Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ)

UFR des Sciences et technologies (UFR ST),
Département de Mathématiques

Mémoire de Master de Mathématiques et Applications
Spécialité : Mathématiques Pures
Option : Géométrie Differentielle

Titre :

Plongement local des Structures Cauchy-Riemann Rigides Hölderiennes.

Par

Mamadou Diba

Jury :

Président	-	**Maître de Conférence Amoussou Thomas GUEDENON**, UASZ
Examinateurs	-	**Maître Assistant Timack NGOM**, UASZ
	-	**Assistant Mamadou Eramane BODIAN**, UASZ
Directeur	-	**Maître Assistant Mansour SANE**, UASZ

Soutenu le 15 **Février** 2020

Plongement Local des Structures CR rigides Hölderiennes

4 novembre 2020

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers Docteur Mansour SANE, de m'avoir donné un sujet riche et passionnant. J'ai pu bénéficier de son intuition mathématique et de sa vision géométrique des problèmes.
Je voudrai le remercier pour sa grande disponibilité : durant tout ce temps de travail, sa porte était ouverte à moi.
Ces constants encouragements et sa profonde gentillesse m'ont permis d'avancer dans mon travail.
Cela dit, je ne voudrai pas que l'aspect formel de ces remerciements minimise le plaisir et l'intérêt que j'ai trouvé à travailler avec mon encadreur.
Je remercie chaleureusement Dr AMOUSSOU THOMAS GUEDENON, Dr TIMACK NGOM et Dr MAMADOU ERAMANE BODIAN d'avoir participé au jury.
Je remercie également tous les enseignants des départements de Mathématiques, Informatique, Physique et Chimie plus particulièrement ceux du département de mathématiques pour l'enseignement qu'ils m'ont dispensé.
Je remercie tous ceux de près ou de loin, m'ont soutenu dans la voie de la persévérance , ont cru et m'ont poussé à croire que je peux réussir dans les études.
Je remercie toute la famille FALL (famille d'accueil au HLM NEMA) particulièrement NENE SAFIETOU SOW qui a tout fait pour la bonne marche de mes études secondaires et universitaires.
Je remercie tous mes camarades étudiants, mon épouse, mon frère MALICK DIBA pour leur soutien moral et même financier ainsi que tous les membre de mon village FANDA.
Je ne peux finir mes remerciements sans rendre hommage à mon Père et ma Mère qui ont quitté ce bas monde au moment où nous prétendons à les rendre aussi heureux que possible.
Que DIEU le tout puissance les accueille dans son paradis éternellement (Amen).

Introduction

Dans ce mémoire, il s'agit de mieux cerner le travail de Abderrahbi MATTI dans sa thèse intitulée : Réalisabilité locale des stricture C.R dans les variétés de dimension 3.

Une structure de Cauchy-Riemann (abrégée C.R) de type hypersurface sur un ouvert M de $\mathbb{R}^{2n-1}$ $n > 1$, est la donnée d'un sous fibré V de dimension n-1 de $\mathbb{C} \otimes T(M)$ telle que :

$$V \cap \overline{V} = \{0\} \text{ et } [V, V] \subset V.$$

Étant donnée une structure Cauchy-Riemann V sur une variété lisse M de dimension $2n-1$, existe-t-il une immersion Φ de M dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\Phi_*(V)$ soit la structure Cauchy-Riemann de l'hypersurface $\Phi(M)$, induite par la structure complexe de $\mathbb{C}^n$? Lorsque la réponse est affirmative, on dit que la structure V est réalisable. Nous nous limitons à une étude locale ; ce problème est alors équivalant à un problème sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre du type suivant :
Etant donnés k opérateurs différentiels du premier ordre et à coefficients complexes $L_1, L_2, ...L_k$ sur $\mathbb{R}^N$ qui satisfont à la condition de compatibilité :

$$[L_i, L_j] \in \{L_1, L_2, ..., L_k\} = \mathscr{L}$$

Le système $L_j u = 0$ (j = 1,2,..,k) admet-il N - k solutions indépendantes ? La réponse est positive lorsque N = 2k + 1, $\mathscr{L}$ et $\overline{\mathscr{L}}$ sont linéairement indépendants et à coefficients analytiques : C'est une conséquence du théorème de Frobenius holomorphe [4].
Lorsque les coefficients sont seulement indéfiniment différentiables, il se passe des phénomènes nouveaux découverts par H.Lewy (1956), dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, on considère l'opérateur $P = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} + iz\dfrac{\partial}{\partial t}$.
L'équation $Pu = f$ n'a en géneral aucune solution, même localement, pour f une fonction indéfiniment différentiable.
L. Nirenber (1974), montre que le noyau de l'opérateur : $P + iz\varphi\dfrac{\partial}{\partial t} + i\phi.(z\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} - \overline{z}\dfrac{\partial}{\partial z})$

où $\varphi(0,0,t)$ et $\phi(0,0,t)$ sont des fonction plates à l'origine, bien choisies, est trivial sur tout ouvert connexe contenant l'origine.
Ainsi certaines perturbations d'un opérateur analytique peuvent rendre son noyau trivial.
H. Jacobowitz et F. Treve (1982) [7] montrent le résultat général suivant dont l'opérateur P de Lewy-Nirember est un cas particulier.
Soit L la structure Cauchy-Riemann induite par la structure complexe de $\mathbb{C}^2$ sur une hypersurface strictement pseudo-convexe. Alors il existe une perturbation de la forme $L = L + f_1 Q_1 + f_2 Q_2$ où f_1 et f_2 sont plates à l'origine, Q_1 et Q_2 sont des champs de vecteurs convenables, telle que si $\overline{L}v = 0$ avec v indéffiniment différentiable, toutes les dérivées de v à l'origine sont nulles.
Souvent les systèmes possédant certains symétries font exception à la règle générique.
S. Baoundi, L.P Rothschild et F. Treve (1985) [3] ont introduit la notion de rigidité sur les structures Cauchy-Riemann.
Ceux sont les structures Cauchy-Riemann V sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n-1}$ pour lesquelles, il existe une sous algèbre de Lie g de dimension finie des sections tangents à M vérifiant :

- $V_\alpha \oplus \overline{V_\alpha} \oplus (g_a \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes T_a(\Omega)$, avec $a \in \Omega$.
- $[S, g] \subset S$, avec $S = C^\infty(\Omega, V)$.
- $[g, g] = 0$.

Les autres ont démontré que de telles structures Cauchy-Riemann et indéfiniment différentiables, sont réalisables dans $\mathbb{C}^n$.
La démonstration repose sur le théorème de Frobenius et Nirember-newlander.
E.M Chirka a généralisé dans [5] ce résultat aux structures rigides de classe $C^{k+\alpha}$ $(k \geqslant 1, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.
Enfin, les structures Cauchy-Riemann indéfiniment différentiables et strictement pseudo-convexe dans $\mathbb{R}^{2n-1}$sont toujours localement réalisables, pour $n \geqslant 4$.
La preuve de ce résultat démontré initialement par Kuranishi [8], a été simplifiée par Akahari [1] et Webster [13].
Dans ce travail, nous étudions lorsque n = 2, c'est à dire dans $\mathbb{R}^3$, une démonstration du résultat de Chirka [5]. Il s'agit d'étudier le résultat suivant :
Étant donnée une structure Cauchy-Riemann rigide V de classe $C^{k+\alpha}$ de type hypersurface sur $\mathbb{R}^3$ alors, il existe une immersion Φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}^2$ telle que $\Phi_*(V)$ soit la structure Cauchy-Riemann de l'hypersurface $\Phi(\mathbb{R}^3)$, induite par la structure complexe de $\mathbb{C}^2$.

La méthode utilisée repose sur l'utilisation de l'opérateur de Cauchy dans $\mathbb{C}$, la mise sous la forme canonique du champ définissant la structure Cauchy-Riemann, et l'inversion d'un opérateur dans un espace de Banach convenable.

Chapitre 1

Rudiment d'Analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre nous introduisons les différentes notations qu'on utilisera dans ce mémoire, tout en rappelant quelques éléments de la théorie des distributions et d'analyse de Fourier, qui seront d'un usage constant.

1.1 Espace de fonctions différentiables et opérateurs différentiels

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si k est un entier positif ou nul, nous désignons par :
- $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k-fois continument différentiables sur Ω, à valeur dans $\mathbb{C}$.
- $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω.
Ces notation s'entendent d'une part au cas où $\Omega = M$ est une variété différentiable, d'autre part où l'espace d'arrivé n'est plus $\mathbb{C}$ mais un espace topologique E sur $\mathbb{R}$.
On notera alors $C^k(\Omega, E); C^\infty(\Omega, E)$ les espaces correspondants.
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:
- $C_o^k(\Omega)$ désigne le sous espace de $C^k(\Omega)$ dont les éléments sont nuls en dehors d'un compact de Ω .
- $C^k(\overline{\Omega})$ est formé des restrictions à Ω d'éléments de $C^k(\mathbb{R}^n)$.
Pour noter les dérivées partielles d'un élément de $C^k(\Omega)$, nous utiliserons les multi-indices.
Un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ est un élément de $\mathbb{N}^n$
Son module (sa longueur) $|\alpha|$ est par définition : $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, et on pose $\alpha! = \alpha_1!.....\alpha_n!$.
Pour $j \in \{1; 2; .....; n\}$, la dérivation $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ sera aussi notée ∂x_j ou ∂j lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

$L^1_{loc}(\Omega)$ est l'espace des fonctions dont la restriction à tout compact K de Ω est intégrable.
Pour des raisons liées à la transformation de Fourier, il est également utile d'introduire la notation $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.
Une dérivation d'ordre plus élevé sera alors notée $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}....\partial_n^{\alpha_n}$ ou $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}....D_n^{\alpha_n}$.
Nous utiliserons aussi cette convention pour désigner les monômes construits sur les composantes d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}^n; x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}.....x_n^{\alpha_n})$.

Définition 1.1.1 *Un opérateur différentiel sur Ω est une combinaison linéaire finie de dérivations d'ordre arbitraires à coéfficients dans $C^\infty(\Omega)$.*
Il est dit d'ordre m si les dériées d'ordre supérieurs à m n'y apparaissent pas. En d'autre termes, un opérateur différentiel d'ordre m sur Ω s'écrira :

$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$$

où les $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ sont les coéfficients de P. Sous cette forme, il est aisé de constater que P définit une application linéaire de $C^{k+m}(\Omega)$ dans $C^k(\Omega)$ pour tout k.
Le symbole de P est la fonction polynomiale en ξ définit sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ par :

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

tandis que son symbole principale d'ordre m est la fonction homogène en ξ :

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|= m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

1.2 Distribution sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2.1 *On appelle distribution sur l'ouvert Ω, toute forme linéaire u sur $C_0^\infty(\Omega)$ satisfaisant à la propriété de continuité suivante : Pour tout compact K, il existe un entier m et une constante C tel que : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ nulle en dehors de K, on a :*

$$|< u,\varphi >| \leq Csup_{x\in K} sup_{|\alpha|\leq m}|\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

L'espace des distribution sur Ω est noté $D'(\Omega)$.

Il contient en particulier l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ des fonctions localement intégrable sur Ω , selon l'identification suivante :

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall f \in L^1_{loc}(\Omega), < f,\varphi >= \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \qquad (1.2.1)$$

Remarque 1.2.1 *Soit K un compact de* Ω *et* $m \in \mathbb{N}$*, alors l'application :*

$$||.||_{m,K} : \varphi \in C_0^\infty \to ||\varphi||_{m,K} := sup_{x \in k} sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)| \in \mathbb{R}^+$$

est une sémi-norme.

Exemple 1.2.1 *Un exemple de distribution est donné par la masse de Dirac en un point. Si* $x_0 \in \Omega$ *et* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *, on note* $< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0)$.

Définition 1.2.2 *Soit* $u \in D'(\Omega)$*. On définit* $\partial_j u \in D'(\Omega)$ *par la formule :*

$$< \partial_j u, \varphi >= - < u, \partial_j \varphi >$$

qui compte tenu de l'identification **??***, prolonge bien aux distributions l'opérateur* ∂_j *précédemment défini sur* $C^1(\Omega)$ *.*
De même, si $a \in C^\infty(\Omega)$*,* $au \in D'(\Omega)$ *est définie par :*

$$< au, \varphi >=< u, a\varphi >$$

Ainsi tout opérateur différentiel : $P = \sum a_\alpha D^\alpha$ se prolonge en une application linéaire de $D'(\Omega)$ dans lui même par la formule : $< Pu, \varphi >=< u, ^t P\varphi >$
Avec $^t P\varphi = \sum(-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha \varphi)$.
Si Ω' est un ouvert contenu dans Ω, et si $u \in D'(\Omega)$, la restriction $u_{|\Omega'}$ de u à l'espace $C_0^\infty(\Omega') \subset C_0^\infty(\Omega)$. On dira alors que u est nulle (resp. de classe C^k) sur Ω' si $u_{|\Omega'} = 0$ (resp. $u_{|\Omega'}$ peut être définie par $f \in C^k(\Omega)$ selon la formule **??**). Pour que cette définition soit utilisable, il importe que l'on puisse reconstruire u à partir de ses restrictions sur les ouverts d'un recouvrement de Ω . C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 1 *De la partition de l'unité.*
Soit (Ω_j) *une famille d'ouverts de* Ω *telle que* $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$.
Il existe une famille (φ_j) *de fonctions telle que :*
i) $\forall j, \varphi_j \in C^\infty(\Omega), supp(\varphi_j) \subset \Omega_j, 0 \leq \varphi_j \leq 1$.
ii) Pour tout compact K de Ω*,* $\{j \mid K \cap supp\varphi_j \neq \emptyset\}$ *est fini.*
iii) Dans Ω*,* $\sum_j \varphi_j = 1$ *(cette somme est bien définie d'près (ii)).*
- La famille $(\varphi_j)_{j \in J}$ *est appelée partition de l'unité subordonnée au recouvrement* $(\Omega_j)_{j \in J}$

Proposition 1.2.1 *Si* $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$ *et si* $u_{|\Omega_j} = 0$ *(resp.* $u_{|\Omega_j} \in C^k$*) pour tout j alors* $u = 0$ *(resp.* $u \in C^k(\Omega)$ *).*

Ceci nous amène aux définitions suivantes :

Définition 1.2.3 *Soit $u \in D'(\Omega)$. On appelle support de u (resp. support singulier de u) le complémentaire dans Ω des points au voisinage desquels u est nulle (resp. u est de classe C^{∞}).*
Le support de u est noté supp (u), et le support singulier de u ,suppsing u.

