UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES
OPTION : ALGÈBRE

Thème : Produit Semi-direct d'Algèbres de H-dimodule

Présenté par : Ibrahima TRAORE

Directeur : Pr Thomas GUEDENON

Co-directeur : Dr Christophe Lopez NANGO

Devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Oumar SALL	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Thomas GUEDENON	Professeur Assimilé	Directeur	UASZ
Moussa FALL	Maitre de Conf. Titulaire	Examinateur	UASZ
Christophe Lopez NANGO	Docteur	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2021−2022

Produit Semi-direct d'algèbres de H-dimodule

11 Mars 2023

Table des matières

REMERCIEMENTS

❤

Il est habituel de remercier à la fin d'un tel travail tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué à le rendre possible. *Même* si dans mon cas, cette liste peut sembler plus longue que de coutume, c'est avec un grand plaisir que je voudrais rendre un vibrant hommage à tous ceux qui à leur manière m'ont aidé à mener à bien ce mémoire.

Je désire alors exprimer ma profonde gratitude :
-A mon directeur de mémoire **Pr. Thomas GUEDENON**, pour le soutien qu'il m'a toujours apporté durant la préparation de ce travail. Je le remercie pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer et pour les conseils judicieux qu'il m'a prodigué. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.
-A **Dr. Christophe Lopez NANGO**, je voudrais lui exprimer ma profonde gratitude pour sa sympathie, sa disponibilité et ses conseils intérèssants et bien profitables pour l'avancement de mon travail. Pendant toutes les heures passées ensemble, j'ai pu apprendre et profiter pleinement de son expérience et ses qualités scientifiques (bref un "Hopfiste").
-Aux membres du jury Professeur **Oumar SALL**, Docteur **Moussa FALL** et Docteur **Christophe Lopez NANGO**, qui ont *l'extrême* gentillesse d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes vifs remerciements à tous mes enseignants depuis l'école primaire.

Je voudrais remercier mes camarades de master de maths appliquées et maths pures de l'Université Assane Seck de Ziguinchor en particulier Abdoulaye DIOUF, Mouhamed Fadel AIDARA, Thierno Amadou DIALLO, Malick FAYE, Papa Aly CISSE, Marie FAYE, Abdourahmane DIATTA, Oumar DIOP, Pathé BA, Serigne Saliou DIALLO, Steven Mark DIOP, Jesus Christ BASSE.
Egalement mes camarades en licence à l'Université Iba Der Thiam de Thiès en particulier Seydi Diamil Diouf, Saliou Diaw, Lamine Diop, Cheikh Kandji Ngom, Ababacar Ndiaye.

Toute ma reconnaissance à mes petits frères qui m'ont accueilli à l'Université Assane Seck de Ziguinchor (la chambre 43B et ensuite la chambre

14A)en particulier Lamine Sagna, Cheikh Mouhamed Pouye, Nar Gassama, Cheikh Sy, Papa Lo Dramé, Serigne Modou Habib Sene, Abdou Lahad Ndiaye.

Mes remerciements vont aussi aux Docteurs : **Souhaibou SAMBOU, Elhadji SOW**. Je remercie également mes anciens : **Aziz MANGA, Aliou BA** et à l'ensemble des étudiants du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université Assane Seck sans oublier **Ange Nicolas MANKABOU, Pathé DIOP, Maram NIANG**, ma petite soeur **Bintou TRAORE** et son époux **M. Amadou DIOP**, prof de Mathématiques au lycée d'enseignement général de Diourbel.

Enfin j'ai fouillé de fond en comble ma tête pour trouver une expression qui peut décrire ma gratitude envers vous, mes frères et soeurs, mes amis d'enfance, ma famille, et tout ceux qui, de loin ou de près, ont rendu si spécial ce travail ; surtout mon grand frère Abdoulaye TRAORE qui m'a toujours soutenu financièrement et moralement qu'il trouve dans ce modeste travail mes vifs remerciements, ma mère et mon défunt Père Mamadou TRAORE (paix à son âme) à qui je dédié ce mémoire.

