phi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (1.1.2)$$

En posant

$$\begin{aligned} Y(t) &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f(t, Y(t)) &= (y_2, y_3, \dots, y_n, \phi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))) \end{aligned}$$

On peut réécrire l'équation résolue (1.1.2) en une équation du premier ordre sous la forme

$$Y'(t) = f(t, Y(t)) \quad \text{ou} \quad Z'(t) = F(Z(t)) \quad (1.1.3)$$

où  $F$  appelée **champ de vecteurs** et l'EDO  $Z'(t) = F(Z(t))$  est dite **autonome**. Ce résultat nous permet de restreindre l'étude théorique sur les équations différentielles du premier ordre dont la définition est la suivante.

**Définition 1.1.1 (Équation différentielle Ordinaire du 1<sup>er</sup> ordre).** Soit  $f : \mathcal{U} \rightarrow E$  une application au moins continue, avec  $E$  un espace vectoriel normé réel et  $\mathcal{U}$  ouvert de  $\mathbb{R} \times E$ . On note (1.1.4) l'équation différentielle suivante en l'inconnue  $y$  :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.1.4)$$

Chercher une solution de (1.1.4), c'est chercher un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et une application dérivable  $y : I \rightarrow E$  telle que :

- $\{(t, y(t)) \in I \times E\} \subset \mathcal{U}$ , appelé **graphe** de (1.1.4) ou **courbe intégrale** ;
- $y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I$ .

En couplant l'équation (1.1.4) avec une condition initiale, on obtient ce qu'on appelle **Problème de Cauchy**<sup>1</sup>.

**Définition 1.1.2 (Ensemble invariant).** On dit qu'un ensemble  $\mathbb{M}$  est **positivement invariant** pour le système  $\dot{y} = f(y)$  si pour tout point  $y_0 \in \mathbb{M}$  on a :

$$y(t, y_0) \in \mathbb{M} \quad \forall t \geq 0$$

En d'autres termes, l'orbite positive du flot de l'ODE est contenue dans  $\mathbb{M}$  ( $\phi_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}$ ).

De même,  $\mathbb{M}$  est dit **négativement invariant** si  $\phi_{\mathbb{R}_-}(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}$ .

En somme,  $\mathbb{M}$  est dit **invariant**, s'il est négativement et positivement invariant.

**Définition 1.1.3 (Ensemble  $\omega$ -limite).** Un point  $p$  appartient à l'**ensemble  $\omega$ -limite** de l'orbite  $\gamma(y_0)$ , s'il existe une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  strictement croissante telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y(t_n, y_0) = p, \quad \forall y_0$$

On note  $\Lambda^+(y)$ , l'ensemble des points  $\omega$ -limites de la demi-orbite  $\gamma_+(y)$ .

On définit de façon analogue l'**ensemble  $\alpha$ -limite** pour le système  $\dot{y} = f(y)$  en considérant le flot correspondant à  $\dot{y} = -f(y)$ .

**Théorème 1.1.1 (Caractérisation de l'ensemble  $\omega$ -limite).** (i) On a

$$\Lambda^+(y) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_+(\phi_t(y))}, \quad \text{où } \phi_t(y_0) = y(t, 0, y_0). \quad (1.1.5)$$

- (ii) Si l'orbite positive  $\gamma^+(y_0)$  est bornée, alors l'ensemble  $\Lambda^+(y)$  des points  $\omega$ -limites est un ensemble non vide, compact, connexe et invariant.

1. Connue dans la littérature comme "Initial Value Problem (IVP)" signifiant "Problème à Valeur Initiale"

**Théorème 1.1.2 (de Barrière).** Soit une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'en tout point  $y$  tel que  $V(y) = 0$ , on a :

$$\begin{cases} \nabla V(y) \neq 0 \\ \langle f(y) | \nabla V(y) \rangle \leq 0 \end{cases}$$

Alors l'ensemble  $G = \{y \in \mathbb{R}^n \mid V(y) \leq 0\}$  est positivement invariant par le champ  $f(y)$ .

**Note 1.1.1.** L'idée de la preuve consiste à montrer qu'aucune trajectoire ne peut quitter le demi-espace par l'ensemble des points de la frontière où :  $\langle f(y) | \nabla V(y) \rangle \leq 0$ .

**Théorème 1.1.3.** Soit  $\mathbb{D}$  un ouvert contenant  $y_0$  de la frontière de  $G$ ,  $\partial G = \{y \in \mathbb{R}^n \mid V(y) = 0\}$ .

On suppose qu'en tout point  $y$  de  $\partial G \cup \mathbb{D}$ , on a :

$$\begin{cases} \nabla V(y) \neq 0 \\ \langle f(y) | \nabla V(y) \rangle \leq 0 \end{cases}$$

Alors aucune trajectoire de  $y$  ne sort de  $G$  par  $\partial G \cup \mathbb{D}$

On peut regrouper les EDO en deux catégories : **linéaires** si  $f$  en est et **non linéaires** sinon. Ces dernières ont rarement des solutions analytiques néanmoins, il existe plusieurs approches abordant la résolution des EDO.

Succintement, l'approche géométrique s'interprète ainsi :

Supposons que  $u$  est solution de  $y'(t) = f(t, y(t))$  et soit  $M = (t_1, y_1)$  un point situé sur la graphe de  $u$ . On a  $y_1(t_1) = u(t_1)$ , donc  $u'(t_1) = f(t_1, y_1(t_1))$  est un nombre qui ne dépend que de  $M$ . Puisque la **tangente** en  $M$  du graphe de  $u$  a pour **pen**te  $u'(t_1)$ , on en déduit les propriétés suivantes :

- (i) En tout point  $(t, y)$  du graphe d'une solution, la tangente a pour pente  $f(t, y)$ , i.e elle appartient au **champs de direction**.
- (ii) Dans une région où  $f(t, x) > 0$ , les solutions sont croissantes; Dans une région où  $f(t, x) < 0$ , elles sont décroissantes.

Si on dessine des pentes sur quelques isoclines<sup>2</sup>, on aura un aperçu du champ de direction et de l'allure des solutions.

Les figures (1.1.1a-1.1.1b) montrent les isoclines pour les valeurs de  $p$  sur  $(-5, 6)$  (lignes barrées) et champs de direction.

L'approche géométrique est limitée en ce sens où il est impossible de visualiser l'espace de phases au delà de dimension 3. Même en dimension 1, des difficultés

2. Si  $p$  est un nombre donné, les points  $(t, y)$  où les solutions ont une tangente de pente  $p$  vérifiant  $f(t, y) = p$ . C'est l'équation d'une courbe appelée **isocline** pour la pente  $p$ , car le long de cette courbe, le champ de direction garde la pente  $p$ .

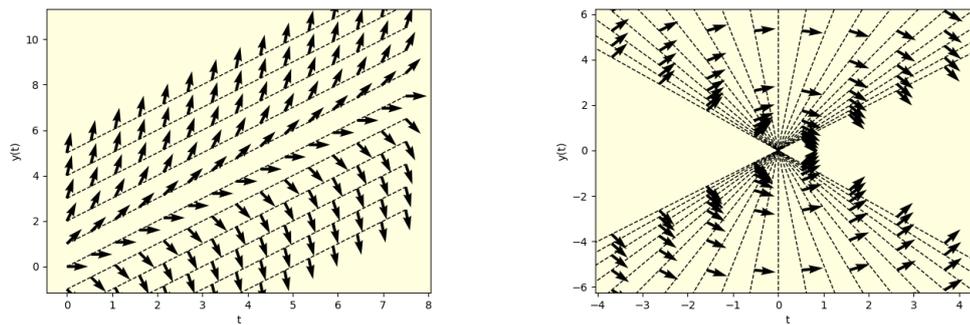
(a) Isocline de  $y'(t) = y(t) - t$  pour les valeurs de  $p$  sur  $(-5, 6)$ .(b) Isoclines et lignes de directions pour  $y'(t) = \frac{-t}{y(t)}$ .

FIGURE 1.1.1 – Isoclines

peuvent surgir si l'équation de la pente présente des singularités. Ces types d'insuffisances ont conduit au développement de l'approche numérique dont la méthode d'Euler en est une parmi tant d'autres.

Elle consiste à discrétiser l'intervalle de temps  $I$  en  $\{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ . Comme dans un problème de Cauchy, la valeur de  $y$  en  $t_0$  est fixé, alors  $f(t_0, y_0)$  est connue. on cherche à évaluer la valeur de  $y$  en  $t_1$  en utilisant une approximation de la dérivée. On note  $h$  le pas de la discrétisation. Partant de  $y_0$ , Le schéma d'Euler consiste à construire une solution locale approximative  $y_1$  en suivant la pente jusqu'au point  $t_1$ . On répète l'opération jusqu'au point  $t_n$ . Le Schéma d'Euler explicite est

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ t_{n+1} - t_n &= h \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Cette méthode est dite **explicite** car la solution à l'instant  $t_{n+1}$  ne dépend que de la solution à l'instant  $t_n$ . Il y a aussi des méthodes implicites qui sont numériquement performante et sont intégrés dans les solveurs de logiciels.

En somme, l'approche numérique constitue un domaine vaste regroupant plusieurs méthodes comme : Différences finies (Euler, Runge-Kutta, ...); éléments finis, volumes finis etc. Pour quelques équations du premier ordre dans  $\mathbb{R}$ , il existe des méthodes analytiques de résolution.

Prenons l'exemple du Modèle de Dilution 1 –  $D$  (forme normalisée) pour présenter l'approche analytique,

$$y'(t) + ky(t) = ky_e \quad (1.1.7)$$

La Méthode de variation de la constante est l'une des technique utilisée pour la

résolution des EDO du type :

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t). \quad (1.1.8)$$

1. La solution de l'équation homogène associée est de la forme  $y_h(t) = \lambda e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$ .
2. Une solution particulière de (1.1.8) est de la forme :  $y_p(t) = \lambda(t)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$  donc , en insérant  $y_p$  dans (1.1.8) on trouve l'équation :

$$\lambda'(t) = q(t)e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}$$

Une fois  $\lambda(t)$  déterminée, on a la solution particulière ;

3. La solution générale de l'équation est  $y(t) = y_h(t) + y_g(t)$ .

Elle est limitée en ce sens où  $\int_{t_0}^t p(s)ds$  n'est pas toujours analytique ; C'est généralement le cas quand  $p(t)$  n'est pas linéaire néanmoins, pour les équations de la forme

$$y'(t) = f(y)g(t) \quad (1.1.9)$$

on peut utiliser la Méthode de séparation des variables dont la solution est déterminée par

$$\int_{s(t_0)}^{s(t)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^t g(\tau)d\tau \quad (1.1.10)$$

Pour quelques équations particulières comme celle de Riccati ou Bernouilli, on a des techniques de solutions adaptées. Ainsi, les approches géométriques et analytiques listées ci-haut ne couvrent qu'une partie infime des EDO. Les méthodes numériques font l'exception mais nécessitent une légitimité théorique. La suite du chapitre s'articulera dans ce sens.

## 1.2 Problème de Cauchy : Existence, Unicité et Comportement des Solutions

On note  $E = \mathbb{R}^n$ , pour  $n \geq 1$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E$  de norme  $\|y\|_E$ . Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $E$  et  $f : I \times \mathcal{U} \rightarrow E$  une fonction continue de l'équation suivante

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.2.1)$$

est une EDO du 1<sup>er</sup> ordre sous forme résolue. Une solution de (1.2.1) est un couple  $(J, \phi)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\phi$  dérivable et  $(t, \phi(t)) \in I \times \mathcal{U}$  et  $\forall t \in J, \phi'(t) = f(t, \phi(t))$ . En intégrant entre  $t_0$  et  $t$  le problème de Cauchy

associé, on a :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (1.2.2)$$

Réciproquement, toute fonction vérifiant (1.2.2) vérifie aussi le problème de Cauchy associé.

### 1.2.1 Résolution Théorique du Problème de Cauchy

**Théorème 1.2.1 (Cauchy-Lipschitz).** *On suppose  $f$  Lipschitzienne<sup>3</sup> ou de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \times \mathcal{U}$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Pour tout  $(t_0, y_0) \in I \times \mathcal{U}$ , il existe  $\tau > 0$  et une unique fonction  $y \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau; t_0 + \tau]; \mathcal{U})$  tel que :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in [t_0 - \tau; t_0 + \tau] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

*En d'autres termes, le problème de Cauchy admet une unique solution si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .*

- Note 1.2.1.**
1. Le théorème (1.2.1) reste vraie si l'on a  $f$  continue sur un voisinage de  $(t_0, y_0)$  dans  $I \times \mathcal{U}$  et localement lipschitzienne par rapport à  $y$ . C'est une hypothèse optimale ;
  2. Si  $f$  est simplement continue, on a l'existence de solution mais pas l'unicité ; C'est le théorème de Cauchy-Arzela-Peano.
  3. Le théorème de Cauchy-Lipschitz ( 1.2.1 ) fournit des solutions locales. L'unicité de ces solutions permet de montrer grace au théorème de **Recollement** que le prolongement d'une solution locale est unique et permet de définir une unique solution au problème de Cauchy dite **solution maximale**<sup>4</sup>. C'est-à-dire qu'on ne peut prolonger au delà d'un intervalle ouvert  $J \subset I$ .
  4. La convergence à l'infini des solutions en temps fini est décrite par le théorème des "bouts" ( A.3.2).

3. On dit que  $f : I \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $L$ -**Lipschitzienne** par rapport à  $y$  si et seulement si il existe  $L \geq 0$  telle que pour tout  $y_1, y_2 \in E$  et  $t \in J \subset \mathbb{R}$  on a  $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|_E$   $f$  est dite **localement lipschitzienne** par rapport à  $y$  si et seulement si  $\forall (t_0, y_0) \in I \times \mathcal{U}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(t_0, y_0)$  et une constante  $L(t_0, y_0)$  telle que  $f$  est  $L(t_0, y_0)$ -lipschitzienne sur  $\mathcal{V}$ .

4. Soit l'EDO de Riccati  $\frac{dy}{dt} = y^2(t)$ .  
la solution explicite (séparation des variables) du problème de Cauchy pour  $y(t_0) = y_0$  est :  $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + (t_0 - t)}$  Ainsi, la solution maximale est définie sur  $]-\infty, t_0 + \frac{1}{y_0}[$  si  $y_0 > 0$  et sur  $]t_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty[$  sinon.

**des EDO "linéaires"** L'une des conséquence du théorème des bouts (A.3.2) et le lemme de Gronwall (A.3.1) est que les équations "linéaires" de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + b(t), \quad A, b \text{ continues sur } I \quad (1.2.4)$$

n'admettent que des solutions globales. La preuve de cette affirmation s'obtient en utilisant le théorème du point fixe de Banach-Picard (A.3.1). L'équation du type (1.2.4) n'est pas linéaire car il y a  $b(t)$  appelée **terme source** ou **de forçage**. L'équation linéaire est de cette forme :  $\frac{dy}{dt} = A(t)y(t)$  On est tenté d'exprimer les solutions sous forme d'exponentielle des matrices. Ceci n'est possible que si toutes les matrices  $A(t)$  commutent entre elles, ce qui est fort peu probable en dehors des cas particuliers où  $A(t)$  est constante et la solution s'écrit ainsi :  $y(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\sigma)d\sigma} y(t_0)$ .

## 1.2.2 Dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales

**Proposition 1.2.1.** Soient  $y_1, y_2$  deux solutions de  $y'(t) = f(t, y(t))$  avec  $f$   $L$ -Lipschitzienne. Alors, pour tout  $t \in I$ , on a :

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \leq e^{L|t-t_0|} \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|_E$$

**Théorème 1.2.2.** Pour tout  $\epsilon > 0$ , le **tube**<sup>5</sup>  $G_\epsilon$  est un compact de  $I \times \mathcal{U}$ , la restriction de  $f(t, y)$  sur  $G_\epsilon$  est alors lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. En d'autres termes,  $f(t, y)$  est localement lipschitzienne sur le compact  $G_\epsilon$ .

**Théorème 1.2.3.** Soit  $([a, b], y(t))$  la solution du problème de Cauchy. Pour tout  $\epsilon > 0$  tel que le  $\epsilon$ -tube autour de  $x(t)$  soit inclus dans  $I \times \mathcal{U}$ , il existe  $0 < \eta < \epsilon$  tel que  $x(t)$  est une solution maximale du problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, y_0) \in G_\eta$  :

- (i)  $x(t)$  est définie sur un intervalle ouvert contenant  $[a, b]$ ;
- (ii)  $\forall t \in [a, b]$ , on a  $(t, x(t)) \in G_\epsilon$  i.e :  $\sup_{t \in [a, b]} \|x(t) - y(t)\| \leq \epsilon$

## 1.3 Étude qualitative des EDO non Linéaires

Comme il est souvent impossible de déterminer les solutions analytiques des EDO non linéaires, on s'intéresse à l'étude qualitative des solutions, i.e chercher des informations

5. Soit  $([a, b], y(t))$  la solution du problème de Cauchy. le **graphe**  $G_\epsilon$  de  $y$  est l'ensemble  $G := \{(t, y(t)), t \in [a, b]\} \subset I \times \mathcal{U}$  Pour tout  $\epsilon > 0$ , on définit le  $\epsilon$ -**tube** autour de  $G$  par  $G_\epsilon := \{(t, x), \|y(t) - x\| \leq \epsilon, (t, y(t)) \in G\} \subset I \times E$

sur la solution qu'on ne peut établir explicitement. L'étude qualitative tourne autour des champs de vecteur, point d'équilibre et leur stabilités et les techniques de linéarisation. Notre focus est sur les résultats de Lyapunov<sup>6</sup> et Lasalle en considérant le problème de Cauchy autonome dans du type :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = \xi \end{cases}$$

### 1.3.1 Notion de Stabilité

**Système dynamique :** Une EDO autonome sans second membre de la forme :

$$\dot{y} = f(y(t))$$

où  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application localement Lipschitzienne avec  $\mathbb{D}$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  ouvert et connexe.

**Point d'équilibre :** (ou **point critique**) du système est un point  $y_e \in \mathbb{D}$  tel que :  
 $f(y_e) = 0$ .

**Système linéarisé :** Pour un système autonome  $y'(t) = f(y(t))$ , on introduit la variable locale  $u(t) = y(t) - \hat{y}$ ; En utilisant un développement de Taylor d'ordre 1 au voisinage de l'équilibre, on obtient le **système linéarisé** suivant

$$u'(t) \simeq Mu(t); \tag{1.3.1}$$

Où  $M$  est la matrice jacobienne de  $f$  au point  $\hat{y}$ <sup>7</sup>.

**Point d'équilibre hyperbolique :**  $y_e$  est dit **hyperbolique**, si toutes les valeurs propres du linéarisé (1.3.1) autour de  $y_e$  sont de partie réelle non-nulle.

**Ensemble Ouvert :** Un ensemble  $A \in \mathbb{R}^n$  est un ouvert si

$$\forall u \in A, \exists B(u, r) \subset A$$

**Ensemble Connexe :** un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est dit connexe s'il ne peut être représenté comme union de deux ou plusieurs sous ensemble ouverts non vides disjoints. Intuitivement, c'est un ensemble constitué d'un seul morceau.

6. Lyapunov ou Alexandre Liapounov (1857-1918), était un mathématicien russe ayant travaillé sur l'évolution des systèmes dynamiques. Sa contribution sur l'étude de la stabilité de ces systèmes est incontournable.

7. l'étude du système linéarisé nous donne des informations locales sur le système non linéaire par exemple, si 0 est asymptotiquement stable pour le linéarisé alors, le point d'équilibre  $\hat{y}$  est asymptotiquement localement stable pour le système non linéaire. Pour les systèmes 2-D, la connaissance du déterminant et de la trace de  $M$  suffit largement pour l'étude de la stabilité.

**Équilibre stable :** un équilibre  $y_e$  est **stable** si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que :

$$\|y(0) - y_e\| < \delta(\epsilon) \implies \|y(t) - y_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Il faut noter que  $\delta(\epsilon)$  dépend de  $\epsilon$  mais pas forcément plus petit que  $\epsilon$ .

**Équilibre instable :** Si la condition ci-dessus n'est pas satisfaite, l'équilibre  $y_e$  est dit **instable**.

**Équilibre convergent :**  $y_e$  est dit **convergent** s'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\|y(0) - y_e\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_e$$

**Équilibre asymptotiquement stable :** Si  $y_e$  est à la fois stable et convergent alors on dit qu'il est **asymptotiquement stable** (ou "puits" ou "attracteur")

**Équilibre exponentiellement stable :**

$$\exists \alpha, \lambda > 0 : \|y(t) - y_e\| \leq \alpha \|y(0) - y_e\| e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \text{ lorsque } \|y(0) - y_e\| < \delta$$

**Note 1.3.1.** Sans perte de généralité, on considérera par convention  $y_e = 0$  car si  $y_e \neq 0$ , On pose  $z(t) = y(t) - y_e$ , on aura :  $\dot{z}(t) = \dot{y}(t) = f(y(t)) = f(z(t) + y_e)$ . Alors en posant  $g(z(t)) = f(z(t) + y_e)$ , on a le système  $\dot{z}(t) = g(z(t))$ . Ce système a pour point d'équilibre  $z_e = 0$  car  $g(z) = 0 \iff f(z + y_e) = 0 \iff z + y_e = y_e \iff z = 0$ . Ainsi, on peut se restreindre à l'étude de l'équilibre 0 car système transformé est qualitativement équivalent à  $\dot{y}(t) = f(y(t))$ .

### Stabilité par linéarisation

**Théorème 1.3.1 (Linéarisation).** Soit le système non linéaire (E)  $y'(t) = f(y(t))$  admettant  $\hat{y}$  comme point critique (i.e équilibre) tel que  $\det(\hat{M}) \neq 0$  où  $M$  est la matrice jacobienne associée au système au point  $\hat{y}$ . Alors dans son voisinage, le portrait de phases du système est qualitativement équivalent à celui du système linéarisé  $u'(t) = Mu(t)$  si le système linéarisé n'admet que des équilibres hyperboliques.

**Théorème 1.3.2 (Conditions de stabilité d'un système linéaire).** Soit  $M$  une matrice carré d'ordre  $n \geq 2$  et (E) :  $y'(t) = My(t)$  un système différentiel linéaire. Alors :

- (i) Le système (1.1.4) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $M$  sont de partie réelle strictement négatives.
- (ii) Il est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $M$  satisfont  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ . Pour les valeurs propres avec  $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ , les blocs de Jordan sont de dimension 1.

Dans le cas où le linéarisé admet un centre  $((0, 0))$  comme le système

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2); \\ y_2' &= y_1 + y_2(y_1^2 + y_2^2). \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Qui est équivalent en utilisant les coordonnées polaires à :

$$\begin{cases} r'(t) &= r^3(t); \\ \theta'(t) &= 1. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

On conclut que les trajectoires spiralent en s'éloignant de l'origine qui est ainsi instable. Cela prouve que dans le cas où le système linéarisé admet un centre, le système non linéaire ne lui est pas forcément équivalent. Cependant, la transformation polaire n'est pas suffisante si l'on augmente la dimension ou si l'on a des système du type **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} N'(t) &= aN(t) - bN(t)P(t) = N(a - bP) \\ P'(t) &= -dP(t) + cN(t)p(t) = P(cN - d) \end{cases}$$

Où  $a, b, c, d > 0$  sont des paramètres biologiques. Ses équilibres notés  $(\hat{N}, \hat{P})$  sont  $(0, 0)$  et  $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$  qui est un non-hyperbolique. Ce système admet une **intégrale première**<sup>8</sup> qui est la fonction  $g$  donnée par :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial N} \cdot N'(t) + \frac{\partial g}{\partial P} \cdot P'(t) = \left(\frac{d}{N} - c\right)N(a - bP) + \left(\frac{a}{P} - b\right)(cN - d) = 0$$

Donc le système est **conservatif**<sup>9</sup> ( 1.3.2b ) L'autre exemple d'un modèle 2 - D dont l'étude qualitative révèle beaucoup des caractéristiques des systèmes dynamiques comme les cycles limites, chaos ... est l'oscillateur de Van Der Pol. C'est un système dynamique à temps continu à un degré de liberté. Il est décrit par une coordonnée  $x(t)$  vérifiant une équation différentielle faisant intervenir deux paramètres : une pulsation propre  $\omega_0$  et un coefficient de non-linéarité  $\epsilon$ . Lorsque  $\epsilon = 0$ , cet oscillateur se réduit à un oscillateur harmonique pur. Elle s'écrit :

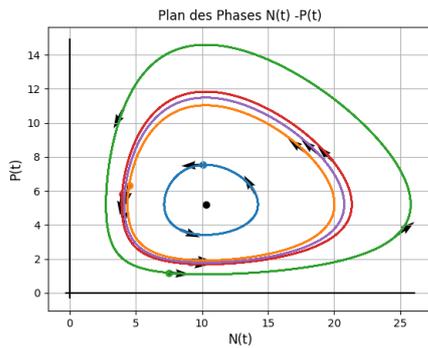
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \epsilon\omega_0(1 - x^2(t))\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0x(t) = \omega_0\mu\cos(\omega t)$$

L'oscillateur est dit **libre** si  $\mu = 0$  et **forcé** sinon. Il est équivalent au système

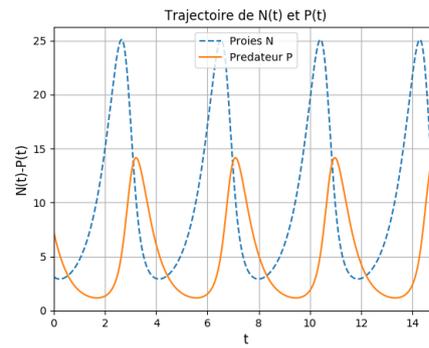
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) &= x'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) &= x''(t) = \epsilon\omega_0(1 - y_1^2(t))y_2(t) - \omega_0y_1(t) + \omega_0\mu\cos(\omega t) \end{cases}$$

8. Une fonction  $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continûment dérivable est dite intégrale première du système  $(E) : y'(t) = f(y(t))$  dans la région  $D \subset \mathbb{R}^2$  si  $g(y(t))$  reste constante pour toute solution du système.  $\forall y(t), y(0) = y_0$  solution de (1.1.4) on a  $g(y(t)) = g(y_0) = C, C \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$

9. Un système qui possède une intégrale première est dit **conservatif**.



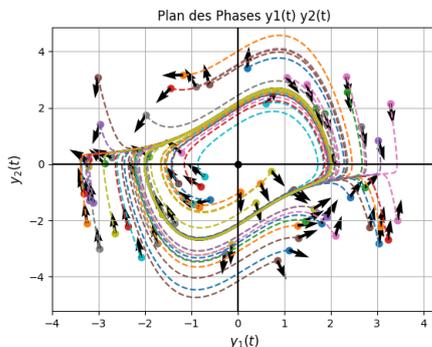
(a) portrait des phases et l'évolution des densités des proies ( $N(t)$ ) et prédateurs ( $P(t)$ ). Les paramètres sont  $(a, b, c, d) = (1.56, 0.3, 0.2, 2.06)$ .



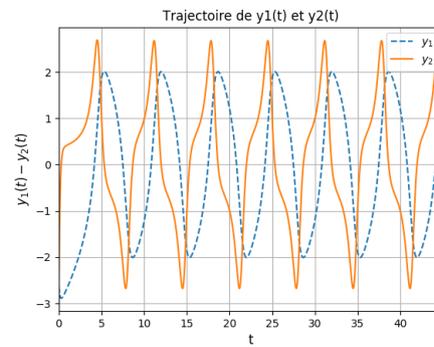
(b) Trajectoires associés du portrait de phases.

FIGURE 1.3.1 – Portrait de Modèle de Lotka-Volterra

Pour l'oscillateur libre,  $(0,0)$  est l'unique point d'équilibre. Les figures ci dessus montrent respectivement quelques trajectoires de l'oscillateur libre ( dans le portrait des phases ) et l'évolution des  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ . Les paramètres sont  $(\epsilon, \omega a_0) = (1, 1)$ . On constate ( numériquement ) que toutes les trajectoires convergent vers une unique courbe dans le plan des phases. Cette courbe s'appelle **cycle limite** dont l'existence est assurée par le Théorème de Poincaré-Bendixson.



(a) Plan de phases de l'oscillateur de Van der Pol.



(b) Les trajectoires associés.

FIGURE 1.3.2 – Portrait de Modèle de Van der Pol

### Analyse de Stabilité des Systèmes Non-linéaires par la Théorie de Lyapunov

Les techniques d'analyse de systèmes de contrôle non-linéaire sont : Analyse de l'espace de phases; Géométrie différentielle (Linéarisation ); Théorie de Lyapunov; Techniques intelligentes : Réseaux neuronal , logique de Fuzzy, algorithme de la génétique etc. Étant donné que l'analyse spectrale ( i.e l'étude des valeurs propres ) n'est pas adéquat pour

les systèmes non-linéaires qui peuvent avoir plusieurs point d'équilibre et des cycles limites ; Compte tenu du fait que la stabilité des équilibres n'a pas besoin d'être toujours globale. Vu le besoin d'une approche systématique pouvant être exploitée pour le design du contrôle des systèmes linéaires ; la théorie de Lyapunov vient combler le vide et les besoin exprimés ici.

### Théorèmes de stabilité au sens de Lyapunov

**Définition 1.3.1 (Fonction de Lyapunov).** Une fonction  $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est une **fonction de Lyapunov** pour  $y_e = 0$  si et seulement si :

- (i)  $V(0) = 0$  et  $V(y) > 0$  dans  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ , i.e  $V$  est **définie positive** ;
- (ii)  $\dot{V}(0) = 0$  et  $\dot{V}(y) \leq 0$  dans  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  , i.e  $\dot{V}$  est **semi définie négative** .

En plus de cela, si  $\dot{V}$  est **définie négative**, i.e  $\dot{V}(0) = 0$  et  $\dot{V}(y) < 0$  dans  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  , alors on dit que  $V$  est une **fonction strict de Lyapunov**

**Note 1.3.2.**  $\dot{V}$  désigne la dérivée par rapport au temps et est déterminée grâce à la règle de chaîne par :

$$\dot{V}(y(t)) = \frac{d}{dt} (V(y(t))) = \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^T \cdot \frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot f_i(y) = \nabla V \cdot f(y) \quad (1.3.4)$$

**Théorème 1.3.3 (Stabilité de Lyapunov).**

**Stabilité :** *S'il existe une fonction de Lyapunov pour  $y_e = 0$  ; alors  $y_e$  est **stable** ;*

**Stabilité asymptotique** *S'il existe une fonction strict de Lyapunov pour  $y_e = 0$ , alors cet équilibre est **asymptotiquement stable**.*

**Remarque 1.3.1.** Le théorème de Lyapunov donne une condition suffisante de stabilité. Dans ce cas, la détermination d'une fonction de Lyapunov n'obéit pas à des méthodes prédéfinis néanmoins, il existe des techniques fréquents comme :

- ↪ Le choix de l'énergie total dans les systèmes électro-mécaniques ;
- ↪ Le choix de  $V(y) = \frac{1}{2} y^T P y$  pour les systèmes linéaires, Cela abouti à une équation dite de Lyapunov ;
- ↪ Le choix d'une fonction quadratique comme :

$$V(y) = \frac{1}{2} (y_1^2, a_2 y_2^2, \dots, a_n y_n^2)$$

**Preuve** du théorème de Lyapunov 1.3.3

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert contenant l'origine,  $\bar{B}(0, \epsilon)$  une boule fermée, centrée en 0 contenu dans  $\mathcal{U}$ .

On pose  $\delta = \min_{\|x\|=\epsilon} V(y)$ ;

Comme  $V$  est définie positive sur  $\mathbb{D}$ , alors  $\delta > 0$ ;

Soit  $W_\delta = \{y \in B(0, \epsilon) : V(y) < \delta\}$ ;

Comme  $V$  est décroissante sur les trajectoires ( car  $\dot{V}(y) \leq 0$  ), alors par le théorème de la barrière (voir 1.1.2 ) toute solution démarrant dans  $W_\delta$  ne peut atteindre la frontière de la boule  $B(0, \epsilon)$  et par conséquent reste dans cette boule. Ainsi,  $y_e = 0$  est stable .

Maintenant, supposons que  $V$  est définie positive i.e  $\dot{V} < 0$  sur  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ;

Soit  $y(t)$  une solution du système démarrant dans  $\mathcal{U} \setminus \{0\}$  et supposons que  $y(t_n) \rightarrow z_0 \in B(0, \epsilon)$  pour une suite  $t_n \rightarrow +\infty$ . Alors  $z_0 = y_e = 0$  En effet :

On observe que  $V(y(t)) > V(z_0) \forall t > 0$  Car  $V$  décroît et  $V(y(t_n)) \rightarrow V(z_0)$  par continuité de  $V$ .

Si  $z_0 \neq 0$ , Soit  $z(t)$  la solution démarrant en  $z_0$ ; Pour tout  $\delta > 0$ , on a :  $V(z(s)) < V(z_0)$ . Alors, pour toute solution  $Y(s)$  démarrant suffisamment près de  $z_0$ , on a :

$$V(Y(s)) < V(z_0)$$

En posant  $Y(0) = y(t_n)$  pour  $n$  suffisamment grand , on a  $V(y(t_n + s)) < V(z_0)$  c'est une contradiction.

D'où  $z_0 = y_e = 0$  est l'unique limite de la solution  $y(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ■

**Autre manière de prouver la stabilité asymptotique** Soit une suite  $t_k \rightarrow +\infty$ , on a  $(\phi_{t_k}(y))_k \subset \bar{B}(0, \epsilon)$  et  $Y_0$  sa valeur d'adhérence. Supposons que  $y_e \neq Y_0$ ; On aurait alors  $V(Y_0) > 0$ . Soient  $s > s' > 0$  fixés, on a :

$$V(\phi_s(Y_0)) < V(\phi_{s'}(Y_0)) < V(Y_0)$$

Par continuité de  $V$ , on aura donc pour  $k \simeq +\infty$

$$V(\phi_{t_k}(y)) < V(\phi_{s+t_k}(Y_0)) \leq V(\phi_{s'}(Y_0))$$

En passant à la limite, on aura

$$V(Y_0) \leq V(\phi_{s'}(Y_0)) < V(Y_0)$$

Ce qui est une contradiction Ainsi,  $X_e = Y_0 = 0$  est l'unique valeur d'adhérence de toute suite  $\phi_{t_k}$

**Exemple 1.3.1 (Pendule sans frottement).** Un pendule simple de masse unité, sans force de frottement est régi par le système :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \sin(y_1) \end{cases} \quad (1.3.5)$$

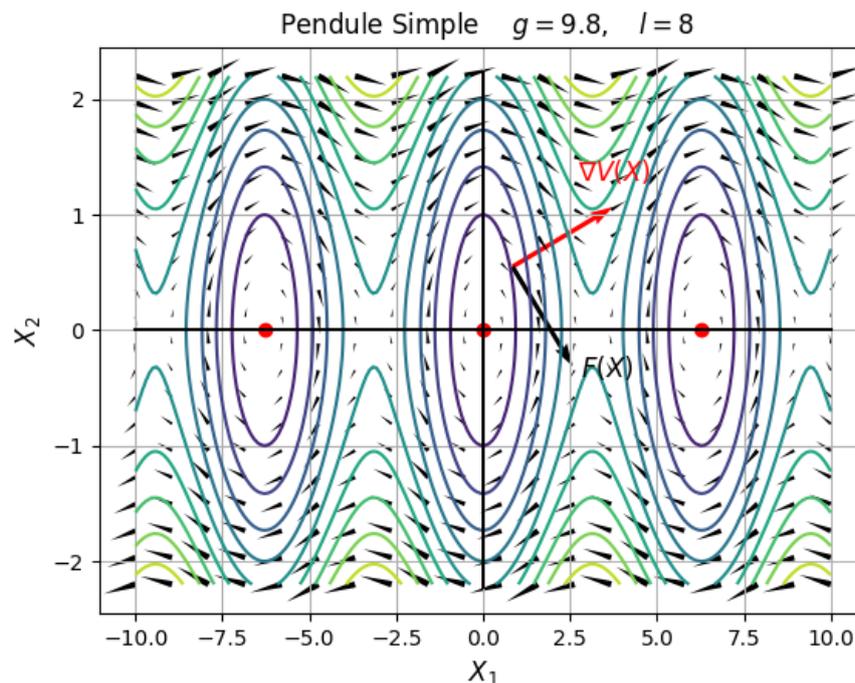


FIGURE 1.3.3 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov, Champs de vecteur  $F(y)$  en noir et  $\nabla(V(y))$  en rouge ; On voit que  $\nabla V \cdot F(y) = 0$  ; Les points d'équilibre sont en rouge.

$y_e = (0, 0)$  est un point d'équilibre.

On pose  $V(y) = E_c + E_p = \frac{1}{2}y_1^2 - \int_0^{y_1} -\frac{g}{l} \sin(y) dy = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(y_1))$  ; Alors  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et on a :

- (i)  $V(0, 0) = 0$  et  $V(y) \geq 0$  sur tout l'espace  $\mathbb{R}^2$  mais si on choisit  $ID = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| < 2\pi\}$  alors  $V(y) > 0$  sur  $ID \setminus \{0\}$  , donc  $V$  est définie positive ;
- (ii)  $\dot{V}(y) = \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \dot{y}_2 = \frac{g}{l} \sin(y_1) y_2 - \frac{g}{l} \sin(y_1) y_2 = 0$  ; alors  $\dot{V}(y) = 0 \forall y \in \mathbb{R}^2$  , donc  $\forall y \in ID$  ( On dit qu'il s'agit d'un **système conservatif** )

Ainsi,  $V$  est une fonction de Lyapunov, donc l'origine est stable . Il faut noter que cette stabilité est locale ( 1.3.3 ) .

**Exemple 1.3.2 (Pendule avec frottement)**. Un pendule de masse unité soumis à une force de frottement (**force dissipative**) est régi par le système :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \sin(y_1) - \frac{k}{m} y_2 \end{cases} \quad (1.3.6)$$

$y_e = (0, 0)$  est un point d'équilibre.

