Université Assane seck de Ziguinchor (U.A.S.Z)
U.F.R des Sciences et Technologies (UFR-ST)

Département de Mathématiques

Mémoire de master

Domaine :	Sciences et Technologies
Mention :	Mathématiques et Applications
Spécialité :	Mathématiques Appliquées
Option :	Probabilité

TITRE :

Estimation Paramétrique Des Équations Différentielles Stochastiques(EDS) dirigées par un Mouvement Brownien Sous-Fractionnaire .

Présenté par :

Ousmane Cisse

Année Académique 2018-2019

Avec la supervision de : Dr Clément Manga

Membres du jury :

PRESIDENT :

Alassane Diédhiou, Professeur Titulaire (UFR-ST/U.A.S.Z)

DIRECTEUR :

Clément Manga, Maître Assistant (UFR-ST/U.A.S.Z)

EXAMINATEURS :

Salomon Sambou, Professeur Titulaire (UFR-ST/U.A.S.Z)

Emmanuel Nicolas Cabral, Maître Assistant (UFR-ST/U.A.S.Z)
Soutenu le 18 février 2020.

Dédicace

Ce modeste mémoire est dédié à titre posthume, à ma grand-mère **Fatou Coly** et à mon oncle paternel **Mamoudou Cisse** récemment arrachés à notre affection qui ont beaucoup contribué à mon éducation et à ma réussite.
Que la lumière et la grâce de DIEU soient sur eux.

Remerciements

Je tiens à remercier l'Université Assane SECK, l'UFR des Sciences et Technologies, le Département de Mathématiques ainsi que tous les professeurs qui m'ont encadré lors de ce cursus universitaire.

Je remercie vivement mon encadreur **Dr.Clément Manga** par sa disponibilité, d'avoir stimulé en moi le goût de la recherche sur un sujet qui m'intéresse beaucoup et de m'avoir soutenu moralement, intellectuellement et matériellement. Malgré son manque de temps, il m'a toujours accordé l'attention qu'il faut au cours de cette étude.Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie également mon professeur **Alassane Diédhiou** de nous avoir fait l'honneur de présider cette soutenance malgré ses lourdes tâches administratives.

Je suis très honoré que le professeur **Salomon Sambou** et le docteur **Emmanuel Nicolas Cabral** aient accépté d'examiner ce travail.
Je les en remercie très vivement.

Mes vifs remerciements s'adressent également à mes très chers parents **Imam Elhaj Moussa Cisse** et **Fatou Sonko** qui n'ont jamais cessé de répondre à mes besoins et d'œuvrer à mon succès dans tous mes projets.

Je remercie particulièrement ma tante et tutrice **Oulimatou Diédhiou** d'avoir contribué d'une manière exceptionnelle au bon déroulement de mon cursus éducatif. Grâce à elle je suis arrivé à ce niveau jusqu'à pouvoir réaliser ce mémoire.

Je ne saurais terminer sans pour autant remercier les membres de ma famille qui sont toujours à mes cotés à chaque fois que besoin est nécessaire.
Merci à tous mes amis et condisciples ainsi que à tous et à toutes qui ont concouru à la réussite de ce travail.

Table des matières

Résumé

L'estimation paramétrique des équations différentielles stochastiques dirigées par les mouvements browniens sous-fractionnaires, ont été récemment examinés par Tudor[15] et Mendy[9].
Dans le cadre de mon mémoire, on se donne une équation différentielle stochastique définie par

$$X_t = \theta \int_0^t b(X_s)ds + S_t^H \tag{1}$$

dirigée par un mouvement browien sous-fractionnaire S_t^H où $H \in [0, 1]$ est le paramètre de Hurst avec $0 \leq t \leq T$. L'objecif majeur de ce travail consiste à déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ dans l'équation (1) .
L'étude applique la transformation de Girsanov au mouvement brownien sous-fractionnaire et utilise la théorie de la régularité et l'estimation du supremum pour le processus gaussien.

mots-clés : Mouvement Brownien Sous-Fractionnaire, Estimateur du Maximum de Vraisemblance, Théorème de Girsanov.

Introduction Générale

Présentation et problématique du sujet

Les développements récents du calcul stochastique pour engloutir le mouvement brownien fractionnaire ont conduit à de nombreuses applications à l'inférence statistique. En conséquence, de nombreux auteurs s'intéressent, actuellement, à l'étude des problèmes d'estimation des paramètres pour les processus de type diffusion satisfaisant les équations différentielles stochastiques conduites par le mouvement brownien fractionnaire. Parmi ceux-ci, citons les travaux de Prakasa Rao [13, 12], considéré comme pionnier pour cette méthode d'estimation. D'autres auteurs ont également étudié ces aspects, voir par exemple Comte [2], Norros et al. [11], Le Breton [8], Decreusefond et Üstünel [3], Kleptsyna et al. ([7], [6]), Tudor et al. [16]. Le cas de l'estimation des paramètres pour les équations stochastiques avec une feuille brownienne fractionnaire additive a été étudiée par Tudor et al. [14]. Une extension évidente de ce travail consiste à étudier le cas du mouvement brownien sous-fractionnaire. Des éléments de calcul stochastique couvrant le mouvement brownien sous-fractionnaire ont été récemment examinés par Tudor [15]. Les équations différentielles stochastiques conduites par un mouvement brownien sous-fractionnaire ont été également examinées par Mendy [9].

Ce travail de mémoire repose sur l'article de la reférence [3].

L'objectif majeur de cette étude est de construire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ dans l'équation différentielle stochastique (1) avec θ une dérive constante inconnue. Notre construction de l'estimateur est basée sur la transformation de Girsanov. Elle utilise la relation entre le mouvement brownien sous-fractionnaire et le mouvement brownien standard.

Elle fait appel à la théorie de la régularité et de l'estimation du supremum pour le processus gaussien.

Plan du travail

Le but de ce travail, est de construire l'estimateur du paramètre θ contenu dans l'équation différentielle stochastique (1) par la méthode du maximum de vraisemblance.
Pour cela, l'étude a été divisée en trois chapitres :

- Le premier chapitre sera une étude préliminaire sur les outils du calcul stochastique.
- Le deuxième chapitre sera consacré aux mouvements browniens fractionnaires, mouvements browniens sous-fractionnaires et leurs propriétés.
- le troisième chapitre portera sur l'étude de l'estimateur du paramètre θ.

Chapitre 1

Processus Stochastiques, Martingales et Mouvement Brownien

Dans ce chapitre, nous allons définir certaines notions de base en probabilité. Nous aurons également besoin de rappeler quelques résultats et propriétés sur les mouvements browniens standard et les martingales, mais aussi sur le calcul stochastique.

1.1 Processus Stochastiques

1.1.1 Filtration

Soient :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, où Ω est l'espace fondamental et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.
- (E, ε) un espace mesurable avec ε sa tribu.

Définition 1.1.1. *On appelle filtration toute famille croissante $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.*

1.1.2 Processus Stochastiques

Définition 1.1.2. *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $X = (X_t)_{t \in \mathbb{K}}$ définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans un autre espace mesurable (E, ε), et indicées par un paramètre $t \in \mathbb{K}$:*

$$\begin{aligned} X \ : \ & \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow E \\ & (t, \omega) \longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, $t \longmapsto X_t(\omega)$ s'appelle la trajéctoire associée à ω.
L'application $\omega \longmapsto X_t(\omega)$ avec $(t \in \mathbb{K})$ fixé est une variable

sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Le cas où $\mathbb{K} \subset \mathbb{Z}$*, le processus est dit discret, et celui où* $\mathbb{K} = [0, T]$*, avec* $T > 0$*, on a un processus continu et plus généralement si* $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^d$*, on parle de champ aléatoire.*

Définition 1.1.3. *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *est continu(respectivement continu à droite, continu à gauche), si* $\forall \omega \in \Omega$*, la trajectoire :*

$$t \longmapsto X_t$$

est continue(respectivement continu à droite, continu à gauche).

Définition 1.1.4. *Un processus* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *est adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$*, si pour tout* t*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable dans* (E, ε)*.*

1.1.3 Processus croissant

Définition 1.1.5. *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est un processus croissant si* $X_t = 0$ *et* $t \longmapsto X_t$ *est une fonction croissante, c'est-à-dire*

$$\forall t \leq s, X_t(\omega) \leq X_s(\omega), p.s.$$

Définition 1.1.6. *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation bornée sur* $[0, t]$ *si pour toute constante positive* K

$$\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq K,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

Définition 1.1.7. *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation finie sur* $[0, t]$ *si*

$$\sup_{t_i} \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| < +\infty,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.
Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie s'il est à variation finie sur $[0, t]$ pout tout t.

1.1.4 Loi d'un processus stochastique

La loi d'un processus stochastique est caractérisée par la donnée des lois fini-dimensionnelles. En fait, on parle de la loi du processus $(X_t, t \in \mathbb{R})$ lorsqu'on connait la loi du vecteur $(X_{t_1}, ..., X_{t_d})$ pour toute suite finie croissante de t_i, $i = 1, ..., d$.

Définition 1.1.8. *Un processus est dit gaussien si toutes ses lois finis dimensionnelles* $\mathcal{L}(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *sont gaussiennes (* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *,* $\forall\ t_1 < .... < t_n \in \mathbb{R}$ *).*
Autrement dit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est gaussien si toute combinaison linéaire* $a_1X_{t_1} + ... + a_nX_{t_n}$ *suit une loi gaussienne (pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$ *et* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$*).*

Définition 1.1.9. *Soit* X *et* Y *deux processus stochastiques.*

- *On dit que le processus* Y *est une modification du processus* X *si*

$$\forall\ t \in \mathbb{T},\ \mathbb{P}\Big(\{\omega; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}\Big) = 1.$$

- *On dit que les processus* X *et* Y *sont indistinguables si*

$$P\Big(\forall t \in \mathbb{T}; X_t = Y_t\Big) = 1.$$

Dans la suite, quand nous écrirons $X \overset{d}{=} Y$*, nous signifierons l'égalité de toutes les loi finies-dimensionnelles de* X *et de* Y*.*

Remarque 1.1.10. *Si* X *et* Y *sont indistinguables, alors* X *est une modification de* Y *mais si* Y *est une modification de* X *alors* X *et* Y *ne sont pas indistingables.*

1.2 Martingales

Définition 1.2.1. *Pour toute variable aléatoire réelle* X *positive(respectivement intégrable), et pour toute sous-tribu* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}$*, il existe une variable aléatoire* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$*, unique à égalité presque sure, positive (respectivement intégrable), telle que :*

(i) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ *est* $\mathcal{G}$*-mesurable ;*

(ii) pour tout $A \in \mathcal{G}$*,* $\mathbb{E}(1_AX) = \mathbb{E}\left(1_AE(X|\mathcal{G})\right)$*.*

La variable aléatoire $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ s'appelle l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$. Elle est définie à égalité presque sure.

On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$
On se met dans un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables.

Définition 1.2.2. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale si :*
(i) $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$
(ii) $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$ *presque surement(p.s) pour* $s \leq t$.
Si la condition (ii) est remplacée par $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$ *(respect* $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$*), on parle alors de sous-martingale(respect de sur-martingale).*

Un processus d-dimensionnel $X = (X_t^i, i = 1, ..., d, t \geq 0)$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale si chacune de ses composantes* $(X_t^i, t \geq 0)$, $i = 1, ..., d$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*
Si X *est une martingale telle que* $\mathbb{E}(|X_t^2|) < +\infty$ *pour tout* $t > 0$*, on dit que* X *est une martingale de carré intégrable.*

On déduit de cette définition que si X_t est une martingale, alors

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) \ \forall\ t > 0.$$

Définition 1.2.3. *Un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une semi-martingale continue s'il s'écrit sous la forme :*

$$X_t = M_t + A_t$$

où M *est une martingale (nulle en* $t = 0$*) et* A *est un processus à variation finie.*

Définition 1.2.4. *Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \longmapsto [0, +\infty[$ *est un temps d'arrêt(relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$*) ou* $\mathcal{F}_t$*-temps d'arrêt, si* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \geq 0$.

Théorème 1.2.5. *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une martingale (continue à droite).*
Soient τ_1 *et* τ_2 *deux temps d'arrêts bornés par une constante* K *(c'est-à-dire tels que* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$*). Alors* X_{τ_2} *est intégrable(* $\mathbb{E}(|X_{\tau_2}|) < +\infty$*) et* $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$ *p.s .*

Les processus gaussiens les plus célèbres sont les mouvement browniens et les mouvement browniens fractionnaires.