Ces deux ensembles fermés, vérifiant $suppsing(u) \subset supp(u)$ et le résultat précédent se paraphrase par les équivalences :
$u = 0 \Longleftrightarrow supp(u) = \emptyset$.
$u \in C^{\infty}_{\Omega} \Longleftrightarrow suppsing(u) = \emptyset$.

Remarque 1.2.2 *Si $u \in C^0(\Omega)$, le support de u défini ci-dessus coincide avec l'adhérence de :*
$\{u \in \Omega, u(x) \neq 0\}$. *C'est à dire* $u \in C^0(\Omega) \Rightarrow supp(u) = \overline{\{u \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$.

L'espace des distributions à supports compacts dans Ω est noté $\xi'(\Omega)$. Il s'identifie à l'espace des formes linéaire sur $C^{\infty}(\Omega)$ continues pour la topologie définie par les sémi-normes : $sup_{x\in K} sup_{|\alpha|\leq m}|\partial^{\alpha}\varphi(x)|$, ($K$ parcourant les compacts de Ω et m les entiers).

Définition 1.2.4 *Dans toute la suite, nous notons $D(\Omega)$ au lieu de C^{∞}_0 .*
Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\phi \in D(\Omega)$, on définit la dérivée d'ordre α de T notée $D^{\alpha}T$ par :

$$< D^{\alpha}T, \phi >_{\Omega} \quad = \quad (-1)^{|\alpha|} < T, D^{\alpha}\phi >_{\Omega}$$

Remarque 1.2.3 *On a :*

$$\begin{aligned} < D^{\alpha}T, \phi >_{\Omega} &= \int_{\Omega} (D^{\alpha}T)\phi dx \\ (-1)^{|\alpha|} < T, D^{\alpha}\phi >_{\Omega} &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} TD^{\alpha}\phi dx \\ \textit{Finalement on a}: & \\ \int_{\Omega} (D^{\alpha}T)\phi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} TD^{\alpha}\phi dx \end{aligned}$$

$*$ *Si $\phi_n \to \phi$ dans $D(\Omega)$ alors la suite $D^{\alpha}\phi_n$ converge aussi vers $D^{\alpha}\phi$ dans $D(\Omega)$.*
Ainsi, $(D^{\alpha}T, .)_{\Omega}$ est continue et $D^{\alpha}T$ est bien définie comme $D'(\Omega)$-distributions.

Exemple 1.2.2 *On a :*

$$(D^{\alpha}\delta_p, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{|\alpha|}(D^{\alpha}\phi)(P), \ pour\, \phi \in \xi(\mathbb{R}^N)$$

Remarque 1.2.4 *Si une suite de distributions $\{T_n\}$ de $D'(\Omega)$ converge vers la distribution T lorsque $n \to \infty$, alors $D^{\alpha}T_n$ converge aussi vers $D^{\alpha}T$.*

1.3 Analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$

On introduit d'abord l'espace de Schwartz S des fonctions C^∞ à décroissance rapides sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.1 *On appelle espace des fonctions C^∞ à décroissance rapides sur $\mathbb{R}^n$ et on le note S, l'espace des fonctions u, C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant :*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha \partial^\beta u(x)| < +\infty. \textit{ (a)}$$

On munit l'espace S (en tant que sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ des sémi-normes ainsi définies, lorsque α et β parcourent $\mathbb{N}^n$. Si $x = (x_1, ..., x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$||x|| = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.3.1 *La fonction définie par $u(x) = e^{-|x|^{\frac{1}{2}}}$ appartient à S.*

Proposition 1.3.1 *Soit $u \in S$. On pose pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$;*

$$\widehat{u}(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\varepsilon} u(x)dx. \tag{1.3.1}$$

Où l'on a noté $x\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j$.
Alors $\widehat{u} \in S$

Définition 1.3.2 *On appelle transformation de Fourier l'application continue :*

$$\begin{aligned} F : S &\longrightarrow S \\ u &\longmapsto \widehat{u} \end{aligned}$$

La fonction : $Fu = \widehat{u}$ est appelée la transformée de Fourier de u.

Propriété 1.3.1 *L'opérateur F posséde les propriétés fondamentales suivantes (où l'on voit l'intérêt d'avoir introduit D_j) :*

$$F(D_j u)(\varepsilon) = \varepsilon_j u(\varepsilon) \Leftrightarrow \widehat{D_j u}(\varepsilon) = \varepsilon_j u(\varepsilon) \tag{1.3.2}$$
$$F(\tau_y u)(\varepsilon) = e^{iy\varepsilon}\widehat{u}(\varepsilon) \Leftrightarrow \widehat{\tau_y u}(\varepsilon) = e^{iy\varepsilon}\widehat{u}(\varepsilon) \tag{1.3.3}$$

où $\tau_y u(x) = u(x + y)$,est appelé opérateur de translation.

$$F(x_j u) = D_j F(u) \Leftrightarrow \widehat{x_j u}(\varepsilon) = D_j \widehat{u}(\varepsilon) \tag{1.3.4}$$
$$(e^{-ix\eta} u) = \tau_\eta F(u) \Leftrightarrow (e^{-ix\eta} u)(\varepsilon) = \tau_\eta \widehat{u}(\varepsilon). \tag{1.3.5}$$

Définition 1.3.3 *On appelle distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$ toute forme linéaire sur S, continue pour les sémi-normes définies en (a). L'espace des distribution tempérées est noté S'. On a en particulier, $S \subset S'$ en faisant opérer S sur lui même par la formule :*

$$\forall u \in S, \forall v \in S; < u, v >= \int u(x)v(x)dx.$$

De plus, puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S$,alors (par la régularité) S est dense dans S'
(muni de la topologie de la convergence simple sur S).

Remarque 1.3.1 *Nous remarquons maintenant que le théorème de Fubini entraine :*

$$\forall u \in S, \forall v \in S, \int \widehat{u}(\varepsilon)v(\varepsilon)d\varepsilon = \int u(x)\widehat{v}(x)dx. \tag{1.3.6}$$

$$\text{Autrement dit}: \forall u \in S, \forall v \in S, < \widehat{u}, v >=< u, \widehat{v} > \tag{1.3.7}$$

On en déduit que la formule :

$$< \widehat{u}, \varphi >=< u, \widehat{\varphi} >, \text{ pour u} \in S', \varphi \in S. \tag{1.3.8}$$

définit une application $\tilde{F} : S' \to S'$, unique prolongement continu de $F : S \to S'$. En particulier, $\tilde{F}$ satisfait encore aux relations (1.3.2),(1.3.3),(1.3.4),(1 .3.5).
On notera que la restriction de l'application F à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est encore donnée par la formule (1 .3.1), où si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$,$\widehat{u}$ est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini.

Exemple 1.3.2 *Un exemple est donné par la formule :*

$$\widehat{\delta}_0 = 1.$$

qui découle directement des définitions.

Exemple 1.3.3 *En utilisant (1 . 3 . 2), on constate que $\widehat{1} = C\delta$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{C}$.On en déduit que, pour tout $u \in S$:*

$$\widehat{\widehat{u}}(0) =< \delta, \widehat{\widehat{u}} >=< 1, \widehat{u} >=< \widehat{1}, u >= Cu(0)$$

et l'examen de cas particulier (par exemple $u(x) = e^{-|x|^{\frac{1}{2}}}$) conduit à $C = (2\pi)^n$. En utilisant l'opérateur de translation τ_y et les formules (1 . 3 . 3) et (1 .3 . 5), on conclut que :

$$\widehat{\widehat{u}}(0) = (2\pi)^n u(-x)$$

En d'autres termes, si $u \in S$, la formule (1. 3 . 1) équivaut à :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\varepsilon} u(\varepsilon)d\varepsilon. \tag{1.3.9}$$

C'est la formule d'inversion de Fourier.

F est donc un isomorphisme de S sur S, et également de S' sur S' en utilisant (1.3 . 7). Son inverse est :$\check{F} = (2\pi)^{-n}\overline{F}$, où $\overline{F}$ est la composée de F et de la symétrie $v \to \overline{v}$ définie sur S' par :

$$< \overline{v}, \varphi >=< v, \overline{\varphi}, \grave{o}u\overline{\varphi}(x) >= \varphi(-x).$$

Remarque 1.3.2 *La transformation de Fourier joue en outre un rôle particulièrement important vis-à-vis de l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$.*
Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$,on note : $< f, g >= \int f(x)\overline{g(x)}dx$, le produit scalaire.

D'après (1.3.6) et la formule d'inversion de Fourier, on a, si $f, g \in S$:

$$< \widehat{f}, \widehat{g} >= (2\pi)^n < f, g > . \tag{1.3.10}$$

On en déduit que F se prolonge en un automorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $(2\pi)^{\frac{-n}{2}} F$ soit unitaire. C'est le théorème de Plancherel.
Les formules (1.3.3) et (1.3.5) permettent d'étudier le lien entre convolution et transformation de Fourier. Pour décrire ce lien, il est commode d'introduire la notion de fonctions C^∞ à croissance lente.

Définition 1.3.4 *Une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dite à croissance lente si :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists M_\alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, |\partial^\alpha a(x)| < C_\alpha(1 + |x|)^{M_\alpha}.$$

1.3.1 Convolution

Définition 1.3.5 *Soient u et v deux fonctions C^∞ à support compacts. On pose :*

$$(u * v)(x) = \int u(y)v(x-y)dy = \int u(x-y)v(y)dy. \tag{1.3.11}$$

La fonction $u * v$ ainsi définie est C^∞ à support compact vérifiant :

$$supp(u * v) \subset suppu + suppv. \tag{1.3.12}$$

On l'appelle convolution de deux fonctions u et v.

On peut bien sûr définir la convolée de fonctions moins régulières.
L'extension la plus naturelle concerne les fonctions sommables :

Proposition 1.3.2 *Si u et v appartiennent à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors $u * v$ définie par (**??**) appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, et on a :*

$$\int |u * v(x)|dx \leq \int |u(x)|dx. \int |v(x)|dx.$$

Néanmoins, ce n'est pas cette extension que nous utilisons le plus fréquemment, mais plutôt celle décrite par la définitions (1.3.8) et la proposition(1.3.3)ci dessous, qui concerne les cas où $u \in D'(\mathbb{R}^n), v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ puis où $u \in D'(\Omega), v \in \xi'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.3.6 *Soient $u \in D'(\mathbb{R}^n), v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la formule :*

$$u * v(x) = < u, v_x >, \text{ avec } v_x(y) = v(x-y),$$

définit sur $\mathbb{R}^n$ une fonction $u * v$ de classe C^∞. Cette fonction vérifie en outre :

$$\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v. \tag{1.3.13}$$

$$supp(u * v) \subset suppu + suppv. \tag{1.3.14}$$

La convolution est à l'origine de trés utile procédé de régularisation, que nous décrivons maintenant.

Proposition 1.3.3 *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive ou nulle d'intégrale égale à 1 et soit $\epsilon > 0$, on pose $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Alors, si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, la famille de fonctions C^∞ , $u_\epsilon = u * \varphi_\epsilon$ converge vers u lorsque ϵ tend vers 0 , au sens òu :*

$$\forall \psi \in C_0^\infty; \int u_\epsilon(x)\psi(x)dx \longrightarrow < u, \psi > . \tag{1.3.15}$$

Le mode de convergence de u_ϵ vers u est essentiellement décrit par la régularité de u. D'où l'intérêt de ce procédé d'approximation par des fonctions régulières.
Ainsi, si $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, u_ϵ converge vers u au sens des sémi- normes $sup_{x\in K} sup_{|\alpha|\leq k}|\partial^\alpha v(x)|$, où K parcourt les compacts de $\mathbb{R}^n$.
Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n), (1 \leqslant p < +\infty)$, espace des fonctions de puissance p-ième sommables, u_ϵ tend vers u dans L^p.
De plus la relation (**??**) montre que le support de u_ϵ est arbitrairement proche de celui de u lorsque ϵ tend vers 0.
A l'aide d'une " troncature " , on étend ainsi le procédé de régularisations défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, montrant par exemple que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ si $p \in [1, +\infty[$ et dans $D'(\Omega)$ pour la topologie faible, c'est à dire au sens de (**??**).

Remarque 1.3.3 *Pour définir la convolution de deux distributions, on constate d'abord que,*
si $u \in D'(\mathbb{R}^n), v, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int u * v(x)\varphi(x)dx = < u, \overline{v} * \varphi >$$

où l'on a posé $\overline{v}(x) = v(-x)$.
Après avoir étendu l'opérateur $v \longrightarrow \widehat{v}$ *aux distributions par :*

$$< \widehat{v}, \varphi >=< v, \widehat{\varphi} >,$$

On pose, pour $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \xi'(\mathbb{R}^n)$ *et* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$< u * v, \varphi >=< u, \widehat{v} * \varphi >,$$

On définit ainsi une distribution $u * v$ *sur* $\mathbb{R}^n$, *qui vérifie encore* (**??**) *et* (1.3.14) *auxquelles on peut ajouter :*

$$suppsing(u * v) \subset suppsingu + suppsingv. \qquad (1.3.16)$$

Exemple 1.3.4 *Si* $\delta = \delta_0$ *désigne la masse de Dirac à l'origine , on a, pour toute distribution u sur* $\mathbb{R}^n$, $u * \delta = u$.

Lemme 2 *Si T est un élément de* $D'(\mathbb{R}^N)$ *et* ψ *un élément de* $D(\mathbb{R}^N)$, *alors la distribution* $T * \psi$ *est définie par :*

$$T * \psi(x) = (T(y), \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N}.$$
$$\text{De plus }, D^\alpha\{T * \psi\} = D^\alpha T * \psi = T * D^\alpha \psi.$$

L'opérateur $\psi \to T * \psi$ *, est une application linéaire continue de* $D(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\xi(\mathbb{R}^N)$ *. On peut aussi définir la convolution des D'-distributions avec un* ξ'*-distribution en utilisant la définition précédente de la convolution des élément de* $D'(\mathbb{R}^N)$ *avec les éléments de* $D(\mathbb{R}^N)$.
D'abord, on définit $\check{T}$ *pour* $T \in D'(\mathbb{R}^N)$ *par :*

$$(\check{T}, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (T, \check{\phi})_{\mathbb{R}^N}, \text{ pour } \phi \in D(\mathbb{R}^N)$$

Cette définition concorde avec la formule $\check{T}(x) = T(-x)$ *lorsque T est une fonction régulière.*
Pour $T \in D'(\mathbb{R}^N)$ *et* $S \in \xi(\mathbb{R}^N)$, *la distribution* $T * S$ *est définie par :*

$$(T * S, \psi)_{\mathbb{R}^N} = (T, \check{S} * \psi)_{\mathbb{R}^N}, \text{ pour } \psi \in D(\mathbb{R}^N).$$

Puisque, $\check{S} * \psi$ *est une fonction régulière (lemme 2) , à support compact, alors le terme de droite de l'égalité précédente est bien définie.*
Cette même définition peut être utilisée pour T un élément de $\xi(\mathbb{R}^N)$ *et S un élément de* $D(\mathbb{R}^N)$.

