UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR : Sciences et Technologies
Département : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées
Option : Probabilités

.

Mémoire de Master

Couplage homogénéisation et principe des grandes déviations sur les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien et un processus de Poisson

Présenté et soutenu publiquement le 18 Décembre 2020
par
Mamadou Boye DIALLO

.

Sous la direction de **Docteur Clément MANGA**
Avec la supervision du **Professeur Alassane DIEDHIOU**
Devant le Jury composé de :

Alassane DIEDHIOU	**Professeur Titulaire**	***Président***	**UASZ**
Edourd DIOUF	**Professeur Assimilé**	***Examinateur***	**UASZ**
Mor NDONGO	**Maitre-Assistant**	***Examinateur***	**UASZ**
Emmanuel Nicolas CABRAL	**Maitre-Assistant**	***Examinateur***	**UASZ**
Clément MANGA	**Maitre-Assistant**	***Directeur***	**UASZ**

Le Directeur d'UFR

REMERCIEMENT

J'aimerais en premier lieu remercier **Docteur Clément MANGA**, mon directeur de mémoire pour avoir accepté de me proposer un sujet et de me guider sur mes premiers pas à la recherche. Ses conseils m'ont permis d'aller au bout de ce travail avec détermination.

Je suis également très honoré que le **Professeur Alassane DIEDHIOU** soit le président de jury de mon mémoire.

Mes remerciements s'adressent également au **Professeur Edourd DIOUF**, à **Docteur Mor NDONGO** et à **Docteur Emmanuel Nicolas CABRAL** d'avoir accepté de juger ce travail et d'en être les examinateurs.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de tous les professeurs du département de Mathématiques.

Remercier très chaleureusement mes frères et amis : **Algassimou DIALLO, Amadou NDIAYE, Mohamed NIAMBA** et **Bafodé DIAWARA**, pour toutes ces années que nous avons partagées. J'ai beaucoup appris avec vous. Merci infiniment.

A ceux -là, j'associerais très volontiers **Monsieur Mamadou Moustapha YAFFA** et mon frère **Salif DIAO**, pour votre soutien inconditionnel dans mes études.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude à tous ceux qui n'ont pas hésité à m'offrir leur aide à maintes reprises tout au long de mes études.

Dédicace

A ma mère **Cisse BALDE** et à mon père **Boubacar DIALLO**. Vos conseils m'ont toujours guidé. Que Dieu vous accorde longue vie.

A tous mes frères et sœurs, cousins et cousines, mes oncles et tantes. Vous m'avez toujours encouragé à persévérer dans l'effort.

A toute la famille **Diao** de **Diaobé** particulièrement à celle de **Tonton Souleymane DIAO**.

A **Monsieur DIAO** et **SADIO**, mes professeurs de Mathématiques au Collège.

A tous mes camarades de classe.

Qu'il me soit permis aussi, de renouveler ma reconnaissance déférente aux familles **Yaffa** et **Badji** du quartier **Yamatogne** de **Ziguinchor**.

Table des matières

Introduction

L'homogénéisation désigne la procédure qui consiste à déterminer la modélisation d'un milieu finement hétérogène. Son champ d'application est très vaste. Nous pouvons citer, entre autre, la mécanique (l'étude des matériaux visqueux, mécanique de la rupture), les mathématiques (propriétés d'optimisation des formes, développements asymptotique par la méthode des échelles multiples ...).

La théorie des grandes déviations quant à elle cherche à décrire des évènements exceptionnels (rares) ne suivant pas la *loi des grands nombres*.

Notre objectif principal c'est de combiner les effets de l'homogénéisation et du principe des grandes déviations dans le cas des équations différentielles stochastiques avec sauts de Poisson.

Cette approche de combinaison d'effets a débuté pour la première fois avec les travaux de P.Baldi (*mathématicien italien*) en 1991, mais en considérant uniquement l'équation différentielle stochastique (EDS) dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ suivante :

$$dX_t = q\left(\varepsilon\right)\sigma\left(\frac{X_t}{p\left(\varepsilon\right)}\right)dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien standard, $q\left(\varepsilon\right), p\left(\varepsilon\right) > 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \dfrac{p\left(\varepsilon\right)}{q^2\left(\varepsilon\right)} = 0$.

Ensuite Freidlin et Sowers, en 1999, ont élargi l'étude en considérant l'EDS

$$dX_t = \left(\frac{\varepsilon}{\delta}B_0 + B_1\right)\left(\frac{X_t}{\delta}\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma\left(\frac{X_t}{\delta}\right)dW_t.$$

A notre niveau, nous considérons une famille de variables aléatoires $\{X_t^{x,\varepsilon,\delta}\}$ solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$X_t^{x,\varepsilon,\delta} - x = \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)dW_s + \frac{\varepsilon}{\delta}\int_0^t b\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)ds + \int_0^t c\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}\right)ds + L_t^{\varepsilon,\delta} \quad (0.1)$$

où $\varepsilon, \delta > 0$, $\{W_t : t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard et $L^{\varepsilon,\delta} = \{L_t^{\varepsilon,\delta} : t \geq 0\}$ un processus de Poisson avec un compensateur continu, indépendant de W, tous définis dans le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ où $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ est la $\mathbb{P}$-complétée de la filtration $\mathcal{F}$. Plus précisément, nous supposons que $L^{\varepsilon,\delta}$ est de la forme :

$$L_t^{\varepsilon,\delta} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} k\left(\frac{X_{s^-}^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta}, y\right)\left(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}}(dsdy) - \nu(dy)\right) ds, \quad t \geq 0 \tag{0.2}$$

où k est une fonction mesurable et N la mesure de comptage aléatoire de type Poisson sur $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lévy (ou intensité) ν. Les coefficients b, c, σ sont soumis à des conditions appropriées.
Nous analysons le problème dans le cas où l'homogénéisation l'emporte sur le principe des grandes déviations. Dans ce cas, nous établissons un principe des grandes déviations avec les coefficients homogénéisés.

Notre approche repose sur ce lien. Nous commencerons par donner quelques définitions et résultats sur les généralités des processus stochastiques à temps continu. Ensuite dans le second chapitre, notre démarche consistera à donner des outils de l'homogénéisation et du principe des grandes déviations nécessaires au chapitre suivant.
Le chapitre trois sera consacré à l'établissement du principe des grandes déviations (PGD) dans le cas où le paramètre d'homogénéisation δ tend plus vite vers zéro que le paramètre de viscosité ε.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques à temps continu

1.1 Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

1.) On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est **adapté** à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.

2.) On appelle **filtration** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \mathcal{F}_T$.
A chaque processus $(X_t)_{t\geq 0}$, on peut associer une filtration :
$\forall\ t \geq 0$,$\mathcal{F}_t = \sigma\,(X_\mu : 0 \leq \mu \leq t)$. Cette suite $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est appelée **filtration naturelle** de $(X_t)_{t\geq 0}$ si elle est la plus petite filtration formée de tribus complètes à laquelle $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté.

3.) Une fonction $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est dite càdlàg (respectivement càglàd) si elle est continue à droite (respectivement gauche) avec une limite à gauche (respectivement à droite).

4.) Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est **prévisible** si X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, et que pour tout $t \geq 1$, X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable.

5.) Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit à variation bornée sur $[0, t]$ si :
$\sup\limits_{t_i} \sum\limits_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq k.$
Le **sup** étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

6.) Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est à dire $\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$ est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Nous énonçons ce théorème suivant.

Théorème 1.1 ((Inégalité de Jensen)).
Soit f une fonction convexe définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ contenant toutes les valeurs possibles d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors si X et $f(X)$ sont intégrables, on a :

$$f\left[\mathbb{E}(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(X)\right].$$

1.2 Martingales

Définition 1.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(M_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires intégrables (c'est à dire $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty, \forall t$) est :*

- *Une **sous-martingale** si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s \quad p.s.$*
- *Une **sur-martingale** si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s \quad p.s.$*
- *Une **martingale** si, $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s \quad p.s.$*

Remarque 1.1. *On déduit que :*

- *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale et une sur-martingale, alors $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.*
- *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0), \forall t$.*

Proposition 1.1. ***(Inégalité de Doob)***
Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une sous-martingale positive continue à droite, telle que, pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^p \quad (p \in]0, +\infty[)$, alors, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}_+$, on a :

$$||\sup X_t||_p \leq q \sup ||X_t||_p$$

où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Preuve : (Voir DEA de Djibril Ndiaye [6]).

1.3 Le mouvement Brownien

Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable où E est un espace métrique séparable et complet et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne.

Définition 1.2. *Un mouvement Brownien est un processus stochastique X_t, $t \geq 0$, vérifiant :*

- $X_{t_0} = 0$.
- *pour tous* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, *les variables* $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ $(1 \leq k \leq n)$ *sont indépendantes.*
- *si* $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ *est normalement distribuée avec* $\mathbb{E}\left(X_t - X_s\right) = 0$ *et* $\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] = (t - s)$.

Propriété 1.1. *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *issu de zéro i.e*
$X_0 = 0$ *p.s alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, $X_t^x = x + X_t$, $t \geq 0$ *est un mouvement Brownien issu de* x.
Plus généralement, si H *est une variable aléatoire de loi* μ *sur* $\mathbb{R}^d$, *indépendante du processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$, *alors* $X_t^H = H + X_t$, $t \geq 0$ *est un mouvement Brownien de loi initiale* μ.

Propriété 1.2. *Soit* $X = \left(X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^d\right)$ $t \geq 0$ *issu de zéro, alors* X *est un mouvement Brownien si et seulement si : pour tout* $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$, X_t^i *est un mouvement Brownien issu de zéro et les processus* $\left(X_t^i\right)_{t\geq 0}$ *sont indépendants.*

Définition 1.3. *On dit qu'un processus continu* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien s'il est* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté et si pour tous* $0 \leq s < t < \infty$ *et pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\{i\langle u, X_t - X_s\rangle\}/\mathcal{F}_s\right] = \exp\{-(t-s)\frac{||u||^2}{2}\}.$$

Donnons maintenant ces deux propositions suivantes.

