Université Assane Seck de Ziguinchor (U.A.S.Z)
U.F.R des Sciences et Technologies (URF-ST)

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine :	Sciences et Technologies
Mention :	Mathématiques et Applications
Spécialité :	Mathématiques Appliquées
Option :	Statistique

TITRE :

Etude spectrale et mise en oeuvre de l'ACP (analyse en composantes principales) dans le domaine des fréquences de processus cyclostationnaire

Présenté par

Marcel Sihintoé BADIANE

Sous la direction de : Dr Emmanuel Nicolas CABRAL

Membres du Jury :

PRESIDENT :

Salomon SAMBOU, Professeur titulaire (UFR-ST/U.A.S.Z)

DIRECTEUR :

Emmanuel. N CABRAL, Maître de conférence Assimilé (UFR-ST/U.A.S.Z)

EXAMINATEURS :

Alassane DIEDHIOU, Professeur Assimilé (UFR-ST/U.A.S.Z)
Clément MANGA, Maître de conférence Assimilé (UFR-ST/U.A.S.Z)

Soutenu le 17 Juin 2017

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Emmanuel Nicolas CABRAL pour avoir accepté de diriger ce travail. Je tiens à le remercier de m'avoir accordé sa confiance en faisant preuve d'une très grande disponibilité à mon égard. Ses conseils, encouragements et remarques minutieuses ont été déterminants et je réalise aujourd'hui à quel point travailler avec lui a été enrichissant.

Je tiens à remercier l'Université Assane SECK, l'Ufr des Sciences et Technologies, le Département de Mathématiques ainsi que tous les professeurs qui nous ont initié et donné les bases de l'étude mathématique pour exceller dans ce domaine.

J'exprime ma gratitude en vers le président du jury le professeur Marie Salomon Sambou qui a accepté de présider ce jury et d'apporté sa contribution pour la présentation de ce mémoire. J'exprime aussi ma gratitude en vers les professeurs Alassane Diédhiou, Clément Manga qui ont bien accépté de m'examiner et d'apporter leurs expertismes.

J'exprime aussi ma gratitude en vers mes frères Albert Manga Badiane, Jean Badiane, Abasse Ba et Paul Badiane , qui m'ont été d'une aide remarquable car m'ayant conseiller, ils m'ont suivi tout au long de ma recherche.

Mes remerciements vont à l'endroit de mes promotionnaires Ami Diédhiou, Guillaume Sadio, Mamadou Baldé et amis qui m'ont été d'un soutient indéfectible.

Et puis, il y a la famille, c'est important la famille : un grand merci à mes chères frères et soeurs, à mon défunt tuteur Jacob Sambou et défunte tutrice Adeline Diatta et surtout à mes parents Jean Pierre et Elisabeth Manga pour m'avoir toujours soutenu et encouragé.

Table des matières

Introduction

Dans plusieurs domaines de la statistique fonctionnelle et opérationnelle, les outils de modélisation souvent utilisés sont placés dans un contexte stationnaire. Néanmoins, dans des domaines tels que la communication, le traitement de la parole ou encore la mécanique, les hypothèses simplificatrices permettant de travailler dans un contexte stationnaire ne sont plus valables. Pour illustrer cela, nous rencontrons, par exemple, ce phénomène dans les données de la météorologie ou du traitement de signaux, où l'on peut retrouver généralement la présence d'un élément d'allure périodique dans les données émises. Cette périodicité apparente est due à l'existence d'un cycle de base que l'on rencontre aussi dans la plupart des systèmes mécaniques. Si les paramètres de l'emetteur sont "constants" (pression, température, vitesse moyenne,...), l'on dira que les données qui en sont issues sont périodiquement corrélées. Mathématiquement, un processus est dit périodiquement corrélé si l'on retrouve des périodicités dans certains de ses paramètres statistiques. Dans la littérature, cette notion est connue sous plusieurs vocables : processus **cyclostationnaire**, processus **périodiquement stationnaire** ou encore processus **corrélé cyclique**. De façon plus générale, un processus est dit cyclostationnaire (au sens large) si et seulement si ses statistiques jusqu'à l'ordre 2 dépendent de façon périodique du temps. Ainsi sa moyenne (resp. fonction d'autocorrélation) est identique pour deux instants décalés d'un multiple d'une période cyclique T_0 (cf. notamment Gardner 1988, 1994). Autrement dit, un processus périodiquement corrélé a sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation périodiques.

Les premières études sur ces processus "périodiques " datent des années 1950 avec notamment les travaux pionniers de Bennett (1958) et de Gladysev (1961, 1963). En effet, Bennett était le premier à introduire les processus cyclostationnaires dans le contexte de la théorie des communications. Quelques années plus tard, Gladysev a publié les premières analyses sur les séquences périodiquement corrélées. Depuis, cette notion de cyclostationnarité a suscité un intérêt croissant à partir des années 1980 avec l'explosion de la théorie des télécommunications. A titre d'exemples, on peut citer, entre autres, les travaux de Gardner (1985, 1987, 1991) qui a développé plusieurs représentations des processus cyclostationnaires à temps continu et les a utilisées dans la résolution des problèmes d'estimation.

La stationnarité, quant à elle, implique l'invariance dans le temps. Par opposition, un processus non stationnaire a ses statistiques variantes dans le temps. Et la cyclostationnarité est une classe spécifique de la non stationnarité puisqu'elle implique une variation cyclique des statistiques dans le temps. Les processus cyclostationnaires sont souvent générés par des systèmes assortis aléatoire et perturbée périodiquement dans le temps. Comme exemple de systèmes physiques, on trouve les processus météorologiques qui sont perturbés par l'effet de la rotation de la terre ou les bruits produits par les machines tournantes (voir Hurd et al., 2004).

En plus des nombreuses applications que l'on peut retrouver dans Benzatri (1997), Boshnakov (2002) ou encore Serpedin et al (2005), l'intérêt d'une telle étude réside également dans la possibilité notamment d'effectuer l'analyse, dans le domaine des fréquences, des processus cyclostationnaires.

L'A.C.P. d'une fonction aléatoire, quant à elle, fait l'objet de beaucoup d'investigations. On peut citer pour cela les travaux notamment de Dauxois et Pousse (1976), Dauxois et al. (1982). D'autres auteurs ont développé cette analyse en faisant une hypothèse de stationnarité. C'est le cas en particulier de Brillinger (1975, 2001) qui introduit une analyse qui combine analyse harmonique et A.C.P. classique. Shumway et Stoffer (2000) développent les aspects pratiques de cette dernière. Elle peut se présenter comme la recherche d'un résumé de plus faible dimension, optimal en un sens à préciser. Brillinger (1975, 2001) suppose qu'il y a absolue sommabilité de la fonction d'autocovariance, ce qui implique l'existence d'une fonction de densité spectrale. Cette analyse, dont Brillinger est le premier à avoir eu l'idée, revient à effectuer l'A.C.P. des composantes spectrales pour chacune des fréquences et nécessite donc la diagonalisation d'une infinité d'opérateurs. C'est la raison pour laquelle elle ne peut être réalisée d'un point de vue pratique, sauf lorsque le spectre est fini. Boudou et Dauxois (1994) montrent que cette analyse revient à effectuer l'A.C.P. de la m.a. associée telle qu'ils la définissent en Boudou et Dauxois (1989).

On peut alors étendre cette analyse au cas où l'ensemble d'indiçage est un groupe Abélien localement compact. Cela permet de considérer des fonctions aléatoires définies sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{Z}^k$, $[-\pi, \pi[$ ou encore $[-\pi, \pi[^k$. Notons que l'A.C.P. d'une série périodique est alors possible, ce que ne permettaient pas les travaux de Brillinger car, alors, la m.a. est une somme de Dirac et ne possède donc pas de densité par rapport à la mesure de Haar. Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque nous ne sommes pas en présence d'un spectre fini, cette analyse nécessite la diagonalisation d'une infinité d'opérateurs et ne peut être réalisée d'un point de vue pratique. Boudou (1995) tourne cette difficulté grâce à une discrétisation du spectre, lorsque la discrétisation est de plus en plus fine, il obtient de bonnes propriétés de convergence.

Plan du mémoire

Dans le premier chapitre, il s'agira de faire un bref rappel historique de l'objet de notre étude : la série stationnaire.

• Nous présentons les différents outils spectraux qui sont classiquement associés à une série stationnaire, d'une façon plus précise, la mesure aléatoire, l'opérateur unitaire et la mesure spectrale (à valeurs projecteurs). Les séries considérées ici sont définies sur un groupe Abélien compact G. Nous étudions les relations existant entre ces différents éléments. Et notre étude se basera lorsque le groupe G est $\mathbb{Z}^k$ ou encore $[-\pi, \pi[^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

• Nous présentons l'A.C.P. dans le domaine des fréquences d'une série stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ p-dimensionnelle. Cette analyse se résume en la recherche d'une série q-dimensionnelle ($q < p$) stationnaire et stationnairement corrélée avec $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la résumant au mieux. Et grâce à la correspondance biunivoque qui existe entre une série stationnaire et mesure aléatoire, nous montrerons que cette analyse est équivalente à l'A.C.P. d'une mesure aléatoire .

• Nous étudions aussi un cas de figure pour lequel l'A.C.P. dans le domaine des fréquences d'une série est identique à l'A.C.P. classique de chacun des éléments de la série (cf. Boudou et Viguier-Pla 2006).

Dans plusieurs domaines tels que la communication, le traitement de la parole, des signaux ou encore la mécanique et la météorologie, les hypothèses simplificatrices permettant de travailler dans un contexte stationnaire ne sont plus valables. Tels est l'intérêt de ce deuxième chapitre ou nous abordons une classe de fonctions aléatoires non stationnaires très utilisées de nos jours : séries cyclostationnaire ou stationnairement corrélées. Par le biais d'une méthode de stationnarisation (cf. Kallianpur et Mandrekar), nous étudions cette classe de processus sous un nouvel angle et étudions les outils spectraux que nous pouvons lui associer.

Dans le troixième chapitre, nous étudions un cas pratique d'A.C.P. dans le domaine des fréquences de processus cyclostationnaire à partir de la proximité entre A.C.P. dans le domaine des fréquences et A.C.P. classique.

Enfin, nous proposerons, en guise de conclusion, quelques perspectives qui nous semblent importantes à approfondir dans le futur.

Chapitre 1

PROCESSUS STATIONNAIRE ET ÉLÉMENTS SPECTRAUX ASSOCIÉS.

Dans la théorie Mathématique des statistiques, l'on s'occupe de phénomènes ou observations (des expériences) pouvant se répéter plusieurs fois dans les mêmes conditions. En effet, les caractéristiques numériques de ces phénomènes y sont étudiées, c'est à dire les quantités prenant différentes valeurs dépendant du résultat des observations. De telles quantités sont connues sous le vocable de variables aléatoires, dont voici quelques exemples :
• le nombre de points qui apparait lorsque l'on jette un dé à six faces ;
• le nombre d'appels reçus (ou émis) dans une station téléphonique durant un intervalle donné ;
• l'erreur commise dans la mesure d'une quantité physique lorsqu'un dispositif de sécurité est donné.
Lorsqu'un processus contient de l'information aux yeux du statisticien, il contient nécessairement une part d'incertitude. Par ailleurs, pour le physicien par exemple, un signal émis est corrompu par du bruit et des interférences qui ne peuvent être connus de façon certaine et sont donc modélisés comme des signaux aléatoires ou comme la sortie d'un processus stochastique. De tels outils, qui prennent en compte les variables aléatoires unidimensionnelles et multidimensionnelles, sont appelés fonctions aléatoires. Elles sont caractérisées par les résultats d'une observation qui prennent différentes valeurs lorsque l'observation est répétée plusieurs fois. L'un des exemples types d'une telle situation se rencontrent dans la théorie des mouvements browniens où chaque coordonnée de la particule brownienne est une fonction aléatoire dépendant du temps.

1.1 NOTATIONS.

Dans tout le texte, H désigne un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert séparable (qui par la suite, sera du type $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $(= L^2)$ ou $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $(= L^2_p)$) et $P(H)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de H.

$\mathcal{B}$ désigne la trace de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la tribu de Borel de $\mathbb{R}$, sur $\Pi = [-\pi; \pi[$.

Si φ est un opérateur linéaire continu, on désigne par φ^* l'opérateur adjoint.

Par $HS(H_1, H_2)$ (resp. $HS(H_1)$), on désigne l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2 (resp. (H_1)), H_1 et H_2 étant des $\mathbb{C}$-espaces de Hilbert séparables muni du produit scalaire

$$< ., . >: (L, K) \in (HS(H_1, H_2))^2 \longmapsto < K, L >_2 = tr(K \circ L^*)$$

avec $tr(x)$ est la trace de x. Afin d'alléger les notations, on écrit $HS(p, q)$ (resp. $HS(p)$) au lieu de $HS(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$ (resp. $HS(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p)$).

Pour tout couple (u, v) de $H_1 \times H_2$, on définit l'opérateur de rang 1,

$$h \in H_1 \longmapsto < h, u >_{H_1} v \in H_2,$$

qui est noté $u \otimes v$. Si (X, Y) est un couple d'éléments de $L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, il est facile de vérifier que l'application $w \in \Omega \longmapsto X(w) \otimes Y(w) \in HS(H)$ est mesurable et de norme $\mathbb{P}$-intégrable, et $\int X(w) \otimes Y(w) d\mathbb{P}(w)$ est noté $\mathbb{E}(X \otimes Y)$.

Désignons ε une tribu de parties d'un ensemble E et $I_{\mathbb{C}^p}$ l'application identité de $\mathbb{C}^p$.

Soit M une mesure positive définie sur l'espace mesurable (E, ε) et à valeurs dans $HS(p)$, de densité M'_t relativement à $t = trM$. On note $(p, q) - L^2(M)$ l'espace quotient de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$ des éléments ψ de $[HS(p, q)]^E$ tels que $e \in E \longmapsto \psi(e) \circ M'_t(e)^{1/2}$ appartienne au sous espace fermé

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in L^2_{HS(p,q)}(E, \varepsilon, t); (\forall\ e \in E)(\exists\ \psi(e) \in HS(p, q))(\varphi(e) = \psi(e) \circ M'_t(e)^{1/2})\}$$

par le noyau de l'application $\psi \in \mathfrak{m} \longmapsto \psi \circ M'^{1/2}_t \in \mathcal{S}$.

Tout élément de $(p, q) - L^2(M)$ possède un représentant ε-mesurable que l'on note de la même façon. Muni du produit scalaire :

$$< ., . >_{p,q}: (\varphi, \psi) \longmapsto \int tr(\varphi \circ M'_t \circ \psi^*) dt$$

$(p, q) - L^2(M)$ est un espace de Hilbert. À chaque mesure aléatoire (m.a.) orthogonale Z définie sur (E, ε) et à valeurs dans L^2_p (p-m.a.), on associe la mesure positive induite

$$M_Z : A \in \varepsilon \longmapsto \widetilde{Z(A)} \circ \widetilde{Z(A)}^* .$$

On note t_Z la trace de M_Z et M'_Z la densité de M_Z relativement à t_Z. Nous désignons par $[x]$ la partie entière d'un réel x. On note $\overline{x}$ le conjugué de x.