Lemme 3 *Pour* $T \in D'(\mathbb{R}^N)$, $\delta_0 * T = T$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
(\delta_0 * T, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= (\delta_0, \check{T} * \phi)_{\mathbb{R}^N}, \text{ pour } \phi \in D(\mathbb{R}^N) \\
&= (\check{T} * \phi)(0) \\
&= (\check{T}(y), \phi(0-y))_{y\in\mathbb{R}^N}, \text{ par le lemme 1} \\
&= (T(y), \check{\phi}(-y))_{y\in\mathbb{R}^N}, \text{ définition de } \check{T} \\
&= (T, \phi)_{\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

D'où : $\delta_0 * T = T$.

■

Si T est une fonction régulière dans $\mathbb{R}^N$, alors le lemme 3 peut être établi en appliquant directement le lemme 2, et on a :

$$(\delta_0 * T)(x) = (\delta_0(y), T(x-y))_{y\in\mathbb{R}^N} = T(x).$$

Le lemme 3 montre alors que la convolution avec δ_0 donne l'opérateur identité.

1.3.2 Solution fondamentale des équations aux dérivées partielles

Considérons les opérateurs à coèfficients constants de la forme :

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq M} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \text{ avec } a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.3.7 *On dit que $T \in D'(\mathbb{R}^N)$ est solution fondamentale pour P(D) si :*

$$P(D)\{T\} = \delta_0.$$

Le nom de solution fondamentale se justifie par le fait que la solution de l'équation $P(D)\{u\} = \phi$ pour $\phi \in D(\mathbb{R}^N)$ peut être trouvée par la convolution avec T, ce que nous dit le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Soit P(D) un opérateur différentiel à coèfficients constants.*
Supposons que T est une solution fondamentale de P(D).
Si $\phi \in D(\mathbb{R}^N)$ alors $u = T * \phi$ est une solution de l'équation différentielle $P(D)\{u\} = \phi$.

Preuve. D'après les lemmes 2 et 3, on a :

$$P(D)\{T * \phi\} = (P(D))\{T\} * \phi = \delta_0 * \phi = \phi.$$

Par conséquent on a : $P(D)\{T * \phi\} = \phi$

■

Remarque 1.3.4 *Lorsque P(D) est à coèfficients variables, ce théorème n'est plus valable.*

Théorème 1.3.2 *La distribution* $T(z) = \frac{1}{\pi z}$ *est une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann :* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ *dans* $\mathbb{C}$.

1.3.3 Algèbre de Banach

Définition 1.3.8 *Une algèbre de Banach unitaire est un espace de Banach A muni d'un produit* $(a,b) \in A \times A \to ab \in A$*, bilinéaire et associatif, tel qu'il existe dans A un élément neutre* 1_A *pour la multiplication* ($1_A a = a1_A = a$ *pour tout* $a \in A$) *et que de plus :*

$$||1_A|| = 1; ||ab|| \leq ||a||||b||.$$

pour tout $a, b \in A$.

On en déduit immédiatement que l'application $(a,b) \to ab$ est continue de $A \times A$ dans A, et il en résulte que les application $b \to ab$ et $b \to ba$ sont continues de A dans A.
On remarque que notre définition exclut $A = \{0\}$, puisqu'on ne pourrait pas y trouver un élément neutre 1_A de norme 1.
Pour $a \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit a^n par récurrence en posant $a^0 = 1$ et $a^{n+1} = aa^n = a^n a$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 1.3.5 *L'exemple de loin le plus important sera* $A = \mathbb{L}(E)$ *où E est un espace de Banach, si E est différent de* $\{0\}$*, il s'agit bien d'une algèbre de Banach unitaire. Le produit est la composition des applications linéaires, la norme de A est la norme d'application linéaire et* $1_A = Id_E$ *est l'élément neutre du produit, il est de norme 1 quant E différent de* $\{0\}$.

Définition 1.3.9 *Soit A une algèbre de Banach unitaire, et* $a \in A$*, on dit que a est inversible dans A s'il existe* $b \in A$ *tel que* $ab = ba = 1_A$.

Exemple 1.3.6 *1- Soit E un espace de Banach et considérons* $A = \mathbb{L}(E)$ *; une application linéaire continue* $T \in A$ *est inversible dans A, s'il existe* $S \in \mathbb{L}(E)$ *telle que :* $ST = Id_E$ *et* $TS = Id_E$*. Cela signifie que T est bijective et que* T^{-1} *est continue et correspond bien à la définition usuelle de l'inversibilité d'une application linéaire continue.*
2- Soit $f \in A = C(k)$ *; si f est inversible, il existe une fonction continue g telle que* $f(s)g(s) = 1$ *pour tout* $s \in K$*, donc* $f(s)$ *différent de 0, pour tout* $s \in K$.
Inversement, si f ne s'annule pas sur K, la fonction, $s \to \frac{1}{f(s)}$ *est définie et continue sur K, et elle est l'inverse de f dans* $A = C(K)$ *. On voit donc que f est inversible dans C(K) si et seulement si elle ne s'annule pas sur K.*

Chapitre 2

Rudiments de Géométrie Différentielle

2.1 Sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.1.1 *Soit $r \geqslant 1$. soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Un C^r - difféomorphisme de U sur V est une bijection $f : U \to V$ qui est de classe C^r ainsi que sa réciproque.*

Remarque 2.1.1 *Si un C^r-difféomorphisme f est de classe C^r , alors f^{-1} est de classe C^r.*

Définition 2.1.2 *Soit X un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. X est une sous-variété de dimension d, si pour tout point $x \in X$, il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ et un C^r-difféomorphisme f_x de U sur V qui envoie x sur 0 et envoie $U \cap X$ sur $V \cap \mathbb{R}^d \times 0_{n-d}$. On appelle $n-d$ la codimension de X. On dit que f est un C^r - difféomorphisme qui redresse X sur R^p au voisinage de x.*

Définition 2.1.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application.*

1. *f est une immersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est injective.(ie si sa matrice jacobienne est de rang d).*
2. *f est une submersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est surjective (ie si sa matrice jacobienne est de rang n).*
3. *f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^n$ si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$.*

Proposition 2.1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r. Si f est une immersion en $x \in U$, alors il existe $U' \subset U$ tel que $f(U')$ est une sous variété de classe C^r et de dimension d de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 2.1.2 *Soit X une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$, et $x \in X$. Les vecteurs vitesse en x des courbes contenues dans X et passant en x forment un sous espace vectoriel de dimension d de $\mathbb{R}^n$ appelé espace tangent à X en x et noté T_xX.*

Preuve. En effet si $\phi : U \to V$ est un difféomorphisme qui redrésse X sur $\mathbb{R}^d$ au voisinage de x, alors :

$$T_x X = (d_x\phi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$$

■

Définition 2.1.4 *Soit X une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$. On appelle fibré tangent de X, l'ensemble :*

$$\begin{aligned} TX &= \cup_{a\in X}\{a\} \times T_x X \\ &= \{(a,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / a \in X \subset \mathbb{R}^n, v \in T_x X \subset \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *Si X est une sous-variété de classe $C^r, r \geq 2$ et de dimension k de $\mathbb{R}^n$, alors TX est une sous-variété de classe C^{r-1} et de dimension $2k$ de $\mathbb{R}^{2n}$.*

Proposition 2.1.4 *Soit X une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$.*
1)- Si $X = f(U)$ est l'image d'une immersion alors :$T_{f(x)}X = imd_x f$.
2)- Si $X = f^{-1}(y)$ est une fibre d'une submersion , alors :$T_x X = ker(d_x f)$.

Nous allons définir la notion de sous-varété à bort.
On note H^n le démi espace :
$H^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \leq 0\}$

Définition 2.1.5 *Soit M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ .On dit que M est une sous-variété à bord si en chaque point x_0 de M, il existe un voisinage V de x_0 et un difféomorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^n$ envoyant x_0 sur 0 tel que l'on ait :*
Soit : a) $\phi(V \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \phi(U)$
Soit : b) $\phi(V \cap M) = (H^p \times \{0\}) \cap \phi(U)$
L'entier p est appelé dimension de M en x_0 . On appelle bord de M et on note ∂M, l'ensemble des points x_0 correspondants au cas (b).

2.2 Variétés

2.2.1 Structures différentielles sur un espace topologique

Définition 2.2.1 *Soit X un espace topologique.Un atlas de classe C^r pour X est la donnée :*
-D'un recouvrement de X par des ouverts U_i.
-Pour tout i et j ,$\phi_j o \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^r-difféomorphisme.
On appelle les ϕ_i les cartes de l'atlas et les U_i les domaines de l'atlas.
Soit (U, ϕ) une carte locale, le système $(\phi^1, ..., \phi^n)$ où les ϕ^i sont les coordonnées de ϕ, est appelé système de coordonnées associés à la carte (U, ϕ) et est souvent noté $(x^1, ..., x^n)$.

Définition 2.2.2 *Deux atlas* (U_i,ϕ_i) *et* (w_α,ψ_α) *sont compatibles si les applications* $\psi_\alpha o\phi_i^{-1}$ *sont des* C^r *-difféomorphismes.*
Une structure différentielle sur X est une classe d'atlas compatibles.
On peut alors prendre l'atlas formé de toutes les cartes compatibles avec un choix de (U_i,ϕ_i).
On appelle variété différentiable un espace topologique muni d'une structure différentielle.

Exemple 2.2.1
– $\mathbb{R}^n$ *est une variété différentielle de dimension n. C'est la variété lisse modèle qui a pour atlas* $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$.
– *Tout ouvert* $U \subset \mathbb{R}^n$ *est une variété différentielle dont l'atlas* (U, Id_U) *est composé d'une seule carte.*
– $\mathbb{C}^n$ *est une variété différentielle de dimension* $2n$.

Toute propriété locale invariante par C^r -difféomorphisme à un sens évident sur une variété différentielle. Par exemple :

Définition 2.2.3 *-Une application* $f : X \to Y$ *entre variétés est de classe* C^r *si pour toutes cartes* (U_i,ϕ_i) *de X et* (W_α,ψ_α) *de* Y, $\psi_\alpha o f o\phi_i^{-1}$ *est de classe* C^r.
-Une application $f : X \to Y$ *entre variétés est une immersion, submersion, difféomorphisme local, si pour toutes cartes* (U_i,ϕ_i) *de X et* (W_α,ψ_α)*de* Y, $\psi_\alpha o f o\phi_i^{-1}$ *l'est.*
-Une application $f : X \to Y$ *entre variétés est un difféomorphisme, si c'est un difféomorphisme local bijective.*
-Un sous ensemble $Y \subset X$ *est une sous-variété, si et seulement si pour toutes cartes* (U_i,ϕ_i) *de X,* $\phi(U_i \cap Y)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$.
-Deux sous-variétés $Z \subset X$ *et* $Y \subset X$ *sont tangent en x si et seulement si pour toutes cartes locale* (U_i,ϕ_i) *de X définie en x,* $\phi_i(Z)$ *et* $\phi_i(Y)$ *sont tangent en* $\phi_i(x)$

Lemme 4 *(Existence de fonctions plateaux).*
Soit $A \subset U \subset M$ *avec* M *une variété différentiable,* A *fermé de* M *et* U *ouvert de* M. *Il existe une fonction lisse* $f : M \longrightarrow [0,1]$, *avec* $f_A = 1$ *et* $supp(f) \subset U$.

Corollaire 2.2.1 *Soit* M *une variété lisse et* $V \subset U \subset M$ *avec* V *et* U *des ouverts de* M *tels que* $\overline{V} \subset U$.
Soit $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction lisse. Il existe une fonction lisse* $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $H_{|V} = h$.

Définition 2.2.4 *Une application* $F : M \to N$, *est un difféomorphisme de M sur N si F est une bijection et si F et* F^{-1}*sont différentiable.On a alors nécessairement* $dimM = dimN$.

2.2.2 Espace tangent à une variété

L'espace tangent est l'endroit oú vivent les vecteurs vitesses des courbes.Cela suggére la définition suivante :

Définition 2.2.5 *Soit M une variété différentielle de dimension n, et $x \in M$. Décidons que deux courbes γ et η telle que $\gamma(0) = \eta(0) = x$ ont même vitesse en $t = 0$, si dans une carte ϕ définie au voisinage de x, les images $\phi o\gamma$ et $\phi o\eta$ ont même vitesse en $t = 0$. L'ensemble des classes d'équivalences s'appelle l'espace tangent de M en x ,noté :T_xM. Clairement la carte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ identifie T_xM à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Une autre carte $\psi : U' \to \mathbb{R}^n$ donne une identification qui diffère de la prémière par l'isomorphisme $d_{\phi(x)}(\psi o\phi^{-1})$.*
Par conséquent, T_xM posséde une structure d'espace vectoriel réel de dimension n dont le dual noté $T_x^*\mathbb{R}^n$ est appelé espace cotangent en $x \in M$.

Exemple 2.2.2 $\forall x \in \mathbb{R}^n, T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, *et* $T_x^*\mathbb{R}^n = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$

Définition 2.2.6 *Une application différentielle $f : M \to N$ entre variétés induit une application linéaire $d_x f : T_xM \to T_{f(x)}N$ appelée sa différentielle. En particulier, pour une sous-variété $N \subset M$, T_yN s'identifie à un sous espace vectoriel de T_yN.*
Une application f est une immersion (resp une submersion) en x, si et seulement si sa différentielle en x est injective (resp surjective).
Deux sous-variétés sont tangents en un point x si et seulement si elles ont même espace tangent en x.

Définition 2.2.7 *Soit M une variété et $p \in M$ un point fixe. On appelle germe de fonction lisse en p une classe d'équivalence de fonctions lisses définies au voisinage de p, pour la relation d'équivalence suivante :*

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ sur un voisinage ouvert de p.}$$

On note $\mathscr{F}_p$ l'ensemble des germes de fonctions lisses en p.