On pose  $V(y) = E_c + E_p = \frac{1}{2}y_1^2 - \int_0^{y_1} -\frac{g}{l} \sin(y) dy = \frac{1}{2}X_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(y_1))$  ; Alors  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et on a :

- (i)  $V(0, 0) = 0$  et  $V(y) \geq 0$  sur tout l'espace  $\mathbb{R}^2$  mais si on choisit  $ID = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| < 2\pi\}$  alors  $V(y) > 0$  sur  $ID \setminus \{0\}$  , donc  $V$  est définie positive ;

$$(ii) \quad \dot{V}(y) = -ky_2^2;$$

Il faut noter que  $\dot{V}$  est semi-définie négative mais pas définie négative car :

$$\dot{V}(y_1, 0) = 0 \quad \forall \quad y_1 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

Ainsi, l'origine est stable, donc pour conclure la stabilité asymptotique, on doit chercher une autre fonction de Lyapunov ou utiliser le théorème de Lasalle ( 1.3.5 )

Les résultats suivant donnent une alternative aux méthode de Lyapunov qui sont dû à J. P. Lasalle. Elles sont connues comme **Principes d'invariance de Lasalle** ( Ref [Lasalle1960, 27, 9] ).

**Théorème 1.3.4.** Soit  $\mathbb{G} \in \mathbb{D}$  un compact invariant par les solutions du système.  $V : \mathbb{G} \leftarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\dot{V}(y) \leq 0$  sur  $\mathbb{G}$ .

Soit  $E = \{X \in \mathbb{G}, \dot{V}(y) = 0\}$  et  $\mathbb{M}$  le plus grand ensemble invariant contenu dans (1.1.4).

Alors  $\mathbb{M}$  est **attractif** pour les solutions démarrant dans  $\mathbb{G}$ .

**Théorème 1.3.5.**

Soit

$$(i) \quad \mathbb{G} = \{y \in \mathbb{D} : V(y) \leq l\}$$

$$(ii) \quad \mathbb{G} \text{ est borné et } \dot{V}(y) \leq 0 \text{ sur } \mathbb{G}$$

Alors  $\mathbb{M}$  ( définit en 1.3.4 ) est est **attractif** pour les solutions démarrant dans  $\mathbb{G}$ .

**Théorème 1.3.6.**

Soit

$$(i) \quad V(y) > 0 \quad \forall \quad y \neq y_e$$

$$(ii) \quad \dot{V}(y) \leq 0 \quad \forall \quad y$$

Alors  $\mathbb{M}$  ( définit en 1.3.4 ) est est **attractif** pour les solutions bornées.

Preuve similaire au Theorème 1.3.4

## Stabilité globale

**Exemple 1.3.3.** Soit le système 1D :

$$\dot{y} = ax - x^3$$

On montre que si  $a < 0$ , l'origine est localement exponentiellement stable et instable si  $a > 0$ ; dans le cas où  $a = 0$  on a le système :

$$\dot{y} = -X^3$$

La méthode direct de Lyapunov ne peut nous renseigner sur la stabilité globale, en effet choisissons la fonction de classe  $\mathcal{C}^1$   $V(y) = \frac{1}{2}x^2$  , on a :

- (i)  $V(0) = 0$  et  $V(y) > 0$  si  $X \neq 0$  ( $V$  est définie positive sur  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ );  
(ii)  $\dot{V}(y) = \frac{\partial V}{\partial X} \cdot \dot{y} = -3x^4 < 0$  si  $x \neq 0$  et  $\dot{V}(0) = 0$  alors  $\dot{V}(y)$  est définie négative sur  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ .

Ainsi  $y_e = 0$  est localement asymptotiquement stable selon le théorème direct de Lyapunov ( 1.3.1 ). On montrera grâce au résultat suivant que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

**Définition 1.3.2 (radialement non bornée).** Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est **radialement non bornée** si et seulement si :

$$\|X\| \rightarrow +\infty \implies V(y) \rightarrow +\infty \quad (1.3.7)$$

**Théorème 1.3.7 (Stabilité asymptotique globale).** *S'il existe une fonction strict de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $y_e = 0$  telle que  $V$  est radialement non bornée ; Alors  $y_e = 0$  est globalement asymptotiquement stable.*

**Note 1.3.3.** De l'exemple 1.3.3 , on a

$$V(y) = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 \implies \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(y) \rightarrow +\infty$$

**Remarque 1.3.2.** Si une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$   $V$  est :

**Définie positive :** Alors les surfaces de niveau ( $\{x : V(y) = c\}$ ) sont fermées pour des petites valeurs de  $c$ ;

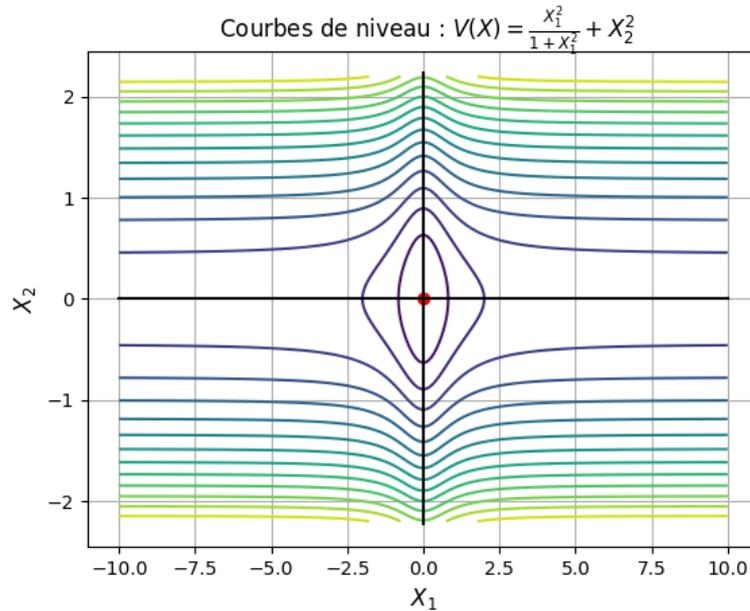
**Radialement bornée :** Alors les surfaces de niveau sont fermées quel que soit  $c$ .

Si les surfaces de niveau ne sont pas fermées, on peut avoir  $\|x\| \rightarrow +\infty$  même si  $\dot{V} < 0$ ; Regardons l'exemple 1.3.4 pour l'illustration.

**Exemple 1.3.4.** Soit la fonction  $\mathcal{C}^1$

$$V(y) = \frac{X_1^2}{(1 + X_1^2)} + X_2^2$$

$V$  n'est pas radialement bornée car pour  $X = (X_1, 0)$ , on a  $\|X\| \rightarrow +\infty$  alors que



$V(y) \rightarrow 1$ . ( Voir Fig

**Théorème 1.3.8 (Stabilité exponentielle).** *Si il existe une fonction de classe  $C^1$   $V : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et des constantes  $a, k_1, k_2, k_3 > 0$  telles que pour tout  $y \in \mathbb{D}$  on a :*

(i)

$$k_1 \|y\|^a \leq V(y) \leq k_2 \|y\|^a;$$

(ii)

$$\dot{V}(y) \leq -k_3 \|y\|^a$$

Alors  $y_e = 0$  est **exponentiellement stable** .

En plus de cela, si ces conditions sont satisfaites sur  $\mathbb{R}^n$ , alors l'origine est **globalement exponentiellement stable** .

**Remarque 1.3.3.** (a) D'après (i) on a :  $V(y) \geq k_1 \|y\|^a$ , ce qui implique que  $V(y)$  est définie positive;

(b) D'après (ii), on a  $\dot{V}(y) \leq -k_3 \|y\|^a$ , ce qui stipule que  $\dot{V}$  est définie négative.

Ainsi, la stabilité exponentielle implique la stabilité simple.

D'autres part, d'après (i),  $V$  est radialement non bornée i.e si  $\|y\| \rightarrow +\infty$ , on a nécessairement  $V(y) \rightarrow +\infty$

**Proposition 1.3.1 (Taux de convergence).** *Si le système satisfait les conditions de stabilité exponentielle (1.3.8) , alors on a :*

$$\|y(t)\| \leq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{a}} \|y(0)\| e^{-\frac{k_3}{ak_2}t} \quad (1.3.8)$$

**Exemple 1.3.5.** Soit  $\dot{y} = -y - y^3$

L'unique équilibre  $y_e = 0$  est globalement exponentiellement stable, en effet en

choisissant  $V(y) = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2$ , on montre les conditions de stabilité exponentielle avec :  $a = 2, k_1 = k_2 = \frac{1}{2}, k_3 = 1$  et

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\|e^{-t}.$$

### 1.3.2 Théorie de bifurcation sur les systèmes dynamiques

**Définition 1.3.3 (Bifurcation).** Soit le système différentiel  $\dot{y} = f(x, \lambda)$ ,  $\lambda$  paramètre. On dit qu'il y a **bifurcation** en  $\lambda_0$  si en une valeur de  $\lambda$  arbitrairement proche de  $\lambda_0$ , il existe une dynamique topologiquement non-équivalente à celle de  $\lambda_0$ .

### 1.3.3 Orbites périodiques et Cycles Limites

**Définition 1.3.4 (Orbite périodique).** Une orbite  $\gamma(y_0)$  est dite **périodique** si elle est fermée c'est à dire dire que le flot commençant sur cette orbite retourne sur celle-ci après une période  $T$ ; i.e  $\phi_t(y_0) = \phi_{t+T}(y_0)$ .

**Définition 1.3.5 ( Cycle limite).** Un **cycle limite** est une orbite périodique **isolée**. Isolée signifie que les trajectoires voisines ne sont pas périodiques; Elles spiralent en s'en éloignant ou en s'en approchant. Dans le cas où elles s'approchent de l'intérieur comme de l'extérieur, on dit que le cycle est **stable**. Sinon, le cycle est dit **instable**. Dans les rares cas où les trajectoires voisines s'approchent de l'extérieur mais s'éloignent de l'intérieur ou vice versa, on parle de cycle **semi-stable**.

**Note 1.3.4.** Les cycles limitent émergent des systèmes à oscillations auto-entretenues, c'est à dire qu'il n'y a pas des forces extérieures périodiques stimulant ces oscillations. On peut citer comme exemple, les battement du cœur, les réactions chimiques qui oscillent spontanément, les vibrations d'un pont ou des ailes d'un avion. Dans tous les cas, il y a une oscillation standard à une fréquence et une amplitude donnée et si le système est perturbé, il revient au cycle limite. Les cycles limites sont des phénomènes non linéaires.

**Remarque 1.3.4.** La définition d'un cycle limite ne retient pas les solutions constantes asymptotiquement stable qui correspondent à une trajectoire réduite à un point vers lequel convergent les orbites adjacentes. Le point n'est pas un cycle fermé. Ces situations sont présentes dans les systèmes linéaires. Dans un tel système, l'amplitude d'une oscillation est entièrement déterminée par les conditions initiales et s'il une légère perturbation, la nouvelle amplitude persistera indéfiniment.

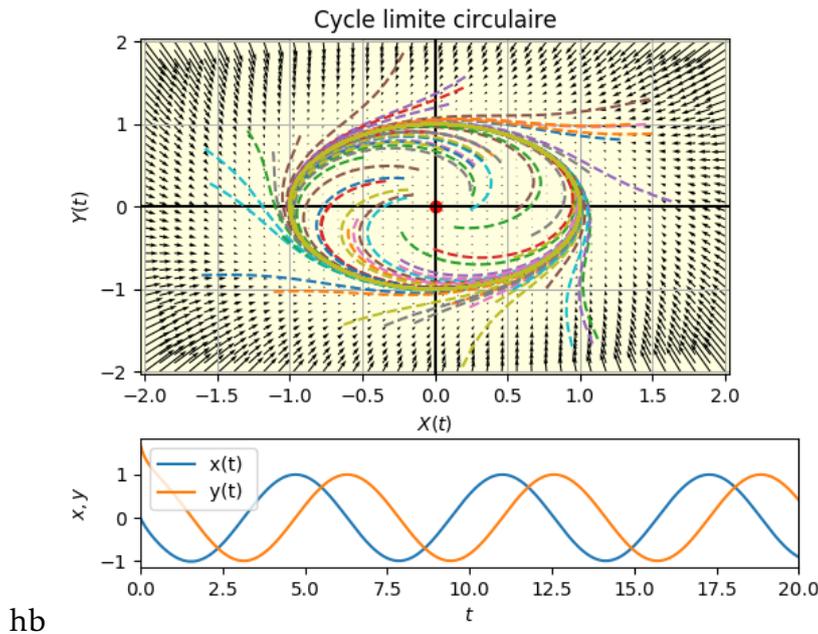


FIGURE 1.3.4 – En haut, quelques trajectoires dans le plan de phases convergents vers le cercle unité. En bas, le signal d'une solution avec  $r(0) = 1.7$  et  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**Exemple 1.3.6.** Soit le système 2D

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), & r > 0 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Les variations de  $r$  et  $\theta$  ne sont pas liées ( pour l'équation  $\dot{r}$ , l'équilibre 0 est instable et l'équilibre 1 est stable) . On a même une solution analytique :

$$r^2(t) = \frac{1}{1 + \alpha e^{-2t}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0, \quad \alpha = 1 - \frac{1}{r^2(0)}$$

On voit dans l'espace des phases ( $y(t) = r(t) \cos \theta(t), x(t) = r(t) \sin \theta(t)$ ) que les trajectoires excepté de l'équilibre  $r = 0$  tendent vers le cercle de rayon  $r = 1$ . Sachant que la vitesse en  $\theta$  est constante , on en déduit que les trajectoires spiralent pour s'en rouler autour du cercle (Voir 1.3.4) . [37]

## Conclusion

Bien que définie comme une fonctionnelle  $\dot{y} = f(y)$ , l'étude des EDO non linéaires a générés des théories riches (bifurcation, chaos , contrôle ... ) On a survolé quelques aspects intéressant dans ce chapitre comme les résultats d'existence et d'unicité, l'étude de la stabilité par les techniques de linéarisation ou celle de Lyapunov-Lasalle.

## CHAPITRE 2

# ÉTUDE QUALITATIVE D'UN MODÈLE NPZ

### Sommaire du présent chapitre

<b>Introduction</b>	<b>28</b>
<b>2.1 <i>Modèle-NPZ</i> &amp; Notations</b>	<b>29</b>
<b>2.2 Étude qualitative du <i>Modèle-NPZ</i></b>	<b>33</b>
<b>2.3 Résultats &amp; Discussion</b>	<b>47</b>
<b>Conclusion</b>	<b>49</b>
<b>Appendix</b>	<b>50</b>

**Résumé 2.0.1.** L'étude qualitative des systèmes dynamiques fortement non-linéaires est un défi de taille et une expérience enrichissante. Ce chapitre a pour ambition d'appréhender les interactions entre nutriments, phytoplanctons et zooplanctons en construisant un modèle du type NPZ. Nous avons utilisé des méthodes classiques (Lyapunov, Hopf, etc.) pour examiner l'existence, la positivité, la bornitude et la stabilité des solutions.

Notre contribution majeure est la construction d'un espace des paramètres admissibles garantissant simultanément l'instabilité des équilibres aux bords et la stabilité de l'équilibre intérieur. Dans le cas d'instabilité de l'équilibre intérieur, nous avons observé l'émergence d'un cycle limite qui signifie l'existence des solutions périodiques.

Mots-Clés : Planctons ; Upwelling ; Systèmes Dynamiques ; Cycle-Limite ; Stabilité.

## Introduction

Les expériences et les observations effectuées dans les zones d'upwelling montrent une importante production primaires (i.e phytoplanctons et zooplanctons) dans lesdits zones. Cette surproduction due à l'afflux des nutriments du fond de l'océan vers la couche d'Ekman (couche surfacique) favorise la croissance de populations animales vivant dans cette couche, les sardines par exemple.

L'étude de la dynamique des espèces vivantes dans les milieux aquatiques fait intervenir des phénomènes biologiques comme la prédation ou la compétition inter-espèces; il y a aussi des phénomènes physico-chimiques comme l'écoulement, la température ou la salinité des eaux. Ces phénomènes sont étroitement liés et font l'objet d'importantes investigations scientifiques pluridisciplinaires : Océanographie, écologie, biomathématiques et physiques.

Très récemment, plusieurs modèles déterministes régissant la dynamiques des espèces de la chaîne trophique ont émergé. Notamment l'interaction entre les nutriments, phytoplanctons et zooplanctons ([66, 21, 40, 45, 3, 58]).

On peut regrouper de manière non exhaustive, ces études en deux catégories. La première est celle des systèmes dynamiques où les observables sont les densités (ou nombre) des espèces vivantes. Dans le cas continu, l'évolution temporelle est décrite par une EDO<sup>1</sup>. La seconde catégorie est celle des systèmes de réaction-diffusion où l'évolution des observables est spatio-temporelle; on utilise les EDP<sup>2</sup>. On ajoute parfois l'effet du transport pour tenir compte du champ de vitesse de l'eau. Notons que des systèmes algébriques sont maniés dans les cas discret.

Parmi ces systèmes, il y a un modèle pertinent régissant la dynamique des trois espèces de la chaîne trophique mentionnées ci-haut. Il est initié en 1981 par Steele et Henderson ([54], [55]) puis étudié par Baretta et Ebenhö en 1997 [8]). Bien qu'ils aient donné une description parfaite de la modélisation et les simulations numériques; leurs études ne nous renseigne pas assez sur la description de l'espace des paramètres et les propriétés des solutions. Nous estimons que cela est dû au pléthore des paramètres et à la forte non-linéarité des équations. C'est pourquoi, nous dérivons un modèle qu'on appellera Modèle-NPZ, c'est un système dynamique 3-D. Notre étude s'articule d'abord sur l'espace des paramètres admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des conditions garantissant l'existence, la positivité et la bornitude des solutions. Ensuite, nous appréhendons rigoureusement la stabilité des points d'équilibres en utilisant la méthode de Lyapunov et le principe d'invariance de Lasalle. Dans le cas d'instabilité, nous examinons la bifurcation dans laquelle on a découvert une bifurcation de Hopf supercritique; c'est l'émergence d'un cycle

---

1. Système d'Équations Différentielles Ordinaires

2. Système d'Équations aux Dérivées Partielles

limite stable.

## 2.1 *Modèle-NPZ* & Notations

Pour décrire la dynamique de phytoplanctons<sup>3</sup>, nutriments<sup>4</sup> et zooplanctons<sup>5</sup>, nous allons ajusté un modèle développé en 1992 par Steele et Henderson (cf. [55]) et modifié par Edwards et Brindley en 1996 (cf. [19]) puis Oschlies et Garçon en 1999 (cf. [42]).

Le modèle décrit l'interaction de trois espèces de la chaîne trophique : Les nutriments  $n(t)$ , les phytoplanctons  $p(t)$  et les zooplanctons  $z(t)$ . On considère ici les concentrations qui évoluent en fonction du temps dans un milieu aquatique (océan, lac, etc.). On a le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \xi_n - \frac{\beta np}{k_n + n} + \mu_n \left( \frac{\alpha(1-\gamma)\eta p^2}{\alpha + \eta p^2} z + \mu_p p + \mu_z z^2 \right), \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\beta np}{k_n + n} - \frac{\alpha \eta p^2}{\alpha + \eta p^2} z - \mu_p p, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma \frac{\alpha \eta p^2}{\alpha + \eta p^2} z - \mu_z z^2. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

La première équation du système (2.1.1) exprime l'évolution des nutriments. Celle ci est déterminée par un apport des nutriments due au mixage vertical, recyclés par les bactéries et consommés par les phytoplanctons. Le mixage vertical transporte les nutriments de la couche profonde de l'eau à la couche de mélange (couche d'Ekman), ce transport est exprimé par le flux  $\xi_n$ .

$$\xi_n = S(x, y, \vec{v}) \cdot (n_0 - n); \quad (2.1.2)$$

où la fonction  $S$  désigne l'intensité d'upwelling. Elle dépend essentiellement de la position horizontale  $(x, y)$  et de la vitesse de l'eau  $\vec{v}$  issue du phénomène d'upwelling.

Avant de coupler le système (2.1.1) à une équation de convection-diffusion, nous considérons que l'intensité  $S(x, y, \vec{v})$  est constante. Cette simplification élimine l'aspect spatial et néglige la vitesse de l'eau.

---

3. Ensemble des organismes aquatiques chlorophylliens du plancton, les uns microscopiques, les autres de grande taille

4. comme nitrate, phosphate ou silicate

5. Ensemble des espèces animales faisant partie du plancton

Les nutriments sont consommés par les phytoplancton avec une saturation caractéristique décrite par une fonction de réponse du type Holling II <sup>6</sup>  $\left(-\frac{\beta np}{k_n + n}\right)$ . Leur recyclage par les bactéries est modélisé par les trois derniers termes entre parenthèses de la première équation du système (2.1.1). Notons qu'une partie seulement est recyclée en tenant compte de l'efficacité de régénération des nutriments  $\mu_n$ .

Une partie de tous les déchets organiques ainsi que l'exsudation de zooplanctons sont recyclés par les bactéries, cependant la dynamique des bactéries n'est pas incluse dans le modèle.

La dynamique de phytoplanctons est considérée dans la deuxième équation du système (2.1.1). Leur concentration dépend de la consommation des nutriments qui constituent une source d'alimentation  $\left(\frac{\beta np}{k_n + n}\right)$ . Elle est aussi réduite par la mortalité naturelle  $(-\mu_p p)$  et par la prédation des zooplancton  $\left(-\frac{\alpha \eta p^2}{\alpha + \eta p^2} z\right)$  qui est une réponse fonctionnelle du type Holling III.

Le pâturage est considéré aussi comme terme de croissance des zooplanctons moyennant le facteur  $\gamma \frac{\alpha \eta p^2}{\alpha + \eta p^2} z - \mu_z z^2$  (3<sup>ème</sup> équation de (2.1.1)). Ce facteur est là pour tenir compte du fait que seulement une partie des nutriments est convertie en biomasse des zooplanctons. L'autre part  $(1 - \gamma)$  est recyclé. La mortalité des zooplanctons est supposée quadratique. Cette hypothèse sous entend l'existence d'un prédateur agissant sur les zooplanctons dont la dynamique n'est pas considérée explicitement [18]; ou bien il peut s'agir d'une compétition inter-espèce. Les paramètres (Voir Tab 4.1.2a) sont décrites comme dans le travail de Pasquero et al. [43]. Leurs valeurs numériques seront discutée le long du papier à travers l'espace des paramètres admissibles (2.2.1).

Comme la réponse fonctionnelle de type Holling-II est l'une des formes les plus réalistes de représentation du taux d'attaque des prédateurs sur leurs proies [24], nous changeons le type Holling-III par une fonctionnelle du type Holling II de la forme  $\frac{\alpha p}{1 + \alpha hp}$ .

Nous supposons ensuite qu'il n'y a ni prédation implicite <sup>7</sup> sur les zooplanctons ni compétition inter-espèce; on fait aussi l'hypothèse que la constante de mi-saturation pour recrutement des nutriments  $k_n$  est supérieure à concentration des nutriments sous la couche de mixage  $n_0$  (i.e  $k_n > n_0$ ). Alors le système devient ce

6. Qui prend en compte le temps de consommation des nutriments. Le taux de capture décroît donc avec l'augmentation de la densité de nutriments.

7. On tient compte de l'effet du prédateur sans considérer explicitement son équation d'évolution.

Paramètre	Description
$S$	Intensité d'Upwelling
$\beta$	Taux de conversion de pâturage (prédation)
$\gamma$	Coefficient de pâturage
$\alpha$	Taux d'attaque des zooplanctons
$h = \frac{\eta}{\alpha}$	Temps moyen de manipulation
$k_n$	Constante de mi-saturation pour recrutement des nutriments
$\mu_n$	Efficacité de régénération des nutriments
$\mu_p$	Taux de mortalité naturelle de phytoplanctons
$\mu_z$	Taux de mortalité naturelle de zooplanctons
$n_0$	Concentration constante des nutriments sous la couche de mixage

TABLEAU 2.1 – Description des paramètres du Modèle-NPZ

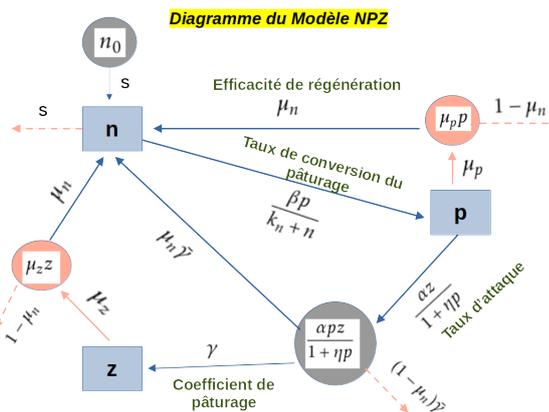


FIGURE 2.1.1 – Diagramme du Modèle NPZ

qu'on nommera *Modèle-NPZ* :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \xi_n - \frac{\beta np}{k_n + n} + \mu_n \left( \frac{\alpha(1-\gamma)pz}{1+\alpha hp} + \mu_p p + \mu_z z \right), \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\beta np}{k_n + n} - \frac{\alpha p}{1+\alpha hp} z - \mu_p p, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\alpha \gamma p z}{1+\alpha hp} - \mu_z z. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Pour réduire le nombre d'occurrences de  $\alpha$  dans le *Modèle-NPZ*, on pose  $\eta = \alpha \cdot h$ .

On pose ensuite  $\epsilon_n = \mu_n - 1$ ,  $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$ , alors le *Modèle-NPZ* (2.1.3) devient :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = S(n_0 - n) - \frac{\beta np}{k_n + n} + \mu_n \left( \frac{\alpha \bar{\gamma} pz}{1 + \eta p} + \mu_p p + \mu_z z \right), \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\beta np}{k_n + n} - \frac{\alpha p}{1 + \eta p} z - \mu_p p, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\alpha \gamma pz}{1 + \eta p} - \mu_z z. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

On pose

$$\begin{aligned} F_1(n, p, z) &= S(n_0 - n) - \frac{\beta np}{k_n + n} + \mu_n \left( \frac{\alpha \bar{\gamma} pz}{1 + \eta p} + \mu_p p + \mu_z z \right), \\ F_2(n, p, z) &= \frac{\beta np}{k_n + n} - \frac{\alpha p}{1 + \eta p} z - \mu_p p, \\ F_3(n, p, z) &= \frac{\alpha \gamma pz}{1 + \eta p} - \mu_z z. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Alors le *Modèle-NPZ* (2.1.4) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = F_1(n, p, z), \\ \frac{dp}{dt} = F_2(n, p, z), \\ \frac{dz}{dt} = F_3(n, p, z). \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{dt}(t) = F(\Phi(t)) \quad (2.1.6)$$

Où l'on a :

$$\Phi(t) = (n(t), p(t), z(t))^T, \quad (2.1.7)$$

et

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}_+^*)^3 &\longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 \\ \Phi &\longmapsto (F_1(\Phi), F_2(\Phi), F_3(\Phi))^T. \end{aligned}$$

En notant  $F_{i,x}$  la dérivée partielle de  $F_i$  par rapport à  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}
F_{1,n} &= -S - \frac{\beta k_n p}{(k_n + n)^2}, \\
F_{1,p} &= -\frac{\beta n}{k_n + n} + \frac{\alpha \mu_n \bar{\gamma} z}{(1 + \eta p)^2} + \mu_n \mu_p, \\
F_{1,z} &= \frac{\alpha \mu_n \bar{\gamma} p}{1 + \eta p} + \mu_n \mu_z, \\
F_{2,n} &= \frac{\beta k_n p}{(k_n + n)^2}, \\
F_{2,p} &= -\frac{\alpha z}{(1 + \eta p)^2} + \frac{\beta n}{k_n + n} - \mu_p, \\
F_{2,z} &= -\frac{\alpha p}{1 + \eta p}, \\
F_{3,n} &= 0, \\
F_{3,p} &= \frac{\alpha \gamma z}{(1 + \eta p)^2}, \\
F_{3,z} &= \frac{\alpha \gamma p}{1 + \eta p} - \mu_z.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Ainsi, la matrice jacobienne du champ  $F$  s'écrit :

$$J_{F(n,p,z)} = \begin{pmatrix} F_{1,n} & F_{1,p} & F_{1,z} \\ F_{2,n} & F_{2,p} & F_{2,z} \\ F_{3,n} & F_{3,p} & F_{3,z} \end{pmatrix}. \tag{2.1.9}$$

Nous avons ainsi les principales notations qu'on utilisera pour l'étude qualitative du *Modèle-NPZ*. Notez que des notations intermédiaires seront définies en fonction du besoin.

## 2.2 Étude qualitative du *Modèle-NPZ*

### 2.2.1 Propriétés des solutions

**Proposition 2.2.1.** (*Existence, unicité, positivité & bornitude.*)

Le Système (2.1.4) associé avec une condition initiale a une unique solution positive et bornée.

*Démonstration.* (Proposition 2.2.1)

Les éléments de la matrice jacobienne du champ  $F$  (2.1.9) sont toutes continues ; alors la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc localement lipschitzienne. Ainsi, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz [23], le système admet une unique solution.

Pour montre l'invariance positive de  $\mathbb{R}_+^3$ , considérons ces éléments de bord :  $\Gamma_1 \equiv \{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ,  $\Gamma_2 \equiv \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}_+$  et  $\Gamma_3 \equiv \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ . Note that  $\mathbb{R}_+^3 = \{(n, p, z) \in \mathbb{R}^3 : -n \leq 0; -p \leq 0 \text{ et } -z \leq 0\}$ . On a aussi

$$F_{1/\Gamma_1} = S n_0 + (\epsilon_n + 1) \left( (1 - \gamma) \frac{\alpha p}{1 + \eta p} z + \mu_p p + \mu_z z \right) \geq 0,$$

$$F_{2/\Gamma_2} = 0,$$

$$F_{3/\Gamma_3} = 0,$$

Ainsi, en choisissant la fonction  $L(n, p, z) = -n$ , on voit que  $\langle F, \nabla L \rangle \leq 0$ . Par conséquent, on peut déduire par le théorème de la barrière (theorème 16.9 dans [6]) que le champ de vecteur pointe à l'intérieur du domaine le long de  $\Gamma_1$  et par analogie le long de  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ . Alors,  $\mathbb{R}_+^3$  est un domaine positivement invariant, i.e., pour toute condition initiale positive, les solutions demeurent positives.

Pour prouver la bornitude, définissons

$$\Theta(t) = an(t) + ap(t) + z(t) \quad ,$$

avec

$$a > 0 \text{ tel que } \frac{\gamma}{1 - \mu_n \bar{\gamma}} < a < \frac{1}{\mu_n},$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t) &= a\dot{n}(t) + a\dot{p}(t) + \dot{z}(t) \\ &= aS n_0 - aS n - a \frac{\beta n p}{k_n + n} + a \frac{\mu_n \bar{\gamma} \alpha p z}{1 + \eta p} + a \mu_n \mu_p p + a \mu_n \mu_z z + a \frac{\beta n p}{k_n + n} - a \frac{\alpha p z}{1 + \eta p} \\ &\quad - a \mu_p p + \frac{\alpha \gamma p z}{1 + \eta p} - \mu_z z \\ &= aS n_0 - aS n + (a \alpha \mu_n \bar{\gamma} - a \alpha + \alpha \gamma) \frac{p z}{1 + \eta p} - a \mu_p (1 - \mu_n) p - \mu_z (1 - a \mu_n) z. \end{aligned}$$

On a

$$a \alpha \mu_n \bar{\gamma} - a \alpha + \alpha \gamma \leq 0 \quad \text{car} \quad \frac{\gamma}{1 - \mu_n \bar{\gamma}} < a.$$

ce qui implique

$$\dot{\Theta}(t) \leq -aS n - a \mu_p (1 - \mu_n) p - \mu_z (1 - a \mu_n) z + aS n_0.$$

Posons

$$\tau = \min\{S; \mu_p (1 - \mu_n); \mu_z (1 - a \mu_n)\}.$$

Alors

$$\dot{\Theta}(t) \leq -\tau\Theta(t) + aSn_0.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\Theta(t) \leq e^{-\tau t} e^{t_0} \Theta(t_0) + aSn_0 e^{-t_0}.$$

Ainsi, pour  $t$  assez grand,  $\Theta(t) < e^{t_0} \Theta(t_0) + aSn_0 e^{-t_0}$ , et les solutions sont majorées. Comme on établit la positivité, alors elles sont bornées. ■

## 2.2.2 Points d'équilibres et stabilité.

**Proposition 2.2.2 (Existence et positivité des équilibres).** *Le système (2.1.4) admet quatre points d'équilibres qu'on appellera  $e_1, e_2, e_3, e_4$  (équations (2.2.3) & (2.2.4)).  $e_1$  est inconditionnellement positif. Si on note*

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\mu_p(k_n + n_0)}{\beta n_0}, \\ R_2 &= \frac{\eta \mu_z}{\alpha \gamma}, \\ R_3 &= \frac{\beta \epsilon_n \mu_z}{S(k_n - n_0)A} = \frac{\beta \epsilon_n \mu_z}{\alpha \gamma S(k_n - n_0)(1 - R_2)}, \\ R_4 &= \frac{S \alpha \gamma k_n \mu_p + S \alpha \gamma \mu_p n_0 + S \beta \eta \mu_z n_0 + \beta \mu_p \mu_z + \mu_n \mu_p^2 \mu_z}{S \alpha \beta \gamma n_0 + S \eta k_n \mu_p \mu_z + S \eta \mu_p \mu_z n_0 + \beta \mu_n \mu_p \mu_z + \mu_p^2 \mu_z}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

et en faisant l'hypothèse que

$$(R_1, R_2, R_3, R_4) \in ]-\infty, 1[{}^4,$$

Alors on a :

$$e_2, e_3 \in \mathbb{R}_+^3 \text{ et } e_4 \notin \mathbb{R}_+^3.$$

C'est-à-dire que le deuxième et troisième points d'équilibres sont dans l'orthant positif (i.e.,  $\mathbb{R}_+^3$ ) et le quatrième ne l'est pas.

*Démonstration.* (Proposition 2.2.2)

Pour faire le calcul des points d'équilibre, on remplace la première équation par la

somme de trois autres et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} S(n_0 - n) + \epsilon_n \left( \frac{\alpha p z (-\gamma + 1)}{\eta p + 1} + \mu_p p + \mu_z z \right) = 0, \\ p \left( -\frac{\alpha z}{\eta p + 1} + \frac{\beta n}{k_n + n} - \mu_p \right) = 0, \\ z \left( \frac{\alpha \gamma p}{\eta p + 1} - \mu_z \right) = 0. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

De la troisième équation du système (2.2.2), on a  $z = 0$  où  $p = \frac{\mu_z}{\alpha \gamma - \eta \mu_z}$ .

En traitant le cas où  $z = 0$ , On a deux points d'équilibres :

$$\begin{aligned} e_1 &= (\overset{*}{n}_1, \overset{*}{p}_1, \overset{*}{z}_1) = (n_0, 0, 0), \\ e_2 &= (\overset{*}{n}_2, \overset{*}{p}_2, \overset{*}{z}_2) = \left( \frac{k_n \mu_p}{\beta - \mu_p}, \frac{S(k_n \mu_p - n_0(\beta - \mu_p))}{\mu_p(\beta - \mu_p) \epsilon_n}, 0 \right). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

En traitant le cas où  $p = \frac{\mu_z}{\alpha \gamma - \eta \mu_z}$ , on détermine deux autres points d'équilibres

$$e_3 = (\overset{*}{n}_3, \overset{*}{p}_3, \overset{*}{z}_3) \text{ et}$$

$e_4 = (\overset{*}{n}_4, \overset{*}{p}_4, \overset{*}{z}_4)$  (après substitution de  $p$  dans les deux premières équations du système (2.2.2)), où :

$$\begin{aligned} \overset{*}{n}_3 &= \frac{-B_1 + \sqrt{\Delta}}{2S(\alpha \gamma - \eta \mu_z)}, & \overset{*}{n}_4 &= \frac{-B_1 - \sqrt{\Delta}}{2S(\alpha \gamma - \eta \mu_z)}, \\ \overset{*}{p}_3 &= \frac{\mu_z}{\alpha \gamma - \eta \mu_z}, & \overset{*}{p}_4 &= \frac{\mu_z}{\alpha \gamma - \eta \mu_z}, \\ \overset{*}{z}_3 &= \frac{-B_2 + \sqrt{\Delta}}{\frac{2\epsilon_n \mu_z}{\gamma}(\alpha \gamma - \eta \mu_z)}, & \overset{*}{z}_4 &= \frac{-B_2 - \sqrt{\Delta}}{\frac{2\epsilon_n \mu_z}{\gamma}(\alpha \gamma - \eta \mu_z)}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Avec les relations :

$$\begin{aligned} A &= S(\alpha \gamma - \eta \mu_z), \\ B_1 &= S\alpha \gamma k_n - S\alpha \gamma n_0 - S\eta k_n \mu_z + S\eta \mu_z n_0 - \beta \epsilon_n \mu_z, \\ B_2 &= S\alpha \gamma k_n + S\alpha \gamma n_0 - S\eta k_n \mu_z - S\eta \mu_z n_0 - \beta \epsilon_n \mu_z + 2\epsilon_n \mu_p \mu_z \\ &= S(k_n - n_0)A - \beta \epsilon_n \mu_z, \\ C &= -S\alpha \gamma k_n n_0 + S\eta k_n \mu_z n_0 = -k_n n_0 A \\ &= 2(An_0 + \epsilon_n \mu_p \mu_z) + B_1, \\ \Delta &= B_1^2 - 4AC = B_1^2 + 4k_n n_0 A^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Notons que  $0 < \mu_n < 1$ , alors  $\epsilon_n = \mu_n - 1 < 0$ . D'après l'hypothèse  $R_1 < 1$ , on a :

$\beta > \mu_p$  qui implique que

$$n_2^* = \frac{k_n \mu_p}{\beta - \mu_p} > 0 \text{ et } k_n \mu_p < n_0(\beta - \mu_p) \text{ alors } p_2^* > 0.$$

Par conséquent,  $R_1 < 1$  implique  $e_2 = (n_2^*, p_2^*, z_2^*) \in \mathbb{R}_+^3$ . De même

$$R_2 = \frac{\eta \mu_z}{\alpha \gamma} < 1, \text{ on déduit } p_3^* = \frac{\mu_z}{\alpha \gamma - \eta \mu_z} > 0$$

En considérant l'hypothèse

$$R_3 = \frac{\beta \epsilon_n \mu_z}{S(k_n - n_0)A} < 1$$

et le fait que  $A > 0$  car  $R_2 < 1$ , on a :

$$B_1 = S(k_n - n_0)A - \beta \epsilon_n \mu_z > 0 \text{ et } C = -k_n n_0 A < 0.$$

Alors

$$B_1^2 < \Delta = B_1^2 - 4AC \text{ donc } -B_1 + \sqrt{\Delta} > 0.$$

D'où

$$\frac{-B_1 + \sqrt{\Delta}}{2S(\alpha \gamma - \eta \mu_z)} > 0.$$

Ainsi

$$R_3 < 1 \text{ implique que } n_3^* > 0.$$

On a aussi

$$R_4 < 1,$$

i.e.,

$$\frac{S\alpha\gamma k_n \mu_p + S\alpha\gamma \mu_p n_0 + S\beta\eta \mu_z n_0 + \beta \mu_p \mu_z + \mu_n \mu_p^2 \mu_z}{S\alpha\beta\gamma n_0 + S\eta k_n \mu_p \mu_z + S\eta \mu_p \mu_z n_0 + \beta \mu_n \mu_p \mu_z + \mu_p^2 \mu_z} < 1,$$

d'où

$$4\epsilon_n \mu_z (S\alpha\beta\gamma n_0 - S\alpha\gamma k_n \mu_p - S\alpha\gamma \mu_p n_0 - S\beta\eta \mu_z n_0 + S\eta k_n \mu_p \mu_z); \\ + S\eta \mu_p \mu_z n_0 + \beta \epsilon_n \mu_p \mu_z - \epsilon_n \mu_p^2 \mu_z < 0$$

alors

$$-B_2 + \sqrt{\Delta} > 0;$$

ainsi

$$R_4 < 1 \implies z_3^* > 0.$$

Par ailleurs

$$e_4 \notin \mathbb{R}_+^3 \quad \text{car} \quad \dot{n}_4^* < 0$$

du fait que

$$\dot{n}_4^* = \frac{-B_1 - \sqrt{\Delta}}{2S(\alpha\gamma - \eta\mu_z)} \quad \text{et} \quad 2S(\alpha\gamma - \eta\mu_z) > 0 - B_1 - \sqrt{\Delta} < 0,$$

car

$$B_1 > 0.$$

■

**Définition 2.2.1 (Espace des paramètres admissibles).**

On définit l'espace des paramètres admissibles  $\mathcal{P}_{ad}$  par :

$$\mathcal{P}_{ad} = \left\{ (\alpha, \beta, \eta, \mu_p, \mu_z, k_n, n_0, S, \mu_n, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^8 \times ]0, 1[^2 : \right. \\ \left. n_0 < k_n; R_1, R_2, R_3, R_4 < 1 \right\} \quad (2.2.6)$$

**Remarque 2.2.1.** Alors  $\mathcal{P}_{ad}$  est non vide et le tableau 2.2 donne des exemples de paramètres admissibles. On a en plus vérifier la positivité des points d'équilibre avec les *paramètres admissibles standard* ( la première ligne du tableau), on a :

$$\begin{aligned} e_2 &= (\bar{n}_2, \bar{p}_2, \bar{z}_2) = (0.51, 0.078, 0) \\ e_3 &= (\bar{n}_3, \bar{p}_3, \bar{z}_3) = (0.69, 1.58, 0.32) \\ e_4 &= (\bar{n}_4, \bar{p}_4, \bar{z}_4) = (-0.87, 1.58, 13.33) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Ces calculs sont effectués dans le programme NPZ\_Prog.py Où l'on teste les conditions (2.2.6) sur les paramètres possibles et l'on retient les paramètres admissibles .