RÉSUMÉ

Soient K un corps, H une algèbre de Hopf, A et B deux algèbres de H-dimodule.
On note $A\#B$ le produit semi-direct de A et B : c'est le produit tensoriel $A \otimes B$ muni d'un produit particulier.
Dans [1],Caenepeel, S., Oystaeyen, F. Van, Zhang, Yin-huo ont montré que $A\#B$ est une algèbre de H-dimodule en supposant que H est commutative et cocommutative.
Dans [8], Zhang, L-yun ; Tong, Wen-ting, ont généralisé ce resultat en remplacant la commutativité et la cocommutativité par les conditions (20) et (21).
Si l'algèbre de Hopf H est cocommutative et commutative alors les équations (20) et (21) sont satisfaites.
Ils ont aussi donné une condition nécessaire et suffissante pour que le produit semi-direct $A\#B$ soit une bialgèbre ou une algèbre de Hopf.Ils ont donné deux exemples pour montrer la validité des conditions (20) et (21).
Dans ce mémoire, notre but est de comprendre et d'expliquer les resultats de [1] et [8]

INTRODUCTION

Dans ce Mémoire de Master nous allons étudier les résultats de l'article de Liang-yun Zhang et Wen-ting Tong intitulé **Produit semi-direct d'algèbres de H-dimodule** (Titre original : « **Smash Product Over H-Dimodule Algbras** ») paru dans[8].

Dans [1], les auteurs ont introduit la notion d'algèbres de modules de Yang-Baxter quantiques issues d'un module de Yang-Baxter quantique. Dans [4], si une algèbre de Hopf sous-jacente est à la fois commutative et cocommutative alors les algèbres de modules de Yang-Baxter quantiques sont exactement des algèbres de dimodules. Si l'algèbre de Hopf est de dimension finie, alors l'algèbre de modules de Yang-Baxter quantiques est équivalente à une algèbre de $D(H)$-module où $D(H)$ est le double de Drinfel'd de l'algèbre de Hopf H. En outre, ils ont défini un produit tressé pour l'algèbre des modules de Yang-Baxter quantiques de sorte que la catégorie des modules de Yang-Baxter quantiques devienne une catégorie monoïdale et les groupes de Brauer de l'algèbre des modules de Yang-Baxter quantiques puissent être construits, ce qui généralise le groupe de Brauer Long.

Le plan de ce mémoire de Master est le suivant : d'abord dans la partie titrée Algèbre de Hopf et Algèbre de H-module, nous présentons quelques notions de base sur les algèbres de Hopf. Ensuite nous allons parler d'Algèbre de H-comodule. Enfin, nous entrons dans le vif du sujet de ce Mémoire intitulé produit semi-direct d'algèbres de H-dimodule. Voici les principaux résultats qui ont fait l'objet de cette étude :

Théorème 0.1
Soient H une algèbre de Hopf, A et B deux algèbres de H-dimodule

$$\Sigma h_1.a \otimes h_2 = \Sigma h_2.a \otimes h_1, \textit{pour tous } a \in A, h \in H; \tag{1}$$

$$\Sigma x_{(0)} \otimes x_{(1)}h = \Sigma x_{(0)} \otimes hx_{(1)}, \textit{pour tout } h \in H, x \in B; \tag{2}$$

Le produit semi-direct de A et B noté $A\#B$ est defini comme suit :
$A\#B = A \otimes B$ comme $\mathbb{K}$-module et sa multiplication est donnée par :
$(a\#x)(b\#y) = \Sigma a(x_{(1)}.b)\#x_{(0)}y$.
Alors le produit semi-direct $A\#B$ de A et B est une algèbre de H-dimodule, où l'action et la coaction sont données respectivement par :

$$h.(a\#b) = \Sigma h_1.a\#h_2.b, \textit{avec } \; \Delta_H(h) = \Sigma h_1 \otimes h_2. \tag{3}$$

$$\varphi(a\#b) = (a_0\#b_0) \otimes a_1b_1 \tag{4}$$

Théorème 0.2
Si A et B sont deux bialgèbres, alors la structure du produit tensoriel de coalgèbre sur $A\#B$ est compatible avec l'algèbre du produit semi-direct faisant

de $A\#B$ une bialgèbre si et seulement si l'application $f : \begin{array}{l} A\#B \longrightarrow A\#B \\ a\#x \longmapsto \Sigma x_{(1)}.a\#x_{(0)} \end{array}$
est un morphisme de coalgèbres.