1.3 Mouvement brownien

Le mouvement brownien est la description mathématique de la trajectoire aléatoire d'une particule dans un fluide, c'est à dire soumise à l'échelle atomique à des chocs avec d'autres particules. Cette description ne peut donc se faire que de manière probabiliste. Le premier à l'avoir mis en évidence est le botaniste Robert Brown en 1827. Il a ensuite été défini rigoureusement par Louis Bachelier en 1900. De grands scientifiques ont travaillé dessus au $XX^{\text{ème}}$ siècle, comme Paley, Zygmund, Wiener ou encore Einstein. Il possède de nombreuses propriétés intéressantes, et sert notamment à poser et résoudre des EDS, qui sont importantes dans de nombreux domaines : physique, biologie, écologie, finance...

Définition 1.3.1. *Une variable aléatoire* $X = (X_1, ..., X_d)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$
est un vecteur gaussien, si pour tous réels $a_1, ..., a_d$*, la variable aléatoire réelle* $\sum_{i=1}^d a_i X_i$ *est une gaussienne.*

Définition 1.3.2. *Le processus* X *est un processus gaussien si chaque famille finie* $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ *est un vecteur gaussien.*

Définition 1.3.3. *On appelle mouvement brownien standard, un processus* $(W_t)_{t\geq 0}$
tel que :
- Les trajectoires $t \mapsto W_t$ *sont p.s continues sur* $\mathbb{R}_+$.
- $W_0 = 0$ *p.s .*
- Pour tout $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ *est une variable gaussienne* $\mathcal{N}(0, t-s)$ *indépendante de la tribu* $\mathcal{F}_s$ *engendrée par* $\{W_u, u \leq s\}$.

On l'appelle aussi processus de Wiener.

Définition 1.3.4. *On dit que (X_t) est un processus de Markov à valeurs dans E si, pour tout $s < t$, et pour toute fonction borélienne bornée f de E dans $\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}(f(X_t)/\mathcal{F}_s^{(X)}) = \mathbb{E}(f(X_t)/X_s)$$

Propriété 1.3.5. *(Propriété de Markov) La propriété de Markov du mouvement brownien est utilisée sous la forme suivante : pour tout s, le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ définie par : $Z_t = W_{t+s} - W_t$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.*

Théorème 1.3.6. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien et si $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ alors $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Démonstration. Soit $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, alors le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, X_{t_1-t_2}, ..., X_{t_{n+1}-t_n})$ est composé de variables aléatoires gaussiennes et indépendantes (d'après la définition du mouvement brownien), ce vecteur donc est un vecteur gaussien. Il en est donc de même pour $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$

□

Proposition 1.3.7. *W_t est un processus gaussien dont la fonction de covariance est :*

$$\rho(s,t) = s \wedge t$$

Démonstration. Soit $s \leq t$ on a :
$\rho(s,t) = Cov(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) - \mathbb{E}(W_t)E(W_s)$

Comme W_t suit une loi gaussienne centrée ($\mathbb{E}(W_t) = 0$) donc

$$\rho(s,t) = \mathbb{E}(W_t W_s + W_s^2 - W_s^2) = \mathbb{E}(W_s^2) + \mathbb{E}\Big(W_s(W_t - W_s)\Big)$$

Pour $s \leq t$ on utilise l'indépendance , et l'évolution $W_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$
Nous obtenons la valeur :

$$\rho(s,t) = \mathbb{E}(W_s^2) + \mathbb{E}(W_s)\mathbb{E}(W_t - W_s) = \mathbb{E}(W_s^2) = s$$

□

Définition 1.3.8. *Un processus est X dit :*

– à accroissements indépendants si pour tous $0 < t_1 < ... < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

– *à accroissements stationnaires si la loi des accroissements* $X_{t+h} - X_t$ *ne dépend pas de* $t > 0$, *ie* $X_{t+h} - X_t \stackrel{d}{=} X_h$.

- *auto-similaire si pour tout* $\alpha > 0$, *il existe* $\beta > 0$ *tel que*

$$X_{\alpha t} \stackrel{d}{=} \beta X_t, \forall t \in \mathbb{R}$$

Remarque 1.3.9. *Pour* $\beta = \alpha^H$, *on dit que* X *est auto-similaire d'indice* $0 < H < 1$ *et on écrit :*$\forall \alpha > 0$

$$X_{\alpha t} = \alpha^H X_t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

H *est le coefficient d'auto-similarité où bien le paramètre de Hurst.*

Propriété 1.3.10. *Le mouvement brownien standard* W *a les propriétés suivantes :*

-$W_0 = 0$.

-pour tout $t \geq 0$, W_t *suit une loi normale centré de variance* t.

-pour tout $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, *les variables aléatoires* W_{t_1},$W_{t_2} - W_{t_1}, ...$,$W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

-Propriété de symétrie :le processus $(-W_t)_{t \leq 0}$ *est aussi un mouvement brownien.*

-Stationnarité :Les accroissements du mouvement brownien sont stationnaires i.e $\forall$ $s \leq t$, $W_t - W_s$ *a même loi que* W_{t-s}.

-Auto-similarité : Pour tout $a > 0$, $\{a^{\frac{1}{2}} W_{at}\}$ *est un mouvement brownien.*

Proposition 1.3.11. *Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Alors les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t^W)$-martingales :*
-$(W_t)_{t\geq 0}$
-$(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$
-Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\left(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}\right)$.

Démonstration. Si $s \leq t$ alors $W_t - W_s$ est indépendante de la tribu $(\mathcal{F}_s)$.

Donc $\mathbb{E}\Big((W_t - W_s)/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}(W_t - W_s)$.
D'après la propriété de stationnarité du mouvement brownien standard, $W_t - W_s$ et W_{t-s} ont même loi.
Or W_{t-s} est centré donc

$$\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0.$$

On déduit que

$$\mathbb{E}\Big((W_t - W_s)/\mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}(W_t/\mathcal{F}_s) - W_s = 0$$

d'où le résultat

$$\mathbb{E}(W_t/\mathcal{F}_s) = W_s.$$

Pour démonter la deuxième assertion, remarquons que :

$$\mathbb{E}\Big((W_t^2 - W_s^2)/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big[\Big((W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s)\Big)/\mathcal{F}_s\Big].$$

Comme l'espérance conditionnelle est linéaire, on a :

$$\mathbb{E}\Big((W_t^2 - W_s^2)/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s)\Big) + 2W_s\mathbb{E}\Big((W_t - W_s)/\mathcal{F}_s\Big).$$

$(W_t)_{t\geq 0}$ étant un mouvement brownien alors

$$\mathbb{E}\Big((W_t - W_s)/\mathcal{F}_s\Big) = 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}\Big((W_t^2 - W_s^2)/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s\Big) \tag{1.1}$$

Comme les accroissements du mouvement brownien sont stationnaires, alors :

$$\mathbb{E}\Big((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(\Big(W_{t-s}^2\Big)/\mathcal{F}_s\Big)$$

Or $\left(W_{t-s}^2\right)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$, donc :

$$\mathbb{E}\Big((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(W_{t-s}^2\Big)$$

d'où

$$\mathbb{E}\Big((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s\Big) = t - s \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big((W_t^2 - t)/\mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}\Big((W_t^2 - t + W_s^2 - W_s^2 + s - s)/\mathcal{F}_s\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big((W_t^2 - W_s^2 + W_s^2 - s + s - t)/\mathcal{F}_s\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big((W_t^2 - W_s^2)/\mathcal{F}_s\Big) + \mathbb{E}\Big((W_s^2 - s)/\mathcal{F}_s\Big) + s - t
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$(W_s^2 - s)$ étant $\mathcal{F}_s$-mesurable et en tenant compte de l'expression (1.1).

On obtient :

$$\mathbb{E}\Big((W_t^2 - t)/\mathcal{F}_s\Big) = t - s + W_s^2 - s + s - t.$$

D'où $\mathbb{E}\Big((W_t^2 - t)/\mathcal{F}_s\Big) = W_s^2 - s$ si $s \leq t$.

Pour démontrer le dernier point, rappelons tout d'abord que si N est une gaussienne centrée réduite, on a :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda N}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \tag{1.4}$$

En éffet, soient N une gaussienne centrée réduite et f_N sa densité, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\lambda N}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} f_N(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2} + \lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2\lambda x)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\Big((x-\lambda)^2 - \lambda^2\Big)} dx \\
&= e^{\frac{\lambda^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} dx \\
&= e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} dx
\end{aligned} \tag{1.5}$$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}}$ est la densité d'une gaussienne $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\lambda, 1)$.
Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} dx = 1$$

D'où

$$\mathbb{E}(e^{\lambda N}) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

De plus, si $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t} / \mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t + \lambda W_s - \lambda W_s + \frac{\lambda^2}{2} s - \frac{\lambda^2}{2} s} / \mathcal{F}_s\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(e^{\lambda (W_t - W_s)} \times e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s} \times e^{-\frac{\lambda^2}{2} t + \frac{\lambda^2}{2} s} / \mathcal{F}_s\Big) \\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2} t + \frac{\lambda^2}{2} s} \mathbb{E}\Big(e^{\lambda (W_t - W_s)} \times e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s} / \mathcal{F}_s\Big)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s)$ étant $\mathcal{F}_s$-mesurable, on obtient :

$$\mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t} / \mathcal{F}_s\Big) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} t + \frac{\lambda^2}{2} s} \times e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s} \times \mathbb{E}\Big(e^{\lambda (W_t - W_s)} / \mathcal{F}_s\Big)$$

Comme les accroissements du mouvement brownien sont staionnaires *i.e* $W_t - W_s$ et W_{t-s} ont même loi alors :

$$\mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t} / \mathcal{F}_s\Big) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} t + \frac{\lambda^2}{2} s} \times e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s} \times \mathbb{E}\Big(e^{\lambda (W_{t-s})} / \mathcal{F}_s\Big).$$

W_{t-s} étant indépendante de $\mathcal{F}_s$, donc

$$\mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t} / \mathcal{F}_s\Big) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} t + \frac{\lambda^2}{2} s} \times e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s} \times \mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_{t-s}}\Big).$$

Comme $W_{t-s} \rightsquigarrow N(0, t-s)$, par analogie à l'expression (1.12) :

$$\mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_{t-s}}\Big) = e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t} / \mathcal{F}_s\Big) &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} t + \frac{\lambda^2}{2} s} \times e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \times e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s} \\
&= e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat énoncé. □

1.4 Intégrale Stochastique

Définition 1.4.1. *On dit que* $\{\theta_s, s \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $(\mathcal{F}_t^W)$*-adapté, continu à droite, limite à gauche et si*

$$\mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2 ds] < +\infty$$

pour tout $t > 0$ *avec* $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ *la filtration naturelle de* W_t.

On définit l'intégrale stochastique de θ *par rapport à* W *par*

$$I(\theta_t) = \int_0^t \theta_s dW_s$$

avec $(\theta_s, s \geq 0)$ *un processus stochastique et* W_s *un mouvement brownien .*
Pour que I *existe il faut que* $\theta_s \in M^2$ *avec*
M^2=$\{\theta$ *processus* $(\mathcal{F}_t^W)$*- adapté tel que* $\mathbb{E}\Big(\int_0^t \theta_s^2 ds\Big) < +\infty\}$.

Propriété 1.4.2. *- L'espérance et la variance sont données par*

$$\mathbb{E}\Big(I(\theta_t)\Big) = 0$$

$$Var[I(\theta_t)] = \mathbb{E}\Big(\int_0^t \theta_s^2 ds\Big)$$

- linéarité :

$$I_t(a_1\theta_1 + a_2\theta_2) = a_1 I(\theta_{1_t}) + a_2 I(\theta_{2_t})$$

- proprétés de martingale :
Pour tout bon processus θ*, les processus* $t \longmapsto I(\theta_t)$ *et* $t \longmapsto I^2(\theta_t) - \int_0^t \theta_s^2 ds$ *sont des* $\mathcal{F}_t^B$*- martingales continues.*

$$\mathbb{E}\Big(\Big(I(\theta_t) - I(\theta_s)\Big)^2 | \mathcal{F}_s^B\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_s^t \theta_u^2 du | \mathcal{F}_s^B\Big).$$

- propriété d'isométire :Pour tous bons processus φ, θ *et tout* $s, t \geq 0$*, on a*

$$\mathbb{E}\Big(I(\varphi_s) I(\theta_t)\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^{s\wedge t} \theta_u \varphi_u du\Big).$$

Le processus $I_t(\varphi)I_t(\theta) - \int_0^t \theta_u\varphi_u du$ *est une* $(\mathcal{F}_t^B)$*-martingale.*

Remarque 1.4.3. *Il est possible de définir* $I(\theta_t)$ *sous la seule condition :*

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty, p.s.$$

Cependant, $t \longmapsto I_t(\theta)$ *n'est plus nécessairement une martingale.*

Définition 1.4.4. *Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une filtration et $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté. On dit que X est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale s'il existe une suite croissante $\{\tau_n, n \geq 0\}$ de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que*

$$P[\tau_n \longrightarrow +\infty] = 1$$

et le processus $X^n : t \longmapsto X_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale pour tout $n \geq 0$.