On désigne par $H_Z(p,q)$ la fermeture du sous-espace $vect\{L \circ Z(A); A \in \varepsilon, L \in HS(p,q)\}$ de L^2_q.

Il existe une isométrie $\varphi \longmapsto \int \varphi dZ$ de $(p,q)-L^2(M)$ sur $H_Z(p,q)$ telle que l'on ait :

$$(\forall\ A \in \varepsilon)(\forall\ L \in HS(p,q)) \quad (\int 1_A L dZ) = L \circ Z(A).$$

1.2 CORRESPONDANCES ENTRE MESURE ALÉATOIRE ET SÉRIE STATIONNAIRE.

1.2.1 Série stationnaire.

Définition 1. *On appelle série stationnaire toute famille $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H telle que $< X_n, X_m >_H = < X_{n-m}, X_0 >_H$ pour tout couple $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.*

1.2.2 Mesure aléatoire (m.a.).

Définition 2. *Une m.a. Z, à valeurs dans H, est une mesure vectorielle, définie sur ε prenant ses valeurs dans H, telle que $< Z(A), Z(B) >_H = 0$, pour tout couple (A,B) d'éléments disjoints de ε.*

Proposition 1.

1. *Si Z est une m.a. sur ε à valeurs dans H et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ε deux à deux disjoints, alors la famille $\{Z(A_n); n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de H est sommable et*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} Z(A_n) = Z(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n);$$
2. *Si Z est une m.a. sur ε à valeurs dans H alors pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ε,*
$$\lim_n Z(A_n) = Z(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n);$$
3. *Si Z est une m.a. sur ε à valeurs dans H alors pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ε,*
$$\lim_n Z(A_n) = Z(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n);$$
4. *Soit C une famille de parties de E stable par intersection finie et engendrant ε. Si Z et Z' sont deux m.a. sur ε à valeurs dans H et telles que $Z(A) = Z'(A)$, pour tout $A \in C$, alors $Z = Z'$.*

Théorème 1. *Si Z est une mesure aléatoire (m.a.), alors $X_n = \int e^{i.n} dZ$ est une série stationnaire.*

Preuve.
Soit n et m des éléments de $\mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} < X_n, X_m > &=< \int e^{i.n} dZ, \int e^{i.m} dZ > \\ &=< \int e^{i(n-m)} dZ, \int e^{i.0} dZ > \\ &=< X_{n-m}, X_0 > . \end{aligned}$$

□

Théorème 2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série stationnaire d'éléments de H, on peut lui associer une m.a. Z et une seule définie sur ε à valeurs dans H telle que :*

$$X_n = \int e^{i.n} dZ.$$

Définition 3. *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux séries stationnaires de H. On dit qu'elles sont stationnairement corrélées lorsque pour tous n et m de $\mathbb{Z}$, on a :*

$$< X_n, X'_m >_H =< X_{n-m}, X'_0 >_H .$$

Définition 4. *La stationnarité corrélée peut s'exprimer à partir de la m.a. c'est-à dire si Z et Z' sont respectivement les m.a. associées à $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, alors elles sont stationnairement corrélées si $< Z(A), Z'(B) >_H = 0$ pour tous A et B éléments disjoints de ε.*

1.2.3 Fonction aléatoire multidimensionnelle stationnaire.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H est un espace de variables aléatoires de type $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, espace noté L^2_p, et nous définissons les outils classiquement associés à une fonction aléatoire continue stationnaire définie sur cet espace et dite aussi p-stationnaire, ainsi que les différentes relations existant avec le cas général standard présenté antérieurement.

Si X est un élément de L^2_p, on désigne par $\widetilde{X}$ l'opérateur de Hilbert-Schmidt de $L^2_p(\mathbb{P})$ dans $\mathbb{C}^p$ qui a f associe

$$\mathbb{E}(fX) = \int fX d\mathbb{P}$$

et l'application $X \in L^2_p \longmapsto \widetilde{X} \in HS(L^2(\mathbb{P}), \mathbb{C}^p)$ est une isométrie.

Définition 5. *On dit que Z est une mesure aléatoire p-dimensionnelle (p-m.a.) si Z est une application de ε dans L^2_p telle que*

1. *pour tout couple* (A, B) *d'éléments disjoints de* ε *:*

$$Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B) \quad et \quad \widetilde{Z(A)} \circ \widetilde{Z(B)}^* = 0;$$

2. *pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *d'éléments de* ε *convergeant en décroissant vers* $\emptyset$*, on a :*

$$\lim_n ||Z(A_n)||_{L_p^2} = 0.$$

On peut déduire la

Propriété 1. *Une p-m.a.* Z *définie sur* ε *à valeurs dans* L_p^2 *est une m.a. définie sur* ε *à valeurs dans* L_p^2*.*

Effectivement, du fait que

$$tr[\widetilde{Z(A)} \circ \widetilde{Z(B)}^*] =< Z(A), Z(B) >_{L_p^2},$$

on déduit facilement qu'une p-m.a. est aussi une m.a..

De plus, lorsque Z est une p-m.a. définie sur ε, on vérifie que l'application

$$M_Z : A \in \varepsilon \longmapsto \widetilde{Z(A)} \circ \widetilde{Z(A)}^* \in HS(\mathbb{C}^p)$$

est une mesure "opératorielle" dite mesure spectrale de la p-m.a. Z. Notons, ici, qu'il ne s'agit pas de la notion de mesure à valeurs projecteurs, qui sera abordée plus tard (cf. paragraphe 1.3) .

On peut alors établir l'existence d'une application $\frac{dM_Z}{d\mu_Z} \in [HS(\mathbb{C}^p)]^E$ mesurable de norme μ_Z-intégrable, telle que pour tout $A \in \varepsilon$,

$$M_Z(A) = \int 1_A \frac{dM_Z}{d\mu_Z} d\mu_Z.$$

Cette application est dite dérivée de M_Z par rapport à μ_Z et est notée par M'_Z.

Il est clair maintenant qu'une p-m.a. est une m.a. particulière, l'inverse n'étant pas exact. Et du fait de la correspondance biunivoque entre m.a. (resp. p-m.a.) et fonction aléatoire continue stationnaire (resp. p-stationnaire), les relations entre ces deux notions sont résumées par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{r} \text{p-m.a. : } A \cap B = \emptyset\,; \\ \widetilde{Z(A)} \circ \widetilde{Z(B)}^* = 0 \end{array}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\begin{array}{r} \text{p-stationnaire :} \\ \widetilde{X_n} \circ \widetilde{X_m}^* = \widetilde{X_{n-m}} \circ \widetilde{X_0}^* \end{array}} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\begin{array}{r} \text{m.a. : } A \cap B = \emptyset \\ < Z(A), Z(B) >_H = 0 \end{array}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\begin{array}{r} \text{stationnaire :} \\ < X_n, X_m > = < X_{n-m}, X_0 >_H \end{array}}
\end{array}$$

1.2.4 Intégrale stochastique et mesure aléatoire image.

Théorème-Définition 1. *Soit Z une mesure aléatoire sur ε à valeurs dans H alors :*

- *l'application $\mu_Z : A \in \varepsilon \longmapsto ||Z(A)||_H^2 \in \mathbb{R}^+$ est une mesure bornée ;*
- *il existe une et une seule isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(E, \varepsilon, \mu_Z)$ sur H_Z qui, pour tout A de ε, associe $Z(A)$ à 1_A. L'image d'un élément de f de $L^2(\mu_Z)$ par cette isométrie est appelée intégrale stochastique de f par rapport à Z et est notée $\int f dZ$.*

Si nous notons par $(F, \mathcal{F})$ un deuxième espace mesurable, on a le

Théorème-Définition 2. *Si f est une application de E dans F mesurable et Z une mesure aléatoire sur ε à valeurs dans H alors*

1. *l'application $f_Z : A \in \mathcal{F} \longmapsto Z(f^{-1}(A)) \in H$ est une m.a. dite m.a. image de Z par f et $\mu_{f_Z} = f_{\mu_Z}$;*
2. *si φ est un élément de $L^2(F, \mathcal{F}, \mu_{f_Z})$, alors $\varphi \circ f$ appartient à $L^2(E, \varepsilon, \mu_Z)$ et $\int \varphi df_Z = \int \varphi \circ f dZ$.*

Preuve.
L'égalité de la relation $\mu_{f_Z} = f_{\mu_Z}$ est légitimée par :

$$\mu_{f_Z}(A) = ||f_Z(A)||^2 = ||Z(f^{-1}(A))||^2 = \mu_Z(f^{-1}(A)) = f_{\mu_Z}(A).$$

La point 2. se vérifie facilement pour les indicatrices puis, grâce à la linéarité, pour tout élément de $vect\{1_A; A \in \mathcal{F}\}$ et enfin, en utilisant des arguments de continuité, compte-tenu des propriétés de densités des indicatrices, pour tout élément de $L^2(F, \mathcal{F}, \mu_{f_Z})\square$.

Soit Z une m.a. sur ε à valeurs dans H, et φ un élément quelconque de $L^2(E, \varepsilon, \mu_Z)$. Notons μ la mesure bornée

$$A \in \varepsilon \longmapsto \int 1_A |\varphi|^2 d\mu_Z \in \mathbb{R}^+$$

et Z_φ l'application

$$A \in \varepsilon \longmapsto \int 1_A \varphi dZ \in H.$$

Si l'on remarque que $< Z_\varphi(A), Z_\varphi(B) >_H = \mu(A \cap B)$, pour tout couple (A, B) d'éléments de ε, on peut facilement vérifier que Z_φ est une m.a. et que $\mu_{Z_\varphi} = \mu$. Lorsque f est un élément de $L^2(E, \varepsilon, \mu_{Z_\varphi})$, donc de $L^2(E, \varphi, \mu)$, il est clair que $f\varphi$ appartient à $L^2(E, \varepsilon, \mu_Z)$. Compte-tenu des propriétés de densités des indicatrices, f peut se mettre sous la forme

$$f = \lim_m \sum_{j \in J_m} \alpha_{jm} 1_{A_{jm}}$$

dans $L^2(\mu)$, avec $|J_m| < +\infty$ et A_{jm} élément de ε ; ce dont on déduit

$$f.\varphi = \lim_m \sum_{j \in J_m} \alpha_{jm} 1_{A_{jm}} \varphi$$

dans $L^2(\mu_Z)$, et donc

$$\int f.\varphi dZ = \lim_m \sum_{j \in J_m} \alpha_{jm} Z_\varphi(A_{jm}) = \int f dZ_\varphi.$$

Nous pouvons donc affirmer la

Propriété 2. *Lorsque Z est une m.a. sur ε à valeurs dans H et φ un élément quelconque de $L^2(E, \varepsilon, \mu_Z)$ alors*

1. *l'application $Z_\varphi : A \in \varepsilon \longmapsto \int 1_A \varphi dZ \in H$ est une m.a.,*
2. *si f est un élément de $L^2(E, \varepsilon, \mu_{Z_\varphi})$, $f.\varphi$ appartient à $L^2(E, \varepsilon, \mu_Z)$ et*

$$\int f dZ_\varphi = \int f.\varphi dZ.$$

1.3 MESURE SPECTRALE À VALEURS PROJECTEURS (m.s.v.p.).

Définition 6. *Une mesure spectrale à valeurs projecteurs (m.s.v.p.), notée ξ, sur ε pour le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H est une application de ε dans $P(H)$ telle que :*

1. *$\xi(E) = I_H$;*
2. *$\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B)$, pour tous A et B éléments disjoints de ε ;*
3. *pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de ε qui converge en décroissant vers $\emptyset$, et pour tout X de H, nous avons $\lim_n ||\xi(A_n)X||_H = 0$.*

Il est facile de vérifier que pour tout $X \in H$, l'application

$$Z_\xi^X : A \in \varepsilon \longmapsto \xi(A)X \in H$$

est une m.a. à valeurs dans H et l'application

$$U : X \in H \longmapsto \int e^{i.1} dZ_\xi^X \in H$$

est un opérateur unitaire.

Définition 7. *On appelle m.s.v.p. image de ξ par f, l'application*

$$f_\xi : A \in \varepsilon \longmapsto \xi(f^{-1}(A)) \in P(H)$$

et on vérifie que c'est une m.s.v.p. sur $\mathcal{F}$ pour H.

En introduisant par la suite le concept de famille de m.a., il est possible d'associer une m.s.v.p. à un ensemble de m.a. possédant certaines propriétés. De même, nous rappellerons qu'un opérateur unitaire peut s'exprimer (cf. notamment Riesz et Nagy, 1968) comme intégrale stochastique d'une m.s.v.p. et que le Shift-operator (opérateur de décalage) est un opérateur unitaire qui joue un grand rôle dans l'étude d'une série stationnaire. Grâce à l' association famille de m.a. et m.s.v.p. énoncée ci-dessous, nous pourrons expliciter la correspondance entre m.s.v.p. et opérateur unitaire en associant à un opérateur unitaire U la famille de m.a. qui correspondent aux séries $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1.3.1 Mesure Spectrale à valeurs projecteurs et Mesures aléatoires.

Définition 8. *Une famille de m.a. stationnairement corrélées (f.m.a.s.c)* $\{Z^X, X \in H\}$*, définie sur* ε *à valeurs dans* H*, est un ensemble de m.a. deux à deux stationnairement corrélées et telles que* $Z^X(E) = X$*, pour tout* X *de* H*.*

Théorème-Définition 3. *Si* $\{Z^X, X \in H\}$ *est une f.m.a.s.c. définie sur* ε *à valeurs dans* H*, alors*

1. *pour tout* A *de* ε*, l'opérateur* $\xi(A) : X \in H \longmapsto Z^X(A) \in H$ *est un projecteur orthogonal ;*
2. *l'application* $\xi : A \in \varepsilon \longmapsto \xi(A) \in P(H)$ *est une m.s.v.p. sur* ε *pour* H *dite m.s.v.p. associée à la f.m.a.s.c.* $\{Z^X, X \in H\}$*.*

Preuve.
Pour montrer le point 1., il suffit de remarquer l'égalité suivante

$$< Z^X(A), X' >=< X, Z^{X'}(A) > \tag{1.1}$$

pour tout (A, X, X') de $\varepsilon \times H \times H$.