Dans cette situation, si A et B sont deux algèbres de Hopf alors le produit semi-direct $A\#B$ est une algèbre de Hopf avec l'antipode $S_{A\#B}$ définie par :

$$S_{A\#B}(a\#x) = (1\#S_B(x))(S_A(a)\#1).$$

1 ALGEBRE DE HOPF ET ALGEBRE DE H-MODULE

1.1 COALGEBRE

1.1.1 Algèbre

Définition 1.1
Soit A un $\mathbb{K}$-module. On considère $A \otimes_{\mathbb{K}} A = A \otimes A$ le produit tensoriel de A par A sur $\mathbb{K}$.
Une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire A est un triplet du type (A, m_A, μ_A) où A est un $\mathbb{K}$-module et les applications

$$m_A : \begin{array}{l} A \otimes A \longrightarrow A \\ a \otimes a' \longmapsto aa', \forall\ a, a' \in A \end{array} \qquad et\ \mu_A : \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow A \\ \lambda \longmapsto \lambda 1_A, \forall\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

sont $\mathbb{K}$-linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m_A"] \arrow[d, "m_A \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m_A"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m_A"] & \\ \mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "\mu_A \otimes id_A"] \arrow[dr, "id_A"'] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "id_A \otimes \mu_A"'] \arrow[dl, "id_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire,

- *$m_A \circ (m_A \otimes id_A) = m_A \circ (id_A \otimes m_A)$: c'est l'associativité,*
- *et $m_A \circ (id_A \otimes \mu_A) = id_A = m_A \circ (\mu_A \otimes id_A)$: c'est l'unité.*

L'application m_A est appelée le produit ou la multiplication, l'application μ_A est l'application unité et $\mu_A(1_{\mathbb{K}})$ est l'élément unité de A.

1.1.2 Morphisme d'Algèbres

Soient A et B deux algèbres et $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On dit que f est un morphisme d'algèbres si :

$$m_B \circ (f \otimes f) = f \circ m_A$$
$$et$$
$$f \circ \mu_A = \mu_B.$$

1.1.3 Coalgèbre

Pour définir les axiomes de coalgèbres, nous allons dualiser les axiomes définissant les algèbres.

Définition 1.2
Une coalgèbre (ou cogèbre) co-unitaire C est un triplet $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$, où C est $\mathbb{K}$-module, $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$(coproduit) et $\varepsilon_C : C \longrightarrow \mathbb{K}$(co-unité) satisfaisant les deux axiomes suivants :

- $(\Delta_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = (id_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C$, *c'est la co-associativité,*
- $(id_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C = (\varepsilon_C \otimes id_C) \circ \Delta_C$, *c'est la co-unité.*

La coalgèbe C est dite co-commutative si $\tau \circ \Delta = \Delta$ où τ est la volte de $C \otimes C$.

1.1.4 Notation de Sweedler-Heyneman

Le co-produit d'un élément est une somme de tenseurs, ainsi pour tout $c \in C$, on va utiliser la notation suivante (dite notation de Sweedler) :

$$\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_1 \otimes c_2 = c_{(1)} \otimes c_{(2)} = c_1 \otimes c_2.$$

Les notations de Sweedler-Heyneman (ou Sweedler) sont très utiles pour faire les calculs dans les coalgèbres.
Dans la suite de tout ce travail, nous utiliserons la notation $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.
Avec cette notation, l'axiome de la co-associativité se traduit par :

$$\Delta_C(c_1) \otimes c_2 = c_1 \otimes \Delta_C(c_2),$$

c'est-à-dire,

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3, \quad \forall c \in C.$$

L'axiome de la co-unité se traduit par :

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2), \quad \forall c \in C.$$

1.1.5 Morphisme de coalgèbres

Définition 1.3
La notion de morphisme de coalgèbres est la notion duale de morphisme d'algèbres. On la définit en renversant les flèches dans la définition de morphisme d'algèbres.
Soient C et D deux coalgèbres. Une application $\mathbb{K}$-linéaire

$f : C \longrightarrow D$ est un morphisme de coalgèbres si les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C \otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f \text{ et } \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C.$$

autrement dit f est un morphisme de coalgèbres si :

$$f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_1) \otimes f(c_2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_D[f(c)] = \varepsilon_C(c) \quad \forall c \in C, \quad \text{avec} \quad \Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2.$$

1.1.6 Bialgèbre

Lemme 1.4
Soient (B, m_B, μ_B) une algèbre et $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ une coalgèbre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) Δ_B et ε_B sont des morphismes d'algèbres,
ii) m_B et μ_B sont des morphismes de coalgèbres,
iii)Pour tous $a, b \in B$,

$$\Delta_B(ab) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2, \quad \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B,$$

$$\varepsilon_B(ab) = \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b), \quad \varepsilon_B(1_B) = 1_{\mathbb{K}}.$$

Définition 1.5
On dit qu'un $\mathbb{K}$-module B est une bialgèbre (ou bigèbre) si B est une algébre (B, m_B, μ_B) et une coalgèbre $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ satisfaisant l'une des propriétés du Lemme (1.4).

1.2 ALGEBRE DE HOPF

Dans cette partie, on va définir la notion d'algèbre de Hopf. C'est une structure algébrique qui va lier celles d'algèbre et de co-algèbre.

1.2.1 Produit de convolution

Soient C une coalgèbre, A une algèbre.

Définition 1.6
Soient $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. La convolution est définie par :

$$f \star g = m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C, \tag{5}$$

ce qui se traduit par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "f \otimes g"] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\
C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "f \star g"'] & A
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, avec la notation de Sweedler, pour tout $c \in C$ on a :

$$(f \star g)(c) = f(c_1)g(c_2). \tag{6}$$

Ce produit est appelé produit de convolution.
Muni du produit de convolution, $Hom_K(C, A)$ est une algèbre associative unitaire d'unité $\mu_A \circ \varepsilon_C$.

Définition 1.7
Une bialgèbre $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H)$ est une algèbre de Hopf si l'application identique id_H de $Hom_K(H, H)$ admet une application inverse notée S_H par rapport au produit de convolution de $Hom_K(H, H)$. On appelle S_H l'antipode de H.

1.2.2 Formule de l'antipode et Propriétés de l'antipode

Proposition 1.8
Soient $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode S_H, on a :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1 S_H(h_2).$$

Preuve :
Par définition, on a :

$$S_H \star id_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = id_H \star S_H. \tag{7}$$

Ainsi, on a : $\forall\ h \in H$,

$$\begin{aligned}(S_H \star id_H)(h) &= \mu_H \circ \varepsilon_H(h)\\ S_H(h_1)id_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)1_H.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(id_H \star S_H)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h)\\ id_H(h_1)S_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)1_H,\end{aligned}$$

d'où la formule :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

$$\begin{array}{rl} \textit{Donc :} & \\ S_H(1_H) & = 1_H S_H(1_H)\\ & = \varepsilon_H(1_H)1_H\\ & = 1_H\\ & \textit{ou bien}\\ S_H(1_H) & = S_H(1_H)1_H\\ & = 1_H\varepsilon_H(1_H)\\ & = 1_H\\ \textit{d'où} & S_H(1_H) = 1_H.\ \clubsuit \end{array}$$

Proposition 1.9
Soit H une algèbre de Hopf. On a :

$$\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H, \quad \forall\ h \in H. \tag{8}$$

Preuve :
Montrons que $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H$. Soit $h \in H$, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_H(h) &= \varepsilon_H(\varepsilon_H(h)1_H)\\ &= \varepsilon_H(h_1S_H(h_2))\\ &= \varepsilon_H(h_1)\varepsilon_H(S_H(h_2))\\ &= \varepsilon_H(\varepsilon_H(h_1)S_H(h_2))\\ &= \varepsilon_H(S_H(\varepsilon_H(h_1)h_2))\\ &= \varepsilon_H(S_H(h))\\ &= (\varepsilon_H \circ S_H)(h)\end{aligned}$$

d'où $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H.\clubsuit$

1.3 ALGEBRE DE H-MODULE

Définition 1.10
Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et H une algèbre de Hopf. On dit que A est une algèbre de H-module à gauche si A est un H-module à gauche tel que :

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \tag{9}$$

où $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$ et $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

Remarque 1.11
$\mathbb{K}$ *est un H-module trivial : $h.\lambda = \varepsilon(h)\lambda$.*

Définition 1.12
Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et H une algèbre de Hopf. On dit que A est une algèbre de H-module à droite si A est un H-module à droite tel que :

$$(ab) \cdot h = (a \cdot h_1)(b \cdot h_2) \tag{10}$$

où $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$ et $1_A \cdot h = 1_A\varepsilon(h)$.

Lemme 1.13
Soit H une algèbre de Hopf. Si M et N sont des H-modules à gauche, alors $M \otimes N$ est un H-module à gauche pour l'action diagonale :

$$h(m \otimes n) = (h_1 m) \otimes (h_2 n),\ \forall\ h \in H,\ m \in M,\ n \in N.$$

1.3.1 Produit semi-direct

Définition 1.14
Soit A une algèbre de H-module à gauche.
Le produit semi-direct de A et H noté $A\#H$ est le produit tensoriel $A \otimes H$ muni du produit :

$$(a \otimes h)(a' \otimes h') = a(h_1.a') \otimes (h_2 h'),\quad \forall\ a, a' \in A,\ h,\ h' \in H. \tag{11}$$

$A\#H$ est une algèbre associative unitaire (d'unité $1_A\#1_H$).

En effet :
Soient $a,\ a',\ a'' \in A,\ h,\ h',\ h'' \in H$. On a :
∘ $A\#H$ est un $\mathbb{K}-$module d'après les hypothèses.
∘ La linéarité de $m_{A\#H}$ et les propriétés du produit tensoriel donnent :

$$\begin{aligned}&m_{A\#h}[((a\#h)+(a'\#h'))\otimes(a''\#h'')]\\&\quad=m_{A\#H}[((a\#h)\otimes(a''\#h''))+((a'\#h')\otimes(a''\#h''))]\\&\quad=m_{A\#H}[(a\#h)\otimes(a''\#h'')]+m_{A\#H}[(a'\#h')\otimes(a''\#h'')],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&m_{A\#H}[(a\#h)\otimes((a'\#h')+(a''\#h''))]\\&\quad=m_{A\#H}[((a\#h)\otimes(a'\#h'))+((a\#h)\otimes(a''\#h''))]\\&\quad=m_{A\#H}[(a\#h)\otimes(a'\#h')]+m_{A\#H}[(a\#h)\otimes(a''\#h'')].\end{aligned}$$

∘ La commutativité du rectangle donne :
A-t-on $[m_{A\#H}\circ(m_{A\#H}\otimes id_{A\#H})](a\#h\otimes a'\#h'\otimes a''\#h'')=[m_{A\#H}\circ(id_{A\#H}\otimes m_{A\#H})](a\#h\otimes a'\#h'\otimes a''\#h'')$?

$$\begin{aligned}&[m_{A\#H}\circ(m_{A\#H}\otimes id_{A\#H})](a\#h\otimes a'\#h'\otimes a''\#h'')\\&\quad=m_{A\#H}[(m_{A\#H}\otimes id_{A\#H})(a\#h\otimes a'\#h'\otimes a''\#h'')]\\&\quad=m_{A\#H}[(m_{A\#H}(a\#h\otimes a'\#h')\otimes id_{A\#H}(a''\#h'')]\\&\quad=m_{A\#H}[(m_{A\#H}(a\#h\otimes a'\#h')\otimes(a''\#h'')]\\&\quad=m_{A\#H}[(a\#h)(a'\#h')\otimes(a''\#h'')]\\&\quad=[(a\#h)(a'\#h')](a''\#h''),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[m_{A\#H}\circ(id_{A\#H}\otimes m_{A\#H})](a\#h\otimes a'\#h'\otimes a''\#h'')\\&\quad=m_{A\#H}[(id_{A\#H}\otimes m_{A\#H})](a\#h\otimes a'\#h'\otimes a''\#h'')]\\&\quad=m_{A\#h}[id_{A\#H}(a\#h)\otimes m_{A\#H}(a'\#h'\otimes a''\#h'')]\\&\quad=m_{A\#H}[(a\#h)\otimes m_{A\#H}(a'\#h'\otimes a''\#h'')]\\&\quad=m_{A\#H}[(a\#h)\otimes(a'\#h')(a''\#h'')]\\&\quad=(a\#h)[(a'\#h')(a''\#h'')].\end{aligned}$$

Ainsi, $A\#H$ est associative.
On a : $\forall\ a\#h,\ a'\#h',\ a''\#h''\in A\#H$,

∘ La commutativité des deux triangles donne :
A-t-on $m_{A\#H}\circ(id_{A\#H}\otimes\mu_{A\#H})=m_{A\#H}\circ(\mu_{A\#H}\otimes id_{A\#H})$?

$$\begin{aligned}
[m_{A\#H}\circ(id_{A\#H}\otimes\mu_{A\#H})]((a\#h)\otimes\lambda) &= m_{A\#H}[(id_{A\#H}\otimes\mu_{A\#H})]((a\#h)\otimes\lambda)]\\
&= m_{A\#H}[id_{A\#H}(a\#h)\otimes\mu_{A\#H}(\lambda)]\\
&= m_{A\#H}((a\#h)\otimes\lambda)\\
&= (a\#h)\lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[m_{A\#H}\circ(\mu_{A\#H}\otimes id_{A\#H})](\lambda\otimes(a\#h)) &= m_{A\#H}[(\mu_{A\#H}\otimes id_{A\#H})](\lambda\otimes(a\#h))]\\
&= m_{A\#H}[\mu_{A\#H}(\lambda)\otimes id_{A\#H}(a\#h)]\\
&= m_{A\#H}(\lambda\otimes(a\#h))\\
&= \lambda(a\#h).
\end{aligned}$$

Ainsi, $A\#H$ est unitaire.

$m_{A\#H}$ est $\mathbb{K}$-linéaire. A-t-on $m_{A\#H}(\lambda(a\#h)\otimes a'\#h')) = m_{A\#H}(a\#h)\otimes a'\#h')\lambda)$?

$$\begin{aligned}
\circ\ m_{A\#H}(\lambda(a\#h)\otimes a'\#h')) &= \lambda m_{A\#H}(a\#h\otimes a'\#h')\\
&= \lambda((a\#h)(a'\#h'))\\
&= (\lambda(a\#h))(a'\#h'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{A\#h}(\lambda(a\#h\otimes a'\#h')) &= m_{A\#h}((\lambda(a\#h)\otimes a'\#h'))\\
&= m_{A\#h}((a\#h)\otimes\lambda(a'\#h'))\\
&= (a\#h)(\lambda(a'\#h')).
\end{aligned}$$

Ainsi, $A\#H$ est une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire, d'où $A\#H$ est une algèbre.

2 ALGEBRE DE H-COMODULE

Les notions de comodules et de morphismes de comodules sont des notions duales de modules et de morphismes de modules. Afin de mieux comprendre ces deux notions, nous allons définir les modules et les morphismes de modules par des diagrammes.

2.1 Module

2.1.1 Module sur une algèbre

Définition 2.1
Soit A une algèbre. Un $\mathbb{K}$-module M est un A-module à gauche s'il existe une application $\mathbb{K}$-linéaire :

$$\begin{aligned} \rho_M : \quad & A \otimes M \longrightarrow M \\ & a \otimes m \longmapsto a.m = am, \quad \forall\ a \in A,\ m \in M \end{aligned}$$

telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \rho_M"] \arrow[d, "m_A \otimes id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\rho_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\rho_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes M \arrow[rr, "\mu_A \otimes id_M"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\rho_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

La commutativité du rectangle équivaut à :

$$\rho_M \circ (id_A \otimes \rho_M) = \rho_M \circ (m_A \otimes id_M),$$

$$(ab)m = a(bm), \quad \forall\ a,\ b \in A,\ m \in M.$$

Celle du triangle équivaut à :

$$\rho_M \circ (\mu_A \otimes id_M) = f,$$

$$1_A m = m.$$

On dit alors que A agit à gauche sur M. L'application ρ_M est l'action sur M.

2.1.2 Morphisme de A-modules

Définition 2.2
Soit A une algèbre et soient M et N deux A-modules à gauche. Un morphisme de A-modules $f : M \longrightarrow N$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ A \otimes M \arrow[u, "\rho_M"] \arrow[r, "id_A \otimes f"'] & A \otimes N \arrow[u, "\rho_N"'] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$f \circ \rho_M = \rho_N \circ (id_A \otimes f).$$

Donc $\forall\ a \in A,\ m \in M$, on a :

$$(f \circ \rho_M)(a \otimes m) = (\rho_N \circ (id_A \otimes f))(a \otimes m),$$

c'est-à-dire,

$$f(a.m) = a.f(m).$$

2.1.3 Comodule

Un comodule est la notion duale de module. On la définit en renversant les flèches dans la définition du module.

Définition 2.3
Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. Un $\mathbb{K}$-module à gauche M est un C-comodule (ou C-comodule) à droite s'il existe une application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\lambda_M : M \longrightarrow M \otimes C$$

qui rend commutatif les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta_C"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\lambda_M \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \varepsilon_C"] \\ & M \otimes \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Ce qui équivaut à :
- $(id_M \otimes \Delta_C) \circ \lambda_M = (\lambda_M \otimes id_C) \circ \lambda_M,$
- $(id_M \otimes \varepsilon_C) \circ \lambda_M = f.$

L'application λ_M est appelée la C-coaction ou la coaction de C sur M.

2.1.4 Notation de Sweedler pour les comodules

Soit $M = (M, \lambda_M)$ un $C-$comodule à droite. Pour $m \in M$, on note :

$$\lambda_M(m) = \Sigma m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \Sigma m_0 \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1. \tag{12}$$

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons la notation $\lambda_M(m) = m_0 \otimes m_1$.

Avec la notation de Sweedler, la commutativité des diagrammes précédