

UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées
OPTION : Équations aux Dérivées Partielles

Sujet :

Contrôle rétroactif pour un réseau de canaux à ciel ouvert

Présenté par : Seydou DIBA

Le 13 Juillet 2021

Sous la direction de : Docteur Mouhamadou Samsidy GOUDIABY

Sous la supervision de : Professeur Abdou SENE

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Université
Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président du jury	UASZ
Abdou SENE	Professeur Titulaire	Examineur	UVS
Timack NGOM	Maitre de Conférences Titulaire	Examineur	UASZ
Mouhamadou S. GOUDIABY	Maitre de Conférences Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2019 – 2020

Table des matières

Introduction	7
1 Préliminaires	10
1.1 Équations de Saint-Venant	10
1.1.1 Dérivation des équations	10
1.1.2 Cas d'un canal simple	16
1.1.3 Cas d'un réseau	17
1.2 Équation de transport	21
1.2.1 Problème physique : convection dans un fluide	21
1.2.2 Étude de la solution analytique	21
1.3 Observabilité, contrôlabilité et stabilisation	25
1.3.1 Contrôlabilité	25
1.3.2 Observabilité	27
1.3.3 Stabilisation	27
1.4 Quelques espaces utilisés dans ce mémoire	28
1.4.1 Les espaces L^p	28
1.4.2 Les espaces de Sobolev	30
1.4.3 Espaces de Sobolev dépendant du temps	33
1.5 Formulation variationnelle	34
1.6 Formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables	34
1.7 Méthode des volumes finis	35
1.7.1 Théorème de Lax	36
1.7.2 Théorème de Lax-Wendroff	36
1.7.3 Condition de stabilité CFL	36
2 Construction de contrôles rétroactifs pour un canal	37
2.1 Équations de Saint-Venant	37
2.2 Linéarisation du modèle non linéaire	39

2.2.1	État stable	39
2.2.2	Modèle linéarisé	39
2.3	Variables caractéristiques	41
2.4	Estimation à priori de l'énergie	45
2.5	Conception de contrôles rétroactifs pour un seul canal et le processus de stabilisation	48
2.6	Un résultat de régularité	56
3	Construction de contrôles pour le réseau en étoile	60
3.1	Présentation du réseau	60
3.2	Équations de Saint Venant unidimensionnelles pour un réseau de canaux rectangulaires	61
3.3	Linéarisation du modèle non linéaire	64
3.3.1	État stable	64
3.3.2	Modèle linéarisé	64
3.4	Variables caractéristiques	68
3.4.1	Formulation faible pour le réseau	75
3.5	Estimation d'énergie a priori	81
3.5.1	Variation temporelle de l'énergie	82
3.6	Conception de contrôles rétroactifs pour le réseau en étoile et processus de stabilisation	87
3.7	Résultat principal	92
4	Résultats numériques	95
4.1	Méthodes des volumes finis : Cas mono dimensionnel	95
4.1.1	Les conditions aux limites	97
4.2	Résultats numériques pour un seul canal	99
4.2.1	Cas linéaire	99
4.2.2	Cas non linéaire	102
4.3	Résultats numériques pour le réseau	104
4.3.1	Les données du réseau	104
4.3.2	État d'équilibre du réseau	104
4.3.3	Système linéaire à discrétiser	104

REMERCIEMENTS

Je rends grâce avant tout à Dieu le tout Puissant le tout Miséricordieux de m'avoir donné la foi, le courage et la chance d'en arriver là et de pouvoir réaliser ce modeste travail. Je remercie mes parents, mes grands parents, mes frères, sœur Fatoumata, ma femme Kadidiatou DIALLO, mes enfants ainsi que ma belle famille.

Mes remerciements les plus sincères à mon encadreur Docteur Mouhamadou Samsidy GOUDIABY pour sa générosité, sa gentillesse, sa patience et ses précieux conseils pour l'établissement de ce travail.

Mes remerciements également les plus sincères au Professeur Abdou SENE qui a supervisé ce travail du début à la fin.

Je remercie les membres de jury qui nous ont honorés de leurs présences. J'exprime ma gratitude à tous mes enseignants de la filière Mathématique-Physique-Informatique pour leurs assistances pédagogiques et leurs enseignements depuis la première année d'études universitaires.

Enfin merci à tous mes chefs d'établissements (Bernard Diédhiou, Ibrahima Bodian, Noumo Diatta), mes collègues anciens comme nouveaux des CEM KANDE et BAGADADJI (Thierno Baldé, Toumani Sarr et ses frères, Sarifou Diallo, Pape Aliou Goudiaby, Omar Sadio, Jean Paul Niouky, Vieux Malang Mané, Niassy, Diatta, Kama, les trois BA, les deux Sagna, les deux Sambou, Dabo, Coly, Oumy, Elisa et toutes les autres dames, NDiaye, Basseck, Diamanka, Saliou Diédhiou, Ibrahima NGamo Sonko, Abdoulaye Sagna...), Bernard Manga, Bayo, Toumany Sadio et ses parents, Omar Tamba, Maître Sarr, à mes frères et sœurs pratiquants du Vovinam Viet Vo Dao... , pour leurs encouragements et leurs soutiens. A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail, on leur dit merci mille fois. Grand Merci à mon frère Malick Diba le pieux qui m'a énormément facilité la tâche depuis la première Année.

DÉDICACES

- * A mon père Arouna Djiby et ma mère Fatoumata PAM.
- * A frères et sœur Fatoumata.
- * A ma femme et à ma belle famille.
- * A Sala Diallo, Aissata NDiaye, NDèye Fatou Sambou, Néné de Dakar, Moumina Diallo, Kaw Baydi et sa famille.
- * A ma fille Mariama et mes fils.
- * A mes neveux et mes nièces.
- * A toute ma grande famille,
Mes grandes mères Inna, Mbodjel, Finangué. et mes tuteurs de Adéane.
- * A mes cousins et cousines.
- * A tous mes amis et amies.
- * A mes collègues et élèves du CEM Kandé de Ziguinchor.
- * A tous mes compagnons d'études de l'élémentaire à l'université.
- * A tous mes cohabitants.
- * A la mémoire de mes grands pères et de mon frère feu Alassane Diba.

Résumé

Dans ce mémoire nous exposons une méthode algébrique de conception de contrôles rétroactifs pour réguler le niveau et le débit de l'eau dans un réseau de canaux ouverts. Le réseau est modélisé par trois canaux avec une jonction où ces derniers se rencontrent.

Les équations de Saint Venant sont linéarisées autour d'un état stable prescrit. Nous considérons que l'écoulement est dans un état sous critique et définissons une énergie pour construire des contrôles frontières. Ces contrôles dépendent des données à tout instant et assurent la convergence exponentielle en norme L^2 de la solution du modèle linéaire.

Le cas d'un canal est d'abord traité. Ensuite la méthode est appliquée à un réseau en étoile constitué de trois canaux. Enfin les contrôles construits sont utilisés pour des simulations numériques.

Introduction

Les équations unidimensionnelles de Saint Venant sont des équations aux dérivées partielles non linéaires établies par Barré de Saint Venant dans [34]. Composées de lois de conservation de masse et de quantité de mouvement, elles sont utilisées pour décrire le comportement de l'écoulement de l'eau dans les canaux ouverts et les rivières. Ces équations permettent aux ingénieurs hydrauliciens de résoudre des problèmes liés aux dynamiques des canaux et des rivières.

Depuis de nombreuses années, le domaine de la contrôlabilité, de l'observabilité et de la stabilisation des canaux d'irrigation a été pris en compte dans la littérature comme indiqué dans [1] par Malaterre et dans [24] par Leugering. Dans [1], l'auteur donne une classification des algorithmes de contrôle des canaux et une bibliographie complète dans ce domaine. Une synthèse est réalisée par Bastin et al. [3] qui apportent des contributions à travers une bibliographie intéressante, des problèmes ouverts et des défis mathématiques concernant les canaux d'irrigation. Plusieurs auteurs ont contribué dans le contrôle des canaux ouverts modélisés par les équations de Saint Venant avec des méthodes de contrôle avancées au moyen de plusieurs théories. Parmi elles, nous avons la méthode de contrôle quadratique linéaire développée et étudiée par Balogun et al [2] et, Malaterre [31], Weyer [37], Chen et al.[7]. Nous avons l'approche semi-groupe avec laquelle Xu et al. [38] ont proposé un contrôle rétroactif de sortie proportionnel et intégral utilisant un modèle d'EDP linéaire autour d'un état stable. Un contrôle H_∞ pour un canal d'irrigation est aussi étudié par Litrico et al.[30]. L'analyse de Lyapounov et les invariants de Riemann sont également utilisés dans [19, 24, 21, 8, 33, 28, 5]. Une autre approche peut être trouvée dans [35]. A l'aide de ces méthodes de contrôle, des réseaux complexes de canaux sont étudiés depuis longtemps par des ingénieurs en hydraulique ([32, 29] et référence citée dans [3]).

La régulation des flux dans les réseaux est une base théorique intéressante en

mathématiques pour déterminer des contrôles frontières optimaux pour de tels réseaux. Les réseaux sont souvent modélisés par des canaux se joignant en des jonctions (nœuds) où plusieurs conditions sont proposées. Nous considérons un écoulement sous critique et utilisons des conditions de nœud comme celles données dans [24, 32, 26, 16]. Ces conditions sont le flux total et la continuité de l'énergie à la jonction. D'autres conditions peuvent être trouvées dans [21, 8, 28, 15]. D'importants résultats sur les écoulements dans les réseaux ont été obtenus par plusieurs chercheurs. Par exemple, Halleux et al. [8] ont utilisé l'approche de Riemann pour construire un contrôle permettant de stabiliser un réseau en cascade constitué de plusieurs canaux inter-connectés. Les actions de contrôle sont assurées par des vannes réglables à la fin de chaque canal. Les réglages de ces derniers déterminent la vitesse du fluide aux extrémités du canal. Les chercheurs Bastin et al. [5] ont utilisé l'approche de stabilité de Lyapounov sur un réseau en cascade avec une pente de fond alors que Leugering et al. [24] ont étudié la stabilisation et la contrôlabilité nulle des perturbations autour d'un état stationnaire pour un réseau en forme d'étoile. Un tel réseau peut également être trouvé dans [19] et [26], où Li a étudié la contrôlabilité exacte aux frontières physiques des écoulements non stationnaires. Les réseaux à configuration arborescente sont aussi considérés dans [8, 16, 15].

Nous allons étudier une classe de contrôles rétroactifs aux frontières des réseaux en forme d'étoile. Les flux aux frontières sont les quantités contrôlables. Notre objectif est de construire des contrôles rétroactifs qui permettent d'approcher le débit et la hauteur d'eau à un état stable prescrit quand le temps est suffisamment grand. Nous appliquons l'approche à un réseau de trois canaux, mais elle peut être généralisée à des réseaux étoilés plus complexes.

Nos contrôles dépendent de l'état du canal à des moments antérieurs. En d'autres termes, les données antérieures du canal sont utilisées lors de la construction. Du point de vue pratique, l'existence d'un délai est nécessaire, car il y a toujours un délai entre la mesure en ligne des données et leur utilisation pour déterminer les contrôles. Des contrôles rétroactifs ont été dérivés dans [19, 20, 18] pour stabiliser le problème du réseau d'écoulement de gaz autour d'un état stationnaire prescrit. Mais il faut noter que l'approche utilisée dans [19] n'est pas la même que notre approche. La différence réside dans la définition de la fonction de Lyapounov et dans le traitement de la variation de cette fonction pour dériver les contrôles rétroactifs. Nous considérons un réseau similaire mais les conditions de jonction sont différentes. Notre approche consiste à exprimer la variation de l'énergie du problème linéarisé, comme un polynôme du second ordre en termes d'écoulement aux frontières (extrémités libres des canaux). Ce polynôme du second ordre est négatif pour un ensemble de contrôles et le taux de stabilisation est borné. Cette bornitude est en accord avec le fait que la vitesse à laquelle les solutions des systèmes hyperboliques sont affectées par les conditions aux limites est bornée. Pour construire les contrôles, le niveau d'eau aux frontières est utilisé. Le fait que le débit soit

stabilisé pour des contrôles dans un intervalle donne de la robustesse et de la souplesse. Ceci est essentiel pour deux raisons. Pour commencer, les contrôles seront appliqués au problème réel, qui est non linéaire. Deuxièmement, les niveaux d'eau aux frontières physiques influencent les contrôles. Ceux-ci seront connus par des mesures qui ne seront correctes que approximativement.

Ce document est constitué de quatre chapitres.

► Dans le chapitre 1 constitué de sept sections, nous présentons d'abord les équations de Saint-Venant et quelques notions comme les espaces de Sobolev qui nous seront utiles dans ce mémoire.

► Dans le chapitre 2 constitué de six sections, nous allons construire les contrôles pour un canal et démontrer la décroissance de l'énergie à définir.

► Dans le chapitre 3, composé de sept sections, le cas d'un réseau de trois canaux avec une jonction sera ensuite traité.

► Dans le chapitre 4, composé de trois sections, nous présentons la méthode des volumes finis pour le cas mono-dimensionnelle que nous appliquons ensuite au canal et au réseau. Quelques simulations numériques avec python seront faites au moins pour le cas du canal.

Préliminaires

1.1 Équations de Saint-Venant

Les écoulements quasi-unidimensionnels, par exemple ceux des cours d'eau, sont décrits par les équations de Barré de Saint-Venant obtenues par Adhémar Barré de Saint-Venant en 1871 et précisées en 1888. Par extension cette appellation a été étendue aux écoulements en eau peu profonde (en anglais shallow water) qui correspondent à des problèmes quasi-bidimensionnels. On les rencontre en géophysique par exemple pour décrire les courants de marée. À ces phénomènes sont associées des ondes (onde de Rossby, onde de Kelvin, onde de Poincaré, mascaret, tsunami) dont l'étude de certaines d'entre elles est antérieure à 1850. Ces écoulements sont représentatifs de milieux non dispersifs. Dans le cas contraire le milieu est décrit par les équations de Boussinesq. Les équations de Saint-Venant peuvent être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes.

1.1.1 Dérivation des équations

Le système formé des équations de Saint-Venant est obtenu à partir de l'équation de continuité ou conservation de la masse et celle de conservation de la quantité de mouvement, en utilisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Les principales hypothèses simplificatrices sont [6] :

- ◇ Liquide incompressible.
- ◇ Écoulement unidimensionnel.
- ◇ La pente du canal est faible

- ◇ Le canal est à section transversale rectangulaire.
- ◇ Distribution hydrostatique des pressions, ceci est valable si l'accélération verticale est faible, c'est-à-dire, si la variation de la surface de l'eau avec la distance est graduelle.
- ◇ Répartition uniforme des vitesses transversales.
- ◇ Les pertes de charge par frottement d'un écoulement non permanent peuvent être calculées en utilisant les formules d'un écoulement permanent uniforme.
- ◇ Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres contraintes.

1.1.1.1 Équation de continuité

C'est l'équation qui traduit le principe de la conservation de la masse. Ce dernier permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques du fluide et ses mouvements indépendamment des causes qui les provoquent. Ainsi, la masse fluide reste constante tout au cours de l'écoulement, autrement dit il n'y a ni apport extérieur, ni prélèvement de masse [6]. On suit le mouvement d'une masse liquide dans un canal à surface libre, et on calcule ses variations, entre deux sections (1) et (2) (Figure 1.1). A la section 1 :

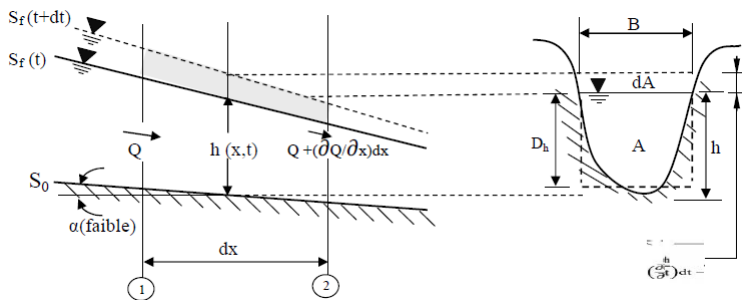


FIGURE 1.1 – Schéma pour l'équation de continuité

$$V_1 = Qdt. \quad (1.1)$$

A la section 2 :

$$V_2 = (Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx)dt. \quad (1.2)$$

La variation de volume entre ces deux sections pendant le temps dt , n'est autre que la différence entre le volume entrant et celui sortant

$$\Delta V = -\frac{\partial Q}{\partial x} dxdt. \quad (1.3)$$

Cette variation de volume est le résultat d'une modification de la surface libre entre les deux sections pendant le temps dt . Ce qui correspond à :

$$\Delta V = (Bdx) \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (1.4)$$

où B est la largeur de la surface libre et $h(x, t)$ la profondeur d'eau. On obtient de (1.3) et (1.4) que :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

où $dA = Bdh$. On peut écrire la relation suivante pour une section donnée :

$$Q = vA$$

où v est la vitesse moyenne dans la section A . L'équation (1.5) devient alors :

$$\frac{\partial(vA)}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = A \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1.6)$$

avec la profondeur hydraulique, $h = \frac{A}{B}$, on peut aussi écrire

$$h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Les équations **ci-dessus** représentent différentes formes de l'équation de continuité, valable pour les canaux prismatiques (section, pente de fond et rugosité du canal sont constantes).

Pour le cas d'un canal rectangulaire, on écrit l'équation (1.5) ainsi :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

Où $q = \frac{Q}{B}$ est le débit unitaire.

1.1.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Les équations dynamiques s'obtiennent en appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement qui établit une relation entre les caractéristiques du fluide, celle de ses mouvements et les causes qui les produisent, c'est-à-dire les forces [6].

Nous allons étudier l'écoulement d'un fluide dans un canal à surface libre d'une faible pente et on suit ces mouvements suivant un axe X. Ainsi, les forces agissant sont (Figure 1.2) :

★ Force de volume ou d'inertie

$$P_{gx} = \rho g dx A \sin \alpha \quad (1.9)$$

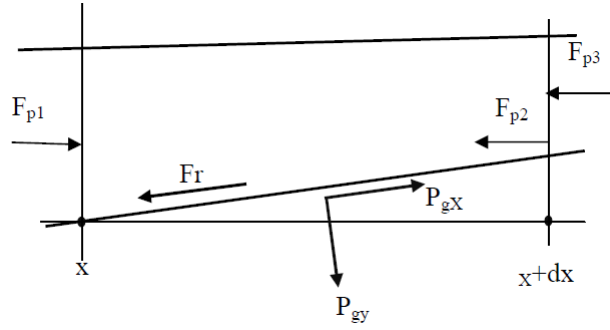


FIGURE 1.2 – Forces agissant sur un élément fluide

★ Force de pression

$$\text{En } x : F_{p1} = P_p A \quad (1.10)$$

$$\text{En } x + dx : F_{p2} + F_{p3} = - \left(P_p + \frac{\partial P_p}{\partial x} dx \right) A \quad (1.11)$$

Avec $P_p = \rho gh$: pression hydrostatique, la force de pression totale sera :

$$F_p = - \frac{\partial P_p}{\partial x} dx A \quad (1.12)$$

★ Force frottement

$$F_f = -\tau P_m dx, \quad (1.13)$$

avec P_m le périmètre mouillé et τ la force de frottement par unité de surface.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient :

$$\sum F_{ext} = m \frac{dv}{dt} = \rho A dx \frac{dv}{dt} ; \quad (1.14)$$

$$\sum F_{ext} = \rho g dx A \sin \alpha - \frac{\partial P_p}{\partial x} dx A - \tau P_m dx. \quad (1.15)$$

Des relations (1.14) et (1.15), on tire :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau P_m}{\rho A}. \quad (1.16)$$

La définition de la dérivée particulière nous permet d'écrire :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.17)$$

Des équations (1.16) et (1.17) on aura finalement :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau P_m}{\rho A} - g \sin \alpha = 0. \quad (1.18)$$

Avec :

- * α supposé petit, $\tan \alpha = \sin \alpha$ appelé pente de fond du canal et notée S_b
- * l'expression $\frac{\tau P_m}{\rho A}$ divisée par g , soit $\frac{\tau P_m}{g \rho A}$ donne le frottement du fond ou pente énergétique notée S_f .

L'équation (1.18) s'écrit alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_b - S_f) = 0. \quad (1.19)$$

C'est l'équation de la quantité de mouvement ou équation dynamique pour un écoulement non permanent et non uniforme dans un canal à ciel ouvert.

Les équations (1.6) et (1.19) représentent la paire d'équations, connues sous le nom du chercheur français Barré de Saint-Venant :

$$\begin{cases} A \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_b - S_f) = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

1.1.1.3 Nombre de Froude

Le nombre de Froude, de l'hydrodynamicien anglais William Froude, est un nombre sans dimension qui caractérise dans un fluide l'importance relative de l'énergie cinétique de ses particules par rapport à son énergie potentielle gravitationnelle. Il s'exprime donc par un rapport entre la vitesse d'une particule et la force de pesanteur qui s'exerce sur celle-ci. Ce nombre apparaît essentiellement dans les phénomènes à surface libre, en particulier dans les études de cours d'eau, de barrages, de ports et de navires (architecture navale). Il est également important en météorologie pour le calcul de l'écoulement de l'air en montagne. En dynamique des fluides il fait partie des trois nombres sans dimension les plus utilisés : il caractérise l'importance de la pesanteur alors que le nombre de Reynolds prend en compte la viscosité et le nombre de Mach la compressibilité. Le nombre de Froude peut être indicatif de la vitesse du fluide normée par une distance caractéristique. Ainsi pour les écoulements rapides on a un nombre de Froude > 1 , tandis que pour les rivières plus calmes on a Froude < 1 .

Définition 1. *Le nombre de Froude étant le rapport entre l'énergie cinétique ($mv^2/2$) et l'énergie potentielle gravitationnelle (mgL_c), il se définit donc :*

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL_c}} \quad (1.21)$$

avec :

- v : vitesse ($m.s^{-1}$);
- g : accélération de la pesanteur ($9,81m.s^{-2}$);
- L_c : longueur caractéristique.

Dans le cadre d'un écoulement à surface libre comme c'est le cas dans un cours d'eau, le nombre de Froude correspond au rapport entre la vitesse de l'écoulement v et la vitesse des ondes de surface C , soit

$$Fr = \frac{v}{C} \quad (1.22)$$

La célérité de ces ondes s'exprime par :

$$C = \sqrt{gL_c} \quad (1.23)$$

où L_c , longueur caractéristique, vaut le rapport entre la section d'écoulement A et la largeur de la surface libre B soit :

$$L_c = \frac{A}{B}. \quad (1.24)$$

On a donc :

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \frac{A}{B}}} \quad (1.25)$$

Dans le cas particulier d'un canal rectangulaire, la longueur caractéristique L_c vaut la profondeur h du cours d'eau. L'expression du nombre de Froude pour une section rectangulaire est donc

$$Fr = \frac{v}{C} = \frac{v}{\sqrt{gh}} \quad (1.26)$$

avec h étant la hauteur d'eau.

La connaissance du nombre de Froude permet de déterminer le type de régime d'un cours d'eau. En effet :

- si $Fr > 1$, l'écoulement est dit torrentiel (ou super critique), les ondes se déplacent moins vite que le fluide et se propagent toujours vers l'aval. Pour résoudre les équations, une condition à la limite amont est suffisante.
- si $Fr < 1$, l'écoulement est dit fluvial (ou sous critique), les ondes se déplacent plus vite que le fluide. Elles peuvent se propager vers l'amont ou vers l'aval. Il faut donc, pour résoudre les équations, poser des conditions aux limites amont et aval.
- Si $Fr = 1$, l'écoulement est dit critique. Cet état est instable et n'apparaît normalement que de manière transitoire.

1.1.1.4 Propriétés des équations de Saint-Venant

- Les équations de Saint-Venant, bien qu'ayant été établies à l'aide de simplifications sont souvent extrêmement compliquées à résoudre.
- Les équations de Saint-Venant ne possèdent pas de solution analytique. Il faut donc les résoudre numériquement.
- Les équations de Saint-Venant constituent un système de deux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique en x et t , introduisant deux fonctions inconnues, h et v ou h et Q . Il faut choisir des conditions aux limites et initiales pour bien encadrer le problème.

Nous donnons ici des équations de Saint-Venant pour le canal et pour le réseau que les chercheurs utilisent le plus souvent en se référant à des articles utilisés dans ce mémoire.

1.1.2 Cas d'un canal simple

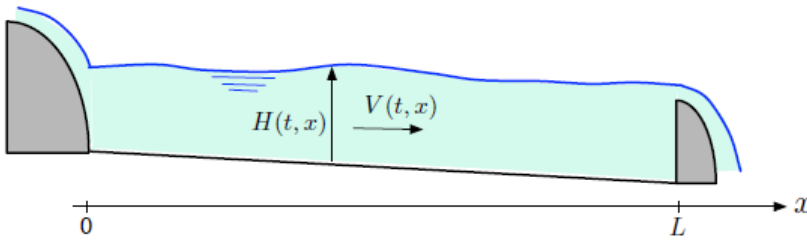


FIGURE 1.3 – Vue latérale d'un bassin d'un canal ouvert à fond constant en pente et section rectangulaire.

Dans le cas simple d'un canal à pente constante (Figure 1.3), avec une section rectangulaire et une largeur unitaire, le modèle de Saint-Venant est un système de deux lois d'équilibre non linéaires de la forme [4] :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + gh \right) + g(S_f(h, v) - S_b) = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

où $h(t, x)$ et $v(t, x)$ sont respectivement la profondeur de l'eau et la vitesse horizontale sur une colonne d'eau. La variable S_b est la pente inférieure, g désigne l'intensité de la pesanteur et S_f est la friction.

La première équation est un bilan massique qui découle de la conservation de la masse tandis que la deuxième est un équilibre dynamique provenant de la conservation de la quantité de mouvement.

La vitesse moyenne de l'écoulement à travers une section droite dans un canal vaut :

$$v = \frac{q}{A}, \quad (1.28)$$

où la variable q désigne le débit d'eau et $A = A(t, x)$ est l'aire de la section droite occupée par l'eau en x au temps t .

La largeur étant supposée unitaire on trouve :

$$v = \frac{q}{A} = \frac{q}{h}. \quad (1.29)$$

Une version plus générale des équations de Saint-Venant valable pour les canaux à pentes et sections transversales non constantes s'écrit comme suit [4] :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_b + S_f \right) = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

avec l'état initial

$$h(0, x) = h^0(x), \quad q(0, x) = q^0(x). \quad (1.31)$$

Remarque 1. Lorsque l'écoulement est sous-critique nous obtenons deux valeurs propres de signes opposés comme nous le verrons au Chapitre 2. Le système est alors hyperbolique et les ondes se déplacent avec des sens opposés. De ce fait deux conditions aux limites aux deux extrémités de l'intervalle $[0, L]$ sont nécessaires pour compléter les équations de Saint-Venant. Ces conditions sont imposées par des dispositifs situés aux extrémités du canal, comme par exemple les deux déversoirs du canal dans la Figure 1.3. Une situation très simple est lorsque le canal est fermé mais doté de pompes qui imposent les débits en $x = 0$ et en $x = L$. Dans ce cas, en considérant (1.27) les conditions aux limites sont :

$$h(t, 0)v(t, 0) = q_0(t), \quad \text{et} \quad h(t, L)v(t, L) = q_L(t) \quad (1.32)$$

et en considérant la version plus générale (1.30) on a :

$$q(t, 0) = q_0(t), \quad q(t, L) = q_L(t). \quad (1.33)$$

1.1.3 Cas d'un réseau

Différents types de réseaux existent. Certains sont en forme de cascade (Figure 1.4) et d'autres en forme d'étoile (Figure 1.5). Les premiers peuvent être trouvés dans [5, 13] et les seconds dans [17, 26, 24].