L'ensemble $\mathscr{F}_p$ porte une structure naturelle d'algèbre commutative sur $\mathbb{R}$. Ceci signifie qu'il possède une structure d'espace vectoriel réel, une structure d'anneau commutatif, et que ces deux structures sont compatibles au sens où le produit est distributif par rapport à la somme et commute avec la multiplication par des scalaires. A titre d'exemple, si f_p et g_p sont deux germes représentés par des fonctions lisses $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$, le germe produit $f_p.g_p$ est représenté par la fonction produit $fg : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$. A noter que $\mathscr{F}_p$ est un espace réel de dimension infinie.

Définition 2.2.8 *On appelle dérivation de $\mathscr{F}_p$ à valeur dans $\mathbb{R}$, ou dérivation de $\mathscr{F}_p$, une application $\mathbb{R}$-linéaire $D : \mathscr{F}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie règle de Leibniz*

$$D(f_p.g_p) = D(f_p)g(p) + f(p)D(g_p).$$

On note le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des dérivations de $\mathscr{F}_p$ par $Der(\mathscr{F}_p,\mathbb{R})$

Proposition 2.2.1 *T_pM est canoniquement isomorphe à $Der(\mathscr{F}_p, \mathbb{R})$. Ce qui équivaut à dire que tout vecteur tangent est une dérivation et inversement.*

Définition 2.2.9 *Orienter un espace vectoriel c'est choisir une base directe : (i.e une base $(v_1, v_2, ..., v_n)$ telle que $det(v_1, v_2, ... v_n) > 0$.*

Définition 2.2.10 *Soit X une variété, orienter X c'est choisir une orientation de chaque espace tangent de faon continue,ie ,si $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte ,les orientations transportées par les différentielles , $d_x\phi : T_xX \to \mathbb{R}^n$ sont toutes les mêmes*

Remarque 2.2.1 *Définition équivalente : Orienter X, c'est choisir un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ telle que les changements de cartes préservent les orientations (i.e $J_\mathbb{R}(\phi_\alpha o \phi_\beta^{-1}) > o, \forall \alpha, \beta \in I$, telle que $U_\alpha \cap U_p \neq \emptyset$). En effet, un tel atlas permet d'orienter de façon continue les espaces tangents. Réciproquement, une fois les espaces tangents orientés, l'atlas des cartes préservant les orientations convient.*

Proposition 2.2.2 *Toute variété compacte est orientable.*
Preuve.

Si M est une variété compacte et $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ un atlas,on a :
Si $U_\alpha \cap U_\beta$ différent de l'ensemble vide, alors $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha o \phi_\beta^{-1}$ est un biholomorphisme ,donc $J_\mathbb{C}(\phi_\alpha o \phi_\beta^{-1})$ est différent de 0.
Mais $J_\mathbb{R}(\phi_\alpha o \phi_\beta^{-1}) = |J_\mathbb{C}(\phi_\alpha o \phi_\beta^{-1})|^2 > 0$. ■

2.3 Champs de vecteurs sur une variété

2.3.1 Notions élémentaires sur les champs de vecteurs et les fibrés tangents

Définition 2.3.1 *Un champ de vecteur de classe C^l sur une variété différentiable M est une application qui à chaque point x associe un vecteur tangent $\xi(x) \in T_xM$, de sorte que, dans une carte ϕ, l'application $x \longmapsto d_x\phi(\xi(x))$ soit différentiable de classe C^l.*
On note $\mathscr{X}^l(M)$ l'espace des champs de vecteurs de classe C^l sur M.

Remarque 2.3.1

1. *Lorsque $X \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété , un champ de vecteur est aussi une application différentiable $\xi : X \to \mathbb{R}^n$.*
2. *Si $f : X \to Y$ est un difféomorphisme et ξ un champ de vecteur sur X, le champ de vecteur transporté par f sur Y est noté : $f * \xi$. On a :*

$$f * \xi(y) = (d_{f^{-1}(y)} f)(\xi(f^{-1}(y)))$$

Proposition 2.3.1 *(Ecriture locale d'un champ de vecteurs).*
Soit $X \in X^l(M)$ un champ de vecteur de classe C^l sur une variété différentiable de dimension m. Alors pour tout système de coordonnées locales $(x^1,....,x^m)$ associé à une carte locale (U,φ), on a :

$$X_{|U} = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où $X_i \in C^l(U)$.
X sera dit à coefficients complexes sur U si $\forall i, X_i \in C^l(U,\mathbb{C})$.

Remarque 2.3.2 *Soit $X \in \mathscr{X}^l(M), \forall x \in M, X(x) \in T_xM$ est une dérivation en x. Ainsi X définit un opérateur différentielle sur M.*

Exemple 2.3.1 *Pour $M = \mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, t) ; $X = 3\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - t)\frac{\partial}{\partial y} - (x + y + t^2)\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ de vecteur C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ (ie $X \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^3) := \mathscr{X}^\infty(\mathbb{R}^3)$.*

Définition 2.3.2 *Soit $X, Y \in X^l(M)$ et $f \in C^l(M)$.*

1. *On appelle dérivée de f suivant X, la fonction notée $X(f) \in C^l(M)$ définie par :*

$$X(f)(p) = d_pf(X(p)).$$

2. *On appelle commutateur (ou crochet) de X et Y (dans l'ordre), le champ de vecteur noté $[X, Y] \in \mathscr{X}^{l-1}(M)$ défini par :*

$$[X, Y](f) = X[y(f)] - Y[X(f)]$$

Proposition 2.3.2

1. *$X^l(M)$ est un $\mathbb{R}-e.v$ si on le munit de l'addition des champs de vecteurs et de la multiplication par un réel définie par :*

$$\forall X, Y \in \mathscr{X}^l(M), \forall p \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (X + \lambda Y)(p) = X(p) + \lambda Y(p)$$

2. *Le $\mathbb{R}-e.v$ $X^l(M)$ est une algèbre de Lie, c'est à dire le crocher $[,]$ vérifie : $\forall X, Y, Z \in X^l(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}$,*
   (a) *$[X, Y] = -[Y, X]$ (antisymétrie)*
   (b) *$[\lambda X + Y, Z] = \lambda[X, Z] + [Y, Z]$ (bilinéarité à gauche)*

(c) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ *(identité de Jacobi)*

Proposition 2.3.3 *Soit M une variété différentiable de dimension m et de classe C^k, $k \geq 2$.*
Soit $\mathscr{A} = \{(U_i, \phi_i)_{i\in I}\}$ l'atlas définissant la structure C^k de M. $\forall x \in M$, on a l'espace tangent T_xM en x à M.
Soit $TM = \bigsqcup_{x\in M} T_xM := \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_xM$. Soit $\pi : TM \to M$ telle que $\pi(p, X_p) = p$, $\forall p \in M$. Pour tout $i \in I$, soit $\psi_i : TM \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ telle que $\psi_i(p, X_p) = (\phi(x), T_p\phi(X_p))$. Pour tout $i \in I$ on pose $V_i = U_i \times TU_i$ où $TU_i = \bigcup_{x\in U_i} T_xM$. On munit TM de la topologie la moins fine rendant continue les ψ_i. Alors :

1. *$\mathscr{T}\mathscr{A} := \{(\psi_i, V_i)_{i\in I}\}$ est un atlas topologique sur TM.*
2. *TM est une variété de classe C^{k-1} et de dimension $2m$.*

Définition 2.3.3 *TM muni de la structure de variété de classe C^{k-1} et de dimension $2m$ est appelé fibré tangent de M.*

Remarque 2.3.3 *Soit $T^*M = \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_x^*M$ et soit $\pi^* : T^*M \to M$ telle que $\pi^*(p, w_p) = p$. Alors T^*M est muni comme dans la proposition* **??** *d'une structure de variété de classe C^{k-1} est de dimension $2m$ qu'on appelle fibré cotangent de M.*

Exemple 2.3.2 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$

Définition 2.3.4 *Soit M une variété différentiable, on appelle section de classe C^l du fibré TM toute application $s : M \to TM$ de classe C^l tel que $\pi o s = I_M$ où $\pi : TM \longrightarrow M, (x, X_n) \longmapsto X$.*
On note $\Gamma^l(M, TM)$ l'espace des sections de classe C^l de TM

Proposition 2.3.4 $\Gamma^l(M, TM) = \mathscr{X}^l(M)$

2.3.2 Flot et groupe de difféomorphisme

Définition 2.3.5 *Une courbe régulière $\gamma : I \longrightarrow M$ s'appelle courbe intégrale d'un champ de vecteurs $X \in \mathscr{X}(M)$ si $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ pour tout $t \in I$.*
En coordonnées locales, si on pose $\tilde{\gamma}(t) = (x^1(t), ...x^m(t)$ ceci est équivalent aux équations différentielles de 1er ordre :

$$\dot{x}^i(t) = X^i(x^1(t), ...x^m(t)), i = 1, 2, ..., m$$

Proposition 2.3.5 *Pour tout $x \in M$, il existe une unique courbe intégrale maximale de $X \in \mathscr{X}(M)$ qui passe par x.*

Preuve. En partant d'une carte (U,φ) de M qui contient x, on trouve la courbe intégrale en coordonnées locale comme solution du système d'équations différentielles du 1er ordre avec condition initiale $\tilde{\gamma}(0)=\varphi(x)$. En suite on prolonge la courbe d'une carte à une autre en choisissant à chaque fois un point qui se trouve sur l'intersection des deux cartes.
On obtient ainsi une courbe ayant domaine de définition $I \subset \mathbb{R}$ maximale.
■

Définition 2.3.6 *Le flot d'un champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(M)$ est l'application $\phi^X :\longrightarrow Diff(M)$, $t \longmapsto \phi^X_t$ définie sur $x \in M$ par*

$$\phi^X_t(x) = \gamma(t) \in M$$

ou γ est la courbe intégrale maximale de X qui passe par x. Le flot ϕ^X a donc le même domaine I de γ. Autrement dit, le flot de X est défini par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\phi^X_t(x) = X_{\phi^X_t(x)}, \phi^X_0(x) = 0$$

Pour la suite on note ϕ^X_t et ϕ^X par ϕ et phi_t.

Remarque 2.3.4 *Par définition de ϕ , et donc de ϕ_t, le flot peut être également caractérisé comme la famille de difféomorphisme locaux solution de l'équation différentielle :*
$\dfrac{\partial\phi_t}{\partial t} = Xo\phi_t$, $\phi_0 = id$.
Cette caractérisation permet de montrer que les flot se transportent par conjugaison.

Lemme 5 *Soit $F : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme et X un champ de vecteur sur M, de flot ϕ_t .Le flot du transport(ou poussé en avant) $F*X$ de X par F est $Fo\phi_t oF^{-1}$, c'est à dire le conjugué du flot de X.*

Preuve. Posons $\phi'_t = Fo\phi_t oF^{-1}$. Comme $\phi'_0 = id_N$, il suffit de vérifier que :
$\dfrac{\partial\phi'_t}{\partial t} = F*Xo\phi'_t$.
On a : $\phi'_t(q) = Fo\phi(t,F^{-1}(q))$, et la dérivée partielle par rapport à t s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi'_t}{\partial t}(q) &= dFo\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,F^q) \\
&= dFoXo\phi_t oF^{-1}(q) \\
&= dFoXoF^{-1}oFo\phi_t oF^{-1}(q) \\
&= F*Xo\phi'_t(q)
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.5 *Le flot forme un groupe local à un paramètre de difféomorphisme de M. Un tel groupe est défini par les propriétés suivantes :*

1. ϕ_t *est un difféomorphisme local* $\forall\, t \in I$.
2. $t \longmapsto \phi_t$ *est différentiable* .
3. $\phi_0 = id$
4. $\phi_t o \phi_s = \phi_s o \phi_t = \phi_{t+s}$, $\forall\, t, s, t+s \in I$.

Proposition 2.3.6 *Tout champ de vecteur sur M engendre un groupe local à un paramètre de difféomorphisme sur M.*

Théorème 2.3.1 *Du redressement d'un champ de vecteur dans une variété.*
Soit M une variété de dimension n et de classe C^k *,où k est un entier strictement positif ou infini, et X un champ de vecteur contenant un point* p_o *de M. Si* $X(p_o)$ *est un vecteur non nul, il existe une carte local* φ *définie sur un ouvert V de* $\mathbb{R}^n$ *tel que l'image de V par cette carte soit un ouvert U de M contenant* p_o *et tel que l'image du champ de vecteur X par* φ *sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifie :*

$$\varphi * X = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Définition 2.3.7 *On appelle tiré en arrière du champ de vecteur* $Y \in \mathscr{X}^l(M)$ *par le difféomorphisme* $l : M \longrightarrow N$ *entre deux variétés différentielles, le champ de vecteurs* $\varphi^* Y = \varphi_*^{-1} Y$ *où* $\varphi_*^{-1} Y$ *est le poussé en avant du champ* Y *par* φ^{-1}.
C'est à dire le champ sur M défini par :

$$(\varphi_*^{-1} Y)(p) = d_{\varphi(p)} \varphi^{-1} [Y(\varphi(p))]$$

Proposition 2.3.7 *Soit M une variété différentielle et soient* $X, Y \in \mathscr{X}^l(M)$. *On a :*

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}_{|0} (\varphi_X^t)^* (Y),$$

où $(\varphi_X^t)_t$ *est le flot de X.*

Définition 2.3.8 *Soit U un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *, V un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-p}$*, et pour tout k,* $(1 \leq k \leq n-p)$*, une fonction* $B^k : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^K, $(1 \leq r \leq \infty)$. *On appelle " système de Pfaff " tout système de la forme :*

$$(F) : \frac{\partial v^k}{\partial x^h} = B_h^k(x^1, ..., x^p, v^1, ..., v^{n-p}), (1 \leq k \leq n-p; 1 \leq h \leq p)$$

Définition 2.3.9 *Une variété intégrable de ce système, si elle existe est une sous-variété N de* $U \times V$*, de classe* C^r*, définie par la représentation paramétrique :* $(RP) : x^{p+k} = v^k(x^1, ..., x^p)$ *sur laquelle s'annulent donc les 1-formes différentielles (ou "formes de Pfaff ") linéairement indépendantes :*

$$\omega^k = dx^{p+k} - \sum_{h=1}^{p} \frac{\partial v^k}{\partial x^h} dx^h$$

Théorème 2.3.2 *De Frobenius.*
Résoudre le système de Pfaff (F) équivaut à déterminer une variété intégrable N de ce système, et (F) admet une solution si et seulement si une telle variété existe.