La linéarité de $\xi(A)$ se déduit de la définition même de $\xi(A)$; quant à sa continuité, elle résulte des relations

$$||\xi(A)X||^2 = ||Z^X(A)||^2 = \mu_{Z^X}(A) \leq \mu_{Z^X}(E) = ||Z^X(E)||^2 = ||X||^2.$$

Grâce à l'égalité (1.1), on démontre la symétrie de $\xi(A)$:

$$< \xi(A)X, Y >=< Z^X(A), Y >=< X, Z^Y(A) >=< X, \xi(A)Y > .$$

Le point 1. est démontré dès que l'idempotence de $\xi(A)$ est vérifiée, or :

$$\begin{aligned} < \xi(A) \circ \xi(A)X, Y > &=< \xi(A)X, \xi(A)Y > \\ &=< Z^X(A), Z^Y(A) > \\ &=< Z^X(A), Z^Y(E) > \\ &=< \xi(A)X, Y > . \end{aligned}$$

Quant au point 2., il provient du fait que les Z^X sont des m.a. et que $\xi(E)X = Z^X(E) = X.\square$

La notion que nous venons de développer permet d'associer une m.s.v.p. à une m.a., et par le fait que l'intégrale stochastique est une bijection entre $L^2(\mu_Z)$ et H_Z, on peut vérifier que

Théorème 3. *À toute m.a. Z définie sur ε à valeurs dans H, on peut faire correspondre une m.s.v.p. ξ, et une seule, sur ε pour H_Z, telle que*

$$\xi(A)(\int \varphi dZ) = (\int 1_A \varphi dZ)$$

pour tout (A, φ) de $\varepsilon \times L^2_{\mathbb{C}}(E, \varepsilon, \mu_Z)$. Cette m.s.v.p. ξ est appélée m.s.v.p. associée à Z et on a

$$\xi(A)(Z(E)) = Z(A).$$

1.3.2 Mesure spectrale et opérateur unitaire.

Lorsque U est un opérateur unitaire de H sur lui même et si l'on convient de noter U^n l'opérateur $(U^{-1})^{-n}$ lorsque $n < 0$, on établit que

$$U^n \circ U^m = U^{n+m}$$

quel que soit (n, m) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Etant donné que $U^* = U^{-1}$, on peut facilement vérifier (cf. Boudou, 2000) que pour tout (X, Y) de $H \times H$, les séries $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(U^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaires et stationnairement corrélées.

En désignant par Z^X la m.a. associée à $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$, il est clair que $\{Z^X, X \in H\}$ est une f.m.a.s.c. ; on appelle mesure spectrale à valeurs projecteurs associée à U la m.s.v.p. associée à $\{Z^X, X \in \mathbb{Z}\}$.

On montre, de façon réciproque que, lorsque ε est une m.s.v.p. sur $\mathcal{B}$ pour H, alors :

(i) pour tout X de H, l'application $Z^X : A \in \mathcal{B} \longmapsto \xi(A)X \in H$ est une m.a. ;

(ii) l'opérateur $U : X \in H \longmapsto \int e^{i\lambda 1} dZ^X(\lambda) \in H$ est unitaire de m.s.v.p. associée ξ.
U est appelé opérateur unitaire déduit de ξ.

1.4 ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES D'UNE SÉRIE STATIONNAIRE.

Pour faire de l'A.C.P. d'une série stationnaire, nous nous appuyons sur le fait que l'A.C.P. d'une série stationnaire se ramène à l'A.C.P. de la mesure aléatoire (m.a.) qui lui est associée, comme cela est démontré par A. Boudou et J.

Dauxois (1991).

L'A.C.P. de m.a. repose essentiellement sur la notion de stationnarité corrélée entre deux mesures aléatoires Z et Z'.

1.4.1 Résultats Liminaires.

Soient Z et Z' des m.a. respectivement p et q-dimensionnelles sur (E, ε).

Notons K (resp. $\mathcal{K}$) l'application $x \in \mathbb{C}^p \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{C}^{p+q}$ (resp. $y \in \mathbb{C}^q \longmapsto (0, y) \in \mathbb{C}^{p+q}$,

$$\mathfrak{Z} : A \in \varepsilon \longmapsto K \circ Z(A) + \mathcal{K} \circ Z'(A)$$

est lorsque Z et Z' sont stationnairement corrélées, une m.a. à valeurs dans L^2_{p+q} vérifiant :

$$Z = \mathfrak{Z}_{1_E K^*} \quad et \quad Z' = \mathfrak{Z}_{1_E \mathcal{K}^*}.$$

On note Q (resp. R) le projecteur orthogonal de L^2_q (resp. L^2_r) sur $H_Z(p, q)$ (resp. $H_Z(p, r)$) et φ l'unique élément de $(p, q) - L^2(M_Z)$ tel que l'on ait :

$$Q(\int I_{\mathbb{C}^q} dZ') = \int \varphi dZ.$$

Il vient :

Lemme 1. *Lorsque Z et Z' sont stationnairement corrélées, on a,*

$$R(\int 1_A L dZ') = \int 1_A L dZ_\varphi$$

pour tout $A \in \varepsilon$ et pour tout $L \in HS(q, r)$.

Preuve.

Soit $B \in \varepsilon$ et $T \in HS(p,r)$, on a :

$$
\begin{aligned}
< R(\int 1_A L dZ'), T \circ Z(B) > &=< \int 1_A L dZ', \int 1_B T dZ > && (1.2)\\
&=< \int 1_A L \circ \mathcal{K}^* d\mathfrak{Z}, \int 1_B T \circ K^* d\mathfrak{Z} > && (1.3)\\
&= \int tr(1_A L \circ \mathcal{K}^* \circ M'_{\mathfrak{Z}} 1_B K \circ T^*) dt_{\mathfrak{Z}} && (1.4)\\
&= \int tr(1_{A\cap B} L \circ \mathcal{K}^* \circ M'_{\mathfrak{Z}} \circ K \circ T^*) dt_{\mathfrak{Z}} && (1.5)\\
&=< \int \mathcal{K}^* d\mathfrak{Z}, \int 1_{A\cap B} L^* \circ T \circ K^* d\mathfrak{Z} > && (1.6)\\
&=< \int I_{\mathbb{C}^q} dZ', \int 1_{A\cap B} L^* \circ T dZ > && (1.7)\\
&=< Q(\int I_{\mathbb{C}^q} dZ'), \int 1_{A\cap B} L^* \circ T dZ > && (1.8)\\
&=< \int \varphi dZ, \int 1_{A\cap B} L^* \circ T dZ > && (1.9)\\
&=< \int 1_A L \circ \varphi dZ, \int 1_B T dZ > && (1.10)\\
&=< \int 1_A L dZ_\varphi, T \circ Z(B) > . \square && (1.11)
\end{aligned}
$$

Le lemme 1 nous permet d'écrire :

Corollaire 1. *Pour que Z et Z' soient stationnairement corrélées, il faut et il suffit que l'on ait : pour tout $A \in \varepsilon$,*

$$Q(Z'(A)) = Z_\varphi(A).$$

Preuve.
Condition nécessaire (i.e Z et Z' sont stationnairement corrélées). En posant $r = q$ et $L = I_{\mathbb{C}^q}$ et en appliquant le Lemme 1, on a :

$$Q(\int 1_A I_{\mathbb{C}^q} dZ') = \int 1_A I_{\mathbb{C}^q} dZ_\varphi$$

$$Q(Z'(A)) = Z_\varphi(A).$$

Condition suffisante (i.e $Q(Z'(A)) = Z_\varphi(A)$). Soient A et B deux éléments disjoints de $HS(q,p)$, on a :

$$
\begin{aligned}
< \widetilde{Z(A)} \circ \widetilde{Z'(B)}^*, L > &=< L^* \circ Z(A), Z'(B) > && (1.12)\\
&=< L^* \circ Z(A), Z_\varphi(B) > && (1.13)\\
&= \int tr(1_{A\cap B} L^* \circ M'_Z \circ \varphi^*) dt_Z && (1.14)\\
&= 0 && (1.15)
\end{aligned}
$$

$M'_Z = \frac{dM_Z}{dt_Z}$ est la dérivée de M_Z par rapport à t_Z.$\square$

Corollaire 2. *Lorsque Z et Z' sont stationnairement corrélées, pour tout γ de $(q,r) - L^2(M_{Z'})$, $\quad R(\int \gamma dZ')$ appartient à $H_{Z_\varphi}(q,r)$.*

Preuve.
D'après le lemme 1, le résultat est vrai pour γ de la forme $1_A L$ avec $L \in HS(q,p)$, donc vrai par des arguments de continuité, pour tout γ considéré. $\square$

Nous avons aussi :

Lemme 2. *Lorsque Z et Z' sont stationnairement corrélées, il en est de même pour $Z_{\mathcal{X}}$ et Z'_ψ pour tout $\mathcal{X}$ de $(p,k) - L^2(M_Z)$ et pour tout ψ de $(q,s) - L^2(M_{Z'})$.*

Preuve.

Pour tout $(A,B) \in \varepsilon^2$ et tout $L \in HS(s,k)$, nous avons :

$$< \widetilde{Z_{\mathcal{X}}(A)} \circ \widetilde{Z_\psi(B)}^*, L >=< \int 1_A \mathcal{X} \circ K^* d\mathfrak{Z}, \int 1_B L \circ \psi \circ \mathcal{K}^* d\mathfrak{Z} > .\square$$

1.4.2 Définition et existence de l'Analyse en Composantes Principales.

Soit Z une p-m.a.. On appelle A.C.P. d'ordre q ($q < p$) de Z tout couple (Z', β) où Z' est une q-m.a., stationnairement corrélée avec Z, et β un élément de $(q,p) - L^2(M_{Z'})$ tel que :

$$|| \int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \int \beta dZ' ||$$

soit minimal.

Soit π le projecteur orthogonal de L^2_p sur $H_Z(p)$ et φ l'unique élément de $(p,q) - L^2(M_Z)$ tel que

$$\int \varphi dZ = Q(\int I_{\mathbb{C}^q} dZ'),$$

on a pour toute q-m.a. Z', stationnairement corrélée avec Z et pour tout β de $(q,p) - L^2(M_{Z'})$:

$$|| \int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \int \beta dZ' || \geq || \int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \pi(\int \beta dZ')||. \tag{1.16}$$

Or d'après le corollaire 2, $\pi(\int \beta dZ')$ appartient à $H_{Z_\varphi}(q,p)$ et il existe donc un élément $\gamma_{Z',\beta}$ de $(q,p) - L^2(M_{Z_\varphi})$ tel que l'on ait :

$$\pi(\int \beta dZ') = \int \gamma_{Z',\beta} dZ_\varphi$$

et l'inégalité (1.16) s'écrit encore :

$$||\int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \int \beta dZ'|| \geq ||\int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \int \gamma_{Z',\beta} dZ_\varphi||.$$

Comme Z_φ est stationnairement corrélée avec Z, l'A.C.P. d'ordre q de Z se ramène à la recherche d'un élément φ de $(p,q) - L^2(M_Z)$ et d'un élément γ de $(q,p) - L^2(M_{Z_\varphi})$ minimisant

$$||\int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \int \gamma dZ\varphi||.$$

Soit $\sum_{j=1}^p \mu_j a_j(.) \otimes a_j(.)$ une décomposition de Schmidt mesurable de la densité $\frac{dM_Z}{d\nu}$ de M_Z relativement à une mesure ν domimant μ_Z, c'est-à-dire une décomposition où les μ_j, les a_j sont ε-mesurables et la suite $(\mu_j)_{j=1,\dots,p}$ est ordonnée en décroissant ; une telle décomposition existe (cf. par exemple Rosenberg, 1974). Les éléments

$$\alpha = \sum_{j=1}^q a_j \otimes f_j \quad et \quad \beta = \sum_{j=1}^q f_j \otimes a_j,$$

où $\{f_1, ..., f_q\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^q$, appartiennent respectivement à $(p,q) - L^2(M_Z)$ et $(q,p) - L^2(M_{Z_\alpha})$. Des propriétés classiques d'approximation d'opérateurs (cf. par exemple Gohberg et Krejn, 1971), il vient pour tout φ de $(p,q) - L^2(M_Z)$, pour tout γ de $(q,p) - (M_{Z_\varphi})$ et tout e de E :

$$\begin{aligned}
&||\frac{dM_Z}{\nu}(e)^{1/2} - \beta(e) \circ \alpha(e) \circ \frac{dM_Z}{d\nu}(e)^{1/2}||^2 \\
&= ||\frac{dM_Z}{\nu}(e)^{1/2} - \sum_{j=1}^p \mu_j(e) a_j(e) \otimes a_j(e)||^2 \\
&\leq ||\frac{dM_Z}{\nu}(e)^{1/2} - \gamma(e) \circ \varphi(e) \circ \frac{dM_Z}{d\nu}(e)^{1/2}||^2
\end{aligned}$$

et donc, par intégration par rapport à ν :

$$||\int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \int \beta \circ \alpha dZ|| \leq ||\int I_{\mathbb{C}^p} dZ - \int \gamma dZ_\varphi||$$

On rappelle que l'on a : $||\int \psi dZ||^2 = \int ||\psi \frac{dM_Z}{d\nu}^{1/2}||^2 d\nu$.

Il en résulte la

Proposition 2. *Soit Z une p-m.a. et $\sum_{j=1}^p \mu_j a_j(.) \otimes a_j(.)$ une décomposition de Schmidt mesurable de la densité de M_Z relativement à une mesure dominant μ_Z. Une A.C.P. d'ordre q de Z est (Z_α, β), où l'on a :*

$$\alpha = \sum_{j=1}^q a_j \otimes f_j \quad et \quad \beta = \sum_{j=1}^q f_j \otimes a_j.$$

Nous rappelons que l'A.C.P. d'une série p-stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ revient à faire l'A.C.P. de la p-m.a. Z qui lui est associée (cf. Boudou et Dauxois 1991).

Une série q-stationnaire solution de l'A.C.P. d'ordre q de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'image de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par le filtre $\alpha = \sum_{j=1}^{q} a_j \otimes f_j$, Z_α est la q-m.a. qui lui est associée et l'élément de $(q,p) - L^2(M_{Z_\alpha})$, solution de l'A.C.P. est $\beta = \sum_{j=1}^{q} f_j \otimes a_j$. Donc une A.C.P. d'ordre q de Z est (Z_α, β), où Z_α est une q-m.a. associée à la série résumée $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1.5 PROXIMITÉ ENTRE A.C.P. DANS LE DOMAINE DES FRÉQUENCES ET A.C.P. CLASSIQUE.

Définition 9. *L'analyse en composantes principales (A.C.P.) classique est une méthode de la famille de l'analyse des données et plus généralement de la statistique multivariée, qui consiste à transformer des variables liées entre elles (dites "corrélées") en nouvelles variables décorrélées les unes les autres. Ces nouvelles variables sont nommées "composantes principales" ou axes principaux.*

Elle permet au praticien de réduire le nombre de variables et rendre l'information moins redondante.