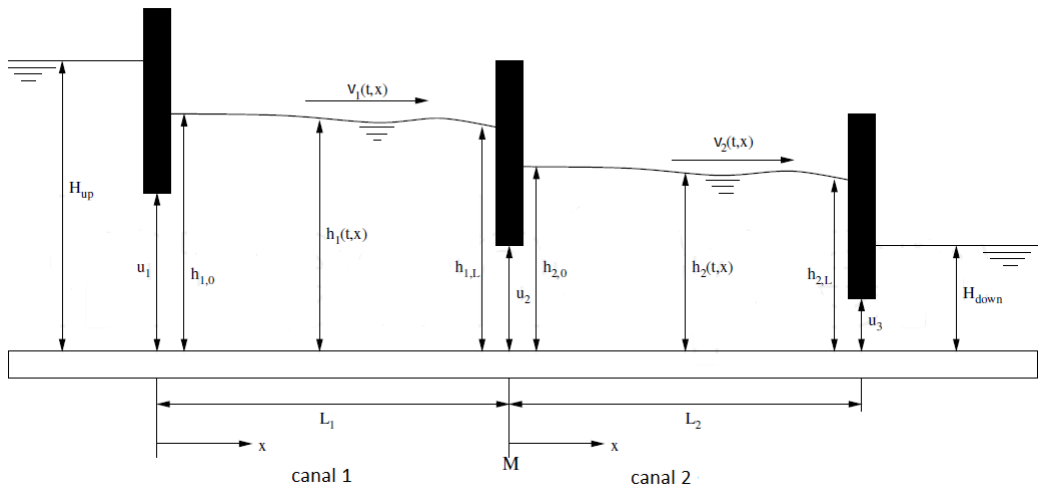


FIGURE 1.4 – Réseau de deux canaux en cascade

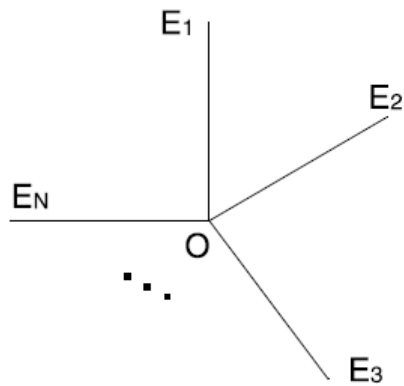


FIGURE 1.5 – Réseau de canaux en étoile

Pour les réseaux en cascade formés de n canaux, en se référant à [5], nous avons le modèle de Saint Venant suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial(H_i V_i)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad i = 1, \dots, N \\ (b) \quad \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} V_i^2 + g H_i \right) + g \left(S_{fi}(H_i, V_i) - S_{bi} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.34)$$

où dans chaque canal i :

- $H_i(t, x)$ représente la hauteur d'eau ;
- $V_i(t, x)$ la vitesse de l'écoulement ;
- $S_{bi}(x)$ est la pente du fond ;
- S_{fi} est le terme de friction ;
- g est l'accélération de pesanteur.

Un modèle simplifié de (1.34) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial(H_i V_i)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad i = 1, \dots, N \\ (b) \quad \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_i^2}{\partial x} + g \frac{\partial H_i}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1.35)$$

qu'on trouve dans [13].

Dans [13], le cas du réseau en cascade constitué de deux canaux (Figure 1.4) est étudié. La condition de jonction (conservation du flux en M) est

$$H_1(t, L_1) V_1(t, L_1) = H_2(t, 0) V_2(t, 0), \quad (1.36)$$

les conditions initiales sont

$$H_i(0, x) = H_{0,i}(x), V_i(0, x) = V_{0,i}(x) \quad (1.37)$$

et les conditions aux bords

$$V_1(t, 0) = V_{1,0}(t), V_1(t, L_1) = V_{1,L_1}(t), V_2(t, L_2) = V_{2,L_2}(t). \quad (1.38)$$

De même ce type de réseau constitué de deux canaux est étudié dans [8]. Les actions de contrôle sont assurées par trois ouvertures de portes notées u_1 pour la porte gauche, u_2 pour la porte intermédiaire et u_3 pour la porte de droite (Figure 1.4). En plus de la condition de conservation du flux en M (1.36), des relations de décharge pour les trois portes s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} V_{1,0} |V_{1,0}| H_{1,0}^2 &= u_1 (H_{up} - H_{1,0}), \\ V_{1,L} |V_{1,L}| H_{1,L}^2 &= u_2 (H_{1,L} - H_{2,0}), \\ V_{2,L} |V_{2,L}| H_{2,L}^2 &= u_3 (H_{2,L} - H_{do}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

où H_{up} et H_{do} sont les niveaux d'eau à gauche et à droite ($H_{do} < H_{up}$). Pour les réseaux en forme d'étoile constitués de N canaux ouverts avec une jonction O et N extrémités libres E_i ($i = 1, \dots, N$) (Figure 1.5), la valeur $x = 0$ est considérée comme la coordonnée du nœud O et le $i^{\text{ème}}$ canal est paramétré par $x \in [0, L_i]$. Des écoulements sur ce type de réseau sont décrits dans [26, 24] par le système de Saint-Venant suivant :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial(A_i V_i)}{\partial x} = 0, & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad i = 1, \dots, N \\ (b) \quad \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial S_i}{\partial x} = 0, \quad \text{avec} \quad S_i = \frac{1}{2} V_i^2 + g h_i(A_i) + g Y_{ib}, \end{cases} \quad (1.40)$$

où g est la constante de gravité. La constante Y_{ib} désigne l'altitude du fond du canal et h_i et $A_i = A_i(t, x)$ désignent respectivement la hauteur d'eau et l'aire de la section droite occupée par l'eau en x au temps t . Aussi $V_i = V_i(t, x)$ désigne la vitesse moyenne à travers la section droite.

La condition initiale est donnée comme suit :

$$t = 0 : (A_i, V_i) = (A_{i0}(x), V_{i0}(x)), \quad 0 \leq x \leq L_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.41)$$

À toute extrémité libre donnée, la condition aux limites du flux est :

$$x = L_i : A_i V_i = q_i(t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.42)$$

tandis que en O nous avons

$$\sum_{i=1}^N A_i V_i = q_0(t), \quad (1.43)$$

et

$$S_i = S_1 ; \quad i = 2, \dots, N. \quad (1.44)$$

Dans ce mémoire nous allons travailler avec un réseau en forme d'étoile constitué de trois canaux se joignant à un nœud M avec ces deux derniers types de conditions de jonctions. Dans [17] d'autres formes d'équations (Équations d'Euler isothermes) sont considérées avec la condition de continuité de la densité à la jonction couplée à celle du flux.

Les équations de Saint Venant sont non linéaires. Après leurs linéarisations nous écrivons les modèles linéaires sous formes d'équations indépendantes qui sont des équations de transport. La connaissance des solutions de ces équations indépendantes permettra de déterminer les solutions des modèles linéaires.

1.2 Équation de transport

1.2.1 Problème physique : convection dans un fluide

On considère le transport par un fluide d'une quantité scalaire définie par unité de volume $w(x, t)$. On suppose que le champ de vitesse λ est unidimensionnel, que le scalaire $w(x, t)$ ne diffuse pas et est uniquement transporté par le fluide. La quantité $w(x, t)$ se conserve donc le long des trajectoires, c'est à dire :

$$\frac{D}{Dt}w(t, x) = 0 \quad (1.45)$$

où $\frac{D}{Dt}$ représente la dérivée lagrangienne, i.e. la dérivée suivant la trajectoire des particules fluides qui s'écrit en fonction des dérivées partielles en temps et en espace :

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \lambda \frac{\partial()}{\partial x} \quad (1.46)$$

L'équation (1.45) est donc l'équation de convection pure suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.47)$$

qui traduit la conservation de $w(x, t)$ le long des trajectoires. Si on connaît les trajectoires, il suffit de connaître la solution en un point d'une trajectoire pour connaître la solution sur toute la trajectoire.

L'équation de transport linéaire est une équation hyperbolique simple. Ici le scalaire λ est donné : c'est par définition la vitesse de propagation associée à l'équation, au point x à l'instant t .

On rencontre cette équation dans un grand nombre d'applications comme la circulation automobile, les équations cinétiques, le modèle démographie, le renouvellement cellulaire, etc.

1.2.2 Étude de la solution analytique

Définition 2. On appelle courbes caractéristiques de (1.47) les droites de vecteur directeur $(1, \lambda)$ le long desquelles (1.47) se transforme en une EDO. Elles sont de la forme

$$x - \lambda t = c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}. \quad (1.48)$$

Proposition 1. Les solutions $w(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (1.47) sont de la forme

$$w(t, x) = f(x - \lambda t) \quad (1.49)$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Preuve

D'une part :

$$\partial_t w(t, x) = -\lambda f'(x - \lambda t)$$

et d'autre part :

$$\partial_x w(t, x) = f'(x - \lambda t).$$

Donc :

$$\partial_t w(t, x) + \lambda \partial_x w(t, x) = -\lambda f'(x - \lambda t) + \lambda f'(x - \lambda t) = 0.$$

Ce qui achève la preuve. \square

Proposition 2. *Soit w une solution de (1.47). Alors w est constante sur les droites caractéristiques*

$$D_c : x - \lambda t = c. \quad (1.50)$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dw(t, x(t))}{dt} &= \frac{dt}{dt} \frac{\partial w(t, x(t))}{\partial t} + \frac{dx(t)}{dt} \frac{\partial w(t, x(t))}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w(t, x(t))}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w(t, x(t))}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. \square

Proposition 3. *Soit f la fonction qui à tout c associe la valeur de w sur D_c .*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\mapsto f(c) \text{ valeur de } w \text{ sur } D_c \end{aligned}$$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Il existe une et une seule droite caractéristique passant par (t_0, x_0) d'équation

$$x - \lambda t = c_0 \quad \text{avec } c_0 = x_0 - \lambda t_0. \quad (1.51)$$

Remarque 2. *Lorsque $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ toute droite caractéristique de (1.47) passe par un point de l'axe des x . Ainsi la donnée d'une condition initiale de l'EDP (1.47) permettra de déterminer toutes ses solutions.*

En effet en imposant la condition initiale $w(0, x) = w^0(x)$ à (1.47) on obtient :

$$f(x) = w^0(x). \quad (1.52)$$

Donc :

$$w(t, x) = w^0(x - \lambda t) \quad (1.53)$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

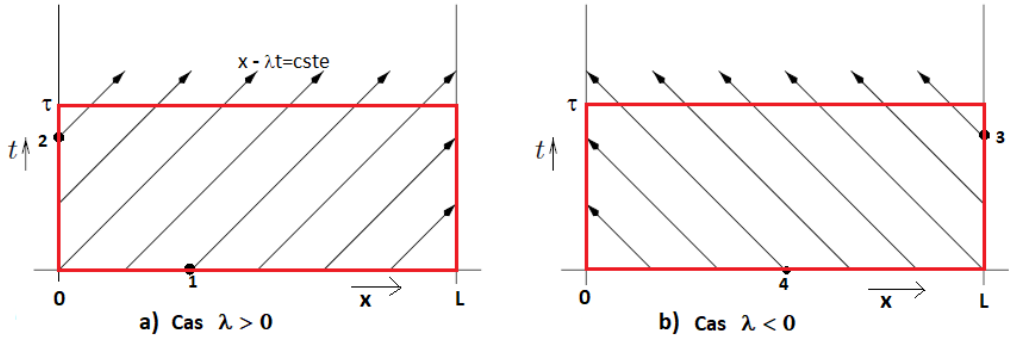


FIGURE 1.6 – Droites caractéristiques pour $\lambda > 0$ (gauche) et $\lambda < 0$ (droite).

Remarque 3.

Lorsque $(t, x) \in [0, \tau] * [0, L]$ le domaine est borné. Pour déterminer la solution en un point (t, x) de ce domaine on détermine tout d'abord la trajectoire passant par ce point.

- Si cette trajectoire a une intersection avec l'axe des x (cas du point 1 ou du point 4 sur la Figure 1.6), la solution en (t, x) est égale à la valeur de w au point 1 pour $\lambda > 0$ et au point 4 pour $\lambda < 0$. Dans ce cas la solution est déterminée par la condition initiale $w^0(x)$ à $t = 0$.
- Si la trajectoire a une intersection avec les axes $x = 0$ et $x = L$ (cas des points 2 et 3 sur la Figure 1.6) la solution en (t, x) est égale à la valeur de w au point 2 pour $\lambda > 0$ et celle de w au point 3 pour $\lambda < 0$. C'est à dire que la solution est déterminée par les conditions aux limites $w_0(t)$ en $x = 0$ ou $w_L(t)$ en $x = L$ selon le signe de λ .

La solution générale de l'équation de convection pure dans un domaine bornée est donc déterminée soit par les conditions initiales soit par les conditions aux frontières physiques du domaine.

Ainsi pour $\lambda > 0$ le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0 \\ w(0, x) = w^0(x) \\ w(t, 0) = w_0(t) \end{cases} \quad (1.54)$$

avec $w : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, w^0 et w_0 des fonctions de classe C^1 , a pour solution [25] :

$$w(t, x) = \begin{cases} w(0, x - \lambda t) = w^0(x - \lambda t) & \text{si } t \leq \frac{L}{\lambda} \\ w\left(t - \frac{x}{\lambda}, 0\right) = w_0\left(t - \frac{x}{\lambda}\right) & \text{si } t \geq \frac{L}{\lambda}. \end{cases} \quad (1.55)$$

Preuve

Supposons $0 \leq x \leq L$. Avec la caractéristique $x - \lambda t = 0$ on en déduit que $t \leq \frac{L}{\lambda}$. Ainsi dans ce cas la condition initiale intervient dans la détermination de la solution. Dans ce cas :

$$f(x) = w^0(x) \quad \text{et} \quad w(t, x) = w^0(x - \lambda t).$$

Par contre si $t \geq \frac{L}{\lambda}$ la condition aux bords intervient. L'égalité $w(t, x) = f(x - \lambda t)$ donne alors :

$$w(t, 0) = f(-\lambda t) = w_0(t).$$

En posant $z = -\lambda t$ on obtient par la suite :

$$f(z) = w_0\left(\frac{z}{-\lambda}\right) \quad \text{et} \quad f(x - \lambda t) = w_0\left(\frac{x - \lambda t}{-\lambda}\right).$$

Par conséquent :

$$w(t, x) = w_0\left(t - \frac{x}{\lambda}\right).$$

□

De même si $\lambda < 0$ le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ w(0, x) = w^0(x) \\ w(t, L) = w_L(t) \end{cases} \quad (1.56)$$

où w^0 et w_L des fonctions de classe C^1 et $w \in C^1((0; \infty) \times [0, L])$ a pour solution :

$$w(t, x) = \begin{cases} w(0, |\lambda|t) = w^0(|\lambda|t) & \text{si } t \leq \frac{L}{|\lambda|} \\ w\left(t - \frac{x}{|\lambda|}, L\right) = w_L\left(t - \frac{x}{|\lambda|}\right) & \text{si } t \geq \frac{L}{|\lambda|}. \end{cases} \quad (1.57)$$

Jusque là nous n'avons présenté que les équations de Saint Venant et donné par la suite les solutions d'équations de transport par la méthode des caractéristiques. Puisque l'objectif de ce mémoire c'est de construire des contrôles rétroactifs il serait intéressant de présenter des notions relatives à la théorie du contrôle et c'est l'objet de la section qui suit.

1.3 Observabilité, contrôlabilité et stabilisation

L'observabilité, la contrôlabilité et la stabilisation font parties des notions fondamentales et essentielles dans la théorie de contrôle. La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certaines critères. Les applications sont très nombreuses et dans des domaines très diverses, comme la mécanique, l'électricité, la biologie, la chimie, économie, etc.

1.3.1 Contrôlabilité

L'objectif de la contrôlabilité est d'atteindre en un temps T donné une cible donnée ou de s'en approcher autant qu'on le désire en agissant à l'aide d'un contrôle. On parle de contrôlabilité exacte dans le premier cas et de contrôlabilité approchée dans le second.

1.3.1.1 Définitions de quelques notions de contrôle

Nous rappelons ici des définitions de quelques notions de contrôle et une classification des algorithmes de contrôle des canaux en se référant à [31].

Définition 3. *Un système de contrôle est un système élémentaire en charge de l'exploitation des structures transversales des canaux, sur la base d'informations provenant du réseau de canaux. Ces informations peuvent inclure des variables mesurées et des objectifs. Les frontières du système de contrôle sur le système de canalisation sont des sorties où sont placés des capteurs, et des entrées où sont placés des actionneurs contrôlant les structures transversales.*

Définition 4. *Les variables contrôlées sont des variables cibles contrôlées par l'algorithme de contrôle. Des exemples sont le niveau d'eau à l'extrémité amont ou aval d'un canal, le niveau d'eau à un point intermédiaire d'un canal, le débit à une structure.*

Les variables mesurées sur les canaux d'irrigation sont généralement les niveaux d'eau. Dans certains cas, les variables mesurés peuvent être des débits qui peuvent être mesurés avec des débitmètres.

Définition 5. *Les variables d'action de contrôle, également appelées sorties de l'algorithme de contrôle, sont des variables issues de l'algorithme de contrôle et fournissent des structures croisées aux actionneurs. Ce sont soit des ouvertures de porte soit des débits. Dans ce dernier cas, un autre algorithme transforme le débit en une ouverture de porte.*

1.3.1.2 Type de contrôles

L'algorithme de contrôle utilise soit un contrôle rétroactif FB également appelé contrôle en boucle fermée soit un contrôle à action directe FF, également appelé contrôle en boucle ouverte. Une combinaison des deux est aussi possible.

Contrôle rétroactif

Dans un algorithme de contrôle rétroactif, les variables contrôlées Y sont mesurées ou obtenues directement à partir des mesures. Tout écart Y_c par rapport à la cible est réinjecté dans l'algorithme de contrôle afin de produire une action corrective U (Figure 1.7).

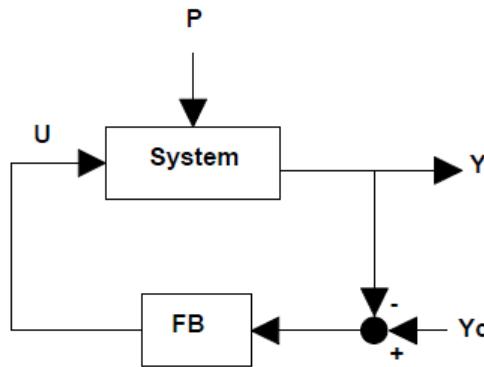


FIGURE 1.7 – Commande de rétroaction.

Les perturbations P , même inconnues, sont prises en compte indirectement par leurs effets sur la sortie Y du système. Dans la théorie du contrôle, ce concept est essentiel car il relie une variable d'action de contrôle U à une variable Y . Le contrôle rétroactif peut être appliqué à toutes les variables contrôlées : débit, niveau d'eau et volume.

Contrôle à action directe

Dans un algorithme de contrôle à action directe les variables d'action de contrôle U sont calculées à partir des variables ciblées Y_c et un processus de simulation des estimations de perturbations \hat{P} (Figure 1.8).

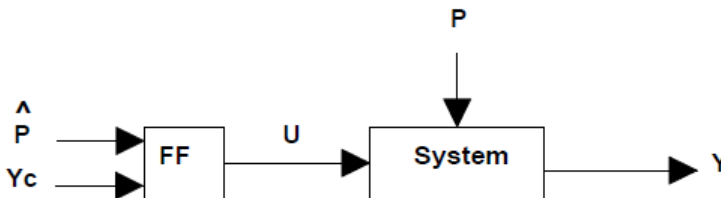


FIGURE 1.8 – Contrôle à action directe

Le contrôle à action directe améliore généralement les performances du contrôle lorsque peu de perturbations inconnues se produisent dans le système de canalisation. Ce type de contrôle peut compenser les retards inhérent du système en anticipant les besoins des utilisateurs qui doivent être estimés le plus précisément possible en tenant compte des données climatiques, agronomiques et sociologiques, ainsi que des relevés de la consommation d'eau des semaines ou saisons précédentes. Il peut être appliqué à toutes les variables contrôlées : débit, niveau d'eau et volume. Certains des exemples sont cités à la fois pour le contrôle de débits et des niveaux d'eau. Par exemple, le modèle d'onde dynamique calcule simultanément ces deux types de variables. Ce contrôle est généralement insuffisant en soi, en raison d'erreurs de modèle, d'erreurs d'estimation de perturbation et de perturbations inconnues, et doit être combiné avec un contrôle rétroactif pour compenser ces erreurs.

1.3.2 Observabilité

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u), \\ y = g(x). \end{cases} \quad (1.58)$$

où l'état $x(t)$ évolue dans une variété analytique, l'entrée $u \in U = \mathbb{R}^p$ et la sortie $y \in \mathbb{R}^q$ sont de dimension finie. Ce genre de systèmes constitue dans beaucoup de cas la représentation du comportement dynamique des modèles physiques ou chimiques. Étant donné une entrée u , l'évolution des trajectoires des variables d'états dépend des conditions initiales.

L'observabilité est résumée par Xiao-Dong LI [27] en une propriété à partir de laquelle on peut déterminer de façon exacte ou approchée l'état du système considéré, tout en connaissant quelques mesures (sorties) et contrôles (entrées).

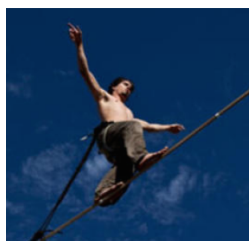
Définition 6. *Un système est dit observable si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle de temps fini $[t_i, t_f]$ permet de déterminer l'état initial $x(t_i)$, et donc, par intégration de l'équation d'état, de connaître $x(t)$ à tout instant appartenant à l'intervalle $[t_i, t_f]$.*

1.3.3 Stabilisation

La stabilisation consiste à rendre un système robuste aux perturbations et aux erreurs de modèle. Étant donné donc un état instable d'un système dynamique, on le rend stable en appliquant un contrôle adéquat. La solution converge ainsi vers l'état d'équilibre. Le problème de la stabilisation d'un système consiste donc :

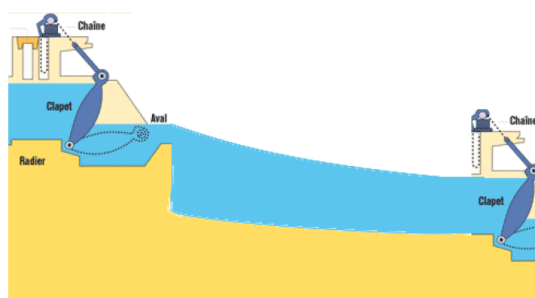
- . à trouver un contrôle dépendant de l'état du système tel que le système soit stable.

. ou à chercher un contrôle qui ne dépend que de la sortie [36]. Dans ce cas on parle de la stabilisation à travers la sortie ou par retour d'état estimé. Observons par exemple les figures 1.9 et 1.10.



Contrôle interne

FIGURE 1.9 – Exemple de contrôles pour stabiliser



Contrôle aux bords

FIGURE 1.10 – Exemple de contrôles pour stabiliser

Ces deux figures sont deux exemples de contrôles pour stabiliser. La première figure montre un acrobate sur une corde qui contrôle son corps pour ne pas tomber en avançant. Dans la deuxième figure des machines sont installées en amont comme en aval pour réguler le débit et le niveau de l'eau. C'est ce dernier cas qui nous intéresse. Nous allons voir comment faire cette régulation mathématiquement en construisant des contrôles.

1.4 Quelques espaces utilisés dans ce mémoire

Nous donnons dans cette partie quelques espaces utilisés dans ce document.

1.4.1 Les espaces L^p

Définition 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

1. On note $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions f , mesurables presque partout, définies par :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Une norme dans L^p est définie par :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } f \in L^p(\Omega).$$

2. Lorsque $p = \infty$, on définit l'espace L^∞ par :

$$L^\infty(\Omega) = \{f \text{ mesurable} : |f(x)| < \infty\}$$

et la norme dans L^∞ est :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ presque partout}\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ muni de la norme correspondante est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

Définition 8. Soit E un espace de Banach de dual E' .

- On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge fortement vers $u \in E$ et on note $u_n \rightarrow u$ si :

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

- On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers $u \in E$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ si :

$$\forall f \in E', f(u_n) = \langle f, u_n \rangle_{E',E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E',E} = f(u).$$

- On dit qu'une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E' converge faiblement* vers $f \in E'$ et on note $f_n \rightharpoonup^* f$ si :

$$\forall u \in E, f_n(u) = \langle f_n, u \rangle_{E',E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E',E} = f(u).$$

Remarque 4. Si la suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers $u \in E$ alors u est appelée la limite faible de (u_n) .

Dans ce mémoire, nous supposerons dans un premier temps que la condition initiale est continue avant d'étudier le cas où elle est dans L^2 pour formuler des théorèmes qui sont des résultats de régularité.

1.4.2 Les espaces de Sobolev

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin que l'espace soit complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach. Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois, pour donner sens par exemple à une équation aux dérivées partielles et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction. Les espaces de Sobolev sont des outils essentiels pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.¹

Soient Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^N , $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice. On note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$.

Définition 9. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et f une fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Le support de f noté $\text{supp} f$ est défini par :

$$\text{supp} f = \overline{\{\in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 10. On note $\mathcal{D}(\Omega)$, le \mathbb{C} -espace des fonctions définies de Ω dans \mathbb{C} indéfiniment différentiables à support compact inclus dans Ω .

Définition 11. Soit $v \in L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans L^2 s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$ telles que :

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Chaque w_i est appelée la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle faible de v et notée $\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

1. référence : wikipedia

Définition 12. On dit que $v \in L^2(\Omega)$ est m fois dérivables au sens faible si toutes ses dérivées partielles d'ordre $m - 1$ sont dérivables au sens faible.

Définition 13. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \forall i \in \{1, \dots, N\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle faible de v .

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left(u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x) \right) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\langle u, u \rangle \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme correspondante est un espace de Hilbert.

Définition 14. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et est caractérisé par :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 15. Soit $m \geq 0$. L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\}$$

où la dérivée $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible.

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\langle u, u \rangle \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 16. Pour tout entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \right\}$$

où la dérivée $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
Les théorèmes qui suivent sont tirés de [10].

Théorème 1. [Trace]

Soit Ω un ouvert régulier borné de classe C^1 et de frontière $\partial\Omega$.
On définit l'application γ_0 :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\bar{\Omega}) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ notée encore γ_0 . Il existe donc une constante réelle $\mathbf{c} > 0$ telle que :

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \mathbf{c} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.60)$$

Théorème 2. [Inégalité de Poincaré]

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et Γ_0 une partie de la frontière de Ω telle que $\text{mes}(\Gamma_0) \neq 0$
Soit :

$\mathbf{V} \subset H^1(\Omega)$ défini par :

$$\mathbf{V} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_0} \equiv 0 \right\}$$

Alors il existe une constante $\mathbf{c} > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathbf{V} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathbf{c} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.61)$$

Théorème 3. [Formule de Green]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N lipschitzien de bord $\partial\Omega$. Soient v et w deux éléments de $H^1(\Omega)$. On désigne par $\mathbf{n}(s)$ le vecteur unitaire normal sortant (c'est à dire dirigé vers l'extérieur de Ω) au point $s \in \partial\Omega$.

On a :

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} v(s) \cdot w(s) \cdot \mathbf{n}_i(s) ds \quad (1.62)$$

Les formules de Green sont des outils fondamentaux de résolution des problèmes d'EDP.

Théorème 4. [Compacité]

Soit Ω un ouvert régulier, H et K des espaces de Hilbert. On dit que $(x_n) \subset H$ converge faiblement vers $x \in H$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si

$$\langle x_n, y \rangle_H \longrightarrow \langle x, y \rangle_H \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \forall y \in H$$

On dit que H est inclus dans K avec injection compact si $(x_n) \subset H$ est telle que x_n converge faiblement dans H vers x alors x_n converge fortement dans K vers x .

Théorème 5. [Théorème de Rellich]

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 .

L'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (c'est-à-dire de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$).

1.4.3 Espaces de Sobolev dépendant du temps

Soit X un espace de Banach et $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Pour $1 \leq p < \infty$ on définit les espaces L^p des fonctions $u : (a, b) \longrightarrow X$ par :

$$L^p(a, b; X) = \left\{ u : u \text{ mesurable et } \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty \right\}$$

avec :

$$\|u\|_{L^p(a, b; X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.63)$$

Pour $p = \infty$,

$L^\infty(a, b; X) = \{ u : u \text{ mesurable et } \exists M > 0 \mid \|u(t)\|_X < M \text{ p.p.} \}$ avec :

$$\|u\|_{L^\infty(a, b; X)} = \sup_{t \in (a, b)} \|u(t)\|_X. \quad (1.64)$$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(a, b; X)$ est défini par :

$$W^{1,p}(a, b; X) = \{ u \in L^p(a, b; X) \mid \partial_t u \in L^p(a, b; X) \}$$

où la dérivée est à prendre au sens faible.

Cet espace a pour norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(a, b; X)} = \left(\int_a^b [\|u(t)\|_X^p + \|\partial_t u(t)\|_X^p] dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.65)$$

On note que : $W^{1,2}(a, b; X) = H^1(a, b; X)$.

Donc :

$$\|u\|_{H^1(a, b; X)} = \left(\int_a^b [\|u(t)\|_X^2 + \|\partial_t u(t)\|_X^2] dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.66)$$

Remarque 5. Les variables t et x sont indépendantes et jouent des rôles différents. La fonction $u(t, x)$ est une fonction du temps à valeurs dans un espace de fonctions : $u(t, x) \equiv u(t)(x)$.

1.5 Formulation variationnelle

L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer de concepts et de propriétés de l'analyse fonctionnelle, en particulier ceux des espaces de Hilbert et de Sobolev. À l'aide du théorème de Lax-Milgram, de la méthode de Galerkin..., elle permet de discuter de l'existence et de l'unicité de solutions. Étant donné un opérateur différentiel R et une fonction f définie sur un ouvert Ω , la formulation forte du problème est :

trouver u définie sur Ω tel que :

$$R(u) = f \quad (1.67)$$

La formulation faible du problème (1.67) est :

trouver u définie sur Ω vérifiant pour toute fonction v définie sur Ω :

$$\int_{\Omega} R(u)v = \int_{\Omega} f v \quad (1.68)$$

La solution du problème (1.67) est appelée solution forte tandis que celle du problème (1.68) est la solution faible.

En comparaison avec la formulation forte, la formulation faible est une autre manière d'énoncer un problème physique régi par des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Une solution forte du problème d'origine est également solution de la formulation faible.

1.6 Formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables

La formule de Taylor proposée ici nous permettra de linéariser certaines fonctions rencontrées dans ce mémoire.

Soient f une fonction définie par $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $a \in D$

avec f de classe C^p au voisinage de a et $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + b \in D$. On a :

$$f(a + b) = f(a) + \sum_{k=1}^p \left(b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k (f)(a) + O(\|h\|^p). \quad (1.69)$$

En particulier pour $n = 2$ et $p = 1$ on a :

$$f(a + b) = f(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = f(a) + b_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + b_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + O(\|h\|). \quad (1.70)$$

1.7 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale [12, 25]. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation très utilisée en mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des rectangles en $2D$ ou des parallélépipèdes en $3D$. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finies. De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA... Nous l'utiliserons au dernier chapitre de ce mémoire pour faire des simulations numériques.

En guise de rappel d'autres méthodes de discrétisation existent [12]. Nous pouvons citer la méthode des différences finies qui consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage et la méthode des éléments finis qui consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.

Une méthode est dite instable si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi [12].

Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre est instable. Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème, si on sait que le problème physique sous-jacent est stable. Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue. Ces différents liens, résumés sur la figure 1.11, sont :

- **la stabilité**, c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.
- **la consistance**, c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation Δt et Δx tendent vers zéro.
- **la convergence**, c'est la propriété qui assure que la solution numérique

tende vers la (ou une) solution exacte des équations continues. C'est évidemment la propriété la plus recherchée !

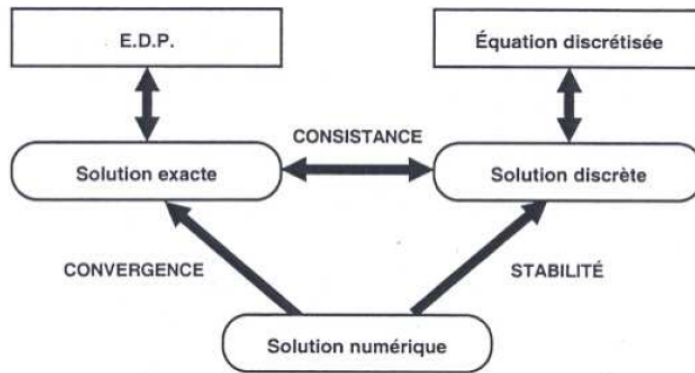


FIGURE 1.11 – Solutions exacte, numérique et discrète

Ces propriétés sont liées les unes aux autres par des théorèmes [12] :

1.7.1 Théorème de Lax

Dans un problème bien posé, et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

1.7.2 Théorème de Lax-Wendroff

Si un schéma numérique consistant converge lorsqu'on raffine les pas de temps et d'espace, c'est-à-dire lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et $\Delta x \rightarrow 0$, alors il converge vers une solution faible des équations.

1.7.3 Condition de stabilité CFL

Pour des problèmes d'évolution temporelle, certains schémas sont stables à condition que le pas de temps soit inférieur à une certaine valeur critique fonction du pas d'espace. Cette inégalité constitue la condition de Courant-Friedrichs-Lewy ou condition CFL. Elle est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité. La condition CFL varie d'une équation à une autre. Après ce petit rappel nous allons construire des contrôles rétroactifs pour un canal simple dans le chapitre qui suit.

Construction de contrôles rétroactifs pour un canal

Dans ce chapitre nous partons des équations de Saint Venant unidimensionnelles pour un canal pour construire des contrôles afin d'y réguler les niveaux et les débits de l'eau. Nos contrôles sont dérivés d'un système linéaire qui est obtenu à partir de la linéarisation du modèle non linéaire, en utilisant quelques hypothèses. Le modèle linéaire sera d'abord écrit sous forme de deux équations indépendantes en utilisant des variables caractéristiques. Ces variables caractéristiques sont ensuite utilisées pour construire les contrôles.

2.1 Équations de Saint-Venant

Le canal est supposé rectangulaire, horizontale sur fond plat de longueur L (m) et sans friction avec une largeur constante l en (m) (voir Figure 2.1). Ainsi, les termes S_b et S_f du système (1.30) du Chapitre 1 sont nuls et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

L'aire de la section droite de l'écoulement est

$$A(t, x) = lh(t, x)$$

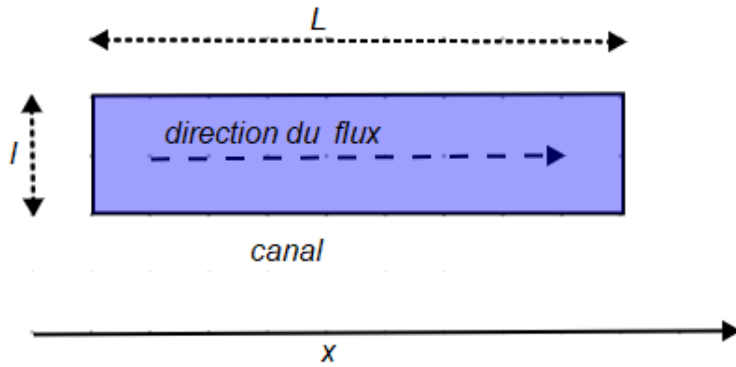


FIGURE 2.1 – Canal rectangulaire

avec h la hauteur d'eau dans le canal.

Les variables sont alors la hauteur h de la colonne de fluide (m) et le débit q ($m^3 \cdot s^{-1}$). A partir de (2.1) on obtient par substitution :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial(lh)}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \text{et } t \geq 0 \\ (b) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{lh} \right) + glh \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

En multipliant (2.2.a) par l'inverse de l et en simplifiant on obtient, pour un canal rectangulaire de largeur constante, le modèle non linéaire suivant (proposé dans [14] que nous exploitons dans ce mémoire) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L] \quad \text{et } t \geq 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + glh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = 0 ; \quad x \in [0, L] \quad \text{et } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour ce modèle qui est non linéaire, on considère l'état initial

$$h(0, x) = h^0(x), \quad q(0, x) = q^0(x) \quad (2.4)$$

et les conditions aux limites

$$q(t, 0) = q_0(t), \quad q(t, L) = q_L(t). \quad (2.5)$$

L'écoulement est dit sous critique si le nombre de Froude

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} < 1 \quad \text{avec } v = \frac{q}{A} = \frac{q}{lh}. \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un écoulement sous-critique le régime d'écoulement est fluvial. Les ondes se déplacent plus vite que le fluide. Elles peuvent se propager vers l'amont ou vers l'aval. Il est donc possible, pour résoudre les équations, de poser des conditions aux limites amont et aval.

2.2 Linéarisation du modèle non linéaire

2.2.1 État stable

Il y a stabilité si le débit et la hauteur dans le canal ne varient pas en fonction du temps. C'est-à-dire que si (\bar{h}, \bar{q}) désigne la solution à l'état d'équilibre alors

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

En remplaçant h par \bar{h} et q par \bar{q} dans (2.3) on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0, & x \in [0, L] \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + gl\bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{q}^2}{\bar{h}} \right) = 0, & x \in [0, L]. \end{cases}$$

En utilisant (2.7) on trouve

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

à l'état d'équilibre.

Le débit est constant. La hauteur ainsi que les vitesses (moyenne et ponctuelle) restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent le mouvement est permanent.

2.2.2 Modèle linéarisé

Nous introduisons l'état résiduel (\hat{h}, \hat{q}) comme différence entre l'état actuel (h, q) et l'état d'équilibre (\bar{h}, \bar{q}) :

$$\begin{cases} \hat{h}(t, x) = h(t, x) - \bar{h}(x) \\ \hat{q}(t, x) = q(t, x) - \bar{q}(x). \end{cases} \quad (2.9)$$

Donc grâce à (2.8) on a

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \hat{q}}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Les différences entre l'état du modèle non linéaire et un état stable souhaité sont considérées comme des perturbations.

Nous utilisons ensuite les hypothèses $|\hat{h}| \ll \bar{h}$ et $|\hat{q}| \ll |\bar{q}|$ pour linéariser

(2.3).

En remplaçant $\frac{\partial h}{\partial x}$ par $\frac{\partial \hat{h}}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ par $\frac{\partial \hat{q}}{\partial x}$ dans l'équation (2.3.a) on obtient

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L] \quad (2.11)$$

De même l'équation (2.3.b) entraîne :

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + gl\hat{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (2.12)$$

Posons

$$f(h, q) = \frac{q^2}{h}$$

On linéarise la fonction f :

$$f(h, q) = f(\bar{h} + \hat{h}, \bar{q} + \hat{q}) = f(\bar{h}, \bar{q}) + \hat{h} \frac{\partial f}{\partial h}(\bar{h}, \bar{q}) + \hat{q} \frac{\partial f}{\partial q}(\bar{h}, \bar{q}).$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial h}(h, q) = -\frac{q^2}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial q}(h, q) = \frac{2q}{h}.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial h}(\bar{h}, \bar{q}) = -\frac{\bar{q}^2}{\bar{h}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial q}(\bar{h}, \bar{q}) = \frac{2\bar{q}}{\bar{h}}.$$

Ainsi :

$$\frac{q^2}{h} = \frac{\bar{q}^2}{\bar{h}} - \frac{\bar{q}^2}{\bar{h}^2} \hat{h} + \frac{2\bar{q}}{\bar{h}} \hat{q}$$

et on en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = -\frac{\bar{q}^2}{\bar{h}^2} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + \frac{2\bar{q}}{\bar{h}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x}.$$

De ce fait (2.12) donne

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + gl(\bar{h} + \hat{h}) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} - \frac{\bar{q}^2}{l\bar{h}^2} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + \frac{2\bar{q}}{l\bar{h}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (2.13)$$

Puisque par hypothèse $|\hat{h}| \ll \bar{h}$, le produit $\hat{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x}$ est alors très petit. On jette cette partie de (2.13) pour obtenir l'équation :

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{2\bar{q}}{\bar{h}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \left(gl\bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{\bar{h}^2} \right) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0. \quad (2.14)$$

Par conséquent avec (2.11) et (2.14), la solution (\hat{h}, \hat{q}) satisfait le système

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + 2 \frac{\bar{q}}{\bar{h}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \left(gl\bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{\bar{h}^2} \right) \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

soit :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

avec :

$$\sigma = 2 \frac{\bar{q}}{\bar{h}} \quad \text{et} \quad \rho = gl\bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{\bar{h}^2}. \quad (2.17)$$

La condition initiale est

$$\hat{h}(0, x) = \hat{h}^0(x) \quad \text{et} \quad \hat{q}(0, x) = \hat{q}^0(x) \quad (2.18)$$

et la condition aux limites

$$\hat{q}(t, 0) = \hat{q}_0(t), \quad \text{et} \quad \hat{q}(t, L) = \hat{q}_L(t). \quad (2.19)$$

Nous réécrivons par la suite le système (2.16) sous une autre forme en utilisant des variables à définir qu'on nommera variables caractéristiques.

2.3 Variables caractéristiques

Le système (2.16) peut aussi s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

où

$$U = \begin{pmatrix} \hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{l} \hat{q} \\ \sigma \hat{q} + \rho \hat{h} \end{pmatrix}$$

sont respectivement le vecteur écoulement et le vecteur flux. Puisque F est une fonction de U on obtient de ce fait

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

avec :

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l} \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}.$$

Posons

$$A = \frac{\partial F(U)}{\partial U}.$$

Le système (2.16) s'écrit finalement sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.20)$$

En résolvant l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$, avec I la matrice carrée identité d'ordre 2, on obtient

$$\lambda^2 - \sigma\lambda - \frac{\rho}{l} = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont alors

$$\lambda_1 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} - \sqrt{g\bar{h}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}. \quad (2.21)$$

En considérant l'écoulement sous-critique et en tenant compte de la direction d'écoulement, nous avons alors :

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0. \quad (2.22)$$

De plus $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 - |\lambda_1|$ et $\rho = l|\lambda_1|\lambda_2$.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont distinctes donc A est diagonalisable. Il existe alors une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$A = PDP^{-1}. \quad (2.23)$$

On peut prendre

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{l(\lambda_2 - \lambda_1)} & \frac{\lambda_1}{l(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} l & \frac{-1}{\lambda_2} \\ l & \frac{-1}{\lambda_1} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

En remplaçant la matrice A par PDP^{-1} alors (2.20) donne

$$\frac{\partial U}{\partial t} + PDP^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.26)$$

En multipliant ensuite (2.26) par P^{-1} nous obtenons

$$P^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + DP^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.27)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial(P^{-1}U)}{\partial t} + D \frac{\partial(P^{-1}U)}{\partial x} = 0. \quad (2.28)$$

Posons maintenant

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = P^{-1}U. \quad (2.29)$$

Nous obtenons alors :

$$w_1(t, x) = l\hat{h}(t, x) - \frac{1}{\lambda_2}\hat{q}(t, x) \text{ et } w_2(t, x) = l\hat{h}(t, x) - \frac{1}{\lambda_1}\hat{q}(t, x). \quad (2.30)$$

Ainsi, nous avons les conditions initiales suivantes :

$$w_1(0, x) = l\hat{h}(0, x) - \frac{1}{\lambda_2}\hat{q}(0, x), \quad (2.31)$$

$$w_2(0, x) = l\hat{h}(0, x) - \frac{1}{\lambda_1}\hat{q}(0, x), \quad (2.32)$$

et les conditions aux limites ci-dessous :

$$w_1(t, L) = l\hat{h}(t, L) - \frac{1}{\lambda_2}\hat{q}(t, L), \quad (2.33)$$

$$w_2(t, 0) = l\hat{h}(t, 0) - \frac{1}{\lambda_1}\hat{q}(t, 0). \quad (2.34)$$

Le système (2.20) s'écrit donc comme suit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + D \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.35)$$

ou sous formes de deux équations indépendantes :

$$\frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.36)$$

L'une des équations indépendantes est

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial t} - |\lambda_1| \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0,$$

et la seconde

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0.$$

Puisque λ_1 est un réel strictement négatif la fonction w_1 est constante sur les

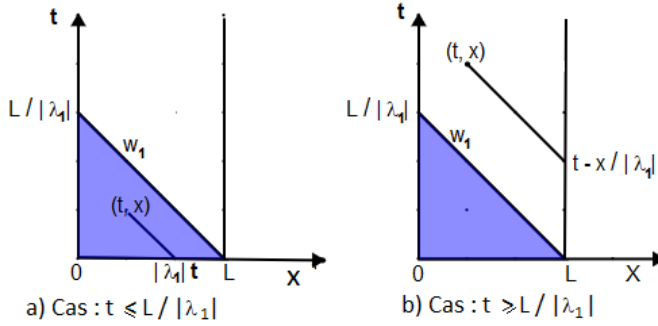


FIGURE 2.2 – Courbes caractéristiques de w_1 .

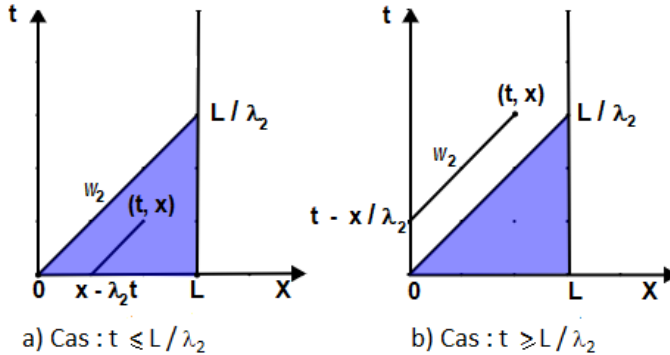


FIGURE 2.3 – Courbes caractéristiques de w_2 .

droites caractéristiques $x + |\lambda_1|t = c$ avec $c \in \mathbb{R}$. La valeur de $w_1(t, x)$ est fixée soit sur la partie (t, x) telle que $t \leq \frac{L}{|\lambda_1|}$ (voir Figure 2.2.a) ou sur la partie (t, x) telle que $t \geq \frac{L}{|\lambda_1|}$ (voir Figure 2.2.b).

Si $t \leq \frac{L}{|\lambda_1|}$ alors la solution est déterminée par la condition initiale $w_1(0, x)$ à $t = 0$. Si $t \geq \frac{L}{|\lambda_1|}$ alors la solution est déterminée par la condition aux limites $w_1(t, L)$ en $x = L$.

Comme λ_2 est un réel strictement positif la fonction w_2 est constante aussi sur les droites caractéristiques $x - \lambda_2 t = c$ avec $c \in \mathbb{R}$. La valeur de $w_2(t, x)$ est fixée soit sur la partie (t, x) telle que $t \leq \frac{L}{\lambda_2}$ (voir Figure 2.3.a) ou sur la partie (t, x) telle que $t \geq \frac{L}{\lambda_2}$ (voir Figure 2.3.b). Si $t \leq \frac{L}{\lambda_2}$ alors la solution est déterminée par la condition initiale $w_2(0, x)$ à $t = 0$. Si $t \geq \frac{L}{\lambda_2}$ alors la solution est déterminée par la condition aux limites $w_2(t, 0)$ en $x = 0$.

Après cet exposé sur les variables caractéristiques nous passons maintenant à une définition d'une énergie qui nous sera d'une grande utilité pour la construction de nos contrôles.

2.4 Estimation à priori de l'énergie

Nous considérons une condition d'écoulement sous-critique stable et une estimation d'énergie, pour construire des conditions aux limites rétroactives. Ces conditions aux limites dépendent des données antérieures et assurent la décroissance exponentielle de la solution du modèle linéarisé en norme L^2 .

Pour $f \in L^2$ on note :

$$\|f\|_{2,\Omega} = \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Nous définissons ainsi l'énergie de (2.16) comme suit :

$$E(t) = \left\| \sqrt{l\rho} \hat{h}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \hat{q}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 = \int_0^L \left(l\rho \hat{h}^2(t, x) + \hat{q}^2(t, x) \right) dx \quad (2.38)$$

où ρ est défini dans (2.17).

Remarque 6. *Cette énergie est une fonction des perturbations \hat{h} et \hat{q} . Telle que définie lorsque cette énergie tend vers zéro alors les perturbations \hat{h} et \hat{q} tendent aussi vers zéro. Il suffit donc de prouver une décroissance de cette énergie pour affirmer que les perturbations diminuent et convergent vers zéro au cours du temps. **Cela garantit ainsi une convergence de l'état actuel (h, q) vers l'état d'équilibre (\bar{h}, \bar{q}) .***

La dérivation de cette énergie par rapport au temps donnera la variation temporelle de l'énergie. Cette variation temporelle de l'énergie sera exprimée comme un polynôme de second ordre en termes de débits aux frontières. Ce polynôme du second ordre est traité de manière à obtenir une diminution exponentielle de l'énergie. Ce traitement du polynôme nous aidera à définir les contrôles du canal.

Mais avant cette dérivation nous donnons d'abord une formulation faible du système (2.16) qui nous sera d'une grande utilité pour la suite.

Soit $(\psi, \phi) \in H^1(]0, L[)$. En multipliant (2.16.a) par ψ et (2.16.b) par ϕ on a

$$\begin{cases} (a) & \psi \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \psi \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \\ (b) & \phi \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \phi \sigma \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \phi \rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Multiplions ensuite (2.39.a) par $l\rho$ puis intégrons les deux équations de 0 à L. On obtient

$$\begin{cases} (a) & \int_0^L l\rho\psi \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} dx + \int_0^L \rho\psi \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} dx = 0, \\ (b) & \int_0^L \phi \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} dx + \int_0^L \phi\sigma \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} dx + \int_0^L \phi\rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} dx = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

En appliquant les formules de Green (intégration par parties) aux deuxièmes termes des membres de gauche des équations du système (2.40) on aboutit à

$$\begin{cases} (a) & \int_0^L l\rho\psi \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} dx - \int_0^L \hat{q} \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial x} dx + \rho\psi(L)\hat{q}_L(t) - \rho\psi(0)\hat{q}_0(t) = 0, \\ (b) & \int_0^L \phi \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} dx - \int_0^L \hat{q} \frac{\partial(\sigma\phi)}{\partial x} dx + \int_0^L \phi \frac{\partial(\rho\hat{h})}{\partial x} dx \\ & \quad + \sigma\phi(L)\hat{q}_L(t) - \sigma\phi(0)\hat{q}_0(t) = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

ainsi que les conditions limites et initiales.

Ce système est une formulation faible du système (2.16). Il sera utilisé pour prouver l'existence de la solution faible pour le canal (Théorème 8).

Estimons la variation de l'énergie E dans le canal afin de définir les contrôles $\hat{q}_L(t)$ à $x = L$ et $\hat{q}_0(t)$ à $x = 0$.

Dérivons (2.38) par rapport au temps. Cela donne la variation temporelle de l'énergie suivante :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^L \left(l\rho\hat{h}^2(t, x) + \hat{q}^2(t, x) \right) dx. \quad (2.42)$$

En appliquant la règle de Leibnitz à (2.42) on a :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^L l\rho \frac{\partial \hat{h}^2(t, x)}{\partial t} dx + \int_0^L \frac{\partial \hat{q}^2(t, x)}{\partial t} dx.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2} \frac{dE(t)}{dt} = \int_0^L l\rho\hat{h}(t, x) \frac{\partial \hat{h}(t, x)}{\partial t} dx + \int_0^L \hat{q}(t, x) \frac{\partial \hat{q}(t, x)}{\partial t} dx. \quad (2.43)$$

2.5 Conception de contrôles rétroactifs pour un seul canal et le processus de stabilisation

Dans cette section, les données initiales et les conditions aux limites sont supposées lisses. Les résultats pour les données dans L^2 sont présentés dans la prochaine section.

Pour construire le contrôle, nous exprimons alors la hauteur à la frontière en termes de débit et de variables caractéristiques sortantes.

Les caractéristiques sortantes aux extrémités du canal et leurs points de départ sont représentées ci-dessous (Figure 2.4). Sur la Figure (2.4 a), on observe que

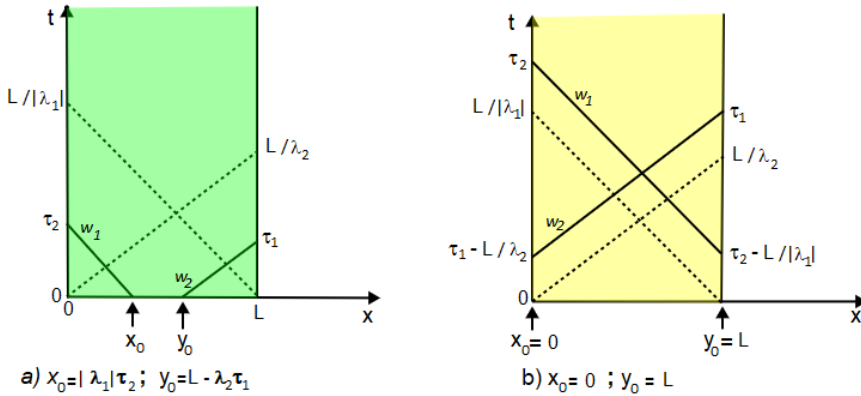


FIGURE 2.4 – Variables caractéristiques sortantes

les points de départ x_0 et y_0 des caractéristiques sont localisés à l'intérieur du canal. Cela a lieu quand $\tau_2 \leq \frac{L}{|\lambda_1|}$ et $\tau_1 \leq \frac{L}{\lambda_2}$. Ainsi, la condition initiale est concernée, et ces points correspondent au temps $t = 0$.

Sur la Figure (2.4 b), on observe que les points de départ x_0 et y_0 des caractéristiques sont localisés aux extrémités du canal. Cela a lieu quand $\tau_2 \geq \frac{L}{|\lambda_1|}$ et $\tau_1 \geq \frac{L}{\lambda_2}$. Ainsi, les conditions aux limites du canal aux temps $\tau_2 - \frac{L}{|\lambda_1|}$ et $\tau_1 - \frac{L}{\lambda_2}$ sont concernées.

En traçant donc les lignes caractéristiques, comme indiqué sur les figures ci-dessus, nous exprimons les variables caractéristiques sortantes comme suit :

$$\begin{pmatrix} w_1(\tau_2, 0) \\ w_2(\tau_1, L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(\tau_2) \\ c_2(\tau_1) \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

où

$$c_1(\tau_2) = \begin{cases} w_1(0, x_0); & x_0 = |\lambda_1| \tau_2, \quad \tau_2 \in]0, L/|\lambda_1|], \\ w_1(\tau_2 - L/|\lambda_1|, L), & \tau_2 \geq L/|\lambda_1|, \end{cases} \quad (2.49)$$

$$c_2(\tau_1) = \begin{cases} w_2(0, y_0) ; & y_0 = L - \lambda_2 \tau_1, \quad \tau_1 \in]0, L/\lambda_2], \\ w_2(\tau_1 - L/\lambda_2, 0), & \tau_1 \geq L/\lambda_2. \end{cases} \quad (2.50)$$

A partir de (2.30), on a :

$$\hat{h}(\tau_1, L) = \frac{1}{l\lambda_1} \hat{q}_L(\tau_1) + \frac{1}{l} w_2(\tau_1, L), \quad (2.51)$$

$$\hat{h}(\tau_2, 0) = \frac{1}{l\lambda_2} \hat{q}_0(\tau_2) + \frac{1}{l} w_1(\tau_2, 0). \quad (2.52)$$

En considérant (2.47), (2.51), (2.52) et (2.48) on a :

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a \hat{q}_0^2(t) + \frac{\rho}{l} c_1(t) \hat{q}_0(t) + a \hat{q}_L^2(t) - \frac{\rho}{l} c_2(t) \hat{q}_L(t) \quad (2.53)$$

où $a = \frac{1}{2}(\lambda_2 + |\lambda_1|)$, ρ est défini dans (2.17) et $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont respectivement donnés par (2.49) et (2.50).

En effet (2.51), (2.52) et (2.48) entraîne :

$$\hat{h}(t, L) = \frac{1}{l\lambda_1} \hat{q}_L(t) + \frac{1}{l} c_2(t),$$

$$\hat{h}(t, 0) = \frac{1}{l\lambda_2} \hat{q}_0(t) + \frac{1}{l} c_1(t).$$

Par substitution de $\hat{h}(t, L)$ et $\hat{h}(t, 0)$ dans (2.47) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= -\frac{1}{2} \sigma \hat{q}_L^2(t) - \rho \left(\frac{1}{l\lambda_1} \hat{q}_L(t) + \frac{1}{l} c_2(t) \right) \hat{q}_L(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma \hat{q}_0^2(t) + \rho \left(\frac{1}{l\lambda_2} \hat{q}_0(t) + \frac{1}{l} c_1(t) \right) \hat{q}_0(t) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{2\rho}{l\lambda_1} \right) \hat{q}_L^2(t) - \frac{\rho}{l} c_2(t) \hat{q}_L(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{2\rho}{l\lambda_2} \right) \hat{q}_0^2(t) + \frac{\rho}{l} c_1(t) \hat{q}_0(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Puisque $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 - |\lambda_1|$ et $\rho = l|\lambda_1|\lambda_2 = -l\lambda_1\lambda_2$ on a :

$$-\frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{2\rho}{l\lambda_1} \right) = -\frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{2l\lambda_1\lambda_2}{l\lambda_1} \right) = -\frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{1}{2} (\lambda_2 + |\lambda_1|) = a$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{2\rho}{l\lambda_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{2l\lambda_1\lambda_2}{l\lambda_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda_2 + |\lambda_1|\right) = a$$

Ainsi en remplaçant les expressions $-\frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{2\rho}{l\lambda_1}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{2\rho}{l\lambda_2}\right)$ de (2.54) par a on obtient l'égalité (2.53).

L'idée est donc de prescrire le flux aux extrémités afin d'obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie. À cette fin, une observation pour les polynômes du second ordre est formulée comme un lemme.

Lemme 1. *Soit P un polynôme de second ordre tel que $P(q) = aq^2 + bq$, où $a > 0$. Pour tout $\theta \in]0, 1]$,*

$$P\left(\frac{b}{2a}(\sqrt{1-\theta}-1)\right) = -\frac{b^2}{4a}\theta. \quad (2.55)$$

Preuve du lemme 1 :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{b}{2a}(\sqrt{1-\theta}-1)\right) &= a\left(\frac{b}{2a}(\sqrt{1-\theta}-1)\right)^2 + b\left(\frac{b}{2a}(\sqrt{1-\theta}-1)\right) \\ &= \frac{b^2}{4a}(1-\theta-2\sqrt{1-\theta}+1) + \frac{b^2}{2a}\sqrt{1-\theta} - \frac{b^2}{2a} \\ &= -\frac{b^2}{4a}\theta + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{2a}\sqrt{1-\theta} + \frac{b^2}{2a}\sqrt{1-\theta} - \frac{b^2}{2a} \\ &= -\frac{b^2}{4a}\theta. \end{aligned}$$

□

Définition 17. *Dans notre méthode les débits aux extrémités du canal sont prescrites comme suit :*

$$\hat{q}_0(t) = \frac{\rho c_1(t)}{2al} \left(\sqrt{1-\theta_1(t)}-1\right) \text{ et } \hat{q}_L(t) = -\frac{\rho c_2(t)}{2al} \left(\sqrt{1-\theta_2(t)}-1\right) \quad (2.56)$$

où $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$.

Remarque 7. *Les contrôles définis en (2.56) sont des contrôles frontières rétroactifs. En fait, les expressions de $c_1(t)$ et $c_2(t)$ définies en (2.49) et (2.50), et utilisées en (2.56) impliquent un délai. Les contrôles à l'instant t dépendent de la condition initiale ou de la solution à un instant antérieur $t - \delta t$ où $\delta t = L/|\lambda_1|$ pour le contrôle en amont et $\delta t = L/\lambda_2$ pour le contrôle en aval. D'un point de vue pratique, il y a toujours un délai entre les mesures en ligne des données et leur utilisation pour construire des contrôles. Ce n'est pas le cas*

en [5], [8], [24] et [33].

D'un autre côté, les seules mesures en ligne des niveaux d'eau aux extrémités sont suffisantes pour déterminer les contrôles, comme dans [5], [8] et [33]. Cela vaut également pour le réseau.

Remarque 8. L'approche consiste donc à exprimer le taux de variation d'énergie du problème linéarisé, comme un polynôme de second ordre en termes d'écoulement aux frontières. Le polynôme du second ordre est négatif pour un ensemble de contrôles et le taux de stabilisation est borné. La bornitude est en accord avec le fait que la vitesse à laquelle les solutions des systèmes hyperboliques sont affectées par les conditions aux limites est bornée.

Avec les contrôles donnés par (2.56), il s'ensuit par le lemme 1, que (2.53) devient :

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = -\frac{\rho^2 c_1^2(t)}{4al^2} \theta_1(t) - \frac{\rho^2 c_2^2}{4al^2} \theta_2(t). \quad (2.57)$$

Ainsi, nous obtenons ce qui suit :

Théorème 6. Soit $t_k = kL/|\lambda_1|$, $k \in \mathbb{N}$. Supposons que (2.22) soit vrai, la condition initiale (\hat{h}^0, \hat{q}^0) est continue dans $[0, L]$. De plus, θ_1 et θ_2 sont continus dans $]0, 1]$ et \hat{q}_0 et \hat{q}_L satisfont (2.56).

Alors (2.16) a une solution unique (\hat{h}, \hat{q}) continue dans $[t_k, t_{k+1}] \times [0, L]$ telle que l'énergie est décroissante dans $[t_k, t_{k+1}]$ et satisfait

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k) E(t_k) \quad (2.58)$$

où E est donné par (2.38) et $\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 + |\lambda_1|} \Xi_k \in]0, 1[$

$$\Xi_k = \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta_2 \left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2} \right), \inf_{x \in]0, L[} \theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_1|} \right) \right).$$

Preuve du Théorème 6 :

D'une part l'existence et l'unicité de la solution découlent de (2.30) et des constructions (2.49 - 2.50).

En effet avec (2.30) on forme le système suivant d'équations à deux inconnues (\hat{h}, \hat{q}) :

$$\begin{cases} l\hat{h} - \frac{1}{\lambda_2}\hat{q} = w_1 \\ l\hat{h} - \frac{1}{\lambda_1}\hat{q} = w_2. \end{cases}$$

Ce système donne la forme matricielle suivante :

$$BU = w$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} l & -\frac{1}{\lambda_2} \\ l & -\frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

Par calcul on a :

$$\det B = l \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{|\lambda_1|} \right) \neq 0$$

La matrice B est ainsi inversible d'où l'existence et l'unicité de la solution. D'autre part en intégrant (2.57) de 0 à t_1 , nous avons

$$\begin{aligned} E(L/|\lambda_1|) &= E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{(c_2(t))^2}{2a} \theta_2(t) dt - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{(c_1(t))^2}{2a} \theta_1(t) dt, \\ &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/\lambda_2} \frac{(c_2(t))^2}{2a} \theta_2(t) dt - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{(c_1(t))^2}{2a} \theta_1(t) dt. \end{aligned}$$

En utilisant (2.49) et (2.50) nous obtenons :

$$\begin{aligned} E(L/|\lambda_1|) &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/\lambda_2} \frac{w_2^2(0, L - \lambda_2 t) \theta_2(t)}{2a} dt - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{w_1^2(0, |\lambda_1| t) \theta_1(t)}{2a} dt \\ &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta_2(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_1^2(0, x) \theta_1(\frac{x}{|\lambda_1|})}{2a|\lambda_1|} dx \\ &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta_2(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_1^2(0, x) \theta_1(\frac{x}{|\lambda_1|})}{2a\lambda_2} dx \\ &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{2l^2 a \lambda_2} \int_0^L [w_2^2(0, x) + w_1^2(0, x)] \Psi dx \end{aligned} \quad (2.59)$$

où :

$$\Psi = \min \left(\theta_2 \left(\frac{L-x}{\lambda_2} \right), \theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_1|} \right) \right).$$

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
w_2^2(0, x) + w_1^2(0, x) &= 2(l\hat{h}^0)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\right) (\hat{q}^0)^2 - 2\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) l\hat{h}^0\hat{q}^0 \\
&\geq 2(l\hat{h}^0)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\right) (\hat{q}^0)^2 - (l\hat{h}^0)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 (\hat{q}^0)^2 \\
&\geq (l\hat{h}^0)^2 - 2\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} (\hat{q}^0(x))^2 \\
&\geq (l\hat{h}^0)^2 + 2\frac{l^2}{l\rho} (\hat{q}^0)^2 \\
&\geq \frac{l}{\rho} (l\rho(\hat{h}^0)^2 + (\hat{q}^0)^2).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

avec ici : $\hat{h}^0 \equiv \hat{h}^0(x)$ et $\hat{q}^0 \equiv \hat{q}^0(x)$ pour simplifier.

On déduit donc de (2.59- 2.60) que

$$\begin{aligned}
E(L/|\lambda_1|) &\leq E(0) - \Theta^0 \int_0^L (l\rho(\hat{h}^0)^2 + (\hat{q}^0)^2) dx \\
&\leq (1 - \Theta^0)E(0).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

où

$$\Theta^0 = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 + |\lambda_1|} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right), \inf_{x \in]0, L[} \theta\left(\frac{x}{|\lambda_1|}\right) \right).$$

Pour généraliser (2.61) par rapport au temps, nous considérons la condition initiale à l'instant $t_k = kL/|\lambda_1|$. On pose ([25]) :

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= w_1(t_k, |\lambda_1|(t - t_k)), \quad si \quad t \in]t_k, t_k + L/|\lambda_1|[, \\
c_2(t) &= w_2(t_k, L - \lambda_2(t - t_k)), \quad si \quad t \in]t_k, t_k + L/\lambda_2[
\end{aligned}$$

et

$$\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 - \lambda_1} \Xi_k$$

où

$$\Xi_k = \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta\left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2}\right), \inf_{x \in]0, L[} \theta\left(t_k + \frac{x}{|\lambda_1|}\right) \right).$$

Par conséquent, en intégrant de t_k à t_{k+1} et en utilisant les mêmes arguments que pour l'intervalle $[0, t_1]$, Ce qui achève la preuve du théorème 6. \square

Théorème 7. Possibilité de contrôler avec un point final libre uniquement

Soient :

$$\hat{q}_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{q}_L(t) = \frac{b(t)}{2a} \left(\sqrt{1 - \theta(t)} - 1 \right) \quad (2.62)$$

où

$$b(t) = -\frac{\rho}{l} \begin{cases} w_2(0, L - \lambda_2 t), & \text{si } t \in]0, L/\lambda_2[, \\ w_1(0, |\lambda_1|(t - L/\lambda_2)), & \text{si } t \in]L/\lambda_2, LT[, \\ w_1(t - LT, L), & \text{si } t \geq LT \end{cases}$$

avec $\theta \in [0, 1]$ et $T = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{|\lambda_1|}$. Alors les perturbations \hat{h} et \hat{q} tendent vers zéro de façon exponentielle dans le temps.

Preuve du Théorème 7

Pour prouver que les perturbations \hat{h} et \hat{q} tendent vers zéro de façon exponentielle dans le temps on va montrer la décroissance de l'énergie avec les données du Théorème.

En considérant $q_0(t) = 0$, l'égalité (2.53) donne

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a\hat{q}_L^2(t) - \frac{\rho}{l} c_2(t) \hat{q}_L(t) \quad (2.63)$$

où $a = \frac{1}{2}(\lambda_2 + |\lambda_1|)$, ρ est défini dans (2.17) et $c_2(t)$ est donné par (2.50).

Cette égalité nous permet ainsi d'écrire

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a\hat{q}_L^2(t) + b(t)\hat{q}_L(t) \quad (2.64)$$

avec $b(t)$ une donnée du théorème.

Ainsi en appliquant le lemme 1 on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = -\frac{b^2(t)}{4a} \theta(t) \quad (2.65)$$

Posons $t_k = kL/|\lambda_1|$, $k \in \mathbb{N}$ et intégrons l'égalité 2.65 de 0 à t_1 . On a alors :

$$\begin{aligned} E(t_1) &= E(0) - \int_0^{t_1} \frac{b^2(t)}{2a} \theta(t) dt, \\ &\leq E(0) - \int_0^{L/\lambda_2} \frac{b^2(t)}{2a} \theta(t) dt. \end{aligned}$$

En remplaçant $b(t)$ (voir les données du Théorème) on a alors :

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/\lambda_2} \frac{w_2^2(0, L - \lambda_2 t) \theta(t)}{2a} dt \\
&\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx \\
&\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx \\
&\leq E(0) - \frac{\rho^2}{2l^2 a \lambda_2} \int_0^L w_2^2(0, x) \Psi dx
\end{aligned} \tag{2.66}$$

où :

$$\Psi = \theta\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right)$$

De plus, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
w_2^2(0, x) &= \left(l\hat{h}^0(x) + \frac{1}{|\lambda_1|} \hat{q}^0(x) \right)^2 \\
&\geq [l\hat{h}^0(x)]^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} [\hat{q}^0(x)]^2 \\
&\geq [l\hat{h}^0(x)]^2 + \frac{1}{|\lambda_1|\lambda_2} [\hat{q}^0(x)]^2 \\
&\geq [l\hat{h}^0(x)]^2 + \frac{l^2}{l\rho} [\hat{q}^0(x)]^2 \\
&\geq \frac{l}{\rho} \left(l\rho[\hat{h}^0(x)]^2 + [\hat{q}^0(x)]^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.67}$$

On déduit donc de (2.66) et (2.67) que

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \Theta^0 \int_0^L \left(l\rho(\hat{h}^0)^2 + (\hat{q}^0)^2 \right) dx \\
&\leq (1 - \Theta^0) E(0).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

où

$$\Theta^0 = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 + |\lambda_1|} \inf_{x \in]0, L[} \theta\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right)$$

Pour généraliser (2.68) par rapport au temps, nous considérons la condition initiale à l'instant t_k . On pose :

$$b(t) = -\frac{\rho}{l} w_2(t_k, L - \lambda_2(t - t_k)) \quad \text{si } t \in]t_k, t_{k+1}[$$

et

$$\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 - \lambda_1} \Xi_k$$

où

$$\Xi_k = \inf_{x \in]0, L[} \theta \left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2} \right)$$

Par conséquent, en intégrant de t_k à t_{k+1} et en utilisant les mêmes arguments que pour l'intervalle $[0, t_1]$. Ce qui achève la preuve du Théorème 7. \square

2.6 Un résultat de régularité

Dans cette section, nous considérons les données initiales dans l'espace L^2 au lieu des données initiales lisses comme dans le Théorème 6. Nous avons alors ce Théorème qui est un résultat de régularité.

Théorème 8. *Soit $t_k = kL/|\lambda_1|$, $k \in \mathbb{N}$. Supposons que (2.22) soit valide, $(\hat{h}^0, \hat{q}^0) \in (L^2[0, L])^2$ et $\hat{q}_L(t)$, $\hat{q}_0(t)$ satisfont (2.56). Le système linéaire (2.16) admet alors une solution (\hat{h}, \hat{q}) satisfaisant la régularité suivante :*

$$\begin{pmatrix} l\hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \sigma\hat{q} + \rho\hat{h} \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q). \quad (2.69)$$

Avec

$$\begin{aligned} H(\text{div}, Q) &= \{\mathcal{V} \in L^2(Q_i)^2 \ ; \ \text{div}\mathcal{V} \in L^2(Q_i)\}, \\ Q &= [t_k, t_{k+1}] \times [0, L], \\ \text{div} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \ , \ \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

De plus, l'énergie est décroissante dans $[t_k, t_{k+1}]$ et satisfait

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k) \quad (2.70)$$

où Θ^k est donné dans le Théorème 6.

Preuve du Théorème 8 :

Puisque $(\hat{h}^0, \hat{q}^0) \in (L^2([0, L]))^2$ et sachant que $C^0(]0, L[)$, ensemble des fonctions continues par morceaux dans $]0, L[$, est dense dans $L^2([0, L])$ il existe alors des suites $(\hat{h}_n)_{n \geq 0} \subset C^0([0, L])$ et $(\hat{q}_n)_{n \geq 0} \subset C^0([0, L])$ telles que :

$$\hat{h}_n^0 \longrightarrow \hat{h}^0 \quad \text{et} \quad \hat{q}_n^0 \longrightarrow \hat{q}^0 \quad \text{dans} \quad L^2([0, L]) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Avec le couple $(\hat{h}_n^0, \hat{q}_n^0)$ pour tout $n \geq 0$, nous considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}_n}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}_n}{\partial x} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}_n}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \hat{q}_n}{\partial x} + \rho \frac{\partial \hat{h}_n}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.71)$$

de condition initiale

$$\hat{h}_n(0, x) = \hat{h}_n^0(x) \quad \text{et} \quad \hat{q}_n(0, x) = \hat{q}_n^0(x) \quad (2.72)$$

avec les condition aux limites

$$\hat{q}_n(t, 0) = \hat{q}_{0,n}(t), \quad \text{et} \quad \hat{q}_n(t, L) = \hat{q}_{L,n}(t). \quad (2.73)$$

où σ et ρ sont définies en (2.17).

Le couple (\hat{h}_n, \hat{q}_n) satisfait alors la formulation faible (2.41).

Nous définissons encore $\hat{q}_{0,n}(t)$ et $\hat{q}_{L,n}(t)$ comme dans (2.56) où \hat{h}_0 et \hat{q}_L sont remplacés par $\hat{h}_{0,n}$ et $\hat{q}_{L,n}$ respectivement.

Grâce au Théorème 6, on obtient l'estimation d'énergie (en remplaçant (\hat{h}, \hat{q}) par (\hat{h}_n, \hat{q}_n) dans (2.58)) :

$$E^n(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k) E^n(t_k).$$

Donc

$$\begin{aligned} E^n(t_1) &\leq (1 - \Theta^0) E^n(t_0), \\ E^n(t_2) &\leq (1 - \Theta^1) E^n(t_1), \\ E^n(t_3) &\leq (1 - \Theta^2) E^n(t_2), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ E^n(t_{k-1}) &\leq (1 - \Theta^{k-2}) E^n(t_{k-2}), \\ E^n(t_k) &\leq (1 - \Theta^{k-1}) E^n(t_{k-1}), \\ E^n(t_{k+1}) &\leq (1 - \Theta^k) E^n(t_k). \end{aligned}$$

En multipliant les termes à gauche à part puis ceux à droite on obtient après simplification

$$E^n(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^0) * (1 - \Theta^1) * \dots * (1 - \Theta^{k-1}) * (1 - \Theta^k) E^n(0)$$

qui peut s'écrire comme suit :

$$E^n(t_{k+1}) \leq \prod_{i=0}^k (1 - \Theta^i) E^n(0) \quad (2.74)$$

où Θ^k et t_k sont définis dans le théorème 6 et

$$E^n(t) = \left\| \sqrt{l\rho} \hat{h}_n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \hat{q}_n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 = \int_0^L \left(l\rho \hat{h}_n^2(t) + \hat{q}_n^2(t) \right) dx. \quad (2.75)$$

Le système (2.71) peut être présenté sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} l\hat{h}_n \\ \hat{q}_n \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \hat{q}_n \\ \sigma\hat{q}_n + \rho\hat{h}_n \end{pmatrix} = 0 \quad (2.76)$$

Par conséquent de (2.74) et (2.76) on a

$$\begin{pmatrix} l\hat{h}_n \\ \hat{q}_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_n \\ \sigma\hat{q}_n + \rho\hat{h}_n \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q) \quad (2.77)$$

et sont bornées dans $H(\text{div}, Q)$.

L'espace $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ étant un espace de Banach réflexif, pour tout $T > 0$, il existe des sous-suites $(\hat{h}_{\alpha(n)}, \hat{q}_{\beta(n)})$ de (\hat{h}_n, \hat{q}_n) convergeant faiblement vers (\hat{h}, \hat{q}) dans $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ (voir [11]).

De plus, par passage aux limites (\hat{h}, \hat{q}) satisfait le système linéaire (2.16) ainsi que la condition initiale (2.18) et les conditions aux limites (2.19) d'où l'existence et l'unicité de la solution pour (2.16).

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} l\hat{h}_n \\ \hat{q}_n \end{pmatrix} \rightharpoonup \begin{pmatrix} l\hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_n \\ \sigma\hat{q}_n + \rho\hat{h}_n \end{pmatrix} \rightharpoonup \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \sigma\hat{q} + \rho\hat{h} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} l\hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \sigma\hat{q} + \rho\hat{h} \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q). \quad (2.79)$$

Ce qui prouve la régularité satisfaite par la solution du système linéaire (2.16). Puisque $E(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E^n(t)$, (2.70) est obtenu à partir de (2.74). Ce qui prouve la décroissance énergétique.

Ainsi la preuve du théorème est complète. \square

Remarque 9. En notant $\nu^k = -\ln((1 - \Theta^k)^{1/t_1})$, on a

$$E(t_{k+1}) \leq E(t_k) \exp(-\nu^k t_1).$$

Par conséquent, en définissant $\mu^k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \nu^j$, nous obtenons

$$E(t_k) \leq E(0) \exp(-\mu^k t_k). \quad (2.80)$$

Ainsi, les fonctions θ peuvent être considérées comme des taux de stabilisation pour la décroissance exponentielle. Plus ils sont proches de 1, plus la décroissance exponentielle est rapide.

Remarque 10. *Le fait que le débit soit stabilisé pour les contrôles dans un intervalle donne robustesse et flexibilité. Ceci est essentiel pour deux raisons. Pour commencer, le contrôle peut être appliqué au problème réel, qui n'est pas linéaire. Deuxièmement, les niveau d'eau aux limites influencent le contrôle. Ceux-ci (niveaux d'eau) seront connus par des mesures qui ne seront que approximativement correctes.*

Avec ces résultats obtenus pour le cas d'un canal simple nous étudions au chapitre suivant le cas d'un réseau.

Construction de contrôles pour le réseau en étoile

Tirant parti du chapitre précédent concernant la construction des contrôles, nous allons maintenant montrer comment construire des contrôles rétroactifs qui stabilisent le réseau à trois canaux.

3.1 Présentation du réseau

Considérons le réseau en étoile donné par la Figure 3.1.

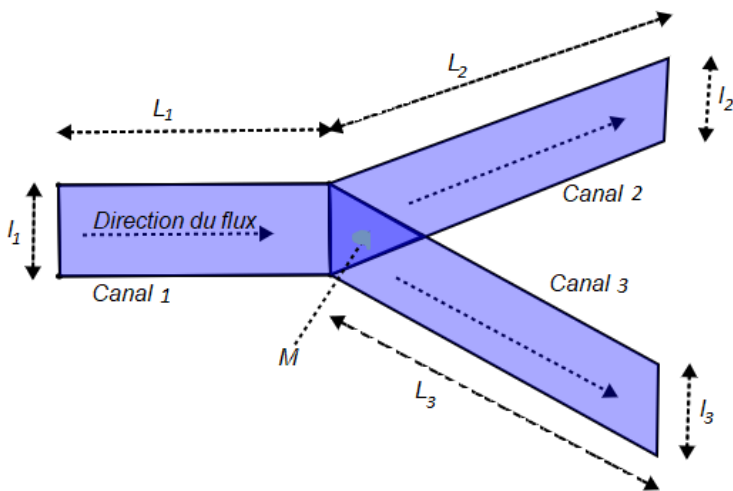


FIGURE 3.1 – réseau en étoile

Le réseau comporte trois canaux rectangulaires avec une jonction (notée M) où tous les canaux se rejoignent.

3.2 Équations de Saint Venant unidimensionnelles pour un réseau de canaux rectangulaires

Le modèle du réseau est donné par les équations de Saint-venant 1D dans chaque canal, avec des conditions à la jonction M.

Les variables dans un canal particulier sont indexés par le numéro du canal. Par exemple, pour le i^{eme} canal ($i = 1, 2, 3$) : h_i est la hauteur de la colonne de fluide (m), q_i est le débit ($m^3.s^{-1}$), L_i et l_i sont respectivement la longueur et la largeur du canal (m).

Chaque canal est rectangulaire, horizontale sur fond plat ($Y_{ib} = 0$) et supposé sans friction avec des largeurs constantes.

Donc avec la variable S_i définie en (1.40b) du chapitre 1 on obtient par substitution l'expression :

$$S_i = \frac{1}{2}V_i^2 + gh_i. \quad (3.1)$$

L'aire de la section droite de l'écoulement de chaque canal est

$$A_i(t, x_i) = l_i h_i(t, x_i),$$

et la vitesse moyenne de l'écoulement vaut :

$$V_i = \frac{q_i}{A_i} = \frac{q_i}{l_i h_i}. \quad (3.2)$$

Les variables sont alors la hauteur h_i de la colonne de fluide en (m), le débit q_i en ($m^3.s^{-1}$). Par substitution de V_i par $\frac{q_i}{l_i h_i}$ dans (3.1) on obtient

$$S_i = \frac{1}{2} \frac{q_i^2}{l_i^2 h_i^2} + gh_i. \quad (3.3)$$

Par substitution aussi dans (1.40) on a

$$\begin{cases} \frac{\partial(l_i h_i)}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x} = 0, & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i}{l_i h_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i^2}{l_i^2 h_i^2} + gh_i \right) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

On multiplie la première équation du système par $\frac{1}{l_i}$ et la deuxième par $l_i h_i$ on obtient alors

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} = 0, & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ (b) \quad h_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i}{h_i} \right) + l_i h_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i^2}{l_i^2 h_i^2} + g h_i \right) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

L'équation (3.5.a) entraîne :

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = -\frac{1}{l_i} \frac{\partial q_i}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Le premier terme de l'équation (3.5.b) donne d'une part :

$$\begin{aligned} h_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i}{h_i} \right) &= h_i \left(\frac{1}{h_i^2} \left(h_i \frac{\partial q_i}{\partial t} - q_i \frac{\partial h_i}{\partial t} \right) \right) \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{q_i}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial t} \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{q_i}{h_i} \left(-\frac{1}{l_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{q_i}{l_i h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.7)$$

et son second terme donne d'autre part

$$\begin{aligned} l_i h_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i^2}{l_i^2 h_i^2} + g h_i \right) &= g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{h_i}{2 l_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_i^2}{h_i^2} \right) \\ &= g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{2 l_i h_i^3} \left(2 q_i h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x} - 2 h_i q_i^2 \frac{\partial h_i}{\partial x} \right) \\ &= g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{q_i}{l_i h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{q_i^2}{l_i h_i^2} \frac{\partial h_i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ainsi de (3.7) et (3.8) on obtient

$$\begin{aligned} h_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i}{h_i} \right) + l_i h_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i^2}{l_i^2 h_i^2} + g h_i \right) &= \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{q_i}{l_i h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{q_i}{l_i h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{q_i^2}{l_i h_i^2} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial t} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \left(\frac{2 q_i}{h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{q_i^2}{h_i^2} \frac{\partial h_i}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial t} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \left(\frac{1}{h_i^2} \left(2 h_i q_i \frac{\partial q_i}{\partial x} - q_i^2 \frac{\partial h_i}{\partial x} \right) \right) \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial t} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_i^2}{h_i} \right). \end{aligned}$$

On forme ainsi le système suivant d'équations de Saint Venant proposé dans [14] pour un réseau de trois canaux :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} = 0, & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ (b) \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} + gl_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_i^2}{h_i} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

avec l' état initial

$$h_i(0, x) = h_i^0(x), \quad q_i(0, x) = q_i^0(x) \quad (3.10)$$

et les conditions aux limites aux points d'extrémités libres du réseau

$$q_1(t, 0) = q_{1,0}(t), \quad q_2(t, L_2) = q_{2,L_2}(t), \quad q_3(t, L_3) = q_{3,L_3}(t). \quad (3.11)$$

Le réseau est modélisé par (3.9), (3.10) et (3.11) avec les conditions à la jonction M.

Le flux est supposé être sous-critique dans chaque canal, avec la direction donnée par la Figure 3.1.

Pour $i \in 1, 2, 3$ nous notons x_i l'extrémité d'un canal qui rencontre les autres canaux au nœud M (c'est à dire $x_1 = L_1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$).

Nous fixons également $\varepsilon_i = 1$ si $x_i = L_i$ et $\varepsilon_i = -1$ si $x_i = 0$ (c'est à dire que $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ et $\varepsilon_3 = -1$).

A la jonction M, nous avons le flux total et les conditions de continuité d'énergie (cf. [24],[26]). Ces conditions sont respectivement

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i q_i(t, x_i) = 0 \quad (3.12)$$

pour le flux total et

$$S_1 = S_j, \quad j = 2, 3 \quad (3.13)$$

pour la continuité d'énergie (énergie mécanique) avec

$$S_i = gh_i(t, x_i) + \frac{1}{2} \frac{q_i^2(t, x_i)}{l_i^2 h_i^2(t, x_i)}. \quad (3.14)$$

La condition sous critique pour chaque canal est

$$\frac{q_i(t, x_i)}{lh_i(t, x_i)} < \sqrt{gh_i}. \quad (3.15)$$

Donc :

$$\frac{q_i}{lh_i} - \sqrt{gh_i} < 0. \quad (3.16)$$

En tenant compte de la direction d'écoulement, nous avons aussi :

$$\frac{q_i}{lh_i} + \sqrt{gh_i} > 0. \quad (3.17)$$

Les contrôles seront appliqués au modèle non linéaire ci-dessus. Ces contrôles sont dérivés d'un système linéaire qui est obtenu à partir de la linéarisation du modèle non linéaire, en utilisant quelques hypothèses sur des perturbations. Ces perturbations sont les différences entre l'état du modèle non linéaire (h_i, q_i) et un état stable souhaité (\bar{h}_i, \bar{q}_i) .

Le modèle non linéaire est linéarisé et c'est l'objet de la section qui suit.

3.3 Linéarisation du modèle non linéaire

3.3.1 État stable

Nous visons à atteindre un état stable prescrit lorsque le temps est suffisamment grand. La solution à l'état d'équilibre (\bar{h}_i, \bar{q}_i) est dérivée de (3.9), (3.12) et (3.13). Le système suivant est donc satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x} = 0 ; \quad x \in [0, L_i] ; \quad i = 1, 2, 3 \\ \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \bar{q}_i(t, x_i) = 0 \quad \text{en } M \\ \bar{S}_1 = \bar{S}_j, \quad j = 2, 3 ; \quad \bar{S}_i = g\bar{h}_i(t, x_i) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_i^2(t, x_i)}{l_i^2 \bar{h}_i^2(t, x_i)} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Le sens de l'écoulement (3.1) et la condition d'écoulement sous-critique entraînent

$$\bar{q}_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{g\bar{h}_i} > \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} ; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.19)$$

3.3.2 Modèle linéarisé

Nous introduisons l'état résiduel (\hat{h}_i, \hat{q}_i) comme différence entre l'état actuel (h_i, q_i) et l'état d'équilibre (\bar{h}_i, \bar{q}_i) .

$$\hat{h}_i(t, x) = h_i(t, x) - \bar{h}_i(x) \quad \text{et} \quad \hat{q}_i(t, x) = q_i(t, x) - \bar{q}_i(x). \quad (3.20)$$

Nous utilisons les hypothèses $|\hat{h}_i| \ll \bar{h}_i$ et $|\hat{q}_i| \ll \bar{q}_i$ pour linéariser (3.9), (3.12) et (3.13).

Par analogie à la sous section 2.2.2 du chapitre 2, la linéarisation de (3.9) donne :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \left(gl_i \bar{h}_i - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i \bar{h}_i^2} \right) \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

En posant :

$$\sigma_i = 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \quad \text{et} \quad \rho_i = gl_i \bar{h}_i - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i \bar{h}_i^2}, \quad (3.22)$$

la solution (\hat{h}_i, \hat{q}_i) satisfait donc :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L_i] ; \quad i = 1, 2, 3 \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.23)$$

Reprenons l'équation (3.21.b)

$$\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \left(gl_i \bar{h}_i - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i \bar{h}_i^2} \right) \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0. \quad (3.24)$$

On cherche à remplacer $\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t}$ par une expression équivalente pour trouver \hat{S}_i .

Posons :

$$f(h_i, q_i) = \frac{q_i}{h_i}$$

et linéarisons la fonction f .

On a (par la formule de Taylor) :

$$f(h_i, q_i) = f(\bar{h}_i + \hat{h}_i, \bar{q}_i + \hat{q}_i) = f(\bar{h}_i, \bar{q}_i) + \hat{h}_i \frac{\partial f}{\partial h_i}(\bar{h}_i, \bar{q}_i) + \hat{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(\bar{h}_i, \bar{q}_i).$$

Or :

$$\frac{\partial f}{\partial h_i}(h_i, q_i) = -\frac{q_i}{h_i^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial q_i}(h_i, q_i) = \frac{1}{h_i}.$$

Donc

$$f(\bar{h}_i, \bar{q}_i) = \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial h_i}(\bar{h}_i, \bar{q}_i) = -\frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial q_i}(\bar{h}_i, \bar{q}_i) = \frac{1}{\bar{h}_i}$$

et

$$f(h_i, q_i) = \frac{q_i}{h_i} = \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i} - \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i^2} \hat{h}_i + \frac{1}{\bar{h}_i} \hat{q}_i.$$

Ainsi,

$$f(\hat{h}_i, \hat{q}_i) = \frac{\hat{q}_i}{\hat{h}_i} = \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i} - \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i^2} \hat{h}_i + \frac{1}{\bar{h}_i} \hat{q}_i$$

et par conséquent on a

$$\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} = \bar{h}_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{q}_i}{\hat{h}_i} \right) + \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i} \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t}. \quad (3.25)$$

En remplaçant $\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t}$ par $\bar{h}_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{q}_i}{\hat{h}_i} \right) + \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i} \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t}$ dans (3.24) on obtient :

$$\bar{h}_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{q}_i}{\hat{h}_i} \right) + \frac{\bar{q}_i}{\bar{h}_i} \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \left(g l_i \bar{h}_i - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i \bar{h}_i^2} \right) \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0. \quad (3.26)$$

Or

$$\frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} = -\frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x}. \quad (3.27)$$

En substituant $\frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t}$ par $-\frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x}$ dans (3.26) on obtient ;

$$\bar{h}_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{q}_i}{\hat{h}_i} \right) - \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \left(g l_i \bar{h}_i - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i \bar{h}_i^2} \right) \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0. \quad (3.28)$$

Puis en divisant l'équation (3.28) par $l_i \bar{h}_i$, on obtient alors après simplification l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{q}_i}{l_i \hat{h}_i} \right) + \frac{\bar{q}_i}{l_i^2 \bar{h}_i^2} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \left(g - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i^2 \bar{h}_i^3} \right) \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0. \quad (3.29)$$

Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{q}_i}{l_i \hat{h}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{q}_i}{l_i^2 \bar{h}_i^2} \hat{q}_i + \left(g - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i^2 \bar{h}_i^3} \right) \hat{h}_i \right) = 0 \quad (3.30)$$

où encore sous la forme plus compacte :

$$\frac{\partial \hat{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{S}_i}{\partial x} = 0 \quad (3.31)$$

où :

$$\hat{V}_i = \frac{\hat{q}_i}{l_i \hat{h}_i} \quad \text{et} \quad \hat{S}_i = \frac{\bar{q}_i}{l_i^2 \bar{h}_i^2} \hat{q}_i + \left(g - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i^2 \bar{h}_i^3} \right) \hat{h}_i. \quad (3.32)$$

désignent respectivement la vitesse moyenne et l'énergie mécanique.

Ainsi, en se référant à (1.40) et (1.44) du chapitre 1 on peut écrire la continuité de l'énergie dans le réseau qui donne :

$$\hat{S}_1 = \hat{S}_j, \quad j = 2, 3 \quad \text{où} \quad \hat{S}_i = \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) + \beta_i \hat{q}_i(t, x_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.33)$$

avec :

$$\beta_i = \frac{\bar{q}_i}{l_i^2 \bar{h}_i^2} = \frac{1}{2} \delta_i \sigma_i, \quad \gamma_i = g - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i^2 \bar{h}_i^3} = \delta_i \rho_i, \quad \text{et} \quad \delta_i = \frac{1}{l_i \bar{h}_i}. \quad (3.34)$$

On a par ailleurs (pour le flux total) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i q_i(t, x_i) &= \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i (\bar{q}_i(t, x_i) + \hat{q}_i(t, x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \bar{q}_i(t, x_i) + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0 \quad \text{en } M. \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \bar{q}_i(t, x_i) = 0 \quad \text{en } M,$$

on a alors

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0 \quad \text{en } M. \quad (3.35)$$

Avec (3.23), (3.33) et (3.35) la solution (\hat{h}_i, \hat{q}_i) satisfait finalement le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L_i] ; \quad i = 1, 2, 3 \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ (c) \quad \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0 \quad \text{en } M \\ (d) \quad \hat{S}_1 = \hat{S}_j, \quad j = 2, 3 ; \quad \hat{S}_i = \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) + \beta_i \hat{q}_i(t, x_i) \end{array} \right. \quad (3.36)$$

avec la condition initiale :

$$\hat{h}_i(0, x) = \hat{h}_i^0(x), \quad \hat{q}_i(0, x) = \hat{q}_i^0(x) \quad (3.37)$$

avec les conditions aux limites :

$$\hat{q}_1(t, 0) = \hat{q}_{1,0}(t), \quad \hat{q}_2(t, L_2) = \hat{q}_{2,L_2}(t), \quad \hat{q}_3(t, L_3) = \hat{q}_{3,L_3}(t), \quad (3.38)$$

En utilisant (3.19), nous avons $\sigma_i \geq 0$, $\rho_i > 0$, $\beta_i \geq 0$ et $\gamma_i > 0$.

Les fonctions $\hat{q}_{1,0}(t)$, $\hat{q}_{2,L_2}(t)$ et $\hat{q}_{3,L_3}(t)$ sont les contrôles rétroactifs à prescrire de telle manière qu'ils donnent une convergence exponentielle de (\hat{h}_i, \hat{q}_i) vers zéro.

3.4 Variables caractéristiques

Le système (3.36.a–b) peut s'écrire :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + A_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0 \quad (3.39)$$

où

$$U_i = \begin{pmatrix} \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_i} \\ \rho_i & \sigma_i \end{pmatrix}$$

Le système (3.36.a–b) s'écrit en deux équations indépendantes comme suit :

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial t} + \lambda_{ij} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.40)$$

De plus (3.19) et la direction de l'écoulement entraînent :

$$\lambda_{i1} < 0 < \lambda_{i2} \quad \text{et} \quad \lambda_{i1} + \lambda_{i2} \geq 0 \quad (3.41)$$

respectivement.

On peut remarquer une relation entre (σ_i, ρ_i) définis dans (3.22) et $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$:

$$\sigma_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} = \lambda_{i2} - |\lambda_{i1}| \quad \text{et} \quad \rho_i = l_i |\lambda_{i1}| \lambda_{i2}. \quad (3.42)$$

Par analogie au chapitre précédent la résolution des équations indépendantes donne

$$w_{i1} = l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i2}} \hat{q}_i \quad \text{et} \quad w_{i2} = l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i1}} \hat{q}_i. \quad (3.43)$$

Ici, λ_{i1} et λ_{i2} sont les valeurs propres de A_i définies par

$$\lambda_{i1} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} - c_i \quad \text{et} \quad \lambda_{i2} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} + c_i \quad (3.44)$$

avec

$$c_i = \sqrt{g \bar{h}_i}. \quad (3.45)$$

On réécrit (3.36.c-e) en exprimant les variables caractéristiques entrantes en M (i.e $w_{11}(t, L_1)$, $w_{22}(t, 0)$ et $w_{32}(t, 0)$) en fonctions de variables caractéristiques sortantes à M (i.e $w_{12}(t, L_1)$, $w_{21}(t, 0)$ et $w_{31}(t, 0)$). On a alors :

$$\begin{cases} (a) & \hat{q}_1(t, x_1) - \hat{q}_2(t, x_2) - \hat{q}_3(t, x_3) = 0 \\ (b) & \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_2 \hat{h}_2(t, x_2) + \beta_2 \hat{q}_2(t, x_2) \\ (c) & \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_3 \hat{h}_3(t, x_3) + \beta_3 \hat{q}_3(t, x_3) \end{cases} \quad (3.46)$$

De (3.43) on obtient

$$l_i \hat{h}_i = w_{i1} + \frac{1}{\lambda_{i2}} \hat{q}_i \quad \text{et} \quad l_i \hat{h}_i = w_{i2} + \frac{1}{\lambda_{i1}} \hat{q}_i.$$

On en déduit que :

$$\hat{q}_i = \frac{\lambda_{i1} \lambda_{i2}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} (w_{i1} - w_{i2}).$$

En d'autres termes on a

$$\hat{q}_i = \frac{\lambda_{i1} \lambda_{i2}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} w_{i1} - \frac{\lambda_{i1} \lambda_{i2}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} w_{i2} \quad (3.47)$$

et de ce fait

$$\hat{h}_i = \frac{w_{i1}}{l_i} + \frac{1}{\lambda_{i2} l_i} \frac{\lambda_{i1} \lambda_{i2}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} (w_{i1} - w_{i2}).$$

Ce qui donne après simplification le résultat

$$\hat{h}_i = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} \frac{w_{i1}}{l_i} - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} \frac{w_{i2}}{l_i}. \quad (3.48)$$

Ainsi, (3.46.a) entraîne :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{11} \lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} w_{11}(t, L_1) - \frac{\lambda_{11} \lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} w_{12}(t, L_1) \\ & - \left(\frac{\lambda_{21} \lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} w_{21}(t, 0) - \frac{\lambda_{21} \lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} w_{22}(t, 0) \right) \\ & - \left(\frac{\lambda_{31} \lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} w_{31}(t, 0) - \frac{\lambda_{31} \lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} w_{32}(t, 0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{11} \lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} w_{11}(t, L_1) + \frac{\lambda_{21} \lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} w_{22}(t, 0) + \frac{\lambda_{31} \lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} w_{32}(t, 0) \\ & = \frac{\lambda_{11} \lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} w_{12}(t, L_1) + \frac{\lambda_{21} \lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} w_{21}(t, 0) + \frac{\lambda_{31} \lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} w_{31}(t, 0). \end{aligned} \quad (3.49)$$

De même (3.46.b) entraîne

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \frac{w_{11}(t, L_1)}{l_1} - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \frac{w_{12}(t, L_1)}{l_1} \right) \\
& + \beta_1 \left(\frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} w_{11}(t, L_1) - \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} w_{12}(t, L_1) \right) \\
& = \gamma_2 \left(\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \frac{w_{21}(t, 0)}{l_2} - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \frac{w_{22}(t, 0)}{l_2} \right) \\
& + \beta_2 \left(\frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} w_{21}(t, 0) - \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} w_{22}(t, 0) \right)
\end{aligned}$$

qui donne ensuite par réarrangement l'expression :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \beta_1 \lambda_{11} \right) w_{11}(t, L_1) \\
& + \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \beta_2 \lambda_{22} \right) w_{22}(t, 0) \\
& = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \beta_1 \lambda_{12} \right) w_{12}(t, L_1) \\
& + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \beta_2 \lambda_{21} \right) w_{21}(t, 0).
\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{\gamma_1}{l_1} + \beta_1 \lambda_{11}, & \chi_2 &= \frac{\gamma_2}{l_2} + \beta_2 \lambda_{21}, \\
\kappa_1 &= \frac{\gamma_1}{l_1} + \beta_1 \lambda_{12} & \text{et } \kappa_2 &= \frac{\gamma_2}{l_2} + \beta_2 \lambda_{22}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

on obtient finalement de (3.46.b) que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \chi_1 w_{11}(t, L_1) + \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \kappa_2 w_{22}(t, 0) \\
& = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \kappa_1 w_{12}(t, L_1) + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \chi_2 w_{21}(t, 0)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

A partir de (3.46.c) en raisonnant de la même manière que (3.46.b) on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \chi_1 w_{11}(t, L_1) + \frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \kappa_3 w_{32}(t, 0) \\
& = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \kappa_1 w_{13}(t, L_1) + \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \chi_3 w_{31}(t, 0)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

avec

$$\chi_3 = \frac{\gamma_1}{l_3} + \beta_3 \lambda_{31} \quad \text{et} \quad \kappa_3 = \frac{\gamma_3}{l_3} + \beta_3 \lambda_{32} \quad (3.53)$$

On obtient de (3.49), (3.51) et (3.52) le système, sous forme matricielle :

$$B \begin{pmatrix} w_{11}(t, L_1) \\ w_{22}(t, 0) \\ w_{32}(t, 0) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \\ w_{31}(t, 0) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

où

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} & \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \chi_1 & \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} \kappa_2 & 0 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \chi_1 & 0 & \frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \kappa_3 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} & \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \\ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \kappa_1 & \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} \chi_2 & 0 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \kappa_1 & 0 & \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \chi_3 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Ici :

$$\chi_i = \frac{\gamma_i}{l_i} + \lambda_{i1}\beta_i \quad \text{et} \quad \kappa_i = \frac{\gamma_i}{l_i} + \lambda_{i2}\beta_i.$$

En considérant les déterminants des matrices B et C , il s'ensuit directement que les matrices B et C sont inversibles si la condition (3.41) est satisfaite.

En effet :

$$\begin{aligned} \det B &= \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} \begin{vmatrix} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \chi_1 & 0 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \chi_1 & \frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \kappa_3 \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} \kappa_2 \begin{vmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \chi_1 & \frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \kappa_3 \end{vmatrix} \\ \implies \det B &= \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} \left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \chi_1 * \frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \kappa_3 \right) \\ &\quad - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}-\lambda_{21}} \kappa_2 \left(\frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} * \frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} \kappa_3 - \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32}-\lambda_{31}} * \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \chi_1 \right) \\ \implies \det B &= \frac{\lambda_{21}\lambda_{12}\lambda_{31}}{(\lambda_{22}-\lambda_{21})(\lambda_{12}-\lambda_{11})(\lambda_{32}-\lambda_{31})} \\ &\quad * (\lambda_{22}\chi_1\kappa_3 - \lambda_{11}\kappa_2\kappa_3 + \lambda_{32}\chi_1\kappa_2) \end{aligned}$$

En supposant que la condition (3.41) est vérifiée on a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda_{11} < 0 < \lambda_{12} ; \lambda_{11} + \lambda_{12} \geq 0 &\implies \lambda_{12} - \lambda_{11} > 0, \\ \lambda_{21} < 0 < \lambda_{22} ; \lambda_{21} + \lambda_{22} \geq 0 &\implies \lambda_{22} - \lambda_{21} > 0, \\ \lambda_{31} < 0 < \lambda_{32} ; \lambda_{31} + \lambda_{32} \geq 0 &\implies \lambda_{32} - \lambda_{31} > 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{21}\lambda_{12}\lambda_{31}}{(\lambda_{22} - \lambda_{21})(\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{32} - \lambda_{31})} &> 0 \\ \text{et } (\lambda_{22}\chi_1\kappa_3 - \lambda_{11}\kappa_2\kappa_3 + \lambda_{32}\chi_1\kappa_2) &\neq 0.\end{aligned}$$

D'où $\det B \neq 0$ c'est-à-dire B est inversible.

De même on a

$$\begin{aligned}\det C &= \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \begin{vmatrix} \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \kappa_1 & 0 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \kappa_1 & \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \chi_3 \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \chi_2 \begin{vmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} & \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \kappa_1 & \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \chi_3 \end{vmatrix} \\ \implies \det C &= \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} * \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \kappa_1 * \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \chi_3 \\ &\quad - \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \chi_2 \left(\frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} * \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \chi_3 - \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} * \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \kappa_1 \right) \\ \implies \det C &= \frac{\lambda_{22}\lambda_{32}}{(\lambda_{22} - \lambda_{21})(\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{32} - \lambda_{31})} \\ &\quad * (\lambda_{21}\lambda_{11}\chi_3\kappa_1 - \lambda_{11}\lambda_{12}\chi_2\chi_3 + \lambda_{12}\lambda_{31}\chi_2\kappa_1).\end{aligned}$$

En supposant que la condition (3.41) est vérifié on a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda_{11} < 0 < \lambda_{12} ; \lambda_{11} + \lambda_{12} \geq 0 &\implies \lambda_{12} - \lambda_{11} > 0, \\ \lambda_{21} < 0 < \lambda_{22} ; \lambda_{21} + \lambda_{22} \geq 0 &\implies \lambda_{22} - \lambda_{21} > 0, \\ \lambda_{31} < 0 < \lambda_{32} ; \lambda_{31} + \lambda_{32} \geq 0 &\implies \lambda_{32} - \lambda_{31} > 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{22}\lambda_{32}}{(\lambda_{22} - \lambda_{21})(\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{32} - \lambda_{31})} &> 0 \\ \text{et } (\lambda_{21}\lambda_{11}\chi_3\kappa_1 - \lambda_{11}\lambda_{12}\chi_2\chi_3 + \lambda_{12}\lambda_{31}\chi_2\kappa_1) &\neq 0.\end{aligned}$$

D'où $\det C \neq 0$ c'est-à-dire C est inversible.

Le contrôle rétroactif pour le cas du réseau repose sur le fait qu'il est possible d'exprimer des variables caractéristiques sortantes aux extrémités libres du réseau $(w_{11}(t, 0), w_{22}(t, L_2), w_{32}(t, L_3))$ en termes de données initiales et de la solution aux extrémités libres à des moments antérieurs.

Ainsi, nous formulons ce qui suit :

Lemme 2. *Les variables caractéristiques sortantes aux extrémités libres du réseau satisfont :*

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t, 0) \\ w_{22}(t, L_2) \\ w_{32}(t, L_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

où $b_i, (i = 1, 2, 3,)$ ne dépendent que de la condition initiale et de la solution aux extrémités à des moments antérieurs $\tau = t - \delta t$ avec $\delta t \geq \min\left(\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \frac{L_2}{\lambda_{22}}, \frac{L_3}{\lambda_{32}}\right)$.

La preuve du lemme 2 :

On distingue deux cas :

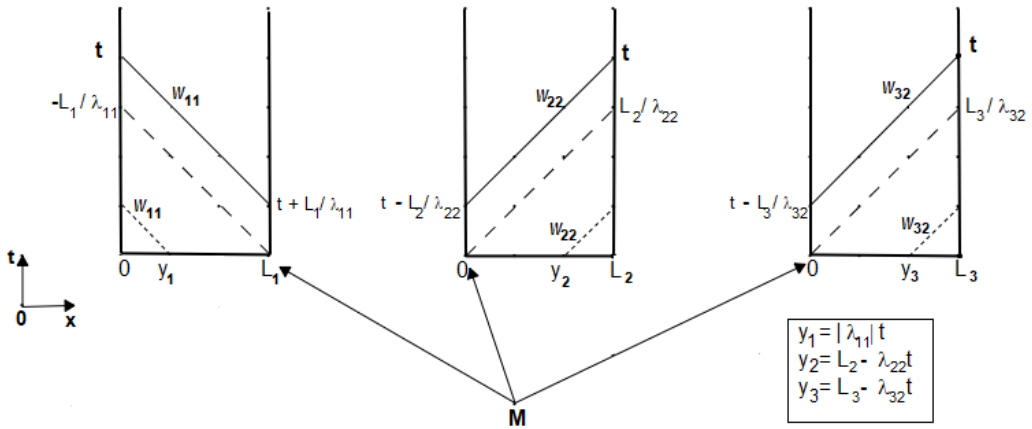


FIGURE 3.2 – Les caractéristiques aux extrémités du réseau et leurs points de départ. Pour un temps t tel que $t \leq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}$ pour le canal 1, $t \leq \frac{L_2}{\lambda_{22}}$ pour le canal 2 et $t \leq \frac{L_3}{\lambda_{32}}$ pour le canal 3, les points de départ sont dans les canaux correspondants. Sinon, les points de départ sont à la jonction M

- Cas A : Lorsque la caractéristique sortante à l'extrémité libre, commence à partir d'un point à l'intérieur du domaine (lignes en pointillés sur la figure 3.2). Ce cas se produit lorsque $t \leq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}$ pour le canal 1, $t \leq \frac{L_2}{\lambda_{22}}$ pour le canal 2 et $t \leq \frac{L_3}{\lambda_{32}}$ pour le canal 3.

En utilisant (3.40), les relations suivantes sont vérifiées :

$$w_{11}(t, 0) = w_{11}(0, y_1), \quad y_1 = |\lambda_{11}|t, \quad (3.58)$$

$$w_{22}(t, L_2) = w_{22}(0, y_2), \quad y_2 = L_2 - \lambda_{22}t, \quad (3.59)$$

$$w_{32}(t, L_3) = w_{32}(0, y_3), \quad y_3 = L_3 - \lambda_{32}t. \quad (3.60)$$

- Cas B : Lorsque la caractéristique sortante à l'extrémité libre, commence à partir de M (lignes fortes sur la figure 3.2). Ce cas implique les conditions de jonction et se produit lorsque $t \geq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}$ pour le canal 1, $t \geq \frac{L_2}{\lambda_{22}}$ pour le canal 2 et $t \geq \frac{L_3}{\lambda_{32}}$ pour le canal 3.

En utilisant (3.40), les relations suivantes sont vérifiées :

$$w_{11}(t, 0) = w_{11}\left(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, L_1\right), \quad (3.61)$$

$$w_{22}(t, L_2) = w_{22}\left(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0\right), \quad (3.62)$$

$$w_{32}(t, L_3) = w_{32}\left(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, 0\right). \quad (3.63)$$

En utilisant (3.54) on a

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t, L_1) \\ w_{22}(t, 0) \\ w_{32}(t, 0) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \\ w_{31}(t, 0) \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

où : $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = B^{-1}C$. Par conséquent, de (3.61) et (3.63), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t + L_1/|\lambda_{11}|, 0) \\ w_{22}(t + L_2/\lambda_{22}, L_2) \\ w_{32}(t + L_3/\lambda_{32}, L_3) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \\ w_{31}(t, 0) \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Notons que l'on peut dériver des relations similaires à (3.58 - 3.60) et (3.61 - 3.63) pour w_{12} , w_{21} et w_{31} à la jonction M.

En effet (voir Figure 3.3) : .

$$w_{12}(t, L_1) = \begin{cases} w_{12}(0, L_1 - \lambda_{12}t), & t \in [0, \frac{L_1}{\lambda_{12}}], \\ w_{12}(t - \frac{L_1}{\lambda_{12}}, 0), & t \geq \frac{L_1}{\lambda_{12}}, \end{cases} \quad (3.66)$$

$$w_{21}(t, 0) = \begin{cases} w_{21}(0, |\lambda_{21}|t), & t \in [0, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}], \\ w_{21}(t - \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, L_2), & t \geq \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \end{cases} \quad (3.67)$$

$$w_{31}(t, 0) = \begin{cases} w_{31}(0, |\lambda_{31}|t), & t \in [0, \frac{L_3}{|\lambda_{31}|}], \\ w_{31}(t - \frac{L_3}{|\lambda_{31}|}, L_3), & t \geq \frac{L_3}{|\lambda_{31}|}. \end{cases} \quad (3.68)$$

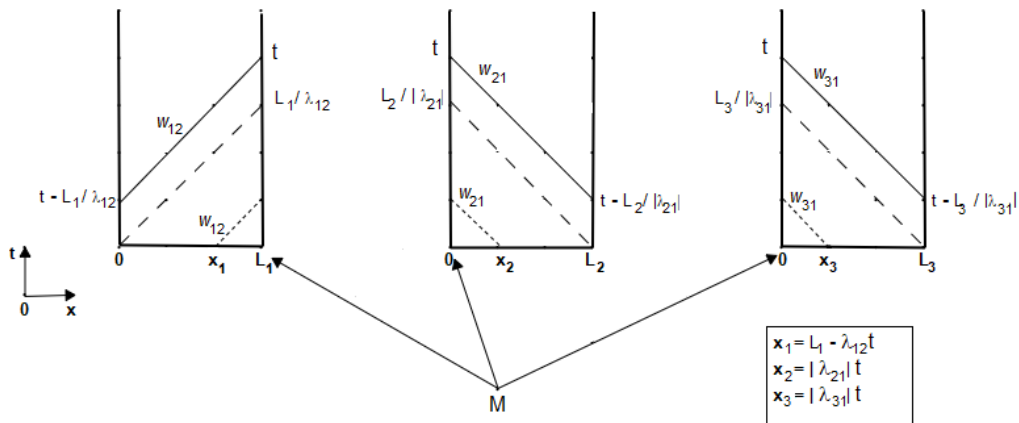


FIGURE 3.3 – Courbes caractéristiques pour w_{12} , w_{21} et w_{31}

Nous dénotons

$$b_1(t) = \begin{cases} w_{11}(0, |\lambda_{11}|t), & t \leq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}; \\ d_{11}w_{12}(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, L_1) + d_{12}w_{21}(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, 0) \\ \quad + d_{13}w_{31}(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, 0), & t \geq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}; \end{cases} \quad (3.69)$$

$$b_2(t) = \begin{cases} w_{22}(0, L_2 - \lambda_{22}t), & t \leq \frac{L_2}{\lambda_{22}}; \\ d_{21}w_{12}(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, L_1) + d_{22}w_{21}(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0) \\ \quad + d_{23}w_{31}(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0), & t \geq \frac{L_2}{\lambda_{22}}; \end{cases} \quad (3.70)$$

$$b_3(t) = \begin{cases} w_{32}(0, L_3 - \lambda_{32}t), & t \leq \frac{L_3}{\lambda_{32}}; \\ d_{31}w_{12}(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, L_1) + d_{32}w_{21}(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, 0) \\ \quad + d_{33}w_{31}(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, 0), & t \geq \frac{L_3}{\lambda_{32}}. \end{cases} \quad (3.71)$$

Nous avons donc prouvé le lemme 2. □

3.4.1 Formulation faible pour le réseau

Les conditions de jonction seront prises en compte dans la formulation faible du réseau.

Soit $(\psi_i, \phi_i) \in (H^1(]0, L_i])^2$.

Multiplions (3.36.c) par $\gamma_1\psi(x_1)$, $\gamma_2\psi(x_2)$, $\gamma_3\psi(x_3)$ respectivement. On obtient

le système :

$$\begin{cases} \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_1(t, x_1) - \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_2(t, x_2) - \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_3(t, x_3) = 0 \\ \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_1(t, x_1) - \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_2(t, x_2) - \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_3(t, x_3) = 0 \\ \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_1(t, x_1) - \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_2(t, x_2) - \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_3(t, x_3) = 0. \end{cases}$$

La combinaison de ces équations donne l'équation :

$$\begin{aligned} & \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_1(t, x_1) - \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_2(t, x_2) - \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_3(t, x_3) \\ & = \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_2(t, x_2) + \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_3(t, x_3) - \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_1(t, x_1) \\ & + \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_3(t, x_3) - \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_2(t, x_2) \end{aligned}$$

qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \gamma_i \psi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) & = \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_2(t, x_2) + \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_3(t, x_3) \\ & - \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_3(t, x_3) \\ & - \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_2(t, x_2). \end{aligned} \quad (3.72)$$

De (3.36.c) on a :

$$\hat{q}_3(t, x_3) = \hat{q}_1(t, x_1) - \hat{q}_2(t, x_2).$$

Ainsi (3.72) donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \gamma_i \psi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) \\ & = \gamma_1\psi(x_1)\hat{q}_2(t, x_2) + \gamma_1\psi(x_1) (\hat{q}_1(t, x_1) - \hat{q}_2(t, x_2)) \\ & - \gamma_2\psi(x_2)\hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_2\psi(x_2) (\hat{q}_1(t, x_1) - \hat{q}_2(t, x_2)) \\ & - \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_3\psi(x_3)\hat{q}_2(t, x_2) \end{aligned}$$

et on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \gamma_i \psi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) & = (\gamma_1\psi(x_1) - \gamma_3\psi(x_3)) \hat{q}_1(t, x_1) \\ & - (\gamma_2\psi(x_2) - \gamma_3\psi(x_3)) \hat{q}_2(t, x_2). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Posons :

$$\Upsilon_i = \gamma_i\psi(x_i) - \gamma_3\psi(x_3).$$

Alors (3.73) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i \psi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) = \sum_{i=1}^2 \Upsilon_{i\epsilon_i} \hat{q}_i(t, x_i). \quad (3.74)$$

De même en multipliant $\hat{\mathcal{S}}_i$ définie en (3.36.d) par $\phi(x_i)$ alors

$$\phi(x_i) \hat{\mathcal{S}}_i = \gamma_i \phi(x_i) \hat{h}_i(t, x_i) + \beta_i \phi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i).$$

De ce fait

$$\beta_i \phi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) = \phi(x_i) \hat{\mathcal{S}}_i - \gamma_i \phi(x_i) \hat{h}_i(t, x_i). \quad (3.75)$$

Pour i allant de 1 à 3 (3.75) entraîne :

$$\begin{cases} \beta_1 \phi(x_1) \hat{q}_1(t, x_1) = \phi(x_1) \hat{\mathcal{S}}_1 - \gamma_1 \phi(x_1) \hat{h}_1(t, x_1) \\ \beta_2 \phi(x_2) \hat{q}_2(t, x_2) = \phi(x_2) \hat{\mathcal{S}}_2 - \gamma_2 \phi(x_2) \hat{h}_2(t, x_2) \\ \beta_3 \phi(x_3) \hat{q}_3(t, x_3) = \phi(x_3) \hat{\mathcal{S}}_3 - \gamma_3 \phi(x_3) \hat{h}_3(t, x_3) \end{cases}$$

Puisque $\hat{\mathcal{S}}_1 = \hat{\mathcal{S}}_2$ et $\hat{\mathcal{S}}_1 = \hat{\mathcal{S}}_3$ on obtient a :

$$\begin{cases} \beta_1 \phi(x_1) \hat{q}_1(t, x_1) = \phi(x_1) \hat{\mathcal{S}}_1 - \gamma_1 \phi(x_1) \hat{h}_1(t, x_1) \\ -\beta_2 \phi(x_2) \hat{q}_2(t, x_2) = -\phi(x_2) \hat{\mathcal{S}}_1 + \gamma_2 \phi(x_2) \hat{h}_2(t, x_2) \\ -\beta_3 \phi(x_3) \hat{q}_3(t, x_3) = -\phi(x_3) \hat{\mathcal{S}}_1 + \gamma_3 \phi(x_3) \hat{h}_3(t, x_3) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i \beta_i \phi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) = \hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi(x_i) - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi(x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i). \quad (3.76)$$

(3.74) et (3.76) sont des égalités liées aux conditions de jonction.

3.4.1.1 Pour la loi de conservation de masse :

Quelque soit $\psi_i \in H^1(]0, L_i[)$, nous multiplions (3.36.a) par $l_i \gamma_i \psi_i$, puis intégrons par parties et sommions enfin suivant les i .

La multiplication de (3.36a) par $l_i \gamma_i \psi_i$ donne :

$$l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L_i] ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.77)$$

L'intégration de (3.77) conduit à :

$$\int_{0_i}^{L_i} l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} dx + \int_{0_i}^{L_i} \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} dx = 0, \quad x \in [0, L_i] ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.78)$$

puis en intégrant par parties le second terme de (3.78) on obtient :

$$\int_{0_i}^{L_i} \left[l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} - \hat{q}_i \frac{\partial (\psi_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + \gamma_i \psi(L_i) \hat{q}_i(t, L_i) - \gamma_i \psi(0) \hat{q}_i(t, 0) = 0 ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.79)$$

Ainsi en sommant suivant i , (3.79) entraine :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \left[l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} - \hat{q}_i \frac{\partial (\psi_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + [\gamma_1 \psi(L_1) \hat{q}_1(t, L_1) - \gamma_2 \psi(0) \hat{q}_2(t, 0) - \gamma_3 \psi(0) \hat{q}_3(t, 0)] - \gamma_1 \psi(0) \hat{q}_1(t, 0) + \gamma_2 \psi(L_2) \hat{q}_2(t, L_2) + \gamma_3 \psi(L_3) \hat{q}_3(t, L_3) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \left[l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} - \hat{q}_i \frac{\partial (\psi_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + [\gamma_1 \psi(x_1) \hat{q}_1(t, x_1) - \gamma_2 \psi(x_2) \hat{q}_2(t, x_2) - \gamma_3 \psi(x_3) \hat{q}_3(t, x_3)] - \gamma_1 \psi(0) \hat{q}_1(t, 0) + \gamma_2 \psi(L_2) \hat{q}_2(t, L_2) + \gamma_3 \psi(L_3) \hat{q}_3(t, L_3) = 0$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \left[l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} - \hat{q}_i \frac{\partial (\psi_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \gamma_i \psi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) - \gamma_1 \psi(0) \hat{q}_{1,0}(t) + \gamma_2 \psi(L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) + \gamma_3 \psi(L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) = 0.$$

Grâce à l'égalité (3.74) on obtient alors la formulation faible suivante de la loi de conservation de la masse :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \left[l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} - \hat{q}_i \frac{\partial (\psi_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + \sum_{i=1}^2 \Upsilon_{i \in i} \hat{q}_i(t, x_i) - \gamma_1 \psi(0) \hat{q}_{1,0}(t) + \gamma_2 \psi(L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) + \gamma_3 \psi(L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) = 0. \quad (3.80)$$

3.4.1.2 Pour la loi de conservation des moments :

Quelque soit ϕ_i élément de $H^1(]0, L_i[)$, nous multiplions (3.36.b) par $\delta_i\phi_i$, puis intégrons par parties et additionnons enfin suivant les i .

Le produit de (3.36.b) et $\delta_i\phi_i$ donne :

$$\delta_i\phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \delta_i\phi_i\sigma_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \delta_i\phi_i\rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.81)$$

On a : $\beta_i = \frac{1}{2}\delta_i\sigma_i$, et $\gamma_i = \delta_i\rho_i$.

Par conséquent dans (3.81) on remplace σ_i par $\frac{2\beta_i}{\delta_i}$ et ρ_i par $\frac{\gamma_i}{\delta_i}$. Cela entraîne :

$$\delta_i\phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + 2\beta_i\phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \gamma_i\phi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.82)$$

On intègre par la suite (3.82) de 0 à L_i , cela donne :

$$\int_0^{L_i} \delta_i\phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} dx + \int_0^{L_i} 2\beta_i\phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} dx + \int_0^{L_i} \gamma_i\phi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} dx = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.83)$$

On intègre ensuite par parties le second et le troisième terme de (3.83). Cela conduit à

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_i} \delta_i\phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} dx - \int_0^{L_i} 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i\phi_i)}{\partial x} dx + 2\beta_i\phi(L_i)\hat{q}_i(t, L_i) - 2\beta_i\phi(0)\hat{q}_i(t, 0) \\ & - \int_0^{L_i} \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i\phi_i)}{\partial x} dx + \gamma_i\phi(L_i)\hat{h}_i(t, L_i) - \gamma_i\phi(0)\hat{h}_i(t, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

qui vaut :

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_i} \left[\delta_i\phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i\phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i\phi_i)}{\partial x} \right] dx \\ & + 2\beta_i\phi(L_i)\hat{q}_i(t, L_i) - 2\beta_i\phi(0)\hat{q}_i(t, 0) \\ & + \gamma_i\phi(L_i)\hat{h}_i(t, L_i) - \gamma_i\phi(0)\hat{h}_i(t, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

La sommation pour i allant de 1 à 3 implique alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \phi_i)}{\partial x} \right] dx \\
& + 2\beta_1 \phi(L_1) \hat{q}_1(t, L_1) - 2\beta_1 \phi(0) \hat{q}_1(t, 0) \\
& + 2\beta_2 \phi(L_2) \hat{q}_2(t, L_2) - 2\beta_2 \phi(0) \hat{q}_2(t, 0) \\
& + 2\beta_3 \phi(L_3) \hat{q}_3(t, L_3) - 2\beta_3 \phi(0) \hat{q}_3(t, 0) \\
& + \gamma_1 \phi(L_1) \hat{h}_1(t, L_1) - \gamma_1 \phi(0) \hat{h}_1(t, 0) \\
& + \gamma_2 \phi(L_2) \hat{h}_2(t, L_2) - \gamma_2 \phi(0) \hat{h}_2(t, 0) \\
& + \gamma_3 \phi(L_3) \hat{h}_3(t, L_3) - \gamma_3 \phi(0) \hat{h}_3(t, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Un réarrangement des termes de l'équation donne :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \phi_i)}{\partial x} \right] dx \\
& + 2(\beta_1 \phi(L_1) \hat{q}_1(t, L_1) - \beta_2 \phi(0) \hat{q}_2(t, 0) - \beta_3 \phi(0) \hat{q}_3(t, 0)) \\
& + \gamma_1 \phi(L_1) \hat{h}_1(t, L_1) - \gamma_2 \phi(0) \hat{h}_2(t, 0) - \gamma_3 \phi(0) \hat{h}_3(t, 0) \\
& - 2\beta_1 \phi(0) \hat{q}_1(t, 0) + 2\beta_2 \phi(L_2) \hat{q}_2(t, L_2) + 2\beta_3 \phi(L_3) \hat{q}_3(t, L_3) \\
& - \gamma_1 \phi(0) \hat{h}_1(t, 0) + \gamma_2 \phi(L_2) \hat{h}_2(t, L_2) + \gamma_3 \phi(L_3) \hat{h}_3(t, L_3) = 0
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \phi_i)}{\partial x} \right] dx \\
& + 2 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \beta_i \phi(x_i) \hat{q}_i(t, x_i) + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi(x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \\
& - 2\beta_1 \phi(0) \hat{q}_1(t, 0) + 2\beta_2 \phi(L_2) \hat{q}_2(t, L_2) + 2\beta_3 \phi(L_3) \hat{q}_3(t, L_3) \\
& - \gamma_1 \phi(0) \hat{h}_1(t, 0) + \gamma_2 \phi(L_2) \hat{h}_2(t, L_2) + \gamma_3 \phi(L_3) \hat{h}_3(t, L_3) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à l'égalité (3.76) on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \phi_i)}{\partial x} \right] dx \\
& + 2 \left(\hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi(x_i) - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi(x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \right) + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi(x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \\
& - 2\beta_1 \phi(0) \hat{q}_1(t, 0) + 2\beta_2 \phi(L_2) \hat{q}_2(t, L_2) + 2\beta_3 \phi(L_3) \hat{q}_3(t, L_3) \\
& - \gamma_1 \phi(0) \hat{h}_1(t, 0) + \gamma_2 \phi(L_2) \hat{h}_2(t, L_2) + \gamma_3 \phi(L_3) \hat{h}_3(t, L_3) = 0.
\end{aligned}$$

On obtient alors la formulation faible suivante pour la loi de conservation des moments :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \phi_i)}{\partial x} \right] dx \\
& + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi(x_i) \left(2\hat{\mathcal{S}}_1 - \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \right) \\
& - 2\beta_1 \phi(0) \hat{q}_{1,0}(t) + 2\beta_2 \phi(L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) \\
& + 2\beta_3 \phi(L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) - \gamma_1 \phi(0) \hat{h}_1(t, 0) \\
& + \gamma_2 \phi(L_2) \hat{h}_2(t, L_2) + \gamma_3 \phi(L_3) \hat{h}_3(t, L_3) = 0. \tag{3.84}
\end{aligned}$$

Les estimations (3.80) et (3.84) seront utilisées dans la suite.

3.5 Estimation d'énergie a priori

Des contrôles rétroactifs ont été dérivés dans ([19, 20]) pour stabiliser le problème du réseau d'écoulement de gaz autour d'un état stationnaire donné. L'approche utilisée dans [19] n'est pas la même que notre approche. La différence réside dans la façon dont la fonction Lyapounov est définie et comment le taux de changement de la fonction Lyapounov est traité pour dériver les contrôles. Nous considérons un réseau similaire mais les conditions de jonction sont différentes.

Une relation entre \hat{h}_i et \hat{q}_i est utilisée pour exprimer la variation temporelle de l'énergie de (2.19) au coté droit comme un polynôme de second ordre en termes de \hat{q}_i . Ce polynôme du second ordre est traité de manière à obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie. Nous définissons l'énergie du flux dans

le réseau par :

$$E(t) = \sum_{i=1}^3 \left(\|\sqrt{l_i \gamma_i} \hat{h}_i(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\sqrt{\delta_i} \hat{q}_i(t)\|_{2,\Omega}^2 \right) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left(l_i \gamma_i \hat{h}_i^2 + \delta_i \hat{q}_i^2 \right) dx \quad (3.85)$$

où γ_i et δ_i sont définis dans (3.34).

3.5.1 Variation temporelle de l'énergie

La variation temporelle de l'énergie est obtenue en dérivant (3.85) par rapport au temps.

La dérivation de (3.85) par rapport au temps donne :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left(l_i \gamma_i \hat{h}_i^2 + \delta_i \hat{q}_i^2 \right) dx. \quad (3.86)$$

En appliquant la règle de Leibnitz à (3.86) on obtient alors :

$$\frac{1}{2} \frac{dE(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} l_i \gamma_i \hat{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \delta_i \hat{q}_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} dx. \quad (3.87)$$

Considérons $(\psi_i, \phi_i) = (\hat{h}_i, \hat{q}_i)$ dans (3.80-3.84). Alors :

-De la formulation faible (3.80) pour la loi de conservation de la masse on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \left[l_i \gamma_i \hat{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} - \hat{q}_i \frac{\partial (\hat{h}_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + \sum_{i=1}^2 \Upsilon_i \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) \\ & - \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t) + \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) + \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} l_i \gamma_i \hat{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} dx = \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \hat{q}_i \frac{\partial (\hat{h}_i \gamma_i)}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^2 \Upsilon_i \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) \\ & + \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t) - \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t). \quad (3.88) \end{aligned}$$

De la formulation faible (3.84) pour la loi de conservation des moments on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \hat{q}_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \hat{q}_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \hat{q}_i)}{\partial x} \right] dx \\
& + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(x_i) \left(2\hat{\mathcal{S}}_1 - \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \right) \\
& - 2\beta_1 \hat{q}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t) + 2\beta_2 \hat{q}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) \\
& + 2\beta_3 \hat{q}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) - \gamma_1 \hat{q}_1(t, 0) \hat{h}_1(t, 0) \\
& + \gamma_2 \hat{q}_2(t, L_2) \hat{h}_2(t, L_2) + \gamma_3 \hat{q}_3(t, L_3) \hat{h}_3(t, L_3) = 0.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \delta_i \hat{q}_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} dx &= \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \hat{q}_i)}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \hat{q}_i)}{\partial x} dx \\
& - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(x_i) \left(2\hat{\mathcal{S}}_1 - \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \right) \\
& + 2\beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) - 2\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - 2\beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\
& + \gamma_1 \hat{q}_1(0) \hat{h}_1(t, 0) - \gamma_2 \hat{q}_2(t, L_2) \hat{h}_2(t, L_2) \\
& - \gamma_3 \hat{q}_3(t, L_3) \hat{h}_3(t, L_3) \tag{3.89}
\end{aligned}$$

et puis par combinaison de (3.88) et (3.89) on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} l_i \gamma_i \hat{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \delta_i \hat{q}_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} dx \\
& = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \hat{q}_i \frac{\partial(\hat{h}_i \gamma_i)}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \hat{q}_i)}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} 2\hat{q}_i \frac{\partial(\beta_i \hat{q}_i)}{\partial x} dx \\
& + 2\beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) - 2\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - 2\beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\
& + 2\gamma_1 \hat{q}_1(0) \hat{h}_1(t, 0) - 2\gamma_2 \hat{q}_2(t, L_2) \hat{h}_2(t, L_2) - 2\gamma_3 \hat{q}_3(t, L_3) \hat{h}_3(t, L_3) \\
& - 2\hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i \hat{q}_i(t, x_i) \hat{h}_i(t, x_i) - \sum_{i=1}^2 \Upsilon_i \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) \tag{3.90}
\end{aligned}$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3. Si (3.36c) et (3.36d) sont satisfaits, alors :

$$-2\hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i \hat{q}_i(t, x_i) \hat{h}_i(t, x_i) - \sum_{i=1}^2 \Upsilon_i \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0. \quad (3.91)$$

Preuve : Supposons que (3.36 c) est satisfait c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0.$$

en multipliant cette somme par $2\hat{\mathcal{S}}_1$ on obtient l'égalité :

$$2\hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0.$$

D'un autre côté, posons $\psi_i = \hat{h}_i$ dans (3.74) nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^2 \Upsilon_i \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \hat{q}_i(t, x_i).$$

□

D'après le lemme 3, (3.90) donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \left(\hat{q}_i \frac{\partial(\hat{h}_i \gamma_i)}{\partial x} + \hat{h}_i \frac{\partial(\gamma_i \hat{q}_i)}{\partial x} \right) dx + \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \frac{\partial(\beta_i \hat{q}_i^2)}{\partial x} dx \\ &+ 2\beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) - 2\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - 2\beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\ &+ 2\gamma_1 \hat{q}_1(0) \hat{h}_1(t, 0) - 2\gamma_2 \hat{q}_{2,L_2}(t) \hat{h}_2(t, L_2) \\ &- 2\gamma_3 \hat{q}_{3,L_3}(t) \hat{h}_3(t, L_3), \end{aligned} \quad (3.92)$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \frac{\partial(\gamma_i \hat{h}_i \hat{q}_i)}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \frac{\partial(\beta_i \hat{q}_i^2)}{\partial x} dx \\ &+ 2\beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) - 2\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - 2\beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\ &+ 2\gamma_1 \hat{q}_1(0) \hat{h}_1(t, 0) - 2\gamma_2 \hat{q}_{2,L_2}(t) \hat{h}_2(t, L_2) \\ &- 2\gamma_3 \hat{q}_{3,L_3}(t) \hat{h}_3(t, L_3). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Cela entraine

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= \sum_{i=1}^3 \left[\gamma_i \hat{q}_i \hat{h}_i \right]_0^{L_i} + \sum_{i=1}^3 \left[\beta_i \hat{q}_i^2 \right]_0^{L_i} \\
&+ 2\beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) - 2\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - 2\beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\
&+ 2\gamma_1 \hat{q}_1(0) \hat{h}_1(t, 0) - 2\gamma_2 \hat{q}_{2,L_2}(t) \hat{h}_2(t, L_2) \\
&- 2\gamma_3 \hat{q}_{3,L_3}(t) \hat{h}_3(t, L_3).
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Après une réécriture des sommes $\sum_{i=1}^3 \left[\gamma_i \hat{q}_i \hat{h}_i \right]_0^{L_i}$ et $\sum_{i=1}^3 \left[\beta_i \hat{q}_i^2 \right]_0^{L_i}$ de (3.94) on obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= + \gamma_1 \hat{q}_1(t, L_1) \hat{h}_1(t, L_1) + \gamma_2 \hat{q}_2(t, L_2) \hat{h}_2(t, L_2) + \gamma_3 \hat{q}_3(t, L_3) \hat{h}_3(t, L_3) \\
&- \gamma_1 \hat{q}_1(t, 0) \hat{h}_1(t, 0) - \gamma_2 \hat{q}_2(t, 0) \hat{h}_2(t, 0) - \gamma_3 \hat{q}_3(t, 0) \hat{h}_3(t, 0) \\
&+ \beta_1 \hat{q}_1^2(t, L_1) + \beta_2 \hat{q}_2^2(t, L_2) + \beta_3 \hat{q}_3^2(t, L_3) \\
&- \beta_1 \hat{q}_1^2(t, 0) - \beta_2 \hat{q}_2^2(t, 0) - \beta_3 \hat{q}_3^2(t, 0) \\
&+ 2\beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) - 2\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - 2\beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\
&+ 2\gamma_1 \hat{q}_1(0) \hat{h}_1(t, 0) - 2\gamma_2 \hat{q}_{2,L_2}(t) \hat{h}_2(t, L_2) \\
&- 2\gamma_3 \hat{q}_{3,L_3}(t) \hat{h}_3(t, L_3),
\end{aligned} \tag{3.95}$$

puis avec un réarrangement de certains termes cela donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= - \beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - \beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\
&- \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) + \beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t) \\
&+ \left(\gamma_1 \hat{q}_1(t, L_1) \hat{h}_1(t, L_1) - \gamma_2 \hat{q}_2(t, 0) \hat{h}_2(t, 0) - \gamma_3 \hat{q}_3(t, 0) \hat{h}_3(t, 0) \right) \\
&+ \left(\beta_1 \hat{q}_1^2(t, L_1) - \beta_2 \hat{q}_2^2(t, 0) - \beta_3 \hat{q}_3^2(t, 0) \right),
\end{aligned} \tag{3.96}$$

ou tout simplement l'expression :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= - \beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - \beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\
&- \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) + \beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^3 \epsilon_i q_i(t, x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \beta_i \hat{q}_i^2(t, x_i).
\end{aligned} \tag{3.97}$$

D'après (3.76) on a

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i q_i(t, x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \beta_i \hat{q}_i^2(t, x_i) = \hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i). \quad (3.98)$$

Donc (3.97) se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= -\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) \\ &\quad - \beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) - \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) \\ &\quad + \beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t) \\ &\quad + \hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Or d'après ce qui précède

$$\hat{\mathcal{S}}_1 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0.$$

On aboutit finalement à l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= -\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - \beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) \\ &\quad - \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) + \beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Remarque 11. *La variation de l'énergie ne dépend donc que des données aux extrémités libres du réseau.*

De (3.43), on déduit que :

$$\hat{h}_1(t, 0) = \frac{1}{l_1 \lambda_{12}} \hat{q}_{1,0}(t) + \frac{1}{l_1} w_{11}(t, 0), \quad (3.101)$$

$$\hat{h}_2(t, L_2) = \frac{1}{l_2 \lambda_{21}} \hat{q}_{2,L_2}(t) + \frac{1}{l_2} w_{22}(t, L_2), \quad (3.102)$$

$$\hat{h}_3(t, L_3) = \frac{1}{l_3 \lambda_{31}} \hat{q}_{3,L_3}(t) + \frac{1}{l_3} w_{32}(t, L_3). \quad (3.103)$$

Par conséquent, nous déduisons de (3.100) et du lemme 2 que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E(t) &= a_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) + \frac{\gamma_1}{l_1} b_1(t) \hat{q}_{1,0}(t) + a_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) \\ &\quad - \frac{\gamma_2}{l_2} b_2(t) \hat{q}_{2,L_2}(t) + a_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) - \frac{\gamma_3}{l_3} b_3(t) \hat{q}_{3,L_3}(t) \end{aligned} \quad (3.104)$$

où $a_i = \frac{\delta_i}{2} (\lambda_{i2} + |\lambda_{i1}|) > 0$ ne dépend que de l'état stationnaire et les γ_i sont définis dans (3.34).

3.6 Conception de contrôles rétroactifs pour le réseau en étoile et processus de stabilisation

En analysant (3.104) et s'appuyant sur le lemme 1 nous donnons la définition qui suit.

Définition 18. *Considérons trois fonctions arbitraires θ_1, θ_2 et $\theta_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$.*

Nous définissons $\hat{q}_{1,0}, \hat{q}_{2,L_2}$ et \hat{q}_{3,L_3} comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{q}_{1,0}(t) &= \frac{\gamma_1}{2l_1a_1} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right) b_1(t) \\ \hat{q}_{2,L_2}(t) &= -\frac{\gamma_2}{2l_2a_2} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right) b_2(t), \\ \hat{q}_{3,L_3}(t) &= -\frac{\gamma_3}{2l_3a_3} \left(\sqrt{1 - \theta_3(t)} - 1 \right) b_3(t),\end{aligned}\tag{3.105}$$

où $a_i = \frac{\delta_i}{2}(\lambda_{i2} - \lambda_{i1}) > 0$, γ_i sont donnés par (3.34) et b_i ($i = 1, 2, 3$) sont mentionnés dans le lemme 2.

Avec ces contrôles dans (3.104) et en appliquant le lemme 1 nous obtenons finalement :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) = -\frac{(\gamma_1 b_1(t))^2}{4l_1^2 a_1} \theta_1(t) - \frac{(\gamma_2 b_2(t))^2}{4l_2^2 a_2} \theta_2(t) - \frac{(\gamma_3 b_3(t))^2}{4l_3^2 a_3} \theta_3(t).\tag{3.106}$$

Dans la suite, les notations suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned}T_0 &= \max \left(\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \frac{L_2}{\lambda_{22}}, \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right) + \max \left(\frac{L_1}{\lambda_{12}}, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \frac{L_3}{|\lambda_{31}|} \right) \\ t_k &= kT_0 \quad ; \quad k \in \mathbb{N}, \\ Q_i &= [t_k, t_{k+1}] \times [0, L_i], \\ \text{div} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right),\end{aligned}\tag{3.107}$$

$$H(\text{div}, Q_i) = \{ \mathcal{V} \in L^2(Q_i)^2 \quad ; \quad \text{div} \mathcal{V} \in L^2(Q_i) \}.$$

Théorème 9. *Soit $t_k = kT_0$ où T_0 est donné par (3.107). Supposons que (3.41) soit vrai, la condition initiale $(\hat{h}_i^0, \hat{q}_i^0)$ est continue dans $[0, L_i]$, θ_i ($i = 1, 2, 3$) sont continus dans $]0, 1]$ et $(\hat{q}_{1,0}, \hat{q}_{2,L_2}, \hat{q}_{3,L_3})$ satisfait (3.105). Alors (3.36) a une solution unique $(\hat{h}_i, \hat{q}_i)_{i=1,2,3}$ continue dans $[t_k, t_{k+1}] \times [0, L_i]$ de telle sorte que l'énergie est décroissante dans $[t_k, t_{k+1}]$ et satisfait :*

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k) E(t_k).\tag{3.108}$$

Ici, $\Theta^k = \min (\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_3^k) \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}\Delta_1^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{11}|}{\lambda_{12} + |\lambda_{11}|} \inf_{x \in [0, L_1]} \theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_{11}|} \right), \frac{\gamma_1 \epsilon}{l_1} \right) \\ \Delta_2^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22} + |\lambda_{21}|} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2 \left(t_k + \frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right), \frac{\gamma_2 \epsilon}{l_2} \right) \\ \Delta_3^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{31}|}{\lambda_{32} + |\lambda_{31}|} \inf_{x \in [0, L_3]} \theta_3 \left(t_k + \frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right), \frac{\gamma_3 \epsilon}{l_3} \right)\end{aligned}$$

et $\epsilon > 0$ est donné par équivalence de normes.

Preuve du théorème 9 : D'une part l'existence et l'unicité de la solution découlent de (3.43) et des constructions (3.69 - 3.71).

En effet avec (3.43) on forme le système suivant d'équations à deux inconnues (\hat{h}_i, \hat{q}_i) :

$$\begin{cases} l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i2}} \hat{q}_i = w_{i1} \\ l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i1}} \hat{q}_i = w_{i2}. \end{cases}$$

Ce système donne la forme matricielle suivante :

$$B_i U_i = w_i$$

avec

$$U_i = \begin{pmatrix} \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix}, \quad w_i = \begin{pmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_i = \begin{pmatrix} l_i & -\frac{1}{\lambda_{i2}} \\ l_i & -\frac{1}{\lambda_{i1}} \end{pmatrix}.$$

Par calcul on a :

$$\det B_i = l \left(\frac{1_i}{\lambda_{i2}} + \frac{1_i}{|\lambda_{i1}|} \right) \neq 0.$$

La matrice B_i est ainsi inversible d'où l'existence et l'unicité de la solution. En intégrant (3.106) de 0 à t_1 on a :

$$\begin{aligned}E(t_1) &= E(0) - \int_0^{t_1} \frac{(\gamma_1 b_1(t))^2}{2l_1^2 a_1} \theta_1(t) dt - \int_0^{t_1} \frac{(\gamma_2 b_2(t))^2}{2l_2^2 a_2} \theta_2(t) dt \\ &\quad - \int_0^{t_1} \frac{(\gamma_3 b_3(t))^2}{2l_3^2 a_3} \theta_3(t) dt.\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant (b_i) défini dans le lemme 2 et en changeant les variables d'intégration, on a :

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1 |\lambda_{11}|} \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) \theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_{11}|} \right) dx \\
&\quad - \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2 \lambda_{22}} \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) \theta_2 \left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right) dx \\
&\quad - \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3 \lambda_{32}} \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) \theta_3 \left(\frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right) dx \\
&\quad - \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1} \int_0^{\tau_1} \left[d_{11} w_{12}(s, L_1) + \xi_1(s, 0) \right]^2 \theta_1 \left(s + \frac{L_1}{|\lambda_{11}|} \right) ds \\
&\quad - \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2} \int_0^{\tau_2} \left[d_{21} w_{12}(s, L_1) + \xi_2(s, 0) \right]^2 \theta_2 \left(s + \frac{L_2}{\lambda_{22}} \right) ds \\
&\quad - \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3} \int_0^{\tau_3} \left[d_{31} w_{12}(s, L_1) + \xi_3(s, 0) \right]^2 \theta_3 \left(s + \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right) ds
\end{aligned} \tag{3.109}$$

où $\xi_i(s, 0) = d_{i2} w_{21}(s, 0) + d_{i3} w_{31}(s, 0)$, $\tau_1 = t_1 - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}$, $\tau_2 = t_1 - \frac{L_2}{\lambda_{22}}$ et $\tau_3 = t_1 - \frac{L_3}{\lambda_{32}}$.
Définissons Γ_i^j ($i = 1, \dots, 3$; $j = 0, 1$) comme suit :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^0 &= \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1 |\lambda_{11}|} \inf_{x \in [0, L_1]} \theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_{11}|} \right) \\
\Gamma_2^0 &= \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2 \lambda_{22}} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2 \left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right) \\
\Gamma_3^0 &= \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3 \lambda_{32}} \inf_{x \in [0, L_3]} \theta_3 \left(\frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right) \\
\Gamma_1^1 &= \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1} \inf_{s \in \left[0, t_1 - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}\right]} \theta_1 \left(s + \frac{L_1}{|\lambda_{11}|} \right) \\
\Gamma_2^1 &= \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2} \inf_{s \in \left[0, t_1 - \frac{L_2}{\lambda_{22}}\right]} \theta_2 \left(s + \frac{L_2}{\lambda_{22}} \right) \\
\Gamma_3^1 &= \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3} \inf_{s \in \left[0, t_1 - \frac{L_3}{\lambda_{32}}\right]} \theta_3 \left(s + \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right),
\end{aligned}$$

l'inégalité (3.109) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \Gamma_1^0 \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) dx \\
&\quad - \Gamma_2^0 \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) dx - \Gamma_3^0 \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) dx \\
&\quad - \Gamma_1^1 \int_0^{\tau_1} \left(d_{11} w_{12}(s, L_1) + \xi_1(s, 0) \right)^2 ds \\
&\quad - \Gamma_2^1 \int_0^{\tau_2} \left(d_{21} w_{12}(s, L_1) + \xi_2(s, 0) \right)^2 ds \\
&\quad - \Gamma_3^1 \int_0^{\tau_3} \left(d_{31} w_{12}(s, L_1) + \xi_3(s, 0) \right)^2 ds. \tag{3.110}
\end{aligned}$$

De $\min(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \geq \tau_0 = \max\left(\frac{L_1}{\lambda_{12}}, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \frac{L_3}{|\lambda_{31}|}\right)$ l'inégalité (3.110) implique :

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \int_0^{\tau_0} \|ADX\|^2 ds - \Gamma_1^0 \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) dx \\
&\quad - \Gamma_2^0 \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) dx - \Gamma_3^0 \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) dx \tag{3.111}
\end{aligned}$$

ici D est donné en (3.64) et

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3^1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} w_{12}(s, L_1) \\ w_{21}(s, 0) \\ w_{31}(s, 0) \end{pmatrix}.$$

La matrice AD étant inversible, il existe $\epsilon > 0$ tel que : $-\|ADX\|^2 \leq -\epsilon\|X\|^2$. Ensuite, en considérant les identités (3.66 - 3.68) et l'estimation (3.111), on

obtient :

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \Gamma_1^0 \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) dx - \Gamma_2^0 \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) dx \\
&\quad - \Gamma_3^0 \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) dx - \epsilon \int_0^{\frac{L_1}{\lambda_{12}}} w_{12}^2(0, L_1 - \lambda_{12}s) ds \\
&\quad - \epsilon \int_0^{\frac{L_2}{|\lambda_{21}|}} w_{21}^2(0, |\lambda_{21}|s) ds - \epsilon \int_0^{\frac{L_3}{|\lambda_{31}|}} w_{31}^2(0, |\lambda_{31}|s) ds
\end{aligned}$$

soit l'estimation

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \Pi_1^0 \int_0^{L_1} [w_{11}^2(0, x) + w_{12}^2(0, x)] dx \\
&\quad - \Pi_2^0 \int_0^{L_2} [w_{22}^2(0, x) + w_{21}^2(0, x)] dx \\
&\quad - \Pi_3^0 \int_0^{L_3} [w_{32}^2(0, x) + w_{31}^2(0, x)] dx
\end{aligned} \tag{3.112}$$

où $\Pi_1^0 = \min\left(\Gamma_1^0, \frac{\epsilon}{\lambda_{12}}\right)$, $\Pi_2^0 = \min\left(\Gamma_2^0, \frac{\epsilon}{|\lambda_{21}|}\right)$ et $\Pi_3^0 = \min\left(\Gamma_3^0, \frac{\epsilon}{|\lambda_{31}|}\right)$.
Rappelons que (2.60), donne l'estimation suivante :

$$w_{i2}^2(0, x) + w_{i1}^2(0, x) \geq \frac{l_i}{\gamma_i} \left(l_i \gamma_i (\hat{h}_i^0(x))^2 + \delta_i (\hat{q}_i^0(x))^2 \right). \tag{3.113}$$

Notons $\Delta_i^0 = \frac{l_i \Pi_i^0}{\gamma_i}$, puis en combinant (3.112) et (3.113), on obtient :

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - (\Delta_1^0 E_1(0) + \Delta_2^0 E_2(0) + \Delta_3^0 E_3(0)) \\
&\leq (1 - \Theta^0) E(0),
\end{aligned} \tag{3.114}$$

où :

$$\Theta^0 = \min\left(\Delta_1^0, \Delta_2^0, \Delta_3^0\right).$$

D'autre part, nous avons

$$\Delta_2^0 = \min\left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22} + |\lambda_{21}|} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2\left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}}\right), \frac{\gamma_2 \epsilon}{l_2 \lambda_{22}}\right) < 1$$

Par conséquent $\Theta^0 < 1$.

Pour généraliser par rapport au temps, nous considérons t_k comme le temps initial et discutons comme pour la preuve du Théorème 6. Ensuite, la preuve du Théorème 9 est complète. \square

3.7 Résultat principal

Le résultat principal de notre étude est le théorème suivant :

Théorème 10. *Supposons que (3.41) soit vrai, les conditions initiales appartiennent à $L^2([0, L_i])$ et $(\hat{q}_{1,0}(t), \hat{q}_{2,L_2}(t), \hat{q}_{3,L_3}(t))$ satisfait (3.105).*

Alors (3.36) admet une solution (\hat{h}_i, \hat{q}_i) satisfaisant la régularité suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_i \\ \sigma_i \hat{q}_i + \rho_i \hat{h}_i \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q_i). \quad (3.115)$$

De plus, l'énergie est décroissante dans $[t_k, t_{k+1}]$ et satisfait :

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k). \quad (3.116)$$

Ici, t_k et $H(\text{div}, Q_i)$ sont donnés par (3.107), E est donnée par (3.85),

$$\Theta^k = \min(\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_3^k) \in]0, 1[,$$

$$\begin{aligned} \Delta_1^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{11}|}{\lambda_{12} + |\lambda_{11}|} \inf_{x \in [0, L_1]} \theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_{11}|} \right), \frac{\gamma_1 \epsilon}{l_1} \right), \\ \Delta_2^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22} + |\lambda_{21}|} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2 \left(t_k + \frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right), \frac{\gamma_2 \epsilon}{l_2} \right), \\ \Delta_3^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{31}|}{\lambda_{32} + |\lambda_{31}|} \inf_{x \in [0, L_3]} \theta_3 \left(t_k + \frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right), \frac{\gamma_3 \epsilon}{l_3} \right) \end{aligned}$$

et $\epsilon > 0$ est donné par équivalence de normes.

Remarque 12. 1. *Grâce au lemme 2, les contrôles (3.105) sont construits sur la solution à des moments antérieurs. Puisque γ_i et a_i sont constants, alors en raison de (3.116), les contrôles tendent vers zéro lorsque le temps évolue.*

2. *En notant $\nu^k = -\ln[(1 - \Theta^k)^{1/t_1}]$, on a :*

$$E(t_{k+1}) \leq E(t_k) \exp(-\nu^k t_1).$$

Par conséquent, en définissant $\mu^k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \nu^j$, nous obtenons

$$E(t_k) \leq E(0) \exp(-\mu^k t_k). \quad (3.117)$$

Ainsi, les fonctions θ peuvent être considérées comme des taux de stabilisation pour la diminution exponentielle. Plus ils sont proches de 1, plus la diminution exponentielle est rapide.

Preuve du théorème 10

Nous donnons la preuve du Théorème 10 en s'appuyant sur le Théorème 9. Nous utilisons la même démarche que celle utilisée pour prouver le théorème 6 du chapitre 2.

Puisque $(\hat{h}_i^0, \hat{q}_i^0) \in (L^2([0, L_i]))^2$ et sachant que $C^0(]0, L_i[)$, ensemble des fonctions continues par morceaux dans $]0, L_i[$, est dense dans $L^2([0, L_i])$ il existe alors des suites $(\hat{h}_{i,n})_{n \geq 0} \subset C^0([0, L_i])$ et $(\hat{q}_{i,n})_{n \geq 0} \subset C^0([0, L_i])$ telles que :

$$\hat{h}_{i,n}^0 \longrightarrow \hat{h}_i^0 \text{ et } \hat{q}_{i,n}^0 \longrightarrow \hat{q}_i^0 \text{ dans } L^2([0, L_i]), \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Avec le couple $(\hat{h}_{i,n}^0, \hat{q}_{i,n}^0)$ pour tout $n \geq 0$, nous considérons le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}_{i,n}}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_{i,n}}{\partial x} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}_{i,n}}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}_{i,n}}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_{i,n}}{\partial x} = 0, \\ (c) \quad \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{q}_{i,n}(t, x_i) = 0 \text{ en } M \\ (d) \quad \hat{S}_{1,n} = \hat{S}_{j,n}, \quad j = 2, 3 ; \quad \hat{S}_{i,n} = \gamma_i \hat{h}_{i,n}(t, x_i) + \beta_i \hat{q}_{i,n}(t, x_i) \end{array} \right. \quad (3.118)$$

de conditions initiales :

$$\hat{h}_{i,n}(0, x) = \hat{h}_{i,n}^0(x), \quad \hat{q}_{i,n}(0, x) = \hat{q}_{i,n}^0(x) \quad (3.119)$$

avec les conditions aux limites :

$$\hat{q}_{1,n}(t, 0) = \hat{q}_{1,0,n}(t), \quad \hat{q}_{2,n}(t, L_2) = \hat{q}_{2,L_2,n}(t), \quad \hat{q}_{3,n}(t, L_3) = \hat{q}_{3,L_3,n}(t). \quad (3.120)$$

Nous définissons $\hat{q}_{1,0,n}$, $\hat{q}_{2,L_2,n}$ et $\hat{q}_{3,L_3,n}$ comme dans (3.105) où $\hat{q}_{1,0}$, \hat{q}_{2,L_2} et \hat{q}_{3,L_3} sont remplacés respectivement par $\hat{q}_{1,0,n}$, $\hat{q}_{2,L_2,n}$ et $\hat{q}_{3,L_3,n}$.

Pour tout $n \geq 0$, $(\hat{h}_{i,n}, \hat{q}_{i,n})$ satisfait alors la formulation faible (3.80), (3.84).

On obtient l'estimation d'énergie en remplaçant (\hat{h}_i, \hat{q}_i) dans (3.108) du théorème 9 par $(\hat{h}_{i,n}, \hat{q}_{i,n})$

$$E^n(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k) E^n(t_k),$$

donc :

$$E^n(t_{k+1}) \leq \prod_{i=0}^k (1 - \Theta^i) E^n(0), \quad (3.121)$$

où Θ^k sont définis dans (3.108) et t_k sont définis dans (3.107) avec :

$$E^n(t) = \left\| \sqrt{l \rho_i} \hat{h}_{i,n}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \hat{q}_{i,n}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 = \int_0^{L_i} \left(l \rho_i \hat{h}_{i,n}^2(t) + \hat{q}_{i,n}^2(t) \right) dx.$$

Nous pouvons écrire (3.118 - a) et (3.118 - b) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} l_i \hat{h}_{i,n} \\ \hat{q}_{i,n} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \hat{q}_{i,n} \\ \sigma_i \hat{q}_{i,n} + \rho_i \hat{h}_{i,n} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.122)$$

Par conséquent de (3.121) et (3.122) on a :

$$\begin{pmatrix} l_i \hat{h}_{i,n} \\ \hat{q}_{i,n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_{i,n} \\ \sigma_i \hat{q}_{i,n} + \rho_i \hat{h}_{i,n} \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q_i), \quad (3.123)$$

et sont bornées dans $H(\text{div}, Q_i)$.

$L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ est un espace de Banach réflexif pour tous $T > 0$, il existe des sous-suites $(\hat{h}_{i,\alpha(n)}, \hat{q}_{i,\beta(n)})$ de $(\hat{h}_{i,n}, \hat{q}_{i,n})$ convergeant faiblement vers (\hat{h}_i, \hat{q}_i) dans $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ (voir [11]).

De plus, par passage à la limite, (\hat{h}_i, \hat{q}_i) satisfait le système linéaire (3.36), la condition initiale (3.37) et les conditions aux limites (3.38).

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} l_i \hat{h}_{i,n} \\ \hat{q}_{i,n} \end{pmatrix} \rightharpoonup \begin{pmatrix} l_i \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_{i,n} \\ \sigma_i \hat{q}_{i,n} + \rho_i \hat{h}_{i,n} \end{pmatrix} \rightharpoonup \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \sigma_i \hat{q}_i + \rho_i \hat{h}_i \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} l_i \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_i \\ \sigma \hat{q}_i + \rho_i \hat{h}_i \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q_i). \quad (3.125)$$

Puisque $E(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E^n(t)$, (3.116) est obtenu à partir de (3.121) et la preuve du Théorème 10 est terminée. \square

Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques. Tout d'abord, nous considérons le cas d'un canal unique et ensuite nous traitons le cas du réseau. Dans les deux cas, une méthode de volume fini d'ordre élevé est utilisée pour résoudre numériquement les modèles linéaires ou non linéaires. Les équations hyperboliques sont discrétisées de manière usuelle par la méthode des volumes finis.

4.1 Méthodes des volumes finis : Cas mono dimensionnel

Considérons une loi de conservation 1D :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u dx + \int \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = 0 \quad (4.1)$$

Où u est une grandeur physique fonction de la variable d'espace x et du temps t et $f(u)$ est une fonction de u .

Le domaine de calcul est divisé en N mailles ou cellules de centre x_i avec :

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}; \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

Chaque maille C_i a une taille $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Les indices demi-entier désignent les interfaces de la maille avec les mailles voisines (voir Figure 4.1).

Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . La fonction u est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la

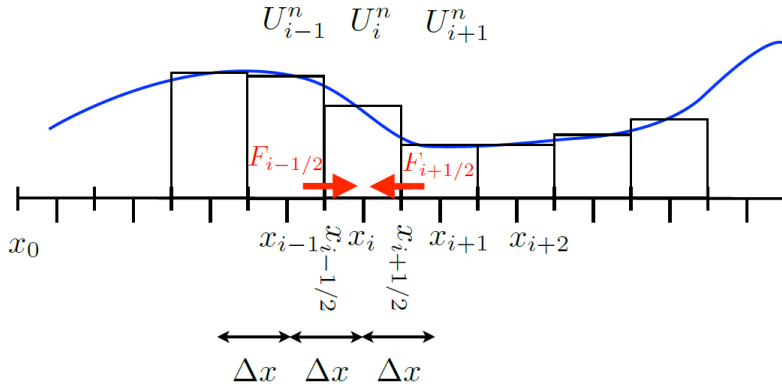


FIGURE 4.1 – Maillage 1D

moyenne. Notons u_i^n cette valeur moyenne dans la $i^{\text{ème}}$ maille de centre x_i , à l'instant $t = n\Delta t$. Ainsi :

$$\forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \text{ et } t = n\Delta t, \quad u(x, t) = u_i^n. \quad (4.3)$$

Souvent, cette valeur approchée de la moyenne est la valeur de la fonction u au centre x_i de la maille, on parle alors de Volumes Finis Cell-Centered (et dans ce cas, $u_i^n = u(x_i, t)$).

Le discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille la loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{maille}} u dx + \int_{\text{maille}} \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = 0. \quad (4.4)$$

Soit pour la $i^{\text{ème}}$ maille de centre x_i , au temps $t = n\Delta t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = 0. \quad (4.5)$$

Ce qui s'intègre comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i-1/2}, t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Puisque [11] :

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx \quad (4.7)$$

$$F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i-1/2}, t)) dt. \quad (4.8)$$

on obtient de (4.6) l'égalité

$$\Delta x(u_i^{n+1} - u_i^n) + \Delta t(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) = 0 \quad (4.9)$$

La quantité $F_{i-1/2}^n$ désigne une approximation du flux $f(u)$ à l'interface $x_{i-1/2}$ et au temps $n\Delta t$. C'est le flux numérique au point $x_{i-1/2}$. Ce flux numérique s'évalue en fonction des valeurs moyennes de u dans les mailles voisines, ce qui détermine le schéma numérique.

Une méthode d'Euler explicite est utilisée pour évaluer la dérivée en temps (d'autres schémas peuvent être utilisés, par exemple le schéma de Runge-Kutta). La formulation discrétisée en Volumes Finis de la loi de conservation est ainsi :

$$\Delta x \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n = 0 \quad (4.10)$$

soit par réarrangement

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (4.11)$$

ou encore sous la forme

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n)); \quad n = 1, \dots, T_{max} \quad (4.12)$$

avec :

$$F_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n) \quad \text{et} \quad F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n); \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

Le schéma est explicite : on calcule les nouvelles valeurs U_i^{n+1} en fonction des anciennes valeurs U_i^n .

Il faut trouver une approximation de $F_{i-1/2}^n$.

4.1.1 Les conditions aux limites

Pour prendre en compte les conditions aux bords il faut ajouter des volumes appelées volumes fantômes [23]. L'ajout de ces volumes fantômes permettra de calculer les flux $F_{1/2}$ et $F_{N+1/2}$.

4.1.1.1 Les volumes fantômes

Prenons la convention suivante : le domaine de longueur L entre $x = 0$ et $x = L$ est découpée en N volumes de longueur $\Delta x = L/N$. Les cellules sont de longueur Δx , elles sont centrées en x_i , les faces sont en $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$. Le centre est en $x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2} = i\Delta x - \frac{\Delta x}{2}$.

La première cellule est en $i = 1$; sa face de gauche est en $x = 0$, c'est aussi $x_{1/2}$, elle est centrée en $x_1 = \Delta x/2$. Sa face de droite est en $x_{3/2} = \Delta x$. La

dernière en $i = N$. Elle est centrée en $x_N = L - \Delta x/2$, sa face de droite est en $x_{N+1/2} = L$.

Nous allons rajouter des "cellules fantômes", ou "cellules fictives" pour écrire les conditions aux limites.

Nous en rajoutons une de part et d'autre du domaine, à gauche en $i = 0$, avant la cellule 1 et centrée en $x_0 = 0 - \frac{\Delta x}{2}$, et à droite en $i = N + 1$ après la cellule N et centrée en $x_{N+1} = L + \frac{\Delta x}{2}$.

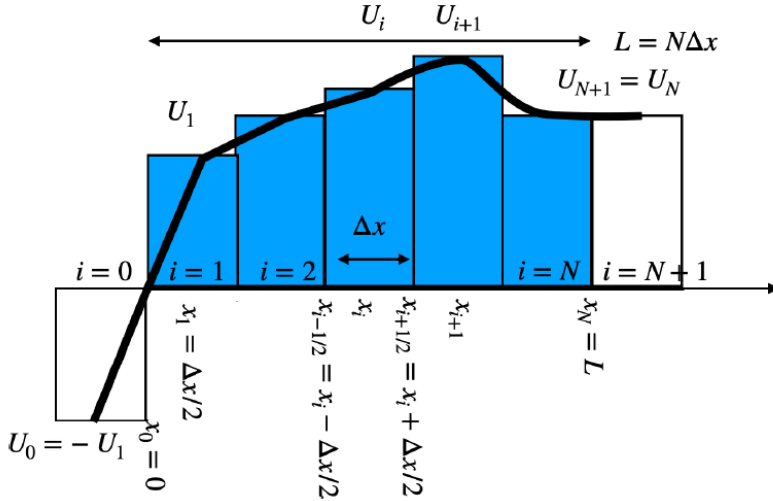


FIGURE 4.2 – Condition de Dirichlet nulle à gauche, en $x = 0$ et de Neumann nulle à droite en $x = L$, ajout de deux cellules supplémentaires, les cellules "fictives" ou "fantômes". A gauche on impose une valeur nulle en $x = 0$, donc la cellule fantôme a pour valeur $U_0 = -U_1$. A droite on impose un flux nul $\partial_x U = 0$ donc la cellule fantôme a pour valeur $U_{N+1} = U_N$.

4.1.1.2 Conditions de Dirichlet/ Neumann

Supposons que l'on veuille imposer en $x = 0$ la valeur U_{amont} (condition de Dirichlet) et en $x = L$ une dérivée f_N (condition de Neumann).

La position $x = 0$ est une face de gauche du premier volume, où la valeur est U_1 . On rajoute un volume fantôme. Ce volume est centrée en $x_0 = x_1 - \Delta x = \frac{\Delta x}{2}$. La valeur y est U_0 que nous cherchons à déterminer. On suppose une extrapolation linéaire entre U_1 et U_0 de manière à ce que la face en $x = 0$ ait la valeur U_{amont} :

$$U_{amont} = \frac{U_0 + U_1}{2} \quad \text{ou} \quad U_0 = 2U_{amont} - U_1. \quad (4.14)$$

Par exemple si $U_{amont} = 0$, alors il faut donner $U_0 = -U_1$ comme valeur à la cellule fantôme.

Si on veut donner une dérivée, par exemple en $x = L$, $\partial_x U = f_N$, alors

$$f_N = \frac{U_{N+1} - U_N}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad U_{N+1} = U_N + f_N \Delta x. \quad (4.15)$$

Par exemple si $f_N = 0$ (cas d'une sortie libre), alors il faut donner $U_{N+1} = U_N$ comme valeur à la cellule fantôme.

De même si on impose en $x = L$ la valeur U_{aval} (condition de Dirichlet), alors

$$U_{aval} = \frac{U_{N+1} + U_N}{2} \quad \text{ou} \quad U_{N+1} = 2U_{aval} - U_N. \quad (4.16)$$

Par convention : $x_{1/2} = x_0 = 0$ et $x_{N+1/2} = x_{N+1} = L$.

4.2 Résultats numériques pour un seul canal

4.2.1 Cas linéaire

4.2.1.1 Les données du canal

Pour les simulations, réalisées sous Python, nous illustrons la méthode de conception de contrôle sur un canal de longueur $L = 50\text{m}$ et de largeur $l = 1\text{m}$.

4.2.1.2 L'état d'équilibre

Nous prenons comme état d'équilibre $\bar{q}(x) = 1,5\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\bar{h}(x) = 1\text{m}$.

4.2.1.3 Système linéaire à discrétiser

Dans cette section nous allons appliquer la méthode des volumes finis au système linéaire 2.16 :

$$\begin{cases} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

du chapitre 2.

Nous pouvons présenter ce système sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0.$$

où

$$U = \begin{pmatrix} \hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix} \text{ et } f(U) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{q}}{l} \\ \sigma\hat{q} + \rho\hat{h} \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous permet d'écrire (4.11) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (4.17)$$

Nous considérons de ce fait le flux de Rusanov qui est un flux dépendants des valeurs propres du système [22] :

$$F_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n) = \frac{1}{2} (f(U_{i-1}) + f(U_i)) - \frac{c}{2} (U_i^n - U_{i-1}^n) \quad (4.18)$$

ou tel qu'il sera codé

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{1}{2} (f(U_G) + f(U_D)) - \frac{c}{2} (U_D - U_G) \quad (4.19)$$

avec

$$c = \sup_{U=U_G, U_D} \left(\sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)| \right). \quad (4.20)$$

Pour le flux de Rusanov (Lax Friedrich) la condition de stabilité de type CFL est :

$$CFL = \frac{\max(|\lambda_j|) dt}{dx} = \frac{c dt}{dx} \leq 1 \quad (4.21)$$

Les paramètres du système

On rappelle que (2.17)

$$\sigma = 2 \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ et } \rho = g l \bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{l\bar{h}^2} = l |\lambda_1| \lambda_2$$

avec les valeurs propres λ_1 et λ_2 données en (2.21)

$$\lambda_1 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} - \sqrt{g\bar{h}} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}.$$

Condition initiale du système linéaire

La condition initiale (2.18) et (2.9) est :

$$\hat{h}(0, x) = \hat{h}^0(x) = h^0(x) - \bar{h}(x) \text{ et } \hat{q}(0, x) = \hat{q}^0(x) = q^0(x) - \bar{q}(x).$$

avec comme données :

$$h(0, x) = 2\text{m} \text{ et } q(0, x) = 1,5\text{m}^3.\text{s}^{-1}. \quad (4.22)$$

Par différence on obtient :

$$U_i^0 = \begin{pmatrix} 1\text{m} \\ 1\text{m}^3.\text{s}^{-1} \end{pmatrix}; \quad i = 1, \dots, N \quad (4.23)$$

Condition aux bords du système linéaire ou contrôles

Les conditions aux limites (2.19) sont

$$\hat{q}(t, 0) = \hat{q}_0(t), \quad \text{et} \quad \hat{q}(t, L) = \hat{q}_L(t).$$

Les contrôles $\hat{q}_0(t)$ et $\hat{q}_L(t)$ sont définis par (voir (2.56))

$$\begin{aligned} \text{contrôle}_{aval} = \hat{q}_L(t) &= -\frac{\rho c_2(t)}{2al} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right) \quad \text{et} \\ \text{contrôle}_{amont} = \hat{q}_0(t) &= \frac{\rho c_1(t)}{2al} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

où :

$$c_1(\tau_2) = \begin{cases} w_1(0, x_0) ; & x_0 = |\lambda_1| \tau_2, & \tau_2 \in]0, L/|\lambda_1|], \\ w_1(\tau_2 - L/|\lambda_1|, L), & & \tau_2 \geq L/|\lambda_1|, \end{cases}$$

$$c_2(\tau_1) = \begin{cases} w_2(0, y_0) ; & y_0 = L - \lambda_2 \tau_1, & \tau_1 \in]0, L/\lambda_2], \\ w_2(\tau_1 - L/\lambda_2, 0), & & \tau_1 \geq L/\lambda_2. \end{cases}$$

$$\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]0, 1]$$

et

$$a = \frac{1}{2}(\lambda_2 + |\lambda_1|).$$

4.2.1.4 Résultats numériques

Nous avons les résultats suivant pour le modèle linéaire du canal :

- Pour la hauteur (Figure 4.3)

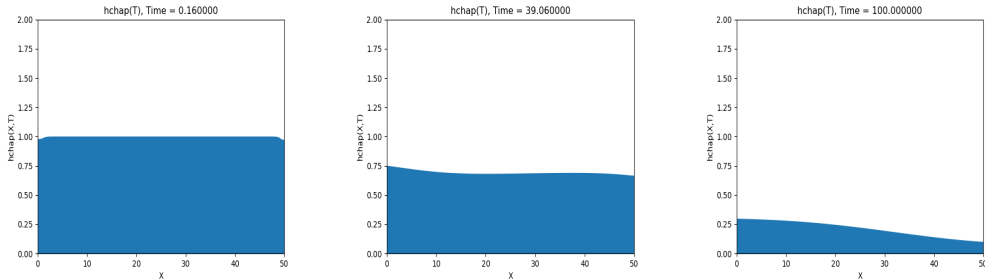


FIGURE 4.3 – Évolution de la hauteur du modèle linéaire

- ★ On constate la baisse du niveau d'eau dans le canal. Cela est due à l'action des contrôles en amont et en aval qui font sortir l'eau simultanément. Avec l'action des contrôles, des ondes se déplacent dans les deux sens et modifient à chaque instant les débits dans le canal entraînant ainsi la baisse du niveau d'eau.
- Pour l'énergie (Figure 4.4)

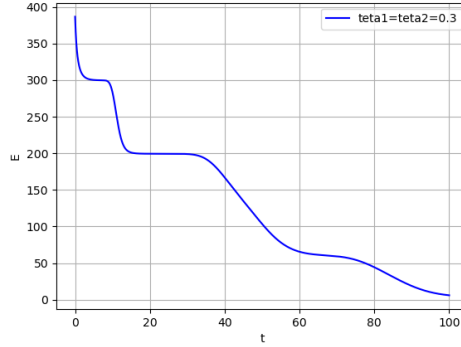


FIGURE 4.4 – Évolution de l'énergie du modèle linéaire

- ★ L'énergie décroît et tend vers zéro quand le temps est suffisamment grand.

4.2.2 Cas non linéaire

Pour le cas non linéaire (2.3) est le système à discrétiser. Puisqu'il s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, & x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + glh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = 0 ; & x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \end{cases}$$

nous posons :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \text{ et } f(U) = \begin{pmatrix} \frac{q}{l} \\ \frac{glh^2}{2} + \frac{q^2}{lh} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons également par la méthode des volumes finis :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \text{ pour } i = 1, \dots, N$$

avec :

$$F_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n) = \frac{1}{2} (f(U_{i-1}) + f(U_i)) - \frac{c}{2} (U_i^n - U_{i-1}^n)$$

Avec les mêmes données :

$$h(0, x) = 2\text{m} \text{ et } q(0, x) = 1,5\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.25)$$

nous avons aussi les résultats numériques suivant :

- Pour la hauteur (Figure 4.5)

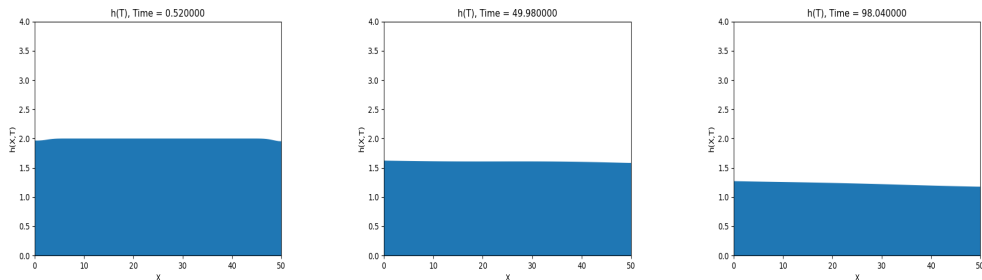


FIGURE 4.5 – Évolution de la hauteur du modèle non linéaire

- ★ On constate aussi la baisse du niveau d'eau dans le canal vers l'état stationnaire.
- Pour l'énergie (Figure 4.6)

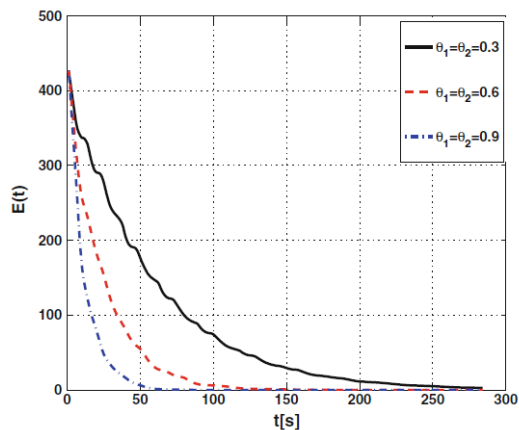


FIGURE 4.6 – Évolution de l'énergie pour différentes valeurs de θ

- ★ En se référant à l'article [14] nous avons la figure suivante pour différentes valeurs de θ concernant le modèle non linéaire. Cette figure représente l'évolution de l'énergie pour différentes valeurs de θ . Plus les θ sont élevés plus la décroissance exponentielle de l'énergie est rapide.

4.3 Résultats numériques pour le réseau

4.3.1 Les données du réseau

Pour un exemple de simulation, nous considérons un réseau où :
 $L_1 = 30\text{m}$; $L_2 = 40\text{m}$; $L_3 = 50\text{m}$ et $l_1 = l_2 = l_3 = 1\text{m}$. Le réseau est dans un champ de pesanteur d'intensité $g = 9.81 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.

4.3.2 État d'équilibre du réseau

Pour l'état stationnaire, nous donnons $\bar{q}_{1,0} = 1, 5\text{m}^3.\text{s}^{-1}$, $\bar{q}_{2,L_2} = 1\text{m}^3.\text{s}^{-1}$, $\bar{h}_{3,L_3} = 1\text{m}$ et dérivons $(\bar{h}_1(x), \bar{q}_1(x))$, $(\bar{h}_2(x), \bar{q}_2(x))$ et $(\bar{h}_3(x), \bar{q}_3(x))$ en résolvant le système en régime permanent (3.18).

4.3.3 Système linéaire à discrétiser

Dans cette section nous allons appliquer la méthode des volumes finis au système linéaire (3.36) du chapitre 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L_i] ; \quad i = 1, 2, 3 \\ (b) \quad \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ (c) \quad \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0 \quad \text{en } M \\ (d) \quad \hat{S}_1 = \hat{S}_j, \quad j = 2, 3 ; \quad \hat{S}_i = \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) + \beta_i \hat{q}_i(t, x_i) \end{array} \right.$$

où :

- $\sigma_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} = \lambda_{i2} - |\lambda_{i1}|$ et $\rho_i = l_i |\lambda_{i1}| \lambda_{i2}$ (voir 3.42)
avec $\lambda_{i1} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} - \sqrt{g \bar{h}_i}$ et $\lambda_{i2} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} + \sqrt{g \bar{h}_i}$ (voir 3.44 et 3.45) ;
- $\beta_i = \frac{1}{2} \delta_i \sigma_i$ et $\gamma_i = \delta_i \rho_i$ avec $\delta_i = \frac{1}{l_i \bar{h}_i}$ (voir 3.34).

Nous pouvons présenter (3.36.a-b) sous la forme :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial f(U_i)}{\partial x} = 0 \quad (4.26)$$

où :

$$U_i = \begin{pmatrix} \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(U_i) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{q}_i}{l_i} \\ \sigma_i \hat{q}_i + \rho_i \hat{h}_i \end{pmatrix}.$$

En se référant à l'article exploité [14] nous avons la figure suivante pour différentes valeurs de θ concernant le modèle non linéaire du réseau. Cette

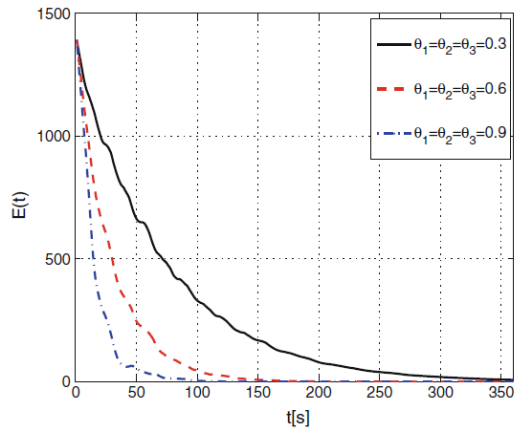


FIGURE 4.7 – Évolution de l'énergie pour différentes valeurs de θ

figure représente l'évolution de l'énergie pour différentes valeurs de θ .

De même plus les θ sont élevés plus la décroissance exponentielle de l'énergie est rapide.

Conclusion

Pour le canal unique et le réseau, de grandes perturbations ont été considérées afin d'étudier la robustesse et la flexibilité de la méthode de contrôle. Des perturbations plus petites ont été également testées avec les mêmes fonctions θ . Dans tous les cas, la même forme de décroissance de l'énergie est presque remarquée. L'amplitude du contrôle dépend de l'ampleur des perturbations et du choix des θ . Plus de calculs, avec différentes perturbations, ont été effectués et dans tous les cas les contrôles ont permis d'obtenir l'état stationnaire. Un choix différent de taille de pas spatial a également montré que la solution de la méthode numérique converge.

Les expériences numériques montrent que ces contrôles conduisent à la stabilité du modèle linéaire même lorsque de grandes perturbations sont considérées.

Nous avons appliqué aussi les contrôles au modèle réel non linéaire. Les résultats numériques montrent le comportement du niveau et du débit d'eau pour différents choix de contrôles. Ils montrent également la robustesse de la méthode puisque les contrôles marchent même avec de grandes perturbations. Elle marche même pour des réseaux plus complexes

Cependant nous n'avons pas tenté une comparaison avec d'autres méthodes. Il serait donc très intéressant de faire cette comparaison.

Bibliographie

- [1] *Malaterre PO, RogeDC(1998) Classification of canal... - Google Scholar.*
- [2] O Balogun, M Hubbard, and JJ De Vries. Automatic control of canal flow using linear quadratic regulator theory. *J Hydraul Eng*, 114(1) :75–102, 1988.
- [3] Georges Bastin, Alexandre M. Bayen, CIRO D’Apice, Xavier Litrico, and Benedetto Piccoli. Open problems and research perspectives for irrigation channels. *Netw. Heterog. Media*, 4(2), 2009.
- [4] Georges Bastin and Jean-Michel Coron. *Stability and boundary stabilization of 1-d hyperbolic systems*, volume 88. Springer, 2016.
- [5] Georges Bastin, Jean-Michel Coron, and Brigitte d’Andréa Novel. On Lyapunov stability of linearised Saint-Venant equations for a sloping channel. *NHM*, 4(2) :177–187, 2009.
- [6] Dalila BENAMIROUCHE and Hamza MAHDAOUI. *Résolution numérique des équations de Saint Venant 1D par la méthode des différences finies*. Mémoire de fin d’études, Université A. MIRA – BEJAIA, 2014.
- [7] Mei-Ling Chen, Didier Georges, and Laurent Lefevre. Infinite dimensional LQ control of an open-channel hydraulic system. In *The 4th Asian control conference*, 2002.
- [8] Jonathan de Halleux, Christophe Prieur, J.-M. Coron, Brigitte d’Andréa Novel, and Georges Bastin. Boundary feedback control in networks of open channels. *Automatica*, 39(8) :1365–1376, 2003.
- [9] Valérie Dos Santos, Georges Bastin, J.-M. Coron, and Brigitte d’Andréa Novel. Boundary control with integral action for hyperbolic systems of conservation laws : Stability and experiments. *Automatica*, 44(5) :1310–1318, 2008.
- [10] Thierry Gallouët and Raphael Herbin. *Equations aux dérivées partielles*. 2015.

- [11] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] Eric Goncalves. Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO. *Institut national polytechnique de Grenoble*, 2005.
- [13] M. S. Goudiaby, A. Sene, and G. Kreiss. *An algebraic approach for controlling cascade of reaches in irrigation canal. Types, Sources and Problems*. InTech.
- [14] Mouhamadou Samsidy Goudiaby, Abdou Sene, and Gunilla Kreiss. A delayed feedback control for network of open canals. *International Journal of Dynamics and Control*, 1(4) :316–329, 2013.
- [15] Qilong Gu. Exact boundary controllability of unsteady supercritical flows in a tree-like network of open canals. *Mathematical methods in the applied sciences*, 31(12) :1497–1508, 2008.
- [16] Qilong Gu and Tatsien Li. Exact boundary observability of unsteady flows in a tree-like network of open canals. *Mathematical methods in the applied sciences*, 32(4) :395–418, 2009.
- [17] Qilong Gu and Tatsien Li. Exact boundary controllability of nodal profile for unsteady flows on a tree-like network of open canals. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 99(1) :86–105, 2013.
- [18] M Gugat, M Dick, and G Leugering. Stabilization of the gas flow in star-shaped networks by feedback controls with varying delay. *Syst Model Optim IFIP Adv Inf Commun Technol*, 391(4) :255–265, 2013.
- [19] Martin Gugat and Markus Dick. Time-delayed boundary feedback stabilization of the isothermal Euler equations with friction. *Mathematical Control & Related Fields*, 1(4) :469, 2011.
- [20] Martin Gugat, Markus Dick, and Günter Leugering. Stabilization of the gas flow in star-shaped networks by feedback controls with varying delay. In *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, pages 255–265. Springer, 2011.
- [21] Martin Gugat, Günter Leugering, and EJP Georg Schmidt. Global controllability between steady supercritical flows in channel networks. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 27(7) :781–802, 2004.
- [22] P. Y. Lagrée. Résolution numérique des équations de Saint-Venant, mise en oeuvre en volumes finis bien balancés. 2014. Publisher : Citeseer.
- [23] P. Y. Lagrée. Résolution numérique des équations de Saint-Venant, mise en oeuvre en volumes finis par un solveur de Riemann bien balancé. 2020.
- [24] Guenter Leugering and JP Georg Schmidt. On the modelling and stabilization of flows in networks of open canals. *SIAM journal on control and optimization*, 41(1) :164–180, 2002.

- [25] Randall J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002.
- [26] Tatsien Li. Exact boundary controllability of unsteady flows in a network of open canals. *Mathematische Nachrichten*, 278(3) :278–289, 2005.
- [27] Xiaodong Li. *Observation et commande de quelques systèmes à paramètres distribués*. PhD Thesis, 2009.
- [28] C. E. N. Li-Hui and X. I. Yu-Geng. Stability of boundary feedback control based on weighted Lyapunov function in networks of open channels. *Acta Automatica Sinica*, 35(1) :97–102, 2009.
- [29] Xavier Litrico. Robust flow control of single input multiple outputs regulated rivers. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 127(5) :281–286, 2001.
- [30] Xavier Litrico and V. Fromion. H/sub/spl infin//control of an irrigation canal pool with a mixed control politics. 2006.
- [31] Pierre Olivier Malaterre. PILOTE : Linear quadratic optimal controller for irrigation canals. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 124(4) :187–194, 1998.
- [32] Rajeev Misra, MS Mohan Kumar, and K. Sridharan. Analysis of transients in a canal network. *Sadhana*, 16(1) :85–99, 1991.
- [33] Mariama NDIAYE and Georges BASTIN. Commande frontière adaptative d’un bief de canal avec prélèvements inconnus. *Journal européen des systèmes automatisés*, 38(3-4) :347–371, 2004.
- [34] AJC de Saint-Venant, D. Barré, J. Saint-Cyr, Venant de Saint, AJC SAINT-VENANT, AJC SAINT-VENANT, DE BARRÉ, and J. A. Saint-Cyr. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. 1871.
- [35] Abdou Sène, Bocar Amadou Wane, and Daniel Y. Le Roux. Control of irrigation channels with variable bathymetry and time dependent stabilization rate. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(19-20) :1119–1122, 2008.
- [36] Samuel Bowong Tsakou. Contribution à la stabilisation et stabilité des systèmes non linéaires : Applications à des systèmes mécaniques et épidémiologiques. page 185.
- [37] E LQ Weyer. control of irrigation channel. *Decis Control*, (1) :750–755, 2003.
- [38] Cheng-Zhong Xu and Gauthier Sallet. Proportional and integral regulation of irrigation canal systems governed by the St Venant equation. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2) :2274–2279, 1999.