**Proposition 2.2.3 (Stabilité de  $e_1$  et  $e_2$ ).** *Le point d'équilibre  $e_1$  (2.2.3) est toujours instable, et si  $\sqrt{\Delta_0} > b_0$ ,  $e_2$  est instable aussi.*

*Démonstration.* (Proposition 2.2.3)

En substituant  $e_1$  sur la matrice jacobienne (2.1.9), on a :

$$J_{F(n_0, 0, 0)} = \begin{pmatrix} -S & -\frac{\beta n_0}{k_n + n_0} + \mu_n \mu_p & \mu_n \mu_z \\ 0 & \frac{\beta n_0}{k_n + n_0} - \mu_p & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_z \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Les valeurs propres sont

$$-S, \quad -\mu_z, \quad \text{et} \quad \frac{\beta n_0}{k_n + n_0} - \mu_p.$$

$\alpha$	0.33	0.94	0.52
$\beta$	0.84	0.89	0.47
$\gamma$	0.85	0.88	0.30
$\eta$	0.15	0.24	0.13
$\mu_n$	0.66	0.88	0.71
$\mu_p$	0.19	0.38	0.07
$\mu_z$	0.82	0.41	0.43
$k_n$	0.55	0.23	0.95
$n_0$	0.82	0.69	0.98
$S$	0.92	0.78	0.40
$R_1$	0.38	0.57	0.34
$R_2$	0.46	0.11	0.35
$R_3$	0.01	0.01	$-6.8e^{-4}$
$R_4$	0.92	0.77	0.82

TABLEAU 2.2 – Quelques paramètres admissibles avec les conditions  $R_1, R_2, R_3, R_4$ .

L'une des valeurs propres est strictement positive, c'est  $\frac{\beta n_0}{k_n + n_0} - \mu_p = \mu_p \left( \frac{1 - R_1}{R_1} \right) > 0$ . Alors, d'après le théorème indirect de Lyapunov, le point d'équilibre  $e_1$  est instable.

D'autre part, le polynôme caractéristique du système linéarisé autour de  $e_2$  s'écrit :

$$P_{e_2}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)Q_{e_2}(\lambda), \quad (2.2.9)$$

Où  $Q_{e_2}(\lambda)$  est la forme quadratique donnée par (2.2.10).

$$a_0\lambda^2 + b_0\lambda + c_0, \quad (2.2.10)$$

Avec

$$\begin{aligned} a_0 &= k_n\mu_p, \\ b_0 &= R_1S\beta^3\epsilon_n n_0 - 3R_1S\beta^2\epsilon_n\mu_p n_0 + 3R_1S\beta\epsilon_n\mu_p^2 n_0 - R_1S\epsilon_n\mu_p^3 n_0 - S\beta^3\epsilon_n n_0 + 3S\beta^2\epsilon_n\mu_p n_0 \\ &\quad - 3S\beta\epsilon_n\mu_p^2 n_0 + S\epsilon_n\mu_p^3 n_0 + Sk_n\mu_p, \\ c_0 &= -R_1S\beta^3\epsilon_n^2\mu_p n_0 + 3R_1S\beta^2\epsilon_n^2\mu_p^2 n_0 - 3R_1S\beta\epsilon_n^2\mu_p^3 n_0 + R_1S\epsilon_n^2\mu_p^4 n_0 + S\beta^3\epsilon_n^2\mu_p n_0 - 3S\beta^2\epsilon_n^2\mu_p^2 n_0 \\ &\quad + 3S\beta\epsilon_n^2\mu_p^3 n_0 - S\epsilon_n^2\mu_p^4 n_0. \end{aligned}$$

Après simplification

$$\begin{aligned} a_0 &= k_n\mu_p, \\ b_0 &= S\epsilon_n n_0 (R_1 - 1) (\beta - \mu_p)^3 + Sk_n\mu_p, \\ c_0 &= \epsilon_n\mu_p (Sa_0 - b_0). \end{aligned}$$

On observe que  $a_0 > 0$ ,  $c_0 < 0$  car  $R_1 < 1$ . Donc le discriminant de la forme

quadratique  $Q_{e_2}(\lambda)$  is

$$\Delta_0 = b_0^2 - 4a_0c_0 > 0.$$

Les deux racines réelles de  $Q_{e_2}(\lambda)$  sont

$$\lambda_1 = \frac{-b_0 + \sqrt{\Delta_0}}{2a_0} > 0 \text{ et } \lambda_2 = \frac{-b_0 - \sqrt{\Delta_0}}{2a_0}. \quad (2.2.11)$$

Comme  $\lambda_1$  est inconditionnellement positive car  $\sqrt{\Delta_0} > b_0$ , on conclut d'après le théorème indirect de Lyapunov [23] que le point d'équilibre  $e_2$  est instable  $\square$

■

**Théorème 2.2.1.** (*Stabilité de  $e_3$* ) Posons

$$H_{11} = \frac{S}{n} + \frac{\beta k_n \dot{p}}{n(k_n + n)(k_n + \dot{n})}, \quad H_{22} = \frac{\alpha \omega_0}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})},$$

$$\Pi = \frac{\mu_p \mu_n}{-2n} + \frac{\beta \dot{n}}{-2(k_n + n)(k_n + \dot{n})} + \frac{\mu_n \bar{\gamma} \alpha \dot{z}}{-2n(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})},$$

$$\Gamma = \frac{\mu_n}{-2n} (\mu_z + \bar{\gamma} \alpha (1 + \eta \dot{p}) p), \quad \Psi = \frac{\delta \gamma - \alpha}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})},$$

$$f(n, p, z) = H_{11}H_{22} - \Pi^2, \quad g(n, p, z) = -\Psi^2H_{11} - \Gamma^2H_{22} + 2\Pi\Psi\Gamma,$$

$$\zeta(n, p, z) = \alpha \frac{(\omega_0 + \eta \dot{z})p - \eta \dot{p}z - \omega_0 \dot{p}}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})},$$

$$\mathbb{G} = \{(n, p, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid f(n, p, z) > 0, g(n, p, z) > 0, \zeta(n, p, z) < 0\},$$

Où  $\omega_0 > 0$  et  $\delta \in \mathbb{R}^*$ ,  $A, B, C$  sont des constantes auxiliaires définies précisément dans la preuve (Voir équations (2.2.14) & (2.2.15)).

Si  $\Delta = B^2 - AC > 0$ , alors on a :

- (i)  $\mathbb{G}$  est un ensemble borné contenant l'équilibre intérieur  $e_3$ ,
- (ii) l'équilibre  $e_3$  est asymptotiquement stable sur  $\mathbb{G}$ .

*Démonstration.* (Théorème 2.2.1)

Nous allons directement montrer la stabilité globale avant de vérifier la condition (i).

Soit  $e_3 = (\dot{n}_3, \dot{p}_3, \dot{z}_3) \triangleq (\dot{n}, \dot{p}, \dot{z})$  le point d'équilibre intérieur,

On note  $X^T = (n - \dot{n}, p - \dot{p}, z - \dot{z})$  et  $V : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$V(n, p, z) = \int_{\dot{n}}^n \frac{\sigma - \dot{n}}{\sigma} d\sigma + \int_{\dot{p}}^p \frac{\sigma - \dot{p}}{\sigma} d\sigma + \delta \int_{\dot{z}}^z \frac{\sigma - \dot{z}}{\sigma} d\sigma,$$

où  $\delta > 0$  Alors  $V$  est une fonction positive ou nulle, de classe  $C^1$  et radialement non bornée. En plus  $V(\overset{*}{n}, \overset{*}{p}, \overset{*}{z}) = 0$ ; c'est une fonction candidate de Lyapunov. Étudions à présent le signe de  $\dot{V}$ . On a

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{n - \overset{*}{n}}{n} \frac{dn}{dt} + \frac{p - \overset{*}{p}}{p} \frac{dp}{dt} + \delta \frac{z - \overset{*}{z}}{z} \frac{dz}{dt} \triangleq \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

$$\dot{V}_1 = \frac{n - \overset{*}{n}}{n} \left( S n_0 - S n - \frac{\beta n p}{k_n + n} + \frac{\alpha \mu_n \bar{\gamma} p z}{1 + \eta p} + \mu_n \mu_p p + \mu_n \mu_z z \right)$$

Comme  $(\overset{*}{n}, \overset{*}{p}, \overset{*}{z})$  est un équilibre, alors de la première équation du système (2.1.4) on a :

$$S n_0 = S \overset{*}{n} + \frac{\beta \overset{*}{n} \overset{*}{p}}{k_n + \overset{*}{n}} - \frac{\alpha \mu_n \bar{\gamma} \overset{*}{p} \overset{*}{z}}{1 + \eta \overset{*}{p}} - \mu_n \mu_p \overset{*}{p} - \mu_n \mu_z \overset{*}{z}.$$

En injectant cette égalité dans  $\dot{V}_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \frac{n - \overset{*}{n}}{n} \left[ -S(n - \overset{*}{n}) - \beta \left( \frac{np}{k_n + n} - \frac{\overset{*}{n}\overset{*}{p}}{k_n + \overset{*}{n}} \right) \right. \\ & \left. + \mu_n \bar{\gamma} \alpha \left( \frac{pz}{1 + \eta p} - \frac{\overset{*}{p}\overset{*}{z}}{1 + \eta \overset{*}{p}} \right) + \mu_n \mu_p (p - \overset{*}{p}) + \mu_n \mu_z (z - \overset{*}{z}) \right] \end{aligned}$$

Posons :  $\dot{V}_1 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$  avec

$$M_1 = -\frac{S}{n} (n - \overset{*}{n})^2,$$

$$M_2 = -\frac{\beta}{n} (n - \overset{*}{n}) \left( \frac{np}{k_n + n} - \frac{\overset{*}{n}\overset{*}{p}}{k_n + \overset{*}{n}} \right),$$

$$M_3 = \frac{\alpha \mu_n \bar{\gamma}}{n} (n - \overset{*}{n}) \left( \frac{pz}{1 + \eta p} - \frac{\overset{*}{p}\overset{*}{z}}{1 + \eta \overset{*}{p}} \right),$$

$$M_4 = \frac{\mu_n \mu_p}{n} (n - \overset{*}{n}) (p - \overset{*}{p}),$$

$$M_5 = \frac{\mu_n \mu_z}{n} (n - \overset{*}{n}) (z - \overset{*}{z}).$$

Alors,

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{\beta}{n} (n - \overset{*}{n}) \frac{[k_n(np - \overset{*}{n}\overset{*}{p}) - n\overset{*}{n}(p - \overset{*}{p})]}{(k_n + n)(k_n + \overset{*}{n})} \\ &= \beta \overset{*}{n} \frac{(n - \overset{*}{n})(p - \overset{*}{p})}{(k_n + n)(k_n + \overset{*}{n})} - \frac{\beta k_n (n - \overset{*}{n})(np - \overset{*}{n}\overset{*}{p})}{n (k_n + n)(k_n + \overset{*}{n})}. \end{aligned}$$

On a :

$$np - \overset{*}{n}\overset{*}{p} = np - n\overset{*}{p} + n\overset{*}{p} - \overset{*}{n}\overset{*}{p} = n(p - \overset{*}{p}) + \overset{*}{p}(n - \overset{*}{n})$$

$$M_2 = \beta \dot{n} \frac{(n - \dot{n})(p - \dot{p})}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} - \frac{\beta k_n \dot{p}}{n} \frac{(n - \dot{n})^2}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} - \beta k_n \frac{(n - \dot{n})(p - \dot{p})}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})}$$

$$M_2 = \beta(\dot{n} - k_n) \frac{(n - \dot{n})(p - \dot{p})}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} - \frac{\beta k_n \dot{p}}{n} \frac{(n - \dot{n})^2}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})}.$$

$$M_3 = \frac{\mu_n \bar{\gamma} \alpha}{n} (n - \dot{n}) \frac{[pz + \eta p \dot{p} z - \dot{p} z - \eta p \dot{p} z]}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} pz + \eta p \dot{p} z - \dot{p} z - \eta p \dot{p} z &= \eta \dot{p} p (z - \dot{z}) + pz - \dot{p} z \\ &= \eta \dot{p} p (z - \dot{z}) + pz - \dot{p} z + \dot{p} z - \dot{p} z \\ &= \eta \dot{p} p (z - \dot{z}) + p(z - \dot{z}) + \dot{z}(p - \dot{p}) \\ &= (1 + \eta \dot{p}) p (z - \dot{z}) + \dot{z}(p - \dot{p}). \end{aligned}$$

$$M_3 = \mu_n \bar{\gamma} \alpha (1 + \eta \dot{p}) \frac{p}{n} \frac{(n - \dot{n})(z - \dot{z})}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} + \mu_n \bar{\gamma} \alpha \frac{\dot{z}}{n} \frac{(n - \dot{n})(p - \dot{p})}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})}$$

Ainsi, on peut réécrire  $\dot{V}_1$  comme :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{1}{n} \left( S + \frac{\beta k_n \dot{p}}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} \right) (n - \dot{n})^2 + \left( \frac{\mu_p \mu_n}{n} + \frac{\beta(\dot{n} - k_n)}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} + \frac{\mu_n \bar{\gamma} \alpha \dot{z}}{n(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} \right) \\ &\quad \times (n - \dot{n})(p - \dot{p}) + \left( \frac{\mu_n \mu_z}{n} + \frac{\mu_n \bar{\gamma} \alpha (1 + \eta \dot{p}) p}{n} \right) (n - \dot{n})(z - \dot{z}) \end{aligned}$$

On a aussi

$$\dot{V}_2 = (p - \dot{p}) \left( \beta \frac{n}{k_n + n} - \frac{\alpha}{1 + \eta p} z - \mu_p \right).$$

De la deuxième équation du système (2.1.4) on a :

$$-\mu_p = -\frac{\beta \dot{n}}{k_n + \dot{n}} + \frac{\alpha \dot{z}}{1 + \eta \dot{p}}.$$

En injectant  $\mu_p$  dans  $\dot{V}_2$  on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= (p - \dot{p}) \left( \frac{\beta n}{k_n + n} - \frac{\beta \dot{n}}{k_n + \dot{n}} - \frac{\alpha z}{1 + \eta p} + \frac{\alpha \dot{z}}{1 + \eta \dot{p}} \right) \\ &= (p - \dot{p}) \left( \frac{\beta k_n (n - \dot{n})}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} - \alpha \frac{z(1 + \eta \dot{p}) - \dot{z}(1 + \eta p)}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} \right). \end{aligned}$$

Posons  $\dot{V}_2 = N_1 + N_2$  avec :

$$N_1 = \frac{\beta k_n (p - \dot{p})(n - \dot{n})}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} \quad \text{et} \quad N_2 = -\alpha (p - \dot{p}) \frac{z + \eta \dot{p} z - \dot{z} - \eta \dot{p} \dot{z}}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})}$$

Alors,  $N_2$  peut être exprimé comme

$$\begin{aligned} N_2 &= -\alpha (p - \dot{p}) \frac{\left[ (z - \dot{z}) + \omega_0 (p - \dot{p}) - \omega_0 (p - \dot{p}) + \eta \dot{p} z - \eta \dot{p} \dot{z} \right]}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} \\ &= \frac{-\alpha (p - \dot{p})(z - \dot{z})}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} - \frac{\alpha \omega_0 (p - \dot{p})^2}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} + \alpha \frac{(\omega_0 + \eta \dot{z})p - \eta \dot{p} z - \omega_0 \dot{p}}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} \quad \text{avec} \quad \omega_0 > 0 \end{aligned}$$

Parallèlement à  $\dot{V}_1$  et  $\dot{V}_2$ ,  $\dot{V}_3$  peut être exprimé comme

$$\dot{V}_3 = \delta (z - \dot{z}) \left( \frac{\gamma p}{1 + \eta p} - \mu_z \right).$$

de la troisième équation du système (2.1.4) on a :  $\mu_z = \frac{\gamma \dot{p}}{1 + \eta \dot{p}}$ , d'où :

$$\dot{V}_3 = \frac{\delta \gamma (z - \dot{z})(p - \dot{p})}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})},$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 + \dot{V}_3 &= -\frac{\alpha \omega_0}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} (p - \dot{p})^2 + \frac{\beta k_n}{(k_n + n)(k_n + \dot{n})} (n - \dot{n})(p - \dot{p}) \\ &\quad + \frac{\delta \gamma - \alpha}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})} (p - \dot{p})(z - \dot{z}) + \alpha \frac{(\omega_0 + \eta \dot{z})p - \eta \dot{p} z - \omega_0 \dot{p}}{(1 + \eta p)(1 + \eta \dot{p})}. \end{aligned}$$

Alors  $\dot{V}$  s'écrit comme  $\dot{V} = -X^T H X + \zeta(n, p, z)$  où :

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & \Pi & \Gamma \\ \Pi & H_{22} & \Psi \\ \Gamma & \Psi & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.12)$$

Comme  $(n, p, z) \in \mathbb{G}$ , le critère de Sylvester [12] est satisfait et l'on a  $H$  définie positive. Alors

$$\dot{V} = -X^T H X + \zeta(n, p, z) < 0 \quad \forall (n, p, z) \in \mathbb{G} \setminus \{e_3\}.$$

Ainsi,  $V$  satisfait les conditions de stabilité du théorème de Lyapunov (Voir Page 194

[23]), alors  $e_3$  asymptotiquement stable dans  $G$ . Montrons maintenant la condition (i)

Posons

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 + \eta \dot{p} \\ k_0 &= k_n + \dot{n} \end{aligned}$$

Alors les éléments de  $H$  s'écrivent au point  $e_3$  comme :

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n}}{\dot{n} k_0^2}, \\ H_{22} &= \frac{\alpha \omega_0}{p_0^2}, \\ \Pi &= \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{2 \dot{n} p_0^2 k_0^2} = \frac{\alpha \gamma \mu_n \dot{z} k_0^2 - (\mu_n k_0^2 \mu_p p_0^2 + \mu_n k_0^2 \alpha \dot{z} + \beta \dot{n}^2 p_0^2)}{2 \dot{n} p_0^2 k_0^2}, \\ \Gamma &= \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 \dot{n}} = \frac{\alpha \gamma \mu_n p_0 \dot{p} - \mu_n (\mu_z + \alpha p_0 \dot{p})}{2 \dot{n}}, \\ \Psi &= \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2 p_0^2} = \frac{\alpha - \delta \gamma}{2 p_0^2}. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

On obtient ainsi

$$f(\dot{n}, \dot{p}, \dot{z}) = \frac{4 \omega_0 \alpha \dot{n} k_0^2 p_0^2 (Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n}) - (\Pi_1 - \Pi_2)^2}{4 \dot{n}^2 k_0^4 p_0^4}.$$

Si on choisit  $\omega_0$  de sorte que :

$$\omega_0 > \frac{(\Pi_1 - \Pi_2)^2}{4 \alpha \dot{n} k_0^2 p_0^2 (Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n})}, \tag{2.2.14}$$

Alors

$$f(\dot{n}, \dot{p}, \dot{z}) > 0.$$

On a aussi

$$g(\dot{n}, \dot{p}, \dot{z}) = -\Psi^2 H_{11} - \Gamma^2 H_{22} + 2\Pi\Psi\Gamma \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned}
-\Psi^2 H_{11} &= \frac{-\delta^2 \dot{n}^2 \gamma^2 (Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n}) + \delta 2\alpha \gamma \dot{n}^2 (Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n}) - \alpha^2 \dot{n}^2 (Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n})}{4\dot{n}^2 p_0^4 k_0^2}, \\
-\Gamma^2 H_{22} &= \frac{-2\omega_0(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 p_0^2 k_0^2}{4\dot{n}^2 p_0^4 k_0^2}, \\
2\Pi\Psi\Gamma &= \frac{\alpha(\Pi_1 - \Pi_2)(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \delta\gamma(\Pi_1 - \Pi_2)(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{4\dot{n}^2 p_0^4 k_0^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$g(\dot{n}, \dot{p}, \dot{z}) = \frac{A\delta^2 + B\delta + C}{4\dot{n}^2 p_0^4 k_0^2} \quad \text{avec :}$$

$$\begin{aligned}
A &= -\dot{n}\gamma^2(Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n}), \\
B &= 2\alpha\dot{n}\gamma(Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n}) - \gamma(\Pi_1 - \Pi_2)(\Gamma_1 - \Gamma_2), \\
C &= -\alpha^2\dot{n}(Sk_0^2 + \beta k_n \dot{p} \dot{n}) - 2\omega_0(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 p_0^2 k_0^2 \\
&\quad + \alpha(\Pi_1 - \Pi_2)(\Gamma_1 - \Gamma_2).
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Fixons la condition

$$\Delta = B^2 - 4AC > 0 \tag{2.2.16}$$

et soit  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les deux racines réelles du polynôme  $A\delta^2 + B\delta + C$  telles que  $\delta_1 < \delta_2$ . Alors, il existe des paramètres admissibles ( $\omega_0 = 1.79$  et  $\Delta = 0.0077$  Voir Fig 2.2.1 pour le reste des paramètres) vérifiant la condition (2.2.16), il suffit donc de choisir  $\delta < \delta_1$  ou  $\delta > \delta_2$  et on aura  $A\delta^2 + B\delta + C > 0$ ; ce qui implique que :

$$g(\dot{n}, \dot{p}, \dot{z}) > 0.$$

Comme on a évidemment  $\zeta(\dot{n}, \dot{p}, \dot{z}) = 0 \leq 0$ , on conclut que  $e_3 \in \mathbb{G}$ . ■

### 2.2.3 Bifurcation autour de l'équilibre $e_3$

On s'intéresse au comportement du système suivant l'intensité d'upwelling, le paramètre  $S$ . On fixe une plage de paramètres admissibles où l'équilibre  $e_3$  est stable. On dénote  $S_0$  le paramètre issu de ce choix et on l'appellera *paramètre de bifurcation*. En faisant varier  $S$  dans  $[S_{min}, S_{max}] = [0.1, 5.85]$ , on cherche la *valeur de bifurcation* noté  $S_b$ ; ce sera le point où l'équilibre  $e_3$  perd sa stabilité. Soit  $P(X)$  le polynôme caractéristique du système linéarisé autour de  $e_3$ ; il s'écrit :

$$P(X) = h_0(S)X^3 + h_1(S)X^2 + h_2(S)X + h_3(S),$$

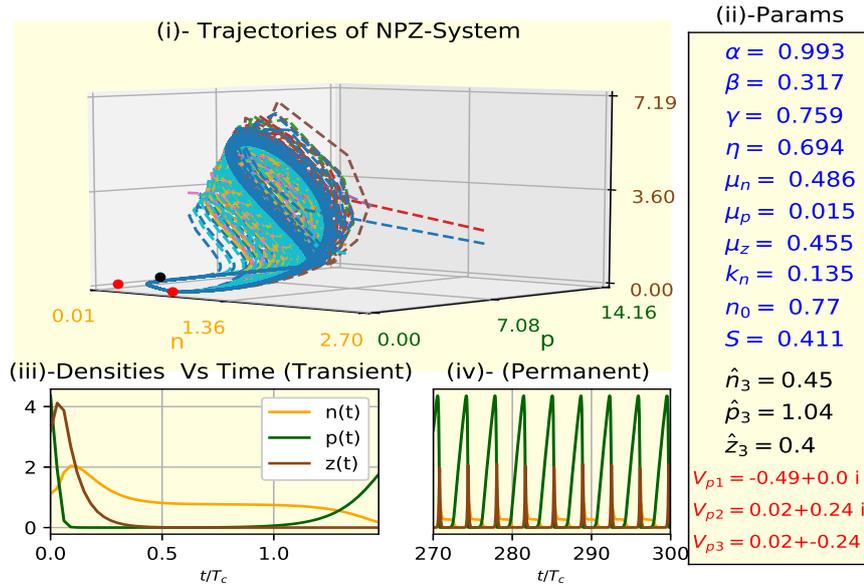


FIGURE 2.2.1 – (i)- Quelques orbites dans l'espace des phases. Le point en noir est l'équilibre  $e_3$  et en rouges les deux autres. (ii)- Paramètres du système (bleue), coordonnées de  $e_3$  (noir) et les valeurs propres associées (rouge). (iii)- Évolutions des densités vs temps phase transitoire et(iv)-phase permanent.  $\omega_0 = 1.79$  et  $\Delta = 0.0037$

où  $h_0(S) = 1$ ,  $h_1, h_2, h_3$  sont des fonctions de  $S$  données par :

$$\begin{aligned} h_1(S) &= -(F_{1,n}^* + F_{2,p}^* + F_{3,z}^*), \\ h_2(S) &= F_{1,n}^*(F_{2,p}^* + F_{3,z}^*) + F_{2,p}^*F_{3,z}^* - F_{3,p}^*F_{2,z}^* - F_{2,n}^*F_{1,p}^*, \\ h_3(S) &= -F_{1,n}^*F_{2,p}^*F_{3,z}^* + F_{1,n}^*F_{3,p}^*F_{2,z}^* + F_{2,n}^*F_{1,p}^*F_{3,z}^* - F_{1,z}^*F_{3,p}^*F_{2,n}^*, \end{aligned}$$

où les  $F_{i,x}$  sont les éléments de la jacobienne du champ (2.1.8).

La matrice  $3 \times 3$  donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 & 0 \\ h_0 & h_2 & 0 \\ 0 & h_1 & h_3 \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice de Hurwitz* associée au polynôme  $P(X)$ . Alors  $P$  est stable (i.e les valeurs propres sont de partie réelle strictement positifs) si et seulement si tous les mineurs principaux de  $H$  sont positifs i.e,

$$\begin{aligned} H_1(S) &= h_1(S) > 0, \\ H_2(S) &= h_1(S)h_2(S) - h_3(S) > 0, \\ H_3(S) &= h_3(S)H_2(S) > 0. \end{aligned}$$

En fixant  $S_0 = 0.85$ , on observe numériquement que  $H_2(3.38) = H_3(3.38) = 0$  (Voir Fig 2.2.2); alors  $S_b = 3.38$  est une valeur de bifurcation. Il s'agit d'une bifurcation

include first image

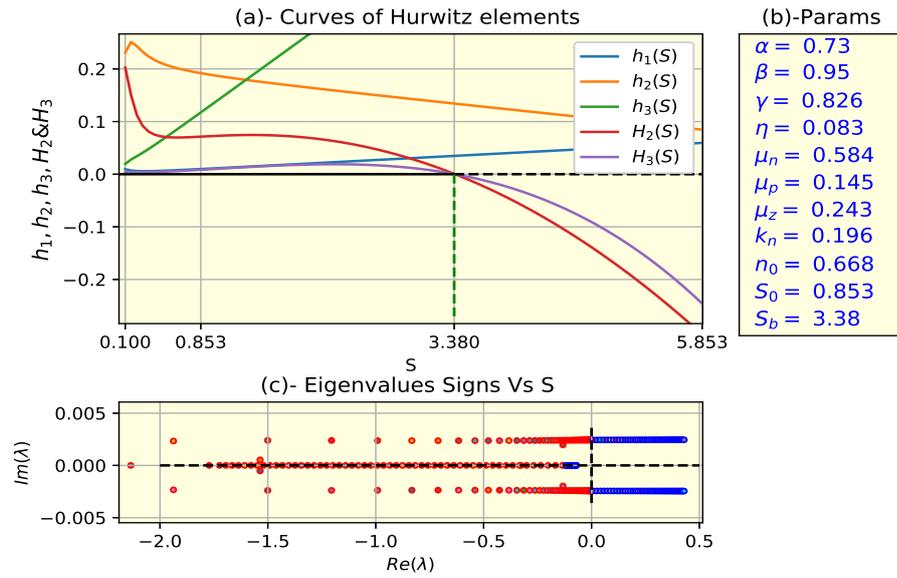


FIGURE 2.2.2 – (a) - Diagramme de bifurcation illustrant la valeur de bifurcation  $S_b$  selon la fonctions  $H_2, \frac{dH_2}{dS}$ ; (b) -les paramètres du système; (c)- valeurs propres en rouge pour  $S < S_b$  et en blue pour  $S > S_b$ .

de Hopf selon le critère de Liu [34] (2.2.1).

**Lemme 2.2.1 (Critère de Liu).** *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites*

- (i)  $h_0(S_b) > 0, H_1(S_b) > 0, H_2(S_b) = 0,$
- (ii)  $\frac{dH_2}{dS}(S_b) \neq 0.$

Alors il y a une simple bifurcation de Hopf.

En regardant la typologie des valeurs propres (Voir Fig 2.2.2)<sup>8</sup>, on a :

- (i) Pour  $S \in [S_{min}, S_b[$ , une valeur propre réelle négative, et deux complexes conjuguées de partie réelle strictement négative; l'équilibre  $e_3$  est donc localement stable;
- (ii) Pour  $S \in ]S_b, S_{max}]$ , on a une valeur propre réelle négative, et deux complexes conjuguées de partie réelle strictement positive; l'équilibre  $e_3$  est donc instable .

On conclut d'après le théorème de Poincaré-Andronov-Hopf [38], qu'il existe un cycle limite pour  $S \in ]S_b, S_{max}] = ]3.38; 5.85]$ .

## 2.3 Résultats & Discussion

Après la définition du *Modèle-NPZ*, nous nous somme intéressé à l'étude qualitative du système. On s'était assuré de l'existence, unicité, positivité et bornitude des solutions. Ensuite, nous avons calculé les points stationnaires et établi des

8. Les valeurs propres sont mise en échelle pour la visibilité de l'image.

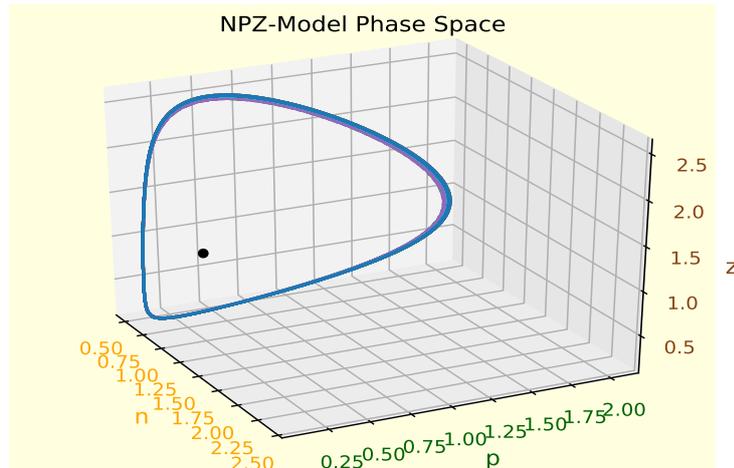


FIGURE 2.2.3 – Cycle limite émergeant après la bifurcation de Hopf ( $S = 4$ ). C'est la convergence de 11 trajectoires après un temps transitoire de 8000. Le point en noir indique l'équilibre instable.

conditions suffisantes pour leur positivité. On a découvert que les deux équilibres à la frontière de  $\mathbb{R}_+^3$  sont inconditionnellement instables. Ce qui s'interprète comme une corrélation de dépendance entre les trois espèces. On a montré grâce au théorème de Lasalle [28], que l'équilibre intérieur est stable dans un sous ensemble  $\mathbb{G} \in \mathbb{R}_+^3$ . Cet ensemble n'est dépend fortement des paramètres du système.

Nous avons écrit un programme en python (NPZ-Prog.py)<sup>9</sup> dont la principale tâche est de sélectionner une plage des paramètres admissibles (i.e vérifiant la proposition 2.2.1). Ensuite, on a utilisé ces paramètres pour évaluer respectivement les points d'équilibres et les valeurs propres associées; ainsi, en tirant  $10^5$  plages de paramètres admissibles, on a observé que  $\bar{p}_3$  est une distribution uniforme dans  $[0.4, 5.85]$  par contre  $\bar{n}_3$  et  $\bar{z}_3$  ne sont pas du tout uniformes et sont réparties respectivement dans  $[0.01, 0.89]$  et  $[0.30, 5.55]$  (See Fig 2.3.1).

Il vient ensuite l'intégration du système NPZ avec la fonction *odein* de python qui est basée sur une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas adaptative.

Comme ça été montré en théorème 2.2.1, il existe une plage des paramètres où l'équilibre  $e_3$  est stable. Dans ce cas, les simulations confirment que les valeurs propres sont de partie réelle négative et les deux sont complexes conjuguées; les orbites spirales et convergent vers l'équilibre  $e_3$  (Figure 2.3.3). En faisant varier l'intensité d'upwelling  $S$ , nous avons montré qu'une bifurcation de Hopf super-critique émerge; c'est -à-dire qu'il existe une valeur de  $S$  où l'équilibre  $e_3$  perd sa stabilité et un cycle limite apparaît. Nous n'avons pas étudié rigoureusement la stabilité de ce cycle mais les simulations numériques conjecturent sa stabilité. Ce

9. Attaché avec les fichier supplémentaires

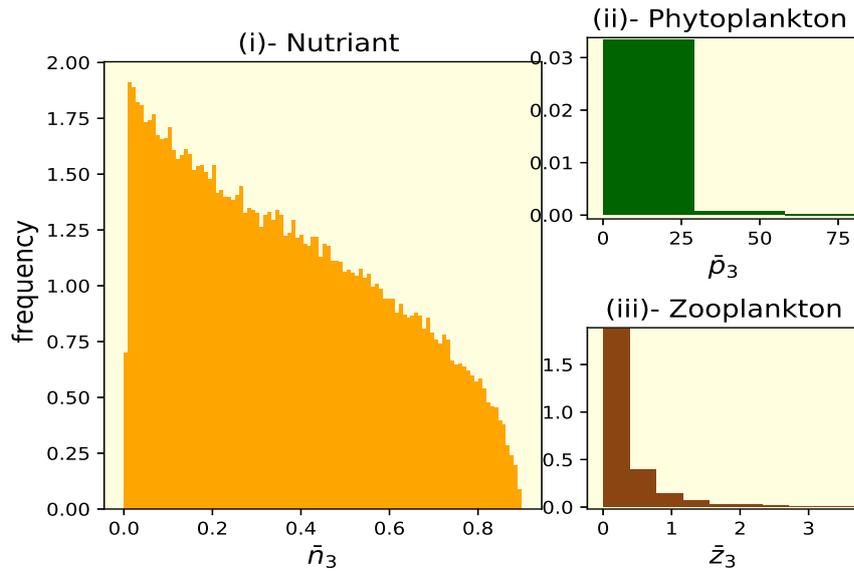


FIGURE 2.3.1 – Distribution des concentrations à l'équilibre  $e_3$  avec  $10^5$  plages de paramètres admissibles (voir `dist-equ3(n)` dans `NPZ-Prog.py`)

phénomène d'oscillations périodiques entretenues a été observé par Edwards & Bees [19] où ils ont considéré le pâturage des zooplanktons du type Holling III. Ceci montre que notre choix du type Holling II n'enlève pas cet aspect fondamental du modèle original (See Fig 2.3.2).

Dans le cas où l'on a ces solutions périodiques, on s'intéresse à la production primaire qui est définie comme le terme de croissance dans la dynamique des phytoplanktons définie par :

$$PP = \frac{\beta np}{k_n + n} \quad (2.3.1)$$

La quantité  $PP$  est périodique car  $n$  et  $p$  le sont ; en regardant l'évolution de sa moyenne suivant  $S \in [3.4, 5.85]$  (après la bifurcation), on constate que la production primaire moyenne est constante ( $\langle PP \rangle = 0.29$ ) avec une déviation croissante suivant  $S$  (See Figure 2.3.4).

