UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Algèbre

Thème : Groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres d'Azumaya sur un anneau commutatif

Présenté par : Seydina Mouhamed Mbaye

Directeur : Pr Thomas GUÉDÉNON
Co-directeur : Dr Christophe Lopez NANGO

Devant le jury ci-après :

Prénom(S) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Oumar SALL	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Thomas GUÉDÉNON	Professeur Assimilé	Directeur	UASZ
Moussa FALL	Maître de Conf. titulaire	Examinateur	UASZ
Christophe Lopez NANGO	Docteur	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2022−2023

GROUPE DE BRAUER-CLIFFORD DES (S, H)-ALGÈBRES D'AZUMAYA SUR UN ANNEAU COMMUTATIF

Seydina Mouhamed Mbaye

2023

REMERCIEMENTS

Louange et Gloire à l'UNIQUE DIEU ; Paix et Salut sur son Prophète Mohamed

Je rends grâce à l'ÉTERNEL DIEU de m'avoir donné toute la force, le courage et la persévérance d'accomplir ce modeste travail. Je commence mes remerciements de très haute facture à mon Directeur de mémoire, le Pr **Thomas GUEDENON**, et à mon Codirecteur, le Dr **Christophe Lopez NANGO**, pour l'orientation, les conseils, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bon port. Qu'ils trouvent dans ce travail un hommage vivant à leur haute personnalité.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les membres du jury : le Professeur **Oumar SALL**, le Docteur **Moussa FALL**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon projet en acceptant d'examiner mon travail et d'apporter des propositions pertinentes ayant permis de réaliser ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les enseignants de l'Université Assane Seck, en particulier ceux du Département de Mathématiques, pour leur grande contribution à ma formation de la licence 1 au Master 2.

Je remercie également tous mes camarades de promotion de la licence au master, en particulier **Malang BADIANE, Maurice DIATTA, Adama POUYE, Boubacar BALDÉ, Moustapha TOURÉ, Demba FALL,** sans oublier mon doyen **Mohamed Bouyé COLY** et l'ensemble des étudiants du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université Assane Seck. Votre présence et votre soutien ont été précieux tout au long de ce périple, et je suis fier d'avoir partagé cette expérience avec vous. Merci d'avoir été là pour moi, pour les encouragements, les échanges et les moments de camaraderie. Je vous souhaite à tous le meilleur pour vos projets futurs et j'ai la conviction que vous réussirez dans tout ce que vous entreprendrez.

Je suis convaincu que cette expérience universitaire restera gravée dans ma mémoire, et je suis reconnaissant envers tous ceux qui ont contribué à sa réussite.

DÉDICACE

Ce travail est dédié aux personnes de bonne foi qui ont toujours cru en moi et qui m'ont toujours accompagné dans les prières et les bénédictions. Je dédie donc ce mémoire :

• À mon défunt papa **Fakha MBAYE** qui m'a élevé et a cultivé en moi le sens du respect de la dignité, de l'honneur, de l'intégrité et de la responsabilité.

• À ma bien-aimée mère **Awa Fall BABOU** qui m'a toujours soutenu et encouragé. Si nous sommes parvenus à ce niveau, c'est grâce à vous. Longue vie à vous aussi.

• À mes sœurs, **Adji, Fatou, Ndéye**, ainsi qu'à leurs petites familles respectives.

• À **Amy Badji** et sa famille (mention spéciale à **Adama Sadio**). Votre soutien et votre amour ont été une source de motivation pour moi.

• À ma **tante Marème**, **Tonton LÔ** et toute leur famille.

• À **Mouhamed NDIOUCK** et sa famille.

• À mes "bradaframanadamada" **Malick FAYE, Malang BADIANE, Abdourahmane KONÉ, Abdourahmane DIATTA, Siaka DIÉMÉ, Alioune Badara WADE, Lamine MANÉ, Saliou TOURÉ, Oumar DIOP, Assane Sarr, Omar PANÉ...**

RÉSUMÉ

Soient H une algèbre de Hopf cocommutative et S une algèbre de H-module commutative.
Une (S, H)-algèbre d'Azumaya est juste une (S, H)-algèbre qui est aussi une S-algèbre d'Azumaya.
Deux (S, H)-algèbres d'Azumaya A et B sont équivalentes au sens de Brauer s'il existe une paire de $S\#H$-lattices P et Q tels que $A \otimes_S End_S(P) \simeq B \otimes_S End_S(Q)$ en tant que (S, H)-algèbres d'Azumaya.
L'ensemble des classes d'équivalences des (S, H)-algèbres d'Azumaya sous cette relation muni du produit $\otimes_S$ est un groupe abélien appelé groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres d'Azumaya.
Ce groupe de Brauer-Clifford s'avère être un exemple du groupe de Brauer-Clifford de la catégorie monoïdale symétrique des $S\#H$-modules, une perspective qui permet de construire un groupe de Brauer-Clifford dual pour la catégorie des S-modules avec une structure de H-comodule à droite compatible.

Table des matières

Table des matières **4**
INTRODUCTION 7

1 PRÉLIMINAIRES **8**
1.1 Anneau 8
1.2 Module sur un anneau 9
1.3 Algèbre 12
1.4 Catégorie Monoïdale Symétrique 13
1.4.1 Catégorie 13
1.4.2 Bifoncteur 14
1.4.3 Catégorie Monoïdale 14
1.4.4 Catégorie Monoïdale Symétrique 15

2 CATÉGORIE DES $S\#H$-MODULES **16**
2.1 Algèbres d'Azumaya 16
2.2 Algèbre de Hopf 17
2.2.1 Coalgèbre 17
2.2.2 Bialgèbre 18
2.2.3 Algèbre de Hopf 18
2.2.3.1 Produit de convolution 18
2.2.3.2 Formule de l'antipode 18
2.3 Algèbre de H-Module 19
2.3.1 Algèbre de H-Module 19
2.3.2 Produit semi-direct ou Smash product 21
2.3.3 $A\#H$-Module 21

3 ALGÈBRES DE $S\#H$-MODULE **25**
3.1 (S, H)-algèbres d'Azumaya 25
3.1.1 (S,H)-Algèbres 25
3.1.2 (S, H)-algèbres d'Azumaya 28
3.2 Groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres d'Azumaya 31
3.2.1 H-Comodule 33
3.2.2 (A, H)-Module de Hopf 34
3.2.3 Groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres de Hopf d'Azumaya . . . 35

CONCLUSION **46**

Bibliographie **47**
bibliographie 47

INTRODUCTION

Soient H une algèbre de Hopf cocommutative et S une algèbre de H-module commutative. Nous présentons dans ce mémoire de master un résultat de Guédénon et Herman intitulé **groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres d'Azumaya sur un anneau commutatif** paru dans *Algebras and Representation Theory, 16(1) :101-127, 2013.*
Dans [12, 13] Turull a introduit le groupe de Brauer des G-algèbres centrales simples. Ce groupe de Brauer à été développé principalement pour des situations survenant dans la théorie de représentations des groupes finis où l'on souhaite utiliser la théorie de Clifford en présence d'actions de groupes de Galois. Ces applications sont similaires à celle de Dade[2, 3]. Comme la théorie de Dade fonctionne bien sur les anneaux commutatifs, Herman et Mitra ont donné une définition du groupe de Brauer dans le cas des G-algèbres séparables sur les anneaux commutatifs[6] et ont montré que le groupe est le même que le groupe de Brauer équivariant défini par Fröhlich et Wall[5]. La version non tordue de leur groupe de Brauer équivariant B(S,G) devient le groupe de Brauer des (S,H)-algèbres d'Azumaya quand $H = RG$.

Notre étude est composée de trois chapitres.
Dans le premier chapitre, nous allons rappeler quelques notions de bases sur les anneaux, les modules et les algèbres. Nous allons aussi définir dans ce chapitre les notions de catégorie, de bifoncteur, de catégorie monoïdale et de catégorie monoïdale symétrique.
Dans le deuxième chapitre, nous évoquons la notion d'algèbre d'Azumaya, de coalgèbre, de bialgèbre et d'algèbre de Hopf . Nous parlons aussi dans ce chapitre les notions d'algèbre de H-module, de produit semi-direct et celle de la catégorie de $A\#H$-modules. Nous donnons aussi dans ce chapitre un résultat sur les $S\#H$-modules(Théorème 2.3.12), qui nous est très utile dans le troisième chapitre.
Dans le troisième chapitre, nous développons le contexte nécessaire à la compréhension des (S,H)-algèbres et des (S,H)-algèbres d'Azumaya puis nous définissons le groupe de Brauer-Clifford $B(S, H)$ pour une algèbre de Hopf cocommutative H et une algèbre de H-module commutative S et nous décrivons les étapes nécessaires pour définir le groupe de Brauer-Clifford dual $B^{co}(S, H)$ pour une algèbre de Hopf commutative H et une R-algèbre de H-comodule commutative S. Dans cette partie nous allons aussi étudier la relation entre ces deux groupes de Brauer-Clifford. Voici les principaux résultats qui ont fait l'objet de cette étude :

Proposition 0.0.1 *L'ensemble des classes d'équivalences des (S, H)-algèbres d'Azumaya sous la relation $\sim$ muni du produit $\otimes_S$ est un groupe abélien.*

Cet résultat nous a permis de définir le groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres d'Azumaya noté $B(S, H)$.

Proposition 0.0.2 *L'ensemble des classes d'équivalences des (S, H)-algèbres de Hopf d'Azumaya sous la relation $\sim$ muni du produit $\otimes_S$ est un groupe abélien.*

Cet résultat nous a permis de définir le groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres de Hopf d'Azumaya noté $B^{co}(S, H)$.

Théoréme 0.0.3 *Soit H une algèbre de Hopf commutative qui est un R-module projectif et de type fini et soit S une algèbre de H-module commutative. Alors*

$$B^{co}(S, H^{\star}) = B(S, H).$$

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Anneau

Définition 1.1.1 *Soit A un ensemble muni de deux lois internes notées "+" et ".". On dit que (A,+,.) est un anneau si :*

(i) (A,+) est un groupe abélien(d'élément neutre noté 0_A) ;

(ii) la loi "." est associative et admet un élément neutre noté 1_A ;

(iii) la loi "." est distributive par rapport à loi "+.".

Si "." est commutative, on dit que l'anneau (A,+,.) est commutatif.

Remarque 1.1.2 *On écrit plus souvent xy à la place de $x.y$.*

Définition 1.1.3 *Soient A et B deux anneaux. Une application $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux si :*

(i) $f(a + a') = f(a) + f(a')$ et $f(aa') = f(a)f(a')$ $\forall a, a' \in A$;

(ii) $f(1_A) = 1_B$.

Définition 1.1.4 *Soit A un anneau. L'opposé de A noté A° où A^{op} est défini par $A^\circ = A$ en tant que groupe abélien et sa multiplication est donnée par $a^\circ b^\circ = (ba)^\circ$ où a° est a vu comme un élément de A°.*

Remarque 1.1.5 $(A^\circ, +, .)$ *est un anneau et si A est commutatif, alors $A^\circ = A$.*

1.2 Module sur un anneau

Définition 1.2.1 *Soit A un anneau. Un A-module à gauche est un ensemble M muni d'une loi interne*

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow M \\ (m, m') &\longmapsto m + m' \end{aligned}$$

et d'une loi externe

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, m) &\longmapsto a.m = am. \end{aligned}$$

appelée parfois multiplication par un scalaire, satisfaisant les propriétés suivantes :

1. *l'ensemble M, muni de la loi + est un groupe abélien ;*
2. *pour tous m,m' $\in M$, et tout $a \in A$, on a : $a(m + m') = am + am'$;*
3. *pour tout $m \in M$, on a : $(1_A)m = m$;*
4. *pour tout $m \in M$, et tous a,b $\in A$, on a : $(a + b)m = am + bm$;*
5. *pour tous a ;b $\in A$ et tout $m \in M$, on a : $(ab)m = a(bm)$.*

Remarque 1.2.2 *Lorsque A n'est pas commutatif, la définition ci-dessus est celle d'un A-module à gauche, et on peut définir de manière similaire un A-module à droite en remplaçant le point 5. par $(ab)m = b(am)$.*
Dans cette partie, on suppose que A est un anneau commutatif.

Exemple 1.2.3
- *L'anneau A est un module sur lui même (l'action de A sur A est donnée par la multiplication dans A).*
- *Si A est un corps, un A-module n'est rien d'autre qu'un A-espace vectoriel.*
- *Tout groupe abélien M est un $\mathbb{Z}$-module si, $\forall n \in \mathbb{Z}$ et $\forall \in M$, on définit*

$$nx = \begin{cases} x + x + ... + x(nfois) & si \quad n > 0 \\ 0 & si \quad n = 0 \\ -x - x - ... - x(|n|fois) & si \quad n < 0 \end{cases}$$

Lemme 1.2.4 *Soit A un anneau. Si M est un A-module à gauche, alors M est un A°-module à droite. La loi est définie par :*
$M \otimes A^{\circ} \longrightarrow M$
$(m, \bar{a}) \longmapsto m.\bar{a} = am.$

Définition 1.2.5 (Morphismes de modules) *Soient M et N deux A-modules à gauche. Une application $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de A-modules ou une application A-linéaire si :*

- $f(m+m') = f(m) + f(m')$; $\forall m, m' \in M$

- $f(am) = af(m)$; $(\forall m \in M)$; $(\forall a \in A)$.

Notations 1.2.6 *Soient M et N deux A-modules à gauche.*
L'ensemble des applications A-linéaires de M vers N est noté ${}_AHom(M,N)$ et ${}_AEnd(M)$ désigne ${}_AHom(M,M)$.

Proposition 1.2.7 *Soient M et N deux A-modules .*

- L'ensemble $({}_AHom(M,N),+)$ est naturellement un groupe abélien :

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m),\ \forall f, g \in {}_AHom(M,N) \text{ et } m \in M.$$

- Si A est commutatif alors ${}_AHom(M,N)$ est un A-module :

$$(af)(m) = af(m),\ \forall a \in A \text{ et } f \in {}_AHom(M,N).$$

Définition 1.2.8 *Soit M un A-module à gauche. Un sous-A-module de M est un sous-groupe N de M qui st stable par la loi externe.*

Définition 1.2.9 *Soit M un A-module à gauche et soit M_1 un sous-A-module de M. On dit que M_1 est un facteur direct de M s'il existe un sous-A-module M_2 de M tel que $M = M_1 \bigoplus M_2$.*

Définition 1.2.10 *Soit M un A-module à gauche. Soit m un élément de M. L'annulateur à gauche de m dans A noté souvent $Ann(m)$ est l'ensemble défini par $Ann(m) = \{a \in A \mid am = 0_M\}$. L'annulateur de M est défini par $Ann(M) = \{\ a \in A \mid am = 0_M\ \forall m \in M\}$.*

Définition 1.2.11 *Soit M un A-module à gauche. On dit que M est fidèle (ou A-fidèle) si $Ann(M) = \{0\}$.*

Définition 1.2.12 *Soit M un A-module à gauche. Soit $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de M où I est un ensemble d'indices. On dit que $\{x_i\}_{i\in I}$ est une famille libre si toute combinaison A-linéaire nulle de ces x_i est à coefficients nuls.*
En particulier, si la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est finie, elle est libre si $\sum_i a_i.x_i = 0$, implique $a_i = 0\ \forall i \in I$ et $a_i \in A$.

Définition 1.2.13 *Un A-module à gauche M est libre s'il est engendré par une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ libre.*

Définition 1.2.14 *Soit M un A-module à gauche. On dit M est un A-module de type fini s'il existe un ensemble non vide I d'indices fini et un morphisme $\phi : A^I \longrightarrow M$ surjectif.*

On dit qu'un A-module M est libre de type fini s'il est libre et de type fini.

Définition 1.2.15 *Une suite d'applications linéaires est la donnée de A-modules M_0, M_1, M_2 où A est un anneau commutatif et de deux applications A-linéaires*

$$f : M_0 \longrightarrow M_1 \quad et \quad g : M_1 \longrightarrow M_2. \tag{1.1}$$

Cette situation est représentée par :

$$M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2, \tag{1.2}$$

pour souligner qu'on peut composer f et g. Une suite d'application de A-modules

$$M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2 \tag{1.3}$$

est dite exacte en M_1 si $im(f) = ker(g)$.

Plus généralement si I est un intervalle de $\mathbb{Z}$, une suite d'applications linéaires f_i de A-modules M_i.

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_n \xrightarrow{f_i} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

est une suite exacte si elle est exacte en M_i pour tout $i \in I$, c'est-à-dire

$\forall i \in I \ im(f_{i-1}) = ker(f_i)$.

Définition 1.2.16 *Soient M, N, P des A-modules. Une suite exacte courte est une suite de la forme :*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0, \tag{1.4}$$

elle est dite exacte si f est injective, g surjective et $im(f) = ker(g)$.

Définition 1.2.17 *Considérons une suite exacte courte de A-modules.*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0, \tag{1.5}$$

elle est dite scindée s'il existe un morphisme

$$r : P \longrightarrow M \quad tel \quad que \quad g \circ r = Id_P. \tag{1.6}$$

Proposition 1.2.18 *Pour tout A-module à gauche P, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) P est isomorphe à un facteur direct d'un A-module libre ;

ii) toute suite exacte courte de A-module de la forme $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est scindée ;

iii) Pour tout morphisme surjectif (épimorphisme) $f : N \longrightarrow M$ et pour tout morphisme $g : P \longrightarrow M$; il existe un morphisme $h : P \longrightarrow N$ tel que $g = f \circ h$.

Définition 1.2.19 *Soit P un A-module à gauche. On dit P est un module projectif (ou module A-projectif) si P vérifie l'une des propriétés de la proposition(1.2.18).*

Définition 1.2.20 *Soient A et B deux anneaux. Un groupe abélien M est appelé un A-B-bimodule si M est un A-module à gauche ainsi qu'un B-module à droite tel que :*

$$(am)b = a(mb) \quad \forall a \in A,\ b \in B \text{ et } m \in M.$$

Exemple 1.2.21
- *Si A est un anneau, alors A lui même peut être considéré comme un A-A-bimodule en prenant les actions gauche et droite comme une multiplication.*
- *Si A est commutatif, tout A-module peut être vu comme un A-A-bimodule.*
- *Si A est un sous-anneau de B, alors B est un A-A-bimodule. C'est également un A-B-bimodule et B-A-bimodule.*

1.3 Algèbre

Sauf mention expresse du contraire, dans tout le reste de notre travail , R est un anneau unitaire commutatif et le produit $\otimes$ et Hom sont définis sur R.

Définition 1.3.1 *Soit A un ensemble. On dit que A est une R-algèbre (associative unitaire) s'il existe :*

- *deux lois internes :*
$$''+'' : \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (a, a') \longmapsto a + a' \end{array} \quad et \quad ''\times'' : \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (a, a') \longmapsto a \times a' = aa' \end{array}$$
- *et une loi externe :*
$$''.'' : \begin{array}{l} R \times A \longrightarrow A \\ (\lambda, a) \longmapsto \lambda.a = \lambda a \end{array}$$

telles que :

(i) $(A, +, .)$ *est un R-module,*

(ii) $(A, +, \times)$ *est un anneau,*

(iii) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Dans la définition suivante, nous allons utilisé le produit tensoriel pour définir une algèbre.

Définition 1.3.2 *Une R-algèbre associative unitaire A est un triplet du type (A, m_A, μ_A) où A est un R-module et*

$$m_A : \begin{array}{l} A \otimes A \longrightarrow A \\ a \otimes b \longmapsto ab \end{array} \qquad et \qquad \mu_A : \begin{array}{l} R \longrightarrow A \\ \lambda \longmapsto \mu_A(\lambda) \end{array}$$

sont des applications R-linéaires vérifiant les deux axiomes suivants

- $m_A \circ (m_A \otimes id_A) = m_A \circ (id_A \otimes m_A)$ *: c'est l'axiome de l'associativité*
- $m_A \circ (\mu_A \otimes id_A) = id_A = m_A \circ (id_A \otimes \mu_A)$ *: c'est l'axiome de l'unité.*

L'application m_A est appelée le produit ou la multiplication, l'application μ_A est l'application unité et $\mu_A(1_R)$ est l'élément unité de A.

Définition 1.3.3 *Soient M et N deux R-modules. L'application*

$$\begin{aligned} \tau_{M\otimes N}: \quad & M\otimes N \longrightarrow N\otimes M \\ & m\otimes n \longmapsto n\otimes m, \qquad m\in M, n\in N, \end{aligned}$$

s'appelle application d'échange ou twist map.
• *Soit A une R-algèbre. L'algèbre opposée de A notée A° est égale à A comme R-module et le produit*

$$\begin{aligned} m_{A^\circ}: \quad & A^\circ\otimes A^\circ \longrightarrow A^\circ \\ & a^\circ\otimes b^\circ \longmapsto a^\circ b^\circ = (ba)^\circ \qquad \text{avec} \quad a^\circ, b^\circ\in A^\circ. \end{aligned}$$

On a : $m_{A^\circ} = m_A\circ\tau_{A\otimes A}$. Ainsi

$$m_{A^\circ}(a^\circ\otimes b^\circ) = (m_A\circ\tau_{A\otimes A})(a\otimes b) = m_A(b\otimes a) = ba.$$

Définition 1.3.4 *Une R-algèbre sera dite commutative si $m_A = m_A\circ\tau_{A\otimes A}$, ou de manière équivalente si elle est commutative en tant qu'anneau.*

Définition 1.3.5 *Soient (A, m_A, μ_A) et (B, m_B, μ_B) deux R-algèbres et soit $f: A\longrightarrow B$ une application R-linéaire. On dit que f est un morphisme de R-algèbres si :*

$$f\circ m_A = m_B\circ(f\otimes f)$$

et

$$f\circ\mu_A = \mu_B.$$

1.4 Catégorie Monoïdale Symétrique

1.4.1 Catégorie

Définition 1.4.1 *Une catégorie $\mathcal{C}$ est définie par les données suivantes :*

1. *une famille notée $Ob(\mathcal{C})$ appelée la classe des objets de $\mathcal{C}$. On note $X\in Ob(\mathcal{C})$ pour dire que X est un objet de $\mathcal{C}$.*
2. *une collection d'ensembles notée $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour tous $X, Y\in Ob(\mathcal{C})$.*
   Si $f\in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on dit que X est la source de f et Y est le but; on écrit $f: X\longrightarrow Y$ pour dire que f est une flèche de $\mathcal{C}$ ou un morphisme de $\mathcal{C}$.
3. *pour tout triplet (X,Y,Z) d'objets de $\mathcal{C}$, une application*

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)\times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto g\circ f. \end{aligned}$$

L'image $g\circ f$ du couple (f,g) est appelée ***composition*** *de f suivi de g.*

Ces données doivent de plus vérifier les axiomes suivants :

a) la loi est associative : $\forall f\in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g\in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $h\in Hom_{\mathcal{C}}(Z,T)$ on a :

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f;$$

b) la neutralité des identités : pour tout $X \in Ob(\mathcal{C})$, il existe $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$, appelé identité de X (noté parfois id_X), tel que :
$\forall\ f \in Hom_C(X,Y)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $\forall\ f \in Hom_C(Y,X)$, on a $1_X \circ f = f$.

Exemple 1.4.2 *On note :*
"Ens" la catégorie des ensembles. Les morphismes sont les applications.
"${}_A\mathcal{M}$" la catégorie des A-modules à gauche où A est un anneau. Les morphismes sont les applications A-linéaires.
"$\mathcal{A}b$" la catégorie des groupes abéliens. Les morphismes sont ceux des groupes abéliens.
"Top" qui est la catégorie des espaces topologiques. Les morphismes sont les applications continues.

1.4.2 Bifoncteur

Définition 1.4.3 *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ trois catégories. F est un* ***bifoncteur*** *de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$, noté $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$, si pour tous objets X de $\mathcal{C}$, Y de $\mathcal{D}$, et les flèches $f : X \longrightarrow X'$ et $g : Y \longrightarrow Y'$ dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ respectivement, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $F(id_X, id_Y) = id_F(X,Y)$, où id_X et id_Y sont les morphismes identités pour les objets X et Y.

2. $F(f,g) \circ F(f',g') = F(f \circ f', g \circ g')$, où $\circ$ représente la composition des flèches dans les catégories $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$.

En d'autres termes, un bifoncteur F associe à chaque paire d'objets (X,Y) de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ un objet de la catégorie $\mathcal{E}$, et à chaque paire de flèches (f,g) de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ une flèche de $\mathcal{E}$, de manière cohérente avec les compositions et les identités.

1.4.3 Catégorie Monoïdale

Définition 1.4.4 *Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, l, r)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, d'un objet $I \in \mathcal{C}$, et d'isomorphismes naturels*

$\alpha_{M,N,P} : (M \otimes N) \otimes P \longrightarrow N \otimes (M \otimes P) \qquad l_M : I \otimes M \longrightarrow M \qquad r_M : M \otimes I \longrightarrow M$
tels que les deux diagrammes de cohérence suivants

$$\begin{tikzcd}
((M \otimes N \otimes) P) \otimes Q \arrow[r, "\alpha_{M,N,P} \otimes_S id_Q"] \arrow[d, "\alpha_{M \otimes N,P,Q}"'] & (M \otimes (N \otimes P)) \otimes Q \arrow[r, "\alpha_{M,N \otimes P,Q}"] & M \otimes ((N \otimes P) \otimes Q) \arrow[d, "id_M \otimes \alpha_{N,P,Q}"] \\
(M \otimes N) \otimes (P \otimes Q) \arrow[rr, "\alpha_{M,N,P \otimes_S Q}"'] & & M \otimes (N \otimes (P \otimes_S Q))
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

et

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_S I) \otimes N \arrow[rr, "\alpha_{M,I,N}"] \arrow[dr, "r_M \otimes id_N"'] & & M \otimes (I \otimes N) \arrow[dl, "id_M \otimes l_N"] \\
& M \otimes N &
\end{tikzcd} \tag{1.8}$$

.
commutent

1.4.4 Catégorie Monoïdale Symétrique

Définition 1.4.5 *Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est symétrique s'il existe des isomorphismes naturels $\gamma_{N,M} : M \otimes_S N \simeq N \otimes_S M$ dans $\mathcal{C}$ pour tous $M, N \in \mathcal{C}$ tels que $\gamma_{N,M} \circ \gamma_{M,N} = id_{M \otimes_S N}$ et certaines conditions hexagonales sont satisfaites* (*voir* [9]; p.180).

Chapitre 2

CATÉGORIE DES $S\#H$-MODULES

Soit R un anneau unitaire commutatif.Tous les R-modules que nous considérons ici sont des R-R-bimodules, et toutes les R-algèbres sont des R-modules avec R un anneau associatif.

2.1 Algèbres d'Azumaya

Définition 2.1.1 *Un R-module est un R-progénérateur s'il est de type fini, projectif et fidèle (c'est-à-dire un générateur) dans la catégorie des R-modules.*

Notations 2.1.2 *Soit A une R-algèbre. On désigne par :*
- $Z(A) := \{a \in A| \quad ab = ba \quad \forall b \in A\}$ *le centre de A,*
- $End_R(A)$ *la R-algèbre des R-endomorphismes de A,*
- *et par $A \otimes A^\circ$ la R-algèbre enveloppante de A dont le produit est donné par*

$$(a \otimes b^\circ)(c \otimes d^\circ) = (ac \otimes (db)^\circ),\ \forall a, c \in A \text{ et } b^\circ, d^\circ \in A^\circ.$$

Proposition 2.1.3 *Soit A une R-algèbre, alors A est un $A \otimes A^\circ$-module gauche dont l'action est définie par $(a \otimes b^\circ).x = axb\ \forall a, x \in A$ et $b^\circ \in A^\circ$.*

Preuve :

A-t-on : $[(a \otimes b^\circ)(c \otimes d^\circ)].x = (a \otimes b^\circ)[(c \otimes d^\circ).x]$?
Soient $(a \otimes b), (c \otimes d) \in A \otimes A^\circ$ et $x \in A$

$$\begin{aligned}[(a \otimes b)(c \otimes d)].x &= (ac \otimes b^\circ d^\circ).x \\ &= (ac \otimes (db)^\circ).x \\ &= acxdb \\ &= a[(c \otimes d^\circ).x]b \\ &= (a \otimes b^\circ)[(c \otimes d^\circ).x].\end{aligned}$$

Donc A est un $A \otimes A^\circ$-module gauche.

Définition 2.1.4 *Une R-algèbre A est centrale si A est fidèle et le centre de A se réduit à R, c'est-à-dire $Z(A) = R$.*

Définition 2.1.5 *Soit A une R-algèbre. On dit que A est une R-algèbre d'Azumaya si elle est un R-progénérateur en tant que R-module et si l'application canonique $A \otimes A^{\circ} \longrightarrow End_R(A)$ définie par $f(a \otimes b^{\circ})(c) = acb$ est un isomorphisme de R-algèbres.*

Remarque 2.1.6 *Lorsqu'une R-algèbre A n'est pas nécessairement commutative, un A-module signifie simplement un A-module gauche.*

Nous appliquerons systématiquement les mêmes conventions ci-dessus avec S à la place de R. Dans la majeur partie du document S sera une algèbre commutative.

2.2 Algèbre de Hopf

2.2.1 Coalgèbre

Pour définir les axiomes de coalgèbres, nous allons dualiser ceux définissant les algèbres.

Définition 2.2.1 *Une R-coalgèbre C est un triplet du type $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$; où C est un R-module,*

$$\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C \qquad et \qquad \epsilon_C : C \longrightarrow R$$

sont des applications R-linéaires satisfaisant les deux axiomes suivants

- $(\Delta_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = (id_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C$: *c'est l'axiome de la co-associativité*
- $(\epsilon_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = id_C = (id_C \otimes \epsilon_C) \circ \Delta_C$: *c'est l'axiome de la co-unité.*

L'application Δ_C est appelée la comultiplication ou le coproduit de C et l'application ε_C est appelée la co-unité de C.

Notations 2.2.2 *Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une R-coalgèbre.*
Un élément de $C \otimes C$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i$. Pour uniformité d'écriture et par convention, on adopte la notation de Sweedler-Heyneman : Soit $c \in C$, on note

$$\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_1 \otimes c_2 = c_{(1)} \otimes c_{(2)} = c_1 \otimes c_2.$$

Les notation Sweedler-Heyneman(ou Sweedler) sont très utiles pour faire les calculs dans les coalgèbres.
Dans la suite de tout ce travail, nous utiliserons la notation $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.
Avec cette notation, l'axiome de la co-associativité se traduit par :

$$\Delta_C(c_1) \otimes c_2 = c_1 \otimes \Delta_C(c_2),$$

c'est-à-dire,

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3, \quad \forall c \in C.$$

l'axiome de la co-unité se traduit par :

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2), \quad \forall c \in C.$$

Définition 2.2.3 *Soient $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ deux R-coalgèbres et soit $f : C \longrightarrow D$ une application R-linéaire. On dit que f est un morphisme de R-coalgèbres si :*

$$\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$$

et

$$\epsilon_D \circ f = \epsilon_C.$$

2.2.2 Bialgèbre

Maintenant on va définir une structure associant la structure d'algèbre et la structure de coalgèbre.

Lemme 2.2.4 *Soient (B, m_B, μ_B) une algèbre et $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ une coalgèbre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) Δ_B et ε_B sont des morphismes d'algèbres,
(ii) m_B et μ_B sont des morphismes de coalgèbres,
(iii) Pour tous $a, b \in B$,

$$\Delta_B(ab) = a_1b_1 \otimes a_2b_2, \quad \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B,$$

$$\varepsilon_B(ab) = \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b), \quad \varepsilon_B(1_B) = 1_R.$$

Définition 2.2.5 *Une bialgèbre B est un quintuplet $(B, m_B, \mu_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ tel que (B, m_B, μ_B) est une algèbre $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ est une coalgèbre et l'une des propriétés équivalentes du Lemme (2.2.4) est satisfaite.*

Définition 2.2.6 *Soient B et B' deux bialgèbres et soit $f : B \longrightarrow B'$ une application R-linéaire. On dit que f est un morphismes de bialgèbres si f est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de coalgèbres.*

2.2.3 Algèbre de Hopf

2.2.3.1 Produit de convolution

Proposition-Définition 2.2.7 *Soient (A, m_A, μ_A) une algèbre et $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ une coalgèbre, alors $Hom(C, A)$ muni du produit de convolution $\star$ défini par :*

$$(f \star g)(c) = (m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C)(c) = f(c_1)g(c_2) \quad \forall f, g \in Hom(C, A) \tag{2.1}$$

admet une structure d'algèbre d'unité $\mu_A \circ \epsilon_C$.

2.2.3.2 Formule de l'antipode

Définition 2.2.8 (Algèbre de Hopf) *Soit $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H)$ une bialgèbre. On considère $End(H)$ l'ensemble des endomorphismes de H d'élément unité $\mu_H \circ \epsilon_H$. On appelle antipode de H l'unique inverse (s'il existe) de id_H notée S_H dans $End(H)$.*
Donc $S_H \in End(H)$ et

$$S_H \star id_H = id_H \star S_H = u_H \circ \epsilon_H.$$

On appelle algèbre de Hopf, toute bialgèbre possédant une antipode.
On note alors $H = (H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H, S_H)$ l'algèbre de Hopf d'antipode S_H.

Proposition 2.2.9 *Soient $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode S_H, on a :*

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

Preuve :

Par définition, on a :

$$S_H \star id_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = id_H \star S_H. \tag{2.2}$$

Ainsi, on a : $\forall\ h \in H$,

$$\begin{aligned}(S_H \star id_H)(h) &= \mu_H \circ \varepsilon_H(h)\\ S_H(h_1)id_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)1_H.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(id_H \star S_H)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h)\\ id_H(h_1)S_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)1_H,\end{aligned}$$

d'où la formule :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Donc :} & \\ S_H(1_H) & = 1_H S_H(1_H)\\ & = \varepsilon_H(1_H)1_H\\ & = 1_H\\ & \textit{ou bien}\\ S_H(1_H) & = S_H(1_H)1_H\\ & = 1_H\varepsilon_H(1_H)\\ & = 1_H\\ \textit{d'où} & S_H(1_H) = 1_H. \ \blacksquare \end{array}$$

Remarque 2.2.10 *Une algèbre de Hopf H est dite cocommutative si $h_1 \otimes h_2 = h_2 \otimes h_1$, $\forall h \in H$.*

2.3 Algèbre de H-Module

2.3.1 Algèbre de H-Module

Définition 2.3.1 *Soit H une algèbre de Hopf. Un R-Module A est une algèbre de H-module à gauche si A est une R-algèbre et un H-module à gauche tel que :*

$$h(ab) = (h_1.a)(h_2.b) \tag{2.3}$$

et

$$h.1_A = \epsilon_H(h)1_A, \tag{2.4}$$

où $\Delta_H(h) = h_1 \otimes h_2$.

Dans ce cas, nous dirons que l'action de H sur A est compatible avec la multiplication et l'unité dans A.

Définition 2.3.2 *Un morphisme d'algèbres de H-modules est un morphisme de H-modules qui est aussi un morphisme d'algèbres.*

Lemme 2.3.3 *Soient M et N des H-modules, alors $Hom(M,N)$ et $M \otimes N$ sont des H-modules sous l'action diagonale donnée par*

$$(h.f)(m) = h_1.(f(S_H(h_2)m)) \tag{2.5}$$

et

$$h.(m \otimes n) = (h_1.m)(h_2.n), \tag{2.6}$$

$\forall m \in M, n \in N$ et $f \in Hom(M,N)$.
Preuve :

Puisque R est un anneau commutatif, $M \otimes N$ et $Hom(M,N)$ sont des R-modules.
A- t- on $(hh')(m \otimes n) = h(h'(m \otimes n))$ et $1_H(m \otimes n) = m \otimes n$?
Soient $h, h' \in H$ et $m \otimes n \in M \otimes N$. On a :

$$\begin{aligned}
(hh')(m \otimes n) &= (hh')_1 m \otimes (hh')_2 n \\
&= (h_1h'_1)m \otimes (h_2h'_2)n \\
&= h_1(h'_1m) \otimes h_2(h'_2n), \text{ car } M \text{ et } N \text{ sont des } H\text{-modules} \\
&= h((h'_1m) \otimes (h'_2n)) \\
&= h(h'(m \otimes n)) \\
\text{et} & \\
1_H(m \otimes n) &= (1_{H_1}m) \otimes (1_{H_2}n) \\
&= (1_Hm) \otimes (1_Hn) \\
&= m \otimes n.
\end{aligned}$$

Donc $M \otimes N$ est un H-module.
L'action est elle bien définie ?
C'est-a-dire, a-t-on $(hf)(\lambda m + m') = \lambda(hf)(m) + (hf)(m')$?
Soient $f \in Hom(M,N)$, $\lambda \in R$, $h \in H$ et $m \in M$. On a :

$$\begin{aligned}
(hf)(\lambda m + m') &= h_1[f(S_H(h_2)(\lambda m + m'))] \\
&= h_1[(f(S_H(h_2)(\lambda m) + (S_H(h_2)m')] \\
&= h_1[f(\lambda S_H(h_2)(m) + (S_H(h_2)m')] \\
&= h_1[f(\lambda S_H(h_2)(m) + f(S_H(h_2)m')] \\
&= h_1[\lambda f(S_H(h_2)(m) + f(S_H(h_2)m')] \\
&= h_1[\lambda f(S_H(h_2)m)] + h_1[f(S_H(h_2)m')] \\
&= \lambda h_1[f(S_H(h_2)m)] + (hf)(m') \\
&= \lambda(hf)(m) + (hf)(m').
\end{aligned}$$

Donc l'action est bien définie.
A- t- on $[(hh')f](m) = h(h'f)(m))$ et $(1_Hf)(m) = f(m)$?

Soient $h, h' \in H,\ m \in M$ et $n \in N$. On a :

$$\begin{aligned}
[(hh')f](m) &= (hh')_1[f(S_H(hh')_2m)]\\
&= (h_1h'_1)[f(S_H(h_2h'_2)m)]\\
&= (h_1h'_1)[f(S_H(h'_2)S_H(h_2)m)]\\
&= h_1(h'_1[f(S_H(h'_2)S_H(h_2)m)])\\
&= h_1[(h'f)(S_H(h_2)m)]\\
&= [h(h'f)](m).\\
&et\\
(1_Hf)(m) &= 1_{H_1}[f(S_H(1_{H_2})m)]\\
&= 1_H[f(S_H(1_H)m)]\\
&= f(S_H(1_H)m)\\
&= f(1_Hm)\\
&= f(m).
\end{aligned}$$

Donc $Hom_S(M, N)$ est un H-module.

2.3.2 Produit semi-direct ou Smash product

Définition 2.3.4 *Si A est une algèbre de H-module, alors l'algèbre du produit semi-direct $A\#H$ est la R-algèbre qui est égal à $A \otimes H$ en tant que R-module, et dont la multiplication est donnée par*

$$(a \otimes h)(a^{'} \otimes h^{'}) = a(h_1.a^{'}) \otimes h_2h^{'},\ \forall a, a' \in A \text{ et } h, h' \in H. \tag{2.7}$$

L'algèbre $A\#H$ est engendrée par A et H. On identifie A et H à des sous-algèbres de $A\#H$ via les applications :

$$\begin{array}{lll} \lambda_A & A \longrightarrow A\#H \\ & a \longmapsto a\#1_H \end{array} \quad et \quad \begin{array}{lll} \lambda_H & H \longrightarrow A\#H \\ & h \longmapsto 1_A\#h. \end{array}$$

2.3.3 $A\#H$-Module

Définition 2.3.5 *Un $A\#H$-module M est à la fois un A-module et un H-module, et les A-actions et les H-actions sont compatibles, c'est-à-dire*

$$h(am) = (h_1.a)(h_2.m),\ \forall h \in H,\ a \in A \text{ et } m \in M.$$

Exemple 2.3.6 *Si A est une algèbre de H-module, alors A est ne $A\#H$-module gauche.*

Exemple 2.3.7 *Si A est une algèbre de H-module et S une sous-algèbre de H-module de A, alors A est un $S\#H$-module gauche.*

On notera ${}_{A\#H}\mathcal{M}$ la catégorie des $A\#H$-modules gauche : les objets sont les $A\#H$-modules à gauche et les morphismes sont les applications $A\#H$-linéaires à gauche.
Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et soit S une algèbre de H-module commutative. Si M est $S\#H$-module, on a $h.(ms) = (h_1.m)(h_2.s)$:

$$h(ms) = h(sm) = (h_1.s)(h_2.m) = (h_2.m)(h_1.s) = (h_1.m)(h_2.s)$$

Lemme 2.3.8 *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et soit S une algèbre de H-module commutative. Si M et N sont des $S\#H$-modules, alors $M \otimes_S N$ et $Hom_S(M,N)$ sont des $S\#H$-modules.*

Preuve :

Puisque S est un anneau commutatif, $M \otimes_S N$ et $Hom_S(M,N)$ sont des S-modules.
• *Montrons que l'action est bien définie.*
Soient $h \in H,\ s \in S,\ m \in M$ et $n \in N$. On a :

$$\begin{aligned} h.[(ms) \otimes n] &= (h_1.(ms)) \otimes_S (h_2.n) \\ &= [(h_{11}.m)(h_{12}.s)] \otimes_S (h_2.n) \\ &= [(h_1.m)(h_2.s)] \otimes_S (h_3.n) \\ &= (h_1.m) \otimes_S [(h_2.s)(h_3.n)] \\ &= (h_1.m) \otimes_S [(h_{21}.s)(h_{22}.n)] \\ &= (h_1.m) \otimes_S (h_2.(sn)) \\ &= h[m \otimes_S (sn)]. \end{aligned}$$

Donc l'action est bien définie. $M \otimes_S N$ est un H-module : la preuve est identique à celle du lemme 2.3.3
Soient $h \in H,\ s \in S,\ m \in M$ et $n \in N$. On a :

$$\begin{aligned} h.[s(m \otimes_S n)] &= h.[(sm) \otimes_S n] \\ &= (h_1.(sm)) \otimes_S (h_2.n) \\ &= [(h_{11}.s)(h_{12}.m)] \otimes_S (h_2.n) \\ &= [(h_1.s)(h_2.m)] \otimes_S (h_3.n) \\ &= (h_1.s)[(h_2.m) \otimes_S (h_3.n)] \\ &= (h_1.s)(h_2.(m \otimes_S n)). \end{aligned}$$

Donc $M \otimes_S N$ est un $S\#H$-module.

La cocommutativité de H est nécessaire pour que $Hom_S(M,N)$ soit un H-module avec l'action diagonale.
Soient $f \in Hom_S(M,N),\ s \in S, h \in H$ et $m \in M$. On a :

$$\begin{aligned} (hf)(sm) &= h_1.[f(S_H(h_2)(sm))] \\ &= h_1.[f(S_H(h_2)_1.s)(S_H(h_2)_2 m)] \\ &= h_1.[f(S_H(h_{22}).s)(S_H(h_{21})m)] \\ &= h_1.[(S_H(h_{22}).s)f(S_H(h_{21})m))] \\ &= h_1.[(S_H(h_3).s)f(S_H(h_2)m))] \\ &= h_1.[(S_H(h_2).s)f(S_H(h_3)m))] \textit{(car } H \textit{ est cocommutative)} \\ &= [h_{11}.(S_H(h_2).s)][h_{12}(f(S_H(h_3)m))] \\ &= [(h_{11}S_H(h_2).s][h_{12}(f(S_H(h_3)m))] \\ &= [h_1.S_H(h_3.s)][h_2(f(S_H(h_4)m))] \\ &= [(h_1 S_H(h_2).s][h_3(f(S_H(h_4)m))] \textit{(car } H \textit{ est cocommutative)} \\ &= [\epsilon(h_1)1_H s][h_2(f(S_H(h_3)m))] \\ &= [\epsilon(h_1)s][h_2(f(S_H(h_3)m))] \\ &= s[\epsilon(h_1)h_2(f(S_H(h_3)m))] \\ &= s[h_1(f(S_H(h_2)m))] \\ &= s((hf)(m)). \end{aligned}$$

Donc l'action est bien définie. $Hom_S(M, N)$ *est un* H*-module : la preuve est identique à celle du lemme 2.3.3.*

Soient $h, h' \in H,\ m \in M,\ s \in S$ *et* $f \in Hom_S(M,N)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
[h.(sf)](m) &= h_1.[(sf)(S_H(h_2).m)] \\
&= h_1.[s(f(S_H(h_2).m))] \\
&= (h_{11}.s)[h_{12}.(f(S_H(h_2).m))] \\
&= (h_1.s)[h_2.(f(S_H(h_3).m))] \\
&= (h_1.s)[h_{21}.(f(S_H(h_{22}).m))] \\
&= (h_1.s)[(h_2.f)(m)] \\
&= [(h_1.s)(h_2.f)](m).
\end{aligned}$$

Donc $Hom_S(M,N)$ *est un* $S\#H$*-module.* ■

Théoréme 2.3.9 *Soit* H *une algèbre de Hopf cocommutative et soit* S *une algèbre de* H*-module commutative. Alors* $({}_{S\#H}M, \otimes_S, S)$ *est une catégorie monoïdale symétrique.*

Preuve :

D'après le lemme (3.1.4), on sait que $S \otimes_S M$ est un objet de ${}_{S\#H}\mathscr{M}$. Comme

$$S \otimes_S M \simeq M \simeq M \otimes_S S,$$

donc les isomorphismes naturels $S \otimes_S M$ et $M \otimes_S S$ sont des isomorphismes de $S\#H$ pour tout $M \in {}_{S\#H}\mathscr{M}$. Puisque S est commutative, chaque S-module peut être vu comme un S-S-bimodule, de sorte que $N \otimes M$ a la structure d'un S-module. Ainsi, l'isomorphisme canonique de S-module $n \otimes_S m \longmapsto m \otimes_S n$ est un isomorphisme de S-S-bimodules $N \otimes_S M \simeq M \otimes_S N$ pour tout M et $N \in {}_{S\#H}\mathcal{M}$. Dans ce cas, ces isomorphismes naturels sont les isomorphismes des $S\#H$-modules requis pour que cette catégorie monoïdale soit symétrique.

Chapitre 3

ALGÈBRES DE $S\#H$-MODULE

Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et soit S une algèbre de H-module commutative.

3.1 (S,H)-algèbres d'Azumaya

3.1.1 (S,H)-Algèbres

Définition 3.1.1 *Une (S,H)-algèbre A est un objet A de ${}_{S\#H}\mathcal{M}$ qui est une S-algèbre, avec les conditions supplémentaires que l'application de multiplication $\mu_A : A \otimes A \to A$ et l'application d'unité $\eta_A : S \to A$ sont des morphismes dans ${}_{S\#H}\mathcal{M}$, c'est-à-dire qu'elles sont S-linéaires et H-linéaires.*

Définition 3.1.2 *Un homomorphisme de (S,H)-algèbres est un homomorphisme de S-algèbres qui est également H-linéaire.*

Exemple 3.1.3 *Il est facile de voir que l'algèbre de H-module commutative S est une (S,H)-algèbre.*

Lemme 3.1.4 *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et soit S une algèbre de H-module commutative. Supposons que A et B soient des (S,H)-algèbres, alors*

(i) $A \otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre ;

(ii) l'isomorphisme canonique des S-algèbres $A \otimes_S B \simeq B \otimes_S A$ est un isomorphisme de (S,H)-algèbres ;

(iii) A° est une (S,H)-algèbre, où l'action H est donnée par $h.a^\circ = (h.a)^\circ$, pour tout $a \in A, a \to a^\circ$ étant l'antiautomorphisme canonique ; et

(iv) $A^e := A \otimes_S A^\circ$ est une (S,H)-algèbre.

Preuve :

(i) Puisque A et B sont des objets de la catégorie monoïdale ${}_{S\#H}\mathcal{M}$, $A \otimes_S B$ est un objet de ${}_{S\#H}\mathcal{M}$. Puisque A et B sont des S-algèbres, $A \otimes_S B$ est une S-algèbre d'unité $1_A \otimes_S 1_B$. Il reste à montrer que l'action de H sur $A \otimes_S B$ est compatible avec le produit dans $A \otimes_S B$ et $1_A \otimes_S 1_B$ est un élément H-invariant.
Soient $a \otimes b$ et $c \otimes d \in A \otimes_S B$. A-t-on :

$$h[(a \otimes b)(c \otimes d)] = [(h_1.(a \otimes b)][h_2.(c \otimes d)]$$

et

$$h(1_A \otimes_S 1_B) = \epsilon_H(h)(1_A \otimes_S 1_B)?$$

On a :

$$\begin{aligned} h[(a \otimes b)(c \otimes d)] &= h[(ac) \otimes (bd)] \\ &= [h_1(ac)] \otimes [h_2(bd)] \\ &= [(h_{11}.a)(h_{12}.c)] \otimes [(h_{21}.b)(h_{22}.d)] \\ &= [(h_{11}.a) \otimes (h_{21}.b)][(h_{12}.c) \otimes (h_{22}.d)] \\ &= [(h_{11}.a) \otimes (h_{12}.b)][(h_{21}.c) \otimes (h_{22}.d)] \text{ (car H est cocommutative)} \\ &= [(h_1.(a \otimes b)][h_2.(c \otimes d)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(1_A \otimes_S 1_B) &= h_1 1_A \otimes_S h_2 1_B \\ &= \epsilon_H(h_1)1_A \otimes_S \epsilon_H(h_2)1_B \\ &= \epsilon_H(h_1)\epsilon_H(h_2)(1_A \otimes_S 1_B) \\ &= \epsilon_H[h_1\epsilon_H(h_2)](1_A \otimes_S 1_B) (\text{car } \epsilon_H \text{ est } R\text{-linéaire}) \\ &= \epsilon_H(h)(1_A \otimes_S 1_B) \end{aligned}$$

Ainsi $A \otimes_S B$ est une (S, H)-algèbre.

(ii) Puisque ${}_{S\#H}\mathcal{M}$ est une catégorie monoïdale symétrique, l'isomorphisme de S-algèbre $A \otimes_S B \to B \otimes_S A$ donnée par $a \otimes_S b \to b \otimes_S a$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$ est un isomorphisme dans ${}_{S\#H}\mathcal{M}$. Donc $A \otimes_S B \simeq B \otimes_S A$ est un isomorphisme de (S, H)-algèbres.

(iii) Puisque A est un objet de la catégorie monoïdale ${}_{S\#H}\mathcal{M}$, A° est un objet de ${}_{S\#H}\mathcal{M}$. Puisque A est un S-algèbre, A° est une S-algèbre. Il reste à montrer que l'action de H sur A° est compatible dans A°.
Soient a° et $b^\circ \in A^\circ$. On a :

$$\begin{aligned} h.(a^\circ b^\circ) &= h.((ba)^\circ) \\ &= (h.(ba))^\circ \\ &= ((h_1.b)(h_2.a))^\circ \\ &= (h_2.a)^\circ(h_1.b)^\circ \\ &= (h_2.a^\circ)(h_1.b^\circ) \\ &= (h_1.a^\circ)(h_2.b^\circ)(\text{car H est cocommutative}) \end{aligned}$$

$$h_{1_{A^\circ}} = (h_{1_A})^\circ = (\epsilon_H(h)1_A)^\circ = \epsilon_H(h)1_A{}^\circ.$$

Donc A° est une (S,H)-algèbre.

(iv) Puisque $A \otimes_S B$ et A° sont des (S,H)-algèbres lorsque A et B sont des (S,H)-algèbres, donc $A \otimes_S A^\circ$ est une (S,H)-algèbre.

Lemme 3.1.5 *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et soit S une algèbre de H-module commutative.*

(i) Si M est un $S\#H$-module, alors $End_S(M)$ est une (S,H)-algèbre.

(ii) Si M et N sont des $S\#H$-modules tels que M et N sont des S-modules projectifs de type finis, alors

$$End_S(M) \otimes_S End_S(N) \simeq End_S(M \otimes_S N) \text{ en tant que } (S,H)\text{-algèbre.}$$

Preuve :

(i) D'après le lemme (2.3.8), $End_S(M)$ est un objet de ${}_{S\#H}\mathcal{M}$. C'est aussi une S-algèbre sous composition. Il suffit donc de montrer que l'action de H est compatible avec la composition dans $End_S(M)$.
Soient $h \in H,\ f,g \in End_S(M)$ et $m \in M$. Alors

$$\begin{aligned} [h(f\circ g)](m) &= h_1[(f\circ g)(S_H(h_2)m)] \\ &= h_1[f(g(S_H(h_2)m))] \\ &= h_1[f(g(S_H(\epsilon_H(h_{21})h_{22})m))] \\ &= h_1[f(1_H g(S_H(\epsilon_H(h_{21})h_{22})m))] \\ &= h_1[f(\epsilon_H(h_2)1_H g(S_H(h_3)m))] \\ &= h_1[f(S_H(h_{21})h_{22}g(S_H(h_3)m))] \\ &= h_{11}[f(S_H(h_{12})h_{21}g(S_H(h_{22})m))] \\ &= (h_1.f)[h_{21}g(S_H(h_{22})m))] \\ &= [(h_1.f)\circ(h_2.g)](m), \end{aligned}$$

donc $h(f\circ g) = (h_1.f)\circ(h_2.g)$

$$\begin{aligned} h.id_M(m) &= h_1(id_M S_H(h_2)m) \\ &= h_1(S_H(h_2)m) \\ &= h_1 S_H(h_2)m \\ &= \epsilon_H(h)1_H m \\ &= \epsilon_H(h)m \\ &= \epsilon_H(h)id_M(m), \end{aligned}$$

d'où $h.id_M = \epsilon_H(h)id_M$. Ainsi $End_S(M)$ est une (S, H)-algèbre.

(ii) D'après (i), $End_S(M \otimes_S N)$ est une (S, H)-algèbre. D'après le lemme (3.1.4), $End_S(M) \otimes_S End_S(N)$ est une (S, H)-algèbre. L'application canonique

$$\phi : End_S(M) \otimes_S End_S(N) \longrightarrow End_S(M \otimes_S N)$$

définie par

$$\phi(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$$

est un isomorphisme de S-algèbres lorsque M et N sont des S-modules projectifs de types finis. Il reste à montrons que ϕ est H-linéaire.
Soient $f \otimes g \in End_S(M) \otimes_S End_S(N)$ et $m \otimes n \in M \otimes_S N$. On a :

$$\begin{aligned} h.[\phi(f \otimes g)(m \otimes n)] &= h_1[\phi(f \otimes g)(S_H(h_2)(m \otimes n))] \\ &= h_1[\phi(f \otimes g)(S_H(h_2)_1 m \otimes S_H(h_2)_2 n)] \\ &= h_1[\phi(f \otimes g)(S_H(h_{22})m \otimes S_H(h_{21})n)] \\ &= h_1[f(S_H(h_{22})m)] \otimes h_{12}[g(S_H(h_{21})n)] \\ &= h_{11}[f(S_H(h_{22})m)] \otimes h_{12}[g(S_H(h_{21})n)] \\ &= h_{11}[f(S_H(h_{21})m)] \otimes h_{12}[g(S_H(h_{22})n)] (\text{car } H \text{ est cocommutative}) \\ &= h_{11}[f(S_H(h_{12})m)] \otimes [h_{21} g(S_H(h_{22})n)] \\ &= [(h_1.f)(m)] \otimes [(h_2.g)(n)] \\ &= \phi[(h_1.f) \otimes (h_2.g)](m \otimes n) \\ &= \phi[(h.(f \otimes g)](m \otimes n). \end{aligned}$$

Cela signifie que $h.[\phi(f \otimes g)] = \phi[(h.(f \otimes g)]$. Donc ϕ est H-linéaire.
Ainsi $End_S(M) \otimes_S End_S(N) \simeq End_S(M \otimes_S N)$ en tant que (S, H)-algèbres.

3.1.2 (S, H)-algèbres d'Azumaya

Définition 3.1.6 *Une (S, H)-algèbre A est une (S, H)-algèbre d'Azumaya si A est un S-progénérateur en tant que S-module, et l'application canonique $A^e \to End_S(A)$ définie par $f(a \otimes b^\circ)(c) = acb$ est un isomorphisme de (S, H)-algèbres.*

Définition 3.1.7 *Une (S, H)-algèbre d'Azumaya est juste une (S, H)-algèbre qui est aussi une S-algèbre d'Azumaya.*

Définition 3.1.8 *Une $S\#H$-**lattice** est un $S\#H$-module qui est un S-progénérateur.*

Soit P un S-module, on note $P^\star = Hom_S(P,S)$.

Lemme 3.1.9 *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative et soit S une algèbre de H-module commutative.*

(i) Si P est un $S\#H$-lattice, alors $End_S(P)$ est une (S,H)-algèbre d'Azumaya.

(ii) Si P est un $S\#H$-lattice, alors $P^\star$ est un $S\#H$-lattice.

(iii) Si P est un $S\#H$-lattice, alors $End_S(P)^\circ \simeq End_S(P^\star)$ sont isomorphes en tant que (S,H)-algèbres.

(iv) Si A est une (S,H)-algèbre d'Azumaya, alors A° est une (S,H)-algèbre d'Azumaya.

(v) Si A et B sont des (S,H)-algèbres d'Azumaya, alors $A \otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre d'Azumaya.

Preuve :

(i) $End_S(P)$ est une une S-algèbre d'Azumaya puisque P est un S-progénérateur. Comme c'est aussi une (S,H)-algèbre. Il s'ensuit que $End_S(P)$ est une (S,H)-algèbre d'Azumaya.

(ii) D'après le lemme (2.3.8), $P^\star$ est un $S\#H$-module. D'après [[4],Corollaire 1.3.4(f)], $P^\star$ est un S-progénérateur. Donc $P^\star$ est un $S\#H$-lattice.

(iii) Puisque $P^\star$ est un $S\#H$-module d'après (ii), $End_S(P^\star)$ est une (S,H)-algèbre.
Puisque P est un $S\#H$-module, $End_S(P)$ et P° sont des (S,H)-algèbres.
Donc $End_S(P)^\circ$ est une (S,H)-algèbre.
Puisque P est un S-algèbre d'Azumaya, il d'écoule du [[4],Corollaire 1.3.4(f)] que l'application S-linéaire $\theta : End_S(P)^\circ \longrightarrow End_S(P^\star)$ définie par

$$\theta(b)(y) = y \circ b \text{ pour tout } b \in End_S(P)^\circ \text{ et } y \in P^\star,$$

est un isomorphisme d'anneaux. θ est S-linéaire puisque b et y sont S-linéaires.
Soit $x \in P$ et $h \in H$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
([h.(\theta(b))](y))(x) &= [h_1.(\theta(b)(S_H(h_2).y))](x) && (3.1)\\
&= [h_1.((S_H(h_2).y)\circ b)](x) && (3.2)\\
&= [h_{11}.(S_H(h_2).y)\circ (h_{12}.b)](x) && (3.3)\\
&= [h_1.(S_H(h_3).y)\circ (h_2.b)](x) && (3.4)\\
&= [h_1.(S_H(h_3).y)]((h_2.b)(x)) && (3.5)\\
&= [h_1.(S_H(h_2).y)]((h_3.b)(x)) \quad \text{(car } H \text{ est cocommutative)} && (3.6)\\
&= [h_1.S_H(h_2).y]((h_3.b)(x)) && (3.7)\\
&= [\epsilon_H(h_1)1_H.y]((h_2.b)(x)) && (3.8)\\
&= [\epsilon_H(h_1).y)]((h_2.b)(x)) && (3.9)\\
&= y((\epsilon_H(h_1).h_2.b)(x)) && (3.10)\\
&= y((h.b)(x)) && (3.11)\\
&= (y\circ (h.b))(x) && (3.12)\\
&= (\theta(h.b)(y))(x). && (3.13)
\end{aligned}$$

Cela signifie que $h.(\theta(b)) = \theta(h.b)$, donc θ est H-linéaire. Ainsi $End_S(P)^\circ \simeq End_S(P^\star)$ sont isomorphes en tant que (S,H)-algèbres.

(iv) On a déjà vue que A° est une (S,H)-algèbre. Il reste à montrer que A° est une S-algèbre d'Azumaya. Puisque A est un S-progénérateur, A° est un S-progénérateur.
Comme A est une S-algèbre d'Azumaya,

$$A\otimes_S A^\circ \simeq End_S(A) \simeq A^\circ \otimes_S A.$$

Comme $A \simeq (A^\circ)^\circ$, on a $A^\circ \otimes_S (A^\circ)^\circ \simeq End_S(A^\circ)$. Donc A° est une S-algèbre d'Azumaya. Ainsi A° est une (S,H)-algèbre d'Azumaya.

(v) On a déjà vue que $A\otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre. Il reste à montrer que $A\otimes_S B$ est une S-algèbre d'Azumaya. Puisque A et B sont des S-progénérateurs, $A\otimes_S B$ est un S-progénérateur.
On a

$$\begin{aligned}
A\otimes_S B\otimes_S (A\otimes_S B)^\circ &\simeq A\otimes_S B\otimes_S B^\circ\otimes_S A^\circ && (3.14)\\
&\simeq A\otimes_S \mathrm{End}_S(B)\otimes_S A^\circ && (3.15)\\
&\simeq A\otimes_S A^\circ\otimes_S \mathrm{End}_S(B) && (3.16)\\
&\simeq \mathrm{End}_S(A)\otimes_S \mathrm{End}_S(B) && (3.17)\\
&\simeq \mathrm{End}_S(A\otimes_S B) && (3.18)
\end{aligned}$$

Donc $A\otimes_S B$ est une S-algèbre d'Azumaya.
Ainsi $A\otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre d'Azumaya.

3.2 Groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres d'Azumaya

Définition 3.2.1 *Nous disons que deux (S, H)-algèbres d'Azumaya A et B sont équivalentes au sens de Brauer (et on note $A \sim B$) s'il existe une paire de $S\#H$-lattices P et Q tels que*

$$A \otimes_S End_S(P) \simeq B \otimes_S End_S(Q)$$

en tant que (S, H)-algèbres d'Azumaya.

Proposition 3.2.2 *La relation ci-dessus est une relation d'équivalence sur la catégorie des (S, H)-algèbres d'Azumaya.*

Preuve :

Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur la catégorie des (S, H)-algèbres d'Azumaya :

(i) réflexivité : Soit A une (S, H)-algèbre d'Azumaya, A est un $S\#H$-lattice.
On a donc

$$A \otimes_S End_S(A) \simeq A \otimes_S End_S(A),$$

c'est à dire $A \sim A$.

(ii) symétrie : Soit A et B deux (S, H)-algèbres d'Azumaya telles que $A \sim B$.
$A \sim B \Longleftrightarrow$ il existe une paire de $S\#H$-lattices P et Q tels que

$$A \otimes_S End_S(P) \simeq B \otimes_S End_S(Q) \Longleftrightarrow B \otimes_S End_S(Q) \simeq A \otimes_S End_S(P) \Longleftrightarrow B \sim A,$$

d'où la symétrie.

(iii) transitivité : Soit A, B et C des (S, H)-algèbres d'Azumaya telles que $A \sim B$ et $B \sim C$.
$A \sim B \Longleftrightarrow$ il existe une paire de $S\#H$-lattices P et Q tels que

$$A \otimes_S End_S(P) \simeq B \otimes_S End_S(Q). \tag{3.19}$$

$B \sim C \Longleftrightarrow$ il existe une paire de $S\#H$-lattices P'et Q' tels que

$$B \otimes_S End_S(P') \simeq C \otimes_S End_S(Q'). \tag{3.20}$$

On a

$$\begin{align}
A \otimes_S End_S(P \otimes_S P') &\simeq A \otimes_S End_S(P) \otimes_S End_S(P') \quad \text{(D'après le lemme (3.1.5))} \tag{3.21}\\
&\simeq B \otimes_S End_S(Q) \otimes_S End_S(P') \tag{3.22}\\
&\simeq B \otimes_S End_S(P') \otimes_S End_S(Q) \tag{3.23}\\
&\simeq C \otimes_S End_S(Q') \otimes_S End_S(Q) \tag{3.24}\\
&\simeq C \otimes_S End_S(Q' \otimes_S Q) \tag{3.25}\\
&\simeq C \otimes_S End_S(Q \otimes_S Q') \quad \text{(D'après le lemme (3.1.4)).} \tag{3.26}
\end{align}$$

Ainsi $A \sim C$.
Par la suite, on a la transitivité. Ce qui prouve qu'on a une relation d'équivalence.

Remarque 3.2.3 *Les (S,H)-algèbres d'Azumaya isomorphes sont équivalentes sous cette relation.*

Notations 3.2.4 *Soit A une (S,H)-algèbres d'Azumaya, on notera $[[A]]$ la classe d'équivalence d'une (S,H)-algèbre d'Azumaya A.*

Proposition 3.2.5 *L'ensemble des classes d'équivalences des (S,H)-algèbres d'Azumaya sous la relation $\sim$ muni du produit $\otimes_S$ est un groupe abélien dont l'élément neutre est $[[S]]$.*

Preuve :

Montrons que l'ensemble des classes d'équivalences des (S,H)-algèbres d'Azumaya muni du produit $[[A]][[B]] = [[A \otimes_S B]]$ est un groupe abélien.
• Soient A, B, C des (S,H)-algèbres d'Azumaya représentées par les classes $[[A]]$, $[[B]]$ et $[[C]]$. On a :

$$\begin{aligned}([[A]][[B]])[[C]] &= [[A \otimes_S B]][[C]] && (3.27)\\ &= [[(A \otimes_S B) \otimes_S C]] && (3.28)\\ &= [[A \otimes_S (B \otimes_S C)]] && (3.29)\\ &= [[A]][[B \otimes_S C]] && (3.30)\\ &= [[A]]([[B]][[C]]), && (3.31)\end{aligned}$$

d'où l'associativité. • Soit A une (S,H)-algèbre d'Azumaya représentée par la classe $[[A]]$. On a :

$$\begin{aligned}[[A]][[S]] &= [[A \otimes_S S]] && (3.32)\\ &= [[A]], && (3.33)\end{aligned}$$

donc $[[S]]$ est l'identité de cette opération.

• Soit A une (S,H)-algèbres d'Azumaya représentée par la classe $[[A]]$. On a :

$$\begin{aligned}[[A]][[A^\circ]] &= [[A \otimes_S A^\circ]] && (3.34)\\ &= [[End_S(A)]] && (3.35)\\ &= [[S]], && (3.36)\end{aligned}$$

donc $[[A^\circ]]$ est l'inverse de $[[A]]$.

On a de plus un isomorphisme entre $A \otimes_S B$ et $B \otimes_S A$ $\Rightarrow [[A \otimes_S B]] = [[B \otimes_S A]] \Rightarrow [[A]][[B]] = [[B]][[A]]$.
Donc la loi $\otimes_S$ est commutative. Il s'ensuit que l'ensemble des classes d'équivalences des (S,H)-algèbres d'Azumaya est un groupe abélien.

Définition 3.2.6 *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative sur un anneau unitaire commutatif R et soit S une algèbre de H-module commutative sur R. Le groupe de Brauer-Clifford $B(S,H)$ est le groupe abélien des classes d'équivalences des (S,H)-algèbres d'Azumaya sous l'opération*

$$[[A]][[B]] = [[A \otimes_S B]],$$

où A et B sont des (S,H)-algèbres d'Azumaya. L'identité de cette opération est $[[S]]$, et $[[A]]^{-1} = [[A^\circ]]$, où A est une (S,H)-algèbres d'Azumaya.

3.2.1 H-Comodule

Définition 3.2.7 *Soit H une algèbre de Hopf sur l'anneau commutatif R. Un R-module M est un H-**comodule** à droite s'il existe une application R-linéaire $\rho_M : M \longrightarrow M \otimes H$ telle que :*

$$(\rho_M \otimes id_H) \circ \rho_M = (id_M \otimes \Delta_H) \circ \rho_M \tag{3.37}$$

et

$$(id_M \otimes \in_H) \circ \rho_M = id_M. \tag{3.38}$$

L'application ρ_M est appelée la H-coaction ou la coaction de H sur M. Soit M un H-comodule à droite. Pour $m \in M$, en utilisant Sweedler on a :

$$\rho_M(m) = m_0 \otimes m_1.$$

Avec cette notation, les deux axiomes ci-dessus se traduisent par :

$$m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$$

et

$$m_0 \varepsilon_H(m_1) = m.$$

Définition 3.2.8 *Soit M et N deux H-comodules à droite. Un homomorphisme de H-comodules à droite(alias une application H-colinéaire) est un homomorphisme de R-modules $f : M \longrightarrow N$ tel que :*

$$\rho_N \circ f = (f \otimes id_H) \circ \rho_M.$$

En notation de Sweedler, cela équivaut à

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

Ainsi f est H-colinéaire si et seulement si

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

Définition 3.2.9 *Soit H une algèbre de Hopf. Une algèbre A est une **algèbre de H-comodule** si elle est un H-comodule à droite et si la multiplication dans A est compatible avec la H-coaction, c'est-à-dire :*

$$\rho_A(ab) = a_0 b_0 \otimes a_1 b_1 \quad et \quad \rho_A(1_A) = 1_A \otimes 1_H, \quad \forall a, b \in A.$$

3.2.2 (A, H)-Module de Hopf

Définition 3.2.10 *Soient H une algèbre de Hopf et A une algèbre de H-comodule. On dit qu'un R-module M est un (A, H)**-module de Hopf** si M est un A-module à gauche et un H-comodule à droite tel que :*

$$(am)_0 \otimes (am)_1 = a_0m_0 \otimes a_1m_1, \quad \forall a \in A \quad et \quad m \in M. \tag{3.39}$$

Définition 3.2.11 *Un homomorphisme de (A, H)-modules de Hopf est un homomorphisme de R-modules qui est A-linéaire à gauche et H-colinéaire à droite.*
On notera ${}_A\mathcal{M}^H$ la catégorie des (A, H)-modules de Hopf : ses objets sont les (A, H)-modules de Hopf et ses morphismes sont les applications simultanément A-linéaires à gauche et H-colinéaires à droite.

Lemme 3.2.12 *Soient H une algèbre de Hopf commutative et S une algèbre de H-comodule commutative, alors le produit tensoriel $M \otimes_S N$ de deux (S, H)-modules de Hopf M et N est un (S, H)-module de Hopf avec*

$$\rho_{M\otimes_S N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1n_1, \quad pour \quad tous \quad m \in M \quad et \quad n \in N. \tag{3.40}$$

Preuve :

• On sait déjà que $M \otimes_S N$ est une S-module à gauche.

• A-t-on :

$$(\rho_{M\otimes_S N} \otimes id_H) \circ \rho_{M\otimes_S N} = (id_{M\otimes_S N} \otimes \Delta_H) \circ \rho_{M\otimes_S N}$$

et

$$(id_{M\otimes_S N} \otimes \epsilon_H) \circ \rho_{M\otimes_S N} = id_{M\otimes_S N}?$$

Soit $m \otimes n \in M \otimes_S N$

$$\begin{aligned}
[(\rho_{M\otimes_S N} \otimes id_H) \circ \rho_{M\otimes_S N}](m \otimes n) &= (\rho_{M\otimes_S N} \otimes id_H)(\rho_{M\otimes_S N}(m \otimes n)) \\
&= (\rho_{M\otimes_S N} \otimes id_H)(m_0 \otimes n_0 \otimes m_1n_1) \\
&= \rho_{M\otimes_S N}(m_0 \otimes n_0) \otimes m_1n_1 \\
&= m_{00} \otimes_S n_{00} \otimes m_{01}n_{01} \otimes m_1n_1 \\
&= m_0 \otimes_S n_0 \otimes m_1n_1 \otimes m_2n_2 \text{ (i)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes_S N} \otimes \Delta_H) \circ \rho_{M\otimes_S N}](m \otimes n) &= (id_{M\otimes_S N} \otimes \Delta_H)(\rho_{M\otimes_S N}(m \otimes n)) \\
&= (id_{M\otimes_S N} \otimes \Delta_H)(m_0 \otimes n_0 \otimes m_1n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes \Delta_H(m_1n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes (m_1n_1)_1 \otimes (m_1n_1)_2 \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_{11}n_{11} \otimes m_{12}n_{12} \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1n_1 \otimes m_2n_2 \text{ (ii)}.
\end{aligned}$$

(i) et (ii) $\Leftrightarrow (\rho_{M\otimes_S N} \otimes id_H) \circ \rho_{M\otimes_S N} = (id_{M\otimes_S N} \otimes \Delta_H) \circ \rho_{M\otimes_S N}$

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes_S N}\otimes \epsilon_H)\circ \rho_{M\otimes_S N}](m\otimes n) &= (id_{M\otimes_S N}\otimes \epsilon_H)(\rho_{M\otimes_S N}(m\otimes n))\\
&= (id_{M\otimes_S N}\otimes \epsilon_H)(m_0\otimes n_0\otimes m_1n_1)\\
&= (m_0\otimes_S n_0)\epsilon_H(m_1n_1)\\
&= (m_0\otimes n_0)(\epsilon_H(m_1)\epsilon_H(n_1))\\
&= (m_0\epsilon_H(m_1))\otimes (n_0\epsilon(n_1))\\
&= m\otimes n\\
&= id_{M\otimes_S N}(m\otimes n),
\end{aligned}$$

d'où $(id_{M\otimes_S N}\otimes \epsilon_H)\circ \rho_{M\otimes_S N} = id_{M\otimes_S N}$.

Ainsi $M\otimes_S N$ est un H-comodule.
• Soient $s\in S$ et $m\otimes_S n\in M\otimes_S N$. A-t-on :

$$(s(m\otimes_S n))_0\otimes (s(m\otimes_S n))_1 = (s_0(m\otimes_S n)_0)\otimes (s_1(m\otimes_S n)_1)?$$

$$\begin{aligned}
(s(m\otimes_S n))_0\otimes (s(m\otimes_S n))_1 &=((sm)\otimes_S n)_0\otimes ((sm)\otimes_S n)_1\\
&=((sm)_0\otimes_S n_0)\otimes ((sm)_1n_1)\\
&=((s_0m_0)\otimes_S n_0)\otimes ((s_1m_1)n_1)\\
&=(s_0(m_0\otimes_S n_0))\otimes (s_1(m_1n_1))\\
&=(s_0(m\otimes_S n)_0)\otimes (s_1(m\otimes_S n)_1).
\end{aligned}$$

Donc $M\otimes_S N$ est un (S,H)-module de Hopf.

Remarque 3.2.13 *En considérant $\otimes_S$ comme un bifoncteur dans ${}_S\mathcal{M}^H$, et en utilisant les isomorphismes canoniques $M\otimes_S N\simeq N\otimes_S M$, alors $({}_S\mathcal{M}^H,\otimes_S,S)$ devient une catégorie monoïdale symétrique.*

3.2.3 Groupe de Brauer-Clifford des (S,H)-algèbres de Hopf d'Azumaya

Dans cette partie, les algèbres dans ${}_S\mathcal{M}^H$ seront appelées des (S,H)-algèbres de Hopf, les algèbres d'Azumaya dans ${}_S\mathcal{M}^H$ des (S,H)-algèbres de Hopf d'Azumaya, et les modules dans ${}_S\mathcal{M}^H$ qui sont des S-progénérateurs des (S,H)-Hopf lattices.

Définition 3.2.14 *Un homomorphisme de (S,H)-algèbres de Hopf est juste un homomorphisme de S-algèbres H-colinéaires.*

Lemme 3.2.15 *Soit H une algèbre de Hopf commutative et soit S une algèbre de H-module commutative. Supposons que A et B soient des (S,H)-algèbres de Hopf, alors*

(i) $A\otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre de Hopf;

(ii) l'isomorphisme canonique des S-algèbres de Hopf $A\otimes_S B\simeq B\otimes_S A$ est un isomorphisme de (S,H)-algèbres de Hopf;

(iii) A° est une (S,H)-algèbre de Hopf, où l'action H est donnée par $h.a^\circ=(h.a)^\circ$, pour tout $a\in A, a\to a^\circ$ étant l'antiautomorphisme canonique; et

(iv) $A^e := A\otimes_S A^\circ$ est une (S,H)-algèbre de Hopf.

Preuve :

(i) Puisque A et B sont des objets de la catégorie monoïdale ${}_S\mathcal{M}^H$, $A \otimes_S B$ est un objet de ${}_S\mathcal{M}^H$. Puisque A et B sont des S-algèbres de Hopf, $A \otimes_S B$ est une S-algèbre de Hopf d'unité $1_A \otimes_S 1_B$. Il reste à montrer que la coaction de H sur $A \otimes_S B$ est compatible avec le produit dans $A \otimes_S B$.
Soient $a \otimes b$ et $c \otimes d \in A \otimes_S B$. A-t-on :

$$\rho[(a \otimes b)(c \otimes d)] = [(a \otimes b)_0 (c \otimes d)_0] \otimes [(a \otimes b)_1 (c \otimes d)_1]?$$

On a :

$$\begin{aligned} \rho[(a \otimes b)(c \otimes d)] &= \rho[(ac) \otimes (bd)] && (3.41)\\ &= a_0c_0 \otimes b_0d_0 \otimes a_1c_1b_1d_1 \quad \text{(i)} && (3.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(a \otimes b)_0 (c \otimes d)_0] \otimes [(a \otimes b)_1 (c \otimes d)_1] && (3.43)\\ &= [a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 \otimes d_0] \otimes [a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 \otimes d_1] && (3.44)\\ &= a_0c_0 \otimes b_0d_0 \otimes a_1b_1c_1d_1 && (3.45)\\ &= a_0c_0 \otimes b_0d_0 \otimes a_1c_1b_1d_1 \quad \text{(car } H \text{ est commutative)} \quad \text{(ii)} && (3.46) \end{aligned}$$

Par la suite, on a $A \otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre de Hopf car (i)= (ii).

(ii) Puisque ${}_S\mathcal{M}^H$ est une catégorie monoïdale symétrique, l'isomorphisme de S-algèbre de Hopf $A \otimes_S B \to B \otimes_S A$ donnée par $a \otimes_S b \to b \otimes_S a$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$ est un isomorphisme dans ${}_S\mathcal{M}^H$. Donc $A \otimes_S B \simeq B \otimes_S A$ est un isomorphisme de (S,H)-algèbres de Hopf.

(iii) Puisque A est un objet de la catégorie monoïdale ${}_S\mathcal{M}^H$, A° est un objet de ${}_S\mathcal{M}^H$. Puisque A est un S-algèbre de Hopf, A° est une S-algèbre de Hopf. Il reste à montrer que la coaction de H sur A° est compatible avec le produit dans A°.
Soient a° et $b^\circ \in A^\circ$. On a :

$$\begin{aligned} \rho(a^\circ b^\circ) &= \rho((ba)^\circ)\\ &= (ba)_0^\circ \otimes (ba)_1^\circ\\ &= (b_0a_0)^\circ \otimes (b_0a_0)_1^\circ\\ &= a_0^\circ b_0^\circ \otimes a_1^\circ b_1^\circ \end{aligned}$$

$$\rho(1_{A^\circ}) = 1_{A^\circ} \otimes 1_H$$

Donc A° est une (S,H)-algèbre de Hopf.

(iv) Puisque $A \otimes_S B$ et A° sont des (S,H)-algèbres de Hopf lorsque A et B sont des (S,H)-algèbres de Hopf, donc $A \otimes_S A^\circ$ est une (S,H)-algèbre de Hopf.

Lemme 3.2.16 *Soit H une algèbre de Hopf commutative et soit S une algèbre de H-module commutative.*

(i) Si M est un (S, H)-module de Hopf de type fini, alors $End_S(M)$ est une (S, H)-algèbre de Hopf avec la coaction

$$\rho(f)(m) = f_0(m) \otimes f_1 = f(m_0)_0 \otimes f(m_0)_1 S_H(m_1), \quad \forall m \in M.$$

(ii) Si M et N sont des un (S, H)-modules de Hopf tels que M et N sont des S-modules projectifs de type finis, alors

$$End_S(M) \otimes_S End_S(N) \simeq End_S(M \otimes_S N) \text{ en tant que } (S, H)\text{-algèbres de Hopf.}$$

Preuve :

(i) • $End_S(M)$ est une S-algèbre sous composition.

• Montrons que $End_S(M)$ est un objet de ${}_S\mathcal{M}^H$.

On sait déjà que $End_S(M, N)$ est une S-module à gauche.

Soient $f \in End_S(M)$ et $m \in M$

$$\begin{aligned}
[(id_M \otimes \Delta_H) \circ \rho](f)(m) &= (id_M \otimes \Delta_H)(f(m)_0 \otimes f(m)_1) && (3.47)\\
&= (id_M \otimes \Delta_H)(f(m_0) \otimes m_1) && (3.48)\\
&= f(m_0) \otimes m_{11} \otimes m_{12} && (3.49)\\
&= f(m_0) \otimes m_1 \otimes m_2 && (3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\rho \otimes id_H) \circ \rho](f)(m) &= (\rho \otimes id_H)(f(m)_0 \otimes f(m)_1) && (3.51)\\
&= (\rho \otimes id_H)(f(m_0) \otimes m_1) && (3.52)\\
&= \rho(f)(m_0) \otimes m_1 && (3.53)\\
&= f(m_0)_0 \otimes f(m_1)_1 \otimes m_1 && (3.54)\\
&= f(m_{00}) \otimes m_{11} \otimes m_1 && (3.55)\\
&= f(m_0) \otimes m_1 \otimes m_2 && (3.56)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[(id_M \otimes \epsilon_H) \circ \rho](f)(m) &= (id_M \otimes \epsilon_H)(f(m)_0 \otimes f(m)_1) && (3.57)\\
&= (id_M \otimes \epsilon_H)(f(m_0) \otimes m_1) && (3.58)\\
&= f(m_0) \otimes \epsilon_H(m_1) && (3.59)\\
&= f(m_0)\epsilon_H(m_1) && (3.60)\\
&= f(m_0\epsilon_H(m_1)) && (3.61)\\
&= f(m) && (3.62)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :
$[(id_M \otimes \Delta_H) \circ \rho](f) = [(\rho \otimes id_H) \circ \rho](f)$ *et* $[(id_M \otimes \epsilon_H) \circ \rho](f) = f.$

Donc $End_S(M,N)$ est un H-comodule à droite.

• A-t-on $\rho(sf) = s_0 f_0 \otimes s_1 f_1$.
Soit $m \in M$, on :

$$\begin{aligned} \rho(sf)(m) &= (sf)_0(m) \otimes (sf)_1 \\ &= (s_0 f_0)(m) \otimes s_1 f_1, \end{aligned}$$

donc $\rho(sf) = s_0 f_0 \otimes s_1 f_1$.
Par la suite, on a $End_S(M)$ (S,H)-algèbre de Hopf.
• Il reste que montrer que la coaction de H est compatible avec la loi de composition dans $End_S(M)$.
Soient $f, g \in End_S(M)$ et $m \in M$. Alors

$$\begin{aligned} [\rho(f \circ g)](m) &= [(f \circ g)(m_0)]_0 \otimes [(f \circ g)(m_0)]_1 S_H(m_1) && (3.63) \\ &= [(f(g(m_0))]_0 \otimes [f(g(m_0))]_1 S_H(m_1) && (3.64) \\ &= f(g(m_0))_0 \otimes f(g(m_0)_1) S_H(m_1) && (3.65) \\ &= f(g(m_0))_0 \otimes f(g(m_0)_0)_1 S_H(g(m_0)_1) S_H(m_1) && (3.66) \\ &= f(g(m_0)_0)_0 \otimes f(g(m_0)_0)_1 S_H(g(m_0)_{11}) g(m_0)_{12} S_H(m_1) && (3.67) \\ &= f(g(m_0)_0)_0 \otimes f(g(m_0)_0)_1 S_H(g(m_0)_1) g(m_0)_2 S_H(m_1) && (3.68) \\ &= f_0(g(m_0)_0) \otimes f_1(g(m_0)_1) S_H(m_1) && (3.69) \\ &= (f_0 \circ g_0)(m) \otimes f_1 g_1 && (3.70) \end{aligned}$$

donc $\rho(f \circ g) = f_0 \circ g_0 \otimes f_1 g_1$

$$\begin{aligned} \rho(id_M)(m) &= id_{M_0}(m) \otimes id_{M_1} && (3.71) \\ &= id_M(m_0)_0 \otimes id_M(m_0)_1 S_H(m_1) && (3.72) \\ &= m_{00} \otimes m_{01} S_H(m_1) && (3.73) \\ &= m_0 \otimes m_{11} S_H(m_{12}) && (3.74) \\ &= m_0 \otimes \epsilon_H(m_1) 1_H && (3.75) \\ &= m_0 \epsilon_H(m_1) \otimes 1_H && (3.76) \\ &= m \otimes 1_H && (3.77) \end{aligned}$$

d'où $\rho(id_M)(m) = m \otimes 1_H$. Ainsi $End_S(M)$ est une (S,H)-algèbre de Hopf.

(ii) D'après (i), $End_S(M \otimes_S N)$ est une (S,H)-algèbre de Hopf. D'après le lemme (3.2.15), $End_S(M) \otimes_S End_S(N)$ est une (S,H)-algèbre de Hopf. L'application canonique

$$\phi : End_S(M) \otimes_S End_S(N) \longrightarrow End_S(M \otimes_S N)$$

définie par

$$\phi(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$$

est un isomorphisme de S-algèbres de Hopf lorsque M et N sont des S-modules projectifs de type finis. Il reste à montrons que ϕ est H-colinéaire.

Soient $f \otimes g \in End_S(M) \otimes_S End_S(N)$ et $m \otimes n \in M \otimes_S N$. On a :

$$\begin{aligned}
\phi(f\otimes g)_0(m\otimes n)\otimes\phi(f\otimes g)_1 &= [\phi(f\otimes g)((m\otimes n)_0)])_0\otimes[\phi(f\otimes g)((m\otimes n)_0)]_1 S_H((m\otimes n)_1\\
&= [\phi(f\otimes g)(m_0\otimes n_0)]_0\otimes[\phi(f\otimes g)(m_0\otimes n_0)]_1 S_H(m_1n_1)\\
&= [f(m_0)\otimes g(n_0)]_0\otimes[f(m_0)\otimes g(n_0)]_1 S_H(m_1n_1)\\
&= [f(m_0)_0\otimes g(n_0)_0]\otimes[f(m_0)_1 g(n_0)_1]S_H(m_1n_1)\\
&= [f(m_0)_0\otimes g(n_0)_0]\otimes[f(m_0)_1 g(n_0)_1]S_H(n_1)S_H(m_1)\\
&= [f(m_0)_0\otimes g(n_0)_0]\otimes[f(m_0)_1 g(n_0)_1 S_H(n_1)S_H(m_1)]\\
&= [f_0(m)\otimes g_0(n)]\otimes f_1g_1\\
&= \phi((f\otimes g)_0)(m\otimes n)\otimes(f\otimes g)_1
\end{aligned}$$

Ainsi $End_S(M) \otimes_S End_S(N) \simeq End_S(M \otimes_S N)$ en tant que (S,H)-algèbres.

Lemme 3.2.17 *Soit H une algèbre de Hopf commutative et soit S une algèbre de H-module commutative.*

(i) Si P est un (S,H)-Hopf lattice, alors $End_S(P)$ est une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya.

(ii) Si P est un (S,H)-Hopf lattice, alors $P^\star$ est un (S,H)-Hopf lattice.

(iii) Si P est un (S,H)-Hopf lattice, alors $End_S(P)^\circ \simeq End_S(P^\star)$ sont isomorphes en tant que (S,H)-algèbres de Hopf.

(iv) Si A est une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya, alors A° est une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya.

(v) Si A et B sont des (S,H)-algèbres d'Azumaya, alors $A \otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya.

Preuve :

(i) $End_S(P)$ est une une S-algèbre de Hopf d'Azumaya puisque P est un S-progénérateur. Comme c'est aussi une (S,H)-algèbre de Hopf. Il s'ensuit que $End_S(P)$ est une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya.

(ii) D'après le lemme (3.2.16), $P^\star$ est un (S,H)-Hopf lattice. D'après [[4],Corollaire 1.3.4(f)], $P^\star$ est un S-progénérateur. Donc $P^\star$ est un (S,H)-Hopf lattice.

(iii) Puisque $P^\star$ est un (S,H)-Hopf lattice d'après (ii), $End_S(P^\star)$ est une (S,H)-algèbre de Hopf.
Puisque P est un (S,H)-Hopf lattice, $End_S(P)$ et P° sont des (S,H)-algèbres de Hopf. Donc $End_S(P)^\circ$ est une (S,H)-algèbre de Hopf.
Puisque P est un S-algèbre de Hopf d'Azumaya, il d'écoule du [[4],Corollaire 1.3.4(f)] que l'application S-linéaire $\theta : End_S(P)^\circ \longrightarrow End_S(P^\star)$ définie par

$$\theta(b)(y) = y \circ b \text{ pour tous } b \in End_S(P)^\circ \text{ et } y \in P^\star,$$

est un isomorphisme d'anneaux. θ est S-linéaire puisque b et y sont S-linéaires.

Soit $x \in P$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
[\theta(b)_0(y)](x) \otimes \theta(b)_0(y) &= [\theta(b)(y_0)]_0(x) \otimes [\theta(b)(y_0)]_1 S_H(y_1) \\
&= (y_0 \circ b)_0(x) \otimes (y_0 \circ b)_1 S_H(y_1) \\
&= [(y_0 \circ b)(x_0)]_0 \otimes [(y_0 \circ b)(x_0)]_1 S_H(g_1) S_H(x_1) \\
&= [y_0(b(x_0))]_0 \otimes [y_0(b(x_0))]_1 S_H(y_1) S_H(x_1) \\
&= [y(b(x_0)_0)]_{00} \otimes [y(b(x_0)_0)]_{01} S_H[[y(b(x_0)_1)]_1 S_H(b(x_0)_1)] S_H(x_1) \\
&= [y(b(x_0)_0)]_{00} \otimes [y(b(x_0)_0)]_{01} S_H([y(b(x_0)_1)])_1) {S_H}^2(b(x_0)_1) S_H(m_1) \\
&= y(b(x_0)_0) \otimes b(x_0)_1 S_H(x_1) \\
&= y(b_0(x)) \otimes b_1 \\
&= [\theta(b_0)(y)](x) \otimes b_1
\end{aligned}$$

Donc θ est H-colinéaire. Ainsi $End_S(P)^\circ \simeq End_S(P^\star)$ sont isomorphes en tant que (S,H)-algèbres de Hopf.

(iv) On a déjà vue que A° est une (S,H)-algèbre de Hopf. Il reste à montrer que A° est une S-algèbre de Hopf d'Azumaya. Puisque A est un S-progénérateur, A° est un S-progénérateur. Comme A est une S-algèbre de Hopf d'Azumaya,

$$A \otimes_S A^\circ \simeq End_S(A) \simeq A^\circ \otimes_S A.$$

Comme $A \simeq (A^\circ)^\circ$, on a $A^\circ \otimes_S (A^\circ)^\circ \simeq End_S(A^\circ)$, A° est une S-algèbre de Hopf d'Azumaya.
Ainsi A° est une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya.

(v) On a déjà vue que $A \otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre de Hopf. Il reste à montrer que $A \otimes_S B$ est une S-algèbre de Hopf d'Azumaya. Puisque A et B sont des S-progénérateurs, $A \otimes_S B$ est un S-progénérateur.
On a

$$\begin{aligned}
A \otimes_S B \otimes_S (A \otimes_S B)^\circ &\simeq A \otimes_S B \otimes_S B^\circ \otimes_S A^\circ \\
&\simeq A \otimes_S End_S(B) \otimes_S A^\circ \\
&\simeq A \otimes_S A^\circ \otimes_S End_S(B) \\
&\simeq End_S(A) \otimes_S End_S(B) \\
&\simeq End_S(A \otimes_S B).
\end{aligned}$$

Donc $A \otimes_S B$ est une S-algèbre de Hopf d'Azumaya.
Ainsi $A \otimes_S B$ est une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya.

Définition 3.2.18 *Nous disons que deux (S,H)-algèbres de Hopf d'Azumaya A et B sont équivalentes au sens de Brauer(et on note $A \sim B$) s'il existe des (S,H)-Hopf lattices P et Q pour lesquels $A \otimes_S End_S(P) \simeq B \otimes_S End_S(Q)$ comme des (S,H)-algèbres de Hopf d'Azumaya.*

Proposition 3.2.19 *L'ensemble des classes d'équivalences des (S,H)-algèbres de Hopf d'Azumaya sous la relation $\sim$ muni du produit $\otimes_S$ est un groupe abélien.*

Pour la preuve, elle est identique à celle faite dans le cas des (S,H)-algèbres d'Azumaya. La classe de S est son identité et l'inverse de la classe d'une (S,H)-algèbre de Hopf d'Azumaya A est celle de A°.

Définition 3.2.20 *Nous appelons à ce double groupe de Brauer-Clifford $B^{co}(S, H)$.*

Considérons $H^\star = Hom(H, R)$.

Proposition 3.2.21 *Soit H une algèbre de Hopf, alors $H^\star$ muni du produit de convolution défini par $(f * g)(h) = f(h_1)g(h_2)$ est une algèbre associative unitaire d'unité ϵ_H et si H est cocommutative alors $H^\star$ est commutative.*

Preuve :
$H^\star$ est un R-module, car R est un anneau commutatif.
Soient f et g $\in H^\star$. A-t-on $f \star g \in H^\star$?
On a :

$$\begin{aligned} (f \star g)(h + h') &= f[(h + h')_1]g[(h + h')_2] \ \forall h, h' \in H \\ &= f(h_1)g(h_1) + f(h'_2)g(h'_2) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$(f \star g)(h) + (f \star g)(h') = f(h_1)g(h_1) + f(h'_2)g(h'_2) \ \forall h, h' \in H.$$

Donc $f \star g$ est additif (i).
De plus on a :

$$\begin{aligned} (f \star g)(\lambda h) &= f[(\lambda h)_1]g[(\lambda h)_2] \\ &= f(\lambda h_1)g(h_2) \\ &= \lambda f(h_1)g(h_2) \\ &= \lambda[(f \star g)(h)] \text{ avec } \Delta(\lambda h) = \lambda h_1 \otimes h_2. \end{aligned}$$

Donc $f \star g$ préserve la loi externe (ii).
(i) et (ii) $\Rightarrow f \star g \in H^\star$.
• Unité
$f \in H^\star$. A-t-on :

$$\epsilon_H \star f = f = f \star \epsilon_H?$$

Soit $h \in H$ On a :

$$\begin{aligned} \epsilon_H(h) \star f &= \epsilon_H(h_1)f(h_2) \\ &= f(\epsilon_H(h_1)h_2)(\text{car f est } R\text{-linéaire}) \\ &= f(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f \star \epsilon_H)] &= f(h_1)\epsilon_H(h_1) \\ &= f(h_1\epsilon_H(h_2)) \text{ (car f est } R\text{-linéaire)} \\ &= f(h). \end{aligned}$$

On a bien $\epsilon_H \star f = f = f \star \epsilon_H$, $f \in H^\star$.
• Associativité :
Soients $f, g, k \in H^\star$.A-t-on :

$$f \star (g \star k) = (f \star g) \star k?$$

Soit $h \in H$. On a :

$$\begin{aligned}
[f \star (g \star h)](h) &= f(h_1)(g \star k)(h_2) \\
&= f(h_1)[g(h_{21})k(h_{22})] \\
&= f(h_1)g(h_{21})k(h_{22}) \\
&= f(h_1)g(c_2)k(c_3) \\
&= f(h_{11})g(h_{12})k(h_2) \\
&= [f(h_{11})g(h_{12})]k(h_2) \\
&= (f \star g)(h_1)k(h_2) \\
&= [(f \star g) \star k](h).
\end{aligned}$$

Donc $f \star (g \star k) = (f \star g) \star k$. D'où l'associativité.

• Distributivité de loi " $\star$" par rapport à l'addition :

Soient $f, g, k \in H^\star$ et $h \in H$. On a :

$$\begin{aligned}
[f \star (g + h)](h) &= f(h_1)(g + h)(h_2) \\
&= f(h_1)[g(h_2) + h(h_2)] \\
&= f(h_1)g(h_2) + f(h_1)h(h_2) \\
&= (f \star g)(h) + (f \star h)(h). \\
&= [f \star g + f \star h](h).
\end{aligned}$$

Donc $f \star (g + k) = f \star g + f \star k$. D'où la distributivité à gauche.

$$\begin{aligned}
[(g + k)] \star f](h) &= (g + k)(h_1)f(h_2) \\
&= [g(_1) + k(k_1)]f(h_2) \\
&= g(h_1)f(h_2) + k(h_1)f(h_2) \\
&= (g \star f)(h) + (k \star f)(h). \\
&= [g \star f + k \star f](h).
\end{aligned}$$

Donc $(g + k)] \star f = g \star f + k \star f$. D'où la distributivité à droite.

Ainsi $H^\star$ est un anneau.

Soient $\lambda \in R$ et $f, g, \in H^\star$.A-t-on :

$$\lambda(f \star g) = (\lambda f) \star g = f \star (\lambda g)?$$

Soit $h \in H$. On a :

$$\begin{aligned}
[\lambda(f \star g)](h) &= \lambda[(f \star g)(h)] \\
&= \lambda[f(h_1)g(h_2)] \\
&= [\lambda f(h_1)g(h_2)] \\
&= [\lambda f(h_1)]g(h_2) \\
&= [(\lambda f) \star g](h)\,;\ \text{d'où } \lambda(f \star g) = (\lambda f) \star g \text{ (a).}
\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
[\lambda(f \star g)](h) &= \lambda[(f \star g)(h)] \\
&= \lambda[f(h_1)g(h_2)] \\
&= [f(h_1)\lambda g(h_2)] \\
&= f(h_1)[\lambda g(h_2)] \\
&= [f \star (\lambda g)](h)\,;\ \text{d'où } \lambda(f \star g) = f \star (\lambda g) \text{ (b).}
\end{aligned}$$

(a) et (b) $\Rightarrow \lambda(f \star g) = (\lambda f) \star g = f \star (\lambda g)$

$(H^\star, \star)$ est donc une algèbre d'unité ϵ_H.

Proposition 3.2.22 *Si H est projective et de type fini. Alors $H^\star$ est une algèbre de Hopf et il existe une équivalence entre les catégories des H-modules à gauches et des $H^\star$-comodules à droites.*

Proposition 3.2.23 *Soit H une algèbre de Hopf.*
a) Si M est une H-module à gauche et si $(h_i^\star, h_i)$ est une paire duale de bases de $H^\star$ et H, alors M est un $H^\star$-comodule à droite avec la coaction $\rho_M(m) = \sum_i h_i m \otimes_S h_i^\star$.

b) En utilisant la même base duale, si N est un $H^\star$-comodule à droite, alors N est un H-module à gauche avec $h_i.n = h_i^\star(n_1)n_0$, $\forall n \in N$.

Preuve :

(a) Soit M est une H-module à gauche. Montrons que M est un $H^\star$-comodule à droite via $\rho_M(m) = \sum_i h_i m \otimes_S h_i^\star$.
A-t-on :

$$[(\rho_M \otimes_S id_{H^\star}) \circ \rho_M](m) = [(id_M \otimes_S \Delta_{H^\star}) \circ \rho_M](m)?$$

Soit $m \in M$. On a :

$$\begin{aligned}
[(\rho_M \otimes_S id_{H^\star}) \circ \rho_M](m) &= (\rho_M \otimes_S id_H)(\textstyle\sum_i h_i m \otimes_S h_i^\star) \\
&= \rho_M(\textstyle\sum_i h_i m) \otimes_S h_i^\star) \\
&= \textstyle\sum_{i,j} h_{ij} m \otimes_S h_{ij}^\star \otimes_S h_i^\star \\
&= \textstyle\sum_j h_j m \otimes_S \Delta_{H^\star}(h_j^\star).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
[(id_M \otimes_S \Delta_{H^\star}) \circ \rho_M](m) &= (id_M \otimes_S \Delta_{H^\star})(\textstyle\sum_i h_i m \otimes_S h_i^\star) \\
&= \textstyle\sum_i h_i m \otimes_S \Delta_{H^\star}(h_i^\star).
\end{aligned}$$

Pour i = j on a $[(\rho_M \otimes_S id_{H^\star}) \circ \rho_M](m) = [(id_M \otimes_S \Delta_{H^\star}) \circ \rho_M](m)$.
Donc M est un H-comodule à droite.

(b) Soit N est un $H^\star$-comodule à droite. Montrons que N est un H-module à gauche avec $h_i.n = h_i^\star(n_1)n_0$.
Soient $h_i, h_i' \in H$ et $n \in N$. A-t-on $(h_i h_i').n = h_i.(h_i'.n)$?

$$\begin{aligned}
(h_i h_i').n &= (h_i h_i')^\star(n_1)n_0 && (3.78)\\
&= (h_i^\star h_i'^\star)(n_1)n_0 && (3.79)\\
&= h_i^\star(n_{11}) h_i'^\star(n_{12})n_0 && (3.80)\\
&= h_i^\star(n_1) h_i'^\star(n_2)n_0 && (3.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i.(h'_i.n) &= h_i.(h'^{\star}_i(n_1)n_0) &(3.82)\\ &= h'^{\star}_i(n_1)h_i.n_0 &(3.83)\\ &= h'^{\star}_i(n_1)h^{\star}_i(n_{01})n_{00} &(3.84)\\ &= h^{\star}_i(n_{01})h'^{\star}_i(n_1)n_{00} &(3.85)\\ &= h^{\star}_i(n_1)h'^{\star}_i(n_2)n_0 \quad \text{(ii)} &(3.86) \end{aligned}$$

(3.81) et (3.86) $\Rightarrow (h_ih'_i).n = h_i.(h'_i.n)$.
Donc N est un H-module à gauche.

Remarque 3.2.24 *Ces correspondances donnent une équivalence entre les catégories des $S\#H$-modules et des (S,$H^\star$)-modules de Hopf sous laquelle les algèbres dans les deux catégories correspondent aussi.*

Théoréme 3.2.25 *Soit H une algèbre de Hopf commutative qui est un R-module projectif de type fini et soit S une algèbre de H-module commutative, alors*

$$B^{co}(S, H^\star) = B(S, H).$$

Preuve :

Montrons qu'il existe une équivalence entre les catégories des $S\#H$-modules et des $(S, H^\star)$-modules de Hopf lorsque H est un R-module projectif de type fini.
C'est-à-dire montrons que ${}_{S\#H}\mathcal{M} \simeq_S \mathcal{M}^{H^\star}$.

(i) Montrons que les objets sont les mêmes.
• Supposons M un $(S, H^\star)$-module de Hopf et montrons que M est un $S\#H$-module à gauche.
Considérons l'action ${}_{S\#H}\mathcal{M}$ à gauche suivante sur M :

$$(s\#h)m = s(hm). \tag{3.87}$$

Soient $s, s' \in S$ et $h, h' \in H$. On a :

$$\begin{aligned} [(s\#h)(s'\#h')]m &= [(s(h_1.s')\#h_2h')]m &(3.88)\\ &= s(h_1.s')(h_2h')m &(3.89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s\#h)[(s'\#h')m] &= (s\#h)[s'(h'm)] &(3.90)\\ &= s[h(s'(h'm))] &(3.91)\\ &= s(h_1.s')[h_2(h'm)] &(3.92)\\ &= s(h_1.s')(h_2h')m &(3.93) \end{aligned}$$

$$1_Hm = 1_S\#1_Hm = m.$$

Donc M est un $S\#H$-module à gauche.

•• Supposons M est un $S\#H$-module à gauche et montrons que M est un $(S, H^{\star})$-module de Hopf.

Les formules

$$sm = (s\#1_H)m \tag{3.94}$$

et

$$hm = (1_S\#h)m \tag{3.95}$$

font de M un S-module à gauche et un H-module à gauche. Donc d'après la proposition (3.2.22), M est aussi un $H^{\star}$-comodule à droite.

On a aussi $(sm)_0 \otimes (sm)_1 = s_0m_0 \otimes s_1m_1$. Il s'ensuit que M est un $(S, H^{\star})$-module de Hopf.

Ainsi les objets des deux catégories sont les mêmes.

(ii) Montrons que les morphismes sont les mêmes.

• A-t-on $S\#H$-linéaire à gauche $\Rightarrow$ S-linéaire à gauche et $H^{\star}$-colinéaire à droite ?

Supposons f est $S\#H$-linéaire à gauche de $M \longrightarrow N$. On a :

(a) $f(sm) = f((s\#1_H)m) = (s\#1_H)f(m) = sf(m) \Rightarrow f$ est S-linéaire à gauche.

(b) $f(hm) = f((1_S\#h)m) = (1_S\#h)f(m) = hf(m) \Rightarrow f$ est H-linéaire à gauche $\Rightarrow f$ est $H^{\star}$-colinéaire à droite car la catégorie des H-modules à gauche et des $H^{\star}$-comodules à droite sont équivalentes.

•• A-t-on S-linéaire à gauche et $H^{\star}$-colinéaire à droite $\Rightarrow$ $S\#H$-linéaire à gauche ?

Supposons f est S-linéaire à gauche et $H^{\star}$-colinéaire à droite de $M \longrightarrow N$.

Comme $H^{\star}$-colinéaire à droite $\Rightarrow$ H-linéaire à gauche. Alors on a : $f((s\#h)m) = f(s(hm)) = sf(hm) = s(h)f(m) = (s\#h)f(m) \Rightarrow f$ est $S\#H$-linéaire à gauche.

Donc les applications $S\#H$-linéaires à gauche sont les applications simultanément S-linéaires à gauche et $H^{\star}$-colinéaires à droite.

Donc (i) et (ii) $\Leftrightarrow$ ${}_{S\#H}\mathcal{M} \simeq {}_S\mathcal{M}^{H^{\star}}$.

Puisque ces catégories sont équivalentes, les algèbres, les morphismes d'algèbres, les lattices dans ${}_{S\#H}\mathcal{M}$ sont respectivement les algèbres, les morphismes d'algèbres, les lattices dans ${}_S\mathcal{M}^{H^{\star}}$. Inversement, les algèbres, les morphismes d'algèbres, les lattices dans ${}_S\mathcal{M}^{H^{\star}}$ sont respectivement les algèbres, les morphismes d'algèbres, les lattices dans ${}_{S\#H}\mathcal{M}$.

Maintenant on peut montrer que $B(S, H) = B^{co}(S, H^{\star})$

. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Soit } [[A]] \in B(S,H) \quad &\Rightarrow A \in_{S\#H} \mathcal{M} \text{ comme algèbre d'Azumaya} \\ &\Rightarrow A \in_S \mathcal{M}^{H^{\star}} \text{ comme algèbre d'Azumaya} \\ &\Rightarrow [[A]] \in B^{co}(S, H^{\star}). \end{aligned}$$

Donc $B(S, H) \subset B^{co}(S, H^{\star})$.(1)

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \text{Soit } [[A]] \in B^{co}(S,H^{\star}) \quad &\Rightarrow A \in_S \mathcal{M}^{H^{\star}} \text{ comme algèbre d'Azumaya} \\ &\Rightarrow A \in_{S\#H} \mathcal{M} \text{ comme algèbre d'Azumaya} \\ &\Rightarrow [[A]] \in B(S, H) \end{aligned}$$

Donc $B^{co}(S, H^{\star}) \subset B(S, H)$.(2)

(1) et (2) $\Rightarrow B(S, H) = B^{co}(S, H^{\star})$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié le groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres d'Azumaya sur un anneau commutatif. Les caractères commutatifs de l'algèbre S et cocommutatif de l'algèbre de Hopf H sont d'une importance remarquable. Cela nous a permis de montrer que la catégorie $({}_{S\#H}M, \otimes_S, S)$ est monoïdale symétrique. Cela nous a permis aussi de démontrer que l'opposé d'une (S, H)-algèbre d'Azumaya est une (S, H)-algèbre d'Azumaya. Par la suite, nous avons élargi notre champ d'étude au groupe de Brauer-Clifford des (S, H)-algèbres de Hopf d'Azumaya. Ici, les caractères commutatifs de l'algèbre S et commutatif de l'algèbre de Hopf H sont d'une importance remarquable. Cela nous à permis de montrer que la catégorie $({}_S\mathcal{M}^H, \otimes_S, S)$ est monoïdale symétrique. Cela nous a permis aussi de démontrer que l'opposé d'une (S, H)-algèbre de Hopf d'Azumaya est une (S, H)-algèbre de Hopf d'Azumaya. Ainsi, nous avons établi une relation entre ces deux groupes de Brauer-Clifford (voir (0.0.3)) lorsque H est une R-module projectif de type fini.

Bibliographie

[1] S, Caenepeel. : Brauer Groups, Hopf Algebras and Galois Theory. K-Monographs Math.,Vol.4.Kruwer Academic Publishers, Dordrecht(1998)

[2] E.C, Dade. : Clifford theory for group-graded rings. J.Reine Angew.Math.368-40-86(1986)

[3] M, Sweedler. : E.C, Dade : Clifford theory and Galois theory,I.J.Algebra 319,779-799(2008)

[4] F, DeMeyer., E ,Ingraham. : Separable Algebras over Commutative Rings.Springer(1971)

[5] A, Frohlich., C.T.C., Wall. : Equivariant Brauer groups. Contemp.Math.272,57-71(2000)

[6] A, Herman., Mitra,D. :Equivalence and the Brauer-Clifford group for G-algebras over commutative rings. Commun.Algebra(2011).Doi :10.1080/00927872.2011.604242

[7] M.A, Knus. : Algebras graded by a group.In :category Theory,Homology Theory,and their applications II. Lecture Notes in mathematics.No.92.Springer,Berlin(1969)

[8] M.A, Knus, M, Ojanguren. : Théorie de la Descente et Algèbres d'Azumaya.Spinger Lecture Notes,vol.389(1974)

[9] S, MacLane. : Categores for the Working Mathematician. Springer(1971)

[10] S, Montgomery. : Hopf Algebras and their Action on Rings. CBMS Reg.Conf.Ser.in Math.,vol.82.AMS(1993)

[11] M, Sweedler. : Hopf Algebras.Benjamin, New York :, (1969).

[12] A, Turull. : The Brauer-Clifford Group. J.algebra 321-3620-3642(2009)

[13] A, Turull. : Brauer-Clifford equivalence of full matrix algebras. J.Algebra 321-3620-3658(2009)

[14] T. Guédénon and A. Herman. The Brauer-Clifford group for (S, H)-Azumaya algebras over a commutative ring. Algebras and Representation Theory, 16(1) :101–127, 2013.