Définition 1.4.5. *On dit que $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un bon processus local s'il est continu à droite, limite à gauche , $(\mathcal{F}_t^W)$-adapté, et si $\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty p.s$ pour tout $t > 0$.*

Soit θ un bon processus local. On peut définir $I(\theta_t)$ pour tout $t > 0$, qui est une martingale locale. De même, en prenant la même suite de temps d'arrêt, le processus

$$I^2(\theta_t) - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

est une martingale locale.

1.4.1 Le Crochet

Si Z est un martingale locale continue, $< Z >$ est l'unique processus croissant continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que $t \longmapsto Z_t^2 - < Z >_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.

Par polarité, on peut définir le crochet de deux $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales M et N en écrivant

$$< M, N >_t = \frac{1}{2}(< M + N >_t - < M >_t - < N >_t).$$

Le crochet $< M, N >$ est aussi l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - < M, N >$ soit une martingale locale.

Proposition 1.4.6. *Soient M et N deux martingales locales continues.*
Pour tout $t \geq 0$

$$< M, N >_t = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) p.s$$

où $\{t_i^n, i = 0.....2^n\}$ désigne une subdivision régulière sur $[0, t]$.

Le crocet d'une intégrale stochastique est défini par :

$$< I(\theta) >_t = \int_0^t \theta_s^2 ds \ \ et < I(\theta), I(\varphi) >_t = \int_0^t \theta_s \varphi_s ds$$

On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul, c'est-à-dire si leur produit est une martingale. Par exemple deux mouvements browniens indépendants sont des martingales orthogonales.

1.4.2 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques.
On appelle ce calcul "Calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

Définition 1.4.7. *On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, p.s$$

où

- X_0 *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable*
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* (H_t) *des processus* $\mathcal{F}_t$*-adaptés*
- $\int_0^t |K_s| ds < +\infty, p.s$ *et* $\int_0^t |H_s|^2 ds < +\infty, p.s$

K_t *est le drift et* H_t *est le coefficient de diffusion.*
Un processus d'Itô se décompose comme suit :

-une partie constante : X_0.

-une partie à variation finie :$\int_0^t K_s ds$.

-une partie martingale locale :$\int_0^t H_s dW_s$.

Théorème 1.4.8. *(représentation de Riez) Soit M une martingale locale continue, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et θ un processus local $\left(c\text{'est-à-dire } \int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty\right)$ tels que*

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s dW_s$$

Remarque 1.4.9. *Une martingale locale s'écrit comme la somme de son espérance et une intégrale stochastique :*

$$M_t = \mathbb{E}(M_t) + \int_0^t \theta_s dW_s.$$

Proposition 1.4.10. *Soit* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale continue telle que :*

$M_t = \int_0^t K_s ds$ *avec* $\int_0^t |K_s| ds < +\infty$

alors

$$\forall t \leq T, \mathbb{E}\Big(M_t\Big) = 0 p.s \tag{1.7}$$

Ceci entraîne que :

a) La décomposition d'un processus "d'Itô" est unique .Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s$$

alors $X_0 = X_0^{'}$ p.s, $H_s = H_s^{'}$ p.p et $K_s = K_s^{'}$ p.p

b) Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$ alors $K_t = 0$ p.p

1.4.3 Formule d'Itô

La formule d'Itô prend la forme suivante :

Théorème 1.4.11. *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

et f une fonction deux fois continument différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s) d < X, X >_s$$

où par définition :

$$< X, X >_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f^{'}(X_s) dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s) K_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s) H_s dW_s$$

De même si $(t, x) \longrightarrow f(t, x)$ *est une fonction deux fois différentiable en* x *et une fois différentiable en* t*,ces dérivées étant continues en* (t, x) $\Big($*on dit dans ce cas que f est de classe* $C^{1,2}$ $\Big)$*, on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, X_s) ds + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''} d < X, X >_s .$$

Avec

Crochet	dt	dW_t
dt	*0*	*0*
dW_t	*0*	dt

Proposition 1.4.12. *Pour tout* $t \geq 0$ *on a :*

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}\Big(W_t^2 - t\Big).$$

Démonstration. Soient $f(x) = x^2$ et $X_t = W_t$.

D'aprés la formule d'Itô, on a :

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f^{'}(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(W_s)d < X, X >_s \tag{1.8}$$

donc :

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$$

on obtient :

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s$$

Comme $\mathbb{E}\Big(\int_0^t W_s^2 ds\Big) < +\infty$, on retrouve le fait que $W_t^2 - t$ est une martingale.

Ainsi

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}\Big(W_t^2 - t\Big). \tag{1.9}$$

□

Proposition 1.4.13. *Soient* X_t *et* Y_t *deux processus d'Itô.*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s$$

alors on obtient :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t dY_t + \int_0^t Y_t dX_t + < X, Y >_t$$

avec la convention

$$< X, Y >_t = \int_0^t H_s H_s^{'} ds$$

Démonstration. D'après la formule d'Itô, en considérant $f(x) = x^2$, on obtient :

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)d(X_s + Y_s) + \int_0^t (H_s + H_s^{'})^2 ds \tag{1.10}$$

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds \tag{1.11}$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s^{'2} ds \tag{1.12}$$

D'où, en faisant la différence entre l'équation (1.10) et les deux équations (1.11) et (1.12), on obtient :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_s^{'} ds.$$

□

Définition 1.4.14. *Soient X_t^1, X_t^2 deux processus d'Itô définies par*

$$X_t^1 = x_1 + \int_0^t b_s^1 ds + \int_0^t \sigma_s^1 dW_s^1$$

$$X_t^2 = x_2 + \int_0^t b_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s^2 dW_s^2$$

et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, alors on a la formule d'Itô suivante :

$$\begin{aligned}
f(X_t^1, X_t^2) &= f(x_1, x_2) + \int_0^t f_{x_1}^{'}(X_s^1, X_s^2) dX_s^1 + \int_0^t f_{x_2}^{'}(X_s^1, X_s^2) dX_s^2 \\
&+ \int_0^t f_{x_1 x_2}^{''}(X_s^1, X_s^2) d < X^1, X^2 >_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_1 x_1}^{''}(X_s^1, X_s^2) d < X^1 >_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_2 x_2}^{''}(X_s^1, X_s^2) d < X^2 >_s \\
&= f(x_1, x_2) + \int_0^t f_{x_1}^{'}(X_s^1, X_s^2) dX_s^1 + \int_0^t f_{x_2}^{'}(X_s^1, X_s^2) dX_s^2 \\
&+ \int_0^t f_{x_1 x_2}^{''}(X_s^1, X_s^2) \sigma_s^1 \sigma_s^2 cov(W^1 W^2) ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_1 x_1}^{''}(X_s^1, X_s^2) \sigma_s^1 \sigma_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_2 x_2}^{''}(X_s^1, X_s^2) \sigma_s^2 ds
\end{aligned}$$

Remarque 1.4.15.
1. *W_1 et W_2 sont indépendants alors $Cov(W^1, W^2 = 0)$.*
2. *Si W^1 et W^2 sont corrélés, $Cov(W^1, W^2) = \rho$ coefficient de corrélation.*

Chapitre 2

Mouvement brownien fractionnaire et Mouvement brownien Sous-fractionnaire

On présente dans ce chapitre, les mouvements browniens fractionnaires et sous-fractionnaires. On commence par les définir, donner leurs représentations intégrales puis présenter leurs propriétés.

2.1 Mouvement brownien fractionnaire

Le mouvement brownien fractionnaire (fBm) est bien connu et utilisé dans de nombreux domaines d'application.

Définition 2.1.1. *On appelle mouvement brownien fractionnaire, un processus gaussien centré noté* $B = \left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ *avec fonction de covariance définie par :*

$$R_H(s,t) = \mathbb{E}\Big(B_s^H B_t^H\Big) = \frac{1}{2}\Big(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\Big), s,t \geq 0 \tag{2.1}$$

où $H \in [0,1]$ *appelé paramètre de hurst.*

En effet :

$$\begin{aligned}
R_H(s,t) &= \mathbb{E}\Big(B_s^H B_t^H\Big) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big((B_s^H)^2 + (B_t^H)^2 - (B_s^H - B_t^H)^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}\Big(B_s^H\Big)^2 + \mathbb{E}\Big(B_t^H\Big)^2 - \mathbb{E}\Big(B_s^H - B_t^H\Big)^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}\Big(B_s^H\Big)^2 + \mathbb{E}\Big(B_t^H\Big)^2 - \mathbb{E}\Big(B_{t-s}^H\Big)^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\Big), s,t \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Donc $R_H(s,t) = \frac{1}{2}\Big(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\Big), s,t \in \mathbb{R}$.

D'où $R_H(s,t) = \frac{1}{2}\Big(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\Big), s,t \geq 0$

Remarque 2.1.2. *Le cas $H = \frac{1}{2}$ correspond au mouvement brownien standard W_t, c'est-à-dire $\Big(B_t^{\frac{1}{2}} = W_t\Big)$.*

En effet, si $H = \frac{1}{2}$, on a :

$\mathbb{E}\Big(B_s^H B_t^H\Big) = \frac{1}{2}\Big(s + t - |s-t|\Big)$.

Si $t > s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(B_s^H B_t^H\Big) &= \frac{1}{2}\Big(s + t - [-(s-t)]\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(s + t + s - t\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(2s\Big) \\
&= s.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Si $t < s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(B_s^H B_t^H\Big) &= \frac{1}{2}\Big(s + t - (s-t)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(s + t - s + t\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(2t\Big) \\
&= t.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Comme $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien et pour $H=\frac{1}{2}$, on a

$$Cov\Big(B_t^H, B_s^H\Big) = \mathbb{E}\Big(B_t^H B_s^H\Big) = s \wedge t$$

donc $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est bien un mouvement brownien standard pour $H=\frac{1}{2}$.

2.1.1 La représentation intégrale du Mouvement brownien fractionnaire

Le Brownien fractionnaire B_t^H a eu une représentation dans les travaux de Mandelbort et Van Ness(1968)(la Représentation par Moyenne Mobile). Le mouvement brownien fractionnaire dans $\mathbb{R}$, est présenté comme suit :

Définition 2.1.3. *Pour $H \in [0,1]$, On a :*

$$\Big(B_t^H\Big)_{t\in\mathbb{R}} = \Big(\int_{\mathbb{R}} z(t,s)dW_s\Big)_{t\in\mathbb{R}} \tag{2.5}$$

où $z(t,s) = \frac{1}{C(H)}\Big((t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{H-\frac{1}{2}}\Big), t,s \in \mathbb{R}$

$x_+ = max(x,0)$

et $C(H) = \Big(\int_0^{+\infty}\Big((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}}\Big)^2 ds + \dfrac{1}{2H}\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 2.1.4. *Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus et $\beta, a > 0$.*
-X_t est β-auto-similaire si $(X_{at})_{t\in\mathbb{R}} = \Big(a^\beta X_t\Big)_{t\in\mathbb{R}}$: égalité en loi.
-X_t a des incréments stationnaires si $(X_{t+s} - X_s)_{t\in\mathbb{R}} = (X_t - X_0)_{t\in\mathbb{R}}, s \in \mathbb{R}$: égalité en loi.

Définition 2.1.5. *Soit f une fonction définie de I vers $\mathbb{R}$.*
f est Hölder continu de paramètre $\mu \in [0,1]$ s'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t-s|^\mu, \forall s,t \in I.$$

Définition 2.1.6. *Soit* $r(n) = \mathbb{E}\Big(\Big(X_{n+1} - X_n\Big)X_1\Big)$.
On dit que X_t a une courte mémoire lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < +\infty$ et X_t a une longue mémoire lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = +\infty$.

Théorème 2.1.7. *Soit X_t, un processus à valeurs réelles pour lequel il existe trois constantes strictement positives, γ, c, ε tel que :*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\gamma\right] \leq |t-s|^{c+\epsilon}.$$

Alors il existe une modification $\tilde{X}$ de X tel que :

$$\mathbb{E}\left[\left(sup_{t\neq s}\frac{|\tilde{X}_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right] < +\infty$$

pour chaque $\alpha \in [0, \frac{\varepsilon}{\gamma}]$.
En particulier les trajectoires de $\tilde{X}$ sont hölder continues de paramètre α.

Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'un processus stochastique ait une modification continue avec des trajectoires höldériennes.

Corollaire 2.1.8. *Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire on a :*

$$\mathbb{E}\Big(B_t^H B_s^H\Big) = \frac{1}{2}\Big(s^{2H} + t^{2H} - (t-s)^{2H}\Big), s, t > 0$$

et

$$\mathbb{E}\Big[\Big(B_t^H\Big)^2\Big] = t^{2H}.$$

Le mouvement brownien fractionnaire (fBm) constitue d'un processus gaussien centré continu qui se ressemble à lui-même, qui a des incréments stationnaires avec une dépendance à longue portée et qui n'est ni un processus de Markov ni un semi-martingale. Comme il ne s'agit pas d'une semi-martingale, il a été nécessaire de développer de nouvelles théories du calcul stochastique pour (fBm), différentes du calcul classique de Itô.

2.1.2 Propriétés

Propriété 2.1.9. *Le mouvement brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$ où $H \in [0,1]$ a les propriétés suivantes :*

1. *Un processus gaussien centré continu de variance $\mathbb{E}\Big(B_t^H\Big)^2 = t^{2H}$.*
2. *H-auto-similaire.*
3. *Ses incréments sont stationnaires.*
4. *Ses trajectoires sont Hölder continues de paramètre $\alpha < H$.*
5. *Il a une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$ et a une courte mémoire si $H \leq \frac{1}{2}$.*

6. *Il n'est ni un processus de Markov , ni une semi-martingale* $\Big($*pour* $H \in [0,1]\backslash\{\frac{1}{2}\}\Big)$.

Démonstration. A partir de la représentation de Mandelbrot-Van Ness du mouvement brownien fractionnaire, on a :

$$\Big(B_t^H\Big)_{t\in\mathbb{R}} = \Big(\int_{\mathbb{R}} z(t,s)dW_s\Big)_{t,s\in\mathbb{R}}$$

avec W_s un mouvement brownien standard.
Comme W_s est un processus gaussien continu, alors d'après (2.5), $\Big(B_t^H\Big)$ est bien un processus gaussien continu.
On a :

$$B_t^H = \Big(\int_{\mathbb{R}} z(t,s)dW_s\Big).$$

B_t^H est défini sous la forme d'une intégrale stochastique avec W_s un mouvement brownien standard alors $\mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}} z^2(t,s)ds\Big) < +\infty$.

D'aprés la propriété sur les intégrales stochastiques , on a

$$\mathbb{E}\Big(B_t^H\Big) = 0.$$

D'où B_t^H est bien un processus centré.
On a :

$$\mathbb{E}\Big(B_s^H B_t^H\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\Big), s,t \geq 0.$$

Pour $s = t$, on aura :

$$\mathbb{E}\Big(B_t^H\Big)^2 = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + t^{2H} - |t-t|^{2H}\Big), t \geq 0 \tag{2.6}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(2t^{2H}\Big) \tag{2.7}$$
$$= t^{2H} \tag{2.8}$$

or $Var\Big(B_t^H\Big) = \mathbb{E}\Big(B_t^H\Big)^2$.

D'où $Var\Big(B_t^H\Big) = t^{2H}$; alors B_t^H est un processus gaussien centré continu de variance définie par :

$$Var\Big(B_t^H\Big) = t^{2H}.$$

Montrons que les incréments de B_t^H sont stationnaires.

Par définition, on a :

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} \Big((t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \Big) dW_u, t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

$$B_s^H = \int_{\mathbb{R}} \Big((s-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \Big) dW_u, s \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left(B_t^H - B_s^H\right)_{t\in\mathbb{R}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{C(H)} \left((t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_u \right)_{t\in\mathbb{R}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{C(H)} \left((t-s-v)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_{v+s} \right)_{t\in\mathbb{R}}, u = v+s \end{aligned} \tag{2.11}$$

Il est clair que les incréments du mouvement brownien standard W_s sont stationnaires, on obtient pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left(B_t^H - B_s^H\right)_{t\in\mathbb{R}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{C(H)} \left((t-s-v)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_v \right)_{t\in\mathbb{R}}, W_{v+s} = W_v \\ &= \left(B_{t-s}^H\right)_{t\in\mathbb{R}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Alors B_t^H a ses incréments stationnaires.

Montrons que les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont hölder continues de paramètre $\alpha < H$.
Pour la preuve, nous allons utiliser le théorème 2.1.7 et le corollaire 2.1.9 .

On a :

$$\mathbb{E}\Big(|B_t^H - B_s^H|^2\Big) = \mathbb{E}\Big(|\Big(B_t^H\Big)^2 - 2B_t^H B_s^H + \Big(B_s^H\Big)^2|\Big).$$

En appliquant la linéarité de l'espérance et du corollaire précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(|\big(B_t^H\big)^2 - 2B_t^H B_s^H + \big(B_s^H\big)^2|\Big) &= \mathbb{E}\Big(|B_t^H|\Big)^2 - 2\mathbb{E}\Big(|B_t^H B_s^H|\Big) + \mathbb{E}\Big(|B_s^H|\Big)^2 \\
&= |t^{2H}| + |s^{2H}| - \Big|\Big(t^{2H} + s^{2H} - |(t-s)|^{2H}\Big)\Big| \\
&= |t-s|^{2H}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Donc on a

$$\mathbb{E}\Big(|B_t^H - B_s^H|^2\Big) = |t-s|^{2H} \tag{2.14}$$

$$= |t-s|^{1+2H-1}. \tag{2.15}$$

On prend : $\gamma = 2$, $c = 1$ *et* $\varepsilon = 2H - 1$.

D'aprés le théorème de KOLMOGOROV, B_t^H *a une modification dont les trajectoires sont hölder continues de paramètre* $\alpha \in [0, \frac{\varepsilon}{2}[= [0, \frac{2H-1}{2}[= [0, H - \frac{1}{2}[$.
Alors les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont hölder continues de paramètre $\alpha < H$.

Montons que le mouvement brownien fractionnaire a une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$ *et a une courte mémoire si* $H \leq \frac{1}{2}$.

Si $H = \frac{1}{2}$, *on est dans le cas d'un mouvement brownien standard on a*

$$r(n) = \mathbb{E}\Big(W_{n+1}W_1\Big) - \mathbb{E}\Big(W_n W_1\Big) = 1 - 1 = 0$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ *(courte mémoire).*

Si $H \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
r(n) &= \mathbb{E}\Big(W_{n+1}W_1\Big) - \mathbb{E}\Big(W_n W_1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\{(n+1)^{2H} + 1 - |(n+1) - 1|^{2H}\} - \frac{1}{2}\{n^{2H} + 1 - |n-1|^{2H}\} \\
&= \frac{1}{2}\{(n+1)^{2H} + 1 - n^{2H}\} - \frac{1}{2}\{n^{2H} + 1 - (n-1)^{2H}\} \\
&= \frac{1}{2}\{(n+1)^{2H} + 1 - n^{2H} - n^{2H} - 1 + (n-1)^{2H}\} \\
&= \frac{1}{2}\{(n+1)^{2H} - n^{2H} + (n-1)^{2H} - n^{2H}\}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

donc on peut écrire :

$$r(n) = H\int_0^1 \left((n+a)^{2H-1} - (n-a)^{2H-1}\right) da = H(2H-1)\int_0^1 da \int_{-1}^1 db(n+ab)^{2H-2}$$

d'où $r(n) \leq (n+1)^{2H-2}$ *et* $r(n) > (n-1)^{2H-2}$.
On conclut que $r(n) \sim n^{2H-2}$
donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ *si* $H \leq \frac{1}{2}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$ *si* $H > \frac{1}{2}$

□

2.2 Mouvement brownien Sous-fractionnaire

Soit $S^H = \left\{S_t^H, t \in [0,T]\right\}$ un processus stochastique de paramètre de Hurst $H \in [0,1]$ dans l'espace de probabilité standard $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 2.2.1. *On appelle mouvement brownien sous-fractionnaire, un processus gaussien centré noté* S^H *où* $H \in [0,1]$ *de fonction de covariance définie par :*

$$\mathbb{E}\Big(S_s^H S_t^H\Big) = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}\left[(s+t)^{2H} + |s-t|^{2H}\right] \tag{2.17}$$

D'après la référence [1], l'existence de S_t^H peut être montré de la manière suivante : en définissant S_t^H par :

$$S_t^H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B_t^H + B_{-t}^H\right), t \geq 0 \tag{2.18}$$

où B_t^H est un mouvement brownien fractionnaire.
En utilisant l'expression de la covariance de B_t^H, on parvient à montrer la covariance de S_t^H.
En effet :

$$Cov(S_t^H; S_s^H) = \mathbb{E}(S_t^H S_s^H) - \mathbb{E}(S_t^H)\mathbb{E}(S_s^H)$$

$$= \mathbb{E}(S_t^H S_s^H)$$

$$= \mathbb{E}\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(B_t^H + B_{-t}^H\Big) \times \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(B_s^H + B_{-s}^H\Big)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H + B_t^H B_{-s}^H + B_{-t}^H B_s^H + B_{-t}^H B_{-s}^H\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\mathbb{E}\Big(B_t^H B_s^H\Big) + \mathbb{E}\Big(B_t^H B_{-s}^H\Big) + \mathbb{E}\Big(B_{-t}^H B_s^H\Big) + \mathbb{E}\Big(B_{-t}^H B_{-s}^H\Big)\Big]$$

or B_t^H est un mouvement brownien fractionnaire de covariance définie par :

$$\mathbb{E}\Big(B_t^H B_s^H\Big) = \frac{1}{2}\big(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\big).$$

On obtient :

$Cov\Big(S_t^H; S_s^H\Big) = \frac{1}{4}\Big(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H} + (-s)^{2H} + t^{2H} - |-s-t|^{2H} + (-t)^{2H} + s^{2H} - |s-(-t)|^{2H} + (-s)^{2H} + (-t)^{2H} - |-s+t|^{2H}\Big)$

$= \frac{1}{4}\Big(4s^{2H} + 4t^{2H} - 2|s-t|^{2H} - 2|s+t|^{2H}\Big)$

$= s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}\Big((s+t)^{2H} + |s-t|^{2H}\Big)$

d'où $Cov\Big(S_t^H; S_s^H\Big) = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}\Big[(s+t)^{2H} + |s-t|^{2H}\Big]$.

2.2.1 Représentation intégrale du mouvement brownien sous-fractionnaire

La représentation intégrale du mouvement brownien sous-fractionnaire(mbsf) est donnée par :

$$S_t^h = \frac{1}{C_1(h)} \int_{\mathbb{R}} \Bigg[\Big((t-s)^+\Big)^{\frac{(h-1)}{2}} + \Big((t+s)^-\Big)^{\frac{(h-1)}{2}} - 2\Big((-s)^+\Big)^{\frac{(h-1)}{2}}\Bigg] dW_s$$

avec W_s un mouvement brownien standard , $h \in (0,2)$ où $h = 2H$

et $C_1(h) = \left[2\left(\int_0^{+\infty}\left((1+s)^{\frac{(h-1)}{2}} - s^{\frac{(h-1)}{2}}\right)^2 ds + \frac{1}{h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ une constante positive dépendant de h.

S^h peut être réécrit sous la forme suivante :

$S_t^h = B_t^h + Y_t$ avec B_t^h un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst h et Y_t un processus définis par :

$B_t^h = \frac{1}{C_1(h)}\left[\int_{-\infty}^0 \Big((t-s)^{\frac{(h-1)}{2}} - (-s)^{\frac{(h-1)}{2}}\Big) dW_s + \int_0^t (t-s)^{\frac{(h-1)}{2}} dW_s\right]$ et

$Y(t) = \frac{1}{C_1(h)}\left[\int_{-\infty}^{-t} \Big((-t-s)^{\frac{(h-1)}{2}} - (-s)^{\frac{(h-1)}{2}}\Big) dW_s - \int_{-t}^0 (-s)^{\frac{(h-1)}{2}} dW_s\right]$

2.2.2 Propriétés

Le mouvement brownien sous-fractionnaire a les propriétés analogues à celles du mouvement brownien fractionnaire (auto-similarité, long rang de dépendance, continuité de hölder).

Pour $h \in (0,2)$, le mouvement brownien sous fractionnaire S_t^h, a les propriétés suivantes :

Il est auto-similaire :
$\{S_{at}^h, t \geq 0\} = \{a^{\frac{h}{2}} S_t^h, t \geq 0\}$,$\forall\ a > 0$, égalité en loi.

Sa trajectoire est continue et hölderienne d'ordre $\alpha \in [0, \frac{h}{2}]$.

S_t^h a une version de continuité quelque soit h, et $\forall\ 0 \leq \epsilon \leq \frac{h}{2}$ et $\forall\ T > 0$, il existe une variable aléatoire $K_{\epsilon,T}$ tel que :

$$|S_t^h - S_s^h| \leq K_{\epsilon,T}|t-s|^{\frac{h}{2-\epsilon}}\ ;\ s,t \in [0,T]$$

si $h \neq 1$, il n'est ni Markovien ni une semi-martingale.

Remarque 2.2.2. *Les incréments du fBm sont auto-similaires alors que ceux du mbsf ne sont pas auto-similaires.*

Chapitre 3

Estimateur du maximum de vraisemblance.

On présente dans ce chapitre, les EDO ensuite les EDS.
Nous présenterons une définition générale du théorème de Girsanov et quelques propriétés. En section 3.2, sera présenté un exemple d'EDS qui fait l'objet de cette étude dans laquelle nous étudierons l'existence et l'unicité de la solution. En section 3.3, sera présenté une version du théorème de Girsanov pour les mouvements browniens sous-fractionnaires puis on prouvera l'existence de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ contenu dans (1). Enfin , nous présenterons deux autres formes alternatives de l'estimateur du paramètre θ.

3.1 Équation différentielle ordinaire et Équations différentielles Stochastiques

3.1.1 Équation différentielle ordinaire EDO

Définition 3.1.1. *Une équation différentielle ordinaire, c'est une équation définie en termes d'une variable $t \in I$, I intervalle réel, une fonction inconnue $y : I \longmapsto \mathbb{R}^n$ et ses dérivées par rapport à t. En formule :*

$$F(t, y(t), y^{'}(t), y^{''}(t), ...) = 0$$

Une fonction y qui vérifie $F(t, y(t), y^{'}(t), y^{''}(t), ...) = 0$ s'appelle solution de l'EDO. Une EDO est d'ordre k si elle contient les dérivées de y jusqu'à l'ordre k.

3.1.2 Équation différentielle stochastique

Une equation différentielle stochastique(EDS) est une équation différentielle ordinaire(EDO) à laquelle on ajoute un bruit aléatoire.
Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations différentielles ordinaires en équations différentielles stochastiques (EDS).

Définition 3.1.2. *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation définie par :*

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Ce qui, en terme d'intégrale s'écrit :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

Avec

- $a(s, X_s)$ est appelé drift ou dérive de l'EDS.

- $\sigma(s, X_s)$ est appelé coefficient de diffusion de l'EDS.

- W_s est un mouvement brownien standard(ou bruit aléatoire).

Les solutions d'une EDS sont des processus stochastiques qui vérifient certaines hypothèses. Il s'agit donc d'un processus qu'on note $X = (X)_{t\geq 0}$.
On appelle solution de l'EDS la donnée de :

- un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles ;

- un $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$-mouvement brownien W défini sur cet espace de probabilité ;

- un processus $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$-adapté continu X à valeur dans $\mathbb{R}$ tel que l'EDS soit vérifiée, et lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}$ on dira que le processus X part de x.

3.1.3 Théorème de Girsanov

Commençons par une approche heuristique pour des variables aléatoires : la densité gaussienne standard $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ possède la propriété suivante

$$\begin{aligned} g(x-a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(x^2-2ax+a^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}x^2}e^{ax-\frac{a^2}{2}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Puisque $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc $g(x-a) = g(x)e^{ax-\frac{a^2}{2}}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ qui se réécrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(N+a)] &= \int f(x+a)g(x)dx \\
&= \int f(x)g(x-a)dx \\
&= \int f(x)e^{ax-\frac{a^2}{2}} g(x)dx \\
&= \mathbb{E}\Big[f(N)exp\Big(aN - \frac{a^2}{2}\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}_a[f(N)].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour f mesurable bornée et $N \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et en notant $\mathbb{E}_a$ pour l'espérance sous

$$d\mathbb{Q}^a = \exp\left(aN - \frac{a^2}{2}\right)d\mathbb{P}.$$

C'est cette observation, généralisée au mouvement brownien, qui constitue le théorème de Girsanov . Ce théorème a ensuite été étendu à des martingales locales plus générales.

3.1.4 Logarithme stochastique

La propriété de martingale ou de mouvement brownien est liée à la probabilité utilisée : si on change $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$, une martingale X (pour $\mathbb{P}$) n'a pas de raison de rester une martingale ou un mouvement brownien pour $\mathbb{Q}$. La réponse est donnée par le Théorème de Girsanov. Pour éviter les confusions dans un tel contexte, on indique la probabilité par rapport à laquelle une martingale ou un mouvement brownien est considérée (on écrira ainsi : soit X une $\mathbb{P}$-martingale ou un $\mathbb{P}$-mouvement brownien et on notera $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ pour une espérance relative à $\mathbb{P}$).
Dans la suite, on considère $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Bien sure, on a alors $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$ et on note $D_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_t}$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$. Dans un contexte statistique, D s'appelle vraisemblance de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$. Le processus D vérifie les propriétés suivantes.

Propriété 3.1.3. *(Processus dérivée de Radon-Nikodym)*
- D est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale uniformément intégrale.
- D admet une modification continue à droite limite à gauche ; pour cette version et pour tout temps d'arrêt T, on a

$$D_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_T}$$

- Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ alors ps pour tout $t \geq 0$, $D_t > 0$.

Proposition 3.1.4. *(Logarithme stochastique) Soit D une martingale locale continue strictement positive. Alors, il existe une unique martingale locale, à trajectoires continues, L appelée logarithme stochastique de D, telle que*

$$D_t = exp\left(L_t - \frac{1}{2} < L, L >_t\right) = \mathcal{E}(L)_t. \tag{3.3}$$

De plus, L est donnée par l'expression

$$L_t = \ln D_0 + \int_0^t D_s^1 dD_s. \tag{3.4}$$

Démonstration. Unicité : Soient L et $L^{'}$ deux matingales locales continues.
Si $D_t = exp\left(L_t - \frac{1}{2} < L, L >_t\right) = exp\left(L^{'}_t - \frac{1}{2} < L^{'}, L^{'} >_t\right)$ pour tout $t \geq 0$ alors

$$L_t - \frac{1}{2} < L, L >_t = L^{'}_t - \frac{1}{2} < L, L >_t .$$

On obtient : $L_t - L^{'}_t = \frac{1}{2} < L, L >_t - \frac{1}{2} < L, L >_t$.
Puisque L et $L^{'}$ sont des martingales locales à variation finie
alors $< L, L >_t = 0$ et $< L^{'}, L^{'} >_t = 0$.
D'où

$$L_t = L^{'}_t.$$

Existence : Prenons L donné par (3.4).
Comme D est strictement positive et ln est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on applique la formule d'Itô à $\ln D$:
On a

$$\begin{aligned} \ln D_t &= \ln D_o + \int_0^t (\ln D_s)^{'} dD_s + \frac{1}{2}\int_0^t (\ln D_s)^{''} d < D, D >_s \\ &= \ln D_0 + \int_0^t \frac{1}{D_s} dD_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{D_s^2} ds. \end{aligned}$$

Or $L_t = \ln D_0 + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{D_s} dD_s$ et $< L, L >_t = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{D_s^2} ds$
alors

$$\ln D_t = L_t - \frac{1}{2} < L, L >_t . \tag{3.5}$$

D'où on obtient (3.3) en composant par exponentielle l'equation (3.5) .

□

Théorème 3.1.5. *(Girsanov) Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ et L le logarithme stochastique (supposé à trajectoires continues) associé à la martingale $D_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_t}$.Si M est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale locale continue, alors le processus $\tilde{M} = M - < M, L >$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale locale continue.*

Théorème 3.1.6. *(Condition de Novikov) Soit L une martingale locale continue telle que* $L_0 = 0$.
Considérons les conditions suivantes :

1. $E[exp(\frac{1}{2} < L, L >_\infty)] < +\infty$.

2. *L est une martingale uniformément intégrable et* $E[exp(\frac{1}{2}L_\infty)] < +\infty$.

3. $\mathcal{E}(L)$ *est une martingale uniformément intégrable, avec* $\mathcal{E}(L)$ *le Logarithme stochastique.*

Alors $1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3)$.

Démonstration. Référence [17] □

Proposition 3.1.7. *Si la condition suivante est satisfaite*

$$E(\mathcal{E}(L))_\infty = 1$$

alors $\mathcal{E}(L)$ *est une vraie martingale uniformément intégrable.*

Démonstration. Référence [17] □

Corollaire 3.1.8. *(Cameron-Martin) Soient* W_t *un* $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$*-mouvement brownien et* $f \in L^2([0, T])$.
1.La variable aléatoire

$$D_T = exp\left(\int_0^T f(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right)$$

est une densité de probabilité qui définie une probabilité $\mathbb{Q}$ *(par* $d\mathbb{Q} = D_T d\mathbb{P}$*).*

2.Le processus

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^{t\wedge T} f(s)ds$$

est un $\mathbb{Q}$*-mouvement brownien. Autrement dit, sous* $\mathbb{Q}$*, le* $\mathbb{P}$*-mouvement brownien W s'écrit*

$$W_t = W_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t f(s)ds.$$

Démonstration. Référence [17] □

Proposition 3.1.9. *Soient T une date déterministe fixée et $f \in L^2_{[0,T]}(W)$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $C \in]0, +\infty[$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ on ait*

$$\mathbb{E}[exp(af(t)^2)] \leq C < +\infty,$$

alors $E(\mathcal{E}(L))_\infty = 1$.

Démonstration. Référence [17] □

Considérons maintenant les noyaux n_H et ψ_H suivants :

$$n_H(t,s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^H \Gamma(H + \frac{1}{2})} s^{\frac{1}{2}-H} \frac{d}{ds}\left(\int_s^t (x^2 - s^2)^{H-\frac{1}{2}} dx\right) 1_{(0,t)}(s)$$

$$n_H(t,s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^H \Gamma(H + \frac{1}{2})} s^{\frac{3}{2}-H} \left(\frac{(x^2 - s^2)^{H-\frac{1}{2}}}{t} + \int_s^t \frac{(x^2 - s^2)^{H-\frac{1}{2}}}{x^2} dx\right) 1_{(0,t)}(s)$$

et

$$\psi_H(t,s) = \frac{s^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2} - H)} \left[t^{H-\frac{3}{2}} (t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}-H} - (H - \frac{3}{2}) \int_s^t (x^2 - s^2)^{\frac{1}{2}-H} x^{H-\frac{3}{2}} dx\right] 1_{(0,t)}(s).$$

Le lemme suivant de Mendy [9] donne une estimation que nous utiliserons pour la démonstration de l'existence de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Lemme 3.1.10. *Soient $H \in [0, 1]$ et $T > 0$.*

(i) Pout tout $H < \frac{1}{2}$:

$$|\psi_H(t,s)| \leq C(H)s^{2H-2}, 0 \leq s < t \leq T.$$

(ii) Pour tout $H > \frac{1}{2}$:

$$|\psi_H(t,s)| \leq C(H)s^{H-\frac{3}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}-H} + C^{'}(H)s^{H-\frac{3}{2}}, 0 \leq s < t \leq T$$

avec $C(H)$ et $C^{'}(H)$ sont deux constantes génériques positives dépendantes que de H.

Théorème 3.1.11. *Le processus*

$$W_t = \int_0^t \psi_H(t,s) dS_s^H \tag{3.6}$$

est l'unique mouvement brownien tel que

$$S_t^H = c(H) \int_0^t n_H(t,s) dW_s,$$

avec

$$c^2(H) = \frac{\Gamma(1+2H)\sin(\pi H)}{\pi}.$$

Dans ce qui suit, nous noterons n_H, l'opérateur sur $L^2([0,T])$ induit par le noyau n_H par :

$$n_H(f)(t) = \int_0^t n_H(t,s)f(s)ds,$$

et de même pour ψ_H.
Notons que l'opérateur ψ_H est bien l'inverse de l'opérateur n_H.

3.2 Solution de L'EDS : Existence et unicité

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique (1) dirigée par le mouvement brownien sous fractionnaire S_t^H de paramètre de Hurst $H \in [0,1]$ et θ une constante paramétrique.

Définition 3.2.1. *Une fonction $\gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est dite à croissance linéaire (par rapport à x uniformément en t), s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\gamma(t,s)| \leq C(1+|x|).$$

On suppose que $X_0 = 0$ et $\theta > 0$.
L'équation (1) *avait été considérée par Mendy [9] dans un contexte plus général avec $b(x) = b(s,x)$ avec $s \in [0,T]$.*
Il a été prouvé dans Mendy [9] que si b satisfait la condition de croissance linéaire, c'est-à-dire :

$$\sup_{s\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |b(s,x)| \leq M(1+|x|),$$

alors (1) *admet une solution X_t qu'on utilisera dans la suite du document.*

Remarque 3.2.2. *Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la condition de croissance linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.*

Lemme 3.2.3. *Pour* $s, t \in [0, T]$,

$$\sup_{s \leq t} |X_s| \leq \left[Ct + \sup_{s \leq t} |S_s^H| \right] e^{Kt}.$$

Démonstration. Pour la preuve nous aurons besoin du lemme de Gronwall suivant :

Lemme 3.2.4. *(Gronwall) Soient* $T > 0$ *et* g *une fonction positive mesurable bornée sur* $[0, T]$.*On suppose qu'il existe des constantes* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$ *telles que pour tout* $t \in [0, T]$, *on a*

$$g(t) = a + b \int_0^t g(s) ds,$$

alors on a $g(t) \leq ae^{bt}$ *pour tout* $t \in [0, T]$.

Considérons l'équation différentielle stochastique (1) :

$$X_s = \theta \int_0^s b(X_u) du + S_s^H, 0 \leq s < T$$

$$|X_s| = |\theta \int_0^s b(X_u) du + S_s^H|$$

$$|X_s| \leq \theta \int_0^s |b(X_u)| du + |S_s^H| \text{ car } \theta > 0$$

$$|X_s| \leq \theta \int_0^s \sup_{u \leq s} |b(X_u)| du + |S_s^H|.$$

Comme b satisfait la condition de croissance linéaire :

$$\sup_{s \in [0,T]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |b(s, x)| \leq M(1 + |x|)$$

ceci entraine

$$\sup_{s \in [0,T]} |b(s, x)| \leq M(1 + |x|).$$

Ainsi on obtient :

$$|X_s| \leq \theta M \int_0^s (1 + |X_u|) du + |S_s^H|$$

$$|X_s| \leq \theta M \int_0^s du + |S_s^H| + \theta M \int_0^s |X_u| du$$

$$|X_s| \leq (\theta M s + |S_s^H|) + \int_0^s \theta M |X_u| du.$$

D'après le lemme de Gronwall, on a :

$|X_s| \leq (\theta M s + |S_s^H|)e^{\theta M s}.$

En posant $\theta M = C$, on obtient

$|X_s| \leq (Cs + |S_s^H|)e^{Cs}.$

D'où on a

$$\sup_{s\leq t}|X_s| \leq (Ct + \sup_{s\leq t}|S_s^H|)e^{Ct} \tag{3.7}$$

□

3.3 Estimation par Maximum de Vraisemblance

On donne un processus adapté à trajectoire intégrable $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$. Considérons la transformation suivante :

$$\tilde{S}_t^H = S_t^H + \int_0^t u_s ds. \tag{3.8}$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t^H &= S_t^H + \int_0^t u_s ds = c(H)\int_0^t n_H(t,s)dW_s + \int_0^t u_s ds \\ &= c(H)\int_0^t n_H(t,s)d\tilde{W}_s \end{aligned} \tag{3.9}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t &= W_t + \int_0^t \left[\int_0^s \left(\psi_H(s,r)\int_0^r u_z dz\right) dr\right] ds \\ &= W_t + \int_0^t v_s ds \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec

$$v_s = \int_0^s \left(\psi_H(s,r)\int_0^r u_z dz\right) dr. \tag{3.11}$$

Par conséquent on peut déduire la version suivante du théorème de Girsanov pour le mouvement brownien sous fractionnaire.

Théorème 3.3.1. *Soient S_t^H un mouvement brownien sous fractionnaire et $u = \{u_s, s \in [0,T]\}$ un processus adapté à la filtration générée par S_t^H.*
Soient W_t le mouvement brownien standard construit à partir de S_t^H par (3.6) *et v_s définie par* (3.11).
Supposons que

(i) $v_s \in L^2(\Omega \times [0,T])$,

(ii) $\mathbb{E}(V_T) = 1$

avec $V_T = exp(-\int_0^T v_s dW_r - \frac{1}{2}\int_0^T v_s^2 dr)$.

Alors sous la nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ *définie par :*

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = V_T$$

le processus $\tilde{W}$ *donné par (3.8) est un mouvement brownien standard et le processus* $\tilde{S}^H$ *donné par (3.7) est aussi un mouvement brownien sous fractionnaire.*

Dans ce qui suit, nous allons maintenant construire l'estimateur du maximum de vraisemblance du parametre θ de (1) en utilisant le théorème de Girsanov.

Lemme 3.3.2. *Soit $W_t^{\mathbb{P}_\theta}$ un $\mathbb{P}_\theta-$mouvement brownien défini par :*

$$W_t^{\mathbb{P}_\theta} = W_t + \int_0^t \theta Q_s ds$$

avec $Q_s = \int_0^s \psi_H(s,r)\Big(\int_0^r b(X_u)du\Big)dr$ et W_t un $\mathbb{P}_0-$mouvement brownien.
Alors l'estimateur du paramètre θ contenu dans l'EDS (1) est donné par :

$$\theta_t = -\frac{\displaystyle\int_0^t Q_u dW_u}{\displaystyle\int_0^t Q_u^2 du}.$$

Démonstration. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0)$ l'espace de probabilité où W_t est défini et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$ le nouveau espace de probabilité dans lequel sera défini le mouvement brownien $W_t^{\mathbb{P}_\theta}$ ci-dessous.

On a :

$X_t = \theta \int_0^t b(X_s)ds + S_t^H.$

Adaptons la solution X_t à la construction de $\tilde{S}^H$ notée en (3.8) avec $u_s = \theta b(X_s)$. Donc on peut écrire :

$X_t = c(H)\int_0^t n_H(t,s)dW_s + \int_0^t \theta b(X_s)ds$ car $S_t^H = c(H)\int_0^t n_H(t,s)dW_s$

ce qui entraine que :$X_t = c(H)\int_0^t n_H(t,s)dW_s^{\mathbb{P}_\theta}$

avec $W_t^{\mathbb{P}_\theta} = W_t + \int_0^t \Big(\int_0^s \Big(\psi_H(s,r)\int_0^r \theta b(X_z)dz\Big)dr\Big)\, ds$

$W_t^{\mathbb{P}_\theta} = W_t + \int_0^t v_s ds$

avec $v_s = \int_0^s \Big(\psi_H(s,r)\int_0^r \theta b(X_z)dz\Big)dr = \theta\int_0^s \Big(\psi_H(s,r)\int_0^r b(X_z)dz\Big)dr.$

Posons : $Q_s = \int_0^s \Big(\psi_H(s,r)\int_0^r b(X_z)dz\Big)dr$

on obtient donc $v_s = \theta Q_s$.

Montrons que $v_s \in L^2\Big(\Omega \times [0,T]\Big)$.

Pour cela, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^t |v_s|^2 ds < \infty$.

On a $v_s = \theta Q_s$ alors :

$$\int_0^t |v_s|^2 ds = \theta^2 \int_0^t |Q_s|^2 ds. \tag{3.12}$$

Donc à partir de l'équation (3.12), si on montre que $Q_s \in L^2(\Omega \times [0,T])$ alors on peut conclure que $v_s \in L^2(\Omega \times [0,T])$.
Pour $H < \frac{1}{2}$:
on a
$Q_t = \displaystyle\int_0^t \Big(\psi_H(t,r) \int_0^r b(X_s) ds\Big) dr$

$|Q_t| \leq \displaystyle\int_0^t \Big(|\psi_H(t,r)| \int_0^r |b(X_s)| ds\Big) dr.$

Comme b est à croissance linéaire alors $|b(X_s)| \leq M(1 + |X_s|)$.
Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} |Q_t| &\leq \int_0^t (|\psi_H(t,r)|(M \int_0^r (1 + |X_s|) ds) dr \\ &\leq \int_0^t (|\psi_H(t,r)|(M \int_0^r (1 + \sup_{s \leq t} |X_s|) ds) dr \\ &\leq M \int_0^t |\psi_H(t,r)|((1 + \sup_{s \leq t} |X_s|) \int_0^r ds) dr \\ &\leq M \int_0^t |\psi_H(t,r)|(1 + \sup_{s \leq t} |X_s|) r dr. \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'après le Lemme 2.1, si $H < \frac{1}{2}$ alors on a l'estimation suivante du noyau $\psi_H(t,s)$:

$|\psi_H(t,s)| \leq C(H) s^{2H-2} \Longrightarrow |\psi_H(t,r)| \leq C(H) r^{2H-2}$

$$
\begin{aligned}
|Q_t| &\leq M\int_0^t C(H)r^{2H-2}\times r\times(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)dr \\
&\leq M(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)C(H)\int_0^t r^{2H-1}dr \\
&\leq MC(H)(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)\times\frac{t^{2H}}{2H} \\
&\leq MC(H)\times\frac{t^{2H}}{2H}(1+\sup_{s\leq t}|X_s|) \\
&\leq C(H,T)(1+\sup_{s\leq T}|X_s|)
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

où $C(H,T)=\frac{MC(H)T^{2H}}{2H}$ avec $T=t$.
On obtient :

$$
\begin{aligned}
|Q_s|^2 &\leq C^2(H,s)(1+\sup_{u\leq s}|X_u|)^2 \\
&\leq \frac{M^2C^2(H)}{4H^2}s^{4H}(1+\sup_{u\leq s}|X_u|)^2 \\
\int_0^t|Q_s|^2ds &\leq \int_0^t\frac{M^2C^2(H)}{4H^2}s^{4H}(1+\sup_{u\leq s}|X_u|)^2ds \\
&\leq \frac{M^2C^2(H)}{4H^2}(1+\sup_{u\leq s}|X_u|)^2\int_0^t s^{4H}ds \\
&\leq \frac{M^2C^2(H)}{4H^2}\left(1+\sup_{u\leq s}|X_u|\right)^2\frac{t^{4H+1}}{(4H+1)}<+\infty.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Donc $\int_0^t|Q_s|^2ds<\infty \Longrightarrow Q_s\in L^2(\Omega\times[0,T])$.

Ainsi $\int_0^t|v_s|^2ds<+\infty$ d'où pour $H<\frac{1}{2}$, $v_s\in L^2(\Omega\times[0,T])$.
Pour $H>\frac{1}{2}$:
à partir de ce qui précède, on avait l'inégalité suivante :

$$|Q_t|\leq M\int_0^t|\psi_H(t,r)|(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)rdr.$$

D'après le Lemme 2.1, si $H>\frac{1}{2}$, on a une estimation du noyau $\psi_H(t,s)$ donnée par :

$$|\psi_H(t,s)|\leq C(H)s^{H-\frac{3}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}+C^{'}(H)s^{H-\frac{3}{2}}$$

ce qui entraine que

$$|\psi_H(t,r)| \leq C(H)r^{H-\frac{3}{2}}(t-r)^{\frac{1}{2}-H} + C^{'}(H)r^{H-\frac{3}{2}}.$$

On a

$$\begin{aligned} |Q_t| &\leq M\Big(1+\sup_{s\leq t}|X_s|\Big)\int_0^t \Big[C(H)r^{H-\frac{3}{2}}(t-r)^{\frac{1}{2}-H} + C^{'}(H)r^{H-\frac{3}{2}}\Big] \times r dr \\ &\leq M\Big(1+\sup_{s\leq t}|X_s|\Big)\Big[\int_0^t C(H)r^{H-\frac{1}{2}}(t-r)^{\frac{1}{2}-H}dr + \int_0^t C^{'}(H)r^{H-\frac{1}{2}}dr\Big]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Poson : $A = \Big[\int_0^t C(H)r^{H-\frac{1}{2}}(t-r)^{\frac{1}{2}-H}dr + \int_0^t C^{'}(H)r^{H-\frac{1}{2}}dr\Big].$

Déterminons $\int_0^t r^{H-\frac{1}{2}}(t-r)^{\frac{1}{2}-H}dr.$

On a :

$\int_0^t r^{H-\frac{1}{2}}(t-r)^{\frac{1}{2}-H}dr = \int_0^t r^{H-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}-H}\left(1-\frac{r}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H} dr.$

On effectue le changement de variable suivant :

$u = \frac{r}{t} \Longrightarrow r = tu$ et $dr = tdu$

si $r \longrightarrow 0$ alors $u \longrightarrow 0$, si $r \longrightarrow t$ alors $u \longrightarrow 1.$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t r^{H-\frac{1}{2}}(t-r)^{\frac{1}{2}-H}dr &= \int_0^1 (tu)^{H-\frac{1}{2}}\, t^{\frac{1}{2}-H}\,(1-u)^{\frac{1}{2}-H}\, tdu \\ &= \int_0^1 t^{H-\frac{1}{2}} \times t^{\frac{1}{2}-H} \times t \times u^{H-\frac{1}{2}}\,(1-u)^{\frac{1}{2}-H}\, du \\ &= t\int_0^1 u^{H-\frac{1}{2}}\,(1-u)^{\frac{1}{2}-H}\, du \\ &= t\int_0^1 u^{H+\frac{1}{2}-1}\,(1-u)^{\frac{3}{2}-H-1}\, du \\ &= t\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Alors

$$\begin{aligned} A &= t\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)+C^{'}(H)\int_0^t r^{H-\frac{1}{2}}dr \qquad (3.18)\\ &= \beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)t+\frac{2C^{'}(H)}{(1+2H)}t^{H+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Le premier terme de A peut être majoré par $\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)t^{2H}$ car $t < t^{2H}$.

Le deuxième terme de A peut être majoré par $\frac{2C^{'}(H)}{(1+2H)}t^{2H}$ car $t^{H+\frac{1}{2}} < t^{2H}$.
Donc

$$\begin{aligned} A &\leq \beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)t^{2H}+\frac{2C^{'}(H)}{(1+2H)}t^{2H} \qquad (3.19)\\ &\leq \frac{1}{(1+2H)}\left[(1+2H)\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)+2C^{'}(H)\right]t^{2H} \end{aligned}$$

.

On aura :

$|Q_t| \leq M(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)\times\frac{1}{(1+2H)}\left[(1+2H)\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)+2C^{'}(H)\right]t^{2H}$

$\Longrightarrow |Q_t| \leq C(H,T)(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)$

où $C(H,T)=\frac{M}{(1+2H)}\left[(1+2H)\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)+2C^{'}(H)\right]T^{2H}$ avec $T=t$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^t |Q_s|^2 ds &\leq \int_0^t C^2(H,s)(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)^2 ds \qquad (3.20)\\ &\leq \underbrace{\frac{M^2}{(1+2H)^2}\left[(1+2H)\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)+2C^{'}(H)\right]^2(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)^2\int_0^t s^{4H}ds.}_{V(t)} \end{aligned}$$

Alors

$V(t)=\frac{M^2}{(1+4H)(1+2H)^2}\left[(1+2H)\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)+2C^{'}(H)\right]^2(1+\sup_{s\leq t}|X_s|)^2 t^{1+4H}$

d'où $V(t) < +\infty$.

Ainsi $\int_0^t |Q_s|^2 ds < +\infty \Longrightarrow Q_s \in L^2(\Omega\times[0,T])$.

Donc $v_s \in L^2(\Omega \times [0,T])$ pour $H > \frac{1}{2}$.

Nous avons montré que pour tout $H \in (0,1)$, $v_s \in L^2(\Omega \times [0,T])$.

Maintenant nous allons montrer que :

$$\mathbb{E}(V_t) = 1$$

avec

$$V_t = \exp\Big(-\int_0^t v_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t v_s^2 ds \Big).$$

Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une constante positive $a > 0$ telle que

$$\sup_{0 \le u \le t} \mathbb{E}[\exp(aQ_u^2)] < +\infty.$$

En effet :

$$\begin{aligned} Q_u &\le C(H,u)(1 + \sup_{s \le u} |X_s|) \\ Q_u^2 &\le C^2(H,u)(1 + \sup_{s \le u} |X_s|)^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Or d'après le Lemme 3.2.3

$$\sup_{s \le u} |X_s| \le (Cu + \sup_{s \le u} |S_s^H|)e^{Ku}$$

$$\begin{aligned} Q_u^2 &\le C^2(H,u)(1 + (Cu + \sup_{s \le u} |S_s^H|)e^{Ku})^2 \\ &\le C^2(H,u)(1 + Cue^{Ku} + e^{Ku} \sup_{s \le u} |S_s^H|)^2. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Pour $H < \frac{1}{2}$, $C(H,T) = \frac{MC(H)T^{2H}}{2H}$.
Donc on obtient :

$$Q_u^2 \le \frac{M^2C^2(H)u^{4H}}{4H^2}(1 + Cue^{Ku} + e^{Ku} \sup_{s \le u} |S_s^H|)^2$$

$$\frac{4H^2}{M^2C^2(H)} Q_u^2 \le u^{4H} \left(1 + Cue^{Ku} + e^{Ku} \sup_{s \le u} |S_s^H| \right)^2.$$

Posons $a = \frac{4H^2}{M^2C^2(H)} > 0$.

on a alors :

$aQ_u^2 \leq u^{4H}(1 + Cue^{Ku} + e^{Ku}\sup_{s\leq u}|S_s^H|)^2$

$e^{aQ_u^2} \leq e^{u^{4H}(1+Cue^{Ku}+e^{Ku}\sup_{s\leq u}|S_s^H|)^2}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) &\leq e^{u^{4H}\mathbb{E}\left(1+Cue^{Ku}+e^{Ku}\sup_{s\leq u}|S_s^H|\right)^2} \\ &\leq e^{u^{4H}\left(1+Cue^{Ku}+e^{Ku}\mathbb{E}(\sup_{s\leq u}|S_s^H|)\right)^2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Comme S_t^H est un processus gaussien centré donc $\mathbb{E}(\sup_{s\leq u}|S_s^H|) = 0$.

$\mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) \leq e^{u^{4H}(1+Cue^{Ku})^2} \Longrightarrow \sup_{0\leq u\leq t}\mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) \leq \sup_{0\leq u\leq t}\left(e^{u^{4H}(1+Cue^{Ku})^2}\right)$.

Or $Sup_{0\leq u\leq t}\left(e^{u^{4H}(1+Cue^{Ku})^2}\right) < +\infty$.

Ainsi pour $H < \frac{1}{2}$, $\sup_{u\leq t}\mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) < +\infty$.

Pour $H > \frac{1}{2}$, $C(H,T) = \frac{M}{(1+2H)}\left[(1+2H)\beta(H+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-H)C(H) + 2C'(H)\right]t^{2H}$.

Par analogie de ce qui précède, on a :

$\mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) \leq e^{u^{4H}(1+Cue^{Ku})^2}$ avec $a = \frac{(1+2H)^2}{M^2\left[(1+2H)\beta(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H)C(H)+2C'(H)\right]^2} > 0$

donc $\sup_{0\leq u\leq t}\mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) \leq \sup_{0\leq u\leq t}\left(e^{u^{4H}(1+Cue^{Ku})^2}\right) < +\infty$.

Ainsi pour $H > \frac{1}{2}$, $\sup_{0\leq u\leq t}\mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) < +\infty$.

D'où $\sup_{0\leq u\leq t}\mathbb{E}(e^{aQ_u^2}) < \infty$ $\forall H \in [0,1]$, donc $\mathbb{E}(V_t) = 1$.

Ainsi $v_s \in L^2(\Omega \times [0,T])$ et $\mathbb{E}(V_t) = 1$ donc d'après le théorème de Girsanov :

$$F_\theta = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mathbb{P}_0} = \exp\Big(-\int_0^t v_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t v_s^2 ds\Big)$$

appelée vraisemblance en statistique.

Notons $\hat{\theta}$ l'estimateur de θ.

On a : $\hat{\theta} = \sup_\theta F_\theta$.
On avait : $Q_s = \int_0^s \Big(\psi_H(s,r)\int_0^r b(X_z)dz\Big)dr \Longrightarrow Q_u = \int_0^u \Big(\psi_H(u,r)\int_0^r b(X_s)ds\Big)dr$
$F_\theta = \exp\Big(-\theta\int_0^t Q_u dW_u - \frac{1}{2}\theta^2\int_0^t Q_u^2 du\Big)$ car $v_s = \theta Q_s$.

Utilisons la log-vraisemblance en posant :

$f(\theta) = logF_\theta$

$f(\theta) = -\theta\int_0^t Q_u dW_u - \frac{1}{2}\theta^2\int_0^t Q_u^2 du$

$f^{'}(\theta) = -\int_0^t Q_u dW_u - \theta\int_0^t Q_u^2 du$

$f^{''}(\theta) = -\int_0^t Q_u^2 du.$

Puisse que $\int_0^t Q_u^2 du > 0$ alors $f^{''}(\theta) < 0$, d'où f est concave.

Le maximum est atteint au point $\hat{\theta}$ tel que $f^{'}(\hat{\theta}) = 0$.

$f^{'}(\hat{\theta}) = 0 \Longrightarrow -\int_0^t Q_u dW_u - \hat{\theta}\int_0^t Q_u^2 du = 0$

donc $\hat{\theta} = -\frac{\int_0^t Q_u dW_u}{\int_0^t Q_u^2 du}$.

D'où un estimateur de θ est donné par

$$\theta_t = \hat{\theta} = -\frac{\int_0^t Q_u dW_u}{\int_0^t Q_u^2 du}.$$

□

3.4 Forme Alternative de l'Estimateur

Considérons l'équation différentielle stochastique (1) :

$$X_t = \theta\int_0^t b(X_s)ds + S_t^H.$$

Par intégration du noyau $\psi_H(t,s)$ pour $s \in [0,t]$, on obtient :

$$\int_0^t \psi_H(t,s)dX_s = \int_0^t \psi_H(t,s)d\Big(\theta \int_0^s b(X_u)du\Big) + \int_0^t \psi_H(t,s)dS_s^H$$

$$\int_0^t \psi_H(t,s)dX_s \;=\; \theta \int_0^t \psi_H(t,s)b(X_s)ds + W_t \tag{3.24}$$

car $W_t = \displaystyle\int_0^t \psi_H(t,s)dS_s^H$.

Par analogie à la transformation de $\tilde{S}^H$ en (3.8), et à partir de l'EDS (1), on peut écrire

$$X_t \;=\; C(H)\int_0^t n_H(t,s)d\tilde{W}_s \tag{3.25}$$

avec

$$\tilde{W}_t \;=\; W_t + \int_0^t \Big(\int_0^s \psi_H(s,r)\Big(\int_0^r \theta b(X_u)du\Big)dr\Big)ds. \tag{3.26}$$

A partir de (3.23), et par analogie au théorème 3.1.11 on a

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \psi_H(t,s)dX_s.$$

Donc de l'équation (3.22), on obtient

$$\tilde{W}_t \;=\; \theta \int_0^t \psi_H(t,s)b(X_s)ds + W_t. \tag{3.27}$$

En remplaçant $\tilde{W}_t$ de (3.24) dans (3.25) on obtient l'égalité :

$$W_t + \int_0^t \Big(\int_0^s \psi_H(s,r)\Big(\int_0^r \theta b(X_u)du\Big)dr\Big)ds = \theta \int_0^t \psi_H(t,s)b(X_s)ds + W_t$$
$$\Longrightarrow \int_0^t \Big(\int_0^s \psi_H(s,r)\Big(\int_0^r b(X_u)du\Big)dr\Big)ds = \int_0^t \psi_H(t,s)b(X_s)ds.$$

la fonction $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \psi_H(t,s)b(X_s)ds$ est absolument continue car étant définie comme une intégrale de Lebesgue.
Donc à partir de l'implication précédente :

$$\Big(\int_0^s \psi_H(s,r)\Big(\int_0^r b(X_u)du\Big)dr\Big) = \frac{d}{dt}\Big[\int_0^t \psi_H(t,s)b(X_s)ds\Big].$$

Posons :

$$Q_t = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t \psi_H(t,s)b(X_s)ds\right].$$

A partir de (3.20), on obtient :

$\tilde{W}_t = W_t + \theta \int_0^t Q_s ds.$

Sous les conditions du Théorème 3.3.1 de Girsanov avec $v_s = \theta Q_s$, l'estimateur est donné par $\sup_\theta F_\theta$, où

$$F_\theta = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mathbb{P}_0} = \exp\Big(-\int_0^t \theta Q_s dW_s - \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t Q_s^2 ds\Big).$$

Comme $\tilde{W}_s = W_s + \theta \int_0^s Q_u du \Longrightarrow dW_s = d\tilde{W}_s - \theta Q_s ds.$

Donc $F_\theta = \exp\Big(-\int_0^t \theta Q_s d\big(\tilde{W}_s - \theta Q_s ds\big) - \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t Q_s^2 ds\Big)$

$\Longrightarrow F_\theta = \exp\Big(-\theta \int_0^t Q_s d\tilde{W}_s + \theta^2 \int_0^t Q_s^2 ds - \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t Q_s^2 ds\Big)$

$\Longrightarrow F_\theta = \exp\Big(-\theta \int_0^t Q_s d\tilde{W}_s + \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t Q_s^2 ds\Big).$

Utilisons la Log-vraisemblance pour déterminer l'estimateur.

on a :

$\hat{\theta}_t = \sup_\theta log(F_\theta)$

or $log(F_\theta) = -\theta \int_0^t Q_s d\tilde{W}_s + \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t Q_s^2 ds$

posons $f(\theta) = log(F_\theta) \Longrightarrow f(\theta) = -\theta \int_0^t Q_s d\tilde{W}_s + \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t Q_s^2 ds$

$f^{'}(\theta) = -\int_0^t Q_s d\tilde{W}_s + \theta \int_0^t Q_s^2 ds$

$f^{''}(\theta) = \int_0^t Q_s^2 ds.$

Puisse que $\int_0^t Q_s^2 ds > 0$ alors $f^{''}(\theta) > 0$, d'où f est convexe .

L'estimateur de θ_t, noté $\hat{\theta}$ est obtenu tel que $f^{'}(\hat{\theta}) = 0$:

$-\int_0^t Q_s d\tilde{W}_s + \hat{\theta} \int_0^t Q_s^2 ds = 0.$

D'où

$$\theta_t = \hat{\theta} = \frac{\int_0^t Q_s d\tilde{W}_s}{\int_0^t Q_s^2 ds}.$$

La dernière formule montre explicitement que l'estimateur de θ_t est observable s'il est possible d'observer la trajectoire de la solution X_t.

Maintenant nous allons dériver la forme de l'estimateur du maximum de vraisemblance en utilisant une martingale fondamentale sous-fractionnaire.

Soit d_H défini par :

$$d_H = \frac{2^{H-\frac{1}{2}}}{C(H)\Gamma(\frac{3}{2}-H)\sqrt{\pi}}.$$

Le processus défini par

$$M_t^H = d_H \int_0^t s^{\frac{1}{2}-H} dW_s$$

avec W_s un mouvement brownien standard est appelé martingale fondamentale sous-fractionnaire.

Comme :

$$W_t = \int_0^t \psi_H(t,s) dS_s^H$$

$$\Longrightarrow dW_t = \psi_H(t,s) dS_s^H$$

donc

$$M_t^H \quad = \quad d_H \int_0^t s^{\frac{1}{2}-H} \psi_H(t,s) dS_s^H. \tag{3.28}$$

En posant $k_H(t,s) = d_H s^{\frac{1}{2}-H}\psi_H(t,s)$,
on obtient :

$$M_t^H = \int_0^t k_H(t,s) dS_s^H.$$

Considérons $\omega_H(t)$ une fonction définie par

$$\omega_H(t) = < M^H >_t$$

où $< M^H >_t$ est appelé crochet de M_t^H.

M_t^H peut être définie comme une intégrale de Winner par rapport au mouvement brownien W_s.
Par définition du crochet, on a :

$$\begin{aligned}
\omega_H(t) &= \int_0^t \left(d_H s^{\frac{1}{2}-H}\right)^2 ds \\
&= d_H^2 \int_0^t s^{1-2H} ds \\
&= d_H^2 \left[\frac{1}{2-2H} s^{2-2H}\right]_0^2 \\
&= \frac{d_H^2}{2-2H} t^{2-2H}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

On obtient : $\omega_H(t) = \lambda_H t^{2-2H}$ où $\lambda_H = \frac{d_H^2}{2-2H}$.
La filtration générée par M_t^H coïncide avec celle générée par S^H.
Considérons toujours l'équation différentielle stochastique (1).
Par intégration du noyau $k_H(t,s)$ pour $s \in [0,t]$, on obtient :

$$\int_0^t k_H(t,s) dX_s = \int_0^t k_H(t,s) d\Big(\theta \int_0^s b(X_u) du\Big) + \int_0^t k_H(t,s) dS_s^H$$
$$\Longrightarrow \int_0^t k_H(t,s) dX_s = \theta \int_0^t k_H(t,s) b(X_s) ds + M_t^H \text{ car } M_t^H = \int_0^t k_H(t,s) dS_s^H.$$

En posant :

$$Z_t = \int_0^t k_H(t,s) dX_s$$

on obtient :

$$Z_t = \theta \int_0^t k_H(t,s) b(X_s) ds + M_t^H. \tag{3.30}$$

A partir de l'expression $Z_t = \displaystyle\int_0^t k_H(t,s) dX_s$, par analogie au théorème 3.1.11, on peut écrire :
$X_t = C(H) \int_0^t k_H^{-1}(t,s) dZ_s$.

Puisse que $k_H^{-1}(t,s) = \frac{1}{d_H} s^{H-\frac{1}{2}} \psi_H^{-1}(t,s)$, et comme l'inverse du noyau $\psi_H(t,s)$ est le noyau $n_H(t,s)$, alors

$$k_H^{-1}(t,s) = \frac{1}{d_H} s^{H-\frac{1}{2}} n_H(t,s).$$

D'où

$$X_t = C(H)\int_0^t \frac{1}{d_H} s^{H-\frac{1}{2}} n_H(t,s) dZ_s$$
$$= \int_0^t K_H(t,s) dZ_s \tag{3.31}$$

avec $K_H(t,s) = \frac{C(H)}{d_H} s^{H-\frac{1}{2}} n_H(t,s)$.

Par analogie aux équations (3.23) et (3.24) à la page 51, on peut écrire à partir de $X_t = \int_0^t K_H(t,s)dZ_s$, l'équation suivante :

$$Z_t = M_t^H + \int_0^t \Big(\int_0^s d_H r^{\frac{1}{2}+H} \psi_H(s,r) \Big(\int_0^r \theta b(X_u) du \Big) dr \Big) ds$$

$$Z_t = M_t^H + \int_0^t \Big(\int_0^s k_H(s,r) \Big(\int_0^r \theta b(X_u) du \Big) dr \Big) ds \tag{3.32}$$

En comparant les equations 3.30 et 3.22, on obtient :

$$\int_0^t \Big(\int_0^s k_H(s,r) \Big(\int_0^r b(X_u) du \Big) dr \Big) ds = \int_0^t k_H(t,s) b(X_s) ds.$$

En dérivant l'égalité précédente par rapport à $\omega_H(t)$ on obtient :

$$\int_0^s \Big(k_H(s,r) \Big(\int_0^r b(X_u) du \Big) dr \Big) ds = \frac{d}{d\omega_H(t)} \int_0^t k_H(t,s) b(X_s) ds.$$

Posons :

$$R_t = \frac{d}{d\omega_H(t)} \int_0^t k_H(t,s) b(X_s) ds. \tag{3.33}$$

Les exemples de chemins du processus $\{X_t, t \leq 0\}$ sont suffisamment lisses pour que le processus représenté par R_t soit bien défini lorsque la dérivée est comprise dans le sens d'une continuité absolue par rapport à la mesure générée par ω_H.
A partir de l'équation (3.32), on obtient :

$$Z_t = \theta \int_0^t R_s d\omega_H(s) + M_t^H. \tag{3.34}$$

Ainsi on peut poser :

$$v_s = \theta R_s$$

on a :

$$v_s = \theta \frac{d}{d\omega_H(t)} \int_0^t k_H(t,s) b(X_s) ds.$$

Sous les conditions du théorème de Girsanov :

i $v_s \in L^2(\Omega \times [0,T])$
ii $\mathbb{E}(V_t) = 1$
Avec
$$V_t = \exp\Big(-\theta \int_0^t R_s dM_s - \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t R_s^2 d\omega_H(s)\Big).$$
D'après le théorème de Girsanov l'estimateur du parametre θ est donné par $Sup_\theta F_\theta$ avec :
$$F_\theta = \exp\Big(-\theta \int_0^t R_s dM_s - \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t R_s^2 d\omega_H(s)\Big).$$
Utilisons la log-vraisemblance pour déterminer le $Sup_\theta F_\theta$.
Posons :$f(\theta) = Log F_\theta$.

$$f(\theta) = -\theta \int_0^t R_s dM_s - \frac{1}{2}\theta^2 \int_0^t R_s^2 d\omega_H(s)$$
$$f^{'}(\theta) = -\int_0^t R_s dM_s - \theta \int_0^t R_s^2 d\omega_H(s)$$
$$f^{''}(\theta) = -\int_0^t R_s^2 d\omega_H(s) < 0.$$

Comme $f^{''} < 0$ alors la fonction f est concave, d'où le maximum de f est atteint au point $\hat{\theta}$ tel que $f^{'}(\hat{\theta}) = 0$.

On a $f^{'}(\hat{\theta}) = 0 \Longrightarrow -\int_0^t R_s dM_s - \hat{\theta}\int_0^t R_s^2 d\omega_H(s) = 0$

$$\hat{\theta} = -\frac{\displaystyle\int_0^t R_s dM_s}{\int_0^t R_s^2 d\omega_H(s)}.$$

D'où l'estimateur est donné par

$$\theta_t = -\frac{\displaystyle\int_0^t R_s dM_s}{\displaystyle\int_0^t R_s^2 d\omega_H(s)}. \tag{3.35}$$

Remarque 3.4.1. *Si θ_0 est le vrai paramètre, on peut montrer que :*
$$\frac{d\mathbb{P}_\theta^T}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^T} = exp\Big[\Big(\theta_0 - \theta\Big)\int_0^T R_s dM_s - \frac{1}{2}\Big(\theta_0 - \theta\Big)^2 \int_0^T R_s^2 dw_H(s)\Big].$$
Par conséquent :
$$\hat{\theta_T} - \theta = \frac{\displaystyle\int_0^T R_s dM_s}{\displaystyle\int_0^T R_s^2 dw_H(s)}.$$

Pour montrer que $\hat{\theta_T}$ *est fortement consistent, il faut montrer que* $\lim_{T \to +\infty} \hat{\theta_T} - \theta = 0$.

Conclusion générale et perspectives

En conclusion de ce travail, nous pouvons noter que l'étude des mouvements browniens sous-fractionnaires à travers leurs propriétés trajectorielles et l'utilisation des martingales fondamentales sous-fractionnaires ont conduit à plusieurs résultats dans l'estimation paramétrique des équations différentielles stochastiques dirigées par les mouvements browniens sous-fractionnaires .

Pour cela, il est utile de se pencher sur d'autres méthodes d'estimations telles que la méthode de l'estimateur bayésien et celle de l'estimateur de la distance minimale.

Dans le futur, nous pouvons aborder le problème de l'évaluation de la qualité des différentes estimateurs et de pouvoir faire une comparaison entre eux.

Naturellement, on voudra qu'un estimateur possède quelques unes(à défaut de toutes)des qualités suivantes :

- La convergence ou la consistance.
- L'absence de biais.
- La précision.
- Le risque faible.
- La Préférence.
- L'admissibilité.
- Le comportement asymptotique.

Bibliographie

[1] A. Frieman, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Academic Press, NY (1975).

[2] A. Le Breton, Filtering and parameter estimation in a sample linear model driven by a fractional Brownian motion, *Statistics and Probability Letters* 38(3), (1998), 263-274.

[3] A.DIEDHIOU, C.MANGA, I.MENDY, Estimation paramètrique des Équations Différentielles Stochastiques avec Mouvement Brownien sous-fractionnaire Additive, *jounal des mathématiques numériques et stochastiques*, 3 (1) : 37-45, 2011.

[4] B. L. S. Prakasa Rao, Parametric estimation for linear stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion, *Random Operators and Stochastic Equations* 11(3), (2003), 229-242.

[5] B. L. S. Prakasa Rao, *Statistical Inference for Diffusion Type Processes*, Arnold and Oxford University Press, NY (1999).

[6] C. A. Tudor, On the Wiener integral with respect to a sub-fractional Brownian motion on interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 351, (2007), 456-468.

[7] C. A. Tudor, and F. Viens, Statistic Aspect of the fractional stochastic calculus, *The Annals of Statistics* 35 (3), (2007), 1183-1212.

[8] F. Comte, Simulation and estimation of long memory continuous-time models, *Journal of Time Series Analysis* 17(1), (1996), 19-36.

[9] I. Mendy, A Stochastic differential equation driven by a sub-fractional Brownian motion, (2010), Preprint.

[10] I. Mendy, and A. F. Yode, Parameter estimation of the sub-fractional Ornstein-Uhlenbeck type process, (2010), Preprint.

[11] I. Norros, E. Valkeila, and J. Virtamo, An elementary approach to a Girsanov formula and other analytic results on fractional Brownian motions, *Bernoulli* 5(4), (1999), 571-587.

[12] Jean-Fran¸cois Le Gall. Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Spinger, Coll. Mathématiques et applications, vol. 71, 2013. Voir les notes de cours M2 Mathématiques de l'Université Paris sud-Orasy.

[13] K. Dzhaparidze, and H. Van Zanten, A series expansion of fractional Brownian motion, *Probability Theory and Related Fields* 130, (2004), 39-55.

[14] L. Decreusefond, and A. S. Üstünel, Stochstic analysis of the fractional Brownian motion, *Potential Analysis* 10, (1999), 177-214.

[15] M. L. Kleptsyna, and A. Le Breton, Some explicit statistical results about elementary fractional type models, *Nonlinear Analysis : Theory Methods and Applications* 47, (2001), 4783-4794.

[16] M. L. Kleptsyna, A. Le Breton, and M. C. Roubaud, Parameter estimation and optimal filtering for fractional type stochastic systems, Statistical Inference for Stochastic Processes 3, (2000), 173-182.

[17] T. L. G. Bojdecki, L. G. Gorostiza, and A. Talarczyk, Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times, *Statistics and Probability Letters* 69, (2004), 405-419.

[18] T. Söttinen, and C. A. Tudor, parameter estimation for stochastic equations with additive fractional Brownian sheet, *Statistical Inference for Stochastic Processes* 11, (2008), 221-236.