2.4 Quelques notions sur les Variétés CR

2.4.1 Fibré tangent holomorphe

Définition 2.4.1 *Une variété CR abstraite de type (k,d) est un triplet (M, HM , J) où M est une variété différentiable de dimension 2n +k, HM un sous-fibré de rang 2n du fibré tangent TM et* $J : HM \to HM$ *est un isomorphisme de fibré préservant le fibré et vérifiant* $J^2 = -I$.
J est appelée structure presque complexe de HM.

Définition 2.4.2 *Une variété complexe M de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection* $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *où les* U_α *sont des ouverts de M telle que :* $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$*, sont des homéomorphismes pour lesquels on a :*
Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha o \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *sont des biholomorphismes.*
(U_α, ϕ_α) *sont appelées des cartes locales.*
$z \in U_\alpha, \phi_\alpha(z) = (z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha) \in \mathbb{C}^n$.
Les $(z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha)$ *sont appelées les coordonnées locales autour de z.*
La collection $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ *est appelée atlas.*

Exemple 2.4.1 $\mathbb{C}^n$ *est une variété complexe de dimension* n.

Remarque 2.4.1 *Puisque* $\mathbb{C}^n$ *est isomorphe à* $\mathbb{R}^{2n}$*, donc tout variété complexe de dimension n est une variété différentielle de dimension 2n.*

Définition 2.4.3 *Soit M, une variété complexe de dimension n. Une fonction* $f : M \to \mathbb{C}$ *est dite différentiable (resp holomorphe), si pour toute carte locale,* (U_α, ϕ_α), $f o \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{C}$ *est différentiable (resp holomorphe).*

Considérons maintenant la variété complexe $\mathbb{C}^n$ de dimension n muni du système de coordonnées $(z_1, z_2, z_3, ..., z_n)$.
Pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$, en posant $z_j = x_j + i y_j$, on a $\mathbb{C}^n$ qui est une variété différentielle de dimension $2n$ avec comme système de coordonnées local $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ..., x_n, y_n)$ ($\mathbb{C}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$).

Soit $p \in \mathbb{C}^n$, $T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n =< \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y_n} >$
On pose :

$$\begin{array}{rcl} J : T_p\mathbb{C}^n & \longrightarrow & T_p\mathbb{C}^n. \\ (\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y_n}) & \longmapsto & (-\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, ..., -\dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y_n}) \end{array}$$

Ainsi on a : $J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$ et $J(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial y_j}$
Notre J vérifie : $J^2 = -id_{T_p\mathbb{C}^n}$.
Le J ainsi défini est appelé structure complexe de $T_p\mathbb{C}^n$.
J s'étant au complexifié de $T_p\mathbb{C}^n$ noté $T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de la manière suivante :
$v \in T_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, v = u \otimes \alpha$
$J^{\mathbb{C}}(v) = J(u) \otimes \alpha$, J est $\mathbb{C}$ -linéaire et $J^2 = -id_{T_p}\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
Posons maintenant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}) \\ J^{\mathbb{C}}(\frac{\partial}{\partial z_j}) &= \frac{1}{2}(J(\frac{\partial}{\partial x_j}) - iJ(\frac{\partial}{\partial y_j})) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y_j} + i\frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \frac{1}{2}i(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}) \end{aligned}$$

D'où : $J^{\mathbb{C}}(\frac{\partial}{\partial z_j}) = i\frac{\partial}{\partial z_j}, j = 1, ..., n$
Aussi $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})$.
Par la même procédure , on trouve que :
$J^{\mathbb{C}}(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}, j = 1, ..., n.$
$T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est de dimension 2n.
$T_p^{1,0}\mathbb{C}^n =< \dfrac{\partial}{\partial z_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial z_n} >,$
$T_p^{0,1}\mathbb{C}^n =< \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, ..., \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_n}} >,$

On a : $T_p^{1,0}\mathbb{C}^n \cap T_p^{0,1}\mathbb{C}^n = 0$.
Ainsi, on a : $T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_p^{1,0}\mathbb{C}^n \oplus T_p^{0,1}\mathbb{C}^n$.
Si $u \in T_p^{1,0}\mathbb{C}^n \cap T_p^{0,1}\mathbb{C}^n$,alors :
$J(u) = iu = -iu$,
On en déduit que : $u = -u, \Rightarrow u = 0$
$T_p^{1,0}\mathbb{C}^n$ est appelé espace tangent holomorphe en p.
$T_p^{0,1}\mathbb{C}^n$ est appelé espace tangent antiholomorphe au point p.
$T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n =< \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y_n} >$.
$(T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}n)^*$ est l'espace cotangent holomorphe au point p. C'est le dual de $T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$.
$\dfrac{\partial x_k}{\partial x_j} =< \dfrac{\partial}{\partial x_j, dx_k} = \delta_{kj}$
$\dfrac{\partial y_k}{\partial y_j} =< \dfrac{\partial}{\partial y_j, dy_k} = \delta_{kj} >$
$T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n =< dx_1, dy_1, ..., dx_n, dy_n >$.
La structure complexe J définie sur $T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ s'étant par dualitéà $(T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}n)^*$ comme suit :
Pour $v^* \in (T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n)^*, < J^* v^*, u >=< v^*, Ju >$,oú $u \in T_p\mathbb{R}\mathbb{C}^n$.
Ici aussi, on a : $J^{*2} = -id_{T_p\mathbb{R}\mathbb{C}n)^*}$
$(T_p\mathbb{R}\mathbb{C}^n)^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, est le complexifié de l'espace cotangent réel. C'est un espace vectoriel complexe de dimension 2n. C'est le dual de $(T_p\mathbb{R}\mathbb{C}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
J^* va s'étendre de manière $\mathbb{C}$-linéaire à $(T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}$.
$T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} =< \dfrac{\partial}{\partial z_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial z_n}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, ..., \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_n}} >$.
On pose : $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$.
$< dz_k, \frac{\partial}{\partial z_j} >= \sum_{jk}$ et $< dz_j, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} >= 0$.
$< d\overline{z_j}, \frac{\partial}{\partial z_j} >= 0$ et $< d\overline{z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} >= \sum_{jk}$.
$(T_p^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C} =< dz_1, ..., dz_n, d\overline{z_1}, ..., d\overline{z_n} >$
$T_p^{*(1,0)}\mathbb{C}^n =< dz_1, ..., dz_n >$: L'espace cotangent holomorphe au point p.
$T_p^{*(0,1)}\mathbb{C}^n =< d\overline{z_1}, ..., d\overline{z_n} >$: L'espace cotangent antiholomorphe au point p.

2.4.2 Structure CR abstraite

Définition 2.4.4 *Soit (M, HM, J) une variété presque C.R abstraite de type (k,d) et soit :*

$$T^{0,1} := \{X + iJX,\ X \in \Gamma(M, HM)\} \subset \Gamma(M, \mathbb{C}TM).$$

(M,HM,J) est dite formellement intégrable si : $[T^{01}; T^{01}] \subset T^{01}$ et dans ce cas (M,HM,J) sera dite structure C.R abstraite. J sera alors appelée structure complexe de HM.
Ici $\mathbb{C}TM = \{u + iv : u, v \in TM\}$ et $\Gamma(M, HM)$ (respectivement $\Gamma(M, \mathbb{C}TM)$) désigne l'espace des sections C^∞ de HM (respectivement de $\mathbb{C}TM$).

Remarque 2.4.2 1. *Les variété presque C.R de type $(k,0)$ sont des variétés presque complexes de dimension k. Par exemple, toute variété différentiable de dimension 2k est une variété presque complexe de dimension k.*

2. *Les variétés C.R de type $(k,0)$ sont des variétés complexes de dimension k. Par exemple $\mathbb{C}^k$.*

Définition 2.4.5 *Soit (M, HM, J) une variété C.R.*
1) On appelle fibré caractéristique le fibré noté H^0M , défini par :

$$H^0M = \{\xi \in T^*M \ < X, \xi >= 0, \forall X \in H_{\pi(\xi)}M\}.$$

2) Soit $\xi \in H^0_pM$, on appelle forme de Levi en ξ la forme $\mathscr{L}_p(\xi,.)$ définie par :

$$\mathscr{L}_p(\xi, X) = \xi([J\tilde{X}, \tilde{X}]) = d\tilde{\xi}(X, JX), \ pour\ X \in H_pM.$$

La forme de Levi est une forme hermitienne pour la structure complexe de H_PM définie par J. Ici $\tilde{\xi}$ est une section de H^0M prolongeant ξ et $\tilde{X}$ une section de HM prolongeant X.

Définition 2.4.6 *Une fonction lisse sur M est une fonction CR sur M si $\overline{\partial}_M f = 0$, où $\overline{\partial}_M$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M.*

Définition 2.4.7 *Soit (M, HM, J) une structure CR abstraite de type (k,d). On dit que (M, HM, J) est localement C.R plongeable en $p \in M$ s'il existe $k+d$ fonctions CR à valeurs complexe au voisinage de p et dont les différentielles sont linéairement indépendantes.*

2.4.3 Sous variété C.R

Soit C^n une variété complexe de dimension n et $M \subset C^n$ une sous variété de dimension réelle m. Posons :

$$T^{10}M = T^{10}C^n \cap (TM \otimes \mathbb{C})$$

Où $T^{10}C^n$ est le fibré tangent holomorphe à C^n. C'est à dire que localement $T^{10}C^n$ est engendré par :
$\{\frac{\partial}{\partial z_j}; 1 \leqslant j \leqslant n\}$.
Où $\{z^1; ....; z^n\}$ sont les coordonnées complexes locales sur C^n

Les vecteurs de T^{10}_xM sont appelés vecteurs tangents holomorphes à M en $x \in M$. Ceux sont les vecteurs de $T^{10}_xC^n$ qui sont tangents à M en x.

Posons :

$$H_xM = T_xM \cap J(T_xM);$$

Où J est la structure complexe naturelle sur T_xC^n L'application φ qui à tout élément $z \in T_x^{10}M$ associe sa partie réelle réalise un isomorphisme de $T_x^{10}M$ dans H_xM.
Soit J_1 la structure complexe naturelle sur $T_x^{10}M$, alors on a :

$$J_{bx} = \varphi o J_1 o \varphi^{-1}.$$

Où ,$J_{bx} : H_xM \to H_xM$. Avec, $J_{bx}(v+\overline{v}) = i(v-\overline{v})$.
Donc φ transforme la structure complexe J_1 en la structure complexe J_{bx} (qui est la structure naturelle sur H_xM) induit par J) .
En générale, la dimension complexe de T_xM dépend de $x \in M$.
Ce pendant si $dim_{\mathbb{C}} T_x^{10} = k$ est constante puisque $T^{10}C^n$ est une structure complexe sur C^n(donc C.R de type (n,0)), alors $(M, T^{10}M)$ est une variété C.R de type (k,d= m - 2k).

Définition 2.4.8 *On appelle sous variété C.R de type (k,d) de $\mathbb{C}^n$ toute sous-variété différentiable M, $dim_M = 2k + d$. Si de plus d = 2n - m, avec m = dim_M et n = $dim_{\mathbb{C}^n}$ alors on dit que la sous-variété C.R M de $\mathbb{C}^n$ est générique.*
Si, n = 1, $\mathbb{C}^n$ est une variété de type hypersurface.

Exemple 2.4.2 *Toute hypersurface réelle de $\mathbb{C}^n$ est une sous-variété C.R générique.*
Soit M une sous-variété C.R de type (k,d) d'une variété $\mathbb{C}^n$, alors pour tout ouvert local $U \in \mathbb{C}^n$, on a : $M \cap U = \{z \in U\ \rho_1(z) = \rho_2(z) = ... = \rho_d(z)$ où $\rho_1, ..., \rho_k$ sont des fonctions différentiables telle que : $d\rho_1 \wedge ..... \wedge \rho_d$ différent de 0 sur M.
Le fibré $T^{10}M$ est alors $\bigcap_{1 \le j \le d} ker(\partial \rho_j)$ où $\partial \rho_j$ est considéré comme une forme linéaire sur $T^{10}\mathbb{C}^n$.
Soit NM le fibré normal de M, si $x \in M$, alors N_xM est l'orthogonal de T_xM dans l'espace réel T_xM, C'est à dire l'espace vectoriel réel engendré par les $\nabla \rho_j(z); 1 \le j \le l$, où $\nabla = (\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}; ....\frac{\partial}{\partial \overline{z_n}})$. La forme de Levi $\mathscr{L}_M(x)$ de M en x est la forme hermitienne définie sur $T_x^{10}M$ et à valeur dans N_xM qui est donné par :

$$\mathscr{L}(x).t = i\pi_x(J[L, \overline{L}])$$

Pour tout $t \in T_x^{10}M$, où π_x est la projection orthogonale de T_xM sur N_zM, où L est n'importe quel champ de vecteurs holomorphes tangents vérifiant $L_z = t$ et où J est la

structure complexe naturelle sur $\mathbb{C}^n$.
Si $v \in N_z M$, on définit sur T^{10}_M la forme de Levi de M dans la direction v par la formule.

$$\mathcal{L}_{M,v}(z).t =< v, \mathcal{L}_M(z).t >$$

où $< .;. >$ désigne la forme hermitienne usuelle sur $\mathbb{C}^n$.
Lorsqu'en un point z de M, le symétrique $(\nabla\rho_1, ..., \nabla\rho_k)$ est orthonormé, on vérifie que pour tout $t \in T^{10}M$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M,v}(z).t &= \sum_{1\leq j\leq d} < v; \nabla\rho_j(z) > \mathcal{L}_{\rho_j}.t \\ &= \mathcal{L}_{\rho;v}(z).t \end{aligned}$$

où $\rho = (\rho_1, ...\rho_d)$.
Ici $\mathcal{L}_{\rho_j}(z).t = \sum_{1\leq, a,b\leq n} \frac{\partial^2\rho_j}{\partial z^a \partial\overline{z}^b}(z) t^a t^b$ est appelée forme de Levi de ρ_j en z.