## Conclusion

Pour étudier la dynamique de nutriments, phytoplanktons et zooplanktons, on s'est focalisé sur un système d'EDO (2.1.4). Il y a un espace de paramètres admissibles où les solutions sont bien définies. Nous avons aussi un équilibre intérieur. Dans le cas où cet équilibre est instable, il y a un cycle limite stable qui met en exergue les solutions périodiques. On a déterminé algébriquement quatre équilibres telles  $e_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ . Ceci est due aux conditions suffisantes imposées pour la positivité des trois autres (2.2.1). Il serait intéressant de regarder les conditions de positivité des quatre équilibres et d'étudier si nécessaire, la bi-stabilité de

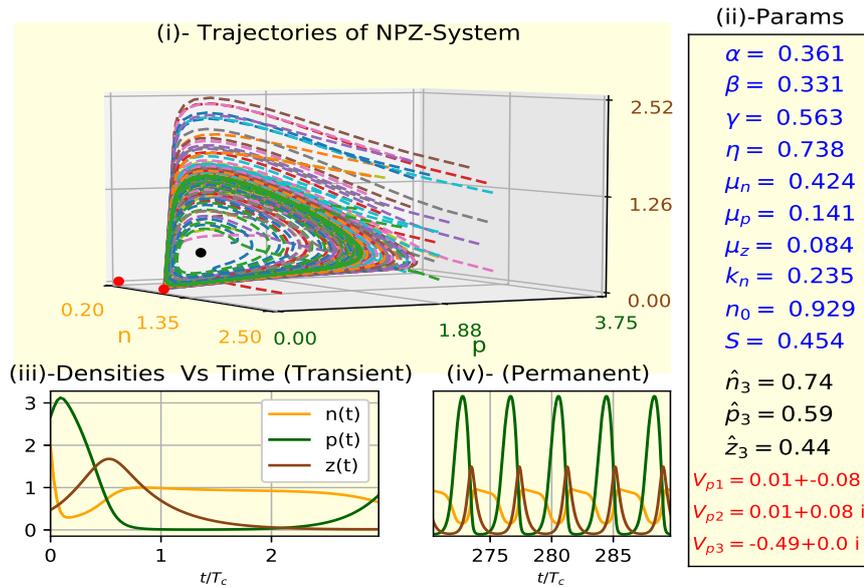


FIGURE 2.3.2 –  $e_3$  instable : (i)- Quelques orbites dans l'espace des phases. Le point en noir est l'équilibre  $e_3$  et en rouges les deux autres. (ii)- Paramètres du système (bleue), coordonnées de  $e_3$  (noir) et les valeurs propres associées (rouge). (iii)- Évolutions des densités vs temps phase transitoire et (iv) phase permanent

$e_3$  et  $e_4$ . Une interprétation biologique des paramètres aiderait beaucoup à la compréhension et validation du modèle. Enfin, il serait enrichissant de considérer l'effet de transport-diffusion; ce qui revient à coupler le *modèle-NPZ* avec une équation d'upwelling par exemple.

## Appendix

Les tables 2.3, 2.4 et 2.5 montrent une liste de quelques fonctions utilisées pour illustrer ce papier. Il y a trois programmes python<sup>10</sup> : NPZ \_ Sympy\_ Calcul.py, NPZ\_ Prog.py, Hurwitz\_ Prog.py . Les tables ci-dessous donnent les fonctions et leur sorties

Fonction	Sortie
Coef_ Jacobienne()	Matrice Jacobienne
SolveNZZero()	$n_1, p_1, n_2, p_2$
SolveNZOriginal()	$n_3, p_3, n_4, p_4$
Val _ Propres()	Valeurs propres
Coef_ Hurwitz()	Éléments de la matrice de Hurwitz

TABLEAU 2.3 – NPZ \_ Sympy\_ Calcul.py

10. Fichiers attachés en tant que matériels supplémentaires.

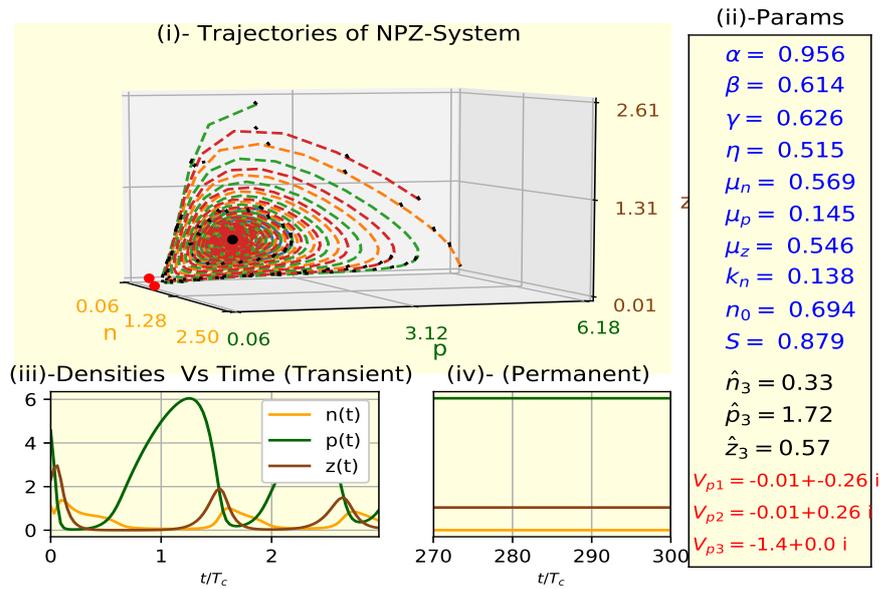


FIGURE 2.3.3 – Idem Figure 2.3.2. Cas où l'équilibre  $e_3$  est stable.

Fonction	Sortie
Test_param()	plage de paramètres admissibles
Condition_Lasalle()	$\Delta = B^2 - 4AC$ 2.2.16
dist_equ3(n)	Figure 2.3.1
plot_snapshot()	Figures 2.2.1, 2.3.2, 2.3.3
plot_orbit()	Figure 2.2.3

TABLEAU 2.4 – NPZ\_Prog.py

Fonction	Sortie
plot_prim_production ()	Figure 2.3.4
plot_orbite_projection ()	Figure 2.3.5
plot_val_pro_color	Figure 2.2.2

TABLEAU 2.5 – Hurwitz\_Prog.py

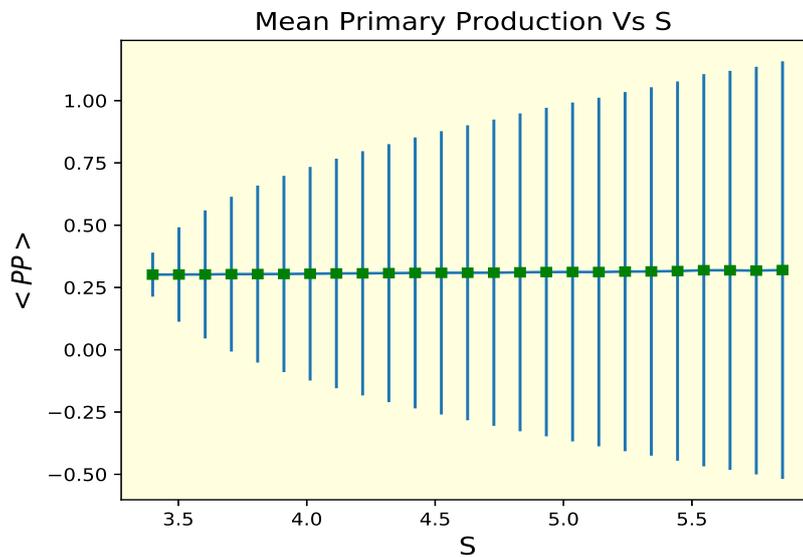


FIGURE 2.3.4 – Production primaire moyenne suivant l'intensité d'Upwelling  $S$ .

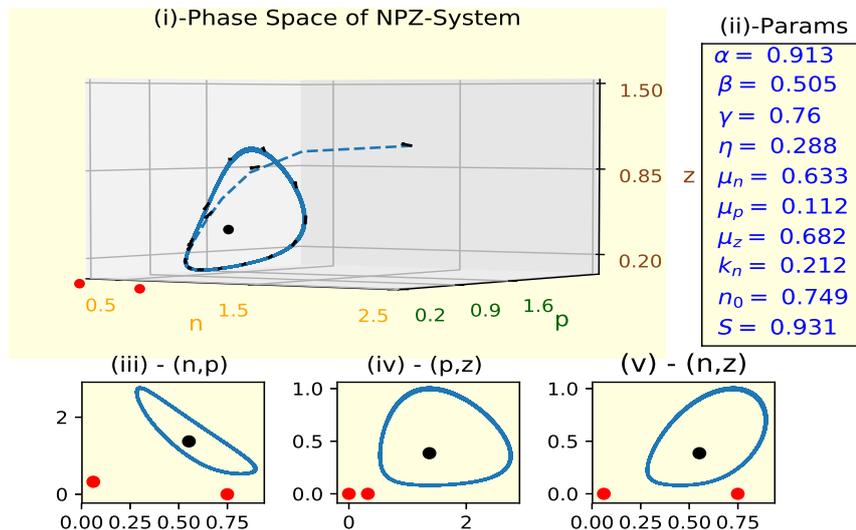


FIGURE 2.3.5 – (i)-Cycle limite émergeant après la bifurcation de Hopf. C'est la convergence de 11 trajectoires après un temps transitoire de 8000. Le point en noir indique l'équilibre intérieur instable. (ii)-Paramètres du système. (iii), (iv) et (v) sont respectivement les projections du cycle sur les plans  $(n,p)$ ,  $(p,z)$  et  $(n,z)$ .

## **Deuxième partie**

# **Systemes de Convection-Diffusion : Approche des EDPs.**



Notre monde est composé de plusieurs couleurs, ses équations à plusieurs inconnues, ses inconnues à plusieurs variables.

Olof Sundine

## CHAPITRE 3

# APPROCHE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : EDPS

### Sommaire du présent chapitre

<b>Introduction</b>	<b>55</b>
<b>3.1 Systèmes de Convection- Réaction-Diffusion</b>	<b>59</b>
<b>3.2 Étapes de Résolution d'une EDP à travers des Exemples.</b>	<b>60</b>
<b>3.3 Espaces Fonctionnelles.</b>	<b>63</b>
<b>3.4 Étude de EDP Elliptique &amp; Équation de Navier Stokes (ENS)</b>	<b>68</b>
<b>3.5 Résolution numérique des Équations de Diffusion.</b>	<b>78</b>
<b>Conclusion</b>	<b>78</b>



Équations de Maxwell. ©CCBY-SA 4.0

$$\rho \underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right)}_a = - \underbrace{\nabla p}_{F_{\text{pression}}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{F_{\text{visqueuse}}}$$

Équations de Navier-Stockes.



Équation de Schrödinger. ©GiroScienc

## Introduction

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation sur une fonction inconnue de plusieurs variables et ses dérivées partielles. En utilisant les notations

de l'annexe A.2 , on peut écrire symboliquement une EDP typique comme suit ; On fixe un entier  $m \geq 1$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.0.1 (EDP).** Une expression de la forme :

$$F(D^m u(x), D^{m-1} u(x), \cdot, s, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x \in \Omega), \quad (3.0.1)$$

est appelée une EDP d'ordre  $m$  où :

$$F : \mathbb{R}^{nm} \times \mathbb{R}^{n^{m-1}} \times \cdot s \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est donnée et}$$

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est l'inconnue .}$$

L'équation (3.0.1) est résolue si on trouve toute fonction  $u$  la vérifiant. On met généralement des conditions aux bords de  $\Omega$  pour en trouver une solution. Avant de résoudre les EDP, On tente souvent de les classées selon certaines caractéristiques permettant ainsi la généralisation des résultats obtenus. La définition suivante nous donne une classification globale.

**Définition 3.0.2. (Classification des EDP)**

L'EDP (3.0.1) est appelée :

**linéaire** : si elle a la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u = f(x);$$

pour des fonctions données  $A_\alpha, f$ . Si  $f = 0$ , on dit que l'EDP est **linéaire-homogène** ;

**sémi-linéaire** : si elle a la forme

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) D^\alpha u + A_0(D^{m-1} u, \cdot, s, Du, u, x) = 0;$$

**quasilinéaire** : si elle a la forme

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(D^{m-1} u, \cdot, s, Du, u, x) D^\alpha u + A_0(D^{m-1} u, \cdot, s, Du, u, x) = 0;$$

**pleinement non-linéaire** : si elle dépend non-linéairement des dérivées d'ordre supérieure.

On appelle de manière formelle **système** d'EDP, une collection de plusieurs EDP avec différentes fonctions inconnues.

Il faut noter que la nature physique du système influe sur le choix de la méthode de résolution (numérique ou analytique). Pour cela, il est important de connaître

le type d'une EDP à travers quelques aspects. Ce qui conduit à une classification qu'on voit à travers le prototype d'une EDP du second ordre d'inconnue  $\Phi(x, y)$  :

$$A\Phi_{xx} + B\Phi_{xy} + C\Phi_{yy} + D\Phi_x + E\Phi_y + F\Phi + G = 0; \quad (3.0.2)$$

les coefficients  $A, B, C, \dots$  peuvent dépendre des variables  $x, y$ , de  $\Phi$  et ses dérivées partielles  $\Phi_{xx} \dots$ . La première forme de classification est la linéarité. L'EDP (3.0.2) est **linéaire** si  $A, B, C$  sont uniquement des fonctions de  $x, y$  et les coefficients  $G$  sont au plus des combinaisons linéaires de  $\Phi$  et ses dérivées partielles. Sinon, on dit que l'équation est **non-linéaire**. Il y a une forme spéciale des EDP non-linéaires; c'est dans le cas où  $A, B, C$  sont des fonctions de  $x, y, \Phi, \Phi_x$  et  $\Phi_y$ ; on parle d'EDP **quasi-linéaire**. L'autre forme de classification est celui des caractéristiques; ce sont les parties du domaine où les dérivées d'ordre supérieures sont singulières (discontinues ou non définies). Pour identifier les caractéristiques de (3.0.2); posons :

$$H = D\Phi_x + E\Phi_y + F\Phi + G, \quad (3.0.3)$$

$$\Phi_x = \Phi_x(x, y) \Rightarrow d\Phi_x = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} dy = \Phi_{xx} dx + \Phi_{xy} dy, \quad (3.0.4)$$

$$\Phi_y = \Phi_y(x, y) \Rightarrow d\Phi_y = \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dy = \Phi_{xy} dx + \Phi_{yy} dy. \quad (3.0.5)$$

En structurant le système (3.0.2 - 3.0.4- 3.0.5) sous forme matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{xx} \\ \Phi_{xy} \\ \Phi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H \\ d\Phi_x \\ d\Phi_y \end{pmatrix}. \quad (3.0.6)$$

Ainsi, la singularité des dérivées  $\Phi_{xx}, \Phi_{xy}$  et  $\Phi_{yy}$  s'interprète comme l'absence de solution ou l'existence de plusieurs solutions du système (3.0.6). Dans le cas où il n'a pas de solutions, le déterminant de la matrice est nul et on aura

$$A \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - B \frac{\partial y}{\partial x} + C = 0; \quad (3.0.7)$$

**si**  $B^2 - 4AC = 0$  , Il y a une caractéristique réelle; on dit que l'EDP est **parabolique**;

**si**  $B^2 - 4AC < 0$  , il n'y pas de solution (caractéristique) alors on dit que l'EDP est **elliptique**;

**si**  $B^2 - 4AC > 0$  , il y a deux solutions réelles (i.e deux lignes caractéristiques) alors on dit que l'EDP est **hyperbolique**.

## Différence entre une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) et une Équation aux Dérivées Partielles (EDP).

Qu'est-ce qui se passe quand on cherche à résoudre une EDO? En générale, on cherche à déterminer un champ de vecteurs ou des trajectoires dans  $\mathbb{R}^n$ . Quant aux EDP, on cherche à déterminer une fonction de  $u(x)$  pour tout temps. Ce qui signifie que la solution est une trajectoire des fonctions. Donc, l'espace des solutions est un espace de fonctions comme  $(L^p(\Omega), C^\infty(\Omega), \cdot, s)$ . Ces espaces sont de dimension infinie.

D'autre part, pour une EDO, l'espace des solutions est connue (c'est-à-dire  $\mathbb{R}^n$  ou un de ses sous ensemble) tant dis que pour une EDP, l'espace des solutions est à déterminer.

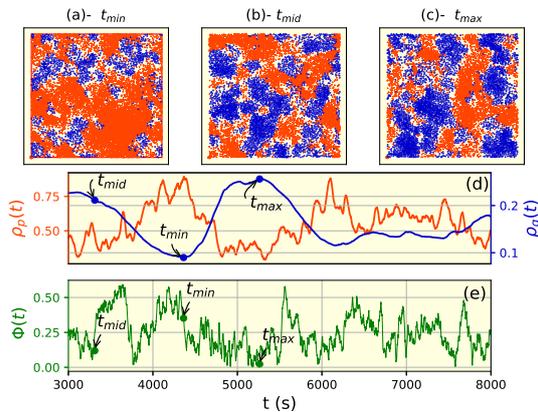
Le fait que l'espace des solutions est de dimension finie pour les EDO et infinie pour les EDP constitue une grande différence. Déjà, le théorème de Bolzano-Weirstrass qui stipule qu'un espace séquentiellement compact est un espace dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente. Ce théorème fondamentale n'est valable qu'en dimension finie et n'a pas d'équivalent en dimension infinie. D'autres part, dans un espace de dimension infinie, les normes ne sont pas équivalentes tandis qu'elles le sont dans un espace de dimension finie. Ceci implique que pour une EDO, si on montre que la solution n'explose pas pour une norme quelconque, alors on conclue que la solution n'explose pas pour toutes les normes; ce qui n'est pas le cas pour une EDP où chaque résultat n'est vraie que pour une norme donnée. Ainsi, le choix d'une norme fait partie du problème. En somme, les

	EDO	EDP
<b>Espace de solutions</b>	Espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^n$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Espace fonctionnel de dimension infinie $(L^p(\Omega), C^\infty(\Omega), \cdot, s)$
<b>Inconnues</b>	Une fonction à une variable	<ul style="list-style-type: none"> <li>— une fonction à plusieurs variables;</li> <li>— l'espace des solutions;</li> <li>— normes associées aux solutions.</li> </ul>

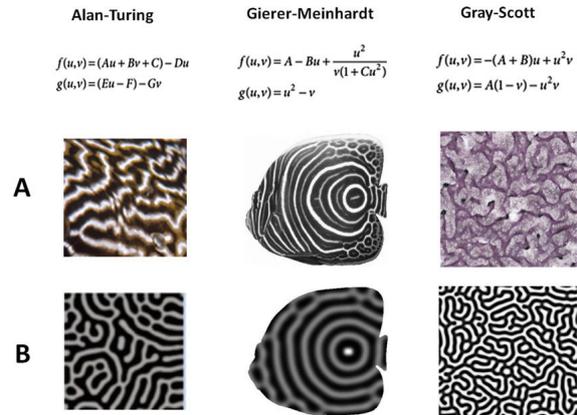
TABLEAU 3.1 – Principales différences entre EDO et EDP.

difficultés liées à la résolution des EDP ont conduit au développement des outils d'Analyse fonctionnelle dont les espaces de Sobolev. Nous allons brièvement décrire le système de **Convection-Reaction-Diffusion** avant d'esquisser les techniques de résolution à travers les cas simplifiés de ces équations.

### 3.1 Systèmes de Convection- Réaction-Diffusion



Modèle SPP de type proie-prédateur.



Motifs 2D de systèmes de réaction-diffusion :  
(A) Images réelles Vs Simulations (B) ©[53]

Si nous avons une certaine concentration (sel, encre, ...) dans un solvant, elle se propage grâce aux collisions intermoléculaires, c'est le processus de **diffusion**. Il y a deux lois empiriques qui régissent ce phénomène : les lois de Fick.

Soit  $\rho(t, \vec{r})$  la concentration localisée en  $\vec{r}$  au temps  $t$ , c'est le nombre de molécules (ou de masse) par unité de volume ( $Kg.m^{-3}$ )<sup>1</sup> ; les lois de Fick sont formulées ainsi :

**1<sup>ère</sup> loi de Fick** : La matière  $\rho(t, \vec{r})$  ne disparaît jamais, donc elle satisfait l'équation de la continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.1.1)$$

où  $\vec{j}$  est le flux de la substance par unité de surface par unité de temps ( $Kg.m^{-2}.s^{-1}$ );

**2<sup>ème</sup> loi de Fick** : le flux  $\vec{j}$  est dirigé toujours du lieu le plus concentré vers le lieu le moins concentré, ce qui s'interprète par l'équation :

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = -D(\rho, \vec{r}) \nabla \rho(t, \vec{r}), \quad (3.1.2)$$

où  $D(\rho, \vec{r})$  est le coefficient de diffusion<sup>2</sup> introduit pour équilibrer les dimensions ( $m^2.s^{-1}$ ).

En remplaçant  $\vec{j}$  dans l'équation (3.1.1), on aura :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\rho, \vec{r}) \nabla \rho]. \quad (3.1.3)$$

C'est l'équation de **diffusion**.

Si une force extérieure  $F(\rho, \vec{r}, t)$  agit sur le système, alors on parle d'équation de

1. C'est la masse volumique

2. Dans le cas où  $D(\rho, \vec{r}) = D$  est constant, on se retrouve avec l'équation de la *chaleur* :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho$

**Reaction-Diffusion :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\rho, \vec{r}) \nabla \rho] + F(\rho, \vec{r}, t). \quad (3.1.4)$$

De plus, en considérant le transport des particules sous l'effet de la vitesse de fluide  $v$ , le système devient du type **transport-reaction-diffusion** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\rho, \vec{r}) \nabla \rho] - (v \cdot \nabla) \rho + F(\rho, \vec{r}, t). \quad (3.1.5)$$

Selon le contexte, on peut coupler cette équation avec une autre régissant la dynamique du fluide<sup>3</sup> ou l'on peut supposer la moyenne de  $v$  comme une donnée. Notons que le terme de **transport**  $(v \cdot \nabla) \rho$  se confond avec le terme de **convection**  $(v \cdot \nabla) v$  quand il s'agit de la dynamique des fluides.

La résolution théorique de tels systèmes se fait en fixant des conditions initiales et aux bords et en utilisant les théories d'analyse fonctionnelle. Il faut noter qu'à cause de dérivée première en temps, le processus de diffusion est irréversible. Cela signifie techniquement que c'est une EDP parabolique.

## 3.2 Étapes de Résolution d'une EDP à travers des Exemples.

L'exemple classique d'une EDP du type **diffusion** est l'équation de Laplace dans un ouvert borné  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  :

$$\Delta u(x) = 0. \quad (3.2.1)$$

L'équation non-homogène correspondante (de Poisson) est  $\Delta u(x) = f$  où  $f$  est une fonction donnée. elle modélise la diffusion thermique stationnaire dans un matériel homogène. Elle décrit aussi le déplacement des membranes serrées ou la diffusion stationnaire de chaleur dans un matériel **isotrope**<sup>4</sup>. Elle apparaît aussi dans des problèmes électriques quand le champs de potentiel électrostatique satisfait l'équation de Poisson.

Soit  $\gamma$  la conductivité thermique d'un matériel occupant  $\Omega$ . Si le matériel est homogène et isotrope, alors  $\gamma$  est un scalaire.  $f$  représente la source de la chaleur et  $u = u(x)$  la température au point  $x \in \Omega$ . Le flux de la température est définie par :

$$q(x) = \gamma \nabla u(x). \quad (3.2.2)$$

Sa divergence représente le flux de densité qui est égale au source de la chaleur, d'où

$$-\gamma \Delta u(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.2.3)$$

3. Équation de Navier-Stokes ou d'Euler par exemple.

4. L'isotropie caractérise invariance des propriétés physiques d'un milieu dans toutes les directions.

Si le matériel inhomogène et non-isotrope , alors la conductivité devient un tenseur (champ matriciel) :

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Ainsi, la conduction thermique du matériel est décrite par une EDP du " type divergence "

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.2.4)$$

Cet exemple nous montre qu'un modèle donné change de forme en fonction des hypothèses retenues, cela affecte aussi les techniques de résolution. Ainsi, on retrouve dans la littérature plusieurs approches d'étude des EDP dont l'approche basée sur l'analyse fonctionnelle. Nous allons mettre en exergue la différence entre une EDO et une EDP puis élucidé progressivement cette approche à travers des exemples classiques.

### 3.2.1 Conditions aux bords, initiales & solution bien posée.

En général, une EDP admet une infinité de solutions si elles existent. L'unicité de la solution d'un problème physique peut être obtenue en ajoutant certaines **conditions aux bords**  $\partial\Omega$  dont les classiques sont :

1. conditions aux bords de Dirichlet : on fixe une valeur de l'inconnue  $u$  sur le bord  $\partial\Omega$  ;
2. conditions aux bords de Neumann : la dérivée normale de  $u$  définie par  $A\nabla u \cdot \nu$  est fixée sur le bord où  $\nu$  est la normale extérieur à  $\partial\Omega$  ;
3. conditions aux bords de Robin : c'est une combinaison des conditions du type Neumann et Dirichlet.

Il est clair que les conditions initiales et aux bords dépendent de la solution physique du problème essentiellement de l'ordre des équations. Ceci étant, si les conditions sont insuffisantes, une solution peut n'avoir aucune relation avec le problème physique. Par contre, s'il y a plusieurs conditions, l'équation peut ne pas admettre de solution. L'exemple suivant illustre un cas d'inexistence de solution. Soit le problème 1D suivant

$$\begin{cases} u'' + u = 0 & \text{Sur } [0, 2\pi], \\ u(0) = a \quad u(2\pi) = b. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Une solution analytique est de la forme :

$$u(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En tenant compte des conditions aux bords , on a  $u(0) = c_2 = a$  et  $u(2\pi) = c_2 = b$

d'où la solution n'existe pas si  $a \neq b$  et même en cas d'égalité, il n'y a pas unicité. Pour illustrer une fois de plus la non-unicité de solution, on a le problème suivant

$$\begin{cases} u'' = f & \text{Sur } [a, b], \\ u'(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Alors si  $u(x)$  est solution, il en est de même pour  $u(x) + \alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### 3.2.2 Consistance, Stabilité & Problème bien Posé

**Définition 3.2.1 (Consistance).** En général, un modèle linéaire est considéré comme **consistant**, si pour une configuration des données initiales et aux bords, il existe une et une seule solution.

**Définition 3.2.2 (Stabilité structurelle).** Comme les mesures de données physiques ne sont pas exactes, il est nécessaire de voir la réponse du modèle face aux petites variations de données. On dit qu'un système d'EDP est **structurellement stable**, si des petites variations n'engendrent que des petites variations sur les solutions.

**Définition 3.2.3 (Problème bien Posé).** Soit  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces de fonctions (de Banach) et considérons une EDP avec des conditions aux bords et aux limites. Soit  $f \in \mathcal{F}$  une fonction représentant les données. Le problème est dit **bien posé**, si on a les trois conditions suivantes

**existence :** pour tout  $f \in \mathcal{F}$ , il existe  $u \in \mathcal{U}$  solution du problème;

**unicité :** la solution est unique;

**stabilité :** l'application qui à tout  $f \in \mathcal{U}$  associe la solution  $u \in \mathcal{U}$  est continue.

**Remarque 3.2.1.** Tous les problèmes mathématiques ne sont pas structurellement stables. J. Hadamard (1865-1963) a donné une suite de problèmes où les données tendent vers zéro alors que les solutions s'envolent vers l'infini. Ce constat pousse Hadamard à formuler le concept de "Problème bien posé".

L'existence des solutions analytiques (ou explicites) est rare sauf dans quelques cas spéciaux où l'on peut réduire la dimension du problème ou quand on peut utiliser des techniques de transformations (Laplace, Fourier, Caractéristiques...). Tenant compte de cette difficulté même pour les équations les plus simples, alors il est important de montrer qu'un problème est bien posé; c'est-à-dire trouver des théorèmes d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions. Ceci permet de valider le modèle car s'il n'y a pas de solution, l'équation ne peut représenter un problème physique. Ces théorèmes permettent aussi de justifier l'utilisation des méthodes numériques pour donner une approximation des solutions.

### 3.3 Espaces Fonctionnelles.

L'objectif de cette section est de rappeler de façon détaillée certains espaces fonctionnelles que nous utilisons dans la résolution des EDP. Ils sont basés sur les espaces  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{V}$  d'énergie cinétique finie ( $L^2$ ) et d'ensrophie fini ( $\mathbf{H}^1$ ). Nous allons commencé par le concept de dualité dans ces espaces, puis on considère la topologie faible dans  $\mathbf{H}$  et on examine finalement les espaces-temps fonctionnelles ([20], Page 90).

#### 3.3.1 Théorème de Représentation de Riesz

Pour tout espace de Hilbert  $\mathbf{V}$  associé avec des conditions aux bords, on peut définir un espace dual correspondant  $\mathbf{V}'$  contenant toutes les applications linéaires définies sur  $\mathbf{V}$ . Nous pouvons le faire d'une manière semblable à la théorie des distributions ou généralisée les fonctions. Les fonctions de carrée intégrable sont identifiées comme des applications linéaires par le produit scalaire  $L^2$ . Ici, nous allons procéder de la même manière. Considérons l'ensemble de toutes les applications linéaires continues  $v \mapsto l(v)$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbb{R}$  (la continuité ici signifie qu'il existe une constante  $C$ , en fonction de la fonctionnelle, tel que  $|l(v)| \leq C\|v\|_{\mathbf{V}}$  pour tous les champs vectoriels  $v$  dans  $\mathbf{V}$ . Nous notons  $\mathbf{V}'$  l'ensemble de toutes les applications linéaires continues sur  $\mathbf{V}$ . Il s'agit d'un espace vectoriel normé muni de la norme :

$$\|l\|_{\mathbf{V}'} = \sup_{v \in \mathbf{V}, v \neq 0} \frac{|l(v)|}{\|v\|_{\mathbf{V}}}. \quad (3.3.1)$$

Le théorème de représentation de Riesz est un résultat simple mais puissant. Il stipule que tout espace de Hilbert  $\mathbf{V}$  est isomorphe à son dual ; c'est-à-dire qu'il existe une unique application linéaire  $\Lambda$  de  $\mathbf{V}$  sur son dual  $\mathbf{V}'$ . De plus, pour tout  $l$  dans  $\mathbf{V}'$  et  $u$  dans  $\mathbf{V}$  tel que  $\Lambda u = l$ , nous avons

$$(\Lambda u, v)_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = (u, v)_{\mathbf{V}} \quad \forall v \in \mathbf{V},$$

où  $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$  exprime la dualité entre  $\mathbf{V}'$  et  $\mathbf{V}$

#### 3.3.2 La paire $\mathbf{V}$ et $\mathbf{H}$

$\mathbf{V}$  est un sous-espace de l'espace de Sobolev  $\mathbf{H}^1(\Omega)^n$  (l'espace approprié de champs de vecteurs à ensrophie finie), et  $\mathbf{H}$  est la fermeture de  $\mathbf{V}$  dans  $L^2(\Omega)^n$ , l'espace des champs vectoriels de carrés intégrables. Par conséquent,

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H},$$

$\mathbf{V}$  est dense dans  $\mathbf{H}$ , et l'injection (enrobage) de  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbf{H}$  est continue. Si l'injection de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{H}$  est compacte, il est possible de définir un opérateur non-borné  $A$  dans  $\mathbf{H}$  (identique au  $\Lambda$  qui vient d'être décrit) dont l'inverse  $A^{-1}$  est compact dans  $\mathbf{H}$ . On peut aussi définir toutes les puissances  $A^s$  de  $A$ , puis  $\mathbf{V}, \mathbf{H}$ , et  $\mathbf{V}$  sont les mêmes que (isomorphes à) les domaines de  $A^{1/2}, I$  et  $A^{-1/2}$ , respectivement; en particulier, on obtient le triplet  $\mathbf{V}, \mathbf{H}, \mathbf{V}'$  comme dans (3.3.5). Ici, nous voulons présenter et décrire le triplet  $\mathbf{V}, \mathbf{H}, \mathbf{V}'$  par une méthode différente - celle qui s'étend au cas où l'injection de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{H}$  n'est pas compacte. On peut identifier l'espace  $\mathbf{H}$  avec un sous-espace de  $\mathbf{V}$ . En effet, étant donné un champ vectoriel  $u$  en  $\mathbf{H}$ , on peut considérer  $u$  comme une fonction linéaire en  $\mathbf{V}$  donnée par :

$$v \mapsto (u, v), \quad (3.3.2)$$

elle est continue sur  $\mathbf{V}$  car

$$|(u, v)| \leq |u|_{\mathbf{H}} |v|_{\mathbf{H}} \leq c_1 \|u\| \|v\|_{\mathbf{V}} \leq C_2 \|v\|_{\mathbf{V}},$$

pour des constantes (dimensionnelles) appropriées  $c_1, C_2 > 0$ , avec  $c_1$  indépendant de  $u$  et  $C_2$  dépendant de  $u$ ; ici, nous avons utilisé l'inégalité habituelle de Cauchy-Schwarz et le fait que la norme sur  $\mathbf{V}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$  domine la norme sur  $\mathbf{H}$ ,  $|\cdot|_{\mathbf{H}}$ . Plus précisément, dans le cas périodique à moyenne d'espace non-glissant, il découle de l'inégalité (5.15) et de la définition (3.3.1) de la double norme que :

$$\|u\|_{\mathbf{V}'} \leq L |u|_{\mathbf{H}}, \quad (3.3.3)$$

où  $L = \min\{L_1, \cdot, s, L_n\}$ . Dans le cas anti-glisse et dans le cas périodique avec moyenne d'espace nulle, il résulte désormais des inégalités (5.11) et (5.19) que :

$$\|u\|_{\mathbf{V}'} \leq \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} |u|_{\mathbf{H}}. \quad (3.3.4)$$

Puisque  $\mathbf{V}$  est dense dans  $\mathbf{H}$  et l'injection de  $\mathbf{V}$  vers  $\mathbf{H}$  est continue, on déduit par dualité que son adjoint de  $\mathbf{H}'$  vers  $\mathbf{V}'$  est continu avec une image dense. En identifiant davantage  $\mathbf{H}$  avec son dual  $\mathbf{H}'$ , nous en déduisons que :

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{V}', \quad (3.3.5)$$

où chaque espace est dense dans le suivant et les plongements sont continus. Avec cette identification à l'esprit, nous pouvons également considérer les éléments de  $\mathbf{V}'$  comme des champs vectoriel et les noter par les lettres usuelles  $u$  et  $v$ , bien qu'à proprement parler un élément de  $\mathbf{V}'$  n'est pas une fonction sur  $\Omega$  et n'a pas de sens point par point. On notera par  $(, v)_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$ , ou plus simplement  $(, v)$ , l'action

( $v$ ) d'un élément de  $\mathbf{V}'$  sur un élément  $v$  de  $\mathbf{V}$ . Cette notation est cohérente avec (3.3.2) lorsque  $l = u \in \mathbf{H}$ . Si  $l$  appartient à  $\mathbf{V}'$  mais pas à  $\mathbf{H}$ , alors le produit  $(,v)$  est appelé le produit de dualité entre  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}'$ , et c'est simplement l'application de la fonctionnelle linéaire  $u$  à  $v$ ; en général, il n'a pas de sens logique en tant que intégrale du produit de deux fonctions. Cependant, quand  $u$  est plus régulière (c'est-à-dire lorsque  $u \in \mathbf{H}$ ), cette application devient exactement le produit scalaire  $L^2$  entre  $u$  et  $v$ . Le produit de dualité peut être considéré comme une généralisation du produit  $L^2$  à des champs vectoriels moins réguliers  $u$  (appartenant à  $\mathbf{V}'$  mais pas à  $\mathbf{H}$ ) au détriment de  $v$  étant plus régulier (appartenant à  $\mathbf{V}$ ). Il est similaire à la situation dans la théorie des distributions, où, par exemple, le delta de Dirac n'est pas une fonction dans le sens classique. La norme dual d'un élément  $u$  dans  $\mathbf{V}$  peut être réécrite comme :

$$\|u\|_{\mathbf{V}'} = \sup_{v \in \mathbf{V}, v \neq 0} \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{\mathbf{V}}}, \quad (3.3.6)$$

et la forme généralisée suivante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable :

$$(u, v) \leq \|u\|_{\mathbf{V}'} \|v\|_{\mathbf{V}} \quad \forall u \in \mathbf{V}', v \in \mathbf{V}. \quad (3.3.7)$$

Pour chaque choix des conditions aux limites on obtient alors les espaces duales  $\mathbf{V}'_{nsp}, \mathbf{V}'_{per}$ . L'espace  $\mathbf{V}'$  est naturellement présent dans la théorie mathématique des ENS. La raison en est que, pour un flux  $u$  dans l'espace naturel  $\mathbf{V}$  d'entrophie finie, le terme inertiel  $(u \nabla)u$  n'appartient pas en général à  $\mathbf{H}$ ; il appartient plutôt au plus grand espace  $\mathbf{V}'$ .

Nous avons indiqué dans la section 6 que nous pouvons généralement identifier les espaces  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}'$  avec le domaine des puissances des opérateurs de Stokes,  $D(A)^{1/2}$  et  $D(A)^{-1/2}$ , respectivement. La seule exception est le cas périodique avec une moyenne d'espace non nulle, où certain ajustement est nécessaire car  $A$  est positif mais pas défini positif.

### 3.3.3 Topologie Faible dans les Espaces Normés

Dans un espace de Hilbert  $X$ , on peut définir une topologie (concept de convergence) plus faible que la topologie habituelle correspondant à la norme  $\|\cdot\|_X$ . On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$  dans  $X$  si, pour tout  $v$  dans  $X$ ,

$$(u_n, v) \longrightarrow (u, v) \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Afin de souligner la différence, nous disons parfois que  $u_n$  converge fortement vers  $u$  dans  $X$  si  $u_n$  converge vers  $u$  dans le sens habituel- ceci étant, si  $\|u_n - u\|_X \longrightarrow 0$ .

0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Il est facile de voir que  $(u_n)$  converge fortement vers  $u$  dans  $X$  si et seulement si  $u_n$  converge faiblement vers  $u$  dans  $X$  et  $\|u_n\|_X$  converge vers  $\|u\|_X$ .

Afin de visualiser le concept de convergence faible, on peut penser aux fonctions  $u_n = \sin(nx)$  dans  $X = L^2(0, 1)$ ; il est facile de voir que  $u_n$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2(0, 1)$  mais pas fortement.