Proposition 1.2 :
Soit $X = \left(X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^d\right)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tous $0 \leq s < t$ on a :

- $\mathbb{E}\left[\left(X_t^i - X_s^i\right)/\mathcal{F}_s\right] = 0$ $\quad p.s$ $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$.
- $\mathbb{E}\left[\left(X_t^i - X_s^i\right)\left(X_t^j - X_s^j\right)/\mathcal{F}_s\right] = (t-s)\,\delta_{(i,j)}$ $\quad p.s$ $i, j \in \{1, 2, \cdots, d\}$,

où $\delta_{(i,j)}$ est la formule de Kronecker donnée par :

$$\delta_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : (Voir DEA de Djibril Ndiaye [6])

Proposition 1.2. *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus continu, à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *issu de zéro. Alors* X *est un* $\mathcal{F}_t$*-mouvement Brownien si et seulement si, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^d$, *le processus* $M_\lambda^t = \exp\{\langle \lambda, X_t\rangle - \frac{1}{2}||\lambda||^2 t\}$ $(t \geq 0)$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale.*

Démonstration. Supposons que X est un mouvement Brownien.
Alors $\mathbb{E}\{\exp\left(\langle\lambda, X_t - X_s\rangle/\mathcal{F}_s\right)\} = \exp\{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\}$.
Donc $\mathbb{E}\{\exp\left[\left(\langle\lambda, X_t\rangle\right)/\mathcal{F}_s\right]\exp\left(\langle-\lambda, X_s\rangle\right)\} = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}s\right)$.
Ce qui donne $\mathbb{E}\{\exp\left[\left(\langle\lambda, X_t\rangle\right)/\mathcal{F}_s\right]\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}t\right) = \exp\left(\langle\lambda, X_s\rangle\right)\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}s\right)$.
Ainsi on a $\mathbb{E}\{\exp\left[\left(\langle\lambda, X_t\rangle - \frac{\lambda^2}{2}t\right)/\mathcal{F}_s\right]\} = \exp\left(\langle\lambda, X_s\rangle - \frac{\lambda^2}{2}s\right)$.
C'est à dire que $\mathbb{E}\left(M_t^\lambda/\mathcal{F}_s\right) = M_s^\lambda$.
Donc le processus M_t^λ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
En faisant le calcul inverse, on vérifie aisément que X est un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien. □

1.4 Processus de Lévy

Le mouvement Brownien peut être vu comme le modèle le plus élémentaire pour décrire un phénomène aléatoire dont la valeur varie de façon continue.
Cependant, lorsqu'on décrit des phénomènes physiques ou dans le domaine de la finance et des assurances ..., les processus observés peuvent présenter des discontinuités dont la localisation et l'amplitude sont aléatoires. Modéliser de tels phénomènes nécessite la présence d'un processus de sauts. Les processus de Lévy constituent des processus à sauts qui généralisent ceux de Poisson.

1.4.1 Processus de Poisson

Définition 1.4. *Soit $(T_n)_n$ une suite strictement croissante de variables aléatoires réelles avec $T_0 = 0$. Le processus de comptage N_t associé à $(T_n)_{n\geq 1}$ est défini par :*

$$N_t = \sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}} = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{1}_{\{T_n\leq t\leq T_{n+1}\}}$$

1. *Les trajectoires de N sont constantes par morceaux dont les sauts ne prennent que la valeur 1.*
2. *$\forall\ t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.*

Définition 1.5. *Un processus de comptage N_t adapté est appelé processus de Poisson si :*
. $N_0 = 0$ *p.s*
. N_t *est à accroissements indépendants.*
. N_t *est à accroissements stationnaires.*

1.4.2 Mesure aléatoire de Poisson

Soit $(S, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 1.6. *Soit μ une mesure σ-finie sur $(S, \mathcal{A})$. Une mesure aléatoire de Poisson N sur $(S, \mathcal{A})$ est une collection de variables aléatoires $(N(B), B \in \mathcal{A})$ telle que :*

1. *Pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < \infty$, $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$.*
2. *Si $A_1, \cdots A_m$ sont des ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, les variables aléatoires $N(A_1), \cdots, N(A_m)$ sont indépendantes.*
3. *Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $A \mapsto N(A, \omega)$ est une mesure de comptage sur $(S, \mathcal{A})$.*

Définition 1.7. *On dit qu'un ensemble A est borné inférieurement si $0 \notin A$.*
Pour un ensemble A borné inférieurement, $N = (N_t)_{t\geq 0}$ une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $dt \otimes d\mu$, avec $\mu(A) = \mathbb{E}([0,1], A)$, la mesure aléatoire de Poisson compensée $\tilde{N}$ est définie par

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A).$$

1.4.3 Lois de probabilité indéfiniment divisibles

La notion de processus de Lévy est étroitement liée à la notion de variable aléatoire de la loi indéfiniment divisible.

Définition 1.8. *On dit que la variable X est de loi indéfiniment divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) $(X_k)_{k=1,\cdots,n}$ telles que X ait la même loi que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.*
Sa fonction caractéristique $\Phi_X(u)$ de X vérifie alors :

$$\Phi_X(u) = \left(\Phi_{X_k}(u)\right)^n.$$

1.4.4 Processus de Lévy

Définition 1.9. *Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré.*
Un processus $\mathcal{F}_t$-adapté $(X_t)_{t\geq 0} \subset \mathbb{R}^d$ avec $X_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s$ est appelé un processus de Levy s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. *Accroissements indépendants : pour chaque subdivision de temps t_0 $t_1, \cdots, t_n$ les variables aléatoires $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*
2. *Accroissements stationnaires : la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t.*
3. *La continuité en probabilité : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$.*

Théorème 1.2. ***Formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy.***
Soit X un processus de Lévy. Alors il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et une mesure de Lévy μ tels que $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle u, X_t\rangle}\right] = \exp\left[t\left(i\langle b, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au\rangle + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(e^{i\langle u,z\rangle} - 1 - i\langle u, z\rangle \mathbb{1}_{\{||z||\leq 1\}}\right)\mu(dy)\right)\right].$$

1.5 Intégrale stochastique de Lévy et semi-martingale

Définition 1.10. *On appelle intégrale stochastique de Lévy un processus* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *tel que* $\forall t \geq 0$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi(s)\, dW_s + \int_0^t \phi(s)\, ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(s,x)\, N(dsdx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(s,x)\, \tilde{N}(dsdx)$$

où

1. Y_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,*
2. φ *est un processus adapté tel que* $\forall t \geq 0$, $\int_0^t \varphi^2(s)\, ds < +\infty \quad p.s,$
3. ϕ *est un processus adapté tel que* $\forall t \geq 0$, $\int_0^t \left|\phi(s)\right| ds < +\infty \quad p.s,$
4. H *est un processus prévisible tel que* $\forall t \geq 0$ $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left|H(s,x)\right| N(dsdx) < +\infty \quad p.s,$
5. K *est un processus prévisible tel que* $\forall t \geq 0$ $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} K^2(s,x)\, \nu(dx)\, ds < +\infty \quad p.s.$

Définition 1.11. *On appelle semi-martingale un processus* $(Y_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-adapté càdlàg qui admet*
la décomposition $\forall t \geq 0$, $Y_t = Y_0 + M_t + A_t$ *où*

- $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale locale càdlàg nulle en* 0,
- $(A_t)_{t\geq 0}$ *est un processus à variation finie (c'est à dire s'écrivant comme différence de deux fonctions croissantes) càdlàg nul en* 0.

1.5.1 Formule d'Itô

Soit une d-dimensionnelle semi-martingale $Y_t = \left(Y_t^1, \cdots, Y_t^d\right)$ définie par :

$$Y_t^i = Y_0^i + M_t^i + A_t^i + \int_0^t \int_E f_i(s,z,\cdot)\, \tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_E g_i(s,z,\cdot)\, N(dsdz) \tag{1.1}$$

$i = 1, \cdots d$ où

- M_t est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale localement continue de carrée intégrable, et $M_0 = 0$.
- A_t est un $(\mathcal{F}_t)$-adapté dont presque toutes ses fonctions d'échantillonnage sont à variation bornée à chaque intervalle fini, et $A_0 = 0$.
- g est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible et pour tout $t > 0$, $\int_0^t \int_E \|g(s,z,\cdot)\| \mu(dz)\, ds < +\infty\ a.s.$
- f est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible et pour tout $t > 0$, $\int_0^t \int_E \|f(s,z,\cdot)\|^2 \mu(dz)\, ds < +\infty\ a.s.$

Théorème 1.3. ***Formule d'Itô***
Soit F une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$ et Y_t une d-dimensionnelle semi-martingale. Alors le processus $F(Y_t)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-semi-martingale et on a :

$$\begin{aligned}
F(Y_t) - F(Y_0) &= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(Y_s)\, dM_s^i + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(Y_s)\, dA_s^i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s)\, d\langle M^i, M^j \rangle_s \\
&+ \int_0^t \int_E \left[F(Y_{s^-} + g(s,z,\cdot)) - F(Y_{s^-}) \right] N(dzds) \\
&+ \int_0^t \int_E \left[F(Y_{s^-} + f(s,z,\cdot)) - F(Y_{s^-}) \right] \widetilde{N}(dzds) \\
&+ \int_0^t \int_E \left[F(Y_{s^-} + f(s,z,\cdot)) - F(Y_{s^-}) - \sum_{i=1}^{d} f_i(s,z,\cdot) \frac{\partial F}{\partial x_i}(Y_s) \right] \mu(dz)\, ds
\end{aligned}$$

1.6 Changement de mesures

Si Q est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ (satisfaisant les hypothèses habituelles), on note Q_t la restriction de Q à $\mathcal{F}_t$. On rappelle que si Q est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ ($Q << \mathbb{P}$) alors la famille $\left(\frac{dQ_t}{dP_t}\right)_t$ est une $\mathbb{P}$-martingale. Soit e^X une martingale exponentielle. Comme $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[e^{X_t}\right] = 1$, on peut définir une mesure de probabilité Q_t sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ par

$$\frac{dQ_t}{dP_t} = e^{X_t}$$

pour tout $t \geq 0$. On fixe $T \geq 0$.