Remarque 2.4.3 *Si M est C.R, alors la condition $d\rho_1 \wedge .... \wedge d\rho_d \neq 0$ sur M est équivalente à la condition $\overline{\partial}\rho_1 \wedge ..... \wedge \overline{\partial}\rho_d \neq o$ sur M qui est équivalente à la condition $\partial\rho_1 \wedge .... \wedge \partial\rho_d \neq 0$ sur M.*

Définition 2.4.9 *Soient $(M, T^{10}M)$ et $N, T^{10}N$ deux variétés abstraites de type donnés. Une application : $f : M \to N$ de classe C^∞ est dite C.R si on a :*

$$(d_x f)(T^{10}_x M) \subset T^{10}_{f(x)}N, \text{ pour tout } x \in M;$$

où $d_x f$ est l'extension $\mathbb{C} - linéaire$ à $T_x M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de la différentielle de f en x.
En particulier, une application : $f : M \to \mathbb{C}^n$ est C.R si $f * (T^{10}M)$ est un sous fibré du fibré complexe engendré par les champs :$\frac{\partial}{\partial\overline{z_1}}; ....; \frac{\partial}{\partial\overline{z_n}}$.
Ceci équivaut à $\overline{z}f = 0$ pour tout $z \in T^{10}M$.
Ces équations sont dites de Cauchy-Riemann tangentielles et sont notées par $\overline{\partial_b}f = 0$.

Exemple 2.4.3 *Les applications holomorphes sont des application C.R .*

Chapitre 3

Réalisabilité Locale des Structures CR Hölderiennes

3.1 Opérateur de Cauchy

" Ici on veut montrer que l'opérateur de Cauchy A sur $\mathbb{C}$ est un opérateur borné de l'espace C^{α}_{φ} des fonctions α Hölderienne à support dans un compact Q de $\mathbb{R}^3$ dans $C^{\alpha+1}$ des fonctions $\alpha+1$ - Hölderiennes et ceci en estiment la norme de A . Au passage on montre d'abord que $(C^{\alpha}_{b}, ||.||_{\alpha})$ est un espace de Banach et même une algèbre de Banach (quitte à multiplier par une constante)".

Notons par $C^{\alpha}_{b}(\mathbb{R}^n), \alpha \geq 0$ la classe Hölderienne des fonctions u sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{C}$ dont les dérivées jusqu'à la partie entière de α(notée $|\alpha|$) sont bornées et continues sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.1 *Soient les fonctions ψ et ϕ définies telles que :*
$\psi \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^n), \psi(\xi) = 1$ *pour* $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ *et* $\psi(\xi) = 0$ *pour* $|\xi| \geq 1$.
$\phi(\xi) = \psi(\frac{\xi}{2}) - \psi(\xi)$, ϕ *est supportée dans la couronne* $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$.
Pour $u \in S'$ *, on pose :* $u_p = \phi(2^{-p}x)^{\beta} * u$ *pour* $p \in \mathbb{N}$ *et* $u_{-1} = \psi^{\beta} * u$.
Ici les fonctions u_p *sont les restructions à* $\mathbb{R}^q$ *de fonctions holomorphes sur* $\mathbb{C}^n$ *et pour* $u \in S'$ *on a :*$u = \sum\limits_{p\geq -1} u_p$.
"La convergence ayant lieu pour la topologie de la convergence simple de S' en dualité avec l'espace S." C'est la décomposition de Littlewood-Paley de u .

L'objective de la Décomposition de Littlwood-Paley, c'est de décomposer une distribution $u \in S'$ tempérée en une série de fonctions u_p qui sont des restrictions à $\mathbb{R}^q$ de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$.

Pour étudier la réalisabilité des structures Cauchy-Riemann rigides de $\mathbb{R}^3$ Holdoriennes, nous utilisons les propriétés de l'opérateur de Cauchy A sur $\mathbb{C}$, défini par : $Af = \frac{1}{\pi z} * f$.
A est un opérateur qui augmente l'ordre de dérivabilité d'une unité dans les classe Höldoriennes d'exposant non entier : (d'après E.M Stein [11]) ; afin d'estimer la norme de l'opérateur A, nous étudions une démonstration de ce résultat qui repose sur la décomposition de Littlewood-Paley dont on trouve une exposition dans le chapitre 1.
Commençons par rappeler quelques définitions qui fixeront les notations :
D^β : pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a :
$D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n} n}$ et $||\beta|| = \sum_i \beta_i$.
$C_b^\alpha(\mathbb{R}^n)$ (resp C_0^α, C_Q^α) : pour tout $\alpha \geq 0$, c'est la classes Höldorienne des fonction u sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont les dérivées jusqu'à la partie entière de α notée $|\alpha|$; sont bornées et continues sur $\mathbb{R}^n$
(resp et de plus à support compact, resp à support dans un compact Q donné) et vérifiant :
$|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha-|\alpha|}$ pour toutx, y dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout β tel que $||\beta|| = |\alpha|$.

La meilleur constante C dans la relation précédente est notée $||u||'_\alpha$.
Pour tout $u \in C_b^\alpha$, on pose $||u||_0 = sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|$.
$C_b^\alpha(\mathbb{R}^n)$ est un espace normé par :

$$||u||_\alpha = ||u||_0 + ||u||'_\alpha$$

On considère les fonctions ϕ et ψ introduites dans le chapitre 1 pour la décomposition de Littlewood-Paley.
Dans la suite, afin de simplifier l'écriture les inégalités déjà établies le seront à des constantes multiplicatives prés .

Proposition 3.1.1 *Il existe une constante C ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que :*

$$||D^\beta u_p||_0 \leq 2^{p||\beta||} C^{||\beta||} ||u_p||_0.$$
$$||D^\beta u_{-1}||_0 \leq C^{||\beta||} ||u_{-1}||_0.$$

pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n, p \geq 0$.

Preuve. Soit χ une fonction plateau valant 1 sur le support de ϕ.
La variable d'espace est notée ξ.

$$
\begin{aligned}
(\widehat{D^\beta u_p})(\xi) &= \xi^\beta(\widehat{u_p}) \\
&= \xi^\beta \phi(2^{-p}\xi)(\widehat{u})(\xi) \\
&= 2^{p||\beta||}(\xi^\beta.\chi)(2^{-p}\xi).(\widehat{u_p})(\xi) \\
D^\beta u_p &= 2^{p||\beta||}(\xi^\beta.\chi)(2^{-p}\xi)^\sim * u_p
\end{aligned}
$$

Pour tout $p \geq 0$. (Ici $\sim$, c'est la transformation de Fourier inverse).

$$
\begin{aligned}
|(\xi^\beta.\chi)(2^{-p}\xi)^\sim|_{L_1} &= |(\xi^\beta.\chi)^\sim|_{L_1} \\
&\leq |(I+\triangle)^n(\xi^\beta\chi)|_{L_1} \\
&\leq C^{||\beta||}.
\end{aligned}
$$

òu C est une constante ne dépendant que de la dimension n. ■
Un calcul analogue conduit à :
$D^\beta u_{-1} = (\xi^\beta.\chi) \sim * u_{-1}$, oú cette fois χ est une fonction plateau valant 1 sur le support de ϕ ; l'inégalité cherchée s'en déduit immédiatement.

Proposition 3.1.2 *Il existe une constante C ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que pour tout α positif et non entier et tout u dans C^α on a :*
$||u||_\alpha \leq C^\alpha[||u_{-1}||_0 + Max[\frac{1}{d(\alpha)}; \frac{1}{1-d(\alpha)}]sup_{p\geq 0}||2^{p\alpha}u_p||_0]$.
où $d(\alpha)$ désigne la partie décimale de α .

Preuve. Tout d'abord :

$$
||u||_0 \leq \sum_{p\geq -1} ||u_{-1}||_0 + \frac{1}{1-2^{-\alpha}} sup_{p\geq 0}||2^{p\alpha||u_p||_0}
$$

$$
||D^\beta u||_0 \leq ||D^\beta u_{-1}||_0 + \sum_{p\geq 0} ||D^\beta u_p||_0.
$$

Par application de la proposition 3.1.1, on obtient :
$||D^\beta u||_0 \leq C^{||\beta||}[||u_{-1}||_0 + (\sum_{p\geq 0} 2^{p(||\beta||-\alpha)} sup_{p\geq 0}||2^{p\alpha}u_p||_0)]$.
Ainsi lorsque $|\beta|$ est égale à la partie entière de α, on a :
$||D^\beta u||_0 \leq C^{||\beta||}[||u_{-1}||_0 + \frac{1}{d(\alpha)}.sup_{p\geq 0}||2^{p\alpha}u_p||_0]$.
Cette majoration montre que le terme de droite dans la proposition 3.1.2 majore :
$sup_{|x-y|,|\beta|=|\alpha|}\frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^{d(\alpha)}}$.
Enfin, lorsque $|x-y| \leq 1$ on a :
$|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)| \leq \sum_{q=1}^{p-1} || \bigtriangledown D^\beta u_q||_0|x-y| + \sum_{q=p}^{\infty} ||D^\beta u_q||_0$.

En utilisant la proposition 3.1.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)| &\leq C^{||\beta||}[||u_{-1}|||x-y|^{d(\alpha)}+\sum_0^{p-1}2^{q(||\beta||+1)}||u_q||_0|x-y|+\sum_{q=p}^{\infty}2^{q||\beta||}||u_q||_0]\\
&\leq C^{||\beta||}[||u_{-1}||_0|x-y|^{d(\alpha)}+(sup_{q>0}2^{q\alpha}||u_q||_0).(\sum_0^{p-1}2^{q(1-d(\alpha))}.|x-y|+\sum_{q=p}^{\infty}2^{-qd(\alpha)})]\\
&\leq C^{||\beta||}[||u_{-1}||_0|x-y|^{d(\alpha)}+(sup_{p\geq 0}2^{p\alpha}||u_p||_0).(\frac{2^{p(1-d(\alpha))}}{2^{1-d(\alpha)}-1}.|x-y|+\frac{2^{pd(\alpha)}}{1-2^{-d(\alpha)}})]
\end{aligned}$$

Comme $|x-y|\leq 1$, on choisit p vérifiant :
$\frac{1}{2|x-y|}\leq 2^p\leq\frac{1}{|x-y|}$.
On constate alors que :
$\frac{D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^{d(\alpha)}}$, est majoré par le membre de droite de la proposition3.1.2, ce qui compte tenu de la majoration de $||u||_0$, fournit le résultat. ■

Proposition 3.1.3 *Il existe une constante C ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que pour tout α positif :*

$$||u_p||\leq C^\alpha 2^{-p\alpha}||u||_\alpha.$$
$$pour\ tout\ p\geq -1$$

Preuve. Pour $p\geq 0$ on a :
$\widehat{u_p}=\phi(2^{-p}\xi)\,\widehat{u}(\xi)=\sum_{|\beta|=k}(2^{-p}\xi)\chi_\beta(2^{-p}\xi)\widehat{u_p}(\xi)$.

où $\chi_\beta=\frac{\xi^\beta.\chi}{\sum_{||\beta||=k}(\xi^\beta)^2}$, avec χ une fonction plateau valant 1 sur le support de ϕ. Ainsi :

$$\begin{aligned}
u_p &= 2^{-pk}\sum_{|\beta|}\chi_\beta(2^{-p\xi})^\sim * D^\beta u_p;\ \text{avec } ||\beta||=k.\\
||u_p||_0 &\leq 2^{-pk}\sum_{||\beta||=k}|\chi_\beta(2^{-p}\xi)^\sim|_{L_1}.sup_{||\beta||=k}||D^\beta u_p||_0\\
&\leq 2^{-pk}.C^k.sup_{||\beta||=k}||D^\beta u_p||_0.
\end{aligned}$$

En effet : $|\chi_\beta(2^{-p}\xi)^\sim|_{L_1}^{\frac{1}{k}}$ est majoré par une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace. Le cardinal des β dans $\mathbb{N}^n$, vérifiant, $||\beta||=k$, est majoré par une puissance k.
Il reste à majorer $D^\beta u_p$ lors que $||\beta||=|\alpha|$.

$$\begin{aligned}
D^\beta u_p(x) &= \phi(2^{-p}\xi)^\sim * D^\beta u\\
&= 2^{pq}\int\phi^\sim(2^p(x-y))D^\beta u(y)dy.\\
&= 2^{pq}\int\phi^\sim(2^p(x-y))[D^\beta u(y)-D^\beta u(x)]dy
\end{aligned}$$

Car $\phi(0) = 0$.
Ainsi :

$$||D^{\beta} u_p(x)||_0 \leq 2^{pq}||u||_\alpha \int |\phi^{\sim}(2^p(x-y))|.|x-y|^{d(\alpha)} dy$$
$$\leq 2^{pq}||u||_\alpha \int |\phi^{\sim}(y)||y|^{d(\alpha)} dy.2^{-pd(\alpha)}$$

Ce qui donne la majoration annoncée pour $p \geq 0$.
D'autre part on a :

$$||u_{-1}||_0 \leq |\psi^{\sim}|_{L_1}.||u||_0.$$

■

Proposition 3.1.4 *$(C_b^\alpha, ||\,.\,||_\alpha)$ est un espace de Banach, et quitte à multiplier la norme par une constante $(C_b^\alpha, ||.||_\alpha)$ est une algébre de Banach. (α non entier).*

Preuve. D'après la proposition 3.1.1, il existe deux constantes a et b telles que :

$$a||u||_\alpha \leq sup_p(2^{p\alpha}||u_p||_0) \leq b||u||_\alpha.$$

Soit $(u)_n$ une suite de Cauchy dans l'espace C_b^α, d'une part on a :
La suite $(u)_n$ converge vers u dans l'espace C_b^0 car $||.\,||_0 \leq ||.||_\alpha$ et $(C_b^0; ||.\,||_0)$ est un espace complet, et la relation :

$$||(u_n - u_m)_p||_0 = ||\phi(2^{-p}z)^{\sim} * (u_n - u_m)||_0$$
$$\leq |\phi^{\sim}|_{L_1}.||u_n - u_m||_0.$$

On déduit pour tout entier p, la suite $(u_{n,p})$ est de Cauchy dans C_b^0, qui converge dans C_b^0, en passant à la limite dans la relation : $u_{n,p} = \phi(2^{-p}z)^{\sim} * u_n$, la limite de $u_{n,p}$ est donc u_p.
D'autre part :
Pour $\epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n, m \geq N_\epsilon$ on a :

$$sup_p(2^{p\alpha}||u_n - u_m||_0) \leq \epsilon.$$
$$||(u_n - u_m)_p||_0 \leq \epsilon 2^{-p\alpha}.\forall p > 0.$$

En faisant tendre l'entier m vers $+\infty$, on obtient :

$$2^{p\alpha}||(u_n - u_m)_p||_0 \leq \epsilon, \forall p \geq 0.$$
$$sup_p(2^{p\alpha}||u_n - u_m||_0 \leq \epsilon.$$

d'où, la suite (u_n) converge vers u dans C_b^α et l'espace C_b^α est donc complet.
D'autre part, la propriété multiplicative de C_b^α résulte de l'inégalité suivante :
Il eiste une constante C_α telle que :

$$||uv||_\alpha \leq C_\alpha[||u||_0||v||_\alpha + ||u||_\alpha||v||_0]$$

pour tout $u, v \in C_b^\alpha$ (α non entier). ■

Théorème 3.1.1 *Dans $\mathbb{C}$, l'opérateur de Cauchy A est un opérateur borné de l'espace C_Q^α dans $C^{\alpha+1}$ pour tout α positif non entier. Il existe une constante C telle que la norme $||A||_\alpha$ vérifie la majoration suivante :*

$$||A||_\alpha \leq C_\alpha[(diamQ) + Max(\frac{1}{d(\alpha)}, \frac{1}{1-d(\alpha)}]$$

Pour tout α positif et non entier. On note diam Q, le diamétre de Q.

