UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Analyse et Géométrie Complexe

Sujet : Résolution du $\partial\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis sur une boule euclidienne de $\mathbb{C}^n$

Présenté par : Ibou GOUDIABY

Sous la direction de : Pr Marie Salomon SAMBOU & Dr Mansour SANE

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Oumar SALL	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur titulaire	Codirecteur	UASZ
Mansour SANE	Maître assistant	Codirecteur	UASZ
Thomas GUEDENON	Maître de conférences	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2016-2017

Résolution du $\partial\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis sur une boule euclidienne de $\mathbb{C}^n$

Ibou GOUDIABY

9 janvier 2018

Table des matières

Remerciements

Après de nombreuses années d'étude au cours desquelles de nombreuses difficultés ont été franchies, je tiens vraiment à remercier de tout cœur tous ceux qui de prés où de loin m'ont accompagné, encouragé et m'ont permis de la meilleure des conditions, d'être à ce statut.

Il a fallu que j'assiste en licence au cours d'analyse complexe à une variable, enseigné par Marie Salomon SAMBOU pour avoir quelques notions dans ce domaine des mathématiques. Ainsi de là, je découvre une inspiration qui me pousse à suivre ces cours de master 1 et 2 marquant ainsi mon choix d'écrire mon mémoire de master sur ce domaine des mathématiques. En premier lieu, mes remerciements vont à l'endroit de mes directeurs de mémoire à savoir Mansour SANE et Marie Salomon SAMBOU, qui par leurs gentillesses, leurs conseils et leurs disponibilités, m'ont donné du courage et l'envie d'aller très loin dans la recherche.

Je remercie également tous les professeurs du département de mathématiques de l'UASZ (Université Assane Seck de Ziguinchor), pour la qualité de l'enseignement qu'ils ne cessent de produire chaque année. Je veux citer Alassane DIEDHIOU, Amoussou Thomas GUEDENON, Daouda Niang DIATTA, Diène NGOM, Edouard DIOUF, Mansour SANE, Marie Salomon SAMBOU, Oumar SALL, Samesidy GOUDIABY, Emmanuel CABRAL, Timack NGOM.

Mes remerciements envers tous mes camarades de classe. Mais surtout à tous les participants aux séminaires NLAGA organisés tous les samedis au sein de l'UASZ, je veux parler de Marie Salomon SAMBOU, Mansour SANE, Mamadou Eramane BODIAN, Souhaibou SAMBOU, Ibrahima HAMIDINE, Moctar TRAORE, Abdoulaye DIOUF, Alioune KOULIBALY, Ibrahima SANE, Pape Modou SARR, Nestor DJINTELBE, Sény DIATTA, Winnie Ossete INGOBA. Je retiendrai d'eux de nombreuses et intéressantes contributions et conseils qu'ils m'ont donnés à chaque rencontre. je remercie aussi tout le personnel administratif de l'UASZ en particulier ceux de l'UFR Sciences et Technologies.

Enfin je remercie sincèrement tous les membres de ma famille pour le soutien, les conseils et encouragements qu'il ne cessent de me renouveler tous les jours particulièrement Ousmane GOUDIABY(paix à son âme), mon papa à qui je dédie ce travail. je remercie infiniment ma maman et tous mes oncles, particulièrement Dr Tidiane SANE pour ses conseils et encouragements qu'il ne cesse de renouveler.

RÉSUMÉ

Dans ce travail de mémoire, notre but est d'abord de construire les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ dans le cas d'une variété analytique complexe. Il s'agit de prouver le théorème 2.0.15 qui est un résultat de Mamadou Eramane BODIAN, Dian DIALLO et Marie Salomon SAMBOU. Ensuite, il s'agit de prouver le théorème 3.0.21 qui est un résultat de Marie Salomon SAMBOU sur les courants prolongeables.
Enfin, à travers ce résultat de SAMBOU et des résultats classiques de résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables, nous donnons la preuve du théorème 3.0.22 qui est un autre résultat de ces trois auteurs.

Introduction

Ce travail de mémoire intitulé résolution du $\partial\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis sur la boule euclidienne de $\mathbb{C}^n$ est un article de Mamadou Eramane BODIAN, Dian DIALLO et Salomon SAMBOU. Cependant notre objectif est de réécrire les résultats de Mamadou Eramane BODIAN, Dian DIALLO et Salomon SAMBOU après une compréhension des outils techniques utilisés.
Pour résoudre le $\partial\bar{\partial}$, la méthode classique est de résoudre d'abord l'équation $du = T$ où u et T sont des courants prolongeables. Ce qui nous permet d'obtenir le **théorème 2.0.15** : $\check{H}^p(B(0,r)) = 0$ pour $2 \leq p \leq n-1$. Et ensuite résoudre le ∂ et le $\bar{\partial}$ pour la décomposition de la solution obtenue. C'est ce qui nous permet d'aboutir au **théorème 3.0.22** : Soit T un (p,q)-courant prolongeable défini sur la boule euclidienne
$B(0,r) \subset \mathbb{C}^n$. Supposons que $dT = 0$; $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$; alors il existe une $(p-1,q-1)$-courant S défini sur $B(0,r)$,prolongeable tel que $\partial\bar{\partial}S = T$
pour $2 \leq p+q \leq 2n-1$.
Ainsi pour entreprendre ce travail, nous commencerons d'abord par introduire les notions d'analyse fonctionnelle, de Variété et de calcul différentiel sur une variété analytique complexe. Ensuite, nous aborderons la résolution de l'équation $du = T$.
Enfin, nous terminons le travail par la résolution du $\partial\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables.

Chapitre 1

Préliminaires et notations

1.1 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

Définition 1.1.1.
On appelle K-espace vectoriel topologique, tout K-espace vectoriel E muni d'une topologie qui rend continue les applications :
$(x,y) \in E \times E \longmapsto x + y$ et $(\lambda,x) \in K \times E \longmapsto \lambda x$ où K est un corps.

Définition 1.1.2.

On appelle norme sur un K-espace vectoriel E, toute application $\|\bullet\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $\forall x \in E$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$.
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x,y \in E$.

Définition 1.1.3.
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associée à la norme.

Définition 1.1.4.
On appelle semi-norme sur un K-espace vectoriel E une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x,y \in E$

ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$.

Remarque 1.1.5. Toute norme est une semi-norme.

Définition 1.1.6.
Soit E un espace vectoriel. Une partie $U \subset E$ est dite convexe lorsque pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ pour tous x, $y \in U$.
On peut associer à une semi-norme une distance.

Définition 1.1.7.
Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet par rapport à la métrique provenant des semi-normes.

Remarque 1.1.8.
Tout espace de Banach est un espace de Fréchet. La réciproque n'est pas vraie.

Théorème 1.1.9. [de Baire](voir[1])
Soit (E,d) un espace métrique complet et $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E.

Corollaire 1.1.10.
Soit E un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermées de E telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense dans E et en particulier il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_n \neq \emptyset$.

Théorème 1.1.11. [de l'application ouverte] (voir[1])

Soit E et F deux espaces de Banach et
$T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, continue et surjective. Alors T est ouverte. (voire [4])

Lemme 1.1.12.
Une application T est ouverte si et seulement si l'image de tout voisinage ouvert de 0 est un voisinage ouvert de 0.

Démonstration.
Supposons que T est ouverte. Si V est un voisinage ouvert de 0, alors $T(V)$ est un ouvert contenant $T(0) = 0$, donc un voisinage ouvert de 0.
Inversement, soit Ω un ouvert de E et montrons que $T(\Omega)$ est un ouvert de F. Pour ce faire, il suffit de prouver que $T(\Omega)$ est voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in \Omega$, puisque Ω est un ouvert, donc voisinage de x. Par conséquent :

$$\exists r > 0,\ B(x,r) \subset \Omega \Rightarrow B(0,r) \subset \Omega - \{x\} = \{y - x | y \in \Omega\}$$

Montrons l'inclusion $B(0,r) \subset \Omega - \{x\}$. Soit $z \in B(0,r)$
On a $z \in B(0,r) \Longrightarrow \|z\| < r \Longrightarrow \|(z+x)-x\| < r$ et $z+x \in B(x,r)$ et puisque $B(x,r) \subset \Omega$, donc $z+x \in \Omega$. Ainsi il existe $y \in \Omega$ tel que $y = z+x$. Par suite $z = y-x \in \Omega - \{x\}$ et par conséquent $B(0,r) \subset \Omega - \{x\}$. D'où $\Omega - \{x\}$ est un ouvert contenant 0 ; donc voisinage de 0. Comme T est linéaire et par hypothèse l'image par T de tout voisinage ouvert de 0 est un voisinage ouvert de 0, on a $T(\Omega - x) = T(\Omega) - \{T(x)\}$ est un voisinage ouvert de 0. Ainsi, $T(\Omega) = T(\Omega - x) + T(x)$ est un voisinage ouvert de $T(x)$ et puisque $T(x)$ est quelconque dans F du fait x l'est dans Ω, donc $T(\Omega)$ est voisinage de chacun de ses points. Par conséquent $T(\Omega)$ est un ouvert dans F. □

Passons à la démonstration du théorème de l'application ouverte

Démonstration. : Puisque E et F sont espaces normés complets et T est linéaire et continue, il suffit de montrer que $T(B_E(0_E,1))$ contient une boule ouverte $B_F(0_F,\rho)$ avec $\rho > 0$.

Notons d'abord que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_E(0,n)$.

On définit pour tout entier naturel n, $F_n = \overline{T(B(0,n))}$.
T étant surjective, on a $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
En effet, si $y \in F$, $\exists x \in E | y = T(x)$.
$x \in E \Rightarrow \|x\| \leq k \in \mathbb{N}$
$y \in T(kB_E(0,1)) = kT(B(0,1)) \Rightarrow y \in F_k$. F étant un espace de Banach, par le corollaire 1.1.10, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Donc $F_{n_0} \neq \emptyset$
$F_{n_0} = \overline{T(n_0 B_E(0,1))} = n_0\overline{T(B_E(0,1))}$ contient un ouvert non vide U.
Puisque T est linéaire et continue, $T(B_E(0,1))$ et $\overline{T(B_E(0,1))}$ sont convexes.
$-U \subset n_0\overline{T(B_E(0,1))}$ implique que l'ensemble $V = \frac{1}{2}(U-U) \subset n_0\overline{T(B_E(0,1))}$.
V est un voisinage de 0, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(0,\epsilon) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Ce qui donne $B_F(0,\rho) \subset \overline{T(B_E(0,\frac{1}{2}))}$, pour $\rho = \frac{\epsilon}{2}$.

Il reste à montrer que $\overline{T(B_E(0,\frac{1}{2}))} \subset T(B_E(0,1))$.

Soit $y \in \overline{T(B_E(0,\frac{1}{2}))}$. Il existe x_1 avec $\|x_1\| \leq \frac{1}{2}$ tel que $\|T(x_1) - y\| < \frac{\rho}{2}$.
Donc $T(x_1) - y \in B_F(0,\frac{\rho}{2}) \subset \overline{T(B_E(0,\frac{1}{2}))}$.
De même, il existe x_2 avec $\|x_2\| < \frac{1}{4}$ tel que $\|T(x_2) - y_1\| = \|T(x_2) + T(x_1) - y\| < 2^{-2}\rho$.
$(y_1 = y - T(x_1))$ et $y_2 = T(x_2) + T(x_1) - y \in B_F(0,2^{-2}\rho)$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que :

— a) $\|x_n\| < 2^{-n}$

b) $\|T(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k) - y\| < 2^{-n}\rho$.

Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Comme E est complet, S_n converge vers un élément x de E et puisque T est continue nous obtenons de $b)$ que $T(x) = y$.
$x \in B_E(0,1)$, $y = T(x)$; donc $y \in T(B_E(0,1))$.
Par conséquent, $B_F(0_F,\rho) \subset \overline{T(B_E(0,\frac{1}{2}))} \subset T(B_E(0,1))$.

□

1.2 Calcul différentiel sur une variété analytique complexe

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k, la classe des fonctions de classe C^k et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

1.2.1 Notion de variété

Définition 1.2.1.
Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé M tel que pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \Omega$. Le couple (U,φ) est appelé carte locale de M.

Définition 1.2.2.
Un atlas d'une variété topologique M est une famille de cartes locales
$U = \{(u_\alpha,\varphi_\alpha),\alpha \in I\}$ de M telles que $M = \bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha$. Si toutes les cartes de U ont la même dimension n, on dit que U est un atlas de dimension n.

Définition 1.2.3.
Un atlas $U = \{(u_\alpha,\varphi_\alpha),\alpha \in I\}$ est dit de classe C^k si pour tous $\alpha,\beta \in I$ tels que $u_\alpha \cap u_\beta \neq \emptyset$ les fonctions de transition $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(u_\alpha \cap u_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(u_\alpha \cap u_\beta)$ sont des difféomorphismes de classe C^k.

Définition 1.2.4.
On appelle variété réelle de dimension n et de classe C^k, la donnée d'un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k.

Définition 1.2.5.
On dit qu'une variété différentiable M est orientable si pour toutes cartes $(u_\alpha,\varphi_\alpha)$ et (u_β,φ_β) telles que $u_\alpha \cap u_\beta \neq \emptyset$ on a $det(J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) > 0$.

Définition 1.2.6.
Soient M et N deux variétés différentielles réelles de classes respectives C^p et C^s et de dimensions respectives m et n. Soit $x_0 \in M$ et $k \leq \min(p,s)$.
On dit qu'une application continue $f : M \longrightarrow N$ est de classe C^k lorsque pour toutes cartes locales $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ en x_0 sur M et (V_β,ψ_β) en $f(x_0)$ sur N telles que $f(U_\alpha) \subset V_\beta$, l'application $f_{\beta\alpha} : \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ qui envoie l'ouvert $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^m$ dans l'ouvert $\psi_\beta(V_\beta)$ de $\mathbb{R}^n$ est de classe C^k au point $\varphi_\alpha(x_0) \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$. L'application f est dite de classe C^k sur M si elle est de classe C^k en tout point x de M. On dit que f est un C^k-difféomorphisme lorsque f est bijective et f et f^{-1} sont de classe C^k.

Définition 1.2.7.
Soit M une variété différentiable réelle de classe C^k et de dimension n, $\Omega \subset M$ un ouvert et $s \in \mathbb{N}\cup\{\infty,w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$. Une fonction f est de classe C^s sur Ω si $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi(u_\alpha) \to \mathbb{R}$ est différentiable de classe C^s pour toute carte locale $(u_\alpha,\varphi_\alpha)$. L'ensemble des fonctions de classe C^s sur Ω est noté $C^s(\Omega,\mathbb{R})$.

Définition 1.2.8.
Soit M une variété réelle de dimension n et de classe C^k et $a \in M$. Un vecteur tangent v est un opérateur différentiel de premier ordre qui agit sur les fonctions de la manière suivante : pour tout système de coordonnées locales $(x_1,...,x_n)$ on a
$(v.f)(a) = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$; où les v_j sont des réelles.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1,...,x_n)$ autour de a sur Ω,
on écrit simplement

$$v = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Par conséquent, pour tout $a \in M$, le n-uplet $\{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\}_{1\leq j\leq n}$ constitue une base de l'espace tangent à M au point a ; noté T_aM.

Définition 1.2.9.
Soit M une variété de dimension n et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentielle. On appelle différentielle de f, l'opérateur différentiel $df(a)$ qui agit sur T_aM de la manière suivante : $v = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $df(a).v = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = v.f(a)$. En particulier, si $f = x_j$ et $v = \frac{\partial}{\partial x_j}$ alors $dx_j(a).\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 1$.

$(dx_1,...,dx_n)$ est la base duale de $(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$. L'espace dual de T_aM est appelé espace cotangent à M en a et se note T_a^*M. Les unions disjointes

$$TM = \bigcup_{a\in M} T_aM \text{ et } T^*M = \bigcup_{a\in M} T_a^*M$$

sont respectivement appelées fibré tangent et fibré cotangent.

Définition 1.2.10.
Une variété complexe M de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection $(u_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ où les u_α sont des ouverts de M tels que $M = \bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha$ et $\varphi_\alpha : u_\alpha \to \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes pour lesquels on a :
$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(u_\alpha \cap u_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(u_\alpha \cap u_\beta)$ sont des biholomorphismes.

Définition 1.2.11.
Soit M une variété complexe de dimension n et $f : \Omega \subset M \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est holomorphe si pour toute carte locale $(u_\alpha,\varphi_\alpha)$, $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi(u_\alpha) \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. On note $O(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Théorème 1.2.12. *:* Principe de prolongement analytique

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Si $f \in O(\Omega)$ et s'il existe $a \in D$ tel que $D^\alpha f(a) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in D$, où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} .....\partial {x_n}^{\alpha_n}}$$

est la dérivée d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. En particulier, s'il existe un ouvert non vide $U \subset D$ tel que $f(z) = 0$ pour tout $z \in U$, alors $f \equiv 0$ sur D.

1.3 Formes différentielles et courants

Soit M une variété différentielle de classe C^∞ et $\Omega \in M$ un ouvert. On appelle forme différentielle u de degré p, l'application qui à tout $x \in \Omega$ associe une p-forme multilinéaire alternée de T_xM. On note $\Lambda^p T_x^*M$ l'ensemble des p-formes multilinéaires alternées sur T_xM ; c'est-à-dire $u : \Omega \subset M \to \Lambda^p T_x^*M$ qui à tout $x \in M$ associe $u(x) \in \Lambda^p T_x^*M$.
Localement, on écrit $u(x) = \sum_{|I|=p} u_I(x)dx_I$, où les u_I sont des fonctions et dans ce cas, on dit que la forme différentielle est de classe C^s si les u_I sont des fonctions de classe C^s. Si u est à support compact, on dit que la forme différentielle est à support compact.
Notons $C^s(\Omega,\Lambda^p T_x^*M)$, l'espace des p-formes différentielles de classe C^s et $C_c^s(\Omega,\Lambda^p T_x^*M)$ l'espace des p-formes différentielles de classe C^s qui sont à support compact.

1.4 Opérateur de différentiation extérieur

L'opérateur de différentiation extérieure d est un opérateur différentiel $d : C^s(\Omega,\Lambda^p T_x^* M) \to C^{s-1}(\Omega,\Lambda^{p+1} T_x^* M)$ défini localement par : si $u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x) dx_I$ est une
p-forme différentielle sur X.

$I = (i_1,.....i_p)$ avec $1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$

$dx_I = dx_{i_1} \wedge ..... \wedge dx_{i_p}$

$du = \sum_{|I|=p}' \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I$ et vérifie les propriétés suivantes :

i) $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ (Règle de Leibnitz)

ii) $d^2 u = 0$ (idempotence).

Définition 1.4.1.
Une forme u est dite fermée si $du = 0$, et elle est dite exacte s'il existe une forme v, telle que $deg(v) = deg(u) - 1$ vérifiant $u = dv$. On peut alors définir les sous-espaces vectoriels suivants :

$$Z_s^p(\Omega) := \{u \in C^s(\Omega, \wedge^p T^* M) : du = 0\},$$

l'espace des p-formes différentielles de classe C^s sur Ω d-fermées.

$$B_s^p(\Omega) := \{u \in C^s(\Omega, \wedge^p T^* M) \exists v \in C^{s-1}(\Omega, \wedge^{p+1} T^* M) \text{ avec } dv = u\},$$

l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^s sur Ω qui sont exactes.

Remarque 1.4.2. Toute forme d- exacte est d-fermée
En effet soit $u \in B_s^p(\Omega)$.
$u \in B_s^p(\Omega) \Rightarrow \exists v \in C^s(\Omega, \wedge^{p+1} T^* M) : dv = u$

$$\Rightarrow d^2 v = du$$
$$\Rightarrow du = 0$$
$$\Rightarrow u \in Z_s^p(\Omega).$$

Par conséquent, $B_s^p(\Omega) \subset Z_s^p(\Omega)$.
L'espace quotient noté

$$H_s^p(\Omega) := \frac{Z_s^p(\Omega)}{B_s^p(\Omega)}$$

est appelé p-ième groupe de cohomologie de de Rham des formes différentielles de classe C^s définies sur Ω.

$$Z_{s,c}^p(\Omega) := \{u \in C_c^s(\Omega, \wedge^p T^* M) | du = 0\}$$

est l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^s sur Ω d-fermées et à support compact.

$$B_{s,c}^p(\Omega) := \{du \text{ où } u \in C^s(\Omega, \wedge^{p-1} T^* M)\}$$

est l'ensemble des p-formes différentielles exactes de classe C^s et à support compact.
L'espace quotient

$$H^p_{s,c}(\Omega) := \frac{Z^p_{s,c}(\Omega)}{B^p_{s,c}(\Omega)}$$

est appelé p-ième groupe de cohomologie de de Rham des p-formes différentielles de classe C^s à support compact sur Ω.

Définition 1.4.3. (Pull-back)
Soit $F : X \to Y$ une application C^∞ entre deux variétés orientées de dimensions respectives n_1, n_2. Si $v(y) = \sum'_{|I|=p} v_I(y) dy_I$ est une p-forme différentielle sur Y, le pull-back (tiré-en-arrière) F^*v est la p-forme différentielle sur X obtenue en remplaçant y par $F(x)$ dans l'écriture de v, c'est-à-dire

$$F^*v(x) = \sum'_{|I|=p} v_I(F(x)) dF_{i_1} \wedge ... \wedge dF_{i_p}.$$

Définition 1.4.4 (Espace de distribution)**.**
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$D(V) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | \text{supp}(\varphi) \subset V, \text{ compact } \}$$

où $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}}$.
Une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(V)$ converge vers φ dans $D(V)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

i) $\forall\ j$, les supports de φ_j et φ sont contenus dans un compact $K \subset V$,

ii) $(D^\alpha \varphi(x))_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi(x)$ sur $K \subset V$,
pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$;
où $\alpha = (\alpha_1,.....,\alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$,
$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1}.....\partial {x_n}^{\alpha_n}}$ est la dérivée d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Définition 1.4.5.
Une forme linéaire T sur $D(V)$ est dite séquentiellement continue sur $D(V)$ si l'application $T : D(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$; si $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ dans $D(V)$ quand j tend vers $+\infty$, alors la suite des nombres complexes $T(\varphi_j) \longrightarrow T(\varphi)$.
Désignons par D_K l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K.

Définition 1.4.6.
Une distribution T sur V est une forme linéaire sur $D(V)$ séquentiellement continue. De plus, si T est une distribution réelle, l'application $\varphi \mapsto -\langle T, \dfrac{d\varphi}{dx}\rangle$ est une distribution.
Par définition, c'est la dérivée de T notée $\dfrac{dT}{dx}$.

Exemple 1.4.7.

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. La fonction définie par :

$$\delta_a \ : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ qui à } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ associe } \delta_a(\varphi) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

est une distribution appelée mesure de Dirac.

2) Soit f une fonction localement intégrable[1] sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors l'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ associe $T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ définit une distribution sur Ω.

Définition 1.4.8. (courant)
On appelle courant de degré p sur V toute forme linéaire continue sur $C_c^\infty(\Omega, \Lambda^p T_x^* V)$. On note $D'^p(\Omega)$ l'ensemble des courants de degré p sur Ω. Localement, un courant T de degré p s'écrit $T = \sum'_{|I|=p} T_I dz_I$, où les T_I sont des distributions.

Remarque 1.4.9. Les courants de degré 0 sont des distributions.

1.5 Dérivation d'un courant

Soit M une variété différentiable de dimension n, $\Omega \subset M$ un ouvert et $T \in D'^p(\Omega)$. L'opérateur de différentiation extérieur d défini sur les formes différentielles s'étend aux courants de la manière suivante :
Si $\varphi \in D^{n-p-1}(\Omega)$, alors $\langle dT, \varphi \rangle = (-1)^{p+1} \langle T, d\varphi \rangle$ et vérifie la propriété $d^2 = 0$.

Définition 1.5.1.
Un courant $T \in D'^p(\Omega)$ est dit d-fermé si $dT = 0$ et d-exact si $T = dS$; où $S \in D'^{p-1}(\Omega)$.
Ainsi, on définit les sous espaces vectoriels de $D'^p(\Omega)$ suivants :

$$Z^p_{cour}(\Omega) := \{T \in D'^p(\Omega) | dT = 0\},$$

l'ensemble des courants de degré p définis sur Ω qui sont d-fermés et

$$B^p_{cour}(\Omega) := \{dS \text{ où } S \in D'^{p-1}(\Omega)\},$$

celui des courants d-exacts.
Puisque $d^2 = 0$, on a aussi $B^p_{cour}(\Omega) \subset Z^p_{cour}(\Omega)$. Le groupe quotient

$$H^p_{cour}(\Omega) := \frac{Z^p_{cour}(\Omega)}{B^p_{cour}(\Omega)}$$

est appelé $p^{ième}$ groupe de cohomologie de De Rham pour les courants définis sur Ω.

1.6 Courant prolongeable

Soit M une variété différentiable de dimension n et de classe C^k et soit $\Omega \subset M$ un ouvert. Un courant T de degré p défini sur Ω est dit prolongeable, si T est la restriction à Ω d' un

1. Une fonction à valeur complexe sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact de Ω est intégrable au sens de Lebesgue.

courant $\check{\mathrm{T}}$ défini sur M. Notons $\check{\mathrm{D}}'^{p}(\Omega)$: l'espace des courants de degré p définis sur Ω et prolongeables. On peut définir :

$$Z^p(\Omega) := \{\check{\mathrm{T}} \in \check{\mathrm{D}}'^{p}(\Omega) | d\check{\mathrm{T}} = 0\},$$

l'ensemble des courants définis sur Ω prolongeables d-fermés

$$B^p(\Omega) := \{d\check{\mathrm{S}} \text{ où } \check{\mathrm{S}} \in \check{\mathrm{D}}'^{p-1}(\Omega)\},$$

l'espace des courants prolongeables définis sur Ω qui sont d-exacts. Puisque $d^2 = 0$, on a $B^p(\Omega) \subset Z^p(\Omega)$ et par suite le groupe quotient

$$\check{H}^p(\Omega) := \frac{Z^p(\Omega)}{B^p(\Omega)}$$

est appelé $p^{i\grave{e}me}$ groupe de cohomologie de De Rham des courants prolongeables définis sur Ω.

Définition 1.6.1.
Soit $T \in D'^{p}(M)$. On dit que T est nul sur M si $\langle T,\varphi\rangle = 0$ pour toute $n-p$-forme différentielle φ à support compact sur M . On appelle support de T noté $Supp(T)$, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nul.

1.7 Structure complexe

Soit M une variété analytique complexe de dimension n. On va montrer que pour tout $z \in M$, l'espace T_zM possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
Supposons $M = \mathbb{C}^n$. Comme variété C^∞, M s'identifie à $\mathbb{R}^{2n}$ par $(z_1,...,z_n) \rightsquigarrow (x_1,y_1,...,x_n,y_n)$. Pour tout $z \in M$, on note T_zM l'espace tangent à M en z. Donc $T_z\mathbb{C}^n = T_z\mathbb{R}^{2n}$ en reprenant l'identification de $\mathbb{C}^n$ avec $\mathbb{R}^{2n}$. On veut définir une structure de $T_z\mathbb{C}^n$.
Explicitons un peu cette construction.

Notons

$$J \ : T_z\mathbb{C}^n \to T_z\mathbb{C}^n$$

l'application linéaire définie par :

$$J(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial y_j} \text{ et } J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On a

$$J \circ J(\frac{\partial}{\partial x_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \text{ et } J \circ J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Par conséquent, $J^2 = -id_{T_z\mathbb{C}^n}$.
L'endomorphisme J est appelé structure de $T_z\mathbb{C}^n$.
Considérons le complexifié $T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$ de $T_z\mathbb{C}^n$, c'est à dire

$$T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n := T_z\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} := T_z\mathbb{C}^n \oplus iT_z\mathbb{C}^n.$$

On peut étendre l'opérateur J de $T_z\mathbb{C}^n$ en un endomorphisme $J^{\mathbb{C}}$ sur $T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$ de la manière suivante :

$$J^{\mathbb{C}} : T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n \to T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n \text{ qui à tout } u \otimes \alpha \text{ associe } J^{\mathbb{C}}(u \otimes \alpha) = J(u) \otimes \alpha$$

où $u \in T_z\mathbb{C}^n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

On a aussi $(J^{\mathbb{C}})^2(u \otimes \alpha) = J^2(u) \otimes \alpha = -u \otimes \alpha$. Puisque $u \otimes \alpha$ est quelconque dans $T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n$ donc $(J^{\mathbb{C}})^2 = -id_{T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n}$.
Posons
$$T_{z1,0}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n := \{v \in T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n : J^{\mathbb{C}}(v) = iv\}$$
le sous-espace des vecteurs tangents de type (1,0) et
$$T_{z0,1}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n := \{v \in T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n : J^{\mathbb{C}}(v) = -iv\}$$
celui des vecteurs tangents de type (0,1).
Les espaces
$$\Lambda^p T_{1,0}M := \bigcup_{z\in M} \Lambda^p T_{z1,0}M \text{ et } \Lambda^q T_{0,1}M := \bigcup_{z\in M} \Lambda^q T_{z0,1}M$$
sont respectivement appelés fibrés de p-formes extérieures sur $T_{1,0}M$ et des q-formes extérieures sur $T_{0,1}M$.
Ainsi on pose
$$\Lambda^{(p,q)}T_zM^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T_{z1,0}M \oplus \Lambda^q T_{z0,1}M.$$

Considérons l'espace cotangent $T_z^*\mathbb{C}^n$ de $T_z\mathbb{C}^n$. On définit un endomorphisme J^* par dualité sur $T_z^*\mathbb{C}^n$ par :
$$\text{si } u \in T^*\mathbb{C}^n, \langle J^*u, v\rangle = \langle u, Jv\rangle$$
avec $v \in T_p\mathbb{C}^n$.
On a aussi
$$J^* \circ J^* = -id_{T_z^*\mathbb{C}^n}.$$

En effet,
$$\langle (J^*u)^2, v\rangle = \langle J^*u, Jv\rangle = \langle u, J^2v\rangle = -\langle u, v\rangle.$$
Dans la suite, on va imposer à l'endomorphisme J défini sur $T_z^{\mathbb{R}}M$ d'être $\mathbb{C}$-linéaire.
Considérons le complexifié
$$T_z^{\mathbb{C}*}\mathbb{C}^n = T_z^*\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_z^*\mathbb{C}^n \oplus iT_z^*\mathbb{C}^n.$$
L'opérateur J ainsi défini s'étend en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $J^{\mathbb{C}}$ sur $T_z^{\mathbb{R}}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ comme suit :
$$J^{\mathbb{C}}(u \otimes \alpha) = (Ju) \otimes \alpha$$
où
$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, u \in T_z^{\mathbb{R}}M, u \otimes \alpha = \alpha_1 u + i\alpha_2 u$$
et
$$J^{\mathbb{C}}(u \otimes \alpha) = \alpha_1 Ju + i\alpha_2 Ju.$$
Vérifions que $J^{\mathbb{C}} \circ J^{\mathbb{C}} = -id_{T_z^{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C}}$.
Soit $(u \otimes \alpha) \in T^{\mathbb{R}}{}_zM \otimes \mathbb{C}$.

On a

$$\begin{aligned}J^{\mathbb{C}}(J^{\mathbb{C}}(u\otimes\alpha)) &= J^{\mathbb{C}}(\alpha_1 Ju + i\alpha_2 Ju)\\ &= J^{\mathbb{C}}(\alpha_1 Ju) + iJ^{\mathbb{C}}(\alpha_2 Ju)\\ &= \alpha_1 J^{\mathbb{C}}(Ju) + i\alpha_2 J^{\mathbb{C}}(Ju)\\ &= \alpha_1 J^2 u + i\alpha_2 J^2 u = -\alpha_1 u - i\alpha_2 u\\ &= -(\alpha_1 u + i\alpha_2 u) = -(u\otimes\alpha).\end{aligned}$$

donc $J^{\mathbb{C}}\circ J^{\mathbb{C}} = -id_{T_z^{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C}}$ puisque $(u\otimes\alpha)$ est quelconque dans $T_z^{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C}$.
On pose

$$T_z^{1,0}M := \{u\in T_z^{\mathbb{C}}M | Ju = iu\}$$

l'espace tangent holomorphe en z de M et

$$T_z^{0,1}M := \{u\in T_z^{\mathbb{C}}M | Ju = -iu\}$$

l'espace tangent antiholomorphe en z de M.
Les unions

$$T^{1,0}M := \bigcup_{z\in M} T_z^{1,0}M \text{ et } T^{0,1}M := \bigcup_{z\in M} T_z^{0,1}M$$

sont respectivement appelées fibré tangent holomorphe et fibré tangent antiholomorphe.
Par dualité, on a

$$T^{*1,0}M := \bigcup_{z\in M} T_z^{*1,0}M \text{ et } T^{*0,1}M := \bigcup_{z\in M} T_z^{*0,1}M,$$

et sont respectivement appelés fibré cotangent holomorphe et antiholomorphe.
Notations : Pour $p,q\in\mathbb{N}$ tels que $1\leq p,q\leq n$ où n est la dimension de la variété M, notons respectivement par

$$\Lambda^p T_z^{*1,0}M \text{ et } \Lambda^q T_z^{*0,1}M$$

les espaces vectoriels des p-formes alternées sur $T^{*1,0}M$ et des q-formes alternées sur $T^{*0,1}M$.

Définition 1.7.1.
L'espace

$$\Lambda^{(p,q)}TM^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T_{1,0}M \oplus \Lambda^q T_{0,1}M$$

est appelé fibré des (p,q)-formes extérieures sur le fibré tangent complexifié $TM^{\mathbb{C}} := \bigcup\limits_{z\in M} T_z M^{\mathbb{C}}$.

1.8 (p,q)-formes différentielles et courants

Définition 1.8.1.
Soit $\Omega\subset M$ un ouvert. On appelle forme différentielle de bidegré (p,q) et de classe $C^k (k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ sur Ω, toute section de classe C^k définie sur Ω du fibré $\Lambda^{(p,q)}TM^{\mathbb{C}}$. On note $C^k_{(p,q)}$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur M.
Dans un système de coordonnées locales $(z_1,...,z_n)$, une (p,q)-forme u s'écrit :

$u(z) = \sum\limits'_{|I|=p,|J|=q} u_{I,J}dz_I\wedge d\bar{z}_J$ où les $u_{I,J}$ sont des fonctions de classe C^k.
$I=(i_1,...,i_p)$ et $J=(j_1,...,j_q)$, $dz_I = dz_1\wedge ...\wedge dz_p$ et $d\bar{z} = d\bar{z}_1\wedge ...\wedge d\bar{z}_q$.
$|I|$ et $|J|$ sont respectivement le nombre d'éléments de I et J.
La (p,q)-forme est à support compact si les u_{IJ} sont à support compact dans un ouvert local Ω. On note $D^k_{p,q}(M)$ le sous espace vectoriel de $C^k_{(p,q)}(M)$ formé par des (p,q)-formes à support compact dans M.

Définition 1.8.2. (Espace des (p,q)-courants)

Soit M une variété analytique complexe de dimension n et Ω un ouvert de M. Soit L un compact dans Ω et $k \in \mathbb{N}$. On associe localement une semi-norme P_L^k définie par :

$$P_L^k(\psi) = \sup_{z \in L}\ \max_{|I|=p \quad |J|=q \quad |\alpha|+|\beta| \leq k} |D^{\alpha\bar{\beta}}\psi_{IJ}(z)|$$

où $\psi \in C^k_{(p,q)}(M)$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\beta = (\beta_1 + ... + \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_n$,

$$D^{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial_{z_1}^{\alpha_1}....\partial_{z_n}^{\alpha_n}.\partial_{\bar{z}_1}^{\beta_1}...\partial_{\bar{z}_n}^{\beta_n}}.$$

Si K est un compact de M, on note

$$D^{k,K}_{(p,q)}(M) := \{\psi \in C^k_{(p,q)}(M) |\, \mathrm{supp}(\varphi) \subset K\}$$

et

$$D^k_{(p,q)}(M) := \bigcup_{K \text{ compact de } M} D^{k,K}_{(p,q)}(M).$$

Définition 1.8.3 ((p,q)-courant)**.**
Un courant T d'ordre k et de bidimension (p,q) ou de bidegré $(n-p,n-q)$ sur Ω est une forme linéaire sur $D^k_{(p,q)}(\Omega)$ telle que sa restriction à chaque sous-espace $D^{k,K}_{(p,q)}(\Omega)$ est continue pour tout compact $K \subset \Omega$. On notera $D'^k_{(p,q)}(\Omega)$ l'espace des courants d'ordre k et de bidimension (p,q) sur l'ouvert $\Omega \subset M$ et $D'_{(p,q)}(\Omega)$ celui des courants d'ordre ∞ et de bidimension (p,q) sur Ω.
Localement un courant $T \in D'^k_{(p,q)}(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$T = \sum_{|I|=p,|J|=q}' T_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

où les $T_{I,J}$ sont des distributions.
Pour $p = q = 0$, les courants de bidimension (0,0) sont des distributions.

1.9 Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$

Soient M une variété complexe et $\Omega \subset M$ un ouvert. Si f est une fonction de classe C^1 sur un voisinage d'un point $a \in \Omega$, on a localement

$$df_a = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)dy_j$$

Posons

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j});$$

$$dz_j = dx_j + idy_j \text{ et } d\bar{z}_j = dx_j - idy_j.$$

Cette transformation permet d'écrire df_a sous la forme ci-dessous

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j.$$

En effet, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y_j} = -i(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}),\ dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + id\bar{z}_j) \text{ et } dy_j = -\frac{i}{2}(dz_j - id\bar{z}_j).$$

$$\begin{aligned}
df_a &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j})f(a)(dz_j + d\bar{z}_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} -i(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j})f(a)(dz_j - d\bar{z}_j) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial z_j}dz_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial z_j}d\bar{z}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}_j}dz_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial z_j}dz_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial z_j}d\bar{z}_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}_j}dz_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial z_j}dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j
\end{aligned}$$

En posant $\partial f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j$ et $\bar{\partial} f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j$, on obtient :

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

La décomposition $d = \partial + \bar{\partial}$ se généralise sur toutes les formes différentielles.
En effet, si

$w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}' w_{I,J}(z)dz_I \wedge d\bar{z}_J$ est une (p,q)-forme différentielle de classe C^1

$$\begin{aligned}
dw(z) &= \sum_{|I|=p,|J|=q}' dw_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q}' (\partial w_{I,J}(z) + \bar{\partial} w_{I,J}(z)) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.
\end{aligned}$$

On posera

$$\partial w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}' \partial w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

et

$$\bar{\partial} w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}' \bar{\partial} w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants

$$\partial\ : C_s^{p,q}(\Omega,\mathbb{C}) \longrightarrow C_{s-1}^{p+1,q}(\Omega,\mathbb{C}) \text{ et } \bar{\partial}\ : C_s^{p,q}(\Omega,\mathbb{C}) \longrightarrow C_{s-1}^{p,q+1}(\Omega,\mathbb{C}).$$

Propriétés 1.9.1.

1) $d = \partial + \bar{\partial}$.

2) $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0.$

Démonstration.
La propriété a) découle de la définition des opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$.
Soit $\omega \in C^s_{p,q}$. Puisque $d \circ d = d^2 = 0$ et $d = \partial + \bar{\partial}$.
On a

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\omega \\ &= [(\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial + \bar{\partial})](\omega) \\ &= (\partial \circ \partial)(\omega) + (\partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial)(\omega) + (\bar{\partial} \circ \bar{\partial})(\omega). \end{aligned}$$

Or $(\partial \circ \partial)(\omega)$ est de type $(p+2,q)$;
$(\partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial)(\omega)$ est de $(p+1,q+1)$
et $(\bar{\partial} \circ \bar{\partial})(\omega)$ est de type $(p,q+2)$.
Par conséquent chacun de ces termes est nul par souci de bidegrés. $\square$

Définition 1.9.2.
Soient M une variété analytique complexe et Ω un ouvert de M.
a) On dit qu'une forme différentielle w de type (p,q) de classe C^k définie sur Ω est $\bar{\partial}$-fermée si $\bar{\partial} w = 0$.
On note

$$Z^k_{p,q}(\Omega) := \{w \in C^k_{p,q}(\Omega) | \bar{\partial} w = 0\}$$

c'est un sous groupe de $C^k_{p,q}(\Omega)$.
b) On dit qu'une (p,q) forme différentielle w de classe C^k définie sur un ouvert Ω d'une variété analytique complexe M est $\bar{\partial}$-exacte s'il existe une $(p,q-1)$ forme différentielle u de classe C^k telle que $\bar{\partial} u = w$.
On note

$$B^k_{p,q}(\Omega) := \{w \in C^k_{p,q}(\Omega) | \exists u \in C^k_{p,q-1} \text{ avec } \bar{\partial} u = w\}.$$

Puisque $\bar{\partial}^2 = 0$ donc $B^k_{p,q}(\Omega) \subset Z^k_{p,q}(\Omega)$.
L'espace vectoriel

$$H^k_{p,q}(\Omega) := \frac{Z^k_{p,q}(\Omega)}{B^k_{p,q}(\Omega)}$$

est appelé le (p,q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe C^k définies sur M.
L'opérateur $\bar{\partial}$ défini pour les formes différentielles s'étend pour les courants par dualité

$$\bar{\partial} : \mathcal{D}'^s_{p,q}(\Omega) \to \mathcal{D}'^{s-1}_{p,q+1}(\Omega).$$

Si T est un (p,q) courant sur M, $\bar{\partial} T$ est le $(p,q+1)$ courant sur M défini par
$\langle \bar{\partial} T, \varphi \rangle = (-1)^{p+q+1} \langle T, \bar{\partial} \varphi \rangle$ pour toute forme différentielle φ de bidegré $(n-p,n-q-1)$ à support compact.

Définition 1.9.3.
On dit qu'un courant T de bidimension (p,q) et d'ordre k défini sur un ouvert Ω de M est

$\bar{\partial}$-fermé si $\bar{\partial}T = 0$.
On note

$$Z_{cour}^{(p,q),k}(\Omega) := \{T \in \mathcal{D}'^{k}_{p,q}(\Omega) | \bar{\partial}T = 0\},$$

l'ensemble des (p,q) courants d'ordre k qui sont $\bar{\partial}$-fermés sur Ω.

Définition 1.9.4.
On dit qu'un courant T de bidimension (p,q) et d'ordre k défini sur un ouvert Ω de M est $\bar{\partial}$-exact s'il existe un courant S d'ordre k et de bidimension $(p,q-1)$ tel que $\bar{\partial}S = T$.
On note

$$B_{cour}^{(p,q),k}(\Omega) := \{\bar{\partial}S \ , \ S \in \mathcal{D}'^{k}_{p,q-1}(\Omega)\},$$

l'espace des courants de bidimension (p,q) et d'ordre k qui sont $\bar{\partial}$-exacts sur Ω.

Puisque $\bar{\partial}^2 = 0$ donc $B_{cour}^{(p,q),k}(\Omega) \subset Z_{cour}^{(p,q),k}(\Omega)$. L'espace vectoriel

$$H_{cour}^{(p,q),k}(\Omega) := \frac{Z_{cour}^{(p,q),k}(\Omega)}{B_{cour}^{(p,q),k}(\Omega)}$$

est appelé le (p,q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des courants définis sur Ω.

Théorème 1.9.5. (voir[3])

Soit M une variété différentiable, de dimension n, $\Omega \subset M$ un domaine et T un courant prolongeable défini sur Ω. Si $\dot{\bar{\Omega}} = \Omega$ alors $\check{D}^p(\Omega) = [D^{n-p}(\bar{\Omega})]'$ dual topologique.
Ce qui signifie que si $\dot{\bar{\Omega}} = \Omega$ alors les courants prolongeables de degré p sur M sont égaux au dual topologique des $(n-p)$-formes différentielles de classe C^∞ sur M à support sur $\bar{\Omega}$.

Chapitre 2

Résolution de l'équation $du = T$

Définition 2.0.1.
Un complexe de groupes abéliens $(K^\bullet,d)$ est une suite

$$K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \xrightarrow{d^2} K^3 \to ... \to K^q \xrightarrow{d^q} K^{q+1} \to ...$$

où les K^q sont des groupes abéliens et les d^q des homomorphismes de groupes tels que $d^{q+1} \circ d^q = 0$.
Par convention on pose

$$d^{-1} = \{0_K\}.$$

Ainsi, on a

$$kerd^q = \{k \in K^q | d^q(k) = 0\} \text{ et } Imd^{q-1} = \{k \in K^{q-1} \exists k^{'} \in K^q \text{ avec } d^{q-1}(k) = k^{'}\}.$$

On a $Imd^{q-1} \subset \ker d^q$.

En effet soit $k \in Imd^{q-1}$.
$k \in Imd^{q-1} \Rightarrow \exists k^{'} \in K^{q-1} : k = d^{q-1}(k^{'}) \Rightarrow d^q(k) = d^q(d^{q-1}(k^{'})) = 0$.
Donc $d^q(k) = 0$; d'où $k \in \ker d^q$. Par conséquent, $Imd^{q-1} \subset \ker d^q$ puisque k est quelconque dans Imd^{q-1}. Le groupe quotient

$$H^q(K^\bullet) := \frac{\ker d^q}{Imd^{q-1}}$$

est appelé $q^{iéme}$ groupe de cohomologie associé au complexe de groupe abélien $K^\bullet$.

Définition 2.0.2.
Un morphisme φ du complexe $(K^\bullet,d)$ dans le complexe $(L^\bullet,\delta)$ est une suite $(\varphi^q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'homomorphismes de groupes $\varphi^q : K^q \to L^q$ satisfaisant les relations de commutation suivantes :

$$\varphi^{q+1} \circ d^q = \delta^q \circ \varphi^q,$$

$$\varphi^q(\ker d^q) \subset \ker \delta^q \text{ et } \varphi^q(Imd^{q-1}) \subset Im\delta^{q-1}.$$

Remarque 2.0.3.
Le morphisme φ induit en cohomologie une application $\tilde{\varphi} : H(K^\bullet) \to H(L^\bullet)$ définie par $\tilde{\varphi^q} : H^q(K^\bullet) \to H^q(L^\bullet)$; $\tilde{\varphi^q}(k + Imd^{q-1}) = \varphi^q(k) + Im\delta^{q-1}$ où $k \in \ker d^q$.

Définition 2.0.4.
Une suite courte de complexe de groupes $0 \to K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \to 0$ est dite exacte si φ est injective, ψ est surjective et $Im\varphi = ker\psi$.

Lemme 2.0.5. (voir[6])

Soit $0 \to K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \to 0$ une suite exacte courte de complexes de groupes abéliens. Il existe alors un homomorphisme de connexion

$$v^q : H^q(M^\bullet) \to H^{q+1}(K^\bullet)$$

tel que la suite longue de cohomologie

$$0 \to H^0(K^\bullet) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^0} H^0(L^\bullet) \xrightarrow{\tilde{\psi}^0} H^0(M^\bullet) \xrightarrow{v^0} H^1(K^\bullet) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^1} H^1(L^\bullet) \xrightarrow{\tilde{\psi}^1} H^1(M^\bullet) \xrightarrow{v^1} H^2(K^\bullet) \to ...$$

soit exacte.

Démonstration. Commençons par construire l'homomorphisme de connexion v.
Considérons le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \vdots \arrow[r, "\cdots"] \arrow[d, "d^{q-1}"] & \vdots \arrow[r, "\cdots"] \arrow[d, "\delta^{q-1}"] & \vdots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^{q-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^q \arrow[r, "\varphi^q"] \arrow[d, "d^q"] & L^q \arrow[r, "\psi^q"] \arrow[d, "\delta^q"] & M^q \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{q+1} \arrow[r, "\varphi^{q+1}"] \arrow[d, "d^{q+1}"] & L^{q+1} \arrow[r, "\psi^{q+1}"] \arrow[d, "\delta^{q+1}"] & M^{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{q+2} \arrow[r, "\varphi^{q+2}"] \arrow[d, "\vdots"] & L^{q+2} \arrow[r, "\psi^{q+2}"] \arrow[d, "\vdots"] & M^{q+2} \arrow[r] \arrow[d, "\vdots"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \vdots \arrow[r] & \vdots \arrow[r] & \vdots \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $m \in ker\gamma^q$ représente l'élément $[m]$ de $H^q(M^\bullet)$, alors $v^q([m]) = [k] \in H^{q+1}(K^\bullet)$ est la classe de cohomologie obtenue par la construction suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & l \in L^q \arrow[r, "\psi^q"] \arrow[d, "\delta^q"] & m \in M^q \arrow[d, "\gamma^q"] \\
k \in K^{q+1} \arrow[r, "\varphi^{q+1}"] & \delta^q l \in L^{q+1} \arrow[r, "\psi^{q+1}"] & 0 \in M^{q+1}
\end{tikzcd}$$

L'élément l est choisi tel que $\psi^q(l) = m$, ce qui est possible, car ψ^q est surjective. Comme $\psi^{q+1}(\delta^q l) = \gamma^q(m) = 0$, alors il existe un unique élément $k \in K^{k+1}$ tel que $\varphi^{q+1}(k) = \delta^q l$ à cause de l'exactitude de la ligne $q+1$. L'élément k est en fait contenu dans $kerd^{q+1}$.
En effet, $\varphi^{q+2}(d^{q+1}k) = \delta^{q+1}(\varphi^{q+1}k) = \delta^{q+1}(\delta^q l) = 0$. Donc $\varphi^{q+2}(d^{q+1}k) = 0$, par conséquent $d^{q+1}k = 0$, car φ^{q+2} est injective. Donc $k \in kerd^{q+1}$.
L'application v^q sera bien définie si l'on prouve que la classe de cohomologie $[k]$ ne dépend que de $[m]$ et non du représentant m choisi. Soit m' un autre représentant de m modulo $Im\gamma^{q-1}$. Donc $[m] = [m']$; c'est-à-dire $= m + \gamma^{q-1}\mu$ où $\mu \in M^{q-1}$.
Supposons $v^q([m']) = k''$.

On veut montrer que $[k] = [k'']$, c'est-à-dire $k'' - k \in Imd^q$. Grâce à la surjectivité de ψ^{q-1}, il existe $\lambda \in L^{q-1}$ tel que $\psi^{q-1}(\lambda) = \mu$.
Soit $l^{'} \in L^q$ tel que $\psi^q(l^{'}) = \psi^q(l + \delta^{q-1}\lambda)$. Puisque la ligne q est exacte, on a
$l^{'} = l + \delta^{q-1}\lambda + \varphi^q(k^{'})$. En appliquant δ^q à l' et en utilisant le fait que $\delta^q((\delta^{q-1})(\lambda)) = 0$ et en utilisant l'injectivité de φ^{q+1}, on obtient $k^{''} = k + d^q k^{'}$ a la même classe de cohomologie que k.
Montrons l'exactitude de la suite longue de cohomologie.
Prouvons tout d'abord que $\ker v^q = Im\tilde{\psi}^q$.
Soit $[m] \in Im\tilde{\psi}^q$.
$[m] \in Im\tilde{\psi}^q$, on peut choisir m tel que $m = \psi^q(l)$ avec $\delta^q l = 0$,il résulte de la définition de v^q que $v^q([m]) = 0$. Donc $[m] \in \ker v^q$. Par suite $Im\tilde{\psi}^q \subset \ker v^q$.
Réciproquement soit $[m] \in \ker v^q$.
$[m] \in \ker v^q \Rightarrow v^q([m]) = [k] = 0$. Cela signifie que $k = d^q k^{'}$.
Donc $\delta^q l = \varphi^{k+1}(k) = \varphi^{k+1}(d^q(k^{'})) = \delta^q(\varphi^q(k^{'}))$. comme $m = \psi^q(l)$ alors $l - \varphi^q(k^{'}) \in \ker \delta^q(k^{'})$ et $m = \psi^q(l - \varphi^q(k))$. Donc $[m] \in Im\tilde{\psi}^q$. Il suit alors que $\ker v^q \subset Im\tilde{\psi}^q$.
Montrons maintenant que $Imv^q = \ker \tilde{\varphi}^{q+1}$.
Soit $[m]$ un élément de $\ker \tilde{\varphi}^{q+1}$. $[m] \in \ker \tilde{\varphi}^{q+1} \Rightarrow \varphi^{q+1}(k) \in Im\delta^q$, il existe donc l tel que $\varphi^{q+1}(k) = \delta^q(l)$. Comme $m = \psi^q(l)$, on a $[k] = v^q([m])$ par définition de v^q. Donc $[k] \in Imv^q$. D'où $\ker \tilde{\varphi}^{q+1} \subset Imv^q$. D'autre part, on a $Imv^q \subset \ker \tilde{\varphi}^{q+1}$ par définition de v^q. Ainsi, on a $\ker \tilde{\varphi}^{q+1} = Imv^q$. □

Proposition 2.0.1. (voir [2])
Soit M une variété différentiable de dimension n. Alors on a

1. $H^p(M) = H_c^p(M) = 0$ pour $p < 0$ et $p > n$.
2. Si M est une variété connexe, l'espace $H^0(M)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.
3. Si M est une variété connexe non compacte on a $H_c^0(M) = 0$.

Démonstration.

1. On a $Z^p(M) = Z_c^p(M) = 0$ pour $p < 0$ et $p > n$. Donc $H^p(M) = H_c^p(M) = 0$.
2. Si M est une variété connexe, on a $B^0(M) = 0$ et lorsque M est connexe, une fonction f a une différentielle nulle si et seulement si elle est constante. Par conséquent, $H^0(M)$ est isomorphe à l'espace des fonctions constantes sur M.
3. Si M est une variété connexe non compacte, une fonction constante non nulle n'a pas un support compact, par conséquent $Z_c^0(M) = 0$.

□

Considérons maintenant que $M = \mathbb{R}^n$,

$$\Omega = B(0,1) =: \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j^2 < 1 \right\}$$

Le bord $b\Omega$ de Ω est la sphère

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1 \right\}$$

Théorème 2.0.6. (voir[2])
$H^p(S^n) = 0$ pour $p \neq 0$ et $p \neq n$
$H^0(S^0) = \mathbb{R}^n$
$H^0(S^{n-1}) = H^n(S^n) = \mathbb{R}$ pour $n \geq 1$.
La preuve repose essentiellement sur les groupes de cohomologie relatives de De Rahm.

Théorème 2.0.7. On a $H_c^p(\mathbb{R}^n) = 0$ pour $p \neq n$ et $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

Démonstration.
On a $H_c^p(\mathbb{R}^n) = 0$ pour $p < 0$ et $p > n$ et $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$ d'après la proposition 2.0.1. Soit maintenant N le point $(0,...,0,1)$ de S^n, $n \geq 1$.
L'ouvert $U = S^n - N$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. On déduit alors de la suite exacte
$H^{p-1}(S^n) \to H^{p-1}(N) \to H_c^p(U) \xrightarrow{\chi} H^p(S^n) \to H^p(N)$ que l'homéomorphisme
$\chi : H_c^p(U) \to H^p(S^n)$ est un isomorphisme pour $p \geq 1$. □

Pour plus de détails dans les preuves des propositions et théorèmes ci-dessus voir [2] pages 181 et 183.

Théorème 2.0.8. [Généralisation du lemme de Poincaré]
Soit U une variété différentiable telle qu'il existe une fonction différentiable $\Psi : U \times I_\varepsilon \longrightarrow U$, où $I_\varepsilon = [-\varepsilon,1+\varepsilon]$ de telle sorte que $\Psi(\bullet,1) = id_U$ et $\Psi(u,0) = u_0$ pour tout $u \in U$, $u_0 \in U$ quelconque. Alors $H^p(U,d) = 0$ pour tout $p > 0$.

Pour faire la preuve de ce théorème nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.0.9. Soit M une variété différentiable. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, considérons la suite suivante :

$$\begin{tikzcd}
C^\infty\left(M,\Lambda^{k-1}(M)\right) \arrow[r, "d"] & C^\infty\left(M,\Lambda^{k}(M)\right) \arrow[d, "d"] \\
C^\infty\left(M,\Lambda^{k}(M)\right) \arrow[u, "h_{k-1}"] & C^\infty\left(M,\Lambda^{k+1}(M)\right) \arrow[l, "h_k"]
\end{tikzcd}$$

S'il existe des fonctions linéaires h_j définies comme ci-dessus de telle sorte que $h_k \circ d + d \circ h_{k-1}$ est l'identité sur $C^\infty(M,\Lambda^k(M))$. Alors $H^k(M,d) = 0$; c'est-à-dire toute forme d-fermée est d-exacte.

Démonstration. (du lemme 2.0.9)
Soit $\omega \in C^\infty(M,\Lambda^k(M))$ une k-forme fermée.
Alors $\omega = (k_k \circ d + d \circ h_{k-1})(\omega) = h_k(d\omega) + d(h_{k-1}\omega) = d(h_{k_1}\omega)$. Donc ω est une forme exacte. □

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration. (du théorème 2.0.8)
Nous allons construire h_{k-1} et h_k comme dans le lemme.
Soient donc $\omega = gdx_{i_1} \wedge ... \wedge d_{i_k} \in C^\infty(U,\Lambda^k(U))$ et $y \in U$. Alors on définit h_{k-1} par :

$$h_{k-1}(\omega)(y) = \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t).g \circ \Psi(y,t)dt\right) \mu,$$

où $\mu = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}x_{i_1}dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge ... \wedge dx_k$ et $d\mu = kdx_{x_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

Calculons maintenant chaque terme de la somme de l'hypothèse du lemme :

$$\begin{aligned}
(d \circ h_{k-1})(\omega)(y) &= d\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1}(y,t).g \circ \Psi(y,t)dt\right)\mu \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1}(y,t).g \circ \Psi(y,t)dt\right)dx_j \wedge \mu \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1}(y,t).g \circ \Psi(y,t)dt\right)d\mu \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1}(y,t).\frac{\partial}{\partial x_j}g \circ \Psi(y,t)dt\right)dx_j \wedge \mu \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k}(y,t).\frac{\partial g}{\partial x_j}(\Psi(y,t))dt\right)dx_j \wedge \mu \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1}(y,t).g \circ \Psi(y,t)dt\right)d\mu \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k}(y,t).\frac{\partial g}{\partial x_j}(\Psi(y,t))dt\right)dx_j \wedge d\mu \\
&\quad +k\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k}(y,t).g \circ \Psi(y,t)dt\right)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&(h_j \circ d)(\omega)(y) \\
&\qquad = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}\right) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k}(y,t).g \circ \Psi(y,t)dt\right)(x_j dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_k - dx_j \wedge d\mu)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
&(d \circ h_{k-1} + h_k \circ d)\,(\omega)(y) \\
&\qquad = \left(k \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^{k-1} (y,t).g \circ \Psi(y,t)dt \right) \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \\
&\qquad\quad + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k} (y,t).\frac{\partial g}{\partial x_j}(\Psi(x,t))dt \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \\
&\qquad = \left(\int_0^1 \left(k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t).g \circ \Psi(y,t) + tk\frac{d}{dt} g \circ \Psi(y,t) \right) \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge d \\
&\qquad = \left(\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k} (y,t).g \circ \Psi(y,t) \right) dt \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \\
&\qquad = g(y) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \\
&\qquad = \omega(y).
\end{aligned}
$$

Puisque les h_{k-1} et h_k sont définis pour $k > 0$, par le lemme, on a $H^k(U,d) = 0$ pour tout $k > 0$. □

Corollaire 2.0.10. [lemme de Poincaré]

Soit $B(0,r)$ une boule dans $\mathbb{R}^n$. Alors $H^k(B(0,r),d) = 0$ pour $k > 0$.

Théorème 2.0.11. $\check{H}^p(B(0,r)) = 0$ pour $2 \leq p \leq n-1$.

Pour établir la preuve de ce résultat, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.0.12. $D^p(B(0,r)) \cap kerd = dD^{n-1}(B(0,r))$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

Démonstration. (du lemme)
On utilise les résultats suivants pour faire la preuve du lemme :
$H^p(B(0,r)) = 0$ pour $p \geq 0$
$H^p(S^n) = 0$ pour $p \neq 0$ et $p \neq n$
$H^p_c(\mathbb{R}^n) = 0$ pour $p \neq n$ et $H^n_c(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.
La situation intéressante pour notre problème est quand $n > 2$.
On considère la suite courte suivante :
$0 \to \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n \backslash B(o,r)) \oplus \Lambda^\bullet(\overline{B(o,r)}) \to \Lambda^\bullet(S^{n-1}) \to 0$ où $\bullet = 0,1,...,n$.

On peut écrire en extension :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda^0(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \Lambda^0(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) \oplus \Lambda^0(\overline{B(o,r)}) & \longrightarrow & \Lambda^0(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^1(\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \Lambda^1(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) \oplus \Lambda^1(\overline{B(o,r)}) & \longrightarrow & \Lambda^1(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^n(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \Lambda^n(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) \oplus \Lambda^n(\overline{B(o,r)}) & & \longrightarrow & & 0
\end{array}
$$

Sur le plan cohomologique, la suite courte précédente nous donne la suite longue suivante :
$H^0(\mathbb{R}^n) \to H^0(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) \oplus H^0(\overline{B(o,r)}) \to H^0(S^{n-1}) \to$
$H^1(\mathbb{R}^n) \to H^1(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) \oplus H^1(\overline{B(o,r)}) \to H^1(S^{n-1}) \to ....$
$\to H^{n-1}(\mathbb{R}^n) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) \oplus H^{n-1}(\overline{B(o,r)}) \to H^{n-1}(S^{n-1})$
$\to H^n(\mathbb{R}^n) \to H^n(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) \oplus H^n(\overline{B(o,r)}) \to 0.$
En tenant compte du fait que $H^p(B(o,r)) = 0$ pour $p \geq 1$ et $H^p(S^n) = 0$ pour $p \neq 0$ et $p \neq n$, on obtient :
$H^j(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) = 0$ pour $1 \leq j \leq n-1$.
$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) = \mathbb{R}$ et $H^n(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) = 0$.

Soit $f \in D^p(\overline{B(o,r)}) \cap \ker d$, $[f] \in H^p_c(\mathbb{R}^n) = 0$ pour $p \neq 0$ et pour $1 \leq p \leq n-1$. Il existe une $(p-1)$-forme différentielle g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $dg = f$ et $dg_{|\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(o,r)}} = 0$. Si $p = 1$, alors g est une constante à support compact sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(o,r)}$. IL en résulte que $g = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)$; c'est-à-dire $g \in D^0(\overline{B(o,r)})$ avec $dg = f$.
Si $1 < p \leq n-1 \Rightarrow 0 < p \leq n-2$, on a $H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(o,r)}) = H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus B(o,r)) = 0$. D'après la proposition, il existe donc une $(p-2)$-forme différentielle h de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)$ telle que $dh = g$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,r)}$. Soit $\tilde{h}$ une extension C^∞ de h à $\mathbb{R}^n$,$u = g - d\tilde{h}$ est une $(p-1)$-forme différentiable de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ à support sur $\overline{B(0,r)}$ et $du = f$. □

Établissons maintenant la preuve du théorème.

Démonstration.
Soit $T \in \check{D}^p_{\mathbb{R}^n}(B(0,r)) \cap \ker d$ $2 \leq p \leq n-1$.
Posons $L_T : dD^{n-p}(\overline{B(0,r)}) \to \mathbb{C}$ l'application qui à tout $d\varphi$ associe $\langle T,\varphi \rangle$.
L_T est bien définie, car $dD^{p-1}(\overline{B(0,r)}) = D^p(\overline{B(0,r)}) \cap \ker d$. Si φ et $\varphi^{'}$ sont deux $(n-p)$-formes différentielles telles que $d\varphi = d\varphi^{'}$, alors il existe $\theta \in D^{n-p-1}(\overline{B(0,r)})$ telle que :
$\varphi = \varphi^{'}$ et $lim_j \to +\infty \langle T,d\theta_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle T,\varphi \rangle = \langle T,\varphi^{'} \rangle$; où $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $D^{n-p-1}(B(0,r))$ qui converge uniformément vers θ.
L_T est une application linéaire car $d : D^{n-p}(\overline{B(0,r)}) \to dD^{n-p}(\overline{B(0,r)})$ est une application linéaire continue et surjective entre deux espaces de Fréchet.
Pour voir que L_T est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque d'un ouvert U de

$\mathbb{C}$ par L_T est un ouvert.
En effet, on a $L_T \circ d = T$ d'où ${L_T}^{-1}(U) = d \circ T^{-1}(U)$. Par conséquent, on peut étendre L_T en un opérateur linéaire continu $\tilde{L}_T : D^{n-p+1}(\overline{B(0,r)}) \to \mathbb{C}$, c'est un courant prolongeable et $d\tilde{L}_T = (-1)^{n-p}T$ et $\langle d\tilde{L}_T,\varphi\rangle = (-1)^{n-p}\langle L_T,d\varphi\rangle = (-1)^{n-p}\langle T,\varphi\rangle$. D'où $S = (-1)^{n-p}L_T$ est un courant prolongeable solution de l'équation $du = T$. $\square$

Chapitre 3

Résolution du $\partial\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables.

Définition 3.0.1.
Une fonction ρ de classe C^∞ sur un ouvert $\Omega \subset M$ est dite q-convexe, $1 \leq q \leq n$, si sa forme de Levis

$$L_\rho(z_0)(\epsilon,\epsilon) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z_0)\epsilon_j \bar{\epsilon}_k$$

pour $\epsilon \in T_{z_0} b\Omega$ possède au moins q-valeurs propres strictement positives ; ρ est dite q-concave si $-\rho$ est q-convexe.

Définition 3.0.2.
Un domaine $D \subset M$ est dit à bord strictement q-convexe, respectivement q-concave, si :

i) bD rencontre toutes les composantes connexes de M.

ii) il existe un voisinage U de bD, une fonction $\rho : U \to \mathbb{R}$ $(q+1)$-convexe, respectivement $(q+1)$-concave, tels que

$$D \cap U = \{z \in U | \rho(z) < 0\}.$$

Définition 3.0.3.
Soit M une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset M$ un domaine relativement compact de M. Ω est complètement strictement q-convexe, $0 \leq q \leq n-1$, s'il existe une fonction $(q+1)$-convexe φ définie dans un voisinage $U_{\bar{\Omega}}$ de $\bar{\Omega}$ telle que $\Omega = \{z \in U_{\bar{\Omega}} | \varphi(z) < 0\}$. S'il existe une fonction φ $(q+1)$-convexe dans un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord de Ω, telle que

$$\Omega \cap U_{b\Omega} = \{z \in U_{b\Omega} | \varphi(z) < 0\},$$

on dit alors que Ω est strictement q-convexe.