1.5.1 Formulation de la propriété $\mathcal{P}$.

Nous allons étudier un cas de figure pour lequel l'A.C.P. dans le domaine des fréquences d'une série est identique à l'A.C.P. classique de chacun des éléments de la série. Pour cela introduisons d'abord la définition suivante :

Définition 10. *Soit $\{f_1, f_2, ..., f_p\}$ une base canonique de $\mathbb{C}^p$.*
Nous dirons qu'un élément Y de $L_p^2 = H$ possède la propriété $\mathcal{C}$ lorsque :

$$\sum_{j=1}^{j=p} < \mathbb{E}(Y \otimes Y) f_j, f_j > f_j \otimes f_j$$

est la décomposition de Schmidt de $\mathbb{E}(Y \otimes Y)$.

Cela veut dire que la base canonique $\{f_1, f_2, ..., f_p\}$ constitue un système d'axes principaux, ou bien que Y est identique au vecteur aléatoire p-dimensionnel résultant de sa propre A.C.P.. En particulier cela implique les inégalités :

$$< \mathbb{E}(Y \otimes Y) f_1, f_1 > \geq < \mathbb{E}(Y \otimes Y) f_2, f_2 > \geq ... \geq < \mathbb{E}(Y \otimes Y) f_p, f_p > .$$

Examinons maintenant une notion liée à la définition précédente.

Définition 11. *Nous dirons qu'une série p-stationnaire* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*, de p-m.a. associée* Z*, possède la propriété* $\mathcal{P}$ *s'il existe un opérateur unitaire* U *de* $\mathbb{C}^p$ *tel que le vecteur* $U \circ Z(A)$ *possède la propriété* $\mathcal{C}$ *pour tout* A *de* $\mathcal{B}$*.*

La propriété $\mathcal{P}$ peut s'énoncer d'une façon équivalente grâce au

Lemme 3. *Une série p-stationnaire* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de p-m.a. associée* Z*, possède la propriété* $\mathcal{P}$ *si et seulement si il existe une famille orthonormée* $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$*, d'éléments de* $\mathbb{C}^p$ *tel que, pour tout* A *de* $\mathcal{B}$ *le vecteur* $Z(A)$ *a pour système d'axes principaux* $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$*.*

Preuve.
Soit donc une série p-stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de p-m.a. Z, vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Par définition il existe un opérateur unitaire U, de $\mathbb{C}^p$, tel que, pour tout A de $\mathcal{B}$, le vecteur $U \circ Z(A)$ possède la propriété $\mathcal{C}$.

Cela veut dire que, pour tout A de $\mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}(U \circ Z(A)) \otimes (U \circ Z(A)) = \sum_{j=1}^{j=p} < \mathbb{E}(U \circ Z(A)) \otimes (U \circ Z(A)) f_j, f_j > f_j \otimes f_j$$

est une décomposition de Schmidt. Si l'on remarque que

$$\mathbb{E}(U \circ Z(A)) \otimes (U \circ Z(A)) = U \circ (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A)) \circ U^*,$$

la décomposition de Schmidt précédente peut s'écrire :

$$U \circ (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))U^* = \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))(U^* f_j), U^* f_j > f_j \otimes f_j.$$

D'où :

$$\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A) = \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))(U^* f_j), U^* f_j > (U^* f_j) \otimes (U^* f_j),$$

qui est également l'écriture d'une décomposition de Schmidt car $\{U^*(f_1), ..., U^*(f_p)\}$ est une base orthonormée (puisque U est un opérateur unitaire). Ce qui implique que, pour tout A de $\mathcal{B}$, le vecteur $Z(A)$ a pour système d'axes principaux $\{U^*(f_1), ..., U^*(f_p)\}$.

Réciproquement, supposons que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, le vecteur $Z(A)$ a pour système d'axes principaux la base orthonormée $\{a_1, ..., a_p\}$. Cela implique que :

$$\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A) = \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_j, a_j > a_j \otimes a_j,$$

et que :

$$< (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_1, a_1 > \geq < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_2, a_2 > \geq ... \geq < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_p, a_p > .$$

On peut facilement vérifier que $U = \sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j$ est un opérateur unitaire et que $U \circ Z(A)$ possède la propriété $\mathcal{C}$ (pour tout $A \in \mathcal{B}$). En effet, compte tenu de ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U \circ Z(A)) \otimes (U \circ Z(A)) &= U \circ (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A)) \circ U^* \\
&= U \circ (\sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_j, a_j > a_j \otimes a_j) \circ U^* \\
&= \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))(U^* f_j), U^* f_j > f_j \otimes f_j,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.$\square$

Le résultat qui suit va nous donner une deuxième façon de formuler la propriété $\mathcal{P}$:

Proposition 3. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série p-stationnaire de p-m.a. associée Z et η une mesure σ-finie dominant M_Z. On peut affirmer que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possède la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe une base orthonormée $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ de $\mathbb{C}^p$ et une famille $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p\}$ d'applications de Π dans $\mathbb{R}$, mesurables, η-intégrables et telles que*

$$\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j$$

soit une décomposition de Schmidt mesurable de la dérivée de M_Z par rapport à η.

Preuve.

Il est bien connu que lorsque f est une application de $(\Pi, \mathcal{B})$ dans $\mathbb{R}$, mesurable, η-intégrable et telle que

$$\int 1_A f d\eta = 0,$$

pour tout A de $\mathcal{B}$, alors $f = 0$ η-presque partout. Considérons maintenant une application de f de $(\Pi, \mathcal{B})$ dans $\mathbb{R}$, mesurable, η-intégrable et telle que

$$\int 1_A f d\eta \geq 0,$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$. Il est clair que $1_{(f<0)} f \leq 0$, donc, pour tout A de $\mathcal{B}$, $1_A 1_{(f<0)} f \leq 0$, d'où :

$$\int 1_A 1_{(f<0)} f d\eta \leqslant 0.$$

Mais comme

$$\int 1_A 1_{(f<0)} f d\eta = \int 1_{A\cap(f<0)} f d\eta \geq 0,$$

on en déduit que

$$\int 1_{A\cap(f<0)} f d\eta = 0,$$

et cela pour tout élément A de $\mathcal{B}$. Donc, d'après le rappel précédent : $1_{(f<0)}f = 0$ η-presque partout. Comme de plus $(f < 0) \subset (1_{(f<0)}f \neq 0)$ on en déduit que $\eta(f < 0) = 0$. On vient donc de démontrer que :

Lorsque f est une application de $(\Pi, \mathcal{B})$ dans $\mathbb{R}$ mesurable, η-intégrable et telle que $\int 1_A f d\eta \geq 0$, pour tout A de $\mathcal{B}$, alors $f \geq 0$ η-presque partout.

Soit une série p-stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possédant la propriété $\mathcal{P}$. Il existe donc une base orthonormée $\{a_1, ..., a_p\}$, de $\mathbb{C}^p$, telle que, pour tout A de $\mathcal{B}$,

$$\sum_{j=1}^{j=p} < M_Z(A)a_j, a_j > a_j \otimes a_j$$

est une décomposition de Schmidt de $M_Z(A) = \mathbb{E}(Z(A) \otimes Z(A))$.

On établit aisément que l'application

$$A \in \mathcal{B} \longmapsto < M_Z(A)a_j, a_j > \in \mathbb{R}^+$$

est une mesure bornée par η.

D'après le théorème de Radon Nikodym :

il existe une application α_j de Π dans $\mathbb{R}^+$ mesurable, η-intégrable et telle que $\int 1_A \alpha_j d\eta = < M_Z(A)a_j, a_j >$, pour tout A de $\mathcal{B}$.

Etant donné un élément A de $\mathcal{B}$, puisque $< M_Z(A)a_j, a_j > a_j \otimes a_j$ est une décomposition de Schmidt, pour $j = 1, 2, ..., p-1$ nous avons :

$$< M_Z(A)a_j, a_j > - < M_Z(A)a_{j+1}, a_{j+1} > \geq 0.$$

Ce qui peut s'écrire

$$\int 1_A(\alpha_j - \alpha_{j+1}) d\eta \geq 0,$$

cela pour tout A de $\mathcal{B}$, d'où, compte tenu de la propriété obtenue précédement : $\alpha_j \geq \alpha_{j+1}$ η-presque partout. Pour $j = 1, 2, ..., p$, posons :

$$\mu_j(.) = 1_{(\alpha_1\geq\alpha_2)\cap(\alpha_2\geq\alpha_3)\cap...\cap(\alpha_{p-1}\geq\alpha_p)}(.)\alpha_j(.)$$

Bien entendu, $\mu_j = \alpha_j$ η-presque partout et donc μ_j est η-intégrable et vérifie

$$\int 1_A \mu_j d\eta = \int 1_A \alpha_j d\eta = < M_Z(A)a_j, a_j >$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$.

Pour tout λ de Π nous avons $\mu_1(\lambda) \geq \mu_2(\lambda) \geq ... \geq \mu_p(\lambda)$. Comme de plus pour tout A de $\mathcal{B}$ on a

$$\int 1_A \sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j d\eta = \sum_{j=1}^{j=p} (\int 1_A \mu_j d\eta) a_j \otimes a_j = M_Z(A),$$

il est clair que

$$\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j$$

est une décomposition de Schmidt mesurable de la dérivée de M_Z par rapport à η. Enfin, réciproquement, s'il existe une base orthonormée $\{a_1, ..., a_p\}$ de $\mathbb{C}^p$ et une famille $\{\mu_1, ..., \mu_p\}$ d'applications de Π dans $\mathbb{R}^+$ mesurables et η-intégrables telles que $\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j$ soit une décomposition de Schmidt mesurable de la dérivée de M_Z par rapport à η, il est clair que

$$M_Z(A) = \int 1_A \sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j d\eta = \sum_{j=1}^{j=p} < M_Z(A) a_j, a_j > a_j \otimes a_j$$

est, pour tout A de $\mathcal{B}$, la décomposition de Schmidt de $\mathbb{E}(Z(A) \otimes Z(A))$, donc que $\{a_1, ..., a_p\}$, est un système d'axes principaux de $Z(A)$.$\square$

1.5.2 Conséquences de la propriété.

Considérons une série p-stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et qui possède la propriété $\mathcal{P}$. Si η est une mesure σ-finie dominant M_Z, d'après la proposition 3, la dérivée de M_Z par rapport à η est du type

$$M'(.) = \sum_{j=1}^{j=p} \mu_j a_j \otimes a_j.$$

– La série $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ obtenue par A.C.P. d'ordre p dans le domaine des fréquences est l'image de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par le filtre

$$\sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j.$$

D'où

$$Y_n = \int e^{i.n} (\sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j) dZ = \sum_{j=1}^{j=p} (a_j \otimes f_j) \circ X_n.$$

– L'A.C.P. classique du vecteur aléatoire X_n est obtenue grâce à la diagonalisation de l'opérateur de covariance $\mathbb{E}(X_n \otimes X_n)$. Donc de :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_0 \otimes X_0) &= \mathbb{E}(Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)) && (1.17)\\
&= \int \sum_{j=1}^{p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j d\eta && (1.18)\\
&= \sum_{j=1}^{p} (\int \mu_j d\eta) a_j \otimes a_j. && (1.19)
\end{aligned}$$

Puisque $\mu_1(.) \geq \mu_2(.) \geq .... \geq \mu_p(.)$ on en déduit que

$$\int \mu_1 d\eta \geq \int \mu_2 d\eta \geq ... \geq \int \mu_p d\eta$$

et donc que $\sum_{j=1}^{p} (\mu_j d\eta) a_j \otimes a_j$ est une décomposition de schmidt de $\mathbb{E} X_n \otimes X_n$. Le vecteur déduit de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par A.C.P. est donc

$$Y_n = (\sum_{j=1}^{p} a_j \otimes f_j) \circ X_n.$$

Nous pouvons dire donc lorsque $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une série p-stationnaire qui possède la propriété $\mathcal{P}$, il y a identité entre A.C.P. dans le domaine des fréquences et A.C.P. classique.

Remarque : Cette propriété $\mathcal{P}$ correspond au fait que toutes les composantes spectrales ont un système d'axes principaux commun. C'est le cas d'un bruit blanc, c'est aussi le cas de toute série "résumé" résultant d'une A.C.P. dans le domaine des fréquences.

Chapitre 2

PROCESSUS CYCLOSTATIONNAIRE.

Un processus est dit cyclostationnaire lorsqu'il présente des propriétés qui varient de façon cyclique dans le temps. Dans la littérature, de nombreux phénomènes physiques sont modélisés par une hypothèse de cyclostationnarité. La covariance, ainsi que d'autres éléments relatifs à la cyclostationnarité, ont fait l'objet de nombreuses études (cf. Gardner et al., 2006).

2.1 DÉFINITION ET PRÉSENTATION.

L'objectif de ce paragraphe est de définir la notion de cyclostationnarité (au sens large ou à l'ordre 2) et de rappeler quelques méthodes de stationnarisation. Pour plus de détails, on peut consulter les travaux de Hurd (1974), par exemple. Ensuite, étant donné un processus stationnaire, nous rappelons aussi les différentes associations qui existent avec sa boite à outils spectraux. Ces associations sont développées au chapitre 1 et largement dans Boudou et Romain (2001, 2002).

Définition 12. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. S'il existe un plus petit entier $T > 1$ tel que :*

(i) $\mathbb{E}(X_{n+n_0T}) = \mathbb{E}(X_n)$, pour tout couple (n, n_0) d'éléments de $\mathbb{Z}$,

(ii) $cov(X_{n+n_0T}, X_{m+n_0T}) = cov(X_n, X_m)$, pour tout triplet (n, m, n_0) éléments de $\mathbb{Z}$, alors on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-cyclostationnaire (ou périodiquement corrélée de période T).

Remarques.

– Si la série est centrée, c'est à dire $\mathbb{E}(X_n) = 0$, pour tout n de $\mathbb{Z}$, ce que l'on suppose dans la suite du paragraphe, alors l'égalité

$$< X_{n+n_0T}, X_{m+n_0T} >=< X_n, X_m >, \tag{2.1}$$

pour tout triplet (n, m, n_0) éléments de $\mathbb{Z}$, assure la cyclostationnarité du processus.
– L'entier T devrait être supérieur à l'unité sinon la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ serait stationnaire. Dans le cas des processus cyclostationnaires à temps continu, l'entier T est supposé strictement supérieur à 0 et la fonction d'autocorrélation continue.

Il existe plusieurs méthodes pour lesquelles les processus périodiquement corrélés sont fondamentalement liés aux processus stationnaires. Une première relation peut être vue comme étant la stationnarisation d'un processus non stationnaire via la perturbation ou le décalage du temps par une variable aléatoire uniformément répartie autour de la période de cyclostationnarité. En effet, il est établi dans Gardner (1978) ou encore Hurd (1974), le

Lemme 4. *La série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est T-cyclostationnaire si et seulement si la série $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ définie par $Y_n = X_{n+\theta}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où θ est une variable aléatoire indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et uniformément répartie sur $[0, T-1]$, est stationnaire.*

Seulement, l'inconvénient d'un telle stationnarisation est qu'en procédant ainsi, on perd de l'information sur la phase initiale du processus périodiquement corrélé.

Par ailleurs, d'aprés notamment Alpay et al. (2000), une autre relation de stationnarité peut être établie par le

Lemme 5. *La série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est T-cyclostationnaire si et seulement si la série T-dimensionnelle $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par le vecteur*

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_{nT} \\ X_{nT+1} \\ . \\ . \\ . \\ X_{nT+T-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

pour tout n de $\mathbb{Z}$, est T-stationnaire.

Cette relation de stationnarité entre aussi dans le cadre des processus cyclostationnaires à temps continu par une association avec des processus stationnaires à valeur dans un espace de Hilbert. On peut, pour cela, consulter les travaux de Kallianpur et Mandrekar (1991), par exemple.

De ces deux lemmes, il est clair qu' il existe une correspondance biunivoque entre processus unidimensionnel p-cyclostationnaire et un processus p-stationnaire. L'étude spectrale menée dans ce chapitre est motivée par cette association, puisqu'en effet, il est bien connu qu'il existe des correspondances entre série stationnaire et mesure aléatoire. En effet, étant donné une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H, on lui associe habituellement trois outils spectraux :

1. **La mesure aléatoire** Z_X : C'est une mesure vectorielle définie sur $\mathcal{B}$, la tribu de Borel de $\Pi = [-\pi, \pi[$, à valeurs dans H dont la ransformée de fourier est X_n et telle que pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$
$$< Z_X(A), Z_X(B) >_H = 0, \; A \cap B = \emptyset$$
2. **Mesure spectrale** ξ_X : Une mesure spectrale ξ_X sur $\mathcal{B}$ pour H est une mesure additive à valeurs projecteurs telle que
$$(\xi_X(A))(\int \varphi dZ_X) = \int 1_A \varphi dZ_X$$
pour tout couple (A, φ) de $\mathcal{B} \times L^2(\mathcal{B})$;
3. **Opérateur unitaire** U_X : Etant donné la mesure spectrale ξ_X, un opérateur unitaire (de décalage) U_X est l'applicaton :
$$U_X : Y \in H \longmapsto \int e^{i\lambda} d\xi_X(\lambda) Y \in H$$
car $U_X X_n = X_{n+1}$.

Ainsi, du fait de l'association entre modèle cyclostationnaire et modèle stationnaire, nous nous intéressons par la suite à donner quelques exemples de processus périodiquement corrélés et à l'étude des outils spectraux associés à une série périodiquement corrélée.

2.2 EXEMPLES DE PROCESSUS CYCLOSTATIONNAIRES

2.2.1 Modèles simples de processus cyclostationnaires.

Soit $X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ stationnaire centré et f une fonction périodique de période $T > 0$ alors, par la relation (2.1), on vérifie aisément que :

1. $Y(t) = f(t)X(t)$,
2. $Z(t) = f(t) + X(t)$,
3. $W(t) = X(t + f(t))$

sont des processus T-cyclostationnaires (cf. figure 2.1).

2.2.2 Autre Modèle d'exemple.

On considère un processus aléatoire $X(n)$ défini par la relation :

$$X(n,w) = X(w) = A(w)\cos(w_0 n) + B(w)\sin(w_0 n), n \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$$

ave $A \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $B \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ et i.i.d.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, nous obtenons la variable aléatoire :

$$X(n_0,w) = X(w) = A(w)\cos(w_0 n_0) + B(w)\sin(w_0 n_0).$$

Puisque A et B sont des variables aléatoires gaussiennes, le processus $X(w)$ est aussi gaussien. Soit n_0, w_0 des éléments de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[X(n+n_0T,w)] = \mu_1 \cos(w_0(n+n_0T)) + \mu_2 \sin(w_0(n+n_0T)).$$

Pour $T = \frac{2\pi}{n_0 w_0}$, on retrouve

$$\mathbb{E}[X(n+n_0T,w)] = \mathbb{E}[X(n,w)].$$

Considérons maintenant un processus à deux instants différents $(n+n_0T)$ et $(m+n_0T)$ de $\mathbb{R}$, nous obtenons les variables aléatoires X_1 et X_2 définies par :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(w_0(n+n_0T) & \sin(w_0(n+n_0T)) \\ \cos(w_0(m+n_0T) & \sin(w_0(m+n_0T)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

La matrice de covariance associée au processus de variables gaussiennes est donnée par :

$$M diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2) M^T$$

, avec $diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ la matrice diagonale de σ_1^2 et σ_2^2.
La fonction d'autocovariance associée au processus est obtenue en diagonalisant la matrice de covariance et en considérant les éléments hors diagonale, on obtient :
$cov(X(n+n_0T,w), X(m+n_0T,w))$
$= \sigma_1^2 \cos(w_0(n+n_0T))\cos(w_0(m+n_0T)) + \sigma_2^2 \sin(w_0[n+n_0T])\sin(w_0[m+n_0T])$.

Pour

$$T = \frac{2\pi}{n_0 w_0}$$

l'expression devient :

$$cov[X(n+n_0T,w), X(m+n_0T,w)] = cov(X(n,w), X(m,w)).$$

On a d'une part

$$\mathbb{E}[X(n+n_0T,w)] = \mathbb{E}[X(n,w)]$$

et d'autre part

$$cov[X(n+n_0T,w), X(m+n_0T,w)] = cov[X(n,w), X(m,w)]$$

Par conséquent le processus $X(n,w)$ est T-cyclostationnaire (cf. figure 2.2).

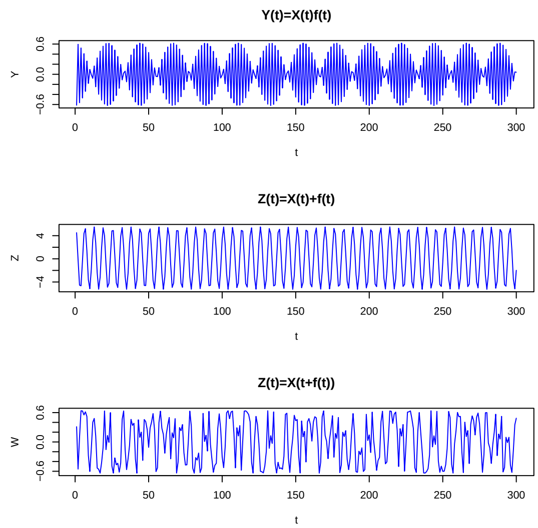

FIGURE 2.1 – **Modèles simples de processus cyclostationnaires.**

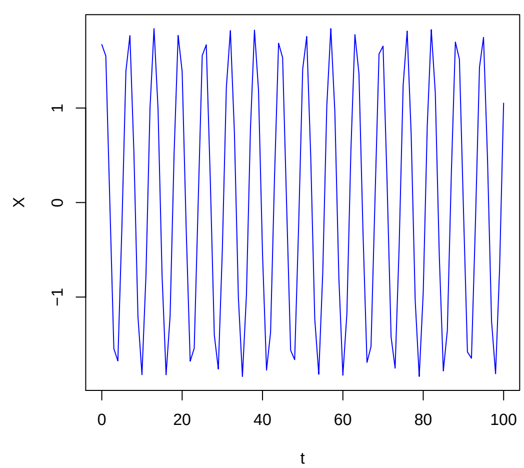

FIGURE 2.2 – **Processus cyclostationnaire.**

2.3 ÉLÉMENTS SPECTRAUX ASSOCIÉS A UN PROCESSUS CYCLOSTATIONNAIRE.

On considére une série centrée $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ périodiquement corrélée de période $T > 1$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la série d'éléments de $L_{\mathbb{C}^T}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, noté L^2_T, définie par la relation (2.2) du lemme 5.

En désignant par $\{e_1, e_2, ..., e_T\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^T$, la série T-dimensionnelle $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ peut être vue, pour chaque n de $\mathbb{Z}$, comme suit :

$$\begin{aligned}
Y_n &= \sum_{j=0}^{T-1} X_{nT+j} e_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{T-1} \overline{(\widetilde{Y_n}^* e_{j+1})} e_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{T-1} E_{j+1} \circ \overline{(\widetilde{Y_n}^* e_{j+1})} \\
&= \sum_{j=0}^{T-1} E_{j+1} \circ X_{nT+j}
\end{aligned}$$

où les $E_j = 1 \otimes e_j$, pour chaque $j \in \{1, ..., T\}$.

On a bien sûr, avec δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker,

$$E_j^* \circ E_k = \delta_{jk} 1 \otimes 1$$

et

$$\sum_{j=1}^{T} E_j \circ E_j^* = I_{\mathbb{C}^T}.$$

Dans ce contexte, il est facile de vérifier, comme l'affirme le lemme 5, que la série $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-stationnaire.
En effet, soit (n, m) un couple d'éléments quelconques de $\mathbb{Z}$, comme

$$\widetilde{Y_n} = \sum_{j=0}^{T-1} \overline{X_{nT+j}} \otimes e_{j+1} \quad et \quad \widetilde{Y_m}^* = \sum_{k=0}^{T-1} e_{k+1} \otimes \overline{X_{nT+k}}$$

alors :

$$\widetilde{Y_n} \circ \widetilde{Y_m}^* = \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} (\overline{X_{nT+j}} \otimes e_{j+1}) \circ (e_{k+1} \otimes \overline{X_{mT+k}}) \tag{2.3}$$
$$= \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} < \overline{X_{mT+k}}, \overline{X_{nT+j}} > e_{k+1} \otimes e_{j+1} \tag{2.4}$$
$$= \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} < X_{nT+j}, X_{mT+k} > e_{k+1} \otimes e_{j+1} \tag{2.5}$$
$$= \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} < X_{(n-m)T+j}, X_k > e_{k+1} \otimes e_{j+1} \tag{2.6}$$
$$= \widetilde{Y_{n-m}} \circ \widetilde{Y_0}^*. \tag{2.7}$$

On a bien $\widetilde{Y_n} \circ \widetilde{Y_m}^* = \widetilde{Y_{n-m}} \circ \widetilde{Y_0}^*$, pour tout (n, m) de $\mathbb{Z}^2$, ce qui assure la T-stationnarité de la série $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

On peut donc établir la proposition suivante

Proposition 4. *Si la série centrée $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est T-cyclostationnaire, alors les T séries unidimensionnelles $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, 1, ..., T-1$, sont stationnaires et deux à deux stationnairement corrélées.*

Preuve.
Pour tout couple (n, m) de $\mathbb{Z}^2$ et tout (j, j') de $\{0, 1, ..., T-1\}^2$,

$$< X_{nT+j}, X_{mT+j'} > =< X_{nT-mT+j}, X_{j'} > \tag{2.8}$$
$$=< X_{(n-m)T+j}, X_{j'} > . \tag{2.9}$$

On déduit donc que les T séries $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, 1, ..., T-1$, sont stationnaires et deux à deux stationnairement corrélées.□

2.3.1 Mesures aléatoires associées.

Etant donné une série centrée $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ T-cyclostationnaire, il est clair que la série

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_{nT} \\ X_{nT+1} \\ . \\ . \\ . \\ X_{nT+T-1} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{Z}}$$

est T-stationnaire. Et dans ce cas, les séries unidimensionnelles $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, 1, ..., T-1$, sont stationnaires. Compte-tenu de l'association entre stationnarité et m.a., ces séries admettent donc des m.a. associées.

Désignons par Z_j la m.a. associée à $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, 1, ..., T-1$, définie sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{P})$, telle que pour tout n de $\mathbb{Z}$

$$X_{nT+j} = \int e^{i\lambda n} 1 \otimes 1 dZ_j(\lambda) = \int e^{i\lambda n} I_{\mathbb{C}} dZ_j(\lambda)$$

et qui vérifie

$$\widetilde{Z_j(A)} \circ \widetilde{Z_k(B)}^* =< Z_j(A), Z_k(B) > 1 \otimes 1 = 0$$

pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$ et tout couple (j, k) d'éléments distincts de $\{0, 1, ..., T-1\}$. On vérifie que l'application

$$Z : A \in \mathcal{B} \longmapsto \sum_{j=0}^{T-1} E_{j+1} \circ Z_j(A) \in L^2_T \tag{2.10}$$

est une T-m.a., où pour $j = 0, 1, ..., T-1$, $E_{j+1} = e_{j+1} \otimes 1$.
Puisque $E^*_{j+1} \circ Z(A) = Z_j(A)$, pour tout A de $\mathcal{B}$, Z_j est la m.a. associée à l'élément $1_\Pi(.)E^*_{j+1}$ de $(T, 1) - L^2(M_Z)$. Il vient alors, pour tout n de $\mathbb{Z}$

$$Y_n = \sum_{j=0}^{T-1} E_{j+1} \circ (\int e^{i.n} I_{\mathbb{C}} dZ_j) \tag{2.11}$$

$$= \sum_{j=0}^{T-1} (\int e^{i.n} E_{j+1} dZ_j) \tag{2.12}$$

$$= \sum_{j=0}^{T-1} (\int e^{i.n} E_{j+1} \circ E^*_{j+1} dZ) \tag{2.13}$$

$$= \int e^{i.n} (\sum_{j=0}^{T-1} E_{j+1} \circ E^*_{j+1}) dZ \tag{2.14}$$

$$= \int e^{i.n} I_{\mathbb{C}^T} dZ. \tag{2.15}$$

Du fait de l'unicité de la T-m.a. à une série T-stationnaire, Z est la T-m.a. associée à $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et on peut affirmer la

Proposition 5. *Si la série centrée $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est T-cyclostationnaire alors l'application Z définie par la relation* (2.3) *est la T-m.a. associée à la série T-stationnaire $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, où Z_j est une m.a. associée à la série, $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$ $j = 0, 1, ..., T-1$.*

2.3.2 Opérateurs unitaires associés.

Une importante notion de la théorie des processus stationnaires est le groupe d'opérateurs unitaires qui lui est classiquement associé. C'est la notion sous-jacente de la représentation spectrale des processus stationnaires et il est largement développé dans Boudou (2007).

Un opérateur unitaire d'un espace de Hilbert H est un opérateur linéaire continu et surjectif U vérifiant $< Ux, Uy >=< x, y >$ pour tout x et y de H ; c'est-à-dire les opérateurs unitaires conservent le produit scalaire. Un opérateur unitaire de H est une isométrie de H sur lui-même.

Pour spécifier les opérateurs unitaires associés aux séries $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, 1, ..., T-1$, le résultat classique suivant est particulièrement utile.