Théorème 1.4. ***Girsanov***
Soit X un processus de Lévy tel que e^X est une martingale, i.e Xest de la forme :

$$X_t = \int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW_s + \int_0^t \int_E H(s,z)\, \tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_E K(s,z)\, N(dsdz)$$

avec

$$b(t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t) - \int_E \left(e^{H(t,z)} - 1 - H(t,z)\right) \mu(dz) - \int_E \left(e^{K(t,z)} - 1\right) \mu(dz) \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Nous supposons qu'il existe une $C > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et tout $z \in E$

$$||K(t,z)|| \leq C.$$

Pour $L \in \mathcal{H}^2(T, \mu)$ nous définissons

$$M_t := \int_0^t \int_{z \neq 0} L(s,z)\, \tilde{N}(dsdz).$$

Posons

$$U(t,z)=\left(e^{H(t,z)}-1\right)1_{\{||z||<1\}}+\left(e^{K(t,z)}-1\right)1_{\{||z||\geq 1\}}$$

et supposons que

$$\int_0^T\int_{\{||z||\leq 1\}}\left(e^{H(s,z)}-1\right)^2\mu(dz)\,ds<+\infty.$$

Finalement, nous posons

$$B_t=W_t-\int_0^t\sigma(s)\,ds\quad et\quad N_t=M_t-\int_0^t\int_{z\neq 0}L(s,z)\,U(s,z)\,\mu(dz)\,ds,\quad 0\leq t\leq T.$$

Soit Q une nouvelle mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ donnée par :

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}}=e^{X_T}.$$

Alors sous Q, B_t est un mouvement Brownien et N_t est une Q-martingale.

1.7 Équations différentielles stochastiques

1.7.1 Existence et l'unicité

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ un espace probabilisé équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les hypothèses usuelles. Soit $B=(B_t,t\geq 0)$ un mouvement Brownien standard d-dimensionnel et une mesure aléatoire de Poisson N sur $\mathbb{R}_+\times\left(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\right)$. On suppose que B et N sont indépendants et tous deux sont $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptés. On note ν l'intensité de N et $\tilde{N}$ la mesure de Poisson compensée associée. On cherche à résoudre l'EDS

$$\begin{aligned}X_t=X_0+\int_0^t b(X_s)\,ds+\int_0^t\sigma(X_s)\,dB_s+\int_0^t\int_{||z||<1}F(X_{s^-},z)\,\tilde{N}(ds,dz)\\+\int_0^t\int_{||z||\geq 1}G(X_{s^-},z)\,N(ds,dz)\end{aligned}\tag{1.2}$$

où les coefficients $b:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$, $\sigma:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^{d\times d}$, $F,G:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ sont supposés mesurables. La condition initiale X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable finie presque sûrement.

Définition 1.12. *Une solution de* (1.2) *est un processus stochastique càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, adapté et presque sûrement solution de* (1.2). *On dira que la solution de* (1.2) *est unique si, pour toutes solutions X^1 et X^2, on a : $\mathbb{P}\left(X_t^1=X_t^2,\forall\quad t\geq 0\right)=1$.*

Donnons les hypothèses suivantes sur les coefficients :

. Condition de Lipschitz (CL). Il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $x,x'\in\mathbb{R}^d$:

$$||b(x)-b(x')||^2+||\sigma(x)-\sigma(x')||^2+\int_{||z||<1}||F(x,z)-F(x',z)||^2\nu(dz)\leq K||x-x'||^2.$$

. **Condition de croissance (CC)**. Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$||b(x)||^2 + ||\sigma(x)||^2 + \int_{||z||<1} ||F(x,z)||^2 \nu(dz) \leq M\left(1 + ||x||^2\right).$$

Théorème 1.5. *Voir Applebaum [1]*
Sous les hypothèses (CL) et (CC), il existe une unique solution à l'EDS (1.2).

1.7.2 Propriété de Markov

Théorème 1.6. *Voir Applebaum [1]*
La solution de (1.2) *est un processus de Markov homogène.*

Chapitre 2

Homogénéisation et Principe des Grandes Déviations

2.1 Homogénéisation

L'objectif principal de la théorie de l'homogénéisation est de remplacer dans la mesure du possible, un milieu décrit de façon microscopique par une approximation à l'échelle macroscopique. Ceci a bien sûr une grande importance car plusieurs milieux ne sont connus que par leurs propriétés microscopiques (par exemple les sous-sols).
Les débuts de l'homogénéisation stochastique remontent aux travaux de Fréidlin.
Sa méthode repose sur l'étude de la convergence en loi des processus de diffusion sous-jacents à l'aide de la théorie ergodique et du théorème centrale limite pour les martingales.

2.1.1 Préliminaire

Définissons tout d'abord, $\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \dfrac{1}{\delta_\varepsilon} X_{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2 t}$, un revêtement du processus $X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ à valeurs dans le tore $\mathbb{T}^d$

$$\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} - \frac{x}{\delta_\varepsilon} = \int_0^t \sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) d\bar{W}_s + \int_0^t b\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds + \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds + \bar{L}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \qquad (2.1)$$

où

$$\begin{cases} \bar{W}_t = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon} W_{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2 t} \quad \text{est un mouvement Brownien} \\ \bar{L}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} := \dfrac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\left(N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dsdy) - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\right)\nu(dy)\,ds, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Remarquons que le générateur infinitésimal du processus $\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ est l'opérateur

$$\bar{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{d} c_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{T}^d \tag{2.2}$$

Lorsque ε tend vers zéro il tend vers $\mathcal{L}$ donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.3}$$

2.1.2 Mesure invariante

Définition 2.1. *Soit $S = \{0, 1, ...\}$ un ensemble d'indices et $\mu = (\mu_i, i \in S)$ un ensemble de nombres strictement positifs. Considérons enfin un processus $X(.) = (X_{ij}(.), i, j \in S)$ à valeurs réelles définies sur $]0, +\infty[$.*
On dit que μ est une mesure invariante pour X si $\sum_i \mu_i X_{ij}(t) = \mu_j$.

Lemme 2.1. *Pour tout $\varepsilon \geq 0$, le processus de diffusion $\{\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, t \geq 0\}$ à valeurs dans le tore $\mathbb{T}^d$, de générateur infinitésimal $\bar{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$, possède une unique mesure invariante $\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ qui converge vers μ_0 lorsque $\varepsilon \to 0$.*

Pour la preuve de ce lemme (2.1) (voir Djibril Ndiaye [6]) elle s'appuie entre autre sur la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\frac{1}{c} \leq p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x) \leq c, \quad x \in \mathbb{T}^d, \varepsilon \geq 0.$$

Proposition 2.2. ***(Voir Pardoux et Veretennikov [5])***
Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la mesure $\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ de $\{\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, t \geq 0\}$ a une densité $p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x)$ telle que $p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \in H^1(\mathbb{T}^d)$. En outre, $p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \to p$ dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ quand $\varepsilon \to 0$.

La preuve de cette proposition s'appuie entre autre sur la proposition suivante appelée l'inégalité de Nash.

Proposition 2.3. ***(Inégalité de Nash).***
Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\phi \in H^1(\mathbb{T}^d)$, si $\bar{\phi} = \phi - \int_{\mathbb{T}^d} \phi(x)\,dx$ alors

$$||\bar{\phi}||^{2+\frac{4}{d}}_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq c||\bar{\phi}||^{\frac{4}{d}}_{L^2(\mathbb{T}^d)}||\nabla\phi||^2_{L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)}.$$

On déduit immédiatement de l'inégalité de Nash, puisque $p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ est une densité de probabilité et que $||\bar{\phi}||_{L^1(\mathbb{T}^d)} \leq 2||\phi||_{L^1(\mathbb{T}^d)}$, le résultat suivant,

Corollaire 2.1. ***(Pardoux et Veretennikov [5])***
Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \geq 0$, $\delta_\varepsilon \geq 0$

$$||p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}||_2 \leq c||\nabla p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}||^2_{L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)}.$$

2.1.3 Trou spectral

Proposition 2.4. *Il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \geq 0$, si $f \in L^2\left(\mathbb{T}^d; \mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)$ et satisfait la condition $\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(dx) = 0$, on a*

$$\left|\left|\mathbb{E}^x\left[f\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right]\right|\right|_{L^2\left(\mathbb{T}^d;\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)} \leq \left|\left|f\right|\right|_{L^2\left(\mathbb{T}^d;\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)} e^{-\rho t}.$$

Peuve :
On démontre ce résultat en utilisant l'inégalité de Poincaré, et la proposition (2.1). Alors, on a :

Corollaire 2.2. *Il existe $C > 0$ tel que si $f \in L^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$ et que la condition $\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x)\,dx = 0, \quad t \geq 0$ est satisfaite, alors*

$$\left|\mathbb{E}^x\left(f\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)/\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right| \leq C\left|\left|f\right|\right|_{L^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)} e^{-\rho(t-s)}.$$

2.1.4 Théorème ergodique

Ici nous désignons par $\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$ solution de l'EDS (0.1), nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Soit $f \in L^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$. Alors pour tout $t > 0$, on a*

$$\int_0^t f\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds \to t\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,p(x)\,dx$$

en probabilité, quand ε tend vers zéro.