Proposition 3.0.1. (voir[5])
Soit M une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset M$ un domaine complètement strictement $(q+1)$-convexe, $0 \leq q \leq n-2$, à bord C^∞ lisse. Alors si $f \in D^{p,r}(\bar{\Omega})$ est $\bar{\partial}$-fermée $(0 \leq q \leq n)$, il existe $g \in D^{p,r-1}(\bar{\Omega})$ telle que $\bar{\partial} g = f$ sur M pour $1 \leq r \leq q+1$

Théorème 3.0.4. (voir[5])
Soient M une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset\subset M$ un domaine complètement q-convexe à bord C^∞, lisse $0 \leq q \leq n-1$. Alors si T est un courant de bidegré $(0,r)$, prolongeable, $\bar{\partial}$-fermé sur Ω, il existe un courant de bidegré $(0,r-1)$, prolongeable S sur Ω tel que $\bar{\partial} = T$ sur Ω si $1 \leq n-q \leq r \leq n$.

Démonstration. Considérons l'application

$$\begin{aligned} L_T : \bar{\partial} D^{n,n-r}(\bar{\Omega}) &\to \mathbb{C} \\ \bar{\partial}\varphi &\mapsto \langle T,\varphi\rangle \end{aligned}$$

Si $\psi = \bar{\partial}\varphi$ et $\psi' = \bar{\partial}\varphi'$ sont telles que $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\varphi'$, on a $\bar{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$, et par conséquent, $\varphi - \varphi'$ est une $(n,n-r)$-forme différentielle $\bar{\partial} - fermée$ à support compact dans $\bar{\Omega}$. Pour $n - r \geq 1$, $\varphi - \varphi' = \bar{\partial}\theta$, $\theta \in D^{n,n-r-1}(\bar{\Omega})$(cf. Corollaire 3.0.20).
Puisque $D^{n,n-r-1}(\Omega)$ est dense dans $D^{n,n-r-1}(\bar{\Omega})$, il existe une suite $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in D^{n,n-r-1}(\Omega)$ telle que : $\bar{\partial}\theta_j \to \bar{\partial}\theta$ dans $D^{n,n-r}(\bar{\Omega})$. Alors puis que T est une forme linéaire continue sur $D^{n,n-r}(\bar{\Omega})$ et $\bar{\partial}T = 0$ sur Ω,

$$\langle T,\bar{\partial}\theta\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T,\bar{\partial}\theta_j\rangle = 0$$

Donc $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\varphi'\rangle$. Ainsi $L_T(\bar{\partial}\varphi) = L_T(\bar{\partial}\varphi')$.
Pour $n = r$, si $\bar{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$, $\varphi - \varphi'$ est une n-forme holomorphe à support compact dans $\bar{\Omega}$. D' après le principe de prolongement analytique, $\varphi - \varphi'$ ne peut être que nulle. Donc $\varphi = \varphi'$ et $L_T(\bar{\partial}\varphi) = L_T(\bar{\partial}\varphi')$. L_T est bien définie et est linéaire.
Montrons maintenant que L_T est continue. Pour cela, il suffit de montrer que l'image réciproque par L_T de tout ouvert de $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\bar{\partial}D^{n,n-r}(\bar{\Omega})$. Par définition de L_T, on a $L_T \circ \bar{\partial} = T$. Par ailleurs, T est continu et $\bar{\partial} : D^{n,n-r}(\bar{\Omega}) \to \bar{\partial}D^{n,n-r}(\bar{\Omega})$ est une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Fréchet donc ouverte. En effet d'après le corollaire 3.0.20,

$$\bar{\partial}D^{n,n-r}(\bar{\Omega}) = \{f \in D^{n,n-r+1}(\bar{\Omega}) | \int_M f \wedge g = 0, \forall g \in Z^{0,r-1}(M)\},$$

ce qui implique que $\bar{\partial}D^{n,n-r}(\bar{\Omega}) \subset D^{n,n-r+1}(\bar{\Omega})$ est fermé ; c'est donc un espace de Fréchet. Par conséquent si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $L_T^{-1}(U) = \bar{\partial}(T^{-1}(U))$ est un ouvert de $\bar{\partial}D^{n,n-r}(\bar{\Omega})$. On peut donc étendre L_T en une application $\tilde{L}_T : D^{n,n-r}(\bar{\Omega}) \to \mathbb{C}$ qui est linéaire et continue. $\tilde{L}_T$ appartient au dual topologique de $D^{n,n-r+1}(\bar{\Omega})$ et peut être identifié à un courant prolongeable défini sur Ω.

$$(-1)^r \langle \bar{\partial}\tilde{L}_T,\varphi\rangle = \langle \tilde{L}_T,\bar{\partial}\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle, \ \forall\varphi \in D^{n,n-r+1}(\bar{\Omega}).$$

Donc $T = \bar{\partial}((-1)^r\tilde{L}_T)$. $(-1)^r\tilde{L}_T$ est solution de $\bar{\partial}S = T$ et est un courant prolongeable. □

En tenant compte du théorème 3.0.21 et des résultats classiques de résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables , on a le théorème suivant :

Théorème 3.0.5.
Soit T un (p,q)-courant prolongeable défini sur la boule euclidienne
$B(0,r) \subset \mathbb{C}^n$. Supposons que $dT = 0$; $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$. Il existe alors un $(p-1,q-1)$-courant S défini sur $B(0,r)$, prolongeable tel que $\partial\bar{\partial}S = T$
pour $2 \leq p + q \leq 2n - 1$.

Démonstration.
Soit T un (p,q)-courant, $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$, d-fermé défini sur $B(0,r)$ et prolongeable avec $2 \leq p + q \leq 2n - 1$.
Puisque d'après le théorème 2.0.15 $\check{H}^{p+q}(B(0,r)) = 0$, il existe donc un $(p + q - 1)$-courant prolongeable h défini su $B(0,r)$ tel que $dh = T$
Comme h est un $(p + q - 1)$-courant, il se décompose en un $(p - 1,q)$-courant h_1 et en un $(p,q - 1)$-courant h_2. Ainsi on a $dh = d(h_1 + h_2) = dh_1 + dh_2 = T$.

Puisque $d = \partial + \bar{\partial}$, on a pour des raisons de bidegré $\partial h_2 = 0$ et $\bar{\partial} h_1 = 0$, $h_1 = \bar{\partial} u_1$ et $h_2 = \partial u_2$ avec u_1 et u_2 des courants prolongeables définis sur $B(0,r)$.
On a $T = dh_1 + dh_2 = (\partial + \bar{\partial})h_1 + (\partial + \bar{\partial})h_2 = \partial h_1 + \bar{\partial} h_1 + \partial h_2 + \bar{\partial} h_2 = \partial h_1 + \bar{\partial} h_2$ puisque $\partial h_2 = 0$ et $\bar{\partial} h_1 = 0$. Donc $T = \partial h_1 + \bar{\partial} h_2$. En remplaçant h_1 et h_2 par $\bar{\partial} u_1$ et ∂u_2, on obtient $T = \partial \bar{\partial} u_1 + \bar{\partial} \partial u_2 = \partial \bar{\partial} u_1 - \partial \bar{\partial} u_2 = \partial \bar{\partial}(u_1 - u_2)$. En posant $S = u_1 - u_2$ qui est un $(p-1,q-1)$-courant prolongeable défini sur $B(0,r)$, on obtient $T = \partial \bar{\partial} S$. □

Conclusion

Ce travail de mémoire de master porte sur un article de Mamadou Eramane BODIAN, Dian DIALLO et Marie Salomon SAMBOU intitulé "résolution du $\partial\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis sur la boule euclidienne de $\mathbb{C}^n$."
Soit T un (p,q)-courant prolongeable défini sur la boule euclidienne $B(0,r) \subset \mathbb{C}^n$.
Supposons que $dT = 0$; $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$; il existe alors un $(p-1,q-1)$-courant S défini sur $B(0,r)$, prolongeable tel que $\partial\bar{\partial}S = T$ pour $2 \leq p+q \leq 2n-1$.
On note $D'^{p,q}(\Omega)$ et $\check{D}'^{p,q}(\Omega)$ les espaces respectifs des (p,q)-courants définis sur Ω et des (p,q)-courants définis sur Ω et prolongeables.
Dans leur article, ils cherchent à trouver un courant prolongeable S vérifiant l'équation $\partial\bar{\partial}S = T$.
La résolution du $\partial\bar{\partial}$ peut s'appliquer aux formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants. En effet, d'après [4], toute forme différentielle ayant une valeur au bord au sens des courants est un courant prolongeable.

Bibliographie

[1] H. BREZIS : Analyse fonctionnelle. MASSON Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo 1987. 2^e tirage.

[2] C. GODBILLON : Éléments de topologie algébrique, Hermann Paris, 1971.

[3] A. MARTINEAU : Distributions et valeurs au bord de fonctions holomorphes. Strasbourg RCP 25 (1966).

[4] S. LOJACIEWIECZ, G. TOMASSINI : Valeurs au bord des formes holomorphes, in Several Complex Variables (P. Scuola. Norm. Sup. Pisa,éd), Cortona, 197677, 1978, p. $222 - 246$.

[5] M. S. SAMBOU : Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables. Math. Nachrichten 235 (2002), 179-190.

[6] C. LAURENT-THIEBAUT : Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables, Inter-Éditions et CNRS Éditions, 1997.