Lemme 6. *Soit $\{f_\lambda; \lambda \in L\}$ (resp. $\{g_\lambda; \lambda \in L\}$) une famille d'éléments d'un espace de Hilbert H (resp. H'). Si l'on a*

$$< f_\lambda, f_{\lambda'} >_H =< g_\lambda, g_{\lambda'} >_{H'}$$

pour tout couple (λ, λ') d'éléments de L, alors il existe une unique isométrie $\mathcal{I}$ de $\overline{vect}\{f_\lambda; \lambda \in L\}$ sur $\overline{vect}\{g_\lambda; \lambda \in L\}$ telle que l'on ait $\mathcal{I}(f_\lambda) = g_\lambda$, pour tout λ de L.

Etant donné une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ T-cyclostationnaire, il vient en particulier :

$$< X_{n+T}, X_{m+T} >_{L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)} =< X_n, X_m >_{L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)} \tag{2.16}$$

pour tout coupe (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$.

En se basant sur l'égalité (2.16) et du lemme 6, on déduit l'existence d'une isométrie U et une seule de $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ sur $\overline{vect}\{X_{n+T}; n \in \mathbb{Z}\}$ telle que $UX_n = X_{n+T}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Cette isométrie U est en fait un opérateur unitaire de $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ si l'on remarque que $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\} = \overline{vect}\{X_{n+T}; n \in \mathbb{Z}\}$. En effet, pour chaque n de $\mathbb{Z}$, on a $X_n \in \overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ et $X_n = X_{n-T+T} \in \overline{vect}\{X_{n+T}; n \in \mathbb{Z}\}$ puisque $n - T \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, pour chaque n de $\mathbb{Z}$, $n + T \in \mathbb{Z}$ et $X_{n+T} \in \overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$; d'où on a l'égalité entre $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{vect}\{X_{n+T}; n \in \mathbb{Z}\}$.
On peut donc énoncer la

Proposition 6. *Si la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{P})$ est T-cyclostationnaire, alors il existe un et un seul opérateur unitaire U de $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ tel que :*

$$UX_n = X_{n+T}$$

pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Ce résultat peut être retrouvé, sous des formes voisines, dans plusieurs travaux : d'abord par Rozanov (1967), puis notamment dans Kallianpur et Mandrekar (1983) concernant les champs stationnaires indicés par $\mathbb{Z}^2$, enfin Hurd et Kallianpur (1992) pour les processus à temps continu et plus récemment Hurd et *al.* (2004) pour les processus indicés par $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$.

De cette proposition, on vérifie aisément que les T séries stationnaires $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, sont telles que

$$U^n X_j = X_{nT+j}. \tag{2.17}$$

Ce résultat est légitime et ne fait que conforter les résultats de la proposition 4 sur la stationnarité de $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, 1, ..., T-1$. En effet, lorsque U' est une isométrie d'un espace de Hilbert, on vérifie que :

- Pour tout X de H, la série $(U'^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire ;
- Pour tout couple (X, X') d'éléments de H, les séries stationnaires $(U'^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(U'^n X')_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées.

L'opérateur unitaire U de $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ étant établi, il convient maintenant de spécifier celui de $\overline{vect}\{K \circ Y_n; n \in \mathbb{Z}; K \in HS(T)\}$, qui sera noté $\mathcal{U}$, et de trouver le lien pouvant exister entre U et $\mathcal{U}$. Notons, au passage, que l'opérateur unitaire de $\overline{vect}\{Y_n; n \in \mathbb{Z}\}$ sera la restriction de $\mathcal{U}$ à $\overline{vect}\{Y_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Pour déterminer ce lien, nous établissons d'abord quelques résultats préliminaires.

Posons $H_Y = \overline{vect}\{K \circ Y_n; n \in \mathbb{Z}; K \in HS(T)\}$. Nous avons alors

Proposition 7. *Il existe un et un seul opérateur unitaire de H_Y, noté $\mathcal{U}$, tel que pour tout (n, K) de $\mathbb{Z} \times HS(T)$:*

$$\mathcal{U}(K \circ Y_n) = K \circ Y_{n+1}.$$

Preuve.
En effet,

$$\begin{aligned}
< K \circ Y_n, K' \circ Y_m > &=< K \circ \widetilde{Y_n}, K' \circ \widetilde{Y_m} > && (2.18)\\
&= tr(K \circ \widetilde{Y_n} \circ \widetilde{Y_m}^* \circ K'^*) && (2.19)\\
&= tr(K \circ \widetilde{Y_{n+1}} \circ \widetilde{Y_{m+1}}^* \circ K'^*) && (2.20)\\
&=< K \circ Y_{n+1}, K' \circ Y_{m+1} >, && (2.21)
\end{aligned}$$

pour tout (n, m) de $\mathbb{Z}^2$ et tout couple (K, K') d'éléments de $HS(T)$.□

L'opérateur $\mathcal{U}$ admet alors la propriété suivante

Proposition 8. *Pour tout $(L, Y) \in HS(T) \times H_Y$, on a :*

$$\mathcal{U}(L \circ Y) = L \circ \mathcal{U}(Y).$$

Preuve.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $K \in HS(T)$, on a

$$< \mathcal{U}(L \circ Y), K \circ Y_n > =< L \circ Y, K \circ Y_{n-1} > \tag{2.22}$$
$$= tr(L \circ \widetilde{Y} \circ \widetilde{Y_{n-1}}^* \circ K^*) \tag{2.23}$$
$$= tr(\widetilde{Y} \circ \widetilde{Y_{n-1}}^* \circ K^* \circ L) \tag{2.24}$$
$$=< Y, L^* \circ K \circ Y_{n-1} > \tag{2.25}$$
$$=< \mathcal{U}(Y), L^* \circ K \circ Y_n > \tag{2.26}$$
$$= tr(\widetilde{\mathcal{U}(Y)} \circ Y_n^* \circ K^* \circ L) \tag{2.27}$$
$$= tr(L \circ \widetilde{\mathcal{U}(Y)} \circ Y_n^* \circ K^*) \tag{2.28}$$
$$=< L \circ \mathcal{U}(Y), K \circ Y_n > .\square \tag{2.29}$$

Dans le but de trouver une relation entre les opérateurs unitaires U et $\mathcal{U}$, il convient maintenant d'établir quelques propriétés liant les séries $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

D'une part, on a :

Proposition 9. *Pour tout couple (L, Y) de $HS(T, 1) \times H_Y$, $L \circ Y$ appartient à $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$.*

Preuve.
Soit $(L, Y) \in HS(T, 1) \times H_Y$,

$$L \circ Y = L \circ (\lim_{k\to\infty} \sum_{l\in L_k} K_{l,k} \circ Y_{n_{l,k}}) \quad avec \quad |L_k| < +\infty \tag{2.30}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{l\in L_k} (L \circ K_{l,k} \circ Y_{n_{l,k}}) \tag{2.31}$$

Comme pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout $l \in L_k$,

$$L \circ K_{l,k} \circ Y_{n_{l,k}} = \sum_{j=0}^{T-1} L \circ K_{l,k} \circ E_{j+1} \circ X_{n_{l,k}T+j}$$

appartient à $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ puisque $L \circ K_{l,k} \circ E_{j+1}$ est un opérateur de $\mathbb{C}$, $L \circ Y$ est bien un élément de $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$.$\square$

Et d'autre part

Lemme 7. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = E^*_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ Y_{[\frac{n}{T}]}$.*

Preuve.
Nous savons que $n - T[\frac{n}{T}]$ est un élément de $\{0, 1, ..., T-1\}$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Et donc

$$E^*_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ Y_{[\frac{n}{T}]} = \sum_{j=0}^{T-1} E^*_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ E_{j+1} \circ X_{T[\frac{n}{T}]+j} \tag{2.32}$$
$$= X_{T[\frac{n}{T}]+n-T[\frac{n}{T}]} \tag{2.33}$$
$$= X_n.\square \tag{2.34}$$

Maintenant nous somme à mesure d'établir le lien entre les opérateurs unitaires U et $\mathcal{U}$, donnée par la

Proposition 10. *Pour tout couple $(L, Y) \in HS(T, 1) \times H_Y$, on a :*

$$L \circ \mathcal{U}(Y) = U(L \circ Y).$$

Preuve.
Nous savons que $\mathcal{U}(Y)$ (resp. Y) est élément de H_Y donc $L\circ\mathcal{U}(Y)$ (resp. $(L\circ Y)$) est un élément de $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $X_n = E^*_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ Y_{[\frac{n}{T}]}$ et

$$X_{n-T} = E^*_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ Y_{[\frac{n}{T}]-1}$$

Alors on a donc :

$$< L \circ \mathcal{U}(Y), X_n > = < L \circ \mathcal{U}(Y), E^*_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ Y_{[\frac{n}{T}]} > \tag{2.35}$$
$$= < E_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ L \circ \mathcal{U}(Y), Y_{[\frac{n}{T}]} > \tag{2.36}$$
$$= < \mathcal{U}(E_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ L \circ Y), Y_{[\frac{n}{T}]} > \tag{2.37}$$
$$= < E_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ L \circ Y, Y_{[\frac{n}{T}]-1} > \tag{2.38}$$
$$= < L \circ Y, E^*_{n-T[\frac{n}{T}]+1} \circ Y_{[\frac{n}{T}]-1} > \tag{2.39}$$
$$= < L \circ Y, X_{n-T} > \tag{2.40}$$
$$= < U(L \circ Y), X_n > .\square \tag{2.41}$$

2.3.3 Mesures spectrales à valeurs projecteurs associées.

Soit ξ la m.s.v.p. sur $\mathcal{B}$ pour H_Y associée à l'opérateur unitaire $\mathcal{U}$. On peut donc affirmer le résultat suivant :

Proposition 11. *Pour tout Y de H_Y, la série $(\mathcal{U}^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-stationnaire.*

Preuve.
Soit (n, m) un couple d'éléments de $\mathbb{Z}$, on a

$$< \widetilde{\mathcal{U}^n Y} \circ \widetilde{\mathcal{U}^m Y}^*, L > = tr(\widetilde{\mathcal{U}^n Y} \circ \widetilde{\mathcal{U}^m Y}^* \circ L^*) \tag{2.42}$$
$$= < \mathcal{U}^n Y, L \circ \mathcal{U}^m Y > \tag{2.43}$$
$$= < \mathcal{U}^n Y, \mathcal{U}^m (L \circ Y) > \tag{2.44}$$
$$= < \mathcal{U}^{n-m} Y, L \circ Y > \tag{2.45}$$
$$= < \widetilde{\mathcal{U}^{n-m} Y} \circ \widetilde{Y}^*, L >, \tag{2.46}$$

pour tout $L \in HS(T)$, d'où $\widetilde{\mathcal{U}^n Y} \circ \widetilde{\mathcal{U}^m Y}^* = \widetilde{\mathcal{U}^{n-m} Y} \circ \widetilde{\mathcal{U}^0 Y}^*$, ce qui assure la stationnarité de la série $(\mathcal{U}^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Nous savons (cf. Boudou, 2007) que pour tout $Y \in H_Y$, l'application

$$Z_\xi^Y : A \in \mathcal{B} \longmapsto \xi(A)Y \in L_T^2$$

est la m.a. associée à la série stationnaire $(\mathcal{U}^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$. Comme cette dernière est T-stationnaire, alors Z_ξ^Y est une T-m.a..
Nous sommes en mesure d'énoncer la

Proposition 12. *Pour tout $(L, Y) \in HS(T, 1) \times H_Y$, $(U^n(L \circ Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire de m.a. associée l'application*

$$A \in \mathcal{B} \longmapsto L \circ Z_\xi^Y(A) \in L_1^2.$$

Preuve.
Soit $(Y'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, image de $(\mathcal{U}^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ par le filtre de fonction réponse $1_\Pi L$, a pour 1-m.a. associée la 1-m.a. $(Z_\xi^Y)_{1_\Pi L}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$Y'_n = \int e^{i.1} I_{\mathbb{C}} d(Z_\xi^Y)_{1_\Pi L} \tag{2.47}$$

$$= \int e^{i.1} L dZ_\xi^Y \tag{2.48}$$

$$= L \circ (\int e^{i.n} I_{\mathbb{C}^T} dZ_\xi^Y) \tag{2.49}$$

$$= L \circ \mathcal{U}^n Y = U^n(L \circ Y) \tag{2.50}$$

Pour tout A de $\mathcal{B}$, il vient

$$(Z_\xi^Y)_{1_\Pi L}(A) = \int 1_A 1_\Pi L dZ_\xi^Y \tag{2.51}$$

$$= \int 1_A L dZ_\xi^Y = L \circ Z_\xi^Y(A). \tag{2.52}$$

Donc la série stationnaire $(U^n(L \circ Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ a bien pour m.a. associée l'application $A \in \mathcal{B} \longmapsto L \circ Z_\xi^Y(A) \in L_1^2$.$\square$

La proposition 13 définit une relation étroite entre les opérateurs unitaires U et $\mathcal{U}$, il est donc légitime de souhaiter connaître les liens éventuels pouvant exister entre les m.s.v.p. qui leur sont respectivement associées. Une réponse à cette question peut être formulée par la proposition suivante

Proposition 13. *Soit α la m.s.v.p. sur $\mathcal{B}$ pour $\overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ associée à l'opérateur unitaire U, alors pour tout triplet (L, A, Y) de $HS(T, 1) \times \mathcal{B} \times H_Y$, on a*

$$\alpha(A)(L \circ Y) = L \circ (\xi(A)Y).$$

Preuve.
Nous savons que la mesure aléatoire associée à la série stationnaire $(U^n(L \circ Y))_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'application

$$Z_\alpha^{L\circ Y} : A \in \mathcal{B} \longmapsto \alpha(A)(L \circ Y) \in \overline{vect}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Donc $Z_\alpha^{L\circ Y} = L \circ Z_\xi^Y(A)$, d'après l'unicité de la m.a.. Donc on a :

$$\alpha(A)(L \circ Y) = L \circ (\xi(A)Y).\square$$

2.3.4 Exemple d'analyse en Composantes principales.

On se propose dans ce paragraphe d'effectuer les q premières étapes de l'A.C.P., dans le domaine des fréquences , d'une série $\mathcal{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ T-cyclostationnaire (avec $q < T$). Par cette analyse, on entend chercher, par un problème de réduction de canaux, à résumer au mieux une série $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ T-stationnaire dérivée de la série $\mathcal{X}$. Cette A.C.P. dans le domaine des fréquences tient tout son sens puisqu'il est bien connu qu'à toute série T-cyclostationnaire, l'on peut associer de façon biunivoque une série T-stationnaire.

Pour rappel, on appelle A.C.P. d'ordre q d'une série $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ T-stationnaire (avec $q < T$), la recherche d'une série q-stationnaire $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, stationnairement corrélée avec $\mathcal{Y}$ et d'une série $\mathcal{Y}' = (Y'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, filtré de $\mathcal{V}$, T-stationnaire telle que $||Y_0 - Y'_0||$ soit minimale.

Désignons par Z la T-m.a. associée à $\mathcal{Y}$ et M_Z la mesure induite par Z, cette A.C.P. d'ordre q se ramène à la recherche d'un φ de $(T, q) - L^2(M_Z)$ et d'un élément ψ de $(q, T) - L^2(M_{Z_\varphi})$ minimisant $||Y_0 - \int \psi \circ \varphi dZ||$.

Si $\sum_{j=1}^T \lambda_j(.)a_j(.) \otimes a_j(.)$ est une décomposition de Schmidt mesurable de la dérivée de M_Z relativement à μ_Z (la trace de M_Z), l'A.C.P. d'ordre q de $\mathcal{Y}$ est obtenue en prenant pour $\mathcal{V}$ l'image de $\mathcal{Y}$ par le filtre de fonction $\alpha = \sum_{j=1}^q a_j(.)\otimes e_j$ et pour $\mathcal{Y}'$ l'image de $\mathcal{V}$ par le filtre le filtre de fonction $\alpha = \sum_{j=1}^q a_j(.) \otimes e_j$ $\beta = \sum_{j=1}^q e_j \otimes a_j(.)$.

Puisque $V_n = \int e^{i.n}\alpha dZ$, il vient alors

$$V_n = \sum_{j=1}^q (\int e^{i.n} a_j(.) \otimes 1dZ)e_j$$

ce qui signifie que les q premières composantes obtenues à l'étape $q+1$ sont celles de q.

Maintenant, soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série T-cyclostationnaire. On peut lui associer la série T-stationnaire $\mathcal{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie, par

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_{nT} \\ X_{nT+1} \\ . \\ . \\ . \\ X_{nT+T-1} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{T-1} E_{j+1} \circ X_{nT+j}, \tag{2.53}$$

pour tout n de $\mathbb{Z}$, et dont la T-m.a. Z est définie par

$$Z(A) = \sum_{j=0}^{T-1} E_{j+1} \circ Z_j(A)$$

où Z_j est la m.a. associée à la série stationnaire $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, pour $j = 0, 1, ..., T-1$.

Soit $\sum_{j=1}^{T} \lambda_j(.)a_j(.) \otimes a_j(.)$ une décomposition de schmidt mesurable de M_Z', la dérivée de la mesure induite M_Z par rapport à la trace μ_Z. En posant $\alpha = \sum_{j=1}^{q} a_j(.) \otimes e_j$, alors la série q-stationnaire solution de l'A.C.P. d'ordre q est donnée par

$$V_n = \begin{pmatrix} V_n^0 \\ V_n^1 \\ . \\ . \\ . \\ V_n^{q-1} \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

pour tout n de $\mathbb{Z}$.
Du fait de la correspondance entre stationnarité et cyclostationnarité, on pose pour tout n de $\mathbb{Z}$

$$V_n' = V_{[\frac{n}{q}]}^{n-q[\frac{n}{q}]}$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Puisque $n - q[\frac{n}{q}] \in \{0, 1, ..., q-1\}$, la variable V_n' parcourt toutes les composantes de V_n quand n varie. Et comme les séries $(V_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, ..., q-1$, sont stationnaires, on vérifie aisément que la série $(V_n')_{n\in\mathbb{Z}}$ définie ci-dessus est q-cyclostationnaire.

En effet, pour tout $j = 0, ..., q-1$, on a :

$$V_{nq+j}' = V_{[\frac{nq+j}{q}]}^{nq+j-q[\frac{nq+j}{q}]} \tag{2.55}$$

$$= V_{[\frac{nq+j}{q}]}^{nq+j-q[n+\frac{j}{q}]} \tag{2.56}$$

n étant un élément de $\mathbb{Z}$, alors $[n + \frac{j}{q}] = n + [\frac{j}{q}]$ et puisque $j < q$, la partie entière de $\frac{j}{q}$ est nulle. Les égalités qui précèdent se complètent alors par

$$\begin{aligned} V'_{nq+j} &= V_{n+[\frac{j}{q}]}^{nq+j-q(n+[\frac{j}{q}])} && (2.57) \\ &= V_n^{nq+j-qn} && (2.58) \\ &= V_n^j. && (2.59) \end{aligned}$$

Cas particulier.

1. Lorsqu'on a une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui est $T = 4$-cyclostationnaire et que l'on souhaite effectuer les $q = 2$ premières étapes de l'A.C.P. dans le domaine des fréquences de

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_{4n} \\ X_{4n+1} \\ X_{4n+2} \\ X_{4n+3} \end{pmatrix},$$

on obtient un résumé 2-stationnaire, $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par $V_n = \begin{pmatrix} V_n^0 \\ V_n^1 \end{pmatrix}$. Si on pose $V'_n = V_{[\frac{n}{2}]}^{n-2[\frac{n}{2}]}$, on a $V'_n = V_{\frac{n}{2}}^0$ si n est pair et $V'_n = V_n^1$ sinon. Ainsi la série $(V'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est 2-stationnaire.

2. De même, pour une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui est 5-cyclostationnaire, lorsqu'on souhaite réaliser l'A.C.P. d'ordre $q = 3$ de

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_{5n} \\ X_{5n+1} \\ X_{5n+2} \\ X_{5n+3} \\ X_{5n+4} \end{pmatrix}$$

solution de la forme $V_n = \begin{pmatrix} V_n^0 \\ V_n^1 \\ V_n^2 \end{pmatrix}$. En posant $V'_n = V_{[\frac{n}{3}]}^{n-3[\frac{n}{3}]}$, la variable V'_n parcourt V_n, composante par composante, lorsque l'entier n s'incrémente (ou se décrémente) à l'unité.

Chapitre 3

MISE EN ŒUVRE DE L'A.C.P.

3.1 Les données d'application

On se propose d'appliquer la méthode d'A.C.P. aux températures moyennes annuelles de 16 villes de la France, de 1950 à 2000.

	Aix	Biarritz	Blagnac	...	Perpignan	Reims	Rennes	Strasbourg
1950	13.5	14.13	13.4	...	15.5	9.8	11.3	10.6
1951	13.2	13.5	12.7	...	14.5	9.9	11	10.4
1952	13.4	13.6	13.4	...	15.4	9.6	11.1	10.4
1953	13.6	13.2	12.9	...	14.9	9.9	11.2	10.4
1954	12.8	12.8	12	...	14.5	9.2	10.9	9.7
.	. . .							
.	. . .							
.	. . .							
1996	13.6	13.9	13.5	...	15.4	9.3	11.5	9.5
1997	14.9	15.2	14.7	...	16.4	10.7	12.8	10.8
1998	13.9	14.2	13.7	...	15.8	10.6	12	11
1999	14.3	14.52	14	...	15.82	11.3	13.02	11.3
2000	14.6	14.52	14.32	...	16.02	11.5	12.62	12.1

Source : Météofrance-bilans climatiques (météofrance.fr).

Pour ces villes, voici les courbes de ces températures moyennes annuelles représentées par la figure 3.1.

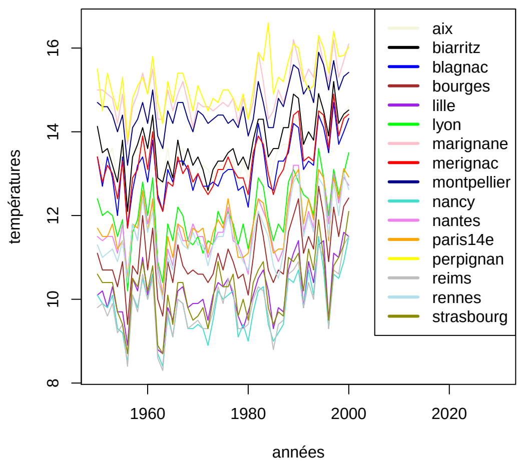

FIGURE 3.1 – Températures moyennes annuelles de 16 villes de la France.

Nous remarquons que Perpignan est la ville la plus chaude par rapport aux 15 autres de 1950 à 2000.
Par contre, Reims et Nancy constituent les villes où les températures sont les plus basses.

Le but de l'analyse dans le domaine des fréquences est de "résumer" au mieux une série T-cyclostationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par une série q-cyclostationnaire $(q < T)$ à partir des éléments spectraux associés à la série cyclostationnaire (voir paragraphe 2.3.4 et chapitre 2).

Nous utilisons un test appelé "ADf.test" ou test de Dickey-Fuller pour vérifier la T-stationnarité de la série T-stationnaire issue de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est à dire

$$Y_n = \begin{pmatrix} X_{nT} \\ X_{nT+1} \\ . \\ . \\ . \\ X_{nT+T-1} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{Z}} .$$

En testant les données de la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous remarquons qu'elles sont non stationnaires. Par le lemme 5 du chapitre 2 : $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-cyclostationnaire si et seulement si $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est T-stationnaire.

Pour notre exemple, la séries $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ peut-être vue comme un tableau à deux entrées qu'on va noter $X_{n,i}$ avec n la n-ième ligne(s) et i la i-ième colonne(s) de même $Y_{n,i} = \begin{pmatrix} X_{nT,i} \\ X_{nT+1,i} \\ . \\ . \\ . \\ X_{nT+T-1,i} \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $i = 1, ..., 16$.

Pour l'exemple de nos données chaque $X_{nT+j,i}$ est un tableau à n ligne(s) et i colonne(s). Pour différencier les tableaux, on note $Y_{n,i,j} = X_{nT+j,i}$ où $j = 0, ..., T-1$.

3.2 Centrage avant A.C.P.

Les données de $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont obtenues après centrage des données de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par rapport à la moyenne des moyennes annuelles et rangées dans un tableau $(Y_{n,i,j})_{m=1,..,me,i=1,...,ve,j=1,...,T}$ avec

$me = 51$ années, $ve = 16$ villes, $T = 12$ périodes.

On obtient un $(Y_{n,i,j})_{n=1,..,me,i=1,...,ve,j=1,...,T}$ qui est un tableau à 12 tableaux tous stationnaires. Alors la série $(Y_{n,i,j})_{n=1,..,me,i=1,...,ve,j=1,...,T}$ est 12-stationnaire d'où la 12-cyclostationnarité de la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

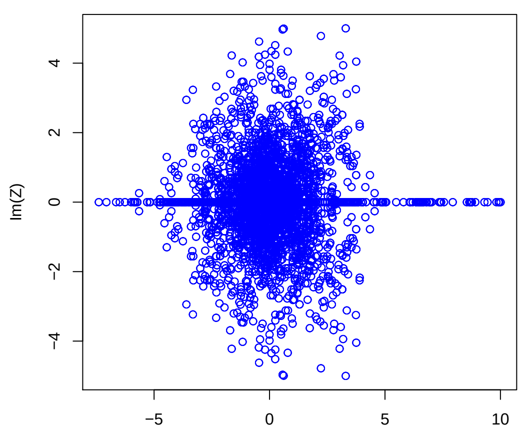

FIGURE 3.2 – Mesure aléatoire associée à $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

La figure 3.2 donne une repésentation de la mesure aléatoire associée à $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 12-stationnaire après centrage.

3.3 A.C.P

3.3.1 Discrétisation du spectre

Soit k un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$, posons :

$$A_{kk} = -\pi, \quad A_{0k} =]-\frac{\pi}{k}, \quad \frac{\pi}{k}[$$

$$A_{nk} =]\frac{\pi}{k}(n-1), \frac{\pi}{k}n] \quad si \quad n = -k+1, ..., -1,$$

et

$$A_{nk} =]\frac{\pi}{k}n, \frac{\pi}{k}(n+1)[\quad si \quad n = 1, ..., k-1.$$

$\{A_{nk}, n = -k+1, ..., k-1\}$ constituant une partition de $[-\pi, \pi[$, à l'infinité d'analyses spectrales (A.S.) nécessaire à la mise en oeuvre de l'A.C.P. de $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, (ou de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$), il paraît naturel de substituer l'A.S. de chacune des $2k$ matrices $M_Z(A_{nk})$.

Dans Alain Boudou et Sylvie Viguier-Pla (2002) lorsque la fonction de covariance est absolument sommable (c'est à dire lorsque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\mathbb{E}X_n \otimes X_0|| < +\infty$) et lorsque pour tout λ de $[-\pi, \pi[$, $F(\lambda)$, la valeur de la densité spectrale en λ, possède p valeurs propres distinctes. Et si de plus on fait l'hypothèse que $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 0, ..., T-1$ est stationnaire et ergodique, désignant par

$$I_m(\lambda) = (2\pi me)^{-1}(\sum_{l=1}^{me} e^{i\lambda l} X_{lT+j} \otimes \sum_{l=1}^{me} e^{i\lambda l} X_{lT+j})$$

la matrice aléatoire, on peut démontrer que $\int_{A_{nk}} (I_m(\lambda))(w) d\eta(\lambda)$ est un estimateur de $M_Z(A_{nk})$ convergeant presque sûrement.

3.3.2 La méthode.

Rappelons que nous approchons $M_Z(A_{nk})$ par la matrice aléatoire

$$(2\pi me)^{-1}(\sum_{l=1}^{me} e^{i\lambda l} X_{lT+j} \otimes \sum_{l=1}^{me} e^{i\lambda l} X_{lT+j}),$$

donc une réalisation des observations de chaque $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $j = 0, ..., T-1$ rangées en lignes dans la matrice $X_{n=1,...,me, i=1,...,ve}$, est notée

$$T_{me,n,k} = \frac{1}{2\pi(me-1)} \sum_{l=1}^{me-1} \sum_{s=1}^{me-1} \int_{A_{nk}} (e^{i\lambda(l-s)} d\lambda) X_{lT+j} \otimes X_{kT+j}.$$

Nous rappelons que pour des données possédant la propriété $\mathcal{P}$ (cf. chapitre 2), il y a identité entre A.C.P. classique et A.C.P. dans le domaine des fréquences, et, notamment, les vecteurs propres dans chaque sous-intervalle seraient identiques. Donc subdiviser l'intervalle $[-\pi, \pi[$ aurait été inutile.

3.3.3 Les résultats

Le graphique des résumés de la figure 3.3 montre que le premier axe principal restitue une grosse partie de l'information.

La transformée de Fourier Z_j de $(X_{nT+j,i})$ est considérée comme les 51 mesures d'une variable aléatoire de $\mathbb{R}^{16}$ de période 12.

La procédure consiste à faire l'A.C.P. des 12 composantes spectrales Z_j, puis reconstitution dans le domaine temporel de $\widehat{Y}_{n,i,j}$ par transformée de Fourier inverse.

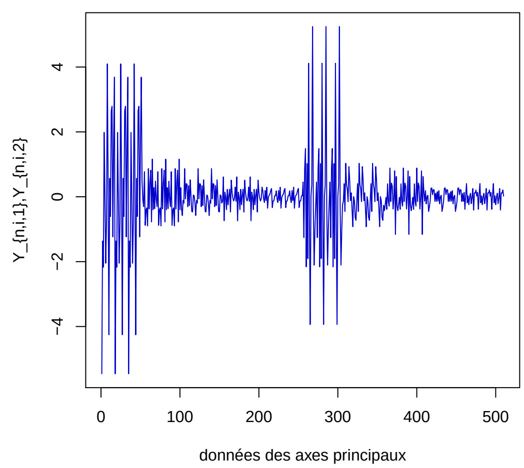

FIGURE 3.3 – **les 2 premiers tableaux de la Série résumée.**

La série résumée notée $V_{n,s,j}$ est un tableau a trois entrées avec $n = 1, .., 51, s = 1, ..., 5, j = 1, ..., 12$. Donc $V_{n,s,j}$ est un tableau a 12 tableaux. Sur la figure 3.3, nous avons représenté que les deux premiers tableaux de $V_{n,s,j}$ (c'est-à-dire $V_{n,s,j=1}$ et $V_{n,s,j=2}$). Sur cette figure, nous distinguons les 5 composantes principales des données de $V_{n,s,j=1}$ et de $V_{n,s,j=2}$.

La plus grande amplitude correspond au valeurs de la composante principale 1 ce qui s'explique que l'axe 1 restitue une grosse partie de l'information la seconde correspond à la deuxième composante principale et ainsi de suite jusqu'à la cinquième composante principale.

La figure 3.4 est la représentation de la série résumée cyclostationnaire déduit

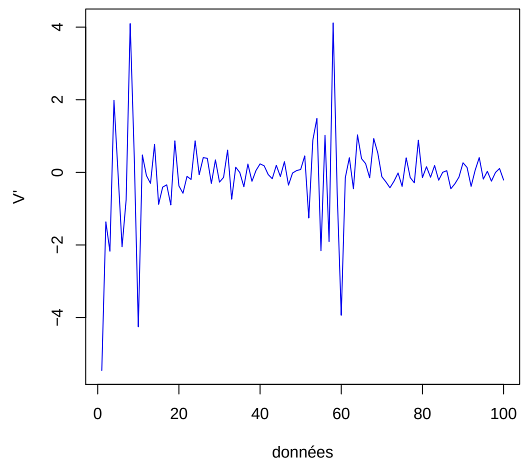

Figure 3.4 – **Série résumée cyclostationnaire.**

de la série résumée $V_{n,s,j}$. Par définition (cf. paragraphe 2.3.4 chapitre 2), on a $V'_{n,s,j} = V_{[\frac{n}{s}],n-s[\frac{n}{s}],j}$ avec $n - s[\frac{n}{s}]$ qui parcourt $0, ..., s-1$.

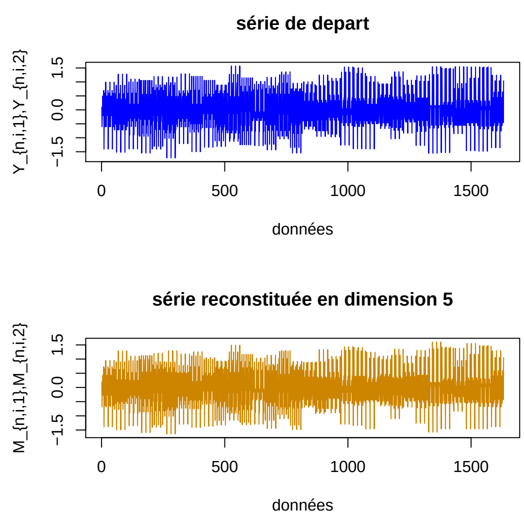

Figure 3.5 – **Graphe de la série de départ et de la série reconstitution.**

Sur la figure 3.5 nous remarquons que le graphique de la série de départ est presque le même avec le graphique de la série reconstituée. Ce qui nous permet de dire qu'on a une bonne reconstitution de la série.

La mesure aléatoire associée au série stationnaire $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$ est donnée par :

$$Z_j = \sum_{k=1}^{12} e^{-ik\pi/6} X_{kT+j}$$

où X_{kT+j}, $j = 0, ..., T-1$ contient le $kT+j$-ième année.

Après A.C.P. de chaque Z_j, on procède à une reconstitution de la série $(X_{nT+j})_{n\in\mathbb{Z}}$ notée $\widehat{X}_{nT+j}$ définie par

$$\widehat{X}_{nT+j} = \sum_{k=1}^{12} e^{ik\pi/6} \widehat{Z}_k$$

donc de la série $(Y_{n,i,j})$, notée $\widehat{Y}_{n,i,j}$.
La somme des carrés des erreurs notée SC est définie par

$$SC = \sum_{n,i,j} (Y_{n,i,j} - \widehat{Y}_{n,i,j})^2.$$

Villes	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5	q=6	q=7
Aix	27.865	14.582	8.391	3.725	1.660	1.331	0.678
Biarritz	31.219	11.909	9.748	5.476	3.033	1.469	0.578
Blagnac	31.278	7.921	5.299	3.252	1.851	1.185	0.876
Bourges	8.622	6.828	4.785	3.499	1.759	1.481	0.778
Lille	22.026	7.085	4.510	3.181	1.898	0.775	0.557
Lyon	17.390	13.605	7.650	3.841	2.367	1.223	0.562
Marignane	25.416	13.384	7.374	3.101	1.942	1.096	0.736
Mérignac	16.237	6.542	5.019	3.391	1.491	0.930	0.521
Montpellier	21.730	12.595	7.400	4.570	2.543	1.518	0.994
Nancy	27.768	9.712	3.749	2.207	1.507	0.751	0.643
Nantes	20.475	17.781	4.359	2.675	1.352	0.888	0.399
Paris14e	15.997	8.177	3.735	2.601	1.265	0.627	0.446
Perpignan	53.627	23.001	16.882	4.411	1.781	1.096	0.706
Reims	21.267	5.274	4.061	2.934	1.546	1.131	0.488
rennes	19.293	14.351	4.202	2.624	1.494	0.804	0.375
Strasbourg	42.338	16.280	4.190	2.952	1.458	0.606	0.362

Le tableau ci-dessus montre la variation des erreurs commises par reconstitution pour différentes valeurs de q ($q < 16$). Nous constatons que si q augmente la somme des carrés des erreurs diminue.

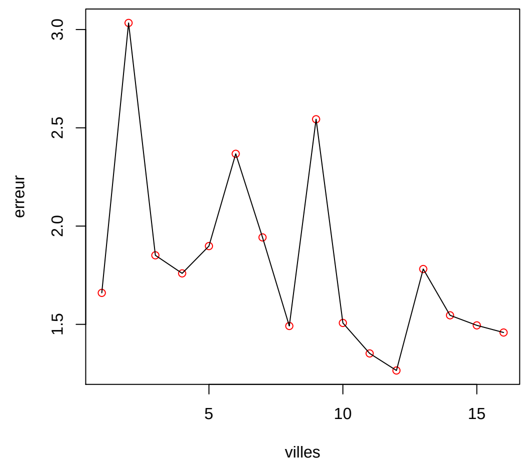

FIGURE 3.6 – **graphe de la somme des erreurs au carré pour q=5.**

La figure 3.6 représente les erreurs commises par reconstitution de la série $(Y_{n,i,j})_{n=1,\ldots,me,i=1,\ldots,ve,j=1,\ldots,T}$ pour $q = 5$.

Nous remarquons que Biarritz est la ville la moins bien reconstituée par rapport aux autres villes.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'analyse spectrale de processus stationnaires a fait l'objet de beaucoup de travaux aussi bien en théorie qu'en applications avec des problèmes pratiques en ingénierie, en médecine, etc. (voir, par exemple, Yaglom, 1987). Ces développements sont intimement liés à l'hypothèse de stationnarité. Et depuis quelques décennies, des études ont également été menées sur l'analyse spectrale de plusieurs modèles non stationnaires parmi lesquels les processus harmonisables qui englobent entre autres les processus cyclostationnaires.

Dans la mise en oeuvre d'A.C.P. dans le domaine des fréquences de séries p-stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de p-m.a. associée Z, il est clair (cf. par exemple Boudou, 1995 ou Brillinger, 1975, 2001) que si l'on suppose que la fonction d'autocovariance de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable, c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||\mathbb{E}(X_n \otimes X_0)|| < \infty$$

la densité spectrale existe. Un estimateur naturel de la densité spectrale est défini par :

$$I_m(\lambda) = \frac{1}{2\pi m}(\sum_{l=1}^{m} e^{-i\lambda l} X_l \otimes \sum_{n=1}^{m} e^{-i\lambda n} X_n)$$

qui constitue en quelque sorte la généralisation du périodogramme au cas multidimensionnel. Mais cet opérateur est un mauvais estimateur et dans Boudou (1995), en procédant par discrétisation du spectre Π, on obtient de bonnes propriétés de convergence de cet estimateur sous certaines hypothèses. Quand le processus p-stationnaire à étudier est indicé par $\mathbb{Z}$, il est possible (cf. Boudou, 2006) d'approcher son A.C.P. dans le domaine des fréquences par celle d'une série stationnaire.

La mise en oeuvre de l'A.C.P. dans le domaine des fréquences a été facilité par le fait que les données sont périodiques avec une périodicité T comme dans l'exemple sur les modèles simples de processus cyclostationnaires (cf. chapitre 2).

Avec la relation biunivoque entre m.a et série stationnaire,il serait important de considérer les cas de données cyclostationnaires puisqu'il existe une relation explicite entre les représentations spectrales issues, respectivement, de la cyclostationnarité unidimensionnelle d'ordre p et la p-stationnarité (cf. Chapitre 2). De plus serait-il envisageable d'étendre cette étude au cas des processus cyclostationnaires dont l'espace temps est le corps des réels ?

Dans un développement futur, il est possible en vue d'améliorer, et d'étendre nos recherches :
•Étudier le produit tensoriel de processus cyclostationnaires.
• Étudier le lien entre A.C.P centrée et A.C.P. non centrée dans le domaine des fréquences.

Bibliographie

[1] Alpay, D., Freydin, B., Loubaton, P. (2000) An extension problem for discrete time almost periodically correlated stochastic processes. Lin. Alg. and its Appl. 38 163-181.

[2] Bennett, W.R. (1958) Statistics of regenerative digital transmission. Bell Systems Technical Journal 37 1501-1542.

[3] Boudou, A. (1995) Mise en oeuvre de l'analyse en composantes principales d'une série multidimensionnelle. Publi. Labo. Stat. Proba. 14-00 1-15, Univ. P. Sabatier, Toulouse.

[4] Boudou, A. (2007) Groupe d'opérateurs unitaires déduit d'une mesure spectrale - une application. C.R. Acad. Sci. Paris, SérieI, Math. 344 (12) 791-794.

[5] Boudou, A., Dauxois, J. (1989) Analyses de mesures aléatoires ; Applications aux séries stationnaires C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 309 391-394.

[6] Boudou, A., Dauxois, J. (1991) Analyse en composantes principales dans le domaine es fréquences d'une fonction aléatoire stationnaire. Publi. Labo. Stat. Proba., Univ. P. Sabatier, Toulouse.

[7] Boudou, A., Dauxois, J. (1994) Principal component analysis for a stationary random function defined on a locally compact abelian group. J. Multivariate Anal. 51 (1) 1-16.

[8] Boudou, A., Romain, Y. (2001) Processus hilbertien associé à la convolée de deux mesures aléatoires. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 332 361-364.

[9] Boudou, A.,Viguier-Pla, S. (2006) On proximity between PCA in the frequency domain and usual PCA Statistics 40 (5) 447-464.

[10] Boudou, A.,Viguier-Pla, S. (2015) Éléments spectraux d'une fonction

cyclostationnaire. 47èmes journées de statistique de la SFdS, 01-05 juin 2015, Lille .

[11] Boudou, A.,Viguier-Pla, S. (2002) ACP dans le domaine des fréquences. Publi. Labo. Stat. Proba., Univ. P. Sabatier, Toulouse.

[12] Boudou, A., Romain, Y. (2002) On spectral and random measures associated to continuous and discrete time processes. Stat. Proba. Letters 59 145-157.

[13] Boshnakov, G.N. (2002) Multi-companion matrices. Lin. Alg. and its Appl. 354 53-83.

[14] Brillinger, D.R. (1975) Time Series : Data Analysis and Theory, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[15] Brillinger, D.R. (2001) Time Series : Data Analysis and Theory, Society for Industrial Applied Mathematics, Philadelphia, 2nd ed.

[16] Dauxois, J., Pousse, A. (1976) Les Analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique : essai d'étude synthétique. Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse.

[17] Dauxois, J., Pousse, A.,Romain, Y. (1982) Asymptotic theory for the principal component analysis of a vector random function : some applications to statistical inference J. Multivariate Anal. 12 (1) 136-154.

[18] Gardner, W.A. (1978) Stationarizable random process. IEEE Transactions on information theory 24 (1) 8-22.

[19] Gardner, W.A. (1987) Statistical spectral analysis : a nonprobabilistic theory. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[20] Gardner, W.A. (1988) Correlation estimation and time-series modeling for nonstationary processes. Signal Processing 15 (1) 31-41.

[21] Gardner, W.A. (1991) Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. IEEE Signal Processing Magazine 8 14-36.

[22] Gardner, W.A. (1994) An introduction in cyclostationarity signals. In Cyclostationarity in communications and signal processing,W.A. Gardner, Ed., IEE Press.

[23] Gardner, W.A., Napolitano, A. and Paura, L. (2006). Cyclostationary : half a century of research. Signal Processing, 86 639-697.

[24] Gladysev, E.G. (1961) Periodically correlated random sequences. Soviet Math. 2 385-388.

[25] Gladysev, E.G. (1963) Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter. Theory of Probab. and its Appl. 8 173-177.

[26] Ghozzi, M. (2008) Détection cyclostationnaire des bandes de fréquences libres. Thèse de Doctorat, Université de Rennes.

[27] Gohberg, I.C., Krejn, M.G. (1971) Opérateurs linéaires non autoadjoints dans un espace hilbertien, Dunod, Paris.

[28] Hurd, H.L., Kallianpur, G. (1992) Periodically Correlated and Periodically Unitary Processes and their relationship to L2[0, T]-valued stationary sequences, in : Nonstationary Stochastic Processes and their Application, J.C. Hardin, A.G. Miamee (Eds.). Word Scientific Publishing Co., Singapore.

[29] Hurd, H.L., Kallianpur, G., Farshidi, J. (2004) Correlation and spectral theory for periodically correlated random fields indexed on Z2. J. of Multivariate Anal. 90 359-383.

[30] Riesz, F., Nagy, B.SZ. (1968) Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthiers-Villars, Paris.

[31] Rozanov, V.A. (1967) Stationary Random Processes. San Francisco : Holden Day.

[32] Serpedin, E., Panduru, F., San, I., Giannakis, G.B. (2005) Bibliography on Cyclostationarity. Signal Processing 85 (12) 2233-2303.