Pour faire la preuve de ce théorème, on s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 6

$$\begin{aligned} \|(Af)_p\|_0 &\leq 2^{-p}\|f_p\| \textit{ pour tout } p \leq 0. \\ \|(Af)_{-1}\|_0 &\leq (diamQ).\|f\|_\alpha. \end{aligned}$$

Preuve. du lemme 6.
Soit θ une fonction de classe C^k sur $\mathbb{C}$, valant $\frac{1}{z}$ sur la couronne $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$ à support compact.
Puisque A est un inverse à droite de $\frac{\partial}{\partial z}$, pour les fonctions à supports compacts on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f_p}.2^{-p}\theta(2^{-p}z) &= (\frac{\partial}{\partial \overline{z}}A\widehat{f_p}).2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\ &= [\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\widehat{Af_p}].2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\ &= (\widehat{Af})_p z.2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\ &= \widehat{Af}\phi(2^{-p}z).z.2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\ &= \widehat{Af}.\phi(2^{-p}z) \\ &= (\widehat{Af})_p. \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \|(Af)_p\|_0 &\leq 2^{-p}|\theta(2^{-p}z)|_{L_1}.\|f_p\|_0 \\ &\leq 2^{-p}|\theta|_{L_1}.\|f_p\|_0. \end{aligned}$$

■ **Preuve.** Du théorème 3.1.1 :
D'après la proposition 3.1.2 on a :
$\|(Af)_p\|_{\alpha+1} \leq C^\alpha[\|(Af)_{-1}\|_0 + Max[\frac{1}{d(\alpha)}; \frac{1}{1-d(\alpha)}].sup_{p\leq 0}\|2^{p(\alpha+1)}(Af)_p\|_0].$
On utilise maintenant le lemme 6 :
$\|(Af)\|_{\alpha+1} \leq C^\alpha[(diamQ).\|(f)\|_\alpha + Max[\frac{1}{d(\alpha)}; \frac{1}{1-d(\alpha)}].sup_{p\leq 0}\|2^{p(\alpha+1)}(Af)_p.$
Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 3.1.3 et de changer la constante C pour obtenir le résultat. ■

3.2 Opérateurs différentiels rigides

Dans cette partie on désigne par χ_k l'ensemble des germes de champs de vecteurs de classe C^k à l'origine de $\mathbb{R}^n$,et par $Diff^{k+1}$ le groupe local des germes de difféomorphismes à l'origine de $\mathbb{R}^n$de classe C^{k+1} .
Soit X un élément de χ_k, on lui associe son flot F_X ; F_X est dans $Diff^k$.
Etant donné $\phi \in Diff^{k+1}$, on définit $\phi * F_X$, par conjugaison :
$\phi * F_X = \phi \circ F_X \circ \phi^{-1}$; $\phi * F_X$ est un groupe à un paramètre de $Diff^k$. On a :

$$\phi * F_X = F_{\phi_*(X)} \tag{3.2.1}$$

òu $\phi_*(X)(x) = d\phi(\phi^{-1}(x)).X(\phi^{-1}(x))$ et de classe C^k.
Soit P_k l'ensemble des opérateurs différentiels linéaires, d'ordre 1 dont les coéfficients sont des germes de fonctions de classe C^k à l'origine.
A tout X appartenant à χ_k, on lui associe l'élément L_k dans P_k, en posant par définition :

$$L_k(f) = \frac{d}{dt}[f \circ F_X^t(x)]_{t=0}. \tag{3.2.2}$$

Le groupe $Diff^{k+1}$agit par définition sur P_k de la façon suivante :
$(\phi * L_X)_x(f) = (LX)_{\phi^{-1}(x)}(f \circ \phi)$.
Ainsi, on a la relation :

$$\phi * LX = L_{\phi_*(X)} \tag{3.2.3}$$

Supposons qu'il existe un sous-groupe local G à 1 paramètrede $Diff^{k+1}$ laissant l'opérateur L_X invariant (ie il existe $\epsilon > 0$ tel que $(G^t)_* L_X = L_X; \forall |t| \leq \epsilon$) ; alors pour tout élément ϕ de $Diff^{k+1}$, $\phi_* G$ est un sous-groupe qui laisse l'opéraleur $L_{\phi_*(X)}$ invariant.
Soit Y le générateur infinitésimalde G (ie $Y(x) = \dfrac{d}{dt}[G^t(x)]_{t=0}$). Si $Y(0) \neq 0$, alors d'après le théorème de linéarisation des champs de vecteurs, il existe un difféomorphisme $\phi \in Diff^{k+1}$ tel que le groupe $\phi_*(G)$ le long du vecteur Y(0).
Ce groupe est donné par l'ensemble des translations qui à tout x assez voisin de l'origine fait correspondre l'élément $x + tY(0)$.Il est alors clair qu'on a la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 *Soit L un élément de P_k. S'il existe un sous-groupe à 1 paramètre de $Diff^{k+1}$laissant l'opérateur invariant, dont le générateur infinitésimal ne s'annule pas à l'origine alors :*
$L = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, ..., x_{n-1})\dfrac{\partial}{\partial x_i}$*, òu les coéfficients $a_i(i = 1, ..., n)$ sont des fonctions de classes C^k.*

Par complexification ce résultat sétend au champs à coéfficient complexes.

Proposition 3.2.2 *Soit $L_X \in \mathbb{C} \otimes P_k$, et $X \in \mathbb{C} \otimes \chi_k$ òu X est le champ de vecteur associé à l'opérateur différentiel donné par (3.2.2). On suppose que l'opérateur L_X est invariant par un sous-groupe à un paramètre de $Diff^{k+1}$, de générateur infinitésimal Y, tel que les vecteurs $X(0)$ et $Y(0)$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. Alors :*
Il existe un système de coordonnées locales dans lequel le champ L_X a pour forme :
$L_X = A[\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n} b_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\dfrac{\partial}{\partial x_k}]$, *òu les coéfficient $b_k(k = 2, ..., n)$ sont des fonctions réelles de classe C^k et A une fonction non nulle à l'origine.*

Preuve. D'après la proposition (3.2.1), il existe un système de coordonnées locales dans lequel :
$L = \sum_{i=1}^{n} ai(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y(0) = (0, 0, ..., 1) \neq 0$.
Puisque X(0) et Y(0) sont linéairements indépendants, alors l'un des coéfficients de L est non nul à l'origine.
En renumérotant les n-1 premiers variables, on peut supposer que L s'écrit sous la forme :
$L = A[\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} ai(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\dfrac{\partial}{\partial x_i}]$.
Posons l'opérateur : $N = \frac{\partial}{\partial x_1} + Re(\sum_{i=2}^{n} ai(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\dfrac{\partial}{\partial x_i})$.
Soit α_j la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ suivant :

$$\begin{cases} N_{\alpha j} = 0 \\ 8\alpha_{j/x_i} = x_j ; j = 2, ..., n-1 \end{cases}$$

Soit β_n une solution dans $\mathbb{R}^{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} N(\beta_n) + Re(a_n) = 0 \\ \beta_n(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}$ et β_n sont determinées dans un voisinage de l'origine et le Jacobien $\frac{\partial(x_1, \alpha_2, ... \alpha_{n-1}, \beta_n + x_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}(0) = 1$.
On peut donc prendre $(x_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \beta_n + x_n) = \alpha_n$ comme nouvelle coordonnées

dans lesquelles le champ L devient :

$$\begin{aligned}
L &= L(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + L(\alpha_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + L(\alpha_{n-1})\frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}} + L(\alpha_n)\frac{\partial}{\partial \alpha_n} \\
&= A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i(Im(\sum_2^{n-1} ai(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_i}))\frac{\partial}{\partial \alpha_2} + ... + \\
&+ \; iIm(\sum_2^{n-2} ai(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}} + \\
&+ \; i[Im(\sum_2^{n-1} ai(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial \beta_n}{\partial x_j}) + Im(a_n)\frac{\partial}{\partial \alpha_n}] \\
&= A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i(\sum_{k=2}^{n-1} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial \alpha_k}]
\end{aligned}$$

où $b_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = Im(\sum_2^{n-2} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i})$,$k = 2, 3, ..., n-1$

et $b_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = Im(\sum_2^{n-1} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial \beta_n}{\partial x_i}) + Im(a_n)$ ∎

A est une fonction de classe C^k à valeur complexes et non nulle à l'origine et b_k, $(k = 2, ..., n)$ des fonctions réelles de classe C^k.

Définition 3.2.1 *Un germe L à l'origine, d'opérateur différentiels linéaires d'ordre 1 à coéfficients de classe C^k et complexes, sera dit rigide, s'il existe un sous-groupe à 1 paramètre de $\Phi \in Diff^{k-1}$, de gňérateur infinitésimal Y tel que :*
L soit invariant par Φ et tel que L , $\overline{L}$,et L_y soient $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants.

Proposition 3.2.3 *Soit $L \in \mathbb{C} \otimes P_k$ qu'on suppose rigide alors :*
Il existe un système de coordonnées locales dans lequel :

$$L = A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i[\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \sum_2^n b_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}]]$$

où les coéfficients $b_k(k = 2, ..., n)$ sont des fonctions réelles de classe C^k en les variables $(x_2, ..., x_{n-1})$ et de classe C^{k+1} en $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ et A est une fonction de classe C^k non nulle à l'origine.

Preuve. D'après ce qui précéde, il existe un difféomorphisme $\psi \in Diff^{k+1}$ pour lequel :

$$\psi_*(L) = A[\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n b_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

où $b_k(k=2,...,n)$ sont des fonctions réelles de classe C^k et le champ $\psi_*(L) = \frac{\partial}{\partial x_n}$. ■
Comme L, $\overline{L}$ et L_Y sont linéairement indépendants, l'un des $b_k(0) \neq 0; (k=2,....,n-1)$
.
Écrivons la fonction b_k sous la forme :
$b_k(x_1,x_2,...,x_{n-1}) = b'_k(x_2,...,x_{n-1}) + x_1 c_k(x_1,....,x_{n-1})$,
alors b'_k sont des fonctions de classe C^k et c_k est de classe C^k en les variables $(x_2,....,x_{n-1})$ et de classe C^{k-1} en $(x_1,x_2,.....,x_{n-1})$.
Comme l'un des $b'_k(0)$ est non nulle $(k=2,....,n-1)$, on peut linéariser le champ $\sum_{k=2}^{n} b'_k(x_2,....,x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}$ dans $\mathbb{R}^{n-2}(x_2,....,x_{n-1})$, et en renumérotant éventuellement les nouvelles coordonnées, le champ L devient :

$$L = A[\frac{\partial}{\partial x_i} + i[\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\sum_{k=2}^{n} c_k(x_1,x_2,...,x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}]].$$

3.3 Réalisation locale des structures Cauchy-Riemann rigides

Définition 3.3.1 *Une structure de Cauchy-Riemann (abrevée C.R) sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^{2n-1}$, $n>1$ *est la donnée d'un sous fibré V de dimension n-1 de* $\mathbb{C}\otimes T(\Omega)$ *telle que :*

$$V \cap \overline{V} = \{0\} \textit{ et } [V,V] \subset V.$$

Une telle structure est dite localement réalisable en a, s'il existe un difféomorphisme Φ *d'un voisinage de a sur une hypersurface M de* $\mathbb{C}^n$ *tel que* $\Phi_*(V)$ *soit la structure Cauchy-Riemann de M (dite structure C.R standard) obtenue en restreignant à* $\mathbb{C}\otimes T(M)$ *la structure complexe de* $\mathbb{C}^n$ *engendrée par les champs* $\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}$, $(i=1,2,...,n)$ *et notée* $T^{0,1}(M)$.

Ce problème se ramène à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles par la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 *Soit* $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2,.....,\Phi_n)$ *un difféomorphisme d'un voisinage de a sur une hypersurface M de* $\mathbb{C}^n$ *tel que* $L(\Phi_k)=0$, *pour tout* $k=1,2,....,n$, *et tout L dans V.*
Alors $\Phi_*(V)$ *est la structure C.R standard de M.*

Preuve. On exprime $\Phi_*(L)$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}})$:
$\Phi_*(L) = L(\Phi_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + L(\overline{\Phi_1})\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} + ... + L(\Phi_n)\frac{\partial}{\partial z_n} + L(\overline{\Phi_n})\frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}.$

La proposition exprime l'appartenance à $(\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}})$ de $\Phi_*(L)$ pour tout L dans V. ■

Lorsque n = 2, Nirenberg [9], a montré qu'étant donné le champ L engendrant une structure C.R sur $\mathbb{R}^3$, le système $L(\Phi_1) = L(\Phi_2) = 0$ peut n'avoir que des solutions triviales.

Plus précisément, soit $L = \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} - i\overline{z_1}\frac{\partial}{\partial u}$ (L est le champ de vecteur qui engendre $T^{0,1}(S)$ ou S est l'hypersurface de $\mathbb{C}^2$ d'équation $Imz_2 - |z_1|^2 = 0, u = Rez_2$ est biholomorphe à la sphère S^3) alors il existe un champ $\overline{L}$ tangent à l'ordre infini (à l'origine) à L, tel que les seules solutions de l'équation $\overline{L}(\Phi) = 0$ sont les fonctions constantes.

Cet exemple a été étendu par Jacobowitz [6], aux champs L engendrant $T^{0,1}(M)$ pour toute hypersurface M strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^2$.

La structure Cauchy-Riemann V est dite strictement pseudo-convexe en a si la forme hermitienne définie sur $V_a \times V_a$ par :

$\mathscr{L}(L, M) = i[L, \overline{M}]$ (mod $V_a + \overline{V_a}$) est définie positive ou négative.

On sait qu'une structure C.R, idéfiniment différentiable et strictement pseudo-convexe en a est localement réalisable lorsque $n \geq 4$, [1] , [8], [12] pour n = 3 le problème est ouvert; pour n = 2 la structure C.R peut n'être pas localement réalisable comme il vient d'être décrit.