Plus généralement, si  $X$  et  $X'$  sont deux espaces normés en dualité ( $X'$  dual de  $X$  dans le sens précité) alors on peut définir deux topologies différentes sur  $X$  :

1. celle de la norme,  $u_n \rightarrow u$  si et seulement si  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ;
2. la topologie faible notée  $\sigma(X, X')$ , pour laquelle  $u_n \rightarrow u$  si et seulement si, pour tout  $v$  dans  $X$ ,  $(u_n, v)_{X, X'} \rightarrow (u, v)_{X, X'}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Ce qui nous intéresse particulièrement dans cette section est la topologie faible de  $\mathbf{H}$ ; nous dénotons par  $\mathbf{H}_w$  l'espace  $\mathbf{H}$  doté de cette topologie faible. Cet espace est important car, en général, la continuité des solutions faibles des ENS tridimensionnel (voir(3.3.18)) est connu pour être atteint uniquement dans ce sens faible (c'est-à-dire dans l'espace (3.3.17)).

### 3.3.4 Espace de Fonctions du type espace-temps

Il est habituel et utile de considérer une fonction  $u = u(x, t)$  comme une fonction dépendante du temps  $u = u(t)$  avec des valeurs dans les espaces fonctionnels appropriés. Il y a plusieurs fonctions des espaces que l'on peut considérer; de plus, la fonction  $t \mapsto u(t)$  peut être continue, continûment différentiable, intégrable, de carré intégrable, etc., conduisant à plusieurs types d'espaces fonction espace-temps.

Afin de fixer la notation, nous considérons, par exemple, un espace de fonction  $X$ , qui pourrait être  $\mathbf{H}$ , ou  $\mathbf{V}$ , ou le domaine  $\mathbf{V}_{2s} = D(A^s)$  d'une puissance  $s \in \mathbb{R}$  de l'opérateur de Stokes  $A$ .

L'espace des fonctions continues sur un intervalle  $I$  et avec des valeurs dans  $X$  est noté par

$$\mathcal{C}(I, X). \quad (3.3.8)$$

Typiquement, l'intervalle  $I$  sera  $I = [0, T]$  ou  $(0, T)$  mais, plus généralement, il peut être tout intervalle avec les points finaux  $a$  et  $b$ ,  $-\infty \leq a, b \leq +\infty$ , et il peut être soit ouvert ou fermé à  $a$  ou  $b$ . La norme en  $\mathcal{C}(I, X)$  est considérée comme le maximum de la Norme  $X$  sur  $I$ , sauf indication contraire.

On peut également travailler avec des espaces de fonctions intégrables. Pour les fonctions définies sur un intervalle  $I$  avec les extrémités  $a$  et  $b$  ( $-\infty \leq a, b \leq +\infty$ ), on peut considérer l'espace :

$$L^p(a, b; X) \quad \text{ou} \quad L^p(I; X) \quad (3.3.9)$$

des fonctions dont la norme  $X$  de puissance  $p^{\text{ième}}$  intégrable sur  $I$ , avec  $p \geq 1$ . Dans ce cas, les fonctions sont définies presque partout, donc cela ne fait aucune différence que  $I$  soit ouvert ou fermé. Par conséquent, il a été une convention pour désigner cet espace par  $L^p(a, b; X)$  au lieu de  $L^p((a, b), X)$  ou  $L^p([a, b]; X)$ . La norme dans cet espace est :

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left( \int_a^b |u(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.3.10)$$

où nous désignons la norme de  $X$  par  $|\cdot|_X$ . Les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder (A.1.1) tiennent à ces espaces exactement comme dans le cas de la valeur réelle, tant que  $p \geq 1$ . les espaces  $L^p(a, b; X)$  sont des espaces de Banach, c'est-à-dire des espaces normés complets.

Comme dans le cas réel, lorsque  $p = 2$  on obtient un espace de Hilbert  $L^2(a, b; X)$  avec le produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} = \int_a^b (u(t), v(t))_X dt. \quad (3.3.11)$$

Encore une fois, nous avons noté le produit scalaire dans  $X$  par  $(\cdot, \cdot)_X$ .

Pour  $p = \infty$ , on note par :

$$L^\infty(a, b; X) \quad \text{ou} \quad L^\infty(I; X) \quad (3.3.12)$$

l'espace des fonctions essentiellement bornées de  $I$  à valeurs dans  $X$  (c'est-à-dire borné uniformément sauf éventuellement sur un ensemble de mesure zéro). Nous munissons cet espace avec la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t \in [a,b]} \text{ess.} |u(t)|_X, \quad (3.3.13)$$

ici, «sup.ess». désigne le supremum essentiel (comme dans le cas des fonctions à valeur réelle). Par conséquent,  $|u(t)|_X$  est bornée par sa norme  $L^\infty(a, b; X)$ , sauf éventuellement sur un sous-ensemble de  $[a, b]$  de la mesure nulle.

Pour tous ces espaces  $L^p$ , si l'intervalle  $I$  est infini alors il y a un espace «local» correspondant

$$L_{\text{loc}}^p(a, b; X) \quad \text{ou} \quad L_{\text{loc}}^p(I; X), \quad (3.3.14)$$

qui est l'espace des fonctions qui sont localement dans  $L^p$  dans le sens où elles appartiennent à  $L^p(J; X)$  pour chaque sous-intervalle borné  $J$  de  $I$ . Cet espace a une métrique (mais pas une norme) en vertu de laquelle il est complet, mais nous ne travaillerons pas explicitement avec. Une fonction constante non nulle, par exemple, appartient à  $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}; X)$  pour tout  $p \geq 1$ , mais pas à  $L^p(\mathbb{R}; X)$ . Typiquement, les solutions des ENS appartiennent à  $L_{\text{loc}}^2(0, \infty; V)$  mais pas à  $L^2(0, \infty; V)$ , car ils ne

peuvent pas décroître vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Le produit de dualité entre  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}'$  se transmet aux espaces de fonction espace-temps. Le produit de dualité entre  $L^2(a, b; \mathbf{V})$  et  $L^2(a, b; \mathbf{V}')$  se lit :

$$\int_a^b (u(t), v(t)) dt, \quad (3.3.15)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cet espace prend la forme :

$$\left| \int_a^b (u(t), v(t)) dt \right| \leq \left( \int_a^b |u(t)|_{\mathbf{V}'}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |v(t)|_{\mathbf{V}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.16)$$

De façon similaire, pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^{p'}(a, b; \mathbf{V}_{-s})$  est l'espace dual de  $L^p(a, b; \mathbf{V}_s)$  où  $1/p + 1/p' = 1$ . Un autre espace utile est celui des fonctions continues avec des valeurs dans  $X = \mathbf{H}_w$ , où on rappelle que  $\mathbf{H}_w$  est l'espace  $\mathbf{H}$  muni de sa faible topologie. Cela conduit à l'espace :

$$\mathcal{C}(I, \mathbf{H}_w), \quad (3.3.17)$$

qui est l'espace des fonctions faiblement continues de  $I$  à  $\mathbf{H}$ . Les fonctions sur cet espace sont faiblement continu dans le sens où, pour chaque champ vectoriel  $v$  dans  $\mathbf{H}$ , la fonction

$$t \mapsto (u(t), v)_H, \quad (3.3.18)$$

est continue de l'intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . C'est un espace qui se produit naturellement lorsque nous travaillons avec les solutions faibles des équations de Navier-Stokes. En règle générale, une solution faible de ENS en dimension 3 appartient à  $\mathcal{C}([0, \infty); \mathbf{H}_w)$ .

### 3.4 Étude de EDP Elliptique & Équation de Navier Stokes (ENS)

**Définition 3.4.1 (Domaine Lipschitzien).** Le domaine  $\Omega$  est dit **Lipschitzien** s'il existe une famille finie de boules ouvertes  $\{B_i\}_{i=1, \dots, n}$  telle que  $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^n B_i$  et sur chaque  $B_i$ , il existe un système de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  et une fonction  $\Psi_i$  lipschitzienne telle que :

$$\Omega \cap B_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in B_i : x_d < \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})\}$$

Si les  $\Phi_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^m$  et leurs dérivées partielles d'ordre  $m$  sont lipschitziennes, on dira que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^{m,1}$

Intuitivement, cela signifie que la frontière de  $\Omega$  peut-être vue localement

comme le graphe d'une fonction lipschitzienne. Les polygones en dimension 2 et presque tous les polyèdres en dimension 3 sont lipschitziennes. Les domaines non-lipschitzien sont ceux dont la frontière représente un point de rebroussement ou une fissure rentrant dans le domaine.

### 3.4.1 Étude d'une EDP Elliptique

Considérons l'EDP elliptique suivante

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Il s'agit d'une EDP elliptique avec conditions aux bords de Dirichlet où  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  et  $f \in L^2(\Omega)$ .

Nous allons voir que ceci requiert que les coefficients et les données soient suffisamment régulières (même  $f$  continue et  $\Omega$  une boule ne suffit pas, des inégalités de continuité du type Hölder sont sollicitées). Le bord du domaine doit être lisse sinon, il existe des contre-exemples de non-existence. Les solutions ainsi obtenues sont appelées **solutions classiques**. On fait l'hypothèse que  $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est un champ de matrice **uniformément elliptique** dans  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$  avec  $0 < \alpha \beta$  i.e :

$$\begin{cases} (A(y)\lambda, \lambda) \geq \alpha \|\lambda\|^2 \\ \|A(y)\lambda\| \leq \beta \|\lambda\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.4.2)$$

#### Concept de Solution Faible

On introduit la notion de **solution faible** comme :

- (i) les dérivées sont prises au sens des distributions (ou sens faible);
- (ii) les solutions sont définies dans des espaces fonctionnelles (espaces de Sobolev en général);
- (iii) la solution satisfait une forme faible de l'équation : c'est la **forme variationnelle** obtenue en intégrant l'équation originale après l'avoir multipliée par une **fonction test**.

Pour illustrer la nécessité d'utilisation des espaces fonctionnelles, considérons le problème 1D dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.4.3)$$

où  $c, f \in C^0([0, 1])$ ,  $C \geq 0$ .

Soit l'espace

$$V = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Il est établi que  $V$  est dense dans  $L^2(0,1)$ ; soit l'opérateur  $A$  définie par :

$$\begin{aligned} A : \mathcal{C}^2([0,1]) \cap V &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0,1]) \\ u &\longmapsto (Au)(x) = -u''(x) + c(x)u(x). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

On a le théorème suivant

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $c, f \in \mathcal{C}^0([0,1])$  et  $c \geq 0$ , alors une fonction  $u \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap V$  est une solution de (3.4.3) si et seulement si  $u$  est une solution du problème variationnel suivant :*

$$\int_0^1 (u'v' + cuv)dx = \int_0^1 fvdx \quad \forall v \in V \quad (3.4.5)$$

*Démonstration.* Si  $u \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap V$ ,  $c, f \in \mathcal{C}^0([0,1])$  alors par intégration par parties, on vérifie (3.4.5). Réciproquement, supposons que (3.4.5) est vraie et  $u \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap V$ , alors en remontant l'intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 (-u'' + cu - f)vdx = 0 \quad \forall v \in V \quad (3.4.6)$$

Comme  $V$  est dense dans  $L^2(0,1)$ , on a :

$$\int_0^1 (-u'' + cu - f)vdx = 0 \quad \forall v \in L^2(0,1) \quad (3.4.7)$$

Cela veut dire que  $\phi = -u'' + cu - f \in L^2(0,1)$  et satisfaisant le produit scalaire  $\langle \phi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in L^2(0,1)$ . Comme  $L^2(0,1)$  est un espace de Hilbert,  $\langle \phi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in L^2(0,1) \Rightarrow \phi = 0$  i.e  $-u'' + cu - f = 0$  p.p dans  $(0,1)$ .

Comme  $\phi$  est continue, alors  $\phi(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ . Ainsi,  $u$  satisfait l'équation (3.4.3). En plus,  $u \in V$  i.e  $u$  satisfait les conditions aux bords. ■

### 3.4.2 Sur Les Équations de Navier-Stokes



Formation de nuages.



Écoulement dans fleuve et océan :  
Saint-Louis du Sénégal vue du ciel.



Écoulement d'un gaz ( $\text{CO}_2$ )

En observant les différents types d'écoulement, on remarque intuitivement que ce phénomène physique fait intervenir plusieurs grandeurs spatio-temporels (vitesse, pression et autres forces). Ces grandeurs agissent à des niveaux d'échelle différentes. Peut-on développer un modèle mathématique pour décrire ce phénomène complexe ?

La réponse à cette question a fait l'objet d'une étude qui remonte à la Grèce antique ; avec Archimède (287-212 Avant J.C), il s'intéressa particulièrement au comportement d'un solide immergé dans un fluide et découvrit ainsi la force de poussé. Quelques temps après, Héron d'Alexandrie (10 -70) étudia la pression des gaz. Il construit des machines à vapeur et des automates de théâtre. C'est au xv<sup>e</sup> siècle que Leonardo da Vinci (1452- 1519) fait une classification des écoulements (jets, tourbillons, ondes de surface etc.) et formule le principe de conservation de la masse. Avec le développement des mathématiques au xvi<sup>e</sup> siècle , les lois de la physique commencent à être formaliser sous forme d'équations. C'est ainsi qu'en 1738, Daniel Bernoulli étudia les fluides non visqueux, fondant son analyse sur la conservation de l'énergie. Un intérêt particulier est porté sur les fluides à cette époque car en 1748, l'Académie des Sciences de Berlin propose le prix des Mathématiques pour l'année 1750 sur le sujet : "*Déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide.*"

Un an après, Jean d'Alembert soumet un manuscrit qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique. L'Académie, sous la direction d'Euler lui refusa le prix et l'attribuait à Jacques Adami. Cependant, l'histoire retient la contribution de d'Alembert, c'est un modèle issue de la notion des dérivées partielles et de champs de vitesse mais sans la notion de pression qui s'avère être importante dans la compréhension de la dynamique des fluides. Peu après, en 1755, l'incontournable mathématicien Suisse Euler propose un modèle décrivant l'écoulement des fluides parfaits<sup>5</sup>. Les Équations d'Euler renferment jusqu'à nos jours des problèmes ouverts. Elles ont fait l'objet d'une absurdité physique connu comme le "*Paradoxe de d'Alembert*". C'est au xix<sup>e</sup> siècle que le "*Paradoxe de d'Alembert*" fut levé quand le mathématicien et ingénieur des ponts Henri Navier [41] et le physicien George Stokes [56] formulent indépendamment un modèle décrivant l'écoulement des fluides visqueux. Ce sont des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) non linéaires dites Équations de Navier-Stokes.

Tenant compte de ces caractérisations physiques, une formulation mathéma-

---

5. Ce sont des fluides dont les interactions entre leurs éléments sont négligeables. Techniquement, ce sont des fluides non visqueux.

tiques des ENS Incompressibles est donnée par (3.4.8 -3.4.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = f; \quad (3.4.8)$$

$$\nabla \cdot u = 0; \quad (3.4.9)$$

Avec les conditions aux bords périodiques et initiales,  $\Omega = [0, L]^3$ .

Le système (3.4.8 - 3.4.9) modélise l'écoulement d'un fluide incompressible.

$u = (u_1, u_2, u_3)$  est la vitesse du fluide,  $\rho_0$  la densité et  $p$  la pression. La première équation traduit la conservation du moment. Elle est dû à l'application du deuxième loi de Newton. Les inconnues sont les trois composantes de la vitesse  $u$  et la pression  $p$ . La deuxième équation traduit la condition d'incompressibilité, c'est-à-dire la divergence de la vitesse est nulle.  $f$  est la résultante des forces responsable de l'écoulement. Du point de vue mathématique, cette force provient d'un couplage avec d'autres grandeurs physiques par exemple les équations de Rayleigh Bernard convectives ou approximation de Boussinesq :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + f_c \cdot e_3 \wedge u = gT e_3; \quad (3.4.10)$$

$$\nabla \cdot u = 0; \quad (3.4.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T + (u \cdot \nabla)T = 0. \quad (3.4.12)$$

Ce sont les équations de Navier-Stokes couplées avec celle de la chaleur. L'équation (3.4.10) est la conservation du moment à l'échelle planétaire.

$f_c \cdot e_3 \wedge u$  est la force de Coriolis et  $gT e_3$  représente le transfert de chaleur (de la terre vers l'atmosphère). l'équation (3.4.12) modélise la diffusion et le transport de la chaleur ( $\kappa$  est le coefficient de diffusion).

Ainsi, les équations de Navier-Stokes sont en générale couplées avec d'autres équations. Il faut noter que l'étude qualitatif des équations de Navier-Stokes couplées ou non revient à la même chose ; on peut donc se concentrer uniquement sur l'étude des ENS et exporter par analogie, les résultats aux autres cas.

Il faut remarquer que les ENS sont des EDP non linéaires. Cette non-linéarité, dû au terme de convection  $(u \cdot \nabla)u$  rend l'étude mathématique difficile.

**Espaces de Sobolev** Nous allons introduire ici l'espace de sobolev dans le cas des conditions aux bords périodiques ( $\Omega = [0, L]^3$ ).

$$H^s(\Omega) = \left\{ \phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{\phi}_k e^{ik \cdot x \frac{2\pi}{L}} \text{ telles que } \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\phi}_k|^2 (1 + |k|^2)^s < \infty \right\} \quad (3.4.13)$$

C'est l'espace des fonctions périodiques telles que le coefficient de Fourier  $|\hat{\phi}_k|^2$  décroît plus vite que  $(1 + |k|^2)^s$ . Ce qui signifie que si  $s$  est assez grand,  $|\hat{\phi}_k|^2$  doit décroître plus vite pour que la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\phi}_k|^2 (1 + |k|^2)^s$  converge.

Noter que les espaces de Sobolev sont variés mais la famille  $H^s(\Omega)$  est particulièrement un espace de Hilbert. ce qui donne la latitude d'utiliser plusieurs outils et résultats d'analyse fonctionnelle.

**Conditions aux bords :** pour décrire complètement le mouvement d'un fluide, on a besoin de savoir en plus de l'équation générale décrivant le mouvement du fluide 3.4.8 - 3.4.9, le comportement des quantités physiques (vitesse, pression, etc.) aux bords du domaine rempli par le fluide : Ce sont les **CONDITIONS AUX BORDS**.

**Cas d'un mur rigide :** si le bord est matérialisé (fermé) et fixé dans un référentiel Galiléen, le fluide ne peut traverser le bord, ceci peut être exprimé par la condition cinématique :

$$u \cdot n = 0, \quad \forall x \in [0, T] \times \Gamma. \quad (3.4.14)$$

Quand le fluide est visqueux, il ne peut glisser le long du bord ; ainsi la vitesse de la particule fluide occupant la position  $x$  à l'instant  $t$  est la même vitesse  $g(x, y)$  de l'élément de bord.

$$u(t, x) = g(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma. \quad (3.4.15)$$

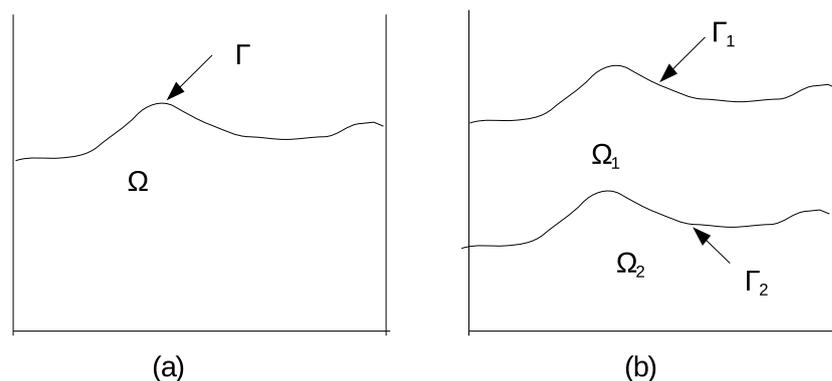
©V<sup>3</sup>

FIGURE 3.4.1

**Cas d'un bord ouvert (non matérialisé) :** On considère un élément de bord ouvert  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  3.4.1 , dans ce cas une condition au bord peut être :

$$u \cdot n = v \cdot n, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \Gamma \quad (3.4.16)$$

### Bref aperçu sur l'analyse des Équations de Navier-Stokes

Rappelons que le système principal des ENS est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = f; \quad (3.4.17)$$

$$\nabla \cdot u = 0; \quad (3.4.18)$$

avec les conditions aux bords périodiques et initiales,  $\Omega = [0, L]^3$ .

Nous allons faire des calculs formels pour voir très rapidement les enjeux impliquant l'étude des ENS. C'est-à-dire, l'existence et l'unicité des solutions; les espaces sur lesquels ces solutions sont définies; les différentes normes qui y interviennent etc.

- On suppose que  $\rho_0 = 1$ ;
- on note  $\langle \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi(x) dx$ , la moyenne de la fonction  $\phi$ ;
- on observe que si  $\langle u_0 \rangle = \langle f \rangle = 0$  alors  $\langle u \rangle = 0$ ;
- on utilise l'inégalité de Poincaré pour tout  $\phi \in H^1(\Omega)$  avec  $\langle \phi \rangle = 0$  on a :  

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq CL \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}$$

**Remarque 3.4.1.** L'inégalité de Poincaré n'est pas vraie pour toute fonction  $\phi \in H^1(\Omega)$  car si  $\phi$  est constante, il y a une contradiction. Tout de même, l'unique fonction constante dont la moyenne est nulle c'est la fonction nulle et l'inégalité a un sens dans ce cas.

**Estimation formelle de l'énergie et solution faible :** en multipliant l'équation Eq. 3.4.17 par  $u$  (produit scalaire) et en intégrant sur  $\Omega$ , on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot u dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot u dx = \int_{\Omega} f \cdot u dx. \quad (3.4.19)$$

En utilisant quelques techniques d'intégration (formule de divergence, intégration par parties) et en tenant compte de l'incompressibilité  $\nabla \cdot u = 0$ , on a alors :

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla)u \cdot u dx = \int_{\Omega} \nabla p \cdot u dx = 0.$$

Et ensuite,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (f, u), \quad (3.4.20)$$

où  $(f, u) = \int_{\Omega} f \cdot u dx$

**Remarque 3.4.2.** La formule Eq.3.4.20 est formelle, car en 3-dimension, sa justification reste un problème ouvert.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de Poincaré on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq CL \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.4.21)$$

Par les inégalités de Young on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{CL^2}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.4.22)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{CL^2}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.4.23)$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, on aura :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{-\frac{\nu C}{L^2} t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{CL^4}{\nu^2} (1 - e^{-\frac{\nu C}{L^2} t}) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.4.24)$$

Ceci montre que l'énergie cinétique du fluide est finie  $\forall t \in [0, T]$ . On peut aussi voir un autre résultat en intégrant l'équation 3.4.23 sur  $[0, T]$ .

$$\nu \int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq K(L, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \|f\|, \nu, T). \quad (3.4.25)$$

Ainsi, nous avons deux normes qui sont infinies, le maximum en temps de  $L^2(\Omega)$  et la moyenne en temps du norme gradient sur l'espace. Comme les normes ne sont pas équivalentes en dimension infinie, toute estimation a priori (comme dans Eq.3.4.24 et Eq.3.4.25) joue un rôle très important. Ces types d'estimations ont permis à Jean Leray de formuler l'un des résultats majeur sur les ENS.

**Théorème 3.4.2.** *Pour tout  $T > 0$ , il existe une solution faible<sup>6</sup> (au sens de distribution) des Équations de Navier-Stokes 3D qui satisfait :*

$$u \in C_w(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.4.26)$$

**Remarque 3.4.3.** Leray a introduit le concept de solution faible sans lui donner une caractérisation rigoureuse. C'est deux décennies plus tard (vers 1950) que la solution faible a eu un sens grâce à la théorie de distribution de Laurent Schwartz [52].

**Remarque 3.4.4.** La question de l'unicité de solution faible pour les ENS 3D demeure un problème ouvert. Tout de même, J. Leray a formuler l'hypothèse que l'unicité de la solution est intimement liée au phénomène de la turbulence. Ce phénomène est un autre aspect des ENS et fait l'objet des divers théories physiques comme mathématiques.

6. Appelée « solution turbulente » par J. Leray

**Solution forte des Équations de Navier-Stokes.**

$$u \in C(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)). \quad (3.4.27)$$

Nous aurons besoin de regarder  $\nabla u$  et voir si c'est une fonction continue ou bornée.

**Estimation de l'« enstrophie » (Enstrophy)**

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \equiv \|\nabla \times u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.4.28)$$

car  $\nabla \cdot u = 0$  et l'estimation formelle de l'« enstrophie » est :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot (-\Delta u) dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot (-\Delta u) dx = \int_{\Omega} f \cdot (-\Delta u) dx. \quad (3.4.29)$$

On observe que

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot (-\Delta u) dx = 0, \quad (3.4.30)$$

en effet,

$$I = \int_{\Omega} \nabla p \cdot (-\Delta u) dx = - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} dx = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} dx,$$

$$I = - \sum_{i,j=1}^3 \left[ - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\sigma \right],$$

$$I = \sum_{i,j=1}^3 \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\sigma \right],$$

$$I = \sum_{i,j=1}^3 \left[ - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\sigma \right],$$

$$I = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot u) dx + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\sigma.$$

Comme  $\nabla \cdot u = 0$  et  $\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\sigma = 0$  (à justifier), alors

$I = \int_{\Omega} \nabla p \cdot (-\Delta u) dx = 0$ .  $\square$  D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz puis celle de Young on a :

$$\left| \int_{\Omega} f \cdot (-\Delta u) dx \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\nu}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{2}} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{4} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder pour le terme non linéaire on a :

$$\left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot (-\Delta u) dx \right| \leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \cdot \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},$$

mais comme il est plus commode d'utiliser les espaces de Hilbert que ceux de Banach, on cherche à changer les normes  $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}$  en normes  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ . Cela est possible grâce aux inégalités d'interpolation de Ladyzhenskaya.

**Proposition 3.4.1** (Inégalité d'interpolation de Ladyzhenskaya).

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad 2D; \quad (3.4.31)$$

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \quad 3D. \quad (3.4.32)$$

**Remarque 3.4.5.** La différence entre les ENS-3D et 2D peut s'expliquer par cette inégalité d'interpolation. Car on cherche à contrôler la norme du gradient donc, plus la puissance est petite, plus la fonction est régulière. Ce qui n'est pas le cas en 3D.

Posons  $y(t) = e_0 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

Dans le cas 2D,  $y(t)$  satisfait l'inégalité de Riccati-Tarlov

$$\frac{dy}{dt} \leq C y(t)^2 \quad \text{et} \quad \int_0^T y(s) ds \leq K(T),$$

$$\Rightarrow y(t) \leq \tilde{K}(T).$$

Ainsi, toute solution forte des ENS-2D est globalement régulière. En conclusion, on a :

- existence globale et unicité des solutions faibles et fortes;
- un attracteur globale de dimension finie.

Dans le cas 3D, On peut montrer que :

$$\frac{dy}{dt} \leq C (\|\nabla u\|_{L^6(\Omega)}^4 + e_0^2) y(t),$$

ce qui donne d'après le lemme de Gronwall :

$$y(t) \leq y(0) e^{C \int_0^t (\|\nabla u(s)\|_{L^6(\Omega)}^4 + e_0^2) ds}.$$

Ainsi, la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  du gradient reste finie si  $\int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^6(\Omega)}^4 ds$  est finie? C'est une question ouverte dont la réponse peut valoir un million de dollar (mis en jeu par Clay Mathematical Institute).

### 3.5 Résolution numérique des Équations de Diffusion.

L'équation de diffusion 2D est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.5.1)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion. Une solution numérique simple dans le domaine carré ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ) est d'approximer  $u(t, x, y)$  par la fonction discrète  $u_{i,j}^{(n)}$  où  $x = i\Delta x$ ,  $y = j\Delta y$  et  $t = n\Delta t$ . En appliquant une méthode de différence fini à droite en temps et centré en espace, on a :

$$\frac{u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j}^{(n)}}{\Delta t} = D \left( \frac{u_{i+1,j}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}}{(\Delta y)^2} \right). \quad (3.5.2)$$

Ainsi, l'état du système au temps  $n + 1$ ,  $u_{i,j}^{(n+1)}$  peut être calculé de l'état précédent  $u_{i,j}^{(n)}$  selon l'équation :

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + D\Delta t \left( \frac{u_{i+1,j}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}}{(\Delta y)^2} \right). \quad (3.5.3)$$

En considérant une plaque métallique avec température initiale  $T_{cold}$  hormis un disque de taille spécifique avec  $T_{hot}$  comme température. On suppose que le bord de la plaque est fixé à  $T_{Cool}$ . On peut montrer que le pas de temps maximum  $\Delta t$  qu'on peut utiliser pour le processus reste stable est :

$$\Delta t = \frac{1}{2D} \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (3.5.4)$$

(Voir le code `Diffusion_equation_2D.py`).

## Conclusion

Bref, nous évoquons succinctement quelques aspects de la théorie des EDP, hormis les définitions et les propriétés générales, les résultats sur les espaces fonctionnelles et les solutions faibles se calquent sur les cas des ENS. Il s'agit ici notamment des espaces  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{H}$  dont la topologie faible est introduite comme une simple technicité commandée par les limites actuels dans la compréhension de la théorie de ces équations. On suppose que des meilleurs théorèmes seront dérivés, ceux pour lesquels un tel concept n'est plus nécessaire.

*Selfie, semblant de curiosité et d'admiration de soi.  
Transgresse la beauté en un portrait, la diffusion en sera  
comblée.*

---

Sonia Lahsaini

## CHAPITRE 4

---

# MODÈLE NPZ COUPLÉ AVEC UN SYSTÈME DE CONVECTION-DIFFUSION

### Sommaire du présent chapitre

---

<b>Introduction</b>	<b>79</b>
<b>4.1 Matériels &amp; Méthodes</b>	<b>80</b>
<b>4.2 Résultats</b>	<b>90</b>
<b>4.3 Discussion</b>	<b>95</b>
<b>Conclusion</b>	<b>96</b>

---

**Résumé 4.0.1.** Partant d'un modèle *NPZ* où les interactions entre nutriments, phytoplancton et zooplancton sont simulées par un système d'EDO; nous l'avons reformulé en prenant en compte l'effet transport-diffusion. Nous avons utilisé l'approche des EDP pour incorporer cela. Nous avons examiné l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant la théorie de Sobolev, la méthode de la Faedo-Galerkin [30] et les estimations a priori.

## Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons uniquement étudié la dynamique d'évolution en fonction des nutriments, des phytoplanctons et des zooplanctons. Or il est bien connu que dans certaines situations, on observe une diffusion dans l'espace de ces éléments de la chaîne trophique. A titre d'exemples, les nutriments peuvent être déplacés sous l'effet des courants marins et les zooplanctons se déplacent très souvent pour chasser et se nourrir. Les modes de déplacement sont très variables

chez les différentes espèces de zooplancton. La majorité des espèces migrent à la verticale durant journée. Le jour, elles occupent les eaux plus profondes du lac afin d'éviter d'être repérées par les prédateurs. La nuit, elles remontent vers la surface de l'eau pour se nourrir du phytoplancton présent dans la couche supérieure. Nous proposons dans ce chapitre un modèle de transport-diffusion régissant la dynamique de nutriments, phytoplanctons et zooplanctons afin de tenir compte des déplacements de ces derniers, cette partie est une extension du modèle d'EDO développé au Chapitre 2 et où nous allons tenir compte des possibles déplacements.

## 4.1 Matériels & Méthodes

### 4.1.1 Modèle & Notations

Nous nous sommes concentrés sur un morceau de côte océanique (atlantique) le long de l'Afrique de l'Ouest, ainsi notre domaine d'étude est défini comme un ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ressemblant à un parallélépipède rectangle muni d'un référentiel cartésien  $(\mathcal{O}, e_1, e_2, e_3)$  dont les bords sont caractérisés par les définitions et notations suivantes : **surface**  $\Gamma_s$ , la face horizontale supérieure ; **fond**  $\Gamma_f$ , le fond ; **côte**  $\Gamma_c$ , la face verticale vers l'Est ; **flanc ouest**  $\Gamma_{fo}$ , la face verticale vers l'Ouest (au large) ; **flanc nord**  $\Gamma_{fn}$ , la face verticale vers le Nord et **flanc sud**  $\Gamma_{fs}$ , la face verticale vers le Sud (Voir Figure-4.1.1a ).

Nous avons muni l'espace du repère cartésien  $(\mathcal{O}, e_1, e_2, e_3)$  de sorte que  $e_1$  pointe vers l'Est (cross-shore),  $e_2$  vers le Nord (alongshore) et  $e_3$  vers le haut. Son origine est l'intersection entre la surface, la côte et le flanc sud. En somme,  $\Omega$  est formellement égal à

$$\Omega = [-l; \Psi_c(x_2, x_3)] \times \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right] \times [-H; \Psi_s(x_1, x_2, u)], \quad (4.1.1)$$

où  $l$ ,  $L$  et  $H$  désignent respectivement les échelles Ouest-Est, Sud-Nord et Fond-Surface. La fonction  $\Psi_c(x_2, x_3)$  représente la topographie de la côte ; elle n'est pas déterminée explicitement ici car son caractère implicite est suffisant pour la modélisation. Cependant, elle doit être précisée pour une éventuelle simulation numérique en supposant par exemple  $\Psi_c(x_2, x_3) = 0$  ; c'est le cas d'une côte plate et verticale. Comme  $\Psi_c$ , la fonction  $\Psi_s(x_1, x_2, u)$  représente la topographie de la surface. Elle dépend de la vitesse de l'eau ( $u$ ) et des coordonnées spatiales  $(x_1, x_2)$  ; elle ne peut être caractérisée de façon réaliste car la détermination de l'inconnue  $u$  dépend a fortiori du domaine  $\Omega$ . Remarquons que la définition du repère  $(\mathcal{O}, e_1, e_2, e_3)$  impose aux fonctions  $\Psi_s$  et  $\Psi_c$  les conditions  $\sup \Psi_s(x_1, x_2, u) \leq 0$  et  $\sup \Psi_c(x_2, x_3) \leq 0$ .

Les éléments de frontière du domaine  $\Omega$  définis ci-dessus sont décrits par les

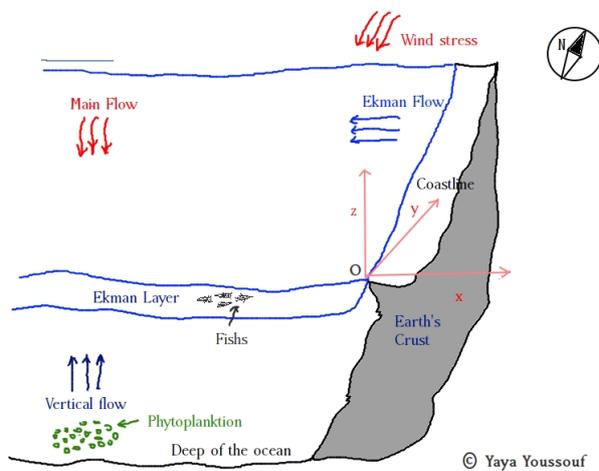
ensembles suivants :

$$\begin{aligned}\Gamma_s &= \{x \in \Omega, x_3 = \Psi_s(x_1, x_2, u)\}, & \Gamma_f &= \{x \in \Omega, x_3 = -H\}, \\ \Gamma_c &= \{x \in \Omega, x_1 = \Psi_c(x_2, x_3)\}, & \Gamma_{fo} &= \{x \in \Omega, x_1 = -l\}, \\ \Gamma_{fn} &= \{x \in \Omega, x_2 = \frac{l}{2}\}, & \Gamma_{fs} &= \{x \in \Omega, x_2 = -\frac{l}{2}\}.\end{aligned}\quad (4.1.2)$$

Ainsi, nous avons défini le bord de  $\Omega$  comme l'union de ces ensembles et l'avons noté  $\Gamma^1$ .

$$\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c \cup \Gamma_{fo} \cup \Gamma_{fn} \cup \Gamma_{fs}.$$

En supposant que les nutriments ( $n$ ), les phytoplanctons ( $p$ ) et les zooplanctons ( $z$ )



(a) Conception du domaine  $\Omega$ , une portion de la côte océanique (atlantique) le long de l'Afrique de l'Ouest. Le triplet  $(x, y, z)$  est aussi noté  $(x_1, x_2, x_3)$ ;  $U_E$  est la vitesse d'Ekman.

Paramètre	Description
$S$	Intensité d'Upwelling
$\beta$	Taux de conversion de pâturage (prédation)
$\gamma$	Coefficient de pâturage
$\alpha$	Taux d'attaque des zooplanctons
$h = \frac{\eta}{\alpha}$	Temps moyen de manipulation
$k_1$	Constante de mi-saturation pour recrutement des nutriments
$\mu_1$	Efficacité de régénération des nutriments
$\mu_2$	Taux de mortalité naturelle de phytoplanctons
$\mu_3$	Taux de mortalité naturelle de zooplanctons
$n_0$	Concentration constante des nutriments sous la couche de mixage

(a) Description des paramètres du *Modèle*

FIGURE 4.1.1 – Description des paramètres et schéma du système .

évoluent dans le domaine  $\Omega$ , nous avons construit notre modèle en intégrant les effets de transport-diffusion dans le système d'EDO suivant (4.1.3).

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = S(n - n_0) - \frac{\beta np}{k_1 + n} + \mu_n \left( \frac{\alpha \gamma pz}{1 + \eta p} + \mu_2 p + \mu_3 z \right); \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\beta np}{k_1 + n} - \frac{\alpha p}{1 + \eta p} z - \mu_2 p; \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\alpha \gamma pz}{1 + \eta p} - \mu_3 z. \end{cases}\quad (4.1.3)$$

Elle ne décrit que l'interaction temporelle entre les espèces et a été étudiée sur ([65]). Afin de faciliter l'écriture compact des EDP, nous désignons par  $n \equiv \mathbf{c}_1, p \equiv \mathbf{c}_2$  et  $z \equiv \mathbf{c}_3$ .

1. Cette définition de  $\Gamma$  est générale mais formelle c'est-à-dire qu'elle contient la limite physique rigoureusement décrite.

$$\begin{aligned}
 F_1(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) &= S(\mathbf{c}_1 - n_0) - \frac{\beta \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2}{k_1 + \mathbf{c}_1} + \mu_1 \left( \frac{\alpha \bar{\gamma} \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3}{1 + \eta \mathbf{c}_2} + \mu_2 \mathbf{c}_2 + \mu_3 \mathbf{c}_3 \right) \\
 F_2(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) &= \frac{\beta \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2}{k_1 + \mathbf{c}_1} - \frac{\alpha \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3}{1 + \eta \mathbf{c}_2} - \mu_2 \mathbf{c}_2 ; \\
 F_3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) &= \frac{\alpha \gamma \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3}{1 + \eta \mathbf{c}_2} - \mu_3 \mathbf{c}_3 .
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Alors, le système ( 4.1.3 ) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{c}_1}{dt} = F_1(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) ; \\ \frac{d\mathbf{c}_2}{dt} = F_2(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) ; \\ \frac{d\mathbf{c}_3}{dt} = F_3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) . \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) = F(\mathbf{c}(t)) \tag{4.1.5}$$

Nous avons ajusté ce système en considérant les effets de transport-diffusion (respectivement les opérateurs  $u \cdot \nabla$  et  $\delta \Delta$ ); ainsi les concentrations  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  dépendront du temps  $t$  et de l'espace  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial t} + u \cdot \nabla \mathbf{c}_1 = F_1(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) + \delta \Delta \mathbf{c}_1 ; \\ \frac{\partial \mathbf{c}_2}{\partial t} + u \cdot \nabla \mathbf{c}_2 = F_2(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) + \delta \Delta \mathbf{c}_2 ; \\ \frac{\partial \mathbf{c}_3}{\partial t} + u \cdot \nabla \mathbf{c}_3 = F_3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) + \delta \Delta \mathbf{c}_3 ; \end{cases} \tag{4.1.6}$$

où  $u = (u_1(t, x_1, x_2, x_3), u_2(t, x_1, x_2, x_3), u_3(t, x_1, x_2, x_3))$  représente le champ de vitesse de l'eau satisfaisant les hypothèses de régularité et d'incompressibilité

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Omega; \tag{4.1.7}$$

et  $\delta$  le paramètre de diffusion. Notons que le vecteur de concentration  $\mathbf{c}$  a été redéfini en tenant compte de la dimension spatiale par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} : [0, T] \times \Omega &\longrightarrow E = E_1 \times E_2 \times E_3 \\
 (t, x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (\mathbf{c}_1(t, x_1, x_2, x_3), \mathbf{c}_2(t, x_1, x_2, x_3), \mathbf{c}_3(t, x_1, x_2, x_3))^T,
 \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

avec  $E_1, E_2, E_3 \subset [0, 1]$  et les opérateurs  $\Delta, \nabla$  agissent sur  $\mathbf{c}$  selon ( 4.1.9, 4.1.10 )

$$\Delta \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{c}_1 \\ \Delta \mathbf{c}_2 \\ \Delta \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{c}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{c}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{c}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \left( \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 \mathbf{c}_i \right)_{1 \leq i \leq 3} \tag{4.1.9}$$

$$(u \cdot \nabla)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} u_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial c_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial c_1}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial c_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial c_2}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial c_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial c_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial c_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left( \sum_{j=1}^3 u_j \partial_j c_i \right)_{1 \leq i \leq 3}, \quad (4.1.10)$$

Pour fixer les conditions aux bords, nous avons supposé que les concentrations restent dans le domaine  $\Omega$ , alors

$$\frac{\partial c_i}{\partial n} \equiv \nabla c_i \cdot \vec{n} = 0; i = 1, 2, 3; \quad (4.1.11)$$

où le "point  $\cdot$ " désigne le produit scalaire et  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $\Gamma$  pointant vers l'extérieur. En réalité, les concentrations peuvent être en dehors du domaine puisque certaines parties des frontières ne sont pas rigides. Néanmoins, cette hypothèse reste plausible si l'on considère que le flux d'entrée est égal au flux de sortie.

### 4.1.2 Position du problème continu (PC).

Soit  $\mathbf{D}^\alpha$  l'espace de distributions défini par

$$\mathbf{D}^\alpha = \{v : \Omega \rightarrow E, \mathcal{D}^\alpha v \in \mathcal{C}^0(\Omega)\} \quad (4.1.12)$$

On note  $\mathbf{H} = (L^2(\Omega))^3$  et on définit les espaces de Sobolev,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1 &= \{v \in \mathbf{H}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathbf{H}, \quad \forall i = 1; 2; 3.\}; \\ \mathbf{H}_*^1 &= \{v \in \mathbf{H}^1, \frac{\partial v_i}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad i = 1, 2, 3.\} \\ \mathbf{H}^2 &= \{v \in \mathbf{H}^1, \frac{\partial v}{\partial x_j}; \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{H}, \quad \forall i, j = 1; 2; 3.\} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Nous avons couplé le système (4.1.6) avec les conditions initiales et aux bords, en

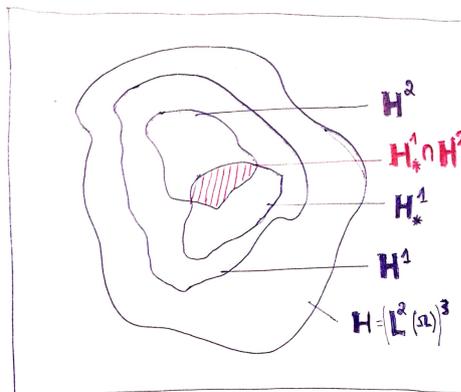


FIGURE 4.1.2 – Illustration des espaces de Sobolev définis en 4.1.13

notant  $b(\mathbf{c}) = (u \cdot \nabla)\mathbf{c} - \delta \Delta \mathbf{c} - F(\mathbf{c})$ , on pose le problème suivant dit **problème continu**

(PC).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{c} \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{H}^2) \text{ vérifiant} \\ \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + b(\mathbf{c}) = 0, \text{ dans } [0, T] \times \Omega; \\ \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial n} \equiv \nabla \mathbf{c}_i \cdot \vec{n} = 0, i = 1, 2, 3 \text{ dans } [0, T] \times \Gamma; \\ \mathbf{c}(0, x) = \mathbf{c}_0(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1.14)$$

C'est un système de type transport-réaction-diffusion dont le terme source est  $F$ . Noter que le problème continu au sens fort serait de trouver  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}^1(0, T; \{\mathcal{C}^2(\Omega)\}^3)$ . Nous étudions d'abord le **problème stationnaire continu** (PSC) (i.e.  $\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = 0$ ). Nous allons chercher une formulation variationnelle de (PSC) et abordé le cas échéant, la problématique d'existence, d'unicité et de régularité de solutions.

Soit  $v \in \mathbf{D}^\alpha$  une fonction test, en multipliant (produit scalaire) la première équation du (PC) (4.1.14) par  $v$  et en intégrant formellement, on a

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) \mathbf{c} \cdot v \, dx - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{c} \cdot v \, dx - \int_{\Omega} F(\mathbf{c}) \cdot v \, dx = 0. \quad (4.1.15)$$

Il en découle la définition suivante.

**Définition 4.1.1.** Soient  $T, D, N, B$  les opérateurs définis par

$$\begin{aligned} T(\mathbf{c}, v) &= \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) \mathbf{c} \cdot v \, dx; \\ D(\mathbf{c}, v) &= - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{c} \cdot v \, dx; \\ N(\mathbf{c}, v) &= - \int_{\Omega} F(\mathbf{c}) \cdot v \, dx; \\ B(\mathbf{c}, v) &= T(\mathbf{c}, v) + D(\mathbf{c}, v) + N(\mathbf{c}, v). \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

L'opérateur  $b$  sus-mentionné vérifie  $(b(\mathbf{c}), v) = B(\mathbf{c}, v)$ .

### 4.1.3 Propriété des opérateurs.

Pour évaluer  $T(\mathbf{c}, v)$ , on a :

$$T(\mathbf{c}, v) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) \mathbf{c} \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial x_j} v_i \, dx; \quad (4.1.17)$$

en utilisant la formule de Green dans  $\mathbf{H}^1$ , et en tenant compte de l'incompressibilité du fluide (c'est-à-dire  $\nabla \cdot u = 0$ ), on obtient :

$$T(\mathbf{c}, v) = \sum_{i,j=1}^3 \left( - \int_{\Omega} \mathbf{c}_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_j \, dx + \int_{\Gamma} \mathbf{c}_i v_i u_j n_j \, ds \right); \quad (4.1.18)$$

on a

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Gamma} \mathbf{c}_i v_i u_j n_j \, ds = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} \mathbf{c}_i v_i u \cdot \vec{n} \, ds; \quad (4.1.19)$$

or  $u \cdot \vec{n} = 0$  p.p sur toute partie de la frontière car par hypothèse,  $\nabla \cdot u = 0$  sur  $\Omega$ , alors

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot u \, dx = \sum_{i=1}^3 \left( - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} u_i n_i \, ds \right) = \int_{\Gamma} u \cdot \vec{n} \, ds; \quad (4.1.20)$$

par conséquent  $u \cdot \vec{n} = 0$  p.p sur  $\Gamma$ , ainsi

$$T(\mathbf{c}, v) = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \mathbf{c}_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_j \, dx \quad \forall \mathbf{c}, v \in \mathbf{H}^1; \quad (4.1.21)$$

donc , pour  $v = \mathbf{c}$ ,

$$T(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{c}_i^2}{\partial x_j} u_j \, dx = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \cdot \nabla |\mathbf{c}|_E^2 \, dx. \quad (4.1.22)$$

D'autre part, en utilisant directement la première expression de  $T(\mathbf{c}, v)$  ( 4.1.17), on aura

$$T(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial x_i} \mathbf{c}_i \, dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} u_j \frac{\partial |\mathbf{c}|_E^2}{\partial x_j} \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \cdot \nabla |\mathbf{c}|_E^2 \, dx. \quad (4.1.23)$$

Ainsi, les équations (4.1.22 & 4.1.23) impliquent

$$T(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{H}^1. \quad (4.1.24)$$

Pour l'opérateur de diffusion, nous avons :

$$\Delta \mathbf{c} \cdot v = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{c}_i}{\partial x_j^2} v_i;$$

ainsi , en utilisant la formule de Green et en tenant compte des conditions aux bords, nous aurons :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{c}, v) &= -\delta \int_{\Omega} \Delta \mathbf{c} \cdot v \, dx = \delta \sum_{i,j=1}^3 \left( \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial x_j} v_i n_j \right) \, ds, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{H}^2, v \in \mathbf{H}^1; \\ &= \delta \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \delta \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial n} v_i \, ds, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

on a  $\frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial n} = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{H}_{\star}^1 \cap \mathbf{H}^2$ , alors

$$D(\mathbf{c}, v) = \delta \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{H}_{\star}^1 \cap \mathbf{H}^2, v \in \mathbf{H}^1 \quad (4.1.26)$$

d'où pour  $v = \mathbf{c}$

$$D(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \delta \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{c}|_E^2 \, dx = \delta \|\nabla \mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2. \quad (4.1.27)$$

où nous avons utilisé la notation suivante :

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{c}|_E^2 &= \nabla \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{c} = \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial x_j} \right)^2. \\ \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}} &= \left( \int_{\Omega} |\mathbf{c}|_E^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Pour l'opérateur  $N$ , on a

$$-N(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} \, dx = \int_{\Omega} (F_1(\mathbf{c})\mathbf{c}_1 + F_2(\mathbf{c})\mathbf{c}_2 + F_3(\mathbf{c})\mathbf{c}_3) \, dx$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{c})\mathbf{c}_1 &= S\mathbf{c}_1^2 - S n_0 \mathbf{c}_1 - \beta \frac{\mathbf{c}_1^2 \mathbf{c}_2}{k_1 + \mathbf{c}_1} + \mu_1 \alpha \bar{\gamma} \frac{\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3}{1 + \eta \mathbf{c}_2} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mu_1 \mu_3 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 \\ F_2(\mathbf{c})\mathbf{c}_2 &= \beta \frac{\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2^2}{k_1 + \mathbf{c}_1} - \alpha \frac{\mathbf{c}_2^2 \mathbf{c}_3}{1 + \eta \mathbf{c}_2} - \mu_2 \mathbf{c}_2^2; \\ F_3(\mathbf{c})\mathbf{c}_3 &= \alpha \bar{\gamma} \frac{\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3^2}{1 + \eta \mathbf{c}_2} - \mu_3 \mathbf{c}_3^2. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Comme  $k_n \geq 0$ , alors  $|\frac{\beta \mathbf{c}_1^2 \mathbf{c}_2}{k_n + \mathbf{c}_1}| \leq |\beta \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2|$  (Si  $\mathbf{c}_1 = 0$  c'est vraie, si  $\mathbf{c}_1 \neq 0$ , on simplifie par  $\mathbf{c}_1$ ).

Avec la même logique, on a

$$\left| \mu_1 \alpha \bar{\gamma} \frac{\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3}{1 + \eta \mathbf{c}_2} \right| \leq \frac{\mu_1 \alpha \bar{\gamma}}{\eta} |\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3|.$$

On a aussi pour  $\mathbf{c}_1 \in E_1$ ,

$$\mathbf{c}_1^2 \leq \mathbf{c}_1 \Rightarrow -S n_0 \mathbf{c}_1 \leq -S n_0 \mathbf{c}_1^2. \quad (4.1.30)$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Young, nous aurons

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{c}) \mathbf{c}_1 &\leq \frac{1}{2} \left( 2S(1 - n_0) + \beta + \frac{\mu_1 \alpha \bar{\gamma}}{\eta} + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \right) \mathbf{c}_1^2 + \frac{1}{2} (\beta + \mu_1 \mu_2) \mathbf{c}_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1 \alpha \bar{\gamma}}{\eta} + \mu_1 \mu_3 \right) \mathbf{c}_3^2; \\ F_2(\mathbf{c}) \mathbf{c}_2 &\leq \left( \beta - \mu_2 + \frac{\alpha}{2\eta} \right) \mathbf{c}_2^2 + \frac{\alpha}{2\eta} \mathbf{c}_3^2; \\ F_3(\mathbf{c}) \mathbf{c}_3 &\leq \left( \frac{\alpha \gamma}{\eta} - \mu_3 \right) \mathbf{c}_3^2. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Alors il existe  $k_1, k_2, k_3 < 0$  tel que

$$F(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} \leq k_1 \mathbf{c}_1^2 + k_2 \mathbf{c}_2^2 + k_3 \mathbf{c}_3^2. \quad (4.1.32)$$

Donc, en notant  $k_0 = -\max\{k_1, k_2, k_3\}$ , pour  $\mathbf{c} \in \mathbf{H}$  nous aurons

$$\begin{aligned} N(\mathbf{c}, \mathbf{c}) &\geq k_0 \int_{\Omega} |\mathbf{c}|_E^2 \, dx; \\ N(\mathbf{c}, \mathbf{c}) &\geq k_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

**Lemme 4.1.1.** *En combinant les inégalités ci-dessus (4.1.24, 4.1.27, 4.1.33), on a*

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq \delta \|\nabla \mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2 + k_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2; \quad (4.1.34)$$

en notant  $\tau_0 = \max\{\delta, k_0\}$ , on obtient

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq \tau_0 \left( \|\nabla \mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2 \right); \quad (4.1.35)$$

alors

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq \tau_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^1}^2. \quad (4.1.36)$$

L'opérateur  $B$  est dit **coercive** ou  **$\tau_0$ -elliptique**.

**Lemme 4.1.2.** *(hemi-continuité de  $b(\cdot)$ )*

L'opérateur  $b(\cdot) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  est hémicontinu, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante : pour tout  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{V}$ , l'application  $f(\lambda) = (b(v_1 + \lambda v_2), v_3)$  est continue sur  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Preuve.** On a  $B(\mathbf{c}, v) = T(\mathbf{c}, v) + D(\mathbf{c}, v) + N(\mathbf{c}, v)$

Soient  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{V}$ ,  $f(\lambda) = (b(v_1 + \lambda v_2), v_3) = g(\lambda) + h(\lambda)$  avec

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= T(v_1 + \lambda v_2, v_3) + D(v_1 + \lambda v_2, v_3); \\ h(\lambda) &= N(v_1 + \lambda v_2, v_3); \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

Comme  $T + D : \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est bilinéaire continue,  $\exists C_T, C_D$  telles que  $g$  vérifie

$$\begin{aligned} |g(\lambda) - g(\lambda_0)| &\leq |\lambda - \lambda_0| \|T(v_2, v_3) + D(v_2, v_3)\|_{(\mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1)'}; \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| C_T \|v_2\|_{\mathbf{H}^1} \|v_3\|_{\mathbf{H}^1} + |\lambda - \lambda_0| C_D \|v_2\|_{\mathbf{H}^1} \|v_3\|_{\mathbf{H}^1} \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

En posant  $C = C_T + C_D$ , on obtient

$$|g(\lambda) - g(\lambda_0)| \leq C |\lambda - \lambda_0| \|v_2\|_{\mathbf{H}^1} \|v_3\|_{\mathbf{H}^1}. \quad (4.1.39)$$

D'autre part, en utilisant le fait que  $F$  est  $L$ -Lipschitzienne on obtient

$$\begin{aligned} |h(\lambda) - h(\lambda_0)| &= \left| \int_{\Omega} (F(v_1 + \lambda v_2) - F(v_1 + \lambda_0 v_2)) \cdot v_3 \, dx \right|; \\ &\leq \int_{\Omega} |(F(v_1 + \lambda v_2) - F(v_1 + \lambda_0 v_2)) \cdot v_3|_E \, dx; \\ &\leq L |\lambda - \lambda_0| \int_{\Omega} |v_2|_E |v_3|_E \, dx; \\ &\leq L |\lambda - \lambda_0| \|v_2\|_{\mathbf{H}} \|v_3\|_{\mathbf{H}}. \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

Ainsi, les inégalité (4.1.39) et (4.1.40) montrent que les fonctions  $g$  et  $h$  sont continues de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donc  $f(\lambda)$  est continue.

#### 4.1.4 Formulations variationnelles.

##### Formulation variationnelle du (PSC)

Compte tenu des propriétés des opérateurs ci-dessus établis, la formulation variationnelle du (PSC) est la suivante qu'on dénomme **Problème Variationnelle Stationnaire** (PVS).

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{c} \in \mathbf{H}_{\star}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ B(\mathbf{c}, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{H}^1. \end{cases} \quad (4.1.41)$$

##### Formulation variationnelle du (PC) linéarisé (4.1.2)

Pour  $\bar{\mathbf{c}}$  solution du problème stationnaire, on pose  $\bar{F}$ , le linéarisé de  $F$  sur un voisinage de  $\bar{\mathbf{c}}$  tel que

$$\bar{F}(\mathbf{c}) = F(\bar{\mathbf{c}}) + J_F(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}). \quad (4.1.42)$$

On définit de même les opérateurs linéarisés  $\bar{N}, \bar{B}, \bar{b}$ , associés à  $N, B, b$  par

$$\begin{aligned} \bar{N}(\mathbf{c}, v) &= - \int_{\Omega_{\bar{\epsilon}}} \bar{F}(\mathbf{c}) \cdot v \, dx; \\ (\bar{b}(\mathbf{c}), v) &= \bar{B}(\mathbf{c}, v) = T(\mathbf{c}, v) + D(\mathbf{c}, v) + \bar{N}(\mathbf{c}, v); \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

On note  $\Omega_{\bar{\epsilon}}$  le domaine local autour de  $\bar{\mathbf{c}}$  et  $\Gamma_{\bar{\epsilon}}$  son bord. En considérant  $\bar{\epsilon}$ , l'erreur d'approximation entre  $\mathbf{c}$  et  $\bar{\mathbf{c}}$  ( i.e  $\mathbf{c} \equiv \bar{\mathbf{c}} + \bar{\epsilon}$  , on a  $\nabla \mathbf{c}_i = \nabla \bar{\mathbf{c}}_i$  Ainsi , le problème linéarisé de (PC) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{c} \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega_{\bar{\epsilon}})) \text{ vérifiant} \\ \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \bar{b}(\mathbf{c}) = 0, \text{ dans } [0, T] \times \Omega_{\bar{\epsilon}}; \\ \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial n} = 0, \, i = 1, 2, 3 \text{ dans } [0, T] \times \Gamma; \\ \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial n}, \, i = 1, 2, 3 \text{ dans } [0, T] \times \Gamma_{\bar{\epsilon}}; \\ \mathbf{c}(0, x) = \mathbf{c}_0(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1.44)$$

La condition  $\frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial n}$  stipule que sur le bord local, l'inconnue  $\mathbf{c}$  a le même gradient que l'équilibre  $\bar{\mathbf{c}}$ .

Pour le reste, on garde les notations de la définition (4.1.2) et on pose  $(\mathbf{c}(\cdot), v)$  tel que :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{c}(\cdot), v) = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \cdot v \, dx. \quad (4.1.45)$$

Soit  $\mathbf{V}$  un sous-espace fermé de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  tel que

$$\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{H}_{\star}^1(\Omega_{\bar{\epsilon}}); \quad (4.1.46)$$

où  $\mathbf{H}_{\star}^1(\Omega_{\bar{\epsilon}}) = \{v \in \mathbf{H}_{\star}^1(\Omega), \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial n} \text{ sur } \Gamma_{\bar{\epsilon}}\}$  et  $\hookrightarrow$  désigne l'**injection continue**<sup>2</sup>.

Ainsi,  $\mathbf{c}_0 \in \mathbf{V}$  et nous posons le problème variationnel (PV) suivant (4.1.47) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{c} \in W([0; T[, \mathbf{V}, \mathbf{V}'); \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{c}(\cdot), v) + \bar{B}(\mathbf{c}(\cdot), v) = 0 \text{ au sens de } \mathcal{D}'([0; T[) \quad \forall v \in \mathbf{V}; \\ \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}_0. \end{array} \right. \quad (4.1.47)$$

Avec  $W([0; T[, \mathbf{V}, \mathbf{V}')$  sous-ensemble et  $\mathcal{C}([0; T], \mathbf{V})$ , l'espace faible à construire pour établir un résultat d'existence d'une solution faible.

**Remarque 4.1.1.** On a deux points justificatifs de la position du problème (4.1.47) :

1. le fait que  $W([0; T[; \mathbf{V}, \mathbf{V}') \subset \mathcal{C}([0; T]; \mathbf{V}, \mathbf{V}')$  implique que la condition  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}_0$  a un sens;

---

2. Pour  $E, F$  deux espaces vectoriels normés,  $E \hookrightarrow F$  signifie qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $u \in E$ ,  $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$ .

2. pour  $\mathbf{c} \in W([0; T[; \mathbf{V}, \mathbf{V}'), v \in \mathbf{V}$  on a

$$\langle \mathbf{c}'(\cdot), v \rangle = \frac{d}{dt}(\mathbf{c}(\cdot), v) \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0; T[). \quad (4.1.48)$$

De ce fait, en notant

$$\left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{c}(\cdot), v \right\rangle = \frac{d}{dt}(\mathbf{c}(\cdot), v) \quad \forall v \in \mathbf{V}; \quad (4.1.49)$$

on a bel et bien le problème (4.1.47).

Pour  $\mathbf{c} \in W(0, T; \mathbf{V}, \mathbf{V}'), v \in V$ , on a :

$$\langle \mathbf{c}'(\cdot), v \rangle = \frac{d}{dt}(\mathbf{c}(\cdot), v) \quad \text{in } \mathcal{D}'([0; T[);$$

par conséquent, en notant :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}(\cdot), v \right\rangle = \frac{d}{dt}(\mathbf{c}(\cdot), v), \quad \forall v \in \mathbf{V};$$

et en prenant  $\mathbf{c} \in W(0, T; \mathbf{V})$ , on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{c}(\cdot), \mathbf{c}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \cdot \mathbf{c} \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} |\mathbf{c}|_E^2 \, dx \right). \quad (4.1.50)$$

En effet,

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \cdot \mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial c_i}{\partial t} c_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial c_i^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{c}|_E^2}{\partial t}.$$

## 4.2 Résultats

### 4.2.1 Étude du problème linéarisé.

#### Propriétés locales des opérateurs.

Pour l'opérateur  $T(\mathbf{c}, v)$ , par analogie aux équations (4.1.18 - 4.1.23 ), on a :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{c}, \mathbf{c}) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\bar{\epsilon}}} u \cdot \nabla |\mathbf{c}|_E^2 \, dx + \int_{\Gamma_{\bar{\epsilon}}} \mathbf{c}^2 u \cdot \vec{n} \, ds; \\ \text{et } T(\mathbf{c}, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\bar{\epsilon}}} u \cdot \nabla |\mathbf{c}|_E^2 \, dx. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

on déduit donc

$$T(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\bar{\epsilon}}} \mathbf{c}^2 u \cdot \vec{n} \, ds \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{H}_{\star}^1(\Omega_{\bar{\epsilon}}); \quad (4.2.2)$$

de même selon (4.1.25), l'opérateur de diffusion s'écrit

$$D(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \delta \|\nabla \mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2 - \delta \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial n} \mathbf{c}_i \, ds; \quad (4.2.3)$$

Pour l'opérateur  $N$ , évaluons  $\bar{F}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = F(\bar{\mathbf{c}}) + J_F(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{c}$ ; en utilisant l'inégalité de Young comme dans (4.1.31), on obtient

$$-J_F(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{c} \geq \varphi_1 \mathbf{c}_1^2 + \varphi_2 \mathbf{c}_2^2 + \varphi_3 \mathbf{c}_3^2 + J_F^T(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c}) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}; \quad (4.2.4)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left(-2F_{1,1} - \frac{\theta_{1,2} + \theta_{1,3}}{2}\right); \varphi_2 = \left(-2F_{2,2} - \frac{\theta_{1,2} + \theta_{2,3}}{2}\right); \varphi_3 = \left(-2F_{3,3} - \frac{\theta_{1,3} + \theta_{2,3}}{2}\right); \\ \theta_{i,j} &= F_{i,j} + F_{j,i}; \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

fixons la contrainte  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 > 0$  et posons  $\varphi = \max\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ , alors

$$-J_F(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}) \cdot \bar{\mathbf{c}} \geq \varphi |\mathbf{c}|_E^2 + J_F^T(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c}) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}; \quad (4.2.6)$$

d'où

$$-\int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} J_F(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}) \cdot \bar{\mathbf{c}} \geq \varphi \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} J_F^T(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c}) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dx \quad (4.2.7)$$

On a aussi  $0 = b(\bar{\mathbf{c}}) = (u \cdot \nabla) \mathbf{c} - \delta \Delta \bar{\mathbf{c}} - F(\bar{\mathbf{c}})$

$$-F(\bar{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{c} = -\delta \Delta \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} + (u \cdot \nabla) \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c}, \quad (4.2.8)$$

on déduit selon (4.1.25) et le fait que  $\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial x_j} = 0$ :

$$-\delta \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} \Delta \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \, dx = \delta \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial x_j}\right)^2 \, dx - \delta \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial n} \mathbf{c}_i \, ds, \quad (4.2.9)$$

or on a

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial n} \mathbf{c}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i^2}{\partial n} + \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}_i}{\partial n} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \quad (4.2.10)$$

alors

$$-\delta \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} \Delta \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \, dx = \delta \|\nabla \bar{\mathbf{c}}\|_{\mathbf{H}}^2 - \frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}}} \left\{ \frac{\partial |\bar{\mathbf{c}}_i|_E^2}{\partial n} + 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}}{\partial n} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} \, ds, \quad (4.2.11)$$

et d'après (4.1.17)

$$\begin{aligned} T(\bar{\mathbf{c}}, \mathbf{c}) &= \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} (u \cdot \nabla) \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} u \cdot \nabla |\bar{\mathbf{c}}|_E^2 \, dx + \int_{\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}}} (|\bar{\mathbf{c}}|_E^2 + \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) u \cdot \vec{n} \, ds; \\ &= \|\bar{\mathbf{c}}\|_{\mathbf{H}(\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}})}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} u \cdot \nabla |\bar{\mathbf{c}}|_E^2 \, dx + \int_{\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}}} \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} u \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

En combinant (4.2.2, 4.2.7, 4.2.11, 4.2.12), on déduit

$$\begin{aligned} \bar{B}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) &\geq \varphi_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \delta \|\nabla \bar{\mathbf{c}}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\bar{\mathbf{c}}\|_{\mathbf{H}(\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}})}^2 + \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} J_F^T(\bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c}) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} u \cdot \nabla |\bar{\mathbf{c}}|_E^2 \, dx - \\ &\delta \int_{\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}}} \left( \frac{\partial |\bar{\mathbf{c}}|_E^2}{\partial n} + \frac{\partial \bar{\mathbf{c}}}{\partial n} \cdot (2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{c}}) - \frac{1}{\delta} \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} u \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \, ds \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

où  $\varphi_0 = \max\{\varphi; \delta\}$ . Ainsi, pour  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  tend vers 0, on aura

$$\bar{B}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq \varphi_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \delta \|\nabla \bar{\mathbf{c}}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\bar{\mathbf{c}}\|_{\mathbf{H}(\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}})}^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\bar{\mathbf{c}}}} u \cdot \nabla |\bar{\mathbf{c}}|_E^2 \, dx - \frac{3\delta}{2} \int_{\Gamma_{\bar{\mathbf{c}}}} \frac{\partial |\bar{\mathbf{c}}|_E^2}{\partial n} \, ds \quad (4.2.14)$$

On dit dans ce que l'opérateur  $\bar{B}$  est **quasi-elliptique**, i.e  $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\bar{B}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq \varphi_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^1}^2 - \alpha_1 \quad (4.2.15)$$

### Estimations a priori

Nous allons faire quelques estimations a priori afin de caractériser l'espace  $\mathbf{V}$  et aussi de pouvoir démontrer l'existence des solutions faibles en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Ainsi, en combinant le système linéarisé (4.1.44) et l'inéquation (4.2.15), nous aurons :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} |\mathbf{c}|_E^2 \, dx \right) + \bar{B}(\mathbf{c}, \mathbf{c}); \\ &\geq \varphi_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^1}^2 - \alpha_1; \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

ce qui implique

$$\varphi_0 \|\mathbf{c}\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq \alpha_1 < \infty; \quad (4.2.17)$$

on en déduit que

$$\mathbf{c} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \text{i.e } \mathbf{c}, \nabla \mathbf{c} \in \mathbf{H} \quad \mathbf{c} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (4.2.18)$$

Cela confirme le fait

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (4.2.19)$$

### Existence de la solution faible du problème linéarisé.

#### Proposition 4.2.1. (Existence)

Sous les hypothèses de la formulation variationnelle (4.1.4), nous avons  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{H}$  donnés satisfaisant les conditions d'injection continue (4.1.46). Alors, il existe une solution faible du problème (PV) linéarisé (4.1.44) vérifiant :

$$\mathbf{c} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}). \quad (4.2.20)$$

La vérification de l'existence se fait par la méthode de Faedo-Galerkin. Il s'agit

d'une série d'étapes dont la première consiste à construire un problème approché de (4.1.44), puis une estimation a priori et un passage à la limite d'approximation avant une vérification finale.

**Preuve. d'Existence (4.2.1)**

Soit  $\{w^1, \dots, w^m, \dots\}$  une base de l'espace  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$  et  $\mathbf{c}^m(t) \in \text{vect}\{w^1, \dots, w^m, \dots\}$  solution approchée du problème :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{c}^m(t)}{\partial t}, w^l\right) + \left(\bar{b}(\mathbf{c}^m(t)), w^l\right) &= 0 \quad 1 \leq l \leq m; \\ \mathbf{c}^m(0) &= \mathbf{c}^{0m} \in \text{vect}\{w^1, \dots, w^m\}; \\ \mathbf{c}^{0m} &\longrightarrow \mathbf{c}^0 \quad \text{dans } \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Ceci définit  $\mathbf{c}^m(t)$  dans un intervalle  $[0, t^m]$ ,  $t^m > 0$  mais comme nous avons (4.1.36), alors

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{c}^m(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \alpha_0 \int_0^t \|\mathbf{c}^m(\sigma)\|_{\mathbf{V}}^2 d\sigma \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{c}^{0m}\|_{\mathbf{H}}^2 + \alpha_1; \quad (4.2.22)$$

d'où l'on déduit  $t^m = T$  et que  $\mathbf{c}^m$  reste dans un borné de  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$ ; on peut donc extraire une sous-suite  $(\mathbf{c}^{\phi(m)})$  telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{\phi(m)} &\xrightarrow{*} \mathbf{c} \quad \text{in } L^\infty(0, T; \mathbf{H}); \\ \mathbf{c}^{\phi(m)} &\rightharpoonup \mathbf{c} \quad \text{in } L^2(0, T; \mathbf{V}); \\ \mathbf{c}^{\phi(m)}(T) &\rightharpoonup \xi \quad \text{in } \mathbf{H}; \\ \bar{b}(\mathbf{c}^{\phi(m)}) &\rightharpoonup \chi \quad \text{in } L^2(0, T; \mathbf{V}'). \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

car  $\|\bar{b}(\mathbf{c})\|_{\mathbf{V}'} \leq C\|\mathbf{c}\|_{\mathbf{V}}$  et donc  $\bar{b}(\mathbf{c}^m)$  reste dans borné de  $L^2(0, T; \mathbf{V}')$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{c}}^m(t)$  et  $\tilde{\bar{b}}(\mathbf{c}^m(t))$  des extensions sur  $\mathbb{R}$  de  $\mathbf{c}^m(t)$  et  $\bar{b}(\mathbf{c}^m(t))$  par 0 en dehors de  $[0, T]$ ; alors (4.2.21) conduit à

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}^m}{\partial t}(t), w^l\right) + \left(\tilde{\bar{b}}(\mathbf{c}^m(t)), w^l\right) = (\mathbf{c}^{0m}, w^l) \delta(t-0) - (\mathbf{c}^m(T), w^l) \delta(t-T); \quad (4.2.24)$$

en passant à la limite pour  $l$  fixé et  $m = \phi(m)$  on a

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}}{\partial t}, w^l\right) + (\tilde{\chi}, w^l) = (\mathbf{c}^0, w^l) \delta(t-0) - (\xi, w^l) \delta(t-T) \quad \forall l; \quad (4.2.25)$$

ainsi

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}}{\partial t} + \tilde{\chi} = \mathbf{c}^0 \delta(t-0) - \xi \delta(t-T); \quad (4.2.26)$$

en restreignant (4.2.26) sur  $]0, T[$ , on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \chi = 0; \quad (4.2.27)$$

donc  $\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$  alors  $\mathbf{c}(0)$  et  $\mathbf{c}(T)$  ont un sens et en comparant à (4.2.26), on

en déduit que  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}^0$  et  $\mathbf{c}(T) = \xi$ .

Pour montrer l'existence de la solution, il suffit de montrer que

$$\chi = \bar{b}(\mathbf{c}). \quad (4.2.28)$$

D'après la monotonie de  $\bar{b}$ , on a

$$X^m = \int_0^T (b(\mathbf{c}^m(t)) - \bar{b}(v(t)), \mathbf{c}^m(t) - v(t)) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^2(0, T; \mathbf{V}). \quad (4.2.29)$$

Maintenant, d'après (4.2.21), nous avons :

$$\int_0^T (\bar{b}(\mathbf{c}^m), \mathbf{c}^m) dt = \frac{1}{2} \|\mathbf{c}^{0m}\|_{\mathbf{H}}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{c}^m(T)\|_{\mathbf{H}}^2; \quad (4.2.30)$$

ainsi

$$X^m = \frac{1}{2} \|\mathbf{c}^{0m}\|_{\mathbf{H}}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{c}^m(T)\|_{\mathbf{H}}^2 - \int_0^T (\bar{b}(\mathbf{c}^m), v) dt - \int_0^T (\bar{b}(v), \mathbf{c}^m(t) - v(t)) dt; \quad (4.2.31)$$

par conséquent, comme  $\liminf \|\mathbf{c}^m(T)\|_{\mathbf{H}}^2 \geq \|\mathbf{c}(T)\|_{\mathbf{H}}^2$  ([10] Page 35), alors

$$\limsup X^m \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{c}^0\|_{\mathbf{H}}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{c}(T)\|_{\mathbf{H}}^2 - \int_0^T (\chi, v) dt - \int_0^T (\bar{b}(v), \mathbf{c} - v) dt. \quad (4.2.32)$$

De (4.2.27) nous déduisons (intégration par parties)

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{c}^0\|_{\mathbf{H}}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{c}(T)\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^T (\chi, \mathbf{c}) dt; \quad (4.2.33)$$

donc, en considérant (4.2.32) et (4.2.33), nous avons

$$\int_0^T (\chi - \bar{b}(v), \mathbf{c} - v) dt \geq 0. \quad (4.2.34)$$

Nous utilisons maintenant "l'hémicontinuité" pour montrer que (4.2.34) conduit à (4.2.28). Nous prenons  $v = \mathbf{c} - \lambda w$ ,  $\lambda > 0$ ,  $w \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ , ainsi (4.2.34) donne

$$\lambda \int_0^T (\chi - \bar{b}(\mathbf{c} - \lambda w), w) dt \geq 0; \quad (4.2.35)$$

par conséquent

$$\int_0^T (\chi - \bar{b}(\mathbf{c} - \lambda w), w) dt \geq 0; \quad (4.2.36)$$

en tendant  $\lambda$  vers 0 dans (4.2.36), on déduit que

$$\int_0^T (\chi - \bar{b}(\mathbf{c}), w) dt \geq 0 \quad \forall w; \quad (4.2.37)$$

qui montre (4.2.28) i.e  $\chi = \bar{b}(\mathbf{c})$ .

### 4.3 Discussion

Ici  $\mathcal{D}'([0; T[)$  est confondu avec  $\mathcal{D}'([0; T[, \mathbf{V}, \mathbf{V})$  Nous notons en général :

Si  $X$  est un espace de Banach,  $X'$  est son dual et

$$L^p(0, T; X) = \{f / f \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\} \text{ pour } (1 \leq p < \infty);$$

$$L^\infty(0, T; X) = \{f / f \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \text{ess sup}_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X < \infty\}.$$

$$\mathcal{D}([0, T]; X) = \text{fonctions } C^\infty \text{ de } [0, T] \rightarrow X \text{ et à support compact dans } ]0, T[;$$

$$C^k([0, T]; X) = \text{fonctions } k \text{ fois continûment différentiables de } [0, T] \rightarrow X;$$

$\mathcal{L}(X; Y)$  = espace des applications linéaires continues de  $X$  dans  $Y$  ( $X$  et  $Y$  étant des espaces vectoriels topologiques);

$$\mathcal{D}'(]0, T[; X) = \mathcal{L}(]0, T[; X) = \text{espace des distributions sur } ]0, T[ \text{ à valeurs dans } X.$$

Si l'opérateur  $\bar{B}$  était elliptique, on a l'unicité de la solution du (PV) linéarisé. En effet : Soit  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  deux solutions distinctes du problème (4.1.47) alors,  $w = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$  vérifie  $w \in W(0, T; \mathbf{V})$  (car  $c$ 'est un espace vectoriel) et selon (4.1.14)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b(\mathbf{c}_1) - b(\mathbf{c}_2) = 0; \quad (4.3.1)$$

alors

$$\left( \frac{\partial w}{\partial t}, w \right) + (b(\mathbf{c}_1) - b(\mathbf{c}_2), \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) = 0;$$

puisque  $b$  est monotone (4.1.2), alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq 0;$$

ainsi, nous avons  $w = 0 \implies \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ .

L'inégalité de Poincaré ne peut pas être établit pour  $\mathbf{H}_\star^1(\Omega)$ , c-a-d il  $\forall C > 0$ ,

$$\|v\|_{\mathbf{H}_\star^1(\Omega)} > C \|\nabla v\|_{\mathbf{H}} \quad (4.3.2)$$

Soit  $\{\mathbf{V}^m\}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  une famille des sous-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant l'approximation de Galerkin;  $V$  étant dense dans  $H$  et d'après l'approxi-

mation, pour  $c_0 \in H$  ; il existe une suite  $\mathbf{c}^{0m}$   $m \in \mathbb{N}^*$  telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \mathbf{c}^{0m} \in \mathbf{V}^m \quad \text{et} \quad \mathbf{c}^{0m} \longrightarrow \mathbf{c}^0 \quad \text{dans} \quad H. \quad (4.3.3)$$

Nous noterons :

$d^m = \dim(\mathbf{V}^m)$ ,  $w^{lm} = (w_i^{lm})_{i=1,3}$ ,  $l = 1, \dots, d^m$ , une base de  $\mathbf{V}^m$ .

Le problème est alors : Trouver

$$\mathbf{c}^m(t) = \sum_{l=1}^{d^m} g^{lm}(t) w^{lm}, \quad (4.3.4)$$

vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\mathbf{c}^m(t), w^{lm}) + B(\mathbf{c}^m(t), w^{lm}) = 0, \\ \mathbf{c}^m(0) = \mathbf{c}^{0m}. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

On a

$$T(\mathbf{c}^m(t), g^{lm}(t)) + D(\mathbf{c}^m(t), g^{lm}(t)) = \sum_{l=1}^{d^m} g^{lm}(t) (T(w^l, w^l) + D(w^l, w^l)) \quad (4.3.6)$$

Nous remarquons que la non linéarité de  $F$  complique l'utilisation de la méthode de Galerkin, on tente une méthode de monotonie.

## Conclusion

Nous avons étudié le modèle NPZ couplé avec des effets de transport et diffusion. étant donnée que c'est une EDP, on a opté pour la théorie de Sobolev pour appréhender l'existence des solutions. La non-linéarité du champ  $F$  et le pléthore des paramètres empêche que les opérateurs vérifient des propriétés classiques exhibant l'unicité de la solution (ellipticité). Ainsi, pour parvenir à ce résultat, il serait idéale de simplifier le modèle.

En perspective, on peut se pencher sur l'existence de solution du problème continue par les techniques du point fixe. Ensuite, une discussion sur l'équivalence entre les problèmes continus et les formulations variationnelles serait nécessaire car la validation des méthodes numériques en dépend.

## **Troisième partie**

# **Convection-Diffusion : Approche ABMs**



## CHAPITRE 5

# DYNAMIQUE COLLECTIVE ET CYCLE PÉRIODIQUE DANS UN MODÈLE DU TYPE PROIE-PRÉDATEUR DES PARTICULES AUTO-PROPULSÉES

### Sommaire du présent chapitre

<b>Introduction</b>	<b>100</b>
<b>5.1 Modèles et Réglages de Simulations</b>	<b>101</b>
<b>5.2 Résultats et Discussions.</b>	<b>107</b>

**Résumé 5.0.1.** La définition et la description de la dynamique des systèmes proie-prédateur constitue l'un des problèmes fondamentaux de la biologie de la population. Depuis 1925, plusieurs modèles ont été introduits. Bien qu'ils sont très hautement efficace, la plupart d'entre eux négligent quelques critères pertinents tels que la distribution spatiale et temporelle des espèces étudiées. C'est dans l'objectif d'introduire ces critères que nous menons cette étude en couplant deux modèles conçus initialement aux dynamiques collectives. Le premier est pour la mobilité des prédateurs, un modèle du type Vicsek ; le second est un modèle des particules browniens pour les proies. Nous avons observés comme naturellement dans les modèles classiques, des cycles périodiques de la densité des prédateurs et proies. Dans ce cas, la période des oscillations dépend relativement des paramètres du modèle des dynamiques collectives.

**Mots-Clés :** *Comportement collectif, Particules auto-propulsées , Particules Browniens, Proie-Prédateur, Réaction-diffusion, Cycle Limite.*

## Introduction

L'Étude de la dynamique de population est un sujet de recherche multidisciplinaire impliquant par exemple l'Écologie, la Biologie, les Mathématiques et la Physique. Elle est parfois orientée spécialement sur la dynamique de deux espèces : proies et prédateurs. Dans cette perspective, le modèle développé indépendamment par A. J. Lotka [25] et V. Volterra (1926) [64] fournit une explication satisfaisante des phénomènes observés tels que la variation périodique de la densité des espèces. Depuis lors, plusieurs variantes de ces modèles (appelés LV) sont dérivées. Ce sont des systèmes dynamiques discrets ou continus dont l'étude quantitative montre généralement l'existence d'un état d'équilibre et des solutions périodiques autour de cet état [50, 36, 5, 7]. Quelques variantes de ce modèle intègrent la mobilité (distribution spatio-temporelle) des espèces étudiées, ils sont connus comme des systèmes de réaction-diffusion [39, 4].

Le point commun entre ces deux approches mentionnées ci-haut est qu'elles sont Euleriennes et déterministes et appelées généralement « Approche de Champ Moyen ». Il existe aussi quelques formulations statistiques étudiées dans [46, 22, 33].

Très récemment, des modèles d'individus centrés (Agent Based Model en anglais) sont aussi utilisés pour simuler la dynamique des proie-prédateurs [29, 15]. Ce concept était introduit initialement pour l'étude de comportement collectif d'une espèce donnée. Ce sont les modèles des particules auto-propulsées ou Self-Propelled Particles (SPP); Ils sont présentés en dimension deux ou trois de l'espace par divers investigations [63, 16, 59, 57, 13, 62, 48, 49]. Le problème central inclut ici les mécanismes par lesquels des agents autonomes interagissent pour exposer un comportement collectif émergent et les propriétés des comportements résultants.

D'autres part, la mobilité de certaines espèces tels que les bactéries, les phytoplanctons ne constitue pas une dynamique collective cohérente mais ressemble plutôt à une marche aléatoire. C'est ainsi que les individus issus de ces espèces sont généralement considérés comme des Particules Browniennes (BP) [17, 47, 35].

En somme, les modèles des particules auto-propulsées (SPP) sont introduites pour étudier la dynamique collective d'une seule espèce mais jamais considérés pour la description simultanée de deux espèces; Moins encore de proie-prédateurs. Si tel est le cas, qu'en est-il des propriétés classiques déduites de ces modèles tels que l'ordre d'orientation, la formation des grappes (ou cluster) etc?

Notre approche consiste à construire un framework interprétant une dynamique du type Proie-Prédateur. Les individus sont considérés comme des points matériels dans une boîte périodique de taille  $B \times B$  localisés par leurs positions dans le plan cartésien et animés avec une certaine vitesse.

## 5.1 Modèles et Réglages de Simulations

### 5.1.1 Modèle des Proies

Pour le mouvement des proies, nous utilisons un modèle type décrivant la dynamique collective des particules comme dans [35] en négligeant la force de poussée et les interactions inter-particules.

Ainsi,  $n_p$  particules-proies sont aléatoirement distribuées à l'intérieur de la boîte périodique  $B \times B$ . la densité en nombre par unité de surface des proies est donnée par  $\rho_p = n_p/B^2$ .

$r_p^i(t)$ ,  $v_p^i(t)$  représentent respectivement, la *position* et la *vitesse* de l'individu  $i$  à l'instant  $t$ ; l'indice  $p$  est mise pour les proies.

Au début de la simulation ( $t = 0$ ), les proies ont leur vitesse donnée par une distribution gaussienne ( par exemple chaque individu a une vitesse aléatoire tirée de l'intervalle  $[-2, 2]$  ).

Après le premier pas de temps, chaque particule subit l'action d'une force totale  $M \frac{dv_p^i}{dt}$  que nous notons  $F^i$  et se déplace selon l'équation de Langvin (5.1.1) [35]

$$M \frac{dv_p^i}{dt} = -\gamma v_p^i + R^i(t), \quad (5.1.1)$$

où,  $M$  la *masse* d'une proie, fixée à 1 pour raison de simplification;  $v_p^i$  la *vitesse* du proie  $i$ ;  $\gamma$  est le *coefficient de frottement visqueux*, qui est fixé par les propriétés de l'environnement et la géométrie des particules;  $R^i(t)$  est une *force stochastique* donnée par :

$$R^i(t) = \sqrt{2\gamma k_B T} \zeta^i, \quad (5.1.2)$$

où  $k_B$  est la *constante de Boltzmann*;  $T$  est la *température* et  $\zeta^i$  est un *bruit blanc gaussien standard*. Pour simplicité, on pose  $T_B = k_B T$  qu'on dénomme *température de Boltzmann* .

Les composantes de  $\zeta^i$  sont calculées selon la transformation de Box-Muller. Elle consiste à choisir deux éléments  $u_1$  et  $u_2$  d'une distribution uniforme sur l'intervalle  $]0, 1]$  et les associer à deux variables standards normalement distribuées :

$$\begin{aligned} \zeta_x^i &= \sqrt{-2 \log(u_1)} \cos(2\pi u_2), \\ \zeta_y^i &= \sqrt{-2 \log(u_1)} \sin(2\pi u_2). \end{aligned}$$

Ainsi,  $F^i(t)$  sera déterminée par la formule :

$$F^i(t) = -\gamma v_p^i(t) + \sqrt{2\gamma T_B} \zeta^i. \quad (5.1.3)$$

Les positions des particules sont mises à jour en utilisant l'algorithme de Verlet [61],

$$r_p^i(t + \tau) = 2r_p^i(t) - r_p^i(t - \tau) + \tau^2 F^i(t). \quad (5.1.4)$$

Les vitesses des particules sont calculées selon la méthode de Störmer-Verlet,

$$v_p^i(t) = \frac{r_p^i(t + \tau) - r_p^i(t - \tau)}{2\tau} \quad (5.1.5)$$

Dans ce système, chaque particule a une trajectoire Brownienne (marche aléatoire). La moyenne de vitesse de toutes les particules dépend étroitement de  $\gamma$  et  $T_B$  (Voir annexes).

Nom	Valeurs Standard	Description	Champs (Unité)
GLOBALES			
$B$	125	Longueur de la boîte périodique	$\mathbb{R}^*$ (mm)
$L_t$	$5 \times 10^5$	Nombre de pas de temps	$\mathbb{N}^*$ (s)
$\tau$	1	Pas de temps	$\mathbb{R}^*$ (s)
PROIE			
$\rho_q$	0.12	Densité des proies en nombre par unité de surface	$[0.01; 4]$ ( $mm^{-2}$ )
$\gamma$	0.2	coefficient de frottement visqueux	$\mathbb{R}^*$ (N)
$T_B$	0.01	Température de Boltzmann	$\mathbb{R}^*$ (J)

TABLEAU 5.1 – Résumé de paramètres et variables globales et ceux spécifiques au modèle des proies

### 5.1.2 Modèle des Prédateurs.

Nous désignons par « Modèle des Prédateurs » une variante du Modèle de Vicsek (Cf. [63],[62]) en ajoutant la règle de répulsion ([16]) pour décrire le mouvement collectif des prédateurs dans l'environnement.

Ainsi,  $n_q$  particules-prédateurs sont distribuées à l'intérieur de la boîte périodique et se déplacent à vitesse constante  $v_q^0$ , la densité en nombre par unité de surface des prédateurs est donnée par  $\rho_q = n_q/B^2$ ;  $r_q^i(t)$  et  $v_q^i(t)$  représentent respectivement la position et le vecteur vitesse du  $i^{me}$  individu à l'instant  $t$ . L'indice  $q$  est spécifié pour les prédateurs.

$r_q^i(0)$  est aléatoirement distribué à l'intérieur de la boîte périodique [35], une vitesse initiale aléatoire  $v_q^i(0)$  est assignée à chaque particule.

Pour chaque pas de temps  $\tau$ , la position  $r_q^i(t)$  change selon Eq. (5.1.6).

$$r_q^i(t + \tau) = r_q^i(t) + \tau v_q^i(t), \quad (5.1.6)$$

la vitesse  $v_q^i$  dépend du nombre des individus autour du particule centrale  $i$  se

trouvant soit dans la zone de répulsion (*zor*) ou dans la zone d'alignement (*zoa*) [cf. FIG. 5.1.1].

Les deux zones sont définies par des cercles tels que le rayon  $R_r$  pour *zor* et  $R_a$  pour *zoa* avec  $R_r < R_a$ . La première zone comportementale représentée sur la figure FIG. 5.1.1 par le cercle interne au plus petit rayon  $R_r$ , est responsable du maintien d'une distance minimum entre particules voisines ; tandis que la seconde zone représentée par le cercle externe de rayon  $R_a$  est utilisée pour l'alignement des particules. Cette

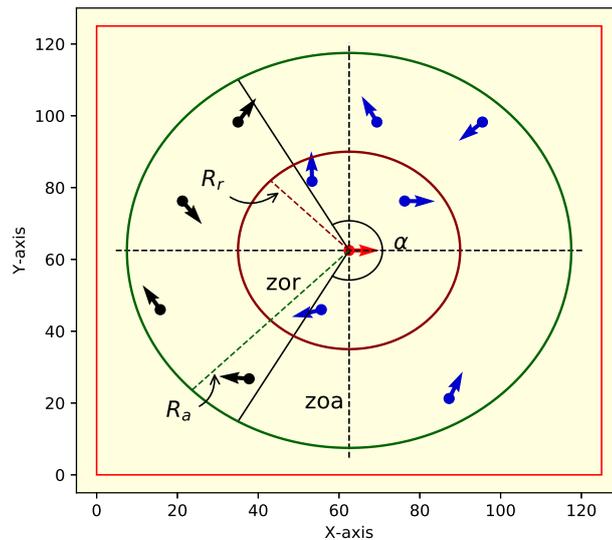


FIGURE 5.1.1 – Les paramètres d'interaction dans un modèle du type Vicsek. l'individu centrale (flèche rouge) devie ses plus proches voisins (flèche noire) qui sont dans zone de répulsion (le cercle interne de rayon  $R_r$ , *zor*) pour éviter des collisions et s'aligne avec les voisins qui sont dans la zone d'alignement (le cercle externe de rayon  $R_a$ , *zoa*) [48].

dépendance directionnelle est régie par les quartes règles suivantes :

**(a) règle de répulsion :** S'il y a  $n_r$  voisins autour de  $i$  dans *zor*, la vitesse  $v_q^i(t + \tau)$  est donnée par Eq. (5.1.7) :

$$v_q^i(t + \tau) = R(\xi_i(t)) V_r^i(t), \quad (5.1.7)$$

avec  $V_r^i(t)$  la direction désirée par la particule  $i$  et donner par Eq. (5.1.8) :

$$V_r^i(t) = -v_q^o \frac{\sum_{j \neq i}^{n_r} r_q^{ij}(t)}{\left| \sum_{j \neq i}^{n_r} r_q^{ij}(t) \right|}, \quad (5.1.8)$$

où  $v_q^o$  est la vitesse constante de toutes les particules ;  $r_q^{ij} = r_q^j - r_q^i$  est le vecteur dans

la direction de  $j$  et  $R(\xi_i(t))$  est la matrice de rotation Eq. (5.1.18).

$$R(\xi_i(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\xi_i(t)) & -\sin(\xi_i(t)) \\ \sin(\xi_i(t)) & \cos(\xi_i(t)) \end{bmatrix}, \quad (5.1.9)$$

$\xi_i(t)$  est un bruit angulaire tiré d'une distribution gaussienne de l'intervalle  $[-2\pi\eta; 2\pi\eta]$ , où  $\eta \in [0; 1]$  représente l'intensité du bruit.

**(b) Règle d'alignement :** s'il n'y a aucun voisin dans la zone de répulsion, l'individu  $i$  répond aux autres qui sont dans la zone d'alignement avec :

$$v_q^i(t + \tau) = \begin{cases} R(\xi_i(t))V_a^i(t), & b > a \\ v_q^i(t)v_q^o, & b \leq a, \end{cases} \quad (5.1.10)$$

où,

- $b$  est le cosinus de l'angle mesuré entre  $v_q^i(t)$  et  $r_q^{ij}$  ;
- $a \in [-1; 1]$  a une valeur fixée qui est le cosinus de l'angle de perception  $\alpha$ , l'angle mort devrait être  $360^\circ - \alpha$  ;
- la direction désirée par l'individu  $i$  dans  $zoa$  est

$$V_a^i(t) = v_q^o \phi(t)^\lambda \frac{\sum_{j=1}^{n_a} v_j^f(t)}{\left| \sum_{j=1}^{n_a} v_j^f(t) \right|}, \quad (5.1.11)$$

où  $n_a$  est le nombre de particules dans la zone d'alignement et  $\phi(t)$  l'ordre de polarisation donnée par :

$$\phi(t) = \frac{1}{n_a} \left| \sum_{i=1}^{n_a} v_q^i(t) \right|; \quad (5.1.12)$$

et  $\lambda$  est le degré de polarisation.

**(c) Règle absolue :** s'il y a répulsion, l'alignement est négligé.

**(d) Règle alternative :** s'il n'y a aucune particule dans les deux zones, l'individu  $i$  conserve sa direction, ainsi

$$v_q^i(t + \tau) = v_q^i(t)v_q^o. \quad (5.1.13)$$

### 5.1.3 Le Modèle de Proie-Prédateur

En plus des modèles précédents décrivant la mobilité des proies 5.1.1 et prédateurs 5.1.2, On s'intéresse dans cette partie à leur dynamique d'évolution en tant

Nom	Valeurs Standard	Description	Champs (Unité)
$\eta$	0.09	Intensité du bruit	[0; 1] (1)
$\rho_p$	0.012	Densité en nombre par unité de surface	[0.01; 1] ( $mm^{-2}$ )
$R_r$	1	Rayon de la zone de répulsion (zor)	[0; L] (mm)
$R_a$	4	Rayon de la zone d'alignement (zoa)	[0; L] (mm)
$v_o^p$	0.5	Vitesse de chaque particule	[0; $R_r$ ] (1)
$\alpha$	$\pi$	Angle de perception	[0; $2\pi$ ] (rad)

TABLEAU 5.2 – Paramètres du modèle de prédateurs.

que deux populations vivant dans un environnement commun (la boîte périodique).

Pour décrire cette dynamique, nous allons introduire un modèle de Proie-Prédateur en couplant ces deux modèles dont les hypothèses de couplage seront détaillées dans les sous sections suivantes.

Nous voulons savoir comment le comportement collectif des prédateurs agit sur l'abondance des proies et vice-versa ?

### Hypothèses sur la Dynamique des Proies

Dans cette partie, nous traitons les proies en tant que sujets vivants et émettons quelques hypothèses régissant leur vie. L'idée principale est d'associer chaque proie à un état d'énergie qu'on peut quantifier et qui varie chaque instant en fonction de la position du proie envers ses éventuels prédateurs. La variation de cet état d'énergie caractérise les états de vie de chaque individu à savoir : la survie, la reproduction et la mortalité.

À  $t = 0$ , nous réglons les données initiales suivantes :

1.  $n_p(0)$  la taille initiale de la population des proies ;
2. chaque proie a une énergie initiale  $E_p^i(0)$ . C'est une valeur tirée aléatoirement d'une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_{E_p}$  (i.e  $E_p^i(0) \hookrightarrow \mathfrak{N}(0, \sigma_{E_p})$ ).

À  $t = t + \tau$

1. **Mouvement** : la mobilité des proies obéit au modèle décrit ci-dessus dans la section 5.1.1.
2. **Survie** : la  $i^{eme}$  proie survie si elle est à l'extérieur de la zone de prédation de tous les prédateurs (Eq. 5.1.14). Elle obtient une énergie aléatoirement tirée d'une distribution gaussienne  $E_{s_p} \hookrightarrow \mathfrak{N}(0, \sigma_{E_p})$ ; C'est ce qu'on appelle *bonus de survie*. Ceci peut réduire ou augmenter son futur état d'énergie et modélise le fait que chaque proie peut survivre en engendrant une autre proie par clonage, ou juste survivre sans engendrer ou mourir. Ainsi, la  $i^{eme}$

proie survie si et seulement si :

$$\forall j \quad |r_i^p(t) - r_j^f(t)| > R_p, \quad (5.1.14)$$

ainsi

$$E_p^i(t + \tau) = E_p^i(t) + E_{s_p}. \quad (5.1.15)$$

3. **Reproduction** : si l'état d'énergie du  $i^{\text{ème}}$  proie dépasse un certain seuil de reproduction  $E_{r_p}$ , alors l'individu sera apte de se cloner.

$$E_p^i(t + \tau) \geq E_{r_p} \Rightarrow i^{\text{ème}} \text{ Proie se clone}; \quad (5.1.16)$$

ainsi, une nouvelle proie  $k$  naît dans la zone de naissance ( $zob_p$ ); On note  $R_{b_p}$  le rayon de cette zone. On associe à ce nouveau né un état d'énergie aléatoire  $E_p^k(t + \tau) \hookrightarrow \mathfrak{N}(0, \sigma_{E_p})$  et une vitesse aléatoire tirée d'une distribution uniforme.

4. **Mortalité** : les proies meurent quand ils n'ont pas suffisamment d'énergie, c'est-à-dire que leur état d'énergie est inférieur à un certain seuil de mortalité  $E_{d_p}$ .

$$E_p^i(t) \leq E_{d_p} \Rightarrow i^{\text{ème}} \text{ Proie meurt}. \quad (5.1.17)$$

Noter que leur mortalité peut être due à une prédation.

### Hypothèses sur la Dynamique des Prédateurs.

La taille initiale de la population des prédateurs est  $n_q(0)$ .

Comme les prédateurs ont besoin d'énergie pour survivre, on associe à chacun un état d'énergie  $E_q^i(0)$ ; la distribution de cette énergie est normale (i.e  $E_q^i(0) \hookrightarrow \mathfrak{N}(0, \sigma_{E_q})$ ).

À chaque instant, ils utilisent  $E_{m_q}$  quantité d'énergie; Ceci constitue leur métabolisme. Ils peuvent aussi gagner d'énergie par prédation. Elle est caractérisée par la capture des proies présentes dans la zone de prédation  $zop$  (un cercle de rayon  $R_p$ ) du prédateur central.

Les prédateurs meurent quand ils sont en manque d'énergie; C'est-à-dire quand leurs états d'énergie descendent en dessous du *seuil de mortalité*  $E_{d_q}$ . D'autre part, si leur état d'énergie dépasse le *seuil de reproduction*  $E_{r_q}$ , ils se divisent en deux agents (c'est la reproduction par clonage).

Les lignes suivantes montrent les différentes étapes de l'algorithme pour implémenter ce modèle.

On admet que l'ordre des actions menées par un individu est : mouvement, prédation (nutrition), métabolisme, reproduction, et mortalité. À  $t = 0$

1.  $n_q(0)$  la taille initiale de la population des prédateurs;

2. chaque prédateur a une énergie initiale  $E_q^i(0)$ . C'est une valeur tirée aléatoirement d'une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_{E_q}$  (i.e  $E_q^i(0) \hookrightarrow \mathfrak{N}(0, \sigma_{E_q})$  ).

À  $t = t + \tau$  :

1. **Mouvement** : la mobilité des prédateurs obéit au modèle décrit ci-dessus dans la section 5.1.2.
2. **Métabolisme** : chaque prédateur  $i$  utilise  $E_{m_q}$  quantité d'énergie qu'on dénomme *coût de métabolisme*, ainsi

$$E_q^i(t + \tau) = E_q^i(t) - E_{m_q}. \quad (5.1.18)$$

3. **Prédation** : tout prédateur  $i$  capture chaque proie  $j$  se trouvant dans sa zone de prédation, ainsi son état d'énergie augmente de  $E_{a_q}$  qu'on appelle *bonus de prédation*.

$$|r_i^f(t) - r_j^p(t)| \leq R_p \Rightarrow E_q^i(t + \tau) = E_q^i(t) + E_{a_q}; \quad (5.1.19)$$

$R_p$  est le rayon de la zone de prédation  $zop$ .

4. **Reproduction** :

$$E_q^i(t + \tau) \geq E_{r_q} \Rightarrow i^{eme} \text{ prédateur se clone}; \quad (5.1.20)$$

ainsi, un nouveau prédateur  $k$  naît dans la zone de naissance ( $zob_q$ ); On note  $R_{b_q}$  le rayon de cette zone. On associe à ce nouveau né un état d'énergie aléatoire  $E_q^k(t + \tau) \hookrightarrow \mathfrak{N}(0, \sigma_{E_q})$  et une vitesse aléatoire tirée d'une distribution uniforme.

5. **Mortalité** :

$$E_q^i(t) \leq E_{d_q} \Rightarrow i^{eme} \text{ prédateur meurt}. \quad (5.1.21)$$

## 5.2 Résultats et Discussions.

### 5.2.1 Analyse du Modèle de Proie-Prédateur.

Nous avons effectué des simulations sur ordinateur pour analyser le modèle de Proie-Prédateur. Sauf mention explicite, nous gardons tous les paramètres standards comme indiqués dans les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3. On appelle ceux-ci *paramètres standards* car ils engendrent un régime où la densité des espèces oscille au cours du temps, c'est un régime périodique. Cependant, en variant certains paramètres, on peut avoir d'autres types de régime comme l'extinction simultanée de deux espèces ou la survie d'une espèce et l'extinction de l'autre.

Nom	Valeurs Standard	Description	Champs (Unité)
PROIES			
$R_{b_p}$	0.5	Rayon de la zone de naissance ( $zob_p$ )	$[0; L]$ (mm)
$\sigma_{E_p}$	2.73	Écart-Type de la distribution d'Énergie	$\mathbb{R}^*$ (J)
$E_{r_p}$	6	Seuil de reproduction	$\mathbb{R}^*$ (J)
$E_{s_p}$	$\mathcal{N}(0, \sigma_{E_p})$	Bonus de survie	$\mathbb{R}^*$ (J)
$E_{d_p}$	-8	Seuil de mortalité	$\mathbb{R}^*$ (J)
PRÉDATEURS			
$R_p$	6	Rayon de la zone de prédation ( $zop$ )	$[0; L]$ (mm)
$R_{b_q}$	1	Rayon de la zone de naissance ( $zob_q$ )	$[0; L]$ (mm)
$\sigma_{E_q}$	2.73	Écart-Type de la distribution d'Énergie	$\mathbb{R}^*$ (J)
$E_{m_q}$	0.01	Coût de métabolisme	$\mathbb{R}^*$ (J)
$E_{a_q}$	0.025	Bonus de prédation	$\mathbb{R}^*$ (J)
$E_{r_q}$	8	Seuil de reproduction	$\mathbb{R}^*$ (J)
$E_{d_q}$	-8	Seuil de mortalité	$\mathbb{R}^*$ (J)

TABLEAU 5.3 – Paramètres du modèle de Proie-Prédateur ; Les valeurs standards sont celles qui produisent un régime pseudo-périodique du système.

Nous regardons quelques propriétés de ce régime périodique en se focalisant sur trois cas caractéristiques de temps selon la densité des prédateurs : minimum ( $t_1$ ), moyen ( $t_3$ ) et maximum ( $t_2$ ) (cf. FIG. 5.2.1). Ces trois cas représentent typiquement les différentes phases de la dynamique collective des prédateurs. Dans ce sens, les images instantanées (a), (b) et (c) illustrent la distribution spatiale des espèces. C'est remarquable que la densité des proies est moins importante là où la densité des prédateurs est élevée et vice-versa. L'évolution de ces densités au cours du temps est illustrée dans la figure FIG. 5.2.1-(d). On a observé que les variations de la densité ont un impact sur la dynamique collective notamment sur l'ordre d'orientation des particules et la formation des groupes (ou cluster) ; Ces résultats sont obtenus dans plusieurs études des modèles du type Vicsek.

Pour cela, on fait des investigations sur l'ordre d'orientation des particules en évaluant le paramètre d'ordre d'orientation  $\Phi(t)$ , qui quantifie l'alignement des particules prédateurs par la moyenne des vecteurs vitesse instantanées.

$$\Phi(t) = \frac{1}{n_q(t)v_q^0} \left| \sum_{i=1}^{n_q(t)} v_q^i(t) \right|; \quad (5.2.1)$$

ce paramètre varie de zéro (0) dans le cas d'une phase désordonnée à un (1) dans le cas d'une phase complètement ordonnée. FIG 5.2.1-(e) montre l'évolution du paramètre d'ordre de polarisation  $\Phi(t)$ . Les particules paraissent moins ordonnées

à faible densité. Cependant, il n'est pas évident de dégager une corrélation entre la variation de la densité des particules et leur ordre de polarisation. Cela est dû au fait que l'apparition des nouveaux nés bouleverse l'alignement des particules et constitue en quelques sorte une transition de phase locale et spontanée. Pour

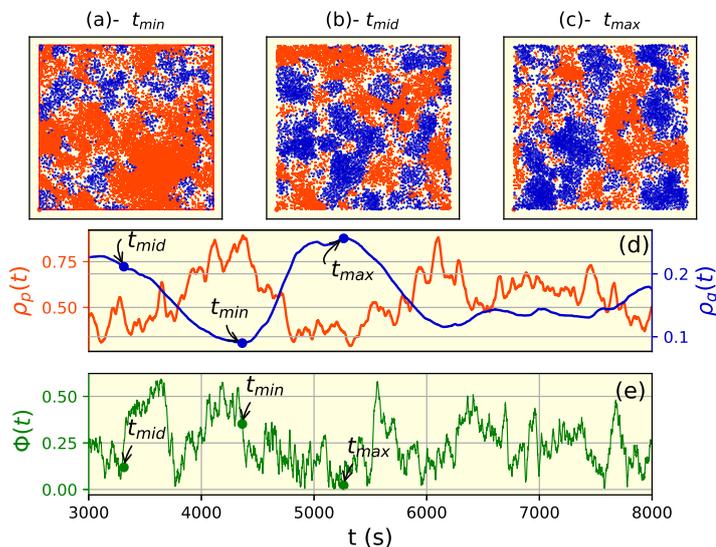


FIGURE 5.2.1 – Instantanées des distribution des particules dans la boîte périodique : prédateurs (bleu) et proies (marron) respectivement pour trois cas de densité de prédateurs : (a) densité minimum  $\rho_{min}^q = 0.10$ ; (b) Densité maximum  $\rho_{max}^q = 0.20$  et (c) Densité moyenne (ou intermédiaire)  $\rho_{mid}^q = 0.18$ . Les sous figures (d) et (e) montrent respectivement l'évolution de la densité des espèces et celle du paramètre d'ordre de polarisation  $\Phi(t)$  au cours du temps.  $t_{min}$ ,  $t_{mid}$  et  $t_{max}$  indiquent les trois cas mentionnés ci-haut.

mieux comprendre l'évolution des densités prédateur-proie ( $\rho_q(t), \rho_p(t)$ ) et l'ordre d'orientation équivalent des prédateurs ( $\Phi(t)$ ), nous exécutons 18 essais avec un temps total  $L_t = 5 \times 10^4$ . Les résultats sont identiques c'est-à-dire que la densité de prédateurs  $\rho_q(t)$  s'oscille dans  $[0.013; 0.33]$  et celui des proies  $\rho_p(t)$  en  $[0.12; 1, 32]$ . Nous avons observé comme au premier essai que  $\rho_q$  augmente lorsque  $\rho_p(t)$  diminue et vice-versa. Cette observation permet de conclure qu'il existe un point d'équilibre ( $\tilde{\rho}_q(t), \tilde{\rho}_p(t)$ ) et un cycle limité autour de celui-ci.

On note ( $\bar{\rho}_q(t), \bar{\rho}_p(t), \bar{\Phi}(t)$ ) la moyenne instantanée (moyenne quadratique) de ( $\rho_q(t), \rho_p(t), \Phi(t)$ ); Les sous-figures (a), (b) et (c) de la figure 5.2.2 présentent ces quantités à  $t \in [4.3 \times 10^4, 5 \times 10^4]$ . La courbe de  $\rho_q$  est plus lisse que la courbe de  $\rho_p$ . Ce fait pourrait s'expliquer par l'impact du stochastique dans les hypothèses de la dynamique des proies (cf. 5.1.3). Le même effet aléatoire est observé sur le paramètre d'ordre polaire  $\Phi(t)$ . De plus,  $\Phi$  est borné en  $[0.076, 0.67]$ ; Cela signifie que les prédateurs pourraient être complètement désordonnés pendant un certain temps et qu'ils ne peuvent pas atteindre un ordre d'orientation supérieur à 0,67. Par conséquent, la présence de proies a un impact sur la dynamique collective des prédateurs en tant que facteur de désordre.

Nous avons poursuivi notre analyse en regardant les histogrammes de ( $\bar{\rho}_q(t), \bar{\rho}_p(t), \bar{\Phi}(t)$ );

Toutes les distributions ressemblent à des distributions gaussiennes ( sous-figures (c), (d) et (e) de la figure 5.2.2. Nous avons trouvé des fonctions approximatives  $f_q$ ,  $f_p$  et  $f_\Phi$  respectivement pour la distribution de densité de prédateurs, des proies et paramètres de l'ordre d'orientation :

$$f_q(\bar{\rho}_q(t)) = \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{\rho}_q(t) - \mu_q)^2}{2\sigma_q^2}}, \quad (\mu_q, \sigma_q) = (0.18, 0.011); \quad (5.2.2)$$

$$f_p(\bar{\rho}_p(t)) = \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{\rho}_p(t) - \mu_p)^2}{2\sigma_p^2}}, \quad (\mu_p, \sigma_p) = (0.5, 0.041); \quad (5.2.3)$$

$$f_\Phi(\bar{\Phi}(t)) = \frac{1}{\sigma_\Phi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{\Phi}(t) - \mu_\Phi)^2}{2\sigma_\Phi^2}}, \quad (\mu_\Phi, \sigma_\Phi) = (0.54, 0.31). \quad (5.2.4)$$

Avec la condition :

$$\int_{\bar{\rho}_q^{min}}^{\mu_q} f_q(\bar{\rho}_q(t)) d\bar{\rho}_q(t) = \alpha \int_{\mu_p}^{\bar{\rho}_p^{max}} f_p(\bar{\rho}_p(t)) d\bar{\rho}_p(t); \quad (5.2.5)$$

$$\int_{\bar{\rho}_p^{min}}^{\mu_p} f_p(\bar{\rho}_p(t)) d\bar{\rho}_p(t) = \beta \int_{\mu_q}^{\bar{\rho}_q^{max}} f_q(\bar{\rho}_q(t)) d\bar{\rho}_q(t); \quad (5.2.6)$$

Cette condition est une forme d'un résultat empirique qui stipule que la densité des proies évolue inversement à celle des prédateurs. Peut-on l'utiliser pour déduire une équation de l'évolution du système Proie-Prédateur? Cette interrogation est mise en suspens au profit de l'étude des fluctuations en nombre des particules prédateurs.

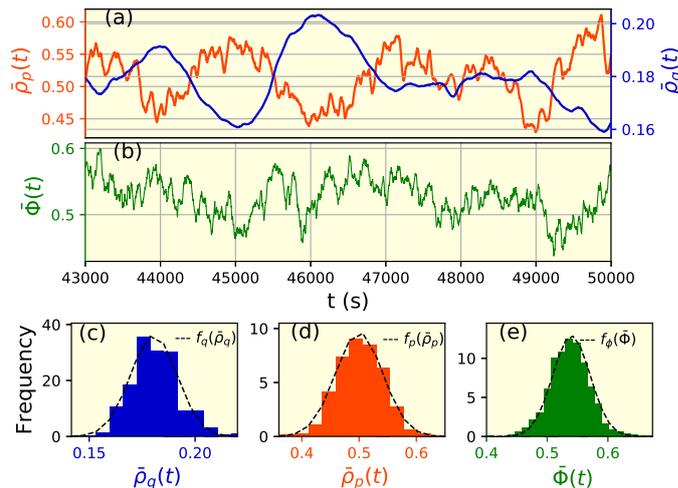


FIGURE 5.2.2 – (a) Évolution de la densité moyenne des prédateurs (bleu) et proies ( marron) (b) Évolution de la moyenne du paramètre d'ordre de polarisation correspondant. La moyenne est calculée de 18 simulations indépendantes avec des paramètres standards.

Deuxièmement, nous caractérisons la fluctuation des densités de particules :  $\langle \Delta \rho_q(l) \rangle = \sqrt{\langle \rho_q(l)^2 \rangle - \langle \rho_q(l) \rangle^2}$  où  $\rho_q(l)$  désigne la densité de prédateurs dans une

boîte de longueur  $l$ .  $\langle \Delta \rho_q(l) \rangle$  est en général proportionnelle à  $\langle \rho_q(l) \rangle^\beta$ .  $\beta = 0.5$  correspond à une fluctuation normale et  $\beta > 0.5$  est une « fluctuation giant » [44]. Dans notre système, la fluctuation de la densité des prédateurs est estimée pour trois cas de densité. Pour des densités minimums et moyennes, l'exposant critique est  $\beta \simeq 0.8$ ; Ceci correspond à une « fluctuation giant ». Pour les densités maximums, la fluctuation est normale à cause de  $\beta \simeq 0.5$ . Nous examinons enfin la distribution

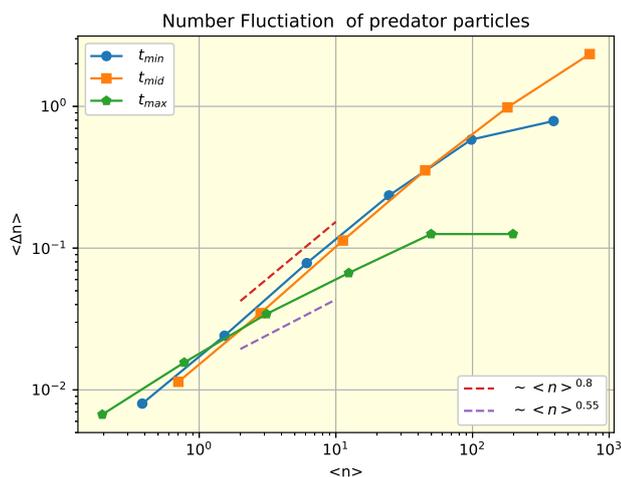


FIGURE 5.2.3 – fluctuation de nombre des particules prédateurs pour trois cas temps caractéristiques : à  $t_{min}$  densité minimum,  $t_{mid}$  densité maximum et  $t_{max}$  densité intermédiaire. L'exposant critique  $\beta$  est dans  $[0.55; 0.8]$ .

en cluster<sup>1</sup> des particules prédatrices. Formellement, la dynamique de cluster du système SPP peut être décrite en dérivant une équation décrivant l'évolution de la probabilité  $p(m)$ , où  $m = m_1, m_2, \dots, m_N$  avec  $m_1$  étant le nombre d'un particule isolée,  $m_2$  le nombre d'amas de deux particules,  $m_3$  le nombre de cluster de trois particules, etc. Un cluster dans notre modèle est défini comme un groupe de particules avec une distance entre voisins plus petite ou égale au rayon de la zone d'alignement  $R_a$ , c'est-à-dire les particules interagissant directement ou via des agents voisins sont incluses dans un seul cluster. Cette définition est utilisée dans [48].