Démonstration.
Posons $\bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x) = f(x) - \int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x)\,dx$, alors
$\bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) = f\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) - \int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x)\,dx$, et
$\int_0^t \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds = \int_0^t f\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds - t\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x)\,dx.$
D'autre part on sait que $\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,p_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(x)\,dx \to \int_{\mathbb{T}^d} f(x)\,p(x)\,dx$ quand ε tend vers zéro.
Il reste qu'à montrer que $\int_0^t \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds \to 0.$
Avec $\frac{1}{\delta_\varepsilon}X_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 s}$, on a $\int_0^t \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right) ds = \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\bar{X}_u\right) du.$

Il résulte de la propriété de Markov de $\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ et du corollaire (2.2) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\bar{X}_u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) du\right)^2\right] &= 2\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 \mathbb{E}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\bar{X}_r^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \int_0^r \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\bar{X}_u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) drdu \\
&= 2\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 \mathbb{E}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \int_0^r \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\bar{X}_r^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\bar{X}_u^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) drdu \\
&\leq 2\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 ||\bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}||^2_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \int_0^r e^{-\rho(r-u)} drdu.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \int_0^r e^{-\rho(r-u)} drdu &= \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \left[\int_0^r e^{-\rho(r-u)} du\right] dr \\
&= \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \rho^{-1}\left(1 - e^{-\rho r}\right) dr \\
&= \rho^{-2}\left[-1 + \rho\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2 t + e^{-\rho\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2 t}\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\bar{X}_u\right) du\right)^2\right] &\leq 2||\bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}||^2_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 \rho^{-2}\left[-1 + \rho\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2 t + e^{-\rho\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t}\right] \\
&= 2||\bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}||^2_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \rho^{-2}\left[-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 + \rho\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 e^{-\rho\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t}\right].
\end{aligned}$$

Or $-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 + \rho\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4 e^{-\rho\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.
D'où

$$\int_0^t \bar{f}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(\frac{X_s^{x,\varepsilon,\delta}}{\delta_\varepsilon}\right) ds \to 0.$$

□

2.1.5 Équation de Poisson

Soit $f \in L^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$ et vérifiant :

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\, p(x)\, dx = 0 \tag{2.4}$$

On cherche $\hat{f}$ solution de l'équation de Poisson sur $\mathbb{T}^d$ associée à l'opérateur $\mathcal{L}$ (la limite de celui défini en 3.9)

$$\mathcal{L}\hat{f}(x) + f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^d \tag{2.5}$$

Cette solution n'est unique qu'à une constante additive près. Fixons cette constante en cherchant une solution $\hat{f}$ telle que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}(x)\, \mu_0(dx) = 0 \tag{2.6}$$

Théorème 2.1. *Soit $f \in L^{\infty}\left(\mathbb{T}^d\right)$ qui vérifie (2.4). Alors l'équation (2.5) admet une unique solution $\hat{f} \in W^{2,n}\left(\mathbb{T}^d\right)$ pour tout $n \geq 1$, qui vérifie (2.6). Cette solution est donnée par la formule probabiliste :*

$$\hat{f}(x) = \int_0^{\infty} \mathbb{E}^x f\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) dt. \tag{2.7}$$

Preuve : (voir DEA Djibril Ndiaye [6])

2.2 Principe des grandes déviations (PGD)

La théorie des grandes déviations s'intéresse à l'étude des évènements rares, c'est à dire les évènements dont la probabilité de se réaliser est petite.
Commençons cette présentation par un exemple simple.
Considérons une suite $(X_i, i = 1, \cdots, n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrées réduites. Notons $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne des X_i La loi des grands nombres nous apprend que presque sûrement, $\bar{X}_n$ converge vers 0. Par conséquent on a pour tout $a > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) = 0.$$

L'évènement $\{|\bar{X}_n| \geq a\}$ est un évènement atypique, on force notre processus à excéder sa moyenne. La théorie des grandes déviations cherche à quantifier plus précisément la probabilité de ce type d'évènement. On peut remarquer que dans notre exemple $\bar{X}_n$ suit alors une loi normale centrée et de variance $\dfrac{1}{n}$. Par conséquent on a ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)| < a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| < a\sqrt{n}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.
\end{aligned}$$

On peut encadrer l'intégrale précédente par

$$\left(1 - \frac{1}{a^2 n}\right) \frac{\sqrt{2}}{\pi a\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{a^2 n}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi a\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{a^2 n}{2}\right)$$

pour finalement obtenir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) = -\frac{a^2}{2},$$

ou bien encore que

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) \approx \exp\left(-\frac{a^2 n}{2}\right) \quad \text{à l'infini.}$$

La probabilité pour que le processus $\bar{X}_n$ réalise un évènement atypique comme excéder sa moyenne est donc approximativement de $\exp\left(-\frac{a^2 n}{2}\right)$. Nous avons donc réussi avec cet exemple simple à quantifier la probabilité d'un évènement rare, ici qu'une moyenne de gaussiennes centrées dépasse 0. On dira que n est la vitesse de la déviation et que la fonction $a \mapsto \frac{a^2}{2}$ est la fonction de taux de la déviation.
Soit E un espace polonais métrique muni de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}_E$.

Définition 2.2. ***(Fonction de taux) :***
Une fonction $I : E \longrightarrow [0, +\infty]$ est une fonction de taux si elle est semi-continue inférieurement, c'est à dire si les ensembles de niveaux $\{x \in E : I(x) \leq \alpha, \alpha \geq 0\}$ sont fermés. On dira que I est une bonne fonction de taux si ces ensembles de niveaux sont compacts.

Définition 2.3. ***(Principe des grandes déviations)***
La famille $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\}$ de probabilités sur $(E, \mathcal{B}_E)$ satisfait un principe des grandes déviations avec pour fonction de taux I si pour tout $\Gamma \subset \mathcal{B}_E$, on a :

$$-\inf_{x\in\overset{\circ}{\Gamma}} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(\Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(\Gamma) \leq -\inf_{x\in\overline{\Gamma}} I(x).$$

L'énoncé d'un principe des grandes déviations peut s'exprimer de manière équivalente comme suit :

Définition 2.4. *La famille $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\}$ de probabilités sur $(E, \mathcal{B}_E)$ satisfait un principe des grandes déviations avec pour fonction de taux I si*

(1) pour tout ouvert O de $\mathcal{B}_E$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(O) \geq -\inf_{x\in O} I(x)$$

(2) pour tout fermé F de $\mathcal{B}_E$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x).$$

Remarque 2.1. *Il existe une version affaiblie du principe des grandes déviations. On dira que la famille $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\}$ de probabilité sur $(E, \mathcal{B}_E)$ satisfait un principe des grandes déviations restreint avec pour fonction de taux I, si la borne supérieure est seulement valable pour des ensembles compacts.*

Donnons maintenant le théorème de Crâmér.
On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on note

$$\Lambda(\theta) = \log \mathbb{E}[\exp(\langle \theta, X \rangle)]$$

la log-Laplace de la loi de X et

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}^d} \{\langle \theta, x \rangle - \Lambda(\theta)\}$$

avec $x \in \mathbb{R}^d$, la transformée de Legendre de Λ.

On suppose que la log-Laplace de la loi de X soit définie sur $\mathbb{R}^d$ en entier. Notons $\mathcal{D}_\Lambda$ le domaine de définition de cette dernière.

Théorème 2.2. ***(Théorème de Crâmér sur** $\mathbb{R}^d$)*
Soit $(X_i, i = 1, \cdots, n)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si on suppose que $\mathcal{D}_\Lambda = \mathbb{R}^d$ alors

(1) pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \in F\right) \leq - \inf_{x\in F} \Lambda^*(x)$$

et

(2) pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \in O\right) \geq - \inf_{x\in O} \Lambda^*(x).$$

La fonctionnelle Λ^* est un élément central de la théorie des grandes déviations.

Proposition 2.6. *La fonction Λ^* est convexe et semi-continue inférieurement.*

Démonstration.
Λ^* est semi-continue inférieurement en tant que suprémum de fonctions linéaires.
Par ailleurs, soient $u \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Lambda^*(ux + (1-u)y) &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda(ux + (1-u)y) - \Lambda(\lambda)\} \\
&= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{u(\lambda x - \Lambda(\lambda)) + (1-u)(\lambda y - \Lambda(\lambda))\} \\
&\leq u\Lambda^*(x) + (1-u)\Lambda^*(y).
\end{aligned}$$

□

2.2.1 Principe contraction

Ce principe permet de transférer un principe des grandes déviations connu pour une famille de probabilité $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\}$ à une nouvelle famille $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \circ f^{-1}\}$ si f est continue dans la topologie où se réalise le principe des grandes déviations.

Théorème 2.3. *Soient E et $E^{'}$ des espaces métriques séparables et $f : E \longrightarrow E^{'}$ une application continue. Considérons la fonction de taux I de E à valeurs dans $[0, +\infty]$, définissons alors l'application J par*

$$J(y) = \inf\{I(x), x \in E, f(x) = y\} \quad y \in E^{'}.$$

Alors, J est une bonne fonction de taux sur $E^{'}$.
Si de plus, $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\}$ satisfait un principe des grandes déviations sur E avec I pour fonction de taux alors la famille $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \circ f^{-1}\}$ satisfait un principe des grandes déviations sur $E^{'}$ avec pour fonction de taux J.

Remarque 2.2. *Rappelons que la famille de mesure de probabilité $\{\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \circ f^{-1}\}$ est comme suit :*
pour tout $A \in \mathcal{B}_{E'}$

$$\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \circ f^{-1}(A) = \mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(f^{-1}(A)\right).$$

Donnons la démonstration du théorème (2.3)

Démonstration. Tout d'abord observons que J est une application positive et semi-continue inférieurement. Montrons que J est une bonne fonction de taux. Soit $\alpha \geq 0$, alors

$$\{J \leq \alpha\} = \{y \in E', J(y) \leq \alpha\} = \{f(x), x \in E, I(x) \leq \alpha\}.$$

Puisque f est continue, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est un fermé. De plus, I étant une bonne de taux, nous avons

$$J(y) = \inf_{x \in f^{-1}(\{y\})} I(x) = I(x_0) \qquad x_0 \in f^{-1}(\{y\}).$$

En outre, notons que $\{f(x), x \in E, I(x)\} = f(\{I \leq \alpha\})$. I étant une bonne fonction de taux, l'ensemble $\{I \leq \alpha\}$ est un compact de E. La continuité de f nous assure alors que l'ensemble $\{J \leq \alpha\}$ est également compact.
Enfin, montrons que $\left(\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \circ f^{-1}\right)$ satisfait un principe des grandes déviations avec J pour fonction de taux. Pour cela, observons que $\mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} \circ f^{-1}(A) = \mu_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\left(f^{-1}(A)\right)$. En utilisant la continuité de f, si A est un fermé (respectivement un ouvert) de E' alors $f^{-1}(A)$ est un fermé (respectivement un ouvert) de E. En conclusion $J(A) = I\left(f^{-1}(A)\right)$. □

