UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Sciences et Technologies
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Analyse Complexe

Titre : Résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe

Présenté par : Papa Aly CISSE

Directeur : Dr Mansour SANE
Co-directeur : Dr Mamadou Eramane BODIAN
Superviseur : Pr Marie Salomon SAMBOU

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Thomas GUEDENON	Professeur Assimilé	Président	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Superviseur	UASZ
Moussa FALL	Maitre de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Mansour SANE	Maitre de Conférences Titulaire	Directeur	UASZ
Mamadou Eramane BODIAN	Maître de conférences Titulaire	Co-Directeur	UASZ

Année universitaire : 2021−2022

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$

Papa Aly CISSE

30 Octobre 2023

Résumé

Dans ce mémoire, il est question d'étudier l'article [11] dans lequel Salomon Sambou et Mansour Sané ont résolu l'équation $\overline{\partial} u = f$ où u est une forme différentielle de classe C^∞ qui a une valeur au bord au sens des courants dans Ω un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Ils ont obtenu une solution u qui est une forme différentielle ayant une valeur au bord au sens des courants dans Ω.

Remerciements

je rends grâce à DIEU de m'avoir permis d'accéder à ce niveau pour accomplir ce modeste travail.

Mes très sincères remerciements à mon Directeur de mémoire **Dr Mansour SANE** et à mon Co-directeur **Dr Mamadou Eramane BODIAN**, pour la confiance, la patience, les conseils, l'orientation qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bon port. Qu'ils trouvent dans ce travail un hommage vivant à leur haute personnalité.

Mes vifs remerciements au président du jury **Pr Thomas GUEDENON** , au **Dr Moussa FALL** et au superviseur de ce mémoire **Pr Marie Salomon SAMBOU** pour avoir accepté d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.
Je remercie **Dr Souhaïbou SAMBOU** par ses conseils et ses encouragements.

Je remercie également **tous les professeurs** du département de Mathématiques, qui par leurs compétences m'ont soutenu dans la poursuite de mes études, chose qui n'était pas évidente.
Mes remerciements s'adressent aussi à **l'Inspecteur d'Académie de Ziguinchor** qui m'a autorisé à m'inscrire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ), à **l'administration de mon lycée (Lycée de Nyassia)** et tout le corps **professoral** pour tout leur soutien.
Je remercie aussi mes **camarades de promotion** de Master 2. Un remerciement très profond à mon ami et collègue **Mohamed Fadel AÏDARA** professeur au Lycée DJIBOCK, avec qui on a cheminé depuis la FASTEF.

Mes chaleureux remerciements vont à mon défunt père **Omar CISSE**, à ma mère **Awa NIANG**, à mes oncles, à mes tantes, et mes frères particulièrement **Pape Malick CISSE**, **Badou NDAO**, **Lamine CISSE**, **Mohamed NDAO à Kolda**, pour leur amour inestimable, leur confiance et leur soutien.

Mes remerciements spéciaux vont à l'endroit de mes enfants et de mes épouses **Ndèye Khady SIDIBE** et **Aïssatou Angèle MANSALY** pour leurs affections et encouragements.

Table des matières

Table des matières 3

Introduction 4

1 Préliminaires 6

1.1 Notion de variété différentiable 6

1.1.1 Variété différentiable et Espace tangent 6

1.1.2 Fibrés vectoriels et Champs de vecteurs 9

1.2 Formes différentielles sur les variétés différentiables 12

1.2.1 Formes différentielles à valeurs réelles 12

1.2.2 Formes différentiells à valeurs complexes 14

1.3 Variété presque complexe et variété complexe 16

1.3.1 Variétés holomorphes 16

1.3.2 Structure complexe sur les variétés différentielles de dimension paire 21

2 L'opérateur $\bar{\partial}$ sur les Courants 25

2.1 Formes différentielles sur les variétés complexes 25

2.1.1 Formes différentielles de bidegré (p, q) 25

2.1.2 Topologie d'espace de Fréchet 27

2.2 Courants sur les variétés complexes 30

2.2.1 Courants 30

2.2.2 Courants prolongeables 32

2.3 Groupes de $\bar{\partial}$-cohomologie 34

3 Résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants 36

3.1 Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre N 36

3.1.1 Pseudoconvexité 36

3.1.2 Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre N 39

3.2 Application à la résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes ayant une valeur au bord au sens des courants 41

3.2.1 Remarque sur l'ordre d'un courant qui prolonge un forme différentielle à croissance polynomiale. 41

3.2.2 Preuve du Théorème principal 44

Conclusion 48

Bibliographie 49

Bibliographie 49

Introduction

Dans ce travail, nous verrons que si f est une forme différentielle de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants et $\bar\partial$ fermée sur un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de $\mathbb{C}^n$, alors il existe une forme u à valeur au bord au sens des courants sur ce domaine telle que $\bar\partial u = f$. Il s'agit du théorème principal (théorème principal de l'article Salomon SAMBOU et Mansour SANE [11]).
Selon Lojaciewicz et Tomassini [9], si une forme différentielle f admet une valeur au bord au sens des courants sur $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$, alors il existe un courant F à support compact sur $\overline{\Omega}$ tel que $F_{|\Omega} = f$. Ceci entraîne que f est un courant prolongeable et donc d'ordre l.
D'après [10] si f est un courant prolongeable $\overline{\partial}$ fermé, alors il existe un courant prolongeable U tel que $\overline{\partial} U = f$. Cependant ce résultat de [10] ne permet pas de dire qu'il existe une forme U de classe C^∞ avec valeur au bord au sens des courants telle que $\overline{\partial} U = f$.
Pour établir le théorème principal, la démarche adoptée est la suivante :
soit f un courant prolongeable sur Ω d'ordre l et $\overline{\partial}$ fermé.

- On montre qu'il existe un courant prolongeable d'ordre l tel que $\overline{\partial} U = f$.
- Soit S une extension d'ordre l à support compact de U sur $\overline{\Omega}$. Posons $F = \overline{\partial} S$.
  D'après la formule de $\bar\partial$-homotopie de [3], on a $S = R_\epsilon S + A_\epsilon \bar\partial S + \bar\partial A_\epsilon S$ où R_ϵ est un opérateur régularisant ie $R_\epsilon S$ est $\mathbb{C}^\infty$ et où la régularité de $A_\epsilon \bar\partial S$ sur Ω est meilleure que celle de $\bar\partial S$ sur un $\epsilon-$voisinage de Ω. [3]
  Or $\bar\partial S = F$. Ainsi $S_\epsilon = R_\epsilon S + A_\epsilon F$ est une autre solution du $\overline{\partial}$ de F.
- On montre que S_ϵ a une valeur au bord au sens des courants en partant d'un résultat préliminaire où on montre qu'une forme différentielle à croissance polynomiale admet une valeur au bord au sens des courants.

Théorème 0.0.1 (Théorème Principal) *[11]*
Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞ et soit f une $(0,r)$ forme différentielle de classe C^∞, $\overline{\partial}$ fermée admettant une valeur au bord au sens des courants, $1 \leq r \leq n$. Il existe une $(0, r-1)$ forme différentielle g de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants, telle que $\bar\partial g = f$.

Notre démarche dans ce mémoire est la suivante :

- *Au chapitre 1, nous allons voir les notions préliminaires, les variétés différentiables, les formes différentielles sur ces variétés et les variétés presque complexes et variétés holomorphes.*
- *Au chapitre 2, nous verrons l'opérateur $\overline{\partial}$ sur les courants. Pour cela, nous allons voir les $(p,q)-$formes différentielles sur les variétés complexes, les courants sur ces variétés, les courants prolongeables et les groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie.*

— *Le dernier chapitre concerne la preuve du théorème principal qui commence par la résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre N et par la remarque sur l'ordre d'un courant qui prolonge une forme différentielle à croissance polynomiale.*

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notion de variété différentiable

1.1.1 Variété différentiable et Espace tangent

Définition 1.1.1

Soit $\mathbf{T}$ *un espace topologique et soit* $\mathcal{R} = \{U_i\}_{i \in I}$ *un recouvrement de* $\mathbf{T}$.

1. *On dit que* $\mathcal{R}$ *est localement fini si tout point* x *de* $\mathbf{T}$ *posséde un voisinage ouvert* U_x *tel que* $U_x \cap U_i = \emptyset$ *sauf par un nombre fini d'indice* $i \in \mathbb{N}$ *(ie* U_x *ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de* $\mathcal{R}$.
2. *On dit qu'un recouvrement* $\mathcal{R}' = \{V_i\}_{j \in J}$ *est plus fin que* $\mathcal{R}$ *si* $\forall j \in J$*, il existe* $i \in I$ *tel que* $V_j \subset U_i$.
3. *On dit que* $\mathbf{T}$ *est paracompact s'il est séparé et si tout recouvrement admet un recouvrement localement fini plus fin.*

Définition 1.1.2

On dit qu'un espace topologique $\mathbf{T}$ *est dénombrable à l'infini s'il est réunion dénombrable de compacts.*

Proposition 1.1.1

Tout espace localement compact, dénombrable à l'infini est paracompact et admet une base topologique dénombrable.

Proposition 1.1.2

Si $\mathbf{T}$ *est un espace paracompact et* $\mathcal{R} = \{u_i\}_{i \in I}$ *un recouvrement localement fini, alors il existe un recouvrement* $\mathcal{R}' = \{v_i\}_{i \in I}$ *, avec le même ensemble d'indices* I*, tel que* $\overline{v}_i \subset u_i$ *pour tout* $i \in I$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\ \omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois différentiables et de dérivée k-ième continue et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

Définition 1.1.3

Soit M un espace topologique.

1. *Une carte locale sur M est un couple (U, φ) où U est un ouvert de M et $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.*
2. *Un atlas de classe C^k sur M est une collection $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de cartes locales qui recouvrent M telle que pour tous $\alpha,\ \beta \in I$ et $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, les fonctions de transition $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ définies de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ vers $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ sont des difféomorphismes de classe C^k.*
3. *On dira que deux atlas de classe C^k sont compatibles si leur réunion est un atlas de classe C^k. La compatibilité de deux atlas de classe C^k définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de classe C^k. Remarquons de passage qu'un atlas de classe C^{k+1} est un atlas de classe C^k. On a donc des classes d'équivalence d'atlas de classe C^k compatibles.*

Les notions suivantes sont tirées de [7] et [2]

Définition 1.1.4 (Variété différentiable)

1. *Une variété différentiable M de dimension n et de classe C^k est un espace topologique connexe, séparé , dénombrable à l'infini et muni d'une classe d'équivalence d'atlas de classeC^k compatible.*
2. *Soit (U, φ) une carte locale, le système $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où les φ_i sont les composantes de φ, est appelé système de coordonnées locales associé à la carte (U, φ) d'une variété différentiable de classe C^k et est souvent noté $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Exemple 1.1.1

$(\mathbb{R}^n,\ Id_{\mathbb{R}^n})$ est une variété différentiable.

Remarque 1.1.1

Soit M une variété différentiable de classe C^k et de dimension n.

- *M est localement connexe par arcs donc connexe par arc puisqu'elle est connexe.*
- *M est localement compact donc d'après la proposition 1.1.1 M est paracompact et admet une base topologique dénombrable donc admet un atlas dénombrable de classe C^k.*

Définition 1.1.5

Soient M une variété différentiable de classe C^k et de dimension n, Ω ouvert de M, $a \in M$, et $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. *On dit que f est de classe C^s en a s'il existe une carte locale (U, φ) en a (ou si pour toute carte locale (U, φ) en a) la fonction $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ est de classe C^s en $\varphi(a)$.*
2. *On dit que f est de classe C^s sur Ω si pour toute carte locale (U, φ) telle que $U \cap \Omega \neq \varnothing$,*
   $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \Omega) \to \mathbb{R}$ est différentiable de classe C^s.

On note $C^s(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^s sur Ω et $C^s_a(M)$ celle des fonctions de classe C^s en a. $C^s(\Omega)$ et $C^s_a(M)$ sont des espaces vectoriels réels de dimension ∞.

Les fonctions de classe C^∞ sont aussi appelées fonctions lisses.

Remarque 1.1.2

$C^\infty(\Omega)$ et $C^\infty_a(\Omega)$ sont aussi appelés espaces des fonctions lisses et des fonctions lisses en a.

Proposition 1.1.3 (Existence de fonction plateaux)

Soient X une variété différentiable, A un compact de X et U un ouvert de X tels que $A \subset U \subset X$.
Il existe une fonction lisse plateau sur X telle que
$f_{|A} \equiv 1,\ f_{|X\setminus U} \equiv 0\ ,\ 0 < f < 1 \quad \forall x \in U \setminus A$ *et* $supp f = \overline{U}$.

Définition 1.1.6 (Espace Tangent)

*Soient M une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞ et $a \in M$. On appelle **vecteur tangent** à M au point $a \in M$, tout opérateur différentiel du premier ordre $v : C^\infty_a(M) \to C^\infty_a(M)$ telle qu si (U, φ) est une carte locale en a, on a*
$(v.f)(a) = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(a))$ *; où les v_j sont des réels.*

Si $(x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées associé à (U, φ), on note $\dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(a))$ par $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.
Ainsi, on a $(v.f)(a) = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$; ce qui nous permet d'écrire $v.f = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.
L'ensemble des vecteurs tangents à M au point a est un espace vectoriel réel de dimension celle de M, appelé espace tangent à M au point a et noté T_aM.

Remarque 1.1.3

Soit U un ouvert de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ et $a \in U$.
Si $v \in T_aM$, alors on écrit simplement

$$v = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Par conséquent, pour tout $a \in U$, le n-uplet $\{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\}_{1\leq j\leq n}$ constitue une base de l'espace T_aM.

Définition 1.1.7 *[Différentielle]*

Soient M une variété différentiable de dimensions n. Soit $a \in M$ et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a. On appelle différentielle de f en a l'application linéaire $df(a) : T_aM \to \mathbb{R}$ telle si $v = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} \in T_aM$, alors $df(a)(v) = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = v(f(a))$.

Définition 1.1.8

Soit M une variété différentiable de dimension n.
On appelle vecteur cotangent au point a de M toute forme linéaire sur T_aM.
On note T_a^*M l'espace des vecteurs cotangents de M au point a ; c'est un espace vectoriel réel de dimension celle de M.

Remarque 1.1.4

- *Soit $a \in M$ et $C_a^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : \ f \text{ de classe } C^\infty \text{ en } a\}$*
  Pour tout $f \in C_a^\infty(M)$, $df(a) : T_aM \to \mathbb{R}$ est linéaire donc on a $df(a) \in T_a^*M$.
  Donc $\{df(a), f \in C^\infty(M)\} \subset T_a^*M$
  D'autre part, la dualité entre un vecteur tangent et un vecteur cotangent et la définition 1.1.7 entraîne que si $\alpha \in T_a^*M$, alors il existe une fonction différentiable f en $a \in M$ telle que $\alpha = df(a)$.
  Donc $\{df(a), f \in C_a^\infty(M)\} \supset T_a^*M$.
  Ainsi $\{df(a), f \in C_a^\infty(M)\} = T_a^*M$.
- *Soit $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées locales en $a \in M$.*
  Si $f = x_i$ et $v = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ alors $dx_i(a)(\dfrac{\partial}{\partial x_j}) = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j}$ symbole de Kronecker.
  Ainsi $(dx_1, ..., dx_n)$ est la base de T_a^*M duale de la base $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ de T_aM.

1.1.2 Fibrés vectoriels et Champs de vecteurs

Définition 1.1.9 (Fibrés vectoriels)

Soient E et M des variétés différentiables lisses (C^∞) avec $dimE > dimM$ et soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
On dit que E est un $\mathbb{K}-$ fibré vectoriel de rang r sur M s'il existe une surjection $p : E \longrightarrow M$ telle que :

1. *Pour tout $a \in M$, $p^{-1}(a) = E_a$ est un espace vectoriel de dimension r sur $\mathbb{K}$ $(p^{-1}(a) = E_a \cong \mathbb{K}^r)$*
2. *Il existe un atlas $A = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M et des difféomorphismes (lisses)*
   $$h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$$
   appelés trivalisations locales telles que :
   $$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r &\to (U_\beta \cap U_\alpha) \times \mathbb{K}^r \\ (a, r) &\mapsto (a, A_{\alpha\beta}(a).v); \end{aligned}$$
   où les $A_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(r, \mathbb{K})$, lisses satisfont les conditions suivantes dites de cocycle :
   (a) *$A_{\alpha\alpha}(a) = Id$, $\forall a \in U_\alpha$;*
   (b) *$A_{\alpha\beta}(a) = [A_{\beta\alpha}(a)]^{-1}$, $\forall a \in U_{\alpha\beta}$;*
   (c) *$A_{\alpha\beta}(a) \circ A_{\beta\gamma}(a) \circ A_{\gamma\alpha} = Id$, $\forall a \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.*

On note le fibré vectoriel E par $p : E \longrightarrow M$.
E est dit espace total du fibré. M est dite base du fibré, $\mathbb{K}^r$ est appelé fibré type et $p^{-1}(a)$ est appelé fibré au desus de a

Remarque 1.1.5

i) *Le fibré $p : E \longrightarrow M$ sera dit réel (respectivement complexe) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

ii) *Tout fibré $p : E \longrightarrow M$ est localement trivial (ie vérifie la condition de trivialisation locale).*

iii) *Le fibré $p : E \longrightarrow M$ sera dit trivial s'il admet un difféomorphisme de trivialisation $h : p^{-1}(M) \to M \times \mathbb{K}^r$ on dira donc que h est un difféomorphisme de trivialisation globale.*
En particulier, $h : M \times \mathbb{K}^r \to M$ est un fibré (vectoriel) trivial de rang r sur M.

Exemple 1.1.2

Le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ est un fibré vectoriel trivial de rang 1 sur $\mathbb{S}^1$.

Proposition 1.1.4

Soit $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un atlas sur M et $A_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_{\beta\alpha}, GL(r, \mathbb{K}))$ un cocycle sur M.
Soit $F = U_\alpha \times \mathbb{K}^r / \sim$ avec $(a, v) \sim (b, w)$ ssi $a = b$ et $w = A_{\alpha\beta}(a)v$, $a \in U_{\alpha\beta}$.
Alors F est un fibré vectoriel de rang r sur M.

Définition 1.1.10

Soit M une variété différentiable lisse de dimension m.
On appelle fibré tangent de M, noté TM la réunion disjointe

$$TM = \bigsqcup_{a \in M} T_a M = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a M = \{(a, v) : a \in M,\ v \in T_a M\}.$$

On appelle fibré cotangent de M, noté T^*M la réunion disjointe

$$T^*M = \bigsqcup_{a \in M} T_a^* M = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a^* M = \{(a, \xi) : a \in M,\ \xi \in T_a^* M\}.$$

Les fibrés tangent TM et cotangent T^*M d'une variété différentiable (lisse) M de dimension m sont des variétés lisses de dimension $2m$.

Proposition 1.1.5

Soit M une variété C^∞ de dimension n.
Soit

$$\begin{aligned} \Pi : TM &\to M \\ (x, v) &\mapsto x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Pi^* : T^*M &\to M \\ (x, \xi) &\mapsto x \end{aligned}$$

les projections naturelles.
Alors $\Pi : TM \to M$ et $\Pi^* : T^*M \to M$ sont des fibrés vectoriels localement triviaux de rang m.

Définition 1.1.11

Soit M une variété différentiable lisse de dimension m. Soit $p : E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel lisse de rang r.
On appelle section lisse de ce fibré toute application $s : M \longrightarrow E$, C^∞ (lisse) telle que $p \circ s = Id_M$.
On note $\Gamma(M, E)$ l'ensemble des sections lisses du fibré $p : E \longrightarrow M$.

Définition 1.1.12 (champs de vecteurs)

On appelle champ de vecteurs sur M, toute section lisse du fibré tangent TM.
On note $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M , on a $\mathcal{X}(M) = \Gamma(M, TM)$

Remarque 1.1.6 $X \in \mathcal{X}(M) \Longleftrightarrow X \in C^\infty(M, TM)$ *et* $\forall x \in M, X(x) \in T_xM$.

Proposition 1.1.6 (Expression locale d'un champ de vecteurs)

Si $X \in \mathcal{X}(M)$ et si $(U, (x_1, ..., x_n))$ est une carte locale de M, alors $X_{|U} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $X_i \in C^\infty(M)$.

Définition 1.1.13 (Crochet de Lie)

Soient X, $Y \in \mathcal{X}(M)$. On appelle crochet de Lie de X et Y (dans cet ordre) noté $[X, Y]$ le champ de vecteurs qui sur une carte $(U, (x_1, ..., x_n))$ de M s'écrit :

$$[X, Y]_{|U} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} (X_i \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_k}{\partial x_i}) \right) \frac{\partial}{\partial x_k};$$

où

$$X_{|U} = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y_{|U} = \sum_{i=1}^{m} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad X_i, Y_i \in C^\infty(U)\ \forall i = 1, ..., m.$$

Remarque 1.1.7

Soit $M = \mathbb{R}^m, X \in \mathcal{X}(M)$.
$X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *avec* $X_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ *donc* $X = (X_1, ..., X_m) \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Proposition 1.1.7

Soit $X = (X_1, ..., X_m)$, $Y = (Y_1, ..., Y_m) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^m)$ soit $x \in \mathbb{R}^m$.
Soient D_xY et D_xX les jacobiens de Y et X en x respectivement. On a :

$$[X, Y](x) = D_xY.X(x) - D_xX.Y(x)$$

.

1.2 Formes différentielles sur les variétés différentiables

1.2.1 Formes différentielles à valeurs réelles

Définition 1.2.1 (Espace des formes multilinéaires alternées)

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ de dimension n. Soit (U,φ) une carte locale de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$, soit $\{(dx_1)_a,\ldots,(dx_n)_a\}$ la base de l'espace cotangent T^*_aM.
On appelle espace des p-formes linéaires alternées sur T_aM l'epace vectoriel
$\Lambda^pT^*_aM = vect\{(dx_{i_1})_a \wedge \ldots \wedge (dx_{i_p})_a\}_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n}$
avec $(dx_{i_1})_a \wedge \ldots \wedge (dx_{i_p})_a$: $\underbrace{T_aM \times T_aM \times \ldots \times T_aM}_{p\ facteurs} \to \mathbb{R}$ *défini par*
$\big((dx_{i_1})_a \wedge \ldots \wedge (dx_{i_p})_a\big)(v_1,\ldots,v_p) = det\left(\langle (dx_{ij})_a, v_k\rangle\right)_{1\leq j,k\leq p} = det\left((dx_{ij})_a)(v_k)\right)_{1\leq j,k\leq p}$.

Remarque 1.2.1

Λ^pT^*M est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension C^p_n.

<u>**Expression locale**</u> Sur une carte $(U,\varphi=(x_1,\ldots,x_n))$, $\alpha\in\Lambda^pT^*_aM$, s'écrit :

$$\alpha_{|U} = \sum_{1\leq i_1<\ldots\ldots<i_p\leq n} \alpha_{i_1,\ldots\ldots,i_p}(dx_{i_1})_a \wedge \ldots . \wedge (dx_{i_p})_a$$

où $\alpha_{i_1,\ldots\ldots,i_p}$ sont des réels.

Définition 1.2.2 (Fibré des formes extérieures)

On appelle fibré des p-formes alternées sur M, l'espace Λ^pT^*M qui est par définition $\bigsqcup_{a\in M} \Lambda^pT^*_aM$.
Λ^pT^*M c'est un fibré vectoriel de rang C^p_n sur M.

Définition 1.2.3 (Formes différentielles)

Soient $(n,p)\in\mathbb{N}$, et M une variété différentiable de classe C^r de dimension n, avec $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$. On appelle p-forme différentielle de classe C^r sur M toute section du fibré vectoriel des p-formes extérieures Λ^pT^*M.
On note $\Omega^p_r(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^r. $\Omega^p_\infty(M)$ sera simplement noté $\Omega^p(M)$ et sera simplement appelé espace des p-formes différentielles sur M.
Les p-formes différentielles sont aussi appelées formes différentielles de degré p.

Remarque 1.2.2

Une p-forme différentielle ω associe, pour tout a dans M, une forme p-linéaire alternée ω_a sur l'espace tangent T_aM à M en a.
Soit $a\in\Omega^p_r(M)$, $\omega_a\in\Lambda^pT^*_aM$. On note aussi $\omega_a=\omega(a)$.

<u>**Expression locale**</u> Soit (U,φ) une carte de M on a :

$$\alpha_{|U} = \sum_{1\leq i_1<\ldots\ldots<i_p\leq n} \alpha_{i_1,\ldots\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots . \wedge dx_{i_p} \quad avec\ \alpha_{i_1\ldots\ldots i_p}\in C^r(U);$$

$dx_{i_j}\in\Omega^1_r(M)$ sont appelés $1-forme$ différentielles élémentaires sur M ;
$\forall\omega\in\Omega^1_r(M)$, alors $\omega=\sum_{i=1}\omega_i dx_i$ avec $\omega_i\in C^r(U)$.

Proposition 1.2.1

Avec les notations de la définition 1.2.3 on a :

1. $\Lambda^1 T^*M = T^*M$ *donc* $\Omega_r^1(M)$ *est l'espace de section de classe* C^r *sur* T^*M. *Ainsi d'après la remarque* 1.1.4 *on a* $\Omega_r^1(M) = \{df, f \in C^r(M)\}$ *avec* $df : a \in M \to df(a) \in T_a^*M$.
2. $\Lambda^p T^*M = 0 \ \forall p > n$ *donc* $\Omega_r^p(M) = 0 \ \forall \ p > n$.
3. $\Lambda^0 T^*M = \mathbb{R}$. *Donc* $\Omega_r^0(M) = C^r(M)$.

Définition 1.2.4

Soit M *une variété différentiable de classe* C^k *de dimension* n.

1. *On dit qu'une forme différentielle* $\alpha \in \Omega_r^n(M)$ *est une forme volume sur* M *si* $\alpha(a) \neq 0 \ \forall a \in M$.
2. *On dit que* M *est orientable si elle admet une forme volume.*

Définition 1.2.5 (Opérateur de différentiation extérieure)

L'opérateur de différentiation extérieure d *est un opérateur différentiel* $d : \Omega_r^p(M) \to \Omega_{r-1}^{p+1}(M)$ *Si* $\omega \in \Omega_r^p(M)$ *et* $\omega = \displaystyle\sum_{1\leq i_1 < \dots\dots\dots < i_p \leq n} \omega_{i_1,\dots\dots\dots,i_p} dx_{i_1} \wedge \dots . \wedge dx_{i_p}$.

Sur un système de coordonnées locales $(U, (x_1, \dots., x_n))$ *on a :*

$$(d\omega)_U = \sum_{1\leq i_1 < \dots\dots\dots < i_p \leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots\dots\dots i_p}}{\partial x^k} dx_k \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots . \wedge dx_{i_p}.$$

Propriété 1.2.1

Soit $u \in \Omega_r^p(M)$, $v \in \Omega_r^q(M)$ *on a :*

i) $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ *(Règle de Leibniz)*

ii) $d^2 u = (d \circ d)u = 0$ *(idempotence).*

Définition 1.2.6

Une forme différentielle $\alpha \in \Omega_r^p(M)$ *est dite :*

1. *fermée si* $d\alpha = 0$,
2. *exacte s'il existe un* $\beta \in \Omega_{r+1}^{p-1}(M)$ *tel que* $\alpha = d\beta$.

Définition 1.2.7

Soit $u \in \Omega_k^r(X)$.

1. *Soit* $A \subset X$.
   (a) *On dit que* u *est nulle sur* $A \cap \Omega$, *avec* Ω *un ouvert local, si ses composantes sur* Ω *sont des fonctions nulles sur* $A \cap \Omega$.
   (b) *On dit que* u *est nulle sur* A *si pour tout ouvert local* Ω *de* X *tel que* $A \cap \Omega \neq \emptyset$, u *est nulle sur* $A \cap \Omega$.
2. *On appelle support de* u *le plus petit fermé en dehors duquel* u *est nulle.*

Remarque 1.2.3

Soit $\alpha \in \Omega_r^p(M)$ *et* (U, φ) *une carte de* M. *Si* $\alpha_{|u} = \displaystyle\sum_{1\leq i_1 < \dots\dots\dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\dots\dots\dots,i_p} dx_{i_1} \wedge \dots . \wedge dx_{i_p}$

alors $(supp\alpha) \cap U = \displaystyle\bigcap_{1\leq i_1 < \dots\dots\dots < i_p \leq n} supp(\alpha_{i_1,\dots\dots\dots,i_p})$ *où* $supp(\alpha_{i_1,\dots\dots\dots,i_p}) = \overline{\left\{x \in U : \alpha_{i_1,\dots\dots\dots,i_p}(x) \neq 0\right\}}$

1.2.2 Formes différentiells à valeurs complexes

Définition 1.2.8

Soit E un espace vectoriel réel E de dimension m . On appelle complexifié de E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel complexifié de dimension n noté $\mathbb{C}E$ (ou $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par $\{u + iv/(u, v) \in E\}$.

Proposition 1.2.2

Si l'espace vectoriel réel E a pour base $\{e_1, ..., e_n\}$, alors son complexe $\mathbb{C}E$ a pour base $\{e_1, ..., e_n\}$ en tant que $\mathbb{C}-$espace vectoriel complexe et $\{e_1, ie_1, ..., e_n, ie_n\}$ en tant que $\mathbb{R} - ev$

Preuve:
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$ev de dimension 2 avec pour base $(1, i\}$
En effet
$\forall\ z \in \mathbb{C}$ il existe de façon unique $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $z = x \times 1 + y \times i$.
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension 1 avec pour base $\{1\}$ car $\forall\ z \in \mathbb{C}$ il existe de façon unique $\lambda = z$ tel que $z = \lambda \times 1$.
$\mathbb{E} = \mathbb{R}-$ev avec pour base $\{e_1, ..., e_n\}$.
$\mathbb{C}E = \{u + iv/(u, v) \in E\}$ $\forall\ \omega \in \mathbb{C}E$ il existe de façon unique $u, v \in E$ tel que $\omega = u + iv$.
Puisque $u, v \in \mathbb{E}, \exists \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tel que $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ et $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$. Ce qui entraîne que $\omega = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j + i \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j (ie_j)$ alors $\{e_1, ie_1, ..., e_n, ie_n\}$ est une base de $\mathbb{C}E$ en tant que $\mathbb{R} - ev$.
$\mathbb{C}E = \{u + iv/(u, v) \in E\}$ $\forall\ \omega \in \mathbb{C}E$ il existe de façon unique $u, v \in E$ tel que $\omega = u + iv$, il existe de façon unique $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tel que
$\omega = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j (ie_j) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + i\beta_j)\, e_j$.
Posons $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Puisque α_j et β_j sont uniques alors λ_j est unique.
$\omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, λ_j unique ce qui entraîne que $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{C}E$ en tant que $\mathbb{C} - ev$.

$\square$

Exemple 1.2.1

L'espace $\mathbb{C}\Lambda^p T_a^* M$ est un espace vectoriel complexe de dimenion C_m^p avec $m = 2n =$ dim M.

Définition 1.2.9

On appelle complexifié du fibré réel $\Lambda^p T^* M$ le fibré

$$\mathbb{C}\Lambda^p T^* M := \bigsqcup_{a \in M} \mathbb{C}\Lambda^p T_a^* M.$$

Définition 1.2.10 (Formes différentielles à valeurs complexes)

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}$, et M une variété différentiable de classe C^k de dimension n, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. On appelle p-forme différentielle à valeurs complexes de classe C^k sur M toute section du fibré $\mathbb{C}\Lambda^p T^*M$.
On note $\Omega^p_{k,\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles complexes de classe C^k.
$\Omega^p_{\infty,\mathbb{C}}(M)$ sera simplement noté $\Omega^p_{\mathbb{C}}(M)$ et sera simplement appelé espace des p-formes différentielles complexes sur M.

Expression locale Sur une carte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$, $\omega \in \Omega^p_{k,\mathbb{C}}(M)$, s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega|_U &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots\ldots < i_p \le n} \alpha_{i_1,\ldots\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots . \wedge dx_{i_p} + i \sum_{1 \le i_1 < \ldots\ldots < i_p \le n} \beta_{i_1,\ldots\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots . \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots\ldots < i_p \le n} (\alpha_{i_1,\ldots\ldots,i_p} + i\beta_{i_1,\ldots\ldots,i_p}) dx_{i_1} \wedge \ldots . \wedge dx_{i_p}\end{aligned}$$

avec $\alpha_{i_1\ldots\ldots i_p}, \beta_{i_1,\ldots\ldots,i_p} \in C^k(U)$

Ainsi

Proposition 1.2.3

Toute $p-$forme ω à valeurs complexes de classe C^k se décompose de manière unique en $\omega = \alpha + i\beta$ avec α, β des $p-$formes à valeurs réelles.
Autrement dit $\Omega^p_{k,\mathbb{C}}(M) = \Omega^p_k(M) + i\ \Omega^p_k(M)$.

En particulier,

Remarque 1.2.4

$$\begin{aligned}\Omega^1_{k,\mathbb{C}}(M) &= \Omega^1_k(M) + i\ \Omega^1_k(M). \\ &= \left\{df, f \in C^k(M)\right\} + i \left\{df, f \in C^k(M)\right\} \quad \textit{d'après la proposition} 1.2.1 \\ &= \left\{df_1 + idf_2, f_1, f_2 \in C^k(M)\right\} \\ &= \left\{d(f_1 + if_2), f_1, f_2 \in C^k(M)\right\} \\ &= \left\{df, f \in C^k(M, \mathbb{C})\right\}\end{aligned}$$

Ainsi les $1-$formes à valeurs complexes de classe C^k sur M s'identifient aux différentielles des fonctions de classe C^k à valeurs complexes.

Définition 1.2.11

Soit M une variété différentiable de classe C^k
Soit $w = \alpha + i\beta \in \Omega^p_{k,\mathbb{C}}(X)$ avec $\alpha, \beta \in \Omega^p_k(X)$

1. *On appelle support de ω noté Supp(ω), l'intersection des supports de α et β.*
2. *On appelle différentielle de ω, la $(p+1)-$forme de classe C^{k-1} à valeurs complexes , noté $d\omega$ éagle à : $d\omega = d\alpha + id\beta$.*
3. *On dit que ω est fermée (respectivement exacte) si α et β sont fermées respectivement exactes.*

Propriété 1.2.2

Soit $u \in \Omega^p_{k,\mathbb{C}}(M)$, $v \in \Omega^q_{k,\mathbb{C}}(M)$ *on a :*

i) $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ *(Règle de Leibniz)*

ii) $d^2u = (d \circ d)u = 0$ *(idempotence).*

1.3 Variété presque complexe et variété complexe

1.3.1 Variétés holomorphes

Dans l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$, considérons le système de coordonnées complexes canoniques $z = (z_1, ..., z_n)$ avec $z_j \in \mathbb{C}$.
Notons x_j et y_j la partie réelle et la partie imaginaire de z_j.
On a

$$z_j = x_j + iy_j \text{ et } \bar{z}_j = x_j - iy_j \text{ pour } j = 1, ..., n.$$

On peut alors identifier $\mathbb{C}^n$ avec l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées réelles

$$(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$$

et de l'orientation canonique associée à ce système de coordonnées.
Les dérivations formelles par rapport aux variables z_j et $\bar{z}_j$ sont définies par les formules suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

On a aussi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \quad et \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = i\left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right).$$

Définition 1.3.1 ($\mathbb{R}-$ différentiabilité)

Soit

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ f_n \end{pmatrix} : \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

une application. On dit que f est $\mathbb{R}-$ différentiable au point $\xi \in \Omega_1$, s'il existe une application $\mathbb{R}-$ linéaire notée $d_\xi f$, $d_\xi f : \mathbb{C}^n_{ev} \longrightarrow \mathbb{C}^n_{ev}$ appelée différentielle de f en ξ telle que pour $h \in \mathbb{C}^n_{ev}$ et voisin de 0, on a

$$f(\xi + h) - f(\xi) = d_\xi f(h) + \parallel h \parallel \epsilon(\xi, h)$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(\xi, h) = 0$

Proposition 1.3.1

Si

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ f_n \end{pmatrix} : \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$$

est $\mathbb{R}-$ différentiable, alors $\forall \xi \in \Omega_1$ $\forall k = 1, ..., m$

$$d_\xi f_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(\xi) dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}(\xi) d\overline{z}_j \quad \text{où} \quad dz_j = dx_j + dy_j \ \text{et} \ d\overline{z}_j = dx_j - dy_j$$

Preuve:

$d_\xi f_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi) dx_j + \frac{\partial f_k}{\partial y_j}(\xi) dy_j$

Posons $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j})$ *et* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})$ ce qui entraine que $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ *et* $\frac{\partial}{\partial y_j} = i(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j})$.

Or $dz_j = dy_j + dy_j$ et $d\overline{z}_j = dy_j - dy_j$ on a alors $dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + d\overline{z}_j)$ et $dy_j = \frac{-i}{2}(dz_j - d\overline{z}_j)$

$d_\xi f_k = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(\xi) + \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}(\xi))(\frac{1}{2}(dz_j + d\overline{z}_j)) + i(\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(\xi) - \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}(\xi))(\frac{-i}{2})(dz_j - d\overline{z}_j) =$

$d_\xi f_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j} dz_j(\xi) + \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} dz_j(\xi) + \frac{\partial f_k}{\partial z_j} d\overline{z}_j(\xi) + \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j(\xi) + \frac{\partial f_k}{\partial z_j} dz_j(\xi) - \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} dz_j(\xi) - \frac{\partial f_k}{\partial z_j} d\overline{z}_j(\xi) + \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j(\xi) =$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 2(\frac{\partial f_k}{\partial z_j} dz_j(\xi)) + (\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} dz_j(\xi) - \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} dz_j(\xi)) + (\frac{\partial f_k}{\partial z_j} d\overline{z}_j(\xi) - \frac{\partial f_k}{\partial z_j} d\overline{z}_j(\xi)) + 2(\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j(\xi))$$

Donc $d_\xi f_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j} dz_j(\xi) + \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j(\xi)$ □

Remarque 1.3.1

Soit $d_\xi f_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(\xi) dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}(\xi) d\overline{z}_j$.

Soit $j = \{1, ..., n\}$ $\forall \lambda, \ h, \ h' \in \mathbb{C}$.

$dz_j(\lambda h + h') = \lambda dz_j(h) + dz_j(h') \Rightarrow dz_j$ *est une forme $\mathbb{C}-$linéaire.*

$d\overline{z}_j(\lambda h + h') = \overline{\lambda} d\overline{z}_j(h) + d\overline{z}_j(h') \Rightarrow d\overline{z}_j$ *est une forme $\mathbb{C}-$antilinéaire.*

Donc $d_\xi f_k$ se décompose en deux parties $\mathbb{C}-$linéaire qui est $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(\xi) dz_j$ *et en une partie $\mathbb{C}-$antilinéaire qui est* $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j}(\xi) d\overline{z}_j$.

Définition 1.3.2 (Application holomorphe)

Soit Ω *de* $\mathbb{C}^n$ *et soit* $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^m$ *une application différentiable.*
On dit que f *est holomorphe si pour tout* $k = 1, ..., m$ *la fonction* f_k *est holomorphe ie*

$$\forall a \in \Omega, \quad \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(a) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

avec $(z_1, ..., z_n)$ *système de coordonnées locales dans* $\mathbb{C}^n$.

Proposition 1.3.2

Si

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ f_m \end{pmatrix} : \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$$

est holomorphe alors $\forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \Omega_1$, $d_\xi f$ *est* $\mathbb{C}-$ *linéaire ie* $d_\xi f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda d_\xi f(v_1) + d_\xi f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
On a donc $\forall \xi \quad \forall k = 1, ..., m \; d_\xi f_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(\xi) dz_j$.

Preuve:
Soit df est $\mathbb{R}-$linéaire est $\mathbb{C}-$linéaire si et seulement si $df(ih) = idf(h)$.
$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \; df.h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} h_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \overline{h}_j$ avec $h = (h_1, \ldots, h_n)$
Aussi $idf.h = i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} h_j + i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \overline{h}_j$
$df(ih) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(ih_j) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(\overline{ih_j}) = i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(h_j) - i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(\overline{h}_j)$.
$df(ih) = idf(h)$
$i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} h_j + i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \overline{h}_j = i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(h_j) - i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(\overline{h}_j) \Leftrightarrow 2i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(\overline{h}_j) = 0$
$\leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(\overline{h}_j) = 0 \leftrightarrow \overline{\partial} f.h = 0 \qquad \forall h \in \mathbb{C}^n \leftrightarrow \overline{\partial} f = 0$ donc f holomorphe. □

Définition 1.3.3 (Biholomorphisme)

Soient Ω_1, Ω_2 *deux ouverst de* $\mathbb{C}^n$ *et* $f : \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ *une application.*
On dit que f *est un biholomorphisme si* f *est bijective, holomorphe et* $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ *est holomorphe.*

Proposition 1.3.3

$f : \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ *bijective holomorphe et* $J_{\mathbb{C}} f(a)$ *est un isomorphisme* $\forall a \in \Omega$ *entraîne que* f *est biholomorphe.*

Exemple 1.3.1

- $$\begin{aligned} I_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ z(z_1, ..., z_n) &\mapsto z(z_1, ..., z_n) \end{aligned}$$
  est une application biholomorphe.
- *Soit*
  $$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$
  On a $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *alors* $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \dfrac{z\bar{z} - z\bar{z}}{(z\bar{z})^2} = 0$ *ce qui entraine que* f *est holomorphe.*
  montrons que f *est bijective : soit* $\omega = \frac{1}{z}$ *alors* $z = \frac{1}{\omega}$ *qui est unique car si la fonction réciproque d'une fonction existe alors il n'y en a qu'une seule. Par suite,* f *est bijective.*
  f *application bijective, alors* f *admet une bijection réciproque* $f^{-1}(z) = \frac{1}{z} = f(z)$ *donc* f^{-1} *est une application holomorphe. D'où* f *est un biholomorphisme*

Définition 1.3.4

Soit M *un espace topologique séparé, on appelle atlas complexe une collection d'homéomorphismes* $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in I}$*, où* $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ *constitue un recouvrement ouvert de* M*,* $(V_\alpha)_\alpha$ *des ouverts de* $\mathbb{C}^n$ *tels que pour tous* α *et* $\beta \in I$*, les fonctions de transition*

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

sont des biholomorphismes.
On dira que deux atlas complexes sont compatibles si leur réunion est un atlas complexe.
On définit comme dans la définition 1.1.3 une relation d'équivalence d'atlas complexes.

Définition 1.3.5 *(Variété analytique complexe)*
On appelle variété analytique complexe X *un espace topologique paracompact muni d'une classe d'équivalence d'atlas complexes.*
On note $(z_1, ..., z_n)$ *les coordonnées complexes associées à une carte locale* (U, φ) *d'une variété complexe* X*.*

Exemple 1.3.2

1. $\mathbb{C}^n$ *est une variété complexe dont l'atlas complexe est composé d'une seule carte* $(\mathbb{C}^n, I_{\mathbb{C}^n})$*.*
2. *L'espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *dimension* n*.*
   Soient $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$*. On définit la relation d'équivalence suivante :*
   $z \sim z'$ $\exists\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tel que* $z = \lambda z'$ *ie il existe une droite complexe qui passe par l'origine qui relie* z *et* z'*.* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \dfrac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$*. Donc* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *est l'ensemble des droites de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *qui passent par l'origine.*
   Soit $z = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$*, la classe de* z *sera noté* $[z_0 : z_1 : \ldots, : z_n]$ *et sera appelé coordonnées homogènes de* z*. Pour tout* $j \in \{0, \ldots, n\}$*,*

on pose $U_j = \{[z_0 : z_1 : \ldots, : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), z_j \neq 0\}$. *Les ouverts* U_j *recouvrent bien* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi_j : U_j &\to \mathbb{C}^n \\ [z_0 : z_1 : \ldots, : z_n] &\mapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right) \end{aligned}$$

un homéomorphisme d'inverse $\left(t_0, \ldots, \widehat{t_j} \ldots, t_n\right) \mapsto [t_0 : \ldots : t_{j-1} : 1 : t_{j+1} : \ldots : t_n]$.
On a $U_j \cap U_k = \{[z_0 : z_1 : \ldots, : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), z_j \neq 0 \text{ et } z_k \neq 0\}$, $j \neq k$. *Alors* ,

$$\varphi_j(U_j \cap U_k) = \{(z_0, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_k \neq 0\} .$$

Soit $T_{jk} = \{(z_0, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_k = 0\}$.
$\varphi_j(U_j \cap U_k) = \mathbb{C}^n \setminus T_{jk}$ *et* $\varphi_k(U_j \cap U_k) = \mathbb{C}^n \setminus T_{kj}$.

Pour $j \leq k$, *on a*

$$\begin{aligned} \varphi_{jk} := \varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) &\to \varphi_k(U_j \cap U_k) \\ (z_0, \ldots, \widehat{z_j} \ldots, z_n) &\mapsto \frac{1}{z_k}\left(z_0 \ldots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n\right) . \end{aligned}$$

L'application φ_{jk} *est un biholomorphisme. Donc* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *est une variété complexe de dimension* n.

3. *Tout ouvert d'une variété complexe est aussi une variété complexe.*
4. *la sphère de Riemann.*
   $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *le compactifié d'Alexendrof de* $\mathbb{C}$ *(une partie* V *de* $\mathbb{S}$ *est ouvert si et seulement si c'est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *ou bien c'est le complément d'un compact de* $\mathbb{S}$ *si cette partie* V *contient le point* ∞*).*
   $U_1 = \mathbb{C}$, $\varphi_1 = Id_{\mathbb{C}} \Rightarrow (U_1, \varphi_1)$ *est une carte locale de* $\mathbb{S}$.
   $U_2 = \mathbb{S} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} 0 & si\ z = \infty \\ \dfrac{1}{z} & si\ z \neq \infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1} : \mathbb{C} &\to U_2 \\ z &\mapsto \begin{cases} 0 & si\ z = 0 \\ \dfrac{1}{z} & si\ z \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   (U_2, φ_2) *est aussi carte locale. . Or* $\mathbb{S} = U_1 \cap U_2$; *donc* $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ *est un atlas topologique de* $\mathbb{S}$.
   On a $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S} \setminus \{0, \infty\} = \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_1 \cap U_2 &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : U_1 \cap U_2 &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \frac{1}{z}\ .\end{aligned}$$

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont biholomorphes donc $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas holomorphe.
D'où $\mathbb{S}$ est une variété holomorphe de dimension 1 appelé sphère de Riemann.

Remarque 1.3.2

Si X est une variété analytique complexe de dimension n, alors X est en particulier une variété différentiable réelle de dimension $2n$. En effet les biholomorphismes sont des difféomorphismes de classe C^∞ pour la structure sous-jacente entre ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$. On notera $\mathcal{X}$ la variété différentiable sous-jacente à la variété analytique complexe X.
Si $(z_1, ..., z_n)$ est un système de coordonnées locales de X, alors $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ avec $z_j = x_j + y_j$, est un système de coordonnées locales de $\mathcal{X}$ sous-jacente à $(z_1, ..., z_n)$.

1.3.2 Structure complexe sur les variétés différentielles de dimension paire

Les notions suivantes sont tirées de [2] [12] et [7]

Définition 1.3.6

Soit E un espace vectoriel de dimension paire $2n$.
Une structure complexe sur E est la donnée d'un endomorphisme L de E qui est involitif (ie $L^2 = -I_E$).

Soit M est une variété différentiable de classe C^∞ de dimension paire $m = 2n$.
Soit TM le fibré tangent de M et $\mathcal{X}(M)$ l'espace des champs de vecteurs sur M.

Définition 1.3.7 *(Variété presque complexe)*

- *Un endomorphisme de TM est une application $J : TM \to TM$ telle que $\Pi \circ J = \Pi$ et pour tout $x \in M$ l'application $J_x := J(x, .)$ est un endomorphisme de T_xM.*
- *Une structure presque-complexe sur M est la donnée d'un endomorphisme J de TM tel que pour tout $x \in M$ l'endomorphsme J_x induit sur T_xM est une structure complexe (ie $J^2 = -Id_{T_xM})$).*
- *Une variété presque complexe est un couple (M, J) où M est une variété différentiable de dimension paire et J une structure presque complexe sur M.*

Exemple 1.3.3

$M = \mathbb{R}^{2n}$ muni de $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$.
J un endomorphisme de T_xM defini par $J\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ et $J\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.
J est la structure presque complexe canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposition 1.3.4

Soit J une structure presque complexe sur M. Soit $J_{\mathbb{C}}$ l'extension de J par $\mathbb{C}-$linéarité au complexifié $\mathbb{C}TM$ de TM par $J_{\mathbb{C}}(u+iv) = J(u) + iJ(v)$. Alors $J_{\mathbb{C}}$ admet des valeurs propres i et $-i$ dont les sous-fibrés propres associés sont respectivement notés par

$$T^{1,0}M = \{u \in T_xM^{\mathbb{C}} / J_xu = iu\} \text{ et } T_x^{0,1}M = \{v \in T_xM^{\mathbb{C}} / J_xv = -iv\}.$$

On a $\mathbb{C}TM = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$

Définition 1.3.8 (Tenseur de Nijenhuis)

Soit (M, J) une variété presque complexe.
On appelle tenseur de Nijenhuis de J sur M l'application
$N_J : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ tel que

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

Définition 1.3.9 (Structure complexe)

Soit (M, J) une variété presque complexe . On dit que J est une structure complexe sur M si J est intégrable sur M ie $N_J \equiv 0$ sur M.

Exemple 1.3.4

$M = \mathbb{R}^2$, X, $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$
$X = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = Y_1\frac{\partial}{\partial x} + Y_2\frac{\partial}{\partial y}$. On a $J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}$ et $J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$.
Pour tout $x \in X$, on a $[X, Y](x) = D_xY.X(x) - D_xX.Y(x)$.
D_xY, D_xX sont respectivement les jacobiens de Y et X en x.
On a

$$D_xY.X = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x} & \frac{\partial Y_1}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x} & \frac{\partial Y_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x}X_1(x) + \frac{\partial Y_1}{\partial y}X_2(x) \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x}X_1(x) + \frac{\partial Y_2}{\partial y}X_2(x) \end{pmatrix}$$

$$D_xX.Y(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x}Y_1(x) + \frac{\partial X_1}{\partial y}Y_2(x) \\ \frac{\partial X_2}{\partial x}Y_1(x) + \frac{\partial X_2}{\partial y}Y_2(x) \end{pmatrix}$$

alors

$$[X, Y](x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x}X_1(x) + \frac{\partial Y_1}{\partial y}X_2(x) - \frac{\partial X_1}{\partial x}Y_1(x) - \frac{\partial X_1}{\partial y}Y_2(x) \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x}X_1(x) + \frac{\partial Y_2}{\partial y}X_2(x) - \frac{\partial X_2}{\partial x}Y_1(x) - \frac{\partial X_2}{\partial y}Y_2(x) \end{pmatrix}$$

$[JX, JY](x) = D_xJY.JX(x) - D_xJX.JY(x)$.
$JY = J\left(Y_1\frac{\partial}{\partial x} + Y_2\frac{\partial}{\partial y}\right) = -Y_2\frac{\partial}{\partial x} + Y_1\frac{\partial}{\partial y}$ et $JX = J\left(X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y}\right) = -X_2\frac{\partial}{\partial x} + X_1\frac{\partial}{\partial y}$

Par analogie, on a donc :

$$[JX, JY](x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_2}{\partial x}X_2(x) - \frac{\partial Y_2}{\partial y}X_1(x) - \frac{\partial X_2}{\partial x}Y_2(x) + \frac{\partial X_2}{\partial y}Y_1(x) \\ -\frac{\partial Y_1}{\partial x}X_2(x) + \frac{\partial Y_1}{\partial y}X_1(x) + \frac{\partial X_1}{\partial x}Y_2(x) - \frac{\partial X_1}{\partial y}Y_1(x) \end{pmatrix}$$

de la même manière, on a aussi

$$J[JX, Y](x) = J(D_xY.JX(x) - D_xJX.Y)(x)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y_1}{\partial y}X_2(x) - \frac{\partial Y_1}{\partial x}X_1(x) + \frac{\partial X_2}{\partial y}Y_1(x) - \frac{\partial X_2}{\partial x}Y_2(x) \\ -\frac{\partial Y_2}{\partial y}X_2(x) - \frac{\partial Y_2}{\partial x}X_1(x) - \frac{\partial X_1}{\partial y}Y_1(x) + \frac{\partial X_1}{\partial x}Y_2(x) \end{pmatrix}$$

et $J[X, JY](x) = J(D_xJY.X(x) - D_xX.JY)(x)$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y_2}{\partial y}X_1(x) + \frac{\partial Y_2}{\partial x}X_2(x) + \frac{\partial X_1}{\partial y}Y_2(x) + \frac{\partial X_1}{\partial x}Y_1(x) \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y}X_1(x) - \frac{\partial Y_1}{\partial x}X_2(x) + \frac{\partial X_2}{\partial y}Y_2(x) - \frac{\partial X_2}{\partial x}Y_1(x) \end{pmatrix}$$

Ainsi $N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] =$

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial Y_2}{\partial x}X_2(x) - \frac{\partial Y_2}{\partial x}X_2(x)) + (-\frac{\partial Y_2}{\partial y}X_1(x) + \frac{\partial Y_2}{\partial y}X_1(x)) \\ (\frac{\partial Y_1}{\partial x}X_2(x) - \frac{\partial Y_1}{\partial x}X_2(x)) + (\frac{\partial Y_1}{\partial y}X_1(x) - \frac{\partial Y_1}{\partial y}X_1(x)) \end{pmatrix}$$

$+$

$$\begin{pmatrix} +(\frac{\partial X_2}{\partial x}Y_2(x) - \frac{\partial X_2}{\partial x}Y_2(x)) + (\frac{\partial X_2}{\partial y}Y_1(x) - \frac{\partial X_2}{\partial y}Y_1(x)) \\ (\frac{\partial X_1}{\partial x}Y_2(x) - \frac{\partial X_1}{\partial x}Y_2(x)) + (\frac{\partial X_1}{\partial y}Y_1(x) - \frac{\partial X_1}{\partial y}Y_1(x)) \end{pmatrix}$$

$+$

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial X_1}{\partial y}Y_2(x) - \frac{\partial X_1}{\partial y}Y_2(x)) + (\frac{\partial X_1}{\partial x}Y_1(x) - \frac{\partial X_1}{\partial x}Y_1(x)) \\ +(\frac{\partial X_2}{\partial y}Y_2(x) - \frac{\partial X_2}{\partial y}Y_2(x)) + (\frac{\partial Y_2}{\partial y}X_2(x) - \frac{\partial Y_2}{\partial y}X_2(x)) \end{pmatrix}$$

$+$

$$\begin{pmatrix} +(\frac{\partial Y_1}{\partial x}X_1(x) - \frac{\partial Y_1}{\partial x}X_1(x)) + (\frac{\partial Y_1}{\partial y}X_2(x) - \frac{\partial Y_1}{\partial y}X_2(x)) \\ +(\frac{\partial Y_2}{\partial x}X_1(x) - \frac{\partial Y_2}{\partial x}X_1(x)) + (-\frac{\partial X_2}{\partial x}Y_1(x) + \frac{\partial X_2}{\partial x}Y_1(x)) \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N_J(X, Y)(x)$$

Donc la structure presque complexe J est intégrable sur M.

Proposition 1.3.5

Soit (M, J) une variété presque complexe. Alors on a les équivalences suivantes :

i) J *est intégrable*

ii) $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

iii) $[T^{0,1}M, T^{0,1}M] \subset T^{0,1}M$

Proposition 1.3.6

Si X est une variété holomorphe de dimension n, alors la variété différentiable sous-jacente $\mathcal{X}$ de dimension $2n$ est munie d'une structure preque complexe intégrable J.

Proposition 1.3.7

Soit (M, J) une variété presque complexe avec $dim M = 2n$.
Soit $(x_1, ..., x_{2n})$ des coordonnées locales dans M. Posons $z_j = x_j + ix_{j+n}$,$j = 1, \ldots, n$
Alors [J intégrable]$\Leftrightarrow$[$J(dz_j) = idz_j$ et $J(d\overline{z}_j) = -id\overline{z}_j$]

Proposition 1.3.8

Toute variété presque complexe intégrable est munie d'une structure analytique complexe.

Chapitre 2

L'opérateur $\overline{\partial}$ sur les Courants

2.1 Formes différentielles sur les variétés complexes

2.1.1 Formes différentielles de bidegré (p, q)

Définition 2.1.1

Soit (M, J) une variété presque complexe avec dimension de $M = 2n = m$.
On appelle forme différentielle de bidegré $(p, q), 0 \leq p, q \leq n$ et de classe C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, toute section de classe C^k, du fibré $\Lambda^p T^{*1,0}M \otimes \Lambda^q T^{*0,1}M$ où $T^{*1,0}M$ et $T^{*0,1}M$ sont les duaux de $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ et où

$$\omega \in \Lambda^p T^{*1,0}M \otimes \Lambda^q T^{*0,1}M \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda^p T^{*1,0}M, \exists \beta \in \Lambda^q T^{*0,1}M$$

tel que $\omega(\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q) = \alpha(\alpha_1, ..., \alpha_p).\beta(\beta_1, ..., \beta_q)$. $\forall \alpha_1, ..., \alpha_p \in T^{*1,0}M$,
$\beta_1, ..., \beta_q \in T^{*0,1}M$.
On note $\Omega_k^{p,q}(M)$ l'espace des formes différentielles de bidegré (p, q) et de classe C^k sur M, $\Omega_\infty^{p,q}(M)$ sera simplement noté $\Omega^{p,q}(M)$

Proposition 2.1.1

Si (M, J) est une variété presque complexe, alors $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on a

$$\Omega_{k,\mathbb{C}}^r(M) \bigoplus_{p+q=r} \Omega_k^{p,q}(M)$$

Définition 2.1.2

Soit X une variété complexe de dimension n et soit $\mathcal{X}$ la variété presque complexe intégrable sous-jacente à X.

1. *On appelle forme différentielle de classe C^k et de degré r sur X toute forme différentielle de classe C^k et de degré r sur $\mathcal{X}$ à valeurs complexes.*
2. *On appelle forme différentielle de bidegré (p, q) et de classe C^k sur X toute forme différentielle de bidegré (p, q) et de classe C^k sur $\mathcal{X}$.*
   On note $\Omega_k^r(\mathcal{X})$ (respectivement $\Omega_k^{p,q}(X)$) l'espace des formes différentielles de classe

C^k et de degré p (respectivement de bidegré (p,q)) sur X.
On a donc

$$\begin{aligned} \Omega_k^r(X) &= \Omega_{k,\mathbb{C}}^r(\mathcal{X}), \\ \Omega_k^{p,q}(X) &= \Omega_k^{p,q}(\mathcal{X}) \text{ et} \\ \Omega_k^r(X) &= \bigoplus_{p+q=r} \Omega_k^{p,q}(X) \end{aligned}$$

Ecriture locale d'une $(p,q)-$forme sur X Soit X une variété complexe de dimension n et soit $\Omega \subset X$ un ouvert local de coordonnées $(z_1, ..., z_n)$. Soit $u \in \Omega_k^{p,q}(X)$. Alors une $(p,q)-$forme différentielle u de classe C^k s'écrit
$u_{|\Omega} = \sum_{1\le i_1<...<i_p\le n, 1\le j_1<...<j_q\le n} u_{i_1,...,i_pj_1,...,j_q} dz_{i_1} ... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} ... \wedge d\bar{z}_{j_q}$, où les $u_{i_1,...,i_pj_1,...,j_q}$ sont des fonctions de classe C^k sur Ω appelées composantes de u sur Ω.

Remarque 2.1.1
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ alors $\forall u \in \Omega_k^{p,q}(\Omega)$
$u = \sum_{1\le i_1<...<i_p\le n, 1\le j_1<...<j_q\le n} u_{i_1,...,i_pj_1,...,j_q} dz_{i_1} ... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} ... \wedge d\bar{z}_{j_q}$ *où les $u_{i_1,...,i_pj_1,...,j_q}$ sont des fonctions de classe C^k sur Ω.*

Définition 2.1.3 (Opérateur de différentiation extérieur des $(p,q)-$formes)
Soit X une variété analytique complexe de dimension n. L'opérateur de différentiation extérieure d est un opérateur différentiel

$d : \Omega_s^r(X) \to \Omega_{s-1}^{r+1}(X) \quad s \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}.$
Soit $\omega \in \Omega_s^r(X)$, $\exists!(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p+q=r$ tel que $\omega \in \Omega_s^{(p,q)}(X)$.
Soit (U,φ) une carte de X.

$$\omega_{|U} = \sum_{1\le i_1........i_p\le n, 1\le j_1........j_q\le n} \omega_{i_1........i_pj_1........j_q} dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge dz_{j_1} \wedge .... \wedge dz_{j_q}.$$

$\omega_{i_1,........,i_pj_1........j_q} \in C^s(U)$. *On pose* $\omega_{IJ} = \omega_{i_1,........,i_pj_1........j_q}$.

$$d\omega_{|u} = \sum_{1\le i_1<........<i_p\le n, 1\le j_1<........<j_q\le n} \left(d\omega_{i_1........i_pj_1........j_q}\right) dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge dz_{j_1} \wedge .... \wedge dz_{j_q}.$$

$$d\omega_{i_1........i_pj_1........j_q}(z) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_l}\left(\omega_{IJ}\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(z))\, dz_l + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\left(\omega_{IJ}\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(z))\, d\bar{z}_l.$$

$$d\omega_{|u}(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_l}\left(\omega_{IJ}\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(z))\, dz_l\right) dz_I \wedge d\bar{z}_J \; +$$

$$\sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\left(\omega_{IJ}\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(z))\, d\bar{z}_l\right) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Ainsi $d\omega = \partial\omega + \overline{\partial}\omega$.

avec $\partial\omega_{|u} = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(\omega_{IJ} \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(z))\, dz_l \right) dz_I \wedge d\overline{z}_J$ *et*

$$\overline{\partial}\omega_{|u} = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_l} \left(\omega_{IJ} \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(z))\, d\overline{z}_l \right) dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

On a donc $d = \partial + \overline{\partial}$ *avec*

$$\begin{aligned} \partial \colon \Omega_s^{p,q}(X) &\to \Omega_{s-1}^{p+1,q}(X) \\ \overline{\partial} : \Omega_s^{p,q}(X) &\to \Omega_{s-1}^{p,q+1}(X) \end{aligned}$$

Remarque 2.1.2

Puisque $d^2 = 0$*, alors on a pour des raisons de bidegré* $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial = 0$

2.1.2 Topologie d'espace de Fréchet

Topologie limite inductive des espaces de Fréchet

Dans cette partie, on s'inspire des livres d'Analyse fonctionnelle de [4] et [13]
Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Définition 2.1.4 (Semi-norme)

Soit E un espace vectoriel complexe. On dit que $p : E \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si :

i) $p(x) \geq 0$

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\ \forall x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$

iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in E$

Définition 2.1.5 (Semi-normes séparantes)

Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur E. On dit que $\mathcal{P}$ est séparante (ou sépare les points) si $\forall x \neq 0\ \exists p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x) \neq 0$

Définition 2.1.6 (Topologie définie par une famille séparante de semi-normes)

Soit $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes qui sépare les points.
Soit $x \in X, r > 0$ et $J \subset I$, J fini.
On appelle $J-$boule ouverte de centre x et de rayon r, noté $B_J(x,r)$ l'ensemble $B_J(x,r) = \{y \in E : p_j(y-x) < r,\ \forall j \in J\}$.
$\mathcal{P}$ définit une topologie sur E dont les $B_J(x,r)$, sont les ouverts élémentaires.

Remarque 2.1.3

$B_J(x,r) = x + B_J(0,r)$

Proposition 2.1.2 (Distance)

Soit $\mathcal{P} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de semi-normes sur E, qui sépare les points. Alors l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que $d(x,y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}\ min(p_n(x-y), 1)$ définit une distance sur E invariante par translation (ie $d(x+u, y+u) = d(x,y)\ \forall x, y, u \in E$).

Proposition 2.1.3 *La topologie induite par d est équivalente à celle dont une base de voisinage est donnée par les $B_J(x,r)$ définies à partir de la famille $\mathcal{P} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 2.1.7 (Espace de Frechet)

On dit que l'espace vectoriel complexe E est un espace de Fréchet s'il est muni d'une suite $\mathcal{P} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de semi-normes qui séparent les points et tel que, pour la distance d de la définition précédente, l'espace métrique (E,d) est complèt.

Exemple 2.1.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni des coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$. Soit $C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω à valeurs complexes.
Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble dénombrable des parties compactes non vides de Ω qui recouvrent Ω. Pour tout $K\in\mathcal{K}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $\|\varphi\|_{K,k} = \sup_{x\in K\ |\alpha|\le k} |D^\alpha\varphi(x)|$ pour tout $\varphi\in C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$.

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots.,\alpha_n)\in\mathbb{N}^N,\ |\alpha| = \sum_{l=1}^{N}\alpha_l,\ D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1}\ldots..\partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

La famille $(\|.\|_{K,k})_{K\in\mathcal{K},k\in\mathbb{N}}$ est une suite séparante de semi-normes sur $C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$ qui en fait un espace de Fréchet.

Remarque 2.1.4

Un fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.

Définition 2.1.8 (Topologie limite inductive d'espaces de Fréchet)

Soit E un espace de Fréchet et $(F_n)_n$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés de E. On appelle topologie limite inductive sur l'espace vectoriel $F = \bigcup_n F_n$, l'unique topologie τ telle que :

- *i) τ coïncide sur chaque F_n avec celle induite par E ;*
- *ii) Une forme linéaire sur F est continue ssi sa restriction à chaque F_n est continue*
- *iii) Toute suite convergente pour τ est contenue dans l'un des F_n.*

Proposition 2.1.4

La topologie limite inductive des espaces de Fréchet $(F_n)_n$ est la topologie d'espace de Fréchet sur $F = \bigcup_n F_n$ qui est :

- *a) définie par la famille des semi-normes sur F dont la restriction à F_n est continue pour la topologie de F_n.*
- *b) la plus fine rendant continue les injections canoniques $F_n \to F$.*

Exemple 2.1.2

En considérant les mêmes données et notations de l'exemple 2.1.1.
Soit K un compact de $\mathcal{K}$ et soit $D_k(\Omega,\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$ formé des fonctions de classe C^∞ à support dans K.
Muni de la topologie induite par celle de $C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$, $D_K(\Omega,\mathbb{C})$ est fermé ; donc c'est un

espace de Fréchet.
On pose $D(\Omega,\mathbb{C}) = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} D_K(\Omega,\mathbb{C})$.
Muni de la topologie induite par celle de $C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$, $D(\Omega,\mathbb{C})$ *est un espace vectoriel topologique qui n'est pas complet. Mais* $D(\Omega,\mathbb{C})$ *muni de la topologie limite inductive des* $D_K(\Omega,\mathbb{C})$ *est un espace de Fréchet.*

Le cas des $(p,q)-$formes différentielles

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Soit U un ouvert local de X de coordonnées $(z_1,...,z_n)$. Soit $(x_1,...,x_n,y_1,...,x_n)$ le système de coordonnées locales de $\mathcal{X}$ sous-jacent à $(z_1,...,z_n)$. Posons $x_{j+n} = y_j,\ \forall j = 1,\ldots,n$.
Alors $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n) = (x_1,x_2,...,x_{2n})$.
Et $\mathcal{X}$ une variété différentiable de C^∞ de dimension $2n$ sous-jacente à X.
Soit $\omega \in \Omega^r_s(X) = \Omega^r_{s,\mathbb{C}}(\mathcal{X})$ une $p-$forme différentielle complexe de classe C^s.

Alors $\omega_{|U} = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<........<i_p\leq 2n} \omega^U_{i_1...i_p} dx_{i_1}\wedge....\wedge dx_{i_p}$ où $\omega^U_{i_1...i_p}\in C^s(U,\mathbb{C})$.
Soit $K\subset U$ un compact et $\alpha = (\alpha_1,....,\alpha_{2n})\in\mathbb{N}^{2n}$ un multi-indice.

Pour $\omega\in\Omega^r_s(X)$, on pose $P^s_K(\omega_{|U}) = \displaystyle\sup_{1\leq i_1<........<i_p\leq 2n,\ x\in K\ |\alpha|\leq s} |D^\alpha\omega^U_{i_1...i_p}|$ avec

$$D^\alpha\omega^U_{i_1...i_p}(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}\omega^U_{i_1...i_p}\circ\varphi^{-1}}{\partial {x_1}^{\alpha_1}.....\partial {x_{2n}}^{\alpha_{2n}}}(\varphi(x)).$$

Soit $\mathcal{A}$ un atlas dénombrable de X et $U\in\mathcal{A}$. Posons $P^s_{K,U}(\omega) = \sup_{K\subset U} P^s_K\left(\omega_{|U}\right)$ avec K compact.

Si $s<\infty$ alors la famille $\left(P^s_{K,U}\right)_{U \text{ ouvert de } \mathcal{A},\ K\subset U}$ est une suite séparante de semi-norme sur $\Omega^r_s(X)$ qui en fait un espace de Fréchet qu'on notera $\mathcal{E}^r_s(X)$

Si $s=\infty$ alors la famille $\left(P^s_{K,U}\right)_{U \text{ ouvert de } \mathcal{A},\ K\subset U,\ s\in\mathbb{N}}$ est une suite séparante de semi-norme su $\Omega^r(X)$ qui en fait un espace de Fréchet qu'on notera $\mathcal{E}^r(X)$

Si K est un compact de X, on note $D^r_K(X)$ (resp $D^r_{s,K}(X)$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^r(X)$ (resp $\mathcal{E}^r_s(X)$) formé par les formes différentielles de classe C^∞ (resp C^s) , de degré p, à support dans K muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{E}^r(X)$ (resp $\mathcal{E}^r_s(X)$).
$D^r_{s,K}(X)$ (resp $D^r_K(X)$) est un fermé de $\mathcal{E}^r(X)$ (resp $\mathcal{E}^r_s(X)$) donc c'est un espace de **Fréchet**. Mieux $D^r_{s,K}(X)$ est un Banach puisqu'il est induit par une suite finie de semi-normes qui séparent les points.
On pose $D^r(X) = \bigcup_K D^r_K(X)$ et $D^r_s(X) = \bigcup_K D^r_{s,K}(X)$. $D^r(X)$ et $D^r_s(X)$ sont appelés des $r-$ formes différentielles de classe C^∞ (resp de classe C^s) à support compact.
Muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{E}^r(X)$ (resp $\mathcal{E}^r_s(X)$), $D^r_s(X)$ (resp $D^r_s(X)$) n'est pas complet donc n'est pas un espace de Fréchet.

On met sur $D^r(X)$ (resp $D^r_s(X)$ la topologie limite inductive des topologies induites par $\mathcal{E}^r(X)$ (resp $\mathcal{E}^r_s(X)$) sur chaque $D_K(X)$ (resp sur chaque $D_{s,K}(X)$) ; ce qui fait de $D_K(X)$ et de $D_{s,K}(X)$ des espaces de Fréchet.

D'après la proposition 2.1.4, la topologie limite inductive des $D^r_K(X)$ (resp $D^r_{s,K}(X)$ est la plus fine rendant continue toutes les injections $D^r_K(X) \to D^r(X)$ (resp $D^r_{s,K})(X) \to D^r_s(X))$, K compact de X.
Pour cette topologie, une semi-norme sur $D^r(X)$ (resp sur $D^r_s(X)$) est continue si sa restriction à chaque $D^r_K(X)$ (resp $D^r_{s,K}(X)$) est continue. On l'appelle topologie forte sur $D^r(X)$ (resp sur $D^r_s(X)$).

Remarque 2.1.5

Soit p, q deux entiers naturels fixés.
Soit $D^{p,q}(X)$ l' espace des $(p,q)-$formres à support compact.
Soit $r = p+q$. Puisque $\Omega^r(X) = \bigoplus\limits_{u+w=r} \Omega^{u,w}_k(X)$, donc $D^r(X) = \bigoplus\limits_{u+w=r} D^{u,w}_k(X)$. Donc $D^{(p,q)}(X)$ est un sous-espace vectoriel de $D^r(X)$.
Muni de la topologie induite par celle de $D^r(X)$, $D^{(p,q)}(X)$ est un fermé car pour (p,q) fixé la limite éventuelle d'une suite de $D^{(p,q)}(X)$ ne peut se trouver que dans $D^{(p,q)}(X)$. Ainsi $D^{(p,q)}(X)$ est un Fréchet.
De même l'espace $D^{(p,q)}_s(X)$ des (p,q)-formes différentielles sur X de classe C^s à support compact, muni de la topologie induite par celle de $D^r_s(X)$ est un espace de Fréchet.

Remarque 2.1.6

On a les inclusions suivantes
- $D^{(p,q)}_s(X) \subset D^{(p,q)}_t(X)$ *pour tout couple (t,s) d'entiers naturels tels que $t < s$*
- $D^{(p,q)}(X) \subset D^{(p,q)}_s(X)$ *pour tout $s \in \mathbb{N}$*
- $D^r_s(X) \subset D^r_t(X)$ *pour tout couple (t,s) d'entiers naturels tels que $t < s$*
- $D^r(X) \subset D^r_s(X)$ *pour tout $s \in \mathbb{N}$*

2.2 Courants sur les variétés complexes

2.2.1 Courants

Les notions suivantes sont tirées de [2].
Soit X une variété analytique complexe de dimension n.

Définition 2.2.1 (Courant)

i) On appelle courant de bidimension (p,q) (ou de bidegré $(n-p, n-q)$) sur X toute forme linéaire continue sur $D^{(p,q)}(X)$.

ii) On appelle courant de dimension r (ou de degré $(2n-r)$) sur X, toute forme linéaire continue sur $D^r(X)$.
On note $D'^{(p,q)}(X)$ (resp $D'^r(X)$) l'espace des courants de bidimension (p,q) (resp de dimension r) sur X.

Exemple 2.2.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Un courant de degré 0 sur Ω est une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$.

Remarque 2.2.1

1. *$D'^0(X) = D'^{(0,0)}(X)$ est appelé espace des distributions sur X et sera noté $D'(X)$.*
2. *D'après la définition 2.1.8, $T \in D'^{(p,q)}(X)$ (resp $T \in D'^r(X)$) si et seulement si pour tout compact $K \subset X$, $T_{|D_K^{(p,q)}(X)}$ (resp $T_{|D_K^r(X)}$) est une forme linéaire continue.*

Ecriture locale de (p,q)-fromes
Soit $U \subset X$ un ouvert de coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ et soit $T \in D'^{(p,q)}(U)$.
Localement, un courant $T \in D'^{(p,q)}(U)$ s'écrit de manière unique

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots\ldots < i_p \leq n, 1 \leq j_1 < \ldots\ldots < j_q \leq n}' T_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} dz_{i_1} \wedge \ldots . \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots . \wedge d\bar{z}_{j_q},$$

où les $T_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} \in D'(U)$ sont des distributions.

Définition 2.2.2 (Dérivation d'un courant)

Soient X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert et $T \in D'_r(\Omega)$. L'opérateur de différentiation extérieure d défini pour les formes différentielles s'étend aux courants de la manière suivante :
si $\varphi \in D^{2n-r-1}(\Omega)$, alors $\langle dT, \varphi \rangle = (-1)^{r+1} \langle T, d\varphi \rangle$.
De même, le $\overline{\partial}$ s'étend à T de la manière suivante :
il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p + q = r$, tel que $T \in D'^{(p,q)}(\Omega)$, on a $\langle \overline{\partial} T, \varphi \rangle = (-1)^{q+1} \langle T, \overline{\partial} \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in D^{(n-p, n-q-1)}(\Omega)$.
De plus, ces opérateurs vérifient $d^2 = 0$ et $\overline{\partial}^2 = 0$.

Courant d'ordre $k \in \mathbb{N}$

On a

$$D^{p,q}(X) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k^{p,q}(X).$$

$D^{p,q}(X)$ est dense dans chaque $D_k^{p,q}(X)$; donc l'application

$$\begin{array}{rcl} i : [D_k^{p,q}(X)]' & \longrightarrow & [D^{p,q}(X)]' = D'_{p,q}(X) \\ \tilde{T} & \longmapsto & T = \tilde{T}_{|D^{p,q}(M)} \end{array}$$

est injective.
$[D_k^{p,q}(X)]'$ est par définition le dual topologique de $D_k^{p,q}(X)$.

Définition 2.2.3

L'image $i([D_k^{p,q}(X)]')$ identifiée à $[D^{p,q}(X)]'$ est appelée espace des courants de bidegré (p,q) et d'ordre k et est notée $D'^k_{p,q}(X)$.

Remarque 2.2.2

Soit $T \in D'_{p,q}(X)$. Alors T est d'ordre fini $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si T se prolonge continûment sur $D_k^{p,q}(X)$.

2.2.2 Courants prolongeables

Les notions sont tirées de [1].

Définition 2.2.4 (Courant prolongeable)

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset X$ un domaine. Un courant T défini sur Ω est dit prolongeable, si T est la restriction à Ω d'un courant (non unique) $\tilde{T}$ défini dans X .

Notons $\check{D}'_{p,q}(\Omega)$ l'espace des courants de bidegré (p,q) définis sur Ω et prolongeables à X.

Définition 2.2.5 (Fonction définissante)

Une fonction φ continue définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles est une fonction définissante pour D si, $D = \{z \in D \mid \varphi(z) < 0\}$, $bD = \{z \in D \mid \varphi(z) = 0\}$

Nous allons énoncé le théorème de Hahn-Banach qui permet d'étendre les formes linéaires continues g.

Théorème 2.2.1 (Hahn Banach : forme analytique) *(Rudin théorème 3.3 p.58)*

Soient E un espace vectoriel et p une semi-norme sur E. Soit F un sous-espace vectoriel quelconque de E, et soit λ une forme linéaire sur F, majorée par p en chaque point de F. Alors il existe une forme linéaire Λ sur E, qui prolonge λ et qui soit majorée par p en chaque point de E. En particuler, si p est une norme, munissant E d'une structure d'espace vectoriel normé, alors la norme de Λ en tant que forme linéaire continue vis-à-vis de p est égale à la norme de λ.

Pour $\Omega \subset\subset X$, on a les caractérisations suivantes pour les courants prolongeables.

Proposition 2.2.1 (Martineau) *[1]*

Les propriétés suivantes son équivalentes.

1. *T est prolongeable.*
2. *Le courant défini sur $X \setminus b\Omega$ par T sur Ω et 0 sur le complémentaire de $\bar{\Omega}$ est prolongeable à X.*
3. *Il existe une constante $C > 0$ et un entier m tel que $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C|\varphi|_{m,\bar{\Omega}}$ pour toute forme différentielle φ de classe C^∞ et à support compact dans Ω.*
4. *Il existe un monôme de dérivation D et une forme différentielle g sur Ω (restriction d'une forme différentielle continue sur $\bar{\Omega}$) tels que $T = Dg$ sur Ω.*

Proposition 2.2.2 (Martineau) *[1]*

Soit X une variété analytique complexe de dimension n et Ω un domaine de X tel que $\mathring{\bar{\Omega}} = \Omega$. L'espace $\check{D}'_{\Omega}{}^{p,q}(X)$ est le dual topologique de $D^{n-p,\ n-q}(\bar{\Omega})$.

Preuve:
Soit $T \in \check{D}'^{\,p,q}_{\Omega}(X)$, nous allons montrer que T admet une unique extension à $D^{n-p,\ n-q}(\bar{\Omega})$.
Posons $D = X \setminus \bar{\Omega}$, $\bar{D} = X \setminus \Omega$, puisque $\overset{\circ}{\bar{\Omega}} = \Omega$.
Soient T_1 et T_2 deux extensions de T à X. $T_1 - T_2$ est un courant à support dans $\bar{D}$.
Soient $f \in D^{n-p,\ n-q}(\bar{\Omega})$ et $K \subset X$ un compact qui contient $supp f$, il existe une constante C_K et un entier k tels que :

$$|\langle T_1 - T_2, f\rangle| \leq C_K |f|_{k,K},$$

où $|f|_{k,K}$ désigne la norme C^k sur K.
On va prouver qu'en fait $|\langle T_1 - T_2, f\rangle| \leq C_K |f|_{k,K\cap\bar{D}}$, car $T_1 - T_2$ est à support dans $\bar{D}$.
Soit ρ la fonction définissante de $\bar{D}$.
Posons $V_j = \{z \in X/\rho(z) < \frac{1}{j}\}$, $j \in \mathbb{N}^*$, $(v_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante pour l'inclusion des domaines de X et $\cap_j V_j = \bar{D}$.
Associons à $(V_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de classe C^∞ sur X, à support dans V_j, à valeurs dans $[0,\ 1]$ et qui vaut 1 dans V_{j+1}. Comme $T_1 - T_2$ est à support dans $\bar{D}$ et $\bar{D} \subset V_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|\langle T_1 - T_2, f\rangle| = |\langle \varphi_j(T_1 - T_2), f\rangle| \leq C_K |\varphi_j f|_{k,K},\ \textit{pour tout}\ j \in \mathbb{N}^*.$$

$$|\varphi_j f|_{k,K} = |\varphi_j f|_{k,K\cap V_j} \leq |f|_{k,K\cap V_j},$$

car $\varphi_j \equiv 0$ en dehors de V_j et $0 \leq \varphi_j \leq 1$.
Donc

$$|\langle T_1 - T_2, f\rangle| \leq |f|_{k,K\cap V_j},\ \textit{pour tout}\ j;$$

ce qui implique

$$|\langle T_1 - T_2, f\rangle| \leq C_K |f|_{k,K\cap\bar{D}},$$

car $\bar{D} = \cap_j V_j$.
Mais $|f|_{k,K\cap\overline{D}} = 0$ car $f \equiv 0$ sur $\overline{D}$, d'où $\langle T_1 - T_2, f\rangle = 0$ pour toute $f \in D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})$.
Donc $T_1 = T_2$ dans $D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})$. On définit l'unique extension $\tilde{T}$ de T à $D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})$ par $\tilde{T} = T_1|_{D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})}$.
Ainsi :
$\check{D}'^{\,p,q}_{\Omega}(X) \subset \left[D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})\right]'$ (*) dual topologique de $D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})$.
Soit $T \in \left[D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})\right]'$, T est un opérateur linéaire continue sur $D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})$ sous-espace vectoriel de $D^{n-p,\ n-q}(X)$ muni de la topologie induite par celle de $D^{n-p,\ n-q}(X)$.
D'après le théorème de Hahn - Banach, il existe un opérateur

$$\tilde{T} : D^{n-p,\ n-q}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

linéaire et continu qui étend T. Donc $T|_D$ est un courant prolongeable et

$$\left[D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})\right]' \subset \check{D}'^{\,p,q}_{\Omega}(X). \quad (**)$$

(*) et (**) donnent le résultat du théorème. □

Remarque 2.2.3
Pour $\varphi \in D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})$ *et* $T \in \check{D}'^{\,p,q}_{\Omega}(X)$, $\langle T, \varphi\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle T, \varphi_j\rangle$ *où* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *est une suite de formes différentielles dans* $D^{n-p,\ n-q}(\Omega)$ *qui converge vers* φ *dans* $D^{n-p,\ n-q}(\overline{\Omega})$

2.3 Groupes de $\bar{\partial}$-cohomologie

Groupes de $\bar{\partial}$-cohomologie

Soit X une variété analytique complexe de dimension n.

Cohomologie de Dolbeault

On a l'application

$$\begin{array}{rcl}\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}^{p,q+1}(X) \\ \psi & \longmapsto & \bar{\partial}\psi.\end{array}$$

$k = 0, \ldots, \infty$

On note

$$Z_k^{p,q}(X) = \{f \in \mathcal{E}_k^{p,q}(X) \mid \bar{\partial} f = 0\}$$

l'espace des $(p, q)-$formes différentielles $\bar{\partial}-$fermées (qui est un sous-groupe de $\mathcal{E}_k^{p,q}(X)$) et

$$B_k^{(p,q)}(X) = \left\{f \in \mathcal{E}_k^{p,q}(X) \mid \exists\, g \in \mathcal{E}_k^{p,q-1}(X) \text{ avec } \bar{\partial} g = f\right\}$$

l'espace des $(p, q)-$formes différentielles $\bar{\partial}-$exactes (qui est aussi un sous-groupe de $Z_k^{p,q}(X)$ car une forme différentielle $\bar{\partial}-$exacte .

Le groupe quotient

$$H_k^{(p,q)}(X) := \frac{Z_k^{(p,q)}(X)}{B_k^{(p,q)}(X)} \quad \text{avec} \quad H^{(p,q)}(X) := H_\infty^{(p,q)}(X)$$

est appelé $(p, q)-$ième groupe de cohomologie de Dolbeault des $(p, q)-$formes différentielles de classe C^k sur X.

De même On note

$$Z_{0,k}^{p,q}(X) = \{f \in D_k^{p,q}(X) \mid \bar{\partial} f = 0\}$$

l'espace des $(p, q)-$formes différentielles à support compact $\bar{\partial}-$fermées de classe C^k et

$$B_{0,k}^{(p,q)}(X) = \left\{f \in D_k^{p,q}(X) \mid \exists\, g \in D_k^{p,q-1}(X) \text{ avec } \bar{\partial} g = f\right\}$$

l'espace des $(p, q)-$formes différentielles à support compact $\bar{\partial}-$exactes de classe C^k.

Le groupe quotient

$$H_{0,k}^{(p,q)}(X) := \frac{Z_{0,k}^{(p,q)}(X)}{B_{0,k}^{(p,q)}(X)}$$

est appelé $(p, q)-$ième groupe de cohomologie de Dolbeault des $(p, q)-$formes différentielles à support compact de classe C^k sur X.

L'opérateur $\bar{\partial}$ défini pour les formes différentielles s'étend pour les courants par dualité.

On dit qu'un courant T de bidegré $(n - p, n - q)$ défini sur un ouvert Ω de X est $\bar{\partial}-$fermé si $\bar{\partial} T = 0$.

On note

$$Z_{cour}^{(p,q)}(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'_{p,q}(\Omega) \mid \bar{\partial} T = 0\}.$$

On dit qu'un courant T de bidegré $(n-p, n-q)$ défini sur un ouvert Ω de X est $\bar{\partial}-$exact s'il existe un courant S de bidegré $(n-p, n-q-1)$ tel que $\bar{\partial}S = T$.
On note
$$B_{cour}^{(p,q)}(\Omega) = \{\bar{\partial}S \mid S \in \mathcal{D}'_{p,q-1}(\Omega)\}.$$
Puisque $\bar{\partial}^2 = 0$ donc $B_{cour}^{(p,q)}(\Omega) \subset Z_{cour}^{(p,q)}(\Omega)$.
L'espace vectoriel
$$H_{cour}^{(p,q)}(\Omega) = \frac{Z_{cour}^{(p,q)}(\Omega)}{B_{cour}^{(p,q)}(\Omega)}$$
est appelé le $(p, q)-$ième groupe de cohomologie de Dolbeault des courants définis sur Ω.

Chapitre 3

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants

3.1 Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre N

Nous allons nous intéresser à la résoluttion du $\bar{\partial}$ pour les courants de bidegré $(p,\ q)$ d'ordre N sur Ω et prolongeables où Ω est un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. D'après [1], ces courants sont des duaux topologiques des $(n-p,\ n-q)-$formes différentielles de classe C^N à support compact sur $\overline{\Omega}$. La technique de résolution est identique à celle de [10] dans lequel Salomon SAMBOU a résolu le $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables. Il montre qu'il existe une solution du $\bar{\partial}$ pour un courant prolongeable. Ici Salomon SAMBOU et Mansour SANE ont montré que si le courant est prolongeable d'ordre l, alors il admet une solution du $\bar{\partial}$ qui est aussi un courant prolongeable d'ordre l. Nous avons d'abord la proposition suivante ; il s'agit de la résolution du $\bar{\partial}$ avec condition de support.

3.1.1 Pseudoconvexité

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques définitions pour préciser la situation géométrique dans laquelle nous aurons à résoudre le $\bar{\partial}$. Pour cela, commençons par définir dans le cas de plusieurs variables complexes la notion de fonction sous-harmonique. Ces fonctions nous serviront à définir la pseudoconvexité. La plupart des définitions et propositions sont tirées de [2]

Définition 3.1.1 *(Fonction harmonique)*
Une fonction $u : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique si

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Définition 3.1.2

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (u(x,y), v(x,y)) \end{array}$$ *est dite harmonique si u et v sont harmoniques.*

Cas particulier :

$f : (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \to (u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ de classe C^2.

Si les fonctions u et v vérifient $\forall a \in D \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(a) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(a) \end{array} \right.$ alors u et v sont harmoniques donc f est harmonique.

Remarque 3.1.1

(*) *Les domaines de $\mathbb{C}$ sont aussi des domaines de $\mathbb{R}^2$ grâce à l'isomorphisme $x + iy \in \mathbb{C} \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
Par suite, on a l'isomorphisme $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \to (x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

(**) $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Définition 3.1.3 *(Fonction sous-harmonique)*

Une fonction u définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

i) u est semi-continue supérieurement (s.c.s.), c'est-à-dire $\{z \in D \ ; \ u(z) < s\}$ est ouvert pour tout $s \in \mathbb{R}$.

ii) Pour tout compact $K \subset D$ et toute fonction h continue sur K, harmonique sur $\mathring{K}$, telle que $h \geq u$ sur bK, alors $h \geq u$ sur K.

Définition 3.1.4 *(Fonction plurisousharmonique)*

Une fonction u de $D \subset \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique (psh) sur D si u est semi-continue supérieurement et si pour tout $a \in D$ et $\omega \in \mathbb{C}^n$, la fonction $\lambda \longmapsto u(a + \lambda\omega)$ est sous-harmonique dans l'ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid a + \lambda\omega \in D\}$.

Exemple 3.1.1

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé et $C > 0$. Alors la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = C log|z - z_0|$$

est sousharmonique.

Définition 3.1.5 (Fonction d'exhaustion)

Une fonction ρ continue définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles est une fonction d'exhaustion pour D si, pour tout $c \in D$, l'ensemble

$$D_c = \{z \in D / \rho(z) < c\}$$

est relativement compact dans D.

NB Une fonction d'exhaustion ρ vérifie $\rho(z) \to \infty$ quand z s'approche du bord de D (si D est borné).

Définition 3.1.6

Un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ est dit pseudoconvexe s'il admet une fonction d'exhaustion plurisousharmonique continue.

Proposition 3.1.1

Soit D un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$. S'il existe une fonction plurisousharmonique continue ρ définie sur un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord de Ω telle que

$$U_{b\Omega} \cap \Omega = \{z \in U_{b\Omega} \mid \rho(z) < 0\},$$

alors Ω est pseudoconvexe.

Définition 3.1.7 (Domaine à bord lisse de classe C^∞)

Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit à bord lisse de classe C^∞ en un point $p \in \partial\Omega$ s'il existe un voisinage ouvert U_p de $\overline{\Omega}$, et une fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\Omega = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\},$$

$$b\Omega = \{z \in U \mid \varphi(z) = 0\}$$

et $d\varphi(p) \neq 0$. La fonction φ est appelée fonction définissante de Ω .

Définition 3.1.8 *(Forme de Lévi)*

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et ρ une fonction de classe C^2 sur D. On appelle forme de Lévi de ρ en $z \in D$ la Hessienne complexe $L_z\rho$ de ρ en z, c'est-à-dire la forme Hermitienne

$$\mathbb{C}^n \ni \zeta \longmapsto L_z\rho(\zeta) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_j \partial \bar{z_k}} \zeta_j \bar{\zeta_k}.$$

Proposition 3.1.2

Soient Ω un domaine relativement compact de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe C^2 et φ une fonction de classe C^2 à valeurs réelles définie sur un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord de Ω telle que

$$U_{b\Omega} \cap \Omega = \{z \in U_{b\Omega} \mid \varphi(z) < 0\}$$

et $d\varphi(z) \neq 0$ pour tout $z \in b\Omega$.
Soit $T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} \zeta_j = 0 \right\}$ l'espace tangent complexe de $b\Omega$.

Alors Ω est strictement pseudoconvexe (respectivement pseudoconvexe) si et seulement si $L_z\varphi(\zeta) > 0$ (respectivement $L_z\varphi(\zeta) \geq 0$) pour tout $z \in b\Omega$ et $\zeta \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega) \setminus 0$.

3.1.2 Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre N

Proposition 3.1.3 (Principe du prolongement analytique)

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Si f s'annule sur un ouvert de Ω alors f est identiquement nulle sur Ω.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$.

Si deux fonctions f et g holomorphes dans Ω sont égales dans un polydisque contenu dans Ω, alors elles sont égales dans tout Ω.

Preuve:
Si f, g sont analytiques sur un ouvert U simplement connexe et coincident sur un petit disque $|z-a|<r$, alors $f-g$ est analytique sur U et identiquement nulle sur le petit disque ; donc son prolongement analytique est identiquement nul sur U. □

Proposition 3.1.4 *[11]*

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞. Si $f \in D_k^{p,r}(\bar{\Omega}) \cap ker\bar{\partial}$, alors il existe $g \in D_k^{p,r-1}(\bar{\Omega})$ telle que $\bar{\partial}g = f$ sur $\mathbb{C}^n$, pour $1 \leq r \leq n-1$.

Preuve:
Soit $f \in D_k^{p,r}(\bar{\Omega}) \cap ker\bar{\partial}$. Puisque

$$H_{0,k}^{p,r}(\mathbb{C}^n) \approx H_{0,\infty}^{p,r}(\mathbb{C}^n) = 0,$$

il existe $h \in D_k^{p,r-1}(\mathbb{C}^n)$ telle que $\bar{\partial}h = f$. Puisque h est une $(p, r-1)-$forme sur $\mathbb{C}^n$ à support compact, on a $\bar{\partial}h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar{\Omega}} = 0$. Si $r = 1$, alors $h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar{\Omega}}$ est une $(p,\ 0)-$forme holomorphe à support compact. Le principe du prolongement analytique 3.1.3 entraine que $h = 0$ sur $\mathbb{C}^n\setminus\bar{\Omega}$. Si $r > 1$, alors $h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar{\Omega}}$ est une $(p, r-1)-$forme différentielle à support compact de classe C^k. D'après le théorème (3-1) de [8], il existe $\theta \in C_k^{p,r-2}(\mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ telle que $\bar{\partial}\theta = h_{|\mathbb{C}^n\setminus\bar{\Omega}}$. Soit $\tilde{\theta}$ une extension de θ à $\bar{\Omega}$. Posons $u = h - \bar{\partial}\tilde{\theta}$. Alors $\bar{\partial}u = \bar{\partial}h = f$ et u est à support compact sur $\bar{\Omega}$. □

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.1.1 *[11]*

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞. Si T est un courant de bidegré $(0, r)$, d'ordre N, prolongeable et $\bar{\partial}$ fermé sur Ω, alors il existe un courant S de bidegré $(0, r-1)$, d'ordre N sur Ω, prolongeable, et tel que $\bar{\partial}S = T$ sur Ω pour $1 \leq r \leq n$.

Preuve:
Considérons l'application

$$\begin{aligned} L_T : \bar{\partial}D_N^{n,n-r}(\bar{\Omega}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \bar{\partial}\varphi &\longmapsto \langle T, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Pour la démonstration, nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1.1

L_T est bien définie.

Preuve:

Soient $\psi = \bar\partial\varphi$ et $\psi^{'} = \bar\partial\varphi^{'}$ telles que $\bar\partial\varphi = \bar\partial\varphi'$, on a $\bar\partial(\varphi - \varphi^{'}) = 0$ et par conséquent $\varphi - \varphi^{'}$ est une $(n, n-r)-$forme différentielle de classe C^N à support compact sur $\bar\Omega$ et $\bar\partial$ fermée.
Si $n-r = 0$, alors $\varphi-\varphi^{'}$ est une $(n, 0)-$forme holomorphe à support compact dans $\bar\Omega$. Alors $\varphi - \varphi^{'} = 0$ d'après le principe du prolongement analytique. Donc on a $\langle T, \varphi\rangle = \left\langle T, \varphi^{'}\right\rangle$ ie $L_T(\bar\partial\varphi) = L_T(\bar\partial\varphi^{'})$.
Si $n - r \geq 1$, d'après la proposition 3.1.4, $\varphi - \varphi^{'} = \bar\partial\theta$ où $\theta \in D_N^{n,n-r-1}(\bar\Omega)$ qui est un espace de Banach. Puisque $D_N^{n,n-r-1}(\Omega)$ est dense dans$D_N^{n,n-r-1}(\bar\Omega)$, il existe $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $D_N^{n,n-r-1}(\Omega)$ telle que $\lim\limits_{j\to+\infty} \bar\partial\theta_j = \bar\partial\theta$ dans $D_N^{n,n-r}(\bar\Omega)$. Comme T est une forme linéaire continue sur $D_N^{n,n-r}(\bar\Omega)$ et $\bar\partial T = 0$ sur Ω, On a alors

$$\left\langle T, \bar\partial\theta\right\rangle = \lim_{j\to+\infty} \left\langle T, \bar\partial\theta_j\right\rangle = 0.$$

Ce qui entraîne $\langle T, \varphi\rangle = \left\langle T, \varphi^{'}\right\rangle$ ie $L_T(\bar\partial\varphi) = L_T(\bar\partial\varphi^{'})$. Donc L_T est bien définie et est linéaire. □

Lemme 3.1.2

L_T est continue.

Preuve:
Pour montrer que L_T est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque de tout ouvert U de $\mathbb{C}$ par L_T^{-1} est un ouvert de $D_N^{n,n-r}(\bar\Omega)$. Par définition de L_T, on a $L_T \circ \bar\partial = T$. Par ailleurs, T est continu et pour $1 \leq r \leq n-1$,

$$\bar\partial : D_N^{n,n-r}(\bar\Omega) \to D_N^{n,n-r+1}(\bar\Omega) \cap ker\bar\partial$$

est un opérateur linéaire continu et surjectif entre espaces de Fréchet donc ouvert.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, on a $L_T^{-1}(U) = \bar\partial(T^{-1}(U)$ où $(T^{-1}(U)$ est un ouvert de $\bar\partial D_N^{n,n-r}(\bar\Omega)$ et est une application ouverte d'où $L_T^{-1}(U)$ est un ouvert. □

Suite de la preuve du théorème. D'après le lemme 3.1.1 et le lemme 3.1.2, l'application L_T est bien définie et continue. Il est évident qu'elle est aussi linéaire. De plus

$$\bar\partial D_N^{n,n-r}(\bar\Omega) = D_N^{n,n-r+1}(\bar\Omega) \cap ker\bar\partial \subset D_N^{n,n-r+1}(\bar\Omega).$$

Donc

$$L_T : \bar\partial D_N^{n,n-r}(\bar\Omega) \to \mathbb{C}$$

est définie linéaire et continue. D'après le théorème de Hahn-Banach L_T se prolonge en une forme $\tilde L_T$ linéaire et continue sur $D_N^{n,n-r}(\bar\Omega)$.

$$(-1)^r\langle\bar\partial\tilde L_T, \varphi\rangle = \langle\tilde L_T, \bar\partial\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle,\ \forall\, \varphi \in\ D_N^{n,n-r+1}(\bar\Omega).$$

Donc $\tilde L_T$ est un courant prolongeable d'ordre N et $T = \bar\partial(-1)^r\tilde L_T$; ainsi $(-1)^r\tilde L_T$ est solution de $\bar\partial S = T$ et est un courant prolongeable. □

3.2 Application à la résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes ayant une valeur au bord au sens des courants

3.2.1 Remarque sur l'ordre d'un courant qui prolonge un forme différentielle à croissance polynomiale.

Nous nous intéressons ici à l'étude de l'ordre d'un courant qui prolonge une forme différentielle à croissance polynomiale d'ordre N. Nous montrons qu'il existe un courant qui prolonge la forme à croissance polynomiale dont l'ordre est le même que celui de cette forme. Un tel courant d'ordre N est un courant prolongeable. Nous allons d'abord établir le résultat suivant.

Proposition 3.2.1
Soit $U :]0, t_0[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application vérifiant*

$$|u(t,x)| \leq \frac{K}{t^N},\ \forall t \in]0,t_0[, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

pour un certain $K > 0$ *et un certain* $N > 0$. *Alors une primitive d'ordre* $[N]$ *par rapport à t de u est intégrable sur* $[0,\ t_0]$; $[N]$ *désignant la partie entière de N.*

Preuve:
On a :

$$|U(t,x)| \leq \frac{K}{t^N}$$

si $0 < N < 1$

$$\int_0^{t_0} \frac{K}{t^N} dt = [(1-N)Kt^{1-N}]_0^{t_0} < +\infty,$$

donc $u(t,x)$ est intégrable par rapport à t sur $[0,\ t_0]$.
Si $N \geq 1$;
On construit une suite de primitives d'ordre $k \leq [N]$ de u comme suit : pour tout $t \in]0,t_0[$, on pose

$$u_k(t,x) = \int_t^{t_0} u_{k-1}(y,x)dy \ \ \forall k = 1, ..., [N],$$

avec $u_0(y,x) := u(y,x)$.
Montrons par récurence que pour tout $k \leq [N]$, on a

$$|u_k(t,x)| \leq \alpha_k \int_t^{t_0} y^{k-N-1} dy \quad (R_k)$$

où α_k étant une constante qui ne dépend pas de k.
Pour $k = 1$, on a

$$|u_1(t,x)| = |\int_t^{t_0} u(y,x)dy| \ \leq \int_t^{t_0} |u(y,x)|dy \leq K \int_t^{t_0} y^{-N} dy.$$

Supposons qu'on a la relation(R_k) jusqu'à l'ordre $[N]-1$ et montrons qu'on a aussi (R_{k+1}). On a

$$\begin{aligned}|u_{k+1}(t,x)| = |\int_t^{t_0} u_k(y,x)dy| \ &\leq \int_t^{t_0} |u_k(y,x)|dy\\ &\leq \int_t^{t_0} (\alpha_k \int_t^{t_0} u^{k-N-1}du)dy\\ &\leq \frac{\alpha_k}{k-N}\int_t^{t_0}(y^{k-N} - t_0^{k-N})dy\\ &\leq \alpha_{k+1}\int_t^{t_0} y^{k-N}dy.\end{aligned}$$

Ainsi on a bien la relation (R_k) pour tout $k = 1, ..., [N]$. En particulier,

$$|u_{[N]}(t,x)| \leq \alpha_{[N]}\int_t^{t_0} y^{[N]-N-1}dy.$$

Et puisque $\left\{\begin{array}{ll} \int_t^{t_0} y^{[N]-N-1}dy = ln(t_0t^{-1}) & si \quad N \in \mathbb{N}\\ (N-[N])^{-1}(t^{[N]-N} - t_0^{[N]-N}) & \quad sinon.\end{array}\right.$

Donc $u_{[N]}(t,x)$ est intégrable par rapport à t sur $[t,t_0]$. □

Définition 3.2.1 (Fonction à croissance polynomiale)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné. On dit qu'une fonction f de classe C^∞ définie sur Ω est à croissance polynomiale d'ordre $N \geq 0$, s'il existe une constante C telle que pour tout $z \in \Omega$, on a

$$|f(z)| \leq \frac{C}{d(z)^N}$$

où $d(z)$ désigne la distance de z au bord de Ω.
Une forme différentielle de classe C^∞ sur Ω est à croissance polynomiale d'ordre $N \geq 0$ si ses coefficients sont à croissance polynomiale d'ordre N.

Ainsi la proposition suivante est la conséquence de la précédente.

Proposition 3.2.2

Soient $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^∞ et f une fonction à croissance polynomiale d'ordre N sur Ω. Alors il existe une distribution d'ordre N à support compact qui prolonge f au sens des courants.