3.4 Hypersurface rigide

Définition 3.4.1 *Soit M un germe à l'origine d'hypersurface de classe C^k de $\mathbb{C}^n$. M est dit rigide à l'origine s'il existe un germe X de champ de vacteurs holomorphes, sans points critiques dont la partie réelle est tangent à M.*

Proposition 3.4.1 *Supposons que le germe M est rigide, alors :*
Il existe un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage V de l'origine de $\mathbb{C}^n$, pour lequel M a une équation de la forme :
$M = \{Imz_n = f(z_1, ..., z_{n-1})\}$ où f est une fonction de classe C^k, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
De plus le sous-fibré $T^{0,1}(M)$ de $\mathbb{C} \otimes TM$ a une base formée d'opérateurs différentiels rigides pour un même sous groupe à un paramètre dans le groupe $Diff^{k+1}$.

Preuve. D'après le théorème de linéarisation des champs de vecteurs, il existe un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage de l'origine V dans lequel le champ X prend la forme : $X(z) = (0, 0, ..., 0, 1)$.

Le plan tangent à M à l'origine est alors défini par $T_o(M) = \{Imz_n - f(z_1, ..., z_{n-1}, Re(z_n)) = 0\}$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Enfin puisque le vecteur X(z) est tangent à M, la fonction f est indépendant de $Re(z_n)$
.

Si on paramètre M par $(z_1, z_2, ..., z_{n-1}, Re(z_n))$, alors tout élément L de $T^{0,1}(M)$ a pour base des opérateurs différentiels L_k de la forme suivante :

$$L_k = \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}} - i \frac{\partial f}{\partial \overline{z_k}} \frac{\partial}{\partial u}, u = Re(z_n), (k = 1, ..., n-1)$$

Les opérateurs L_k sont donc rigides.

■

M.S.Baouendi, L.P.Rothshild et F.Treves [3], démontrent pour les structures C.R rigides et indéfiniment différentiables la réciproque, ils prouvent qu'une telle structure C.R est localement réalisable sur une hypersurface rigide.

Rappelons la définition de la rigidité des structures Cauchy-Riemann introduite par ces auteurs [3].

Définition 3.4.2 *La structure de Cauchy-Riemann V est dite rigide sur Ω s'il existe une sous-algèbre de Lie g , de dimension finie, de l'espace des sections $C^\infty(\Omega, T\Omega)$ telle que :*

- $*$ $V_a + \overline{V_a} + (g_a \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes T_a(\Omega), \forall a \in \Omega.$
- $*$ $[\mathscr{L}, g] \subset \mathscr{L},\ avec\ \mathscr{L} = C^\infty(\Omega, V).$
- $*$ $[g, g] = 0$

E.M.Chirka, en utilisant, une extention en classe $C^{k+\alpha}$, $(k \geq 1, 0 < \alpha < 1)$ du théorème de Nireberg-Newlander obtenu par S.M.Webster [13] étend le résultat de [3] cité plus haut aux champs rigides de classe $C^{k+\alpha}$.

Lorsque n = 2, c'est à dire dans $\mathbb{R}^3$, nous étudions une démonstration du résultat de Chirka [5] reposant sur les propriétés de l'opérateur de Cauchy dans les classes Holdoriennes.

On reprend les notations utilisées plus haut.

On a établit l'existence d'un système de coordonnées locales dans lesquelles le champ L définissant la structure C.R rigide de $\mathbb{R}^3$ a pour forme, au voisinage de l'origine :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial x} + itb_1(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + itb_2(t, x) \frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.4.1}$$

Définition 3.4.3 *Nous disons qu'une structure C.R rigide de $\mathbb{R}^3$ est dans la classe Holdorienne C^α si les fonctions b_1 et b_2 de* **??** *sont dans cette classe, au voisinage de l'origine.*

Cette définition est intrinsèque par la proposition suivante :

Proposition 3.4.2 *Soit Φ un difféomorphisme local, conservant l'origine, transformant le champ* **??** *en un champ de même type :*

$$\Phi_*(L) = \frac{\partial}{\partial t'} + i \frac{\partial}{\partial x'} + it' \widetilde{b_1}(t', x') \frac{\partial}{\partial x'} + it' \widetilde{b_2}(t', x') \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Alors en supposant seulement $b_1, b_2, b_1^{\frown}, b_2^{\frown}$ continues dans un voisinage de l'origine $b_1^{\frown}$ et $b_2^{\frown}$ sont liées à b_1 et b_2 par les relations suivantes :
$b_2^{\frown} = d.b_2$, $b_1^{\frown} = b_1 + cb_2$, òu c et d sont des constantes avec d non nulle.

Preuve. Désignons par (Φ_1, Φ_2, Φ_3)les composantes de Φ, on a :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + i(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + tb_1(t,x)\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + tb_2(t,x)\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}) = 1. \tag{3.4.2}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + i(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + tb_1(t,x)\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + tb_2(t,x)\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = i[1 + \Phi_1.(b^{\frown} \circ \Phi)]. \tag{3.4.3}$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + i(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + tb_1(t,x)\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + tb_2(t,x)\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} = i\Phi_1(b_2^{\frown} \circ \Phi). \tag{3.4.4}$$

Supposons b_2 et $b_2^{\frown}$ non identiquement nulles, quitte à considèrer Φ^{-1} au lieu de Φ, on peut supposer que b_2 non identiquement nulle. La relation **??** donne :
$\Phi_1 = t + c(x,y)$ et $\frac{\partial c}{\partial x} + tb_1(t,x)\frac{\partial c}{\partial x} + tb_2(t,x)\frac{\partial c}{\partial y} = 0$.
En posant t = 0, on obtient $\dfrac{\partial c}{\partial t} = 0$, puis $b_2(t,x)c'(y) = 0$.
Ainsi $\Phi_1 = t$.
Les relations **??** et **??** donne la relation 3.4.5 suivante :

$$\Phi_2 = x + c(y); c(0) = 0. \tag{3.4.5}$$

$$\begin{aligned} b_1(t,x) + b_2(t,x)c'(y) &= b_1^{\frown}(t, x + c(y)); \text{ avec } \Phi_3 = d(y); d(0) = 0 \text{ et } d'(0) = 0. \\ b_2(t,x)d'(y) &= b_2^{\frown}(t, x + c(y)) \end{aligned}$$

■

En posant y = 0 dans 3.4.5 on obtient :
$b_2^{\frown}(t,x) = b_2(t,x)d'(0)$
$b_1^{\frown}(t,x) = b_1(t,x) + b_2(t,x)c'(0)$.
Considérons le cas òu b_2 et $b_2^{\frown}$ sont identiquement nulles, le début de la discussion du cas précédent montre que :

$$\Phi_1 = t + c(y); c(0) = 0. \tag{3.4.6}$$

Φ_2 est indépendant de t.

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + tb_1(t,x)\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 1 + (t + c(y).b_1^{\frown}(t + c(y), \Phi_2). \tag{3.4.7}$$

Posons t = y = 0, dans la dernière relation 3.4.7, on obtient : $\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(0,x) = 1$; ce qui entraine $\Phi_2(0,x) = x$.
Posons maintenant seulement y = 0, on obtient :

$$b_1^{\frown}(t,x) = b_1(t,x).$$

Théorème 3.4.1 *Soit L une structure Cauchy-Riemann rigide appartenant à la classe Holdorienne de $\mathbb{R}^3$. Si α est un réel positif non entier, alors il existe un voisinage V de l'origine de $\mathbb{R}^3$ et une immersion Φ de V sur une hypersurface rigide M de $\mathbb{C}^2$, telle que Φ soit dans la classe C^α, et telle que $\Phi_*(L)$ soit la structure Cauchy-Riemann standard de M, c'est à dire :*

$$\Phi_*(L) = T^{0,1}(M).$$

Preuve. On introduit l'application u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}^2$, définie par :

$$u(t,x,y) = (x - it, y),$$

on cherche Φ sous la forme : $\Phi = u - H$.
On considère l'équation :

$$L(H) = L(u) \tag{3.4.8}$$

D'après la proposition (3.3.1), il s'agit de montrer que 3.4.1 admet, dans un voisinage convenable de l'origine, une solution dans la classe Holdorienne C^α, telle que H'(0) soit assez petit pour que Φ soit une immersion.
La proposition (3.2.3) permet de prendre des coordonnées locales dans lesquelles L est de la forme :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (\frac{\partial}{\partial x} + tb_1(t,x).\frac{\partial}{\partial x} + tb_2(t,x)\frac{\partial}{\partial y})$$

Par hypothése b_1 et b_2 appartiennent à C^α dans un voisinage compact de l'origine que l'on notera Q dans la suite. On a :

$$Lu = it(b_1, b_2)$$

Puisque Lu est indépendant de y, on peut chercher une solution de l'équation 3.4.1 sous la forme :

$$H = \frac{1}{2}A(V)$$

Alors A étant un inverse à droite de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$; (3.4.1) devient :

$$V + \frac{i}{2}tb_1.\frac{\partial}{\partial x} \circ A(V) = L(u) \tag{3.4.9}$$

Soit χ_Q une fonction plateau à support dans le compact Q et valant 1 dans $\frac{1}{2}Q$.
Soit $\epsilon > 0$ et considérons l'équation :

$$W(z) + \frac{i}{2}\epsilon tb_1(\epsilon z).(\frac{\partial}{\partial x} \circ AW(z).\chi_Q(z)) = \chi_Q(z)Lu(\epsilon z) \tag{3.4.10}$$

òu z = t + ix.
Alors la fonction $V(z) = W(\frac{z}{\epsilon})$ sera solution de l'équation (3.4.2) sur le compact $\frac{\epsilon}{2}Q$.
En effet :
On a : $AV(z) = \epsilon AW(\frac{z}{\epsilon})$ et $(\frac{\partial}{\partial x}AV)(z) = (\frac{\partial}{\partial x}AW)(\frac{z}{\epsilon})$, lorsque $V(z) = W(\frac{z}{\epsilon})$.
Soit T_ϵ l'opérateur défini par :

$$T_\epsilon(W)(z) = \frac{i}{2}\epsilon.t.b_1(\epsilon z).(\frac{\partial}{\partial x} \circ AW)(Z).\chi_Q(z)$$

D'après ce qui précéde plus haut, on sait que $\frac{\partial}{\partial x} \circ A$ est un opérateur borné de C^α_Q dans C^α ; et que C^α est une algèbre de Banach. Il est clair que T_ϵ est un opérateur borné de C^α_Q et que la norme $\| T_\epsilon \|_{C^\alpha_Q} = O(\epsilon)$.
On choisit un ϵ assez petit pour que $Id + T_\epsilon$ soit inversible dans C^α_Q.
Considèrons :

$$\begin{aligned} W &= (Id + T_\epsilon)^{-1}(Lu(\epsilon z).\chi_Q(z)) \\ &= i\epsilon.(Id + T_\epsilon)^{-1}[\chi_Q(z).(tb_1(\epsilon z), tb_2(\epsilon z))] \end{aligned}$$

Alors $H(z) = \frac{1}{2}AV(z) = \frac{\epsilon}{2}AW(\frac{z}{\epsilon})$ sera dans la classe C^α et solution de 3.4.8.
De plus $H'(0) = \frac{1}{2}AW(0) = O(\epsilon)$.
Ainsi pour ϵ assez petit $\Phi = u - H$ sera une immersion dans $\mathbb{C}^2$,appartenant à la classe C^α, du voisinage $\frac{\epsilon}{2}.Q$ de l'origine de $\mathbb{R}^3$.
Ce qui termine la construction de Φ.
Il reste à vérifier que l'image M d'un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$ par Φ est une hypersurface rigide.
Comme H'(0) est un $O(\epsilon)$, on peut choisir ϵ assez petit pour que l'application qui à l'élément (t, x) associe $(Re\Phi_1, Im\Phi_1)$ soit un difféomorphisme local.
Désignons par Φ_1 et Φ_2 (resp H_1 et H_2) les composantes de Φ (resp de H) dans $\mathbb{C}^2$.
On a :

$$\begin{aligned} Re\Phi_1 &= x - ReH_1(t, x) \\ Im\Phi_1 &= -t - ImH_1(t, x) \\ Im\Phi_2 &= ImH_2(t, x). \end{aligned}$$

l existe donc une application θ de classe C^1 telle que l'équation de M soit dans un voisinage de l'origine :
$Im\Phi_2 = ImH_2 \circ \theta(Re\Phi_1, Im\Phi_1)$.
Ainsi M est rigide dans ce voisinage à l'origine. ■

Bibliographie

[1] AKAHORI A : *A new Apporh to the local embeding theorem of C.R structure for n ≥ 4*, Mem. Amer Math.Soc .n^0 366 . Providence, RI (1987).

[2] ALINHAC S, GERARD P : *Operateurs pseudo-differentiels et theoreme de Nash-Moser* .Edition du CNRS.

[3] Baouendi M.S, ROTHSCHILD L.P end TREVES F : *C.R structures with group action and extendability of CR functions*, Invent. Math.82 :359-396 (1985)

[4] BOGESS : *CR Manifolds and the tangential Cauchy Riemann complex*, Studies in advanced Mathematics(1991)

[5] CHIRKA E.M :*Introduction to the C.R manifolds*, Math.Survey 46-1 (1991).

[6] JACOBOWITZ H : *An introduction to C.R structures*, Mathematical survey and monograph, 32.(AMS), (1990).

[7] JACOBOWITZ H AND TREVES F : *Non realizable C.R structures*, Invent Math 66 :231-249,(1982).

[8] KURANISHI M : *Strogly pseudo-convex C.R structures over small balls*, I.ann of Math.115 :451-500,(1982),II. Ann.of Math 116 :1-64, (1982),III. Ann. of Math.116 :249-330 (1982).

[9] NIREMBERG L : *On a question of Hans Lewy*, Russien Math.Survey 29 :251-262 (1974).

[10] ROSAY J.P : *New exemple of non locally embeddable CR structures*, Ann Ins Fourier,39,3.811-823 (1989).

[11] STEIN E.M :*Harmonie Analysis*, princeton mathematical Serie,43.

[12] WEBSTER S : *On the proof of KURANISHI's Embeding Theorem*, Annals Inst. H Poincare 6 (1989) 183-207.

[13] WEBSTER . S : *A new proof of the Niremberg- Newlander Theorem*,Math. z.201,(1989), 303-316.

Conclusion