2.2.2 Théorème de Gartner-Ellis

Rappelons que Cramér est le premier à utiliser cette approche pour établir le principe des grandes déviations pour une famille de variables aléatoires indépendantes. Ensuite ce résultat a été confirmé par Gartner-Ellis dans $\mathbb{R}^d$, puis généralisé par Baldi dans les espaces plus généraux (voir Dembo et al.[13] ou Stroock et al.[25]).
Soit $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$g^{\varepsilon}_{T,x}(\theta) = \varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\rangle\right)\right], \quad \varepsilon > 0, \theta \in \mathbb{R}^d \tag{2.8}$$

Théorème 2.4. ***Théorème de(Gartner-Ellis)***
Supposons $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ soient fixés.
Soit $\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} : \varepsilon > 0, t \in [0,T]\}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issue de x. Supposons de plus :

- *la fonction $g_{T,x}$, ci-dessous, soit bien définie de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$*

$$g_{T,x}(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} g^{\varepsilon}_{T,x}(\theta)$$

- *le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$ soit dans l'intérieur de $\{\theta \in \mathbb{R}^d : g_{T,x}(\theta) < \infty\}$*
- *l'ensemble $A := \{\theta \in \mathbb{R}^d : |g_{T,x}(\theta)| < \infty\}$, de frontière ∂A, soit d'intérieur $\overset{\circ}{A}$ non vide, que $\nabla g_{T,x}(\theta)$ soit défini pour tout $\theta \in \overset{\circ}{A}$ et que $\limsup_{\substack{\theta \to \partial A \\ \theta \in \overset{\circ}{A}}} ||\nabla g_{T,x}(\theta)|| = +\infty$.*

Alors la famille $\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} : \varepsilon > 0, t \in [0,T]\}$ satisfait un principe des grandes déviations avec une fonction taux définie par :

$$I_{T,x}(z) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^d}\{\langle \theta, z\rangle - g_{T,x}(\theta)\}, \qquad z \in \mathbb{R}^d.$$

Chapitre 3

Principe des grandes déviations pour les EDS avec sauts et homogénéisation plus rapide que la viscosité

Introduction

Dans cette partie, nous considérons une famille $\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\}$ solution de EDS avec sauts (0.1). Nous prouvons que lorsque l'homogénéisation l'emporte sur la viscosité, la famille satisfait un PGD. Pour cela nous utiliserons le calcul des moments logarithmiques de $X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$, la formule d'Itô et celle de Girsanov. Nous ferons des estimations pour trouver la limite de $g_{T,x}^{\varepsilon}$ de la fonction définie dans le théorème de Gartner-Ellis. Et nous utiliserons aussi la transformée de Frenchel-Legendre pour trouver la bonne fonction de taux, ce qui nous permettra de dire que $X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ un PGD.

3.1 Hypothèses et définitions

Nous rappelons sans perte de généralité $\delta := \delta_\varepsilon$ et supposons que

H.1 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} = 0.$

Notons l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ par $\mathbb{E}$, et l'opérateur gradient par ∇. Nous définissons également par $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire Euclidien standard sur $\mathbb{R}^d$, et $||.||$ sa norme associée. Soit $C\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui sont périodiques de période 1 dans chaque coordonnée de l'argument, et soit $||.||_{C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right)}$ sa norme associée. Nous désignons par $\mathbb{T}^d$ le tore d-dimensionnel de taille 1,

et par $||.||_{C\left(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d\right)}$ la norme sup sur $C\left(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d\right)$, l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
Les champs de vecteurs $\{\sigma_i : 1 \leq i \leq d\}$ dans (1) sont $C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right)$ et satisfont la condition

$$\kappa = \inf \left[\sum_{i=1}^{d} \langle \theta, \sigma_i(x) \rangle^2 : x \in \mathbb{R}^d, \theta \in \mathbb{R}^d, ||\theta|| = 1 \right] > 0. \tag{3.1}$$

Supposons également que les coefficients b , c dans (1) sont $C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right)$.
Pour ce qui est de la partie de Poisson, nous considérons une mesure aléatoire de Poisson $N^{\varepsilon^{-1}}(.,.)$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ définie dans l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, avec une mesure de Lèvy $\varepsilon^{-1}\nu$ de telle sorte que la condition d'intégrabilité suivante soit satisfaite :

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(1 \wedge ||y||^2\right) \nu(dy) < +\infty \tag{3.2}$$

Le compensateur de $\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}}$ est donc la mesure déterministe $\varepsilon \hat{N}^{\varepsilon^{-1}}(dtdy) := dt\nu(dy)$. Dans notre travail, nous nous intéressons aux Points processus de Poisson de classe (QL), à savoir un Point processus dont la mesure de comptage a un compensateur continu(voir, Ikeda et Watanabe, 1981). Plus précisément, à la lumière du théorème de représentation des Points processus de Poisson (Ikeda et Watanabe, 1981, chap. II, Théo.7.4), nous exigeons que $L^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ soit un processus de saut pur de la forme suivante :

$$L_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} k\left(\frac{\cdot}{\delta_\varepsilon}, y\right)(s) \left(\varepsilon N^{\varepsilon^{-1}}(dsdy) - \nu(dy)\,ds\right), \qquad t \geq 0$$

où k est $C\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right)$ par rapport à la première variable, intégrable par rapport à $dtdy$, de sorte que la mesure de comptage de $L^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$, notée $N_{L^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}}(dtdy)$ prend la forme suivante :

$$N_{L^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}}((0,t]\times A) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} 1_A\left(k\left(\frac{\cdot}{\delta_\varepsilon}, y\right)(s)\right) \varepsilon N^{\varepsilon^{-1}}(dsdy) = \sum_{0\leq S\leq t} 1_{\{\Delta L_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\in A\}}, \tag{3.3}$$

et son compensateur est donc
$\hat{N}_{L^{\varepsilon;\delta_\varepsilon}}(dtdy) := k\left(\frac{\cdot}{\delta_\varepsilon}, y\right)(s)\,\mathbb{E}\left[N_{L^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}}(dtdy)\right] = k\left(\frac{\cdot}{\delta_\varepsilon}, y\right)(s)\,\nu(dy)\,dt$ et donc continu, $i.e$ $L^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ a une statistique continue.
Les processus de Markov $X^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ que nous considérons engendrent une diffusion avec sauts. Par la suite, nous décrivons leur générateur infinitésimal sur l'espace des fonctions deux fois continûment différentiables à support compact par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\phi(x) &= \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\sum_{i=1}^{d} b_i\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{d} c_i\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\phi\left(x+\varepsilon k\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}, y\right)\right) - \phi(x) - \varepsilon\sum_{i=1}^{d} k_i\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}, y\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}\right]\nu(dy), \quad x\in\mathbb{R}^d.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Dont nous avons un générateur diffusion donné par la relation

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\sum_{i=1}^{d} b_i\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{d} c_i\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

où la matrice $a=(a_{ij})$ peut être écrite comme suit $a=\sigma\sigma^*$ avec $*$ désigne l'opérateur transposé.
et un générateur de sauts donné par la relation

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\phi\left(x+\varepsilon k\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon},y\right)\right)-\phi(x)-\varepsilon\sum_{i=1}^{d}k_i\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon},y\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_i}\right]\nu(dy), \quad x\in\mathbb{R}^d \tag{3.6}$$

que nous n'utiliserons pas dans la suite de notre travail.
Donnons l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{H.2}\begin{cases}\text{il existe une constante} \quad C_1 \quad \text{telle que pour tout} \quad \zeta:=\sigma_i,b,c, \quad 1\le i\le d, et \quad k:\\ \text{i)}||\zeta\left(x^{'}\right)-\zeta(x)||+\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}||k\left(x^{'},y\right)-k(x,y)||\nu(dy)\le C||x^{'}-x||, \quad \forall \quad x^{'},x\in\mathbb{R}^d\\ \text{il existe une constante} \quad C_2 \quad \text{telle que pour tout} \quad \zeta:=\sigma_i,b,c, \quad 1\le i\le d, et \quad k:\\ \text{ii)} \qquad ||\zeta(x)||^2+\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}||k(x,y)||^2\nu(dx)\le C_2\left(1+||x||^2\right), \quad x\in\mathbb{R}^d.\end{cases}$$

Par exigence, il existe une $\mathcal{L}$-diffusion avec sauts sur $\mathbb{R}^d$ et par hypothèse de périodicité sur les coefficients, un tel processus induit un processus $\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ qui a à la fois une composante diffusion et une composante saut sur le tore $\mathbb{T}^d$, de plus la $\mathcal{L}$-diffusion composante du processus est ergodique. Nous désignons par m son unique mesure invariante. Pour que ledit processus de générateur $\mathcal{L}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ ait une limite quand $\varepsilon\to 0$, nous avons fortement besoin de la condition suivante :

H.3 (condition de centrage) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} b(x)\,m(dx)=0.$
Si nous posons $\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}=\dfrac{1}{\delta_\varepsilon}X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2 t}$, alors nous avons

$$\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}-\frac{x}{\delta_\varepsilon}=\int_0^t\sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)d\bar{W}_s+\int_0^t b\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds+\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^t c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds+\bar{L}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \tag{3.7}$$

où

$$\begin{cases}\bar{W}_t=\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}W_{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2 t} \quad \text{est un mouvement Brownien}\\ \bar{L}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\left(N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dsdy)-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\right)\nu(dy)\,ds, \quad t\ge 0.\end{cases}$$

Le processus $\{\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}: t\ge 0\}$ est considéré comme un processus à valeurs dans le tore d-dimensionnel $\mathbb{T}^d$.