## 5.2.2 Comparaison du Modèle Prédateur-Proie et celui de Lotka-Voltera

Le modèle de Lotka-Volterra est le système d'EDO (5.2.7). Il décrit la dynamique d'une population composée de proies ( $p(t)$ ) et de prédateurs  $q(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \kappa p(t) - \lambda p(t)q(t), \\ \dot{q}(t) = -\mu q(t) + \nu p(t)q(t), \end{cases} \quad (5.2.7)$$

1. "Cluster" : anglicisme qui signifie "grappe"

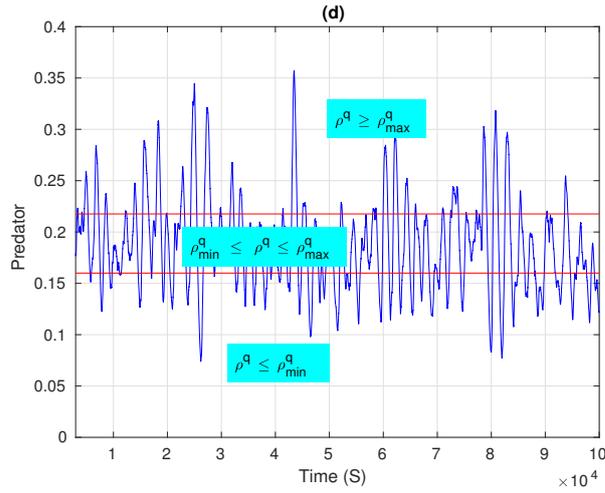


FIGURE 5.2.4

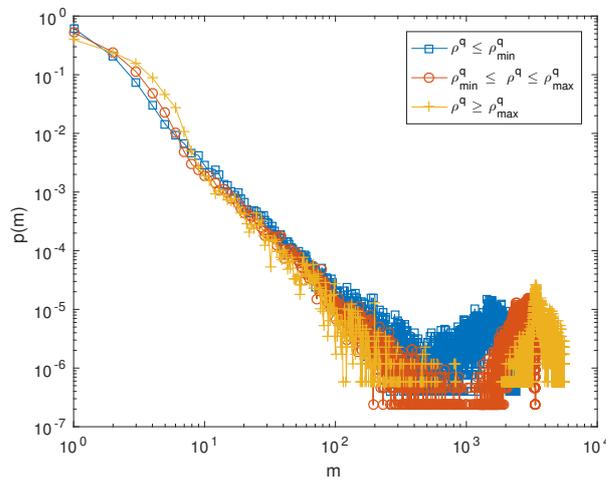


FIGURE 5.2.5 – Statistiques de cluster pour trois gammes de densité de prédateurs.  $\rho^q \leq \rho_{min}^q, \rho_{min}^q \leq \rho^q \leq \rho_{max}^q, \rho^q \geq \rho_{max}^q$ .  $\rho_{min}^q = 0.16$  et  $\rho_{max}^q = 0.21$ .  $L_t = 10^5$  et le reste des paramètres sont standard.

où  $\kappa$  est le taux de croissance intrinsèque des proies,  $\lambda$  le taux de prédation,  $\mu$  le taux de mortalité des prédateurs et  $\nu$  le taux de reproduction des prédateurs pour 1 proie mangée.

Dans cette section, les paramètres du modèle Lotka-Volterra sont évalués statistiquement en simulant le modèle prédateur-proie décrit ci-dessus.

### Dynamique de Proies

Nous examinons la dynamique des proies en l'absence de prédateurs. On définit la vitesse d'évolution instantanée intrinsèque par :

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{\rho_p(t) - \rho_p(t-dt)}{\rho_p(t-dt)} \cdot \frac{1}{dt}, \quad (5.2.8)$$

et le taux d'évolution relatif par  $\tilde{\kappa} = \langle \tilde{\kappa}(t) \rangle$ . Avec des paramètres standards, l'estimation de  $\tilde{\kappa}$  après 20 simulations indépendantes est  $\tilde{\kappa} = 0,0013$ .

Ainsi, l'évolution de la population de proies est quasi-exponentielle 5.2.6.

### Dynamique de Prédateurs

Supposons qu'il n'y ait pas de proie alors, la dynamique de prédateur sera considérée comme dans la section 5.1.2 mais la règle de prédation ne tient pas. Nous définissons le taux d'évolution instantané des prédateurs par :

$$\tilde{\mu}(t) = \frac{\rho_q(t) - \rho_q(t - dt)}{\rho_q(t - dt)} \cdot \frac{1}{dt} \quad (5.2.9)$$

et le taux d'évolution relative  $\tilde{\mu} = \langle \tilde{\mu}(t) \rangle$ . L'estimation de  $\tilde{\mu}$  après 20 simulations indépendantes est  $\tilde{\mu} = -9.7945 \times 10^{-05}$ . Donc, la population de prédateurs s'éteint.

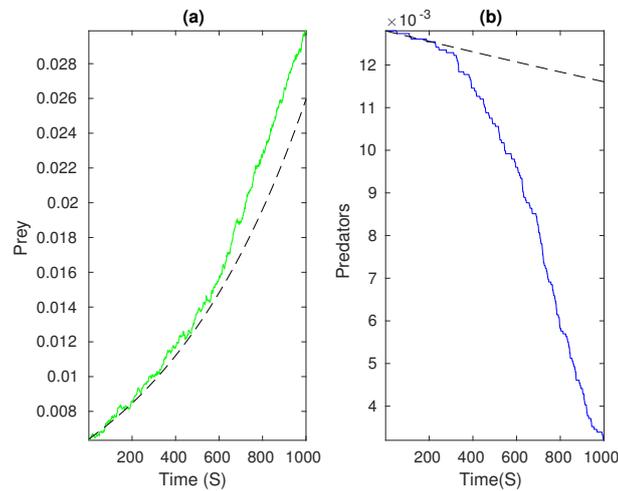


FIGURE 5.2.6 – (a) Évolution de la densité des proies en absence de prédateur (ligne verte) et fonction approchée  $y(t) = \rho_p(0)e^{\tilde{\kappa}t}$  (ligne pointillée) (b) évolution de densité des prédateurs en absence des proies (ligne bleue) et la fonction approchée  $y(t) = \rho_q(0)e^{\tilde{\mu}t}$  (ligne pointillée).



L'objectif principal étant de comprendre et de contribuer aux concepts mathématiques des systèmes de réaction-diffusion liés à la dynamique de population dans une chaîne trophique.

Nous avons dans un premier temps construit un modèle biologique, il s'agit d'un système dynamique non linéaire décrivant l'évolution de trois espèces de la chaîne trophique : nutriment, phytoplanctons et zooplanctons. Hormis la gestion de paramètres admissibles qui est la principale difficulté, nous sommes satisfaits de voir des solutions stables émerger d'un système dynamique à plusieurs degrés de liberté. Tout de même, l'étude peut-être poussée en accentuant sur la bifurcation et la théorie autour des cycles limites. L'on pourrait aussi optimiser les paramètres pour manipuler deux potentiels équilibres positifs.

En second lieu, on peut retenir que l'étude du modèle NPZ couplé en intégrant les effets de convection-diffusion fait appel à une théorie différente de celle de Lyapunov ou Lasalle. Rien que l'existence et l'unicité de solutions sollicite diverses méthodes de l'analyse fonctionnelle : Faedo-Galerkin, Compacité, Interpolation etc.

Enfin, nous concevons un modèle du type proie-prédateur en incrustant aussi des effets de convection-diffusion. Le paradigme étant différent de celui des EDO & EDP, les modèles Lagrangiens du type ABM & SPP ne nécessitent pas assez des études théoriques en amont. La question centrale est de concevoir un algorithme efficient qui simule les résultats escomptés.



## Sommaire du présent chapitre

A.1 Principales inégalités	117
A.2 Notations Sur le EDP	119
A.3 Résultats d'Analyse EDO	120
A.4 Outils d'Algèbre	121

## A.1 Principales inégalités

### A.1.1 Inégalités sur les espaces vectoriels normés

#### Inégalité de Cauchy-Schwartz

**Définition A.1.1** (Espace de Hilbert). On appelle espace de Hilbert, un espace vectoriel  $H$  (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  tel que la semi-norme  $\sqrt{\langle x, y \rangle}$  soit une norme sur  $H$  qui rende cet espace complet.

**Proposition A.1.1** (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Soit  $H$  un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle x, y \rangle$ ; pour tout  $x, y \in H$ , on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{Avec } \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.1.1})$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$  de

module 1 tel que  $\alpha \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$ ; pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le produit scalaire  $\langle \alpha x + ty, \alpha x + ty \rangle$  est positif. D'autres part, le polynôme

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + ty, \alpha x + ty \rangle &= \langle \alpha x, \alpha x \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle \alpha x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2t |\langle x, y \rangle| + t^2 \langle y, y \rangle, \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est positif. Donc son discriminant est négatif ou nul. Cela donne :

$$|\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0$$

■

**Remarque A.1.1.** L'inégalité de Cauchy-Schwartz est valable en général sur un espace vectoriel  $X$  muni d'un produit scalaire  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  telle que :

$$\forall x, y \in X, |\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

**Corollaire A.1.0.1** (Cauchy-Schwartz dans  $L^2(\Omega)$ ). Comme  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$  alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit :

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad (\text{A.1.2})$$

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{A.1.3})$$

Signalons que l'inégalité de Cauchy-Schwartz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder (A.1.6 ou A.1.7) qui se démontre grâce à l'inégalité de Young (A.1.4 ou A.1.5).

### Inégalité de Young

**Proposition A.1.2** (Inégalité de Young). Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+$  et  $p, q \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{avec égalité si } a^p = b^q \quad (\text{A.1.4})$$

Cette inégalité est parfois utilisé sous la forme particulière

$$ab \leq \epsilon a^p + C_{\epsilon} b^q \quad \text{avec } C_{\epsilon} = \epsilon^{-\frac{1}{p-1}}. \quad (\text{A.1.5})$$

### Inégalité de Hölder

l'inégalité de Hölder est fondamentale aux espaces des fonctions  $L^p$  et aux espaces des suites  $\ell^p$ .

**Proposition A.1.3** (Inégalité de Hölder). Soit  $\Omega$  un espace mesuré,  $p, q > 0$  deux réels conjugués c'est-à-dire  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ . Alors, le produit  $fg$  est dans  $L^1(\Omega)$  et sa norme est majorée par la relation suivante :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad (\text{A.1.6})$$

Plus généralement, pour  $p > 0$ ,  $q \leq \infty$  et  $r$  défini par la relation  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ , si  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ , alors  $fg \in L^r(\Omega)$  et :

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad (\text{A.1.7})$$

De plus lorsque  $p$  et  $q$  sont finis, il y a égalité si et seulement si, il existe  $\alpha \neq 0$  tel que :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \alpha \|g\|_{L^q(\Omega)}^q p \cdot p \quad (\text{A.1.8})$$

La preuve de ce théorème utilise l'inégalité de Young (A.1.4 ou A.1.5).

**Remarque A.1.2.** Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder :

Soient  $f_1, f_2, \dots, f_k$  des fonctions telles que  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  avec  $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \leq 1$ . Alors, le produit  $f = \prod_{i=1}^k f_i$  appartient à  $L^p(\Omega)$  et

$$\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

En particulier si  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  alors  $f \in L^r(\Omega)$  pour tout  $p \leq r \leq q$  et l'on a l'**inégalité d'interpolation**

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \cdot \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad (\text{A.1.9})$$

$$\text{où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

**Corollaire A.1.0.2** (Application de l'inégalité de Hölder). L'inégalité de Hölder fournit une relation importante entre les espaces  $L^p$  associés à une mesure fini de masse totale  $M$  :

$$0 < r \leq q \leq +\infty \Rightarrow L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega) \quad \text{et} \\ \forall g \in L^q(\Omega) \quad \|g\|_{L^r(\Omega)} \leq M^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (\text{A.1.10})$$

## A.1.2 Formules intégrales

Dans cette section, on considère  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  est  $C^1$

**Théorème A.1.1 (Gauss-Green).** On suppose  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_{\Gamma} u v_l dS, \quad (\text{A.1.11}) \\ l = \{1, 2, \dots, n\}$$

( Voir [11] Page 628 )

**Théorème A.1.2 (Formule d'intégration par parties).** Soient  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ , alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_l} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_l} dx + \int_{\Gamma} u v \nu_l dS, \quad (A.1.12)$$

$$l = \{1, 2, \dots, n\}$$

**Théorème A.1.3 (Formules de Green).** Soient  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ , alors

(i)

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS;$$

(ii)

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} dS;$$

(iii)

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

**A.1.3 Inégalités Sur les Espaces de Sobolev.**

**Inégalité de Poincaré.**

Elle permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition.

**Proposition A.1.4 (Inégalité de Poincaré).** Soit  $\Omega$  un ouvert borné, ou de mesure finie, ou borné dans une direction;  $p$  un réel tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors, il existe une constante  $C_{\Omega,p}$  ( c'est-à-dire dépendant de  $\Omega$  et de  $p$  ) telle que pour tout  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{\Omega,p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (A.1.13)$$

En particulier, l'expression  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  est une norme sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  qui est équivalente à la norme  $\|\nabla u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ ; Sur  $H_0^1(\Omega)$ ,

l'expression  $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$  est un produit scalaire qui induit la norme  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$  (Voir H. Brezis [10])

**Inégalité d'Interpolation**

**Inégalité de Gagliardo-Nirenberg**

**Inégalité de Ladyzhenskaya**

**A.2 Notations Sur le EDP**

**A.2.1 Notions géométriques**

$\Omega$  : Ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ; Point générique  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .  
 $\Gamma$  : Frontière de  $\Omega$ ;  $d\Gamma$  = mesure de surface sur  $\Gamma$ .  
 $Q = \Omega \times ]0, T[$ ,  $t \in ]0, T[$  ( $t$  = temps).  
 $\Sigma = \Gamma \times ]0, T[$ ,  $d\Sigma = d\Gamma dt$ .

**A.2.2 Notations pour les dérivées**

**Notations des Multi-index**

$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} + \dots + \partial x_n^{\alpha_n}}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .  
 Si  $m$  est un entier positif,

$$D^m u(x) = \{D^\alpha u(x), \quad |\alpha| = m\}$$

L'ensemble de toutes les dérivées partielles d'ordre  $m$ . En supposant un certain ordre sur les dérivées partielles, on peut ainsi voir  $D^m u(x)$  comme un point de  $\mathbb{R}^{n^m}$

**A.2.3 Espaces fonctionnels "abstrait"**

Les espaces considérés sont très généralement réels.

$V$  ( resp.  $\mathcal{V}$  ) espace de Banach réflexif.

$H$  ( resp.  $\mathcal{H}$  ) espace de Hilbert.

$V \subset H$  ( resp.  $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$  ), dense, injection continue.

$H$  ( resp.  $\mathcal{H}$  ) est identifié à son dual; Alors  $V \subset H \subset V'$  ( resp.  $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$  ).

En général  $V, H, V'$  (resp.  $\mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{V}'$ ) sont des espaces fonctionnels sur  $\Omega$  (resp.  $Q$ ).

### A.2.4 Espaces fonctionnels "concrets"

$\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(Q), \dots$  = espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega, Q, \dots$ , muni de la topologie de limite inductive de Schwartz [[52]].

$\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}'(Q), \dots$  = dual de  $\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(Q), \dots$  = espace de distributions sur  $\Omega, Q, \dots$ ;  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), espace des (classes) de fonctions de puissance  $p$ -ième intégrables sur  $\Omega$  pour la mesure  $dx = dx_1 \dots dx_n$ ;

$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$  définit une norme sur  $L^p(\Omega)$ .

Si  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur  $\Omega$  :  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{K \geq 0, |f(x)| \leq K \text{ p.p. } x \in \Omega\}$ .

$W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ ;

L'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est complet pour la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{m,p}(\Omega)$

$W^{m,p}(\bar{\Omega}) = \mathcal{D}(\bar{\Omega})^{W^{m,p}(\Omega)}$ .

$W^{-m,p'}(\Omega) = \text{dual de } W_0^{m,p}(\Omega)$ .

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ .

$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ .

$H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$ .

$H^s(\Omega) = \text{espace de Sobolev d'ordre non entier } s$ .

$H^s(\bar{\Omega}) = \text{espace analogue sur } \bar{\Omega}$ .

$C^k(\bar{\Omega}) = \text{fonctions } k \text{ fois continûment différentiables dans } \bar{\Omega}$ .

$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Si  $X$  est un espace de Banach,  $L^p(0, T; X) = \{f \mid f \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$  pour ( $1 \leq p < \infty$ ).

$L^\infty(0, T; X) = \{f \mid f \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X, \text{ess sup}_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X < \infty\}$ .

$\mathcal{D}([0, T]; X) = \text{fonctions } C^\infty \text{ de } [0, T] \rightarrow X \text{ et à support compact dans } ]0, T[$ .

$C^k([0, T]; X) = \text{fonctions } k \text{ fois continûment différentiables de } [0, T] \rightarrow X$ .

$\mathcal{L}(X; Y) = \text{espace des applications linéaires continues de } X \text{ dans } Y$  ( $X$  et  $Y$  étant des espaces vectoriels topologiques).

$\mathcal{D}'([0, T]; X) = \mathcal{L}([0, T]; X) = \text{espace des distributions sur } ]0, T[ \text{ à valeurs dans } X$ .

## A.3 Résultats d'Analyse EDO

### A.3.1 Inégalité Sur les EDO

**Lemme A.3.1 (de Gronwall).** Soit  $y \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$  telle qu'il existe  $a, b \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$  avec :

$$y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t a(\sigma)y(\sigma)d\sigma, \forall t \in [0, T]$$

Alors

$$y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t b(\sigma)a(\sigma)e^{\int_{\sigma}^t a(s)ds} d\sigma, \forall t \in [0, T]$$

**Théorème A.3.1 (Point fixe de Banach-Picard).** Soit  $\mathcal{T}$  un opérateur sur un espace de Banach (1.1.4) dont une puissance est contractante (i.e.  $\exists k \in \mathbb{N}, \mathcal{T}^k(\mathcal{T}(u)) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^k(u)) = \mathcal{T}(u) \quad \forall u \in E$ )

Alors  $\mathcal{T}$  admet un point fixe unique. i.e

$$\exists! u \in E \quad \text{t.q.} \quad \mathcal{T}(u) = u$$

**Corollaire A.3.1.1 (de Gronwall version a).** Sous les hypothèses du lemme A.3.1, si  $b$  est dérivable, on montre (intégration par parties)  $\forall t \in [0, T]$  :

$$y(t) \leq b(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma} + \int_{t_0}^t b'(\sigma)e^{\int_{\sigma}^t a(s)ds} d\sigma,$$

En particulier, si  $b$  est constante on aura :

$$y(t) \leq b(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma} \quad \forall t \in [0, T]$$

**Lemme A.3.2 (de Gronwall version b).** On appelle parfois Lemme de Gronwall fait suivant : Si une fonction  $y$  de classe  $C^1$  satisfait une inégalité différentielle du type :

$$y'(t) \leq b(t) + a(t)y(t) \quad \forall t \in [t_0; T]$$

Alors :

$$y(t) \leq e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} y(t_0) + \int_{t_0}^t b(\sigma) e^{\int_{\sigma}^t a(s)ds} d\sigma$$

**Théorème A.3.2 (des bouts).** Sous les hypothèses du théorème 1.2.1, soit  $y \in C^1(J; \mathcal{U})$  une solution maximale. On pose  $b = \sup I$  et  $\beta = \sup J$ .

Alors soit  $\beta = b$ , soit "  $y$  sort de tout compact " ( ou "explose" ) de  $\mathcal{U}$ .

i.e  $\forall K \subset \mathcal{U}$ ,  $K$  - compact,  $\exists \eta < \beta$  t.q  $y(t) \in \mathcal{U} \setminus K \forall t \geq \eta$ , avec  $t \in J$

On a le résultat analogue pour les bornes inférieures.

## A.4 Outils d'Algèbre

**Lemme A.4.1 (Critère de Sylvester).**

Soit  $H = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice réelle symétrique ou complexe hermitienne. Alors  $H$  est définie positive si et seulement si les  $n$  mineurs principaux dominants sont strictement positifs. En d'autres termes, les déterminants des matrices  $H_p = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  où  $p \in \{1; 2; \dots; n\}$

**Proposition A.4.1 (Critère de Hurwitz).**

Soit  $P(X) = h_0 X^3 + h_1 X^2 + h_2 X + h_3$   $h_0 > 0$ , la matrice  $3 \times 3$  donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 & 0 \\ h_0 & h_2 & 0 \\ 0 & h_1 & h_3 \end{pmatrix},$$

est appelée **matrice de Hurwitz** associée au polynôme  $P(X)$ . Alors  $P$  est stable si et seulement si tous les mineurs principaux de  $H$  sont positifs i.e

$$H_1 = h_1 > 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ h_0 & h_2 \end{vmatrix} = h_1 h_2 - h_0 h_3 > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 & 0 \\ h_0 & h_2 & 0 \\ 0 & h_1 & h_3 \end{vmatrix} = h_3 H_2 > 0.$$



## BIBLIOGRAPHIE

- [1]  WIKIPÉDIA. *Définition Convection*. URL : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Convection>.
- [2]  WIKIPÉDIA. *Définition Predation*. URL : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Predation>.
- [3] M. AGARWAL et V. SINGH. « Persistence and stability for the three species ratio-dependent food–chain model ». In : *International Journal of Engineering, Science and Technology* 3.1 (2011).
- [4] Bedr'Eddine AINSEBA, Mostafa BENDAHMANE et Ahmed NOUSSAIR. « A reaction–diffusion system modeling predator–prey with prey-taxis ». In : *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 9 (2008), p. 2086-2105.
- [5] H. R. AKÇAKAYA et al. « The Theory of Population Dynamics : Physiological Delays ». In : *Bulletin of Mathematical Biology* 50 (1988), p. 503-515.
- [6] Herbert AMANN. *Ordinary Differential Equations : An Introduction to Nonlinear Analysis*. Texts in Applied Mathematics 5. Springer-Verlag New York, 1990.
- [7] Roger ARDITI et Lev R. GINZBURG. « Coupling in Predator-Prey Dynamics : Ratio-Dependence ». In : *Journal of Theoretical Biology* 139 (1989), p. 311-326.
- [8] J. BARETTA et W. EBENHÖH. « Microbial dynamics in the marine ecosystems model ERSEM II with decoupling carbon assimilation and nutrient uptake ». In : *JSR* 38 (1997), p. 195-212.
- [9] N. P. BHATIA et G. P. SZEGÖ. « Dynamical systems : Stability theory and applications ». In : *Springer-Verlag* 35 (1967).
- [10] Haïm BREZIS. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. 2<sup>e</sup> éd. Paris : Masson, 1987.
- [11] Haïm BREZIS. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. 2<sup>e</sup> éd. Paris : Masson, 1987.
- [12] E. T. BROWNE. *Introduction to Theory of Determinants and Matrices*. Chapel Hill N. C. : Univ. North Carolina Press, 1958, p. 120-121.
- [13] J. BUHL et al. « From Disorder to Order in Marching Locusts ». In : *Science* 312.5778 (2006), p. 1402-1406.
- [14] CHANDRASEKHAR. « Stochastic Problems in Physics and Astronomy ». In : *Rev. Mod. Phys.* (1943).
- [15] C. COLON, D. CLAESSEN et M. GHIL. « Bifurcation analysis of an agent-based model for predator–prey interactions ». In : *Ecological Modeling* 317 (2015), p. 93-106.

- [16] Iain D. COUSIN et al. « Collective memory and spatial sorting in animal group ». In : *J. Ther. Biol* 218 (avr. 2002), p. 1-11.
- [17] Werner EBELING, Frank SCHWEITZER et Benno TILCH. « Active Brownian particles with energy depots modeling animal mobility ». In : *BioSystems* 49 (1999), p. 17-29.
- [18] M. EDWARDS et M. BEES. « Generic dynamics of a simple plankton population model with a non-integer exponent of closure ». In : *Chaos, Solitons & Fractals* 12 (2001), p. 289.
- [19] M. EDWARDS et J. BRINDLEY. « Oscillatory behavior in a three-component plankton population model ». In : *Dyn. Stab. Sys.* 11 (1996), p. 347-370.
- [20] C. FOIAS et al. « References ». In : *Navier-Stokes Equations and Turbulence*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2001, p. 331-342. DOI : 10.1017/CB09780511546754.007<sup>1</sup>.
- [21] H. I. FREEDMAN et Paul WALTMAN. « Mathematical analysis of some three-species food-chain models ». In : *Mathematical Biosciences* 33.3-4 (1977), p. 257-276.
- [22] Dang H., NGUYEN et George YIN. « Coexistence and exclusion of stochastic competitive Lotka–Volterra models ». In : *Journal of Differential Equations* 262 (2017), p. 1192-1225.
- [23] W. HIRSCH, S. SMALE et R. L. DEVANEY. *Differential Equations, Dynamical Systems & Introduction to Chaos*. 2<sup>e</sup> éd. T. 20. Elsevier, 2004, p. 385.
- [24] Crawford S HOLLING. « Some characteristics of simple types of predation and parasitism ». In : *The Canadian Entomologist* 91.7 (1959), p. 385-398.
- [25] Alfred JAMES LOTKA. « Elements of Physical Biology ». In : Baltimore : Williams & Wilkins Company, 1925, p. 460.
- [26] LAROUSSE. *Définition Plancton*. URL : <https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/plancton/61371>.
- [27] J. P. LASALLE. « stability theory for ordinary differential equations ». In : *J. Differ. Equations* 41 (1968), p. 57-65.
- [28] J. P. LASALLE. « Some Extensions of Liapunov’s Second Method ». In : *IRE Transactions on Circuit Theory* (déc. 1960), p. 520-527.
- [29] Yuan LIN et Nicole ABAID. « Collective behavior and predation success in a predator-prey model inspired by hunting bats ». In : *Physical Review E* 88 (2013).
- [30] J. L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. T. 1 et 2. Paris : Dunod, 1968.
- [31] Jacques-Louis LIONS et Walter A STRAUSS. « Some non-linear evolution equations ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 93 (1965), p. 43-96.
- [32] JL LIONS. « Quelques problèmes de la théorie des équations non linéaires d’évolution ». In : *Problems in Non-Linear Analysis*. Springer, 2010, p. 189-342.
- [33] Meng LIU et Meng FAN. « Permanence of Stochastic Lotka–Volterra Systems ». In : *Journal of Nonlinear Science* 27 (2017), p. 425-452.

1. <https://doi.org/10.1017/CB09780511546754.007>

- [34] Wei-Min LIU. « Criterion of Hopf Bifurcation Without Using Eigenvalues ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Application* 182 (1992), p. 250-256.
- [35] Vladimir LOBASKIN et Maksym ROMENSKYY. « Collective dynamics in system of Brownian particles with dissipative interactions ». In : *Physical Review E* 87 (5 mai 2013), p. 052135.
- [36] Robert M. MAY. « Limit Cycle in Predator-Prey Communities ». In : *Science* 177 (sept. 1972), p. 900-902.
- [37] H. J. MARQUEZ. *Nonlinear Control Systems Analysis and Design*. Wiley, 2003.
- [38] J. E. MARSDEN et M. McCRACKEN. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. New York Heidelberg Berlin : Springer-Verlag, 1976.
- [39] Alexander B. MEDVINSKY et al. « Spatiotemporal complexity of plankton and fish dynamics ». In : *SIAM review* 44.3 (2002), p. 311-370.
- [40] Xin-You MENG et Yu-Qian WU. « Dynamical analysis of a fuzzy phytoplankton-zooplankton model with refuge, fishery protection and harvesting. » In : *Journal of Applied Mathematics and Computing* (2020). DOI : 10.1007/s12190-020-01321-y<sup>2</sup>.
- [41] Henri NAVIER. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. T. 6. Paris : Académie Royale des Sciences, 1823, p. 389-440.
- [42] A. OSCHLIES et V. GARÇON. « An eddy-permitting coupled physical-biological model of the North-Atlantic, sensitivity to advection numerics and mixed layer physics ». In : *Global Biogeochem. Cycles* 13 (1999), p. 135-160.
- [43] C. PASQUERO, A. BRACCO et A. PROVENZALE. « Impact of spatiotemporal variability of the nutrient flux on primary productivity in the ocean ». In : *J. Geophys. Res.* 11 (2005), p. 1-13.
- [44] Fernando PERUANI et al. « Collective Motion and Nonequilibrium Cluster Formation in Colonies of Gliding Bacteria ». In : *Phys. Rev. Lett.* 108 (9 fév. 2012), p. 098102.
- [45] Mehbuba REHIM, Zhenzhen ZHANG et Ahmadjan MUHAMMADHAJI. « Mathematical analysis of a nutrient-plankton system with delay ». In : *SpringerPlus* 5.1 (2016), p. 1055.
- [46] Áttila L. RODRIGUES et Tânia TOMÉ. « Reaction-diffusion stochastic lattice model for a predator-prey system ». In : *Brazilian Journal of Physics* 38 (mars 2008), p. 87-93.
- [47] P. ROMANCZUK et al. « Active Brownian particles ». In : *The European Physical Journal Special Topics* 202.1 (2012), p. 1-162.
- [48] Maksym ROMENSKYY et Vladimir LOBASKIN. « Statical properties of swarms of self-propelled particles with repulsions across the order-disorder transition ». In : *The European Physical Journal B* 86.91 (mars 2013), p. 91.
- [49] Maksym ROMENSKYY, Vladimir LOBASKIN et Thomas IHLE. « Tricritical points in a Vicsek model of self-propelled particles with bounded confidence ». In : *Physical Review E* 90 (6 août 2014), p. 063315.

- [50] M. L. ROSENZWEIG et R. H. MACARTHUR. « Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interactions ». In : *The American Naturalist* 97.895 (1963), p. 209-223.
- [51] M. SANDULESCU et al. « Kinematic studies of transport across an island wake, with application to the Canary islands ». In : *Tellus A* 58 (2006), p. 605-615.
- [52] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions I, II*. Paris : Herman, 1950-1951.
- [53] Kumar SELVARAJOO. « Complexity of biochemical and genetic responses reduced using simple theoretical models ». In : *Systems Biology*. Springer, 2018, p. 171-201.
- [54] J. STEELE et E. HENDERSON. « A simple plankton model. » In : *The American Naturalist* 117 (1981), p. 676-691.
- [55] J. STEELE et E. HENDERSON. « The role of predation in plankton models ». In : *J. Plankton Res.* 14 (1992), p. 157-172.
- [56] George Gabriel STOKES. « On the theories of internal friction of fluids in motion ». In : *Transaction of Cambridge Philosophical Society* 8 (1845), p. 287-305.
- [57] D. J. T. SUMPTER. « The principles of collective animal behaviour ». In : *Phil. Trans. R. Soc. B* 361 (2006), p. 5-22.
- [58] M Sanjaya Waryano SUNARYO, Zabidin SALLEH et Mustafa MAMAT. « Mathematical model of three species food chain with Holling type-III functional response ». In : *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 89.5 (2013), p. 647-657.
- [59] Colin TORNEY, Zoltan NEUFLED et Iain D. COUSIN. « Context-dependent interaction leads to emergent search behaviour in social aggregates ». In : *Elsevier Science Ltd* (avr. 2002).
- [60] Alan TURING. « The chemical basis of morphogenesis ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society B* 237 (1952), p. 37-72.
- [61] Loup VERLET. « Computer "Experiments" on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules ». In : *Physical Review E* 159.1734 (1967), p. 98.
- [62] Tamas VICSEK et Anna ZAFEIRIS. « Collective motion ». In : *Physics Reports* 517 (2012), p. 71-140.
- [63] Tamas VICSEK et al. « Novel Type Of phase Transition in a System of Self-Driven Particles ». In : *Physical Review Letters* 75.6 (août 1995), p. 1226-1229.
- [64] Vito VOTERRA. « Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically ». In : *Nature* 118 (1926), p. 558-560.
- [65] Yaya YOUSOUF YAYA, Diene NGOM et Mamadou SY. « Qualitative feature of NPZ-Model. » In : *Biomath* 10.1 (mars 2021). doi : <http://dx.doi.org/10.11145/j.biomath.2021.01.067><sup>3</sup>.
- [66] Tianran ZHANG et Wendi WANG. « Hopf bifurcation and bistability of a nutrient-phytoplankton-zooplankton model ». In : *Applied Mathematical Modelling* 36.12 (2012), p. 6225-6235.

3. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.11145/j.biomath.2021.01.067>

## TABLE DES FIGURES

1.1.1 Isoclines . . . . .	11
1.3.1 Portrait de Modèle de Lotka-Volterra . . . . .	18
1.3.2 Portrait de Modèle de Van der Pol . . . . .	18
1.3.3 Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov, Champs de vecteur $F(y)$ en noir et $\nabla(V(y))$ en rouge; On voit que $\nabla V.F(y) = 0$ ; Les points d'équilibre sont en rouge. . . . .	21
1.3.4 En haut, quelques trajectoires dans le plan de phases convergents vers le cercle unité. En bas, le signal d'une solution avec $r(0) = 1.7$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	26
2.1.1 Diagramme du Modèle NPZ . . . . .	31
2.2.1 (i)- Quelques orbites dans l'espace des phases. Le point en noir est l'équilibre $e_3$ et en rouges les deux autres. (ii)- Paramètres du système (bleue), coordonnées de $e_3$ (noir) et les valeurs propres associées (rouge). (iii)- Évolutions des densités vs temps phase transitoire et(iv)-phase permanent. $\omega_0 = 1.79$ et $\Delta = 0.0037$ . . . . .	46
2.2.2 (a) - Diagramme de bifurcation illustrant la valeur de bifurcation $S_b$ selon la fonctions $H_2, \frac{dH_2}{dS}$ ; (b) -les paramètres du système; (c)- valeurs propres en rouge pour $S < S_b$ et en blue pour $S > S_b$ . . . . .	47
2.2.3 Cycle limite émergeant après la bifurcation de Hopf ( $S = 4$ ). C'est la convergence de 11 trajectoires après un temps transitoire de 8000. Le point en noir indique l'équilibre instable. . . . .	48
2.3.1 Distribution des concentrations à l'équilibre $e_3$ avec $10^5$ plages de paramètres admissibles (voir dist-equ3(n) dans NPZ-Prog.py) . . . . .	49
2.3.2 $e_3$ instable : (i)- Quelques orbites dans l'espace des phases. Le point en noir est l'équilibre $e_3$ et en rouges les deux autres. (ii)- Paramètres du système (bleue), coordonnées de $e_3$ (noir) et les valeurs propres associées (rouge). (iii)- Évolutions des densités vs temps phase transitoire et (iv) phase permanent . . . . .	50
2.3.3 Idem Figure 2.3.2. Cas où l'équilibre $e_3$ est stable. . . . .	51
2.3.4 Production primaire moyenne suivant l'intensité d'Upwelling $S$ . . . . .	52
2.3.5 (i)-Cycle limite émergeant après la bifurcation de Hopf. C'est la convergence de 11 trajectoires après un temps transitoire de 8000. Le point en noir indique l'équilibre intérieur instable. (ii)-Paramètres du système. (iii), (iv) et (v) sont respectivement les projections du cycle sur les plans (n,p), (p,z) et (n, z). . . . .	52
3.4.1 . . . . .	73
4.1.1 Description des paramètres et schéma du système . . . . .	81
4.1.2 Illustration des espaces de Sobolev définis en 4.1.13 . . . . .	83

5.1.1	Les paramètres d'interaction dans un modèle du type Vicsek. l'individu centrale (flèche rouge) devie ses plus proches voisins (flèche noir) qui sont dans zone de répulsion (le cercle interne de rayon $R_r$ , $zor$ ) pour éviter des collisions et s'aligne avec les voisins qui sont dans la zone d'alignement (le cercle externe de rayon $R_a$ , $zoa$ ) [48]. . . . .	103
5.2.1	Instantanées des distribution des particules dans la boîte périodique : prédateurs (bleu) et proies ( marron ) respectivement pour trois cas de densité de prédateurs : (a) densité minimum $\rho_{min}^q = 0.10$ ; (b) Densité maximum $\rho_{max}^q = 0.20$ et (c) Densité moyenne ( ou intermédiaire ) $\rho_{mid}^q = 0.18$ . Les sous figures (d) et (e) montrent respectivement l'évolution de la densité des espèces et celle du paramètre d'ordre de polarisation $\Phi(t)$ au cours du temps. $t_{min}$ , $t_{mid}$ et $t_{max}$ Indiquent les trois cas mentionnés ci-haut. . . . .	109
5.2.2	(a) Évolution de la densité moyenne des prédateurs (bleu) et proies ( marron) (b) Évolution de la moyenne du paramètre d'ordre de polarisation correspondant.La moyenne est calculée de 18 simulations indépendantes avec des paramètres standards. . . . .	110
5.2.3	fluctuation de nombre des particules prédateurs pour trois cas temps caractéristiques : à $t_{min}$ densité minimum, $t_{mid}$ densité maximum et $t_{max}$ densité intermédiaire. L'exposent critique $\beta$ est dans $[0.55;0.8]$ . . . . .	111
5.2.4	. . . . .	112
5.2.5	Statistiques de cluster pour trois gammes de densité de prédateurs. $\rho^q \leq \rho_{min}^q, \rho_{min}^q \leq \rho^q \leq \rho_{max}^q, \rho^q \geq \rho_{max}^q$ . $\rho_{min}^q = 0.16$ et $\rho_{max}^q = 0.21$ . $L_t = 10^5$ et le reste des paramètres sont standard. . . . .	112
5.2.6	(a) Évolution de la densité des proies en absence de prédateur (ligne verte) et fonction approchée $y(t) = \rho_p(0)e^{\bar{k}t}$ (ligne pointillée) (b) évolution de densité des prédateurs en absence des proies (ligne bleue) et la fonction approchée $y(t) = \rho_q(0)e^{\bar{\mu}t}$ (ligne pointillée). . . . .	113