Preuve:
D'après [1], une distribution G définie sur Ω est prolongeable si et seulement si, il existe des constantes C et m telles que $|\langle G, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{m,\overline{\Omega}}$ où $\|.\|_{m,\overline{\Omega}}$ est la norme de $C^m(\overline{\Omega})$.
Considérons l'application

$$\begin{aligned}[f] : D^N(\overline{\Omega}) \subset C^N(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \varphi &\longrightarrow \int_\Omega f\varphi\end{aligned}$$

Montrons que $[f]$ est continue.
Pour cela il suffit de montrer que

$$|\int_{\Omega} f\varphi| \leq C\|\varphi\|_{m,\overline{\Omega}}$$

pour toute $(n,n)-$forme différentielle φ de classe C^{∞} à support compact sur $\overline{\Omega}$.
Pour $z \in \Omega$ suffisamment proche du bord $b\Omega$ de Ω , on peut prendre $d(z)$ comme la première composante d'un changement de coordonnées $(t_1,...,t_{2n})$ dans un ouvert local contenant z et il existe alors un $t>0$ tel que $|f(z)| \leq \frac{K}{t^N}$. Puisque $b\Omega$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $(U_i)_{i=1,\dots,p}$ où chaque U_i est un ouvert de coordonnées $(t,x_1,...,x_{2n-1})$ pour lequel on a $|f(z)| \leq \frac{K}{t^N}$ pour tout $z \in U_i$. D'après la proposition précédente, pour tout $i=1,...,p$, une primitive d'ordre $[N]$ de $f|_{U_i}$ notée $U^i_{[N]}(t,x)$ est intégrable par rapport à t sur U_i. Posons $U = \bigcup_{i=1}^{p} U_i$. On a

$$\int_{\Omega} f.\varphi = \int_{\Omega\setminus U} f.\varphi + \int_{U} f.\varphi.$$

Soit $(\theta)_{i=1,\dots,p}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i=1,\dots,p}$.

$$\begin{aligned}\int_{U} f.\varphi =& \sum_{i=1}^{p} \int_{U_i} f.\theta_i\varphi \\ =& \sum_{i=1}^{p} \int_{U_i} D^{[N]}U^i_{[N]}.\theta_i\varphi.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Stokes

$$\int_{U} f.\varphi = \sum_{i=1}^{p} \pm \int_{U_i} U^i_{[N]}.D^{[N]}\theta_i\varphi.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}|\int_{U} f.\varphi| =& \sum_{i=1}^{p} \int_{U_i} |U^i_{[N]}|.|D^{[N]}\theta_i\varphi| \\ \leq& C_1\|\varphi\|_{N,\overline{\Omega}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|\int_{\Omega\setminus U} f.\varphi| \leq& \int_{\Omega\setminus U} |f|.|\varphi|dV \\ \leq& \left(\int_{\Omega\setminus U} |f|dV\right)\|\varphi\|_{0,\overline{\Omega}} \\ \leq& C_2\|\varphi\|_{0,\overline{\Omega}}\end{aligned}$$

où dV est l'élément de volume.
D'où

$$|\int_{\Omega} f\varphi| \leq C\|\varphi\|_{N,\overline{\Omega}}.$$

Donc $[f]$ est continue.

$[f]$ est linéaire continue. Puisque $D^N(\overline{\Omega})$ est un sous-espace vectoriel de $C^N(\overline{\Omega})$ donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $F : C^N(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire et continue qui prolonge $[f]$. Puisque $|\langle f, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{N,\overline{\Omega}} \quad \forall\varphi \in C^N(\overline{\Omega})$, alors d'après le deuxième point du théorème de Hahn Banach $|\langle F\varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{N,\overline{\Omega}} \quad \forall\varphi \in C^N(\overline{\Omega})$. F est un prolongement de $[f]$ d'ordre N et à support compact dans Ω. □

3.2.2 Preuve du Théorème principal

Définition 3.2.2

Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^∞, de fonction définissante ρ. Posons $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \mid \rho(z) < -\varepsilon\}$ et $b\Omega_\varepsilon$ désigne le bord de Ω_ε.
Soit f une fonction de classe C^∞ sur Ω. On dit que f admet une valeur au bord au sens des distributions s'il existe une distribution T définie sur le bord $b\Omega$ de Ω telle que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(b\Omega)$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma =< T, \varphi >$$

où si $\tilde{\varphi}$ une extension de φ à Ω et $i_\varepsilon : b\Omega_\varepsilon \to \mathbb{C}^n$ l'injection canonique, $\varphi_\varepsilon = i_\varepsilon^*\tilde{\varphi}$; $d\sigma$ désigne l'élément de volume.
Une forme différentielle de classe C^∞ sur Ω admet une valeur au bord au sens des courants si ses coefficients ont une valeur au bord au sens des distributions.

Remarque 3.2.1

On note $\tilde{D}^{p,q}(\Omega)$ l'espace des $(p,q)-$formes différentielles de classe C^∞ sur Ω ayant une valeur au bord au sens des courants.

Proposition 3.2.3

Soit Ω un domaine à bord lisse de classe C^∞ et soit f une fonction à croissance polynomiale sur Ω. Alors f admet une valeur au bord au sens des distributions.

Preuve:
Elle est divisée en trois parties.
Considérons φ, φ_ε et $\tilde{\varphi}$ comme dans la définition 3.2.2.

(1) On montre dans la première partie que si $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$ existe, alors elle ne dépend pas de l'extension $\tilde{\varphi}$ de φ choisie.

(2) Dans la deuxième partie on montre que $(\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma)_{\varepsilon>0}$ est une famille de Cauchy.

(3) Enfin dans la troisième partie on montre que l'application qui a

$$\varphi \in (b\Omega) \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$$

définit une distribution sur $b\Omega$.

(1) Démonstration de la première partie
Soit $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\varphi}'$ deux extentions de classe C^∞ de φ ; $\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}' = 0$ à l'ordre infini sur $b\Omega$.
Posons $\psi = \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}'$.
Soit $x \in b\Omega_\varepsilon$ et x_0 le point le plus proche de x dans $b\Omega$, d'après la formule de Taylor

$$\begin{aligned} \psi(x) - \psi(x_0) &= \circ\left(\|x - x_0\|^k\right), \ \forall k > 0 \\ &= \circ\left(\varepsilon^k\right), \ \forall k > 0. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que $\psi(x) = \circ(\varepsilon^k), \ \forall k > 0$.
Soit N l'ordre de f ; on a :

$$|\int_{b\Omega_\varepsilon} f\psi d\sigma| \leq \int_{b\Omega_\varepsilon} |f\psi| d\sigma \leq C \int_{b\Omega_\varepsilon} \frac{\circ(\varepsilon^k)}{\varepsilon^N} \ \forall k > 0.$$

Il suffit de choisir $k > N$ pour que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi d\sigma = 0.$$

D'où le résultat.

(2) Démonstration de la deuxième partie
Puisque f est prolongeable en une distribution F à support compact, donc F est d'ordre fini m, et on a :

$$\langle F, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi dV$$

où dV désigne l'élément de volume.
En plus, si F prolonge f, alors $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ prolonge $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ au sens des distributions $\forall j = 1, 2, ..., n$.

$$\begin{aligned} \int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma &= \int_{\Omega_\varepsilon} d(f\tilde{\varphi}d\sigma) \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} dx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma) + \int_{\Omega_\varepsilon} f dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma) \right) \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} dx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \tilde{\varphi} \right\rangle$$

,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma) \right) = \left\langle F, \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\varphi} \right\rangle;$$

d'où le résultat.

(3) Démonstration de la troisième partie
L'application

$$\begin{aligned} C^\infty(b\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\to \lim_{\epsilon\to 0}\int_{b\Omega_\epsilon} f\varphi_\epsilon d\sigma \end{aligned}$$

est une application linéaire.
Il suffit de montrer qu'elle est continue pour qu'elle définisse une distribution.
Puisque $\int_{b\Omega_\epsilon} f\varphi_\epsilon d\sigma$ a une limite qui ne dépend pas de l'extension choisie, considérons $\tilde{\varphi}$ telle que :
$\|\tilde{\varphi}\|_{m,\overline{\Omega}} \leq C\|\varphi\|_{m,b\Omega}$, où m est l'ordre de F.

$$\begin{aligned} |\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\epsilon} f\varphi_\epsilon d\sigma| =& |\sum_{j=1}^{2n}\left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \tilde{\varphi}\right\rangle \pm \left\langle F, \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\varphi}\right\rangle\right)| \\ \leq& C^{'}\|\tilde{\varphi}\|_{m+1,\overline{\Omega}} \\ \leq& C^{''}\|\varphi\|_{m+1,b\Omega}; \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Preuve: (**Preuve du théorème principal**)
D'après [9], si f est une forme différentielle $\bar{\partial}-$fermée, ayant une valeur au bord au sens des courants sur Ω alors $[f]$ est un courant prolongeable. Puisque $\bar{\Omega}$ est compact, alors $[f]$ est d'ordre fini. Soit S une extension à support compact dans $\bar{\Omega}$ de u où u est un courant prolongeable sur Ω de même ordre que f. Considérons le courant F défini par $F = \bar{\partial}S$ qui est un prolongement de f à support compact dans $\bar{\Omega}$ et d'ordre fini l.
D'après la formule de $\bar{\partial}-$homotopie de [3] on a : $S = R_\epsilon S + A_\epsilon\bar{\partial}S + \bar{\partial}A_\epsilon S$. Or $\bar{\partial}S = F$ où R_ϵ est un opérateur régularisant et A_ϵ un opérateur qui augmente la régularité de $\frac{1}{2}$. Ainsi $S = R_\epsilon S + A_\epsilon F + \bar{\partial}A_\epsilon S$ alors $\bar{\partial}S = \bar{\partial}\left(R_\epsilon S + A_\epsilon F\right) = F$ donc $\left(R_\epsilon S + A_\epsilon F\right)|_\Omega$ est une autre solution de l'équation $\bar{\partial}u = f$.
Or $R_\epsilon S$ est une forme de classe C^∞ à support compact dans un $\epsilon-$voisinage du support de S, donc bornée sur Ω. Donc $A_\epsilon F$ est le mauvais terme de la solution $R_\epsilon S + A_\epsilon F$, au sens où il n'admet pas immédiatement de valeur au bord. Sa régularité est meilleure que celle de F dans un $\epsilon-$voisinage V^ϵ du support de F. Puisque $F \equiv 0$ sur $V^\epsilon\backslash\overline{\Omega}$ et F est C^∞ sur Ω donc F est C^∞ sur V^ϵ. Ainsi $A_\epsilon F_{|\Omega}$ est donc C^∞. Montrer qu'il a une valeur au bord au sens des courants. Il nous suffit pour avoir le théorème de montrer que $A_\epsilon F$ restreinte à Ω admet une valeur au bord au sens des courants. Or $A_\epsilon F$ est de même nature que $\langle F,\ K(z,\xi)\rangle$ où $K(z,\ \xi)$ est le noyau de Bochner Martinelli Koppelmann.
Nous allons donc montrer que $\langle F,\ K(z,\xi)\rangle$ admet une valeur au bord au sens des courants.
$u(z) := \langle F, K(z,\xi)\rangle$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$, ρ une fonction à support compact sur $B\left(z,\ \frac{d(z)}{2}\right)$ comprise entre 0 *et* 1 qui vaut 1 sur $B\left(z,\ r(z) = \frac{d(z)}{4}\right)$, où $d(z)$ est la distance de z au bord de Ω. On a

$$u(z) = \langle F,\ \rho K(Z,\ \xi)\rangle + \langle F, (1-\rho)K(z,\ \xi)\rangle\,.$$

Posons $u_1(z) = \langle F,\ \rho K(Z,\ \xi)\rangle = \int_{z\in\Omega}\rho f\wedge K(z,\ \xi)$.
u_1 est une forme de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$; donc admet une valeur au bord au sens des courants.

Posons $u_2(z) = \langle F, (1-\rho)K(z,\ \xi)\rangle$. Puisque l est l'ordre du courant F qui prolonge f, on a :

$$
\begin{aligned}
u_2(z) \leq & C \parallel (1-\rho)K(z,\ \xi) \parallel_{l,\bar{\Omega}} \\
\leq & C \parallel (1-\rho)K(z,\ \xi) \parallel_{l,\bar{\Omega}\setminus\bar{B}(z,\ \frac{d(z)}{4})} \\
\leq & \sup_{l,\bar{\Omega}\setminus\bar{B}(z,\ \frac{d(z)}{4})} \frac{C'}{|\xi - z|^{2n-1+l}} + \textit{des termes moins mauvais} \\
\leq & \sup_{l,\bar{\Omega}\setminus\bar{B}(z,\ \frac{d(z)}{4})} \frac{C''}{|\xi - z|^{2n-1+l}} \\
\leq & \frac{C'''}{(d(z))^{2n-1+l}}.
\end{aligned}
$$

Donc u_2 est une forme à croissance polynomiale sur Ω d'ordre $2n-1+l$; alors elle admet une valeur au bord au sens des courants d'après la proposition 3.1 de [11] .

□

Conclusion

Dans ce travail, nous avons éssayé de détailler l'article [11] de Salomon SAMBOU et Mansour SANE sur la résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseuoconvexe de $\mathbb{C}^n$.
Nous avons vu que pour aboutir à leur résultat, les auteurs ont d'abord exploité les résultats de [9] qui ont montré qu'une forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée qui a une valeur au bord au sens des courants définit un courant prolongeable d'ordre fini sur un domaine relativement compact. Ensuite en s'inspirant de la résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables de [10], ils ont résolu le $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre fini. Enfin ils ont utilisé la formule de $\overline{\partial}$-homotopie de Chirka [3].
Puisque les auteurs ont travaillé sur un ouvert strictement pseudoconvexe sur $\mathbb{C}^n$, ce résultat serait-il vrai pour un ouvert pseudoconvexe d'une variété analytique complexe ?

Bibliographie

[1] A. Martineau. Distribution et valeurs au bord des fonctions holomorphes. Strasbourg RCP 25 (1966).

[2] C. LAURENT- THIEBAULT : Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, InterEditions/CNRS Editions.

[3] E. M. chirka -" Regularization and $\bar{\partial}$-Homotopie on a complex manifold," Soviet Math. Dolk 20, 1979. p. 73-76.

[4] H. BREZIS -"Analyse fonctionnelle. Théorie et applications", Broché – Grand livre, 23 septembre 2020

[5] Jean-Pierre Demailly-"Differential Calculus on Complex Analytic Manifolds" in Complex Analytic and Differential Geometry, Version of Thursday June 21, 2012, p. 21-25.

[6] Jean-Pierre Demailly-"Plurisubharmonic Functions" in Complex Analytic and Differential Geometry, Version of Thursday June 21, 2012, p. 39-54.

[7] Jean-Pierre Demailly-"Complex Analytic and Differential Geometry"

[8] J. L. C. LAURENT- THIEBAULT -"Andreotti-vesentini separation theorem with C^k estimates of cr forms", Mathematical Notes **38 Princeton University** (1993), p. 416-436.

[9] S. LOJACIEWIECZ AND G. TOMASSINI - "Valeurs au bord des formes holomorphes", in Several Complex Variables (P.Scuola. Norm. Sup. Pisa, Ed,) Cortona, 197677, 1978, p. 222-246.

[10] S. SAMBOU - " Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables", Math Nachrichten **235** (2002), p . 179 - 190.

[11] S. SAMBOU et M. SANE - " Résolution du $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe.", Annales mathématiques BLAISE PASCAL, volume 18, n°2 (2011), p. 323-331

[12] Thierry Bouche -"Structures presque complexes" in Introduction à la géométrie différentielle des variétés analytiques complexes , Université Joseph Fourier 1998, P40

[13] W. Rudin -"Analyse fonctionelle" Broché – 1 janvier 2000