Son générateur de diffusion est :

$$\bar{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{d} c_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{T}^d \tag{3.8}$$

Lorsque ε tend vers zéro il tend vers $\mathcal{L}$ donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{3.9}$$

Désignons par $\hat{b} = \left(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_d\right)^*$ l'unique solution de l'équation de Poisson $\mathcal{L}\hat{b} + b = 0$ (voir, Pardoux et Veretennikov ; 2001) définie par :

$$\hat{b}_i(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\{b_i\left(\bar{X}_t\right)\}dt, \qquad i := 1, \cdots d. \tag{3.10}$$

Nous supposons que cette solution satisfait $\hat{b} \in C^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$.
Enfin, considérons les coefficients homogénéisés suivants :

$$c_0 = \int_{\mathbb{T}^d}\left(I + \nabla\hat{b}\right)c(x)\,m(dx)\,; \quad \bar{c}_0 = c_0 - \int_{\mathbb{T}^d} k_0(y)\,\nu(dy)$$
$$a_0 = \int_{\mathbb{T}^d}\left(I + \nabla\hat{b}\right)a\left(I + \nabla\hat{b}\right)(x)\,m(dx)\,; \quad k_0(y) = \int_{\mathbb{T}^d}\left(I + \nabla\hat{b}\right)k(x,y)\,m(dx)$$

3.2 Aperçu du principe des grandes déviations

Posons $\bar{\mathcal{J}}(\theta) := \frac{1}{2}\langle\theta, a_0\theta\rangle + \langle\bar{c}_0, \theta\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{T}^d}\left(e^{\langle k(z,y),\theta\rangle} - 1\right)m(dz)\,\nu(dy)$.

Par hypothèse sur a, la matrice a_0 est strictement définie positive. Puis, en posant a_0^{-1} sa matrice inverse, nous définissons la norme

$$||\theta||_{a_0^{-1}} = \sqrt{\langle\theta, a_0^{-1}\theta\rangle} \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

Ensuite, nous introduisons

$$Q_{a_0,\nu} = \{w \in \mathbb{R}^d : w = a_0 u \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R}^d\} + S_\nu,$$

où S_ν indique le support de ν. Désignons par $con\,(Q_{a_0,\nu})$ le plus petit cône convexe qui contient $Q_{a_0,\nu}$ puis posons

$$\boldsymbol{T}_{a_0,\nu} = \{\bar{c}_0\} + con\,(Q_{a_0,\nu})\,. \tag{3.11}$$

Soit $ri\,(A)$ l'intérieur relatif d'un ensemble A. Á la lumière du lemme de caractérisation (voir, Ikeda et Watanabe, 1981, Lemme 10.2.3) du domaine effectif de
$\mathcal{J}(\theta) = \inf_{\theta' \in \mathbb{R}^d}\left\{\langle\theta, \theta'\rangle - \mathcal{J}(\theta')\right\}$, nous avons

$$ri\,(\boldsymbol{T}_{a_0,\nu}) \equiv ri\,(dom\mathcal{J}(\theta))\,.$$

Par les exigences (3.1) et (3.2), il est bien connu que $\boldsymbol{T}_{a_0,\nu} := \mathbb{R}^d$ et l'on a

$$\mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2}||\theta - \bar{c}_0||^2_{a_0^{-1}} + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \varrho\left(\frac{||\theta||}{||k(z,y)||}\right) m(dz)\,\nu(dy)$$

où $\varrho(r) = r\log r - r + 1$, $r \in (0,+\infty)$.

Maintenant, nous énonçons résultat principal suivant :

Théorème 3.1. ***(Manga - Coulibaly - Diédhiou)***
*Fixons $T > 0$ et supposons que les hypothèses (**H.1**), (**H.2**) et (**H.3**) sont vérifiées. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la famille $\{X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} : \varepsilon > 0\}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ satisfait un PGD avec une bonne fonction de taux :*

$$I_{T,x}(z) = T\mathcal{J}\left(\frac{z-x}{T}\right), \qquad z \in \mathbb{R}^d.$$

Démonstration.
Comme le paramètre de l'homogénéisation est plus rapide que celui de la viscosité, le principe des grandes déviations sera appliqué aux coefficients homogénéisés. La preuve s'effectue en six étapes :

Première étape : écriture de la fonction test

Nous posons $\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \frac{1}{\delta_\varepsilon}X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$. La nouvelle variable $\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ vérifie l'EDS suivante :

$$\begin{aligned}\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} - \frac{x}{\delta_\varepsilon} &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\int_0^t \sigma\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)dW_s + \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon^2}\int_0^t b\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds + \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^t c\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds \\ &\quad + \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)N^{\varepsilon^{-1}}(dyds) - \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\nu(dy)\,ds.\end{aligned}$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)$ où $\hat{b}$ est solution de l'équation de Poisson $\mathcal{L}\hat{b} + b = 0$. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) &= \int_0^t \nabla\hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)d\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\int_0^t \frac{\partial^2\hat{b}}{\partial x_i\partial x_j}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)d\langle\hat{X}_i^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \hat{X}_j^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\rangle_s \\ &\quad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right) - \hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right]N^{\varepsilon^{-1}}(dyds) \\ &\quad - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right) - \hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right]\varepsilon^{-1}\nu(dy)\,ds \\ &\quad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right) - \hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right]\varepsilon^{-1}\nu(dy)\,ds \\ &\quad - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\nabla\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\nu(dy)\,ds\end{aligned}$$

où

$$d\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\sigma\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)dW_s + \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon^2}b\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds + \frac{1}{\delta_\varepsilon}c\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds - \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\nu(dy)\,ds$$

et $\quad d\langle \hat{X}_i^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \hat{X}_j^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\rangle_s = \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon^2} a_{ij}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds \qquad$ où $\quad a_{ij} = \sigma_i \sigma_j^*$.

Le terme $\displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nu(dy)\, ds$ représente le générateur de sauts que nous n'utilisons pas.

Ce qui fait que

$$\begin{aligned}
\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) = &\int_0^t \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \left[\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\sigma\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) dW_s + \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon^2} b\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds + \frac{1}{\delta_\varepsilon} c\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds\right.\\
&\left. - \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) \nu(dy)\, ds\right]\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t a_{ij}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial x_i \partial x_j}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds\\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right) - \hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right] N^{\varepsilon^{-1}}(dyds).
\end{aligned}$$

En multipliant par δ_ε, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon\left[\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right] = &\sqrt{\varepsilon}\int_0^t \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \sigma\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) dW_s + \int_0^t \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) c\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds\\
&- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) \nu(dy)\, ds\\
&+ \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\int_0^t \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial x_i \partial x_j}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds + \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) b\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right] ds\\
&+ \delta_\varepsilon \int_0^d \int_{\mathbb{R}^d} \left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right) - \hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right] N^{\varepsilon^{-1}}(dyds).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon\left[\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right] = &\sqrt{\varepsilon}\int_0^t \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \sigma\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) dW_s + \int_0^t \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) c\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds\\
&- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) \nu(dy)\, ds\\
&+ \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\int_0^t \mathcal{L}\hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds\\
&+ \delta_\varepsilon \int_0^d \int_{\mathbb{R}^d} \left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} + \varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right) - \hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right] N^{\varepsilon^{-1}}(dyds).
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}$ est donné par (3.9).

Par la relation $\mathcal{L}\hat{b}+b=0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon\left[\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right] &= \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \nabla\hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\sigma\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)dW_s+\int_0^t \nabla\hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)c\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds \\ &-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\hat{b}\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nu(dy)\,ds-\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\int_0^t b\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds \\ &+\delta_\varepsilon\int_0^d\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}+\varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right)-\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right]N^{\varepsilon^{-1}}(dyds).\end{aligned}$$

Ensuite nous utilisons la fonction test $\tilde{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}=X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}+\delta_\varepsilon\left[\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]$.
Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon} &= X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}+\delta_\varepsilon\left[\hat{b}\left(\hat{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right] \\ &= x+\int_0^t\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\left[c\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nu(dy)\right]ds \\ &+\sqrt{\varepsilon}\int_0^t\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\sigma\left(\hat{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)dW_s+\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)N^{\varepsilon^{-1}}(dyds) \\ &+\delta_\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}+\varepsilon k\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right)-\hat{b}\left(\hat{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right]N^{\varepsilon^{-1}}(dyds).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Deuxième étape : projection sur le tore

Nous projetons $X_t^{x,\varepsilon\delta_\varepsilon}$ dans le tore. Pour cela, nous posons $\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}=\frac{1}{\delta_\varepsilon}X^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2t}$ et nous obtenons à partir de la fonction test :

$$\begin{aligned}X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} &= x+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2t}\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\left[c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nu(dy)\right]ds \\ &+\delta_\varepsilon\sum_{i=1}^d\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2t}\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\sigma_i\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)d\bar{W}_s \\ &+\varepsilon\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2t}\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2}(dyds) \\ &+\delta_\varepsilon\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2t}\int_{\mathbb{R}^d}H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2}(dyds)-\delta_\varepsilon\left[\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right].\end{aligned}$$

où $z\in\mathbb{T}^d$

$$H^{\varepsilon,\varphi}(z)=\varphi(z+\varepsilon k(z,.))-\varphi(z)\quad\forall\varphi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Soit $\theta\in\mathbb{R}^d$ et $T>0$, en appliquant le produit scalaire entre $X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}$ et θ, puis en multipliant par ε^{-1}, nous avons :

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\langle \theta, x\rangle + \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{d}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\left\langle \theta, \left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\sigma_i\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right\rangle d\bar{W}_s$$
$$+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\left\langle \theta, \left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\left[c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nu\left(dy\right)\right]\right\rangle ds$$
$$+\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle \theta, k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right\rangle N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2}\left(dyds\right)$$
$$+\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right\rangle N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2}\left(dyds\right)$$
$$-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, \left[\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]\right\rangle.$$

Nous réécrivons la fonction $g_{T,x}^{\varepsilon}\left(\theta\right)$ définie par (2.8) :

$$g_{T,x}^{\varepsilon}\left(\theta\right) = \langle \theta, x\rangle + \varepsilon\log\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{d}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\left\langle \theta, \left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\sigma_i\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right\rangle d\bar{W}_s\right.\right.$$
$$+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\left\langle \theta, \left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\left[c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nu\left(dy\right)\right]\right\rangle ds$$
$$+\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle \theta, k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right\rangle N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2}\left(dyds\right)$$
$$+\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right\rangle N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2}\left(dyds\right)$$
$$\left.\left.-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, \left[\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]\right\rangle\right\}\right].$$

Troisième étape : changement de mesure de probabilité et utilisation de Girsanov

Pour $T>0$, définissons une nouvelle mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{F}_T\right)$ par :

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(A_T\right)$$

où

$$
\begin{aligned}
A_T =& \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \sum_{i=1}^{d} \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left\langle \theta, \left(I + \nabla \hat{b}\right) \left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \sigma_i \left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \right\rangle d\bar{W}_s \\
&- \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \sum_{i=1}^{d} \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left\langle \theta, \left(I + \nabla \hat{b}\right) \left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \sigma_i \left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \right\rangle^2 ds \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \theta, k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2} (dyds) \\
&- \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\langle \theta, k\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle} - 1\right) \nu(dy)\, ds \\
&+ \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle N^{\left(\delta_\varepsilon/\sqrt{\varepsilon}\right)^2} (dyds) \\
&- \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds.
\end{aligned}
$$

Soit $\tilde{\mathbb{E}}$ l'espérance sous $\tilde{\mathbb{P}}$. Grâce à la formule de Girsanov nous réécrivons la fonction $g_{T,x}^{\varepsilon}$ sur le nouveau espace :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle\right) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle - A_T\right) d\tilde{\mathbb{P}} \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle - A_T\right)\right] \\
\varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle\right)\right] &= \varepsilon \log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \theta, X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right\rangle - A_T\right)\right]
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
g_{T,x}^{\varepsilon}(\theta) = \langle \theta, x\rangle + \varepsilon \log \tilde{\mathbb{E}}\Bigg[\exp\Bigg\{ & \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left\langle \theta, \left(I + \nabla \hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \sigma_i \left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right\rangle^2 ds \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 t} \left\langle \theta, \left(I + \nabla \hat{b}\right)\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\left[c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \int_{\mathbb{R}^d} k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\nu(dy)\right]\right\rangle ds\Bigg) \\
&+ \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle\right\}} - 1\right)\nu(dy)\, ds \\
&+ \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\langle \theta, k\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle} - 1\right)\nu(dy)\, ds \\
&- \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, \left(\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right\rangle\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Quatrième étape : propriété ergodique

Pour tout $z \in \mathbb{T}^d$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$, posons

$$\Phi(z,\theta) = \frac{1}{2}\left\langle \theta, \left(I+\nabla\hat{b}\right)\sigma(z)\right\rangle^2 + \int_{\mathbb{R}^d}\left\langle \theta, \left(I+\nabla\hat{b}\right)(c(z)-k(z,y))\right\rangle \nu(dy) + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\langle\theta,k(z,y)\rangle}-1\right)\nu(dy) \tag{3.14}$$

Soit $\Psi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$ l'unique solution de l'équation de Poisson $\mathcal{L}\Psi = \Phi - \int_{\mathbb{T}^d}\Phi(z,.)\,m(dz)$, vérifiant $\int_{\mathbb{T}^d}\Psi(z,.)\,m(dz) = 0$ où $\mathcal{L}$ est donné par (3.9).

Nous appliquons à nouveau la formule d'Itô à $\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right)$ puis appliquer le théorème ergodique à $\Phi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right)$. Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right) - \Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) &= \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_j}\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\left\langle \bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_i, \bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_j\right\rangle_s \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}+\varepsilon k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right)-\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right]N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right) - \Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) &= \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\sigma\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\bar{W}_s \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_j}\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)+b\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\right]ds \\
&+ \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}c\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds \\
&- \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nu(dy)\,ds \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}+\varepsilon k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right)-\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right]N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds).
\end{aligned}$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) &= \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\bar{W}_s \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \mathcal{L}\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds \\
&+ \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} c\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds \\
&- \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d} k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nu(dy)\,ds \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}+\varepsilon k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right)-\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right]N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)
\end{aligned}$$

Par la relation $\mathcal{L}\Psi = \Phi - \int_{\mathbb{T}^d}\Phi(z,\theta)\,m(dz)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right) &= \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\bar{W}_s \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \Phi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds - \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(z,\theta)\,m(dz)\,ds \\
&+ \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} c\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds \\
&- \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d} k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nu(dy)\,ds \\
&+ \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}+\varepsilon k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right)-\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right]N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)
\end{aligned}$$

Nous avons par le théorème de Fubini que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(z,\theta)\,m(dz)\,ds &= \int_{\mathbb{T}^d}\Phi(z,\theta)\left(\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} ds\right)m(dz) \\
&= \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2 T\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(z,\theta)\,m(dz)\,.
\end{aligned}$$

Ce qui fait que

$$\begin{aligned}\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)&=\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\sigma\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\bar{W}_s+\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\Phi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds\\
&+\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}c\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds-\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2 T\int_{\mathbb{T}^d}\Phi\left(z,\theta\right)m\left(dz\right)\\
&-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nu\left(dy\right)ds\\
&+\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}+\varepsilon k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right)-\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}\right)\right]N^{\left(\delta_\varepsilon/\varepsilon\right)^2}\left(dyds\right).\end{aligned}$$

En multipliant par $\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\Phi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds&=T\int_{\mathbb{T}^d}\Phi\left(z,\theta\right)m\left(dz\right)\\
&+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\left[\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right]\\
&-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\sigma\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\bar{W}_s\\
&-\frac{\delta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}c\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds\\
&+\frac{\delta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nu\left(dy\right)ds\\
&-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)N^{\left(\delta_\varepsilon/\varepsilon\right)^2}\left(dyds\right).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Mettons (3.15) dans la formule (3.13).
Intégrons d'abord la relation (3.14) sur l'intervalle $\left[0,\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T\right]$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\Phi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s,\theta\right)ds&=\frac{1}{2}\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\left\langle\theta,\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\sigma\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\right\rangle^2 ds\\
&+\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\left\langle\theta,\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\left[c\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)-\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s,y\right)\nu\left(dy\right)\right]\right\rangle ds\\
&+\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\left\langle\theta,k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)\right\rangle}-1\right)\nu\left(dy\right)ds.\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
g_{T,x}^{\varepsilon}(\theta) &= \langle x,\theta\rangle \\
&\quad + \varepsilon \log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \Phi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds - \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, \left(\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right\rangle\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Ce qui entraine que

$$
\begin{aligned}
g_{T,x}^{\varepsilon}(\theta) &= \langle x,\theta\rangle + \varepsilon \log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\frac{T}{\varepsilon}\int_{\mathbb{T}^d} \Phi(z,\theta)\, m(dz) + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \left(\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right) - \Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right.\right. \\
&\quad - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) d\bar{W}_s - \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, \left(\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right\rangle \\
&\quad - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds \\
&\quad + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nu(dy)\, ds \\
&\quad - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds) \\
&\quad \left.\left. + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Ce qui nous donne le résultat

$$
\begin{aligned}
g_{T,x}^{\varepsilon}(\theta) &= \langle x,\theta\rangle + T\int_{\mathbb{T}^d} \Phi(z,\theta)\, m(dz) + \varepsilon \log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \left(\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T}\right) - \Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right.\right. \\
&\quad + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\rangle\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds \\
&\quad - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) d\bar{W}_s - \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle \theta, \left(\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right\rangle \\
&\quad - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) ds \\
&\quad + \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nu(dy)\, ds \\
&\quad \left.\left. - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)\right\}\right].
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Cinquième étape : estimation

Cette étape consiste à montrer que la relation (3.17) est négligeable lorsque les paramètres tendent vers zéro.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \log \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \left(\Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \right) - \Psi \left(\frac{x}{\delta_\varepsilon} \right) \right) - \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \left\langle \theta, \left(\hat{b} \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_t \right) - \hat{b} \left(\frac{x}{\delta_\varepsilon} \right) \right) \right\rangle \right. \right.\\
&+ \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{ \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \left\langle \theta, H^{\varepsilon,\hat{b}} \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s, y \right) \right\rangle \right\}} - 1 \right) \nu(dy)\, ds \\
&- \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) d\bar{W}_s \\
&- \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^3 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} c \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) ds \\
&+ \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^3 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} k \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}, y \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nu(dy)\, ds \\
&\left. \left. - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} H^{\varepsilon,\Psi} \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-}, y \right) N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2} (dyds) \right\} \right].
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\left| \log \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) d\bar{W}_s \right\} \right] \right| \\
&= \left| \log \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) d\bar{W}_s \right. \right. \right. \\
&- \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^4 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left|\left| \sigma \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \right|\right|^2 ds \\
&\left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^4 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left|\left| \sigma \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \right|\right|^2 ds \right\} \right] \right|.
\end{aligned}
$$

Et comme

$$
\exp \left\{ - \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) d\bar{W}_s - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^4 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left|\left| \sigma \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \nabla \Psi \left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s \right) \right|\right|^2 ds \right\}
$$

est une martingale, son espérance vaut 1.

Donc

$$
\begin{aligned}
&\left|\log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) d\bar{W}_s\right\}\right]\right| \\
&= \left|\log\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^4 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left|\left|\sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right|\right|^2 ds\right\}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^4 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \left|\left|\sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right) \nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\right|\right|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^4 \left|\left|\sigma\nabla\Psi\right|\right|^2_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)} \left(\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} ds\right) \\
&\leq \frac{T}{2\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \left|\left|\sigma\nabla\Psi\right|\right|^2_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)} \leq \frac{T}{2\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 k_1, \quad \text{avec} \quad k_1 = \left|\left|\sigma\nabla\Psi\right|\right|^2_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\left|\log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)\right\}\right]\right| \\
&= \left|\log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)\right.\right.\right. \\
&-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds \\
&\left.\left.\left.+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds\right\}\right]\right|.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
\exp&\left\{-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)\right. \\
&\left.-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds\right\}
\end{aligned}
$$

est une martingale, son espérance vaut 1.
Donc

$$
\begin{aligned}
&\left|\log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right) N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)\right\}\right]\right| \\
&= \left|\log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds\right\}\right]\right| \\
&\leq \left|\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2 T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}, y\right)\right\}} - 1\right) \nu(dy)\, ds\right|.
\end{aligned}
$$

En faisant un développement limité d'ordre 1, nous avons

$$\left|\log\tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)\right\}\right]\right|$$
$$\leq\left|\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^4\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}\left(H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)+o(1)\right)\nu(dy)\,ds\right|$$
$$\leq\frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left|\int_{\mathbb{R}^d}H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nu(dy)\right|+o(1)$$
$$\leq\frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left|\left|H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right|\right|_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d\right)}+o(1)\leq\frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2k_2+o(1)\quad\text{avec}$$

$$k_2=\left|\left|H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right|\right|_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d\right)}.$$

En adoptant la même démarche, nous parvenons à montrer que

$$\left|\log\tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle\theta,H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right\rangle\right\}}-1\right)\nu(dy)\,ds\right\}\right]\right|$$
$$\leq\frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)k_3+o(1)$$

$$\text{avec}\quad k_3=\left|\left|\left\langle\theta,H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right\rangle\right|\right|_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d\right)}.$$

On a encore

$$\left|\log\tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\nu(dy)\,ds\right\}\right]\right|$$
$$\leq\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta_\varepsilon}\right)^2T\left|\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\nu(dy)\right|$$
$$\leq\frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)k_4$$

$$\text{avec}\qquad k_4=\left|\left|k\nabla\Psi\right|\right|_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d\right)}.$$

De même, nous avons

$$\left|\log \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T} c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds\right\}\right]\right| \leq \frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)k_5$$

$$\text{avec} \qquad k_5 = \left|\left|c\nabla\Psi\right|\right|_{\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)}.$$

Nous avons aussi

$$\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left|\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right| \leq \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2k_6$$

avec $k_6 = \left|\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right|$.

Et

$$\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left|\left\langle\theta,\left(\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right\rangle\right| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}k_7$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\log\tilde{\mathbb{E}}\Bigg[\exp\Bigg\{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left(\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle\theta,\left(\hat{b}\left(\bar{X}_t^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right\rangle\\
&+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle\theta,H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\right\rangle\right\}}-1\right)\nu\left(dy\right)ds\\
&-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\sigma\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)d\bar{W}_s\\
&-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}c\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)ds\\
&+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}_s^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}\right)\nu\left(dy\right)ds\\
&-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}_{s^-}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon},y\right)N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}\left(dyds\right)\Bigg\}\Bigg]\\
&\leq\frac{T}{2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2k_1+T\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2k_2+T\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)k_3+T\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)k_4+T\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)k_5+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2k_6+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)k_7.
\end{aligned}$$

Par hypothèse **H.1**, nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon\log\tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\left(\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\right)-\Psi\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle\theta,\left(\hat{b}\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_t\right)-\hat{b}\left(\frac{x}{\delta_\varepsilon}\right)\right)\right\rangle\right.\right.$$
$$+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\left\{\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\left\langle\theta,H^{\varepsilon,\hat{b}}\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s,y\right)\right\rangle\right\}}-1\right)\nu(dy)\,ds$$
$$-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\sigma\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)d\bar{W}_s$$
$$-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}c\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)ds$$
$$+\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}k\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)\nabla\Psi\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_s\right)\nu(dy)\,ds$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{\left(\sqrt{\varepsilon}/\delta_\varepsilon\right)^2T}\int_{\mathbb{R}^d}H^{\varepsilon,\Psi}\left(\bar{X}^{\varepsilon,\delta_\varepsilon}_{s^-},y\right)N^{(\delta_\varepsilon/\varepsilon)^2}(dyds)\right\}\right]\longrightarrow 0.$$

Sixième étape : transformation de Fenchel-Legendre

Après les estimations nous avons

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}g^\varepsilon_{T,x}(\theta)=g_{T,x}(\theta)=\langle x,\theta\rangle+T\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(z,\theta)\,m(dz)\quad T>0. \tag{3.18}$$

où

$$\Phi(z,\theta)=\frac{1}{2}\left\langle\theta,\left(I+\nabla\hat{b}\right)\sigma(z)\right\rangle^2+\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle\theta,\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(c(z)-k(z,y)\right)\right\rangle\nu(dy)$$
$$+\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\langle\theta,k(z,y)\rangle}-1\right)\nu(dy).$$

Posons $\Lambda_1(\theta,z)=\dfrac{1}{2}\left\langle\theta,\left(I+\nabla\hat{b}\right)\sigma(z)\right\rangle^2+\int_{\mathbb{R}^d}\left\langle\theta,\left(I+\nabla\hat{b}\right)\left(c(z)-k(z,y)\right)\right\rangle\nu(dy)$
et
$\Lambda_2(\theta,z)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\langle\theta,k(z,y)\rangle}-1\right)\nu(dy).$

Pour $\theta\in\mathbb{R}^d$, X_1 un vecteur aléatoire gaussien de fonction log-génératrice des moments :

$$\bar{\Lambda}_1(\theta)=\int_{\mathbb{T}^d}\Lambda_1(\theta,z)\,m(dz)=\frac{1}{2}\langle\theta,a_0\theta\rangle+\langle\bar{c}_0,\theta\rangle$$

et X_2 un processus de Poisson stationnaire sur $\mathbb{R}^d$ indépendant de X_1 de fonction log-génératrice des moments :

$$\bar{\Lambda}_2(\theta)=\int_{\mathbb{T}^d}\Lambda_2(\theta,z)\,m(dz)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{T}^d}\left(e^{\langle\theta,k(z,y)\rangle}-1\right)m(dz)\,\nu(dy).$$

Prenons

$$\bar{\mathcal{J}}(\theta)=\bar{\Lambda}_1(\theta)+\bar{\Lambda}_2(\theta).$$

Soient $\tilde{\Lambda}_1(\theta)$ et $\tilde{\Lambda}_2(\theta)$ les représentants respectifs de la transformée de Fenchel-Legendre de $\bar{\Lambda}_1$ et $\bar{\Lambda}_2$, alors nous avons

$$\tilde{\Lambda}_1(\theta) = \frac{1}{2}\left|\left|\theta - \bar{c}_0\right|\right|^2_{a_0^{-1}} \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}_2(\theta) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \varrho\left(\frac{||\theta||}{||k(z,y)||}\right) m(dz)\,\nu(dy).$$

Comme $\bar{\mathcal{J}}(\theta)$ est le log-génératrice des moments de $X_1 + X_2$, il s'ensuit que sa transformée de Fenchel-Legendre est

$$\mathcal{J}(\theta) = \tilde{\Lambda}_1(\theta) + \tilde{\Lambda}_2(\theta).$$

$\mathcal{J}$ est convexe et toutes les hypothèses du théorème (2.4) sont vraies. Ainsi le principe de grandes déviations vaut pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $T > 0$.

$\square$

Soit $\mathcal{D}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ l'espace des fonctions de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continues à droite, pourvues de limites à gauche. $\mathcal{D}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ est métrisable par la métrique Skorohod, par rapport à laquelle elle est complète et séparable.
Considérons quelques définitions :

$$S_{0,T}(\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \mathcal{J}(\dot{\varphi}(s))\,ds \quad si \quad \varphi \in \mathcal{D}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right) \quad \varphi(0) = x \\ \\ +\infty \qquad sinon. \end{cases}$$

Comme la fonction $\mathcal{J}$ est convexe alors nous pouvons constater que

$$\inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) \\ \varphi(0)=x, \varphi(T)=z}} \int_0^T \mathcal{J}(\dot{\varphi}(s))\,ds = T\mathcal{J}\left(\frac{z-x}{T}\right).$$

Donc nous avons

Corollaire 3.1. *Pour tout $T > 0$, nous supposons que les hypothèses (**H.1**) à (**H.3**) vérifiées. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la famille de variables aléatoires $\left\{X_T^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon} : \varepsilon > 0\right\}$ à valeurs dans $\mathcal{D}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ satisfait un principe de grandes déviations avec une bonne fonction de taux $S_{0,T}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$.*

Conclusion et perspectives

Ce travail est consacré à l'étude du couplage de l'homogénéisation et du principe des grandes déviations sur les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien et processus de Poisson. Pour cela, nous avons considéré une famille de variables aléatoires $\{X_t^{x,\varepsilon,\delta_\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$ dans $\mathbb{R}^d$ solution de l'EDS (0.1) et nous avons établi un principe des grandes déviations dans le cas où le paramètre d'homogénéisation δ_ε tend plus vite vers zéro que le paramètre de viscosité ε.
Cependant, nous pouvons aussi faire l'étude du couplage dans les cas suivants :

- Étudier un principe des grandes déviations dans le cas où la viscosité l'emporte sur l'homogénéisation.
- Étudier un principe des grandes déviations dans le cas où l'homogénéisation et la viscosité vont à vitesse équivalente.
- Étendre l'étude du couplage dans le cas des EDS avec retard.

Bibliographie

[1] Applebaum .D, (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Published by Cambridge University, New York.

[2] Dembo A and Zeitouni O, (1993). *Large deviations techniques and applications*, Jones and Bartlett, Boston.

[3] Ikeda N and Watanabe S, (1981). *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North Holland.

[4] Fredlin MI and Sowers RB, (1999). *A comparison of homogenezation and large deviations, with applications to wavefront propagation, Stochastic processes Appl*, Vol (82) ; 23-32.

[5] Pardoux E and Veretennikov A, (2001). *On the Poisson equation and diffusion approximation*, The Annals of Probability, Vol.29, No.3, 1061-1085.

[6] Ndiaye D. *Homogénéisation des EDP paraboliques linéaires par des méthodes probabilistes.* DEA, Dakar 2003-2004.

[7] Manga C. *Les grandes déviations.* DEA, Dakar 2004-2005.

[8] Dess IM Evry, (2002). *Cours de calcul stochastique option finance.*

[9] Rhodes Réni, (2010). *Processus de Lévy et calcul stochastique.*

[10] Benjamin Jourdain, (Janvier 2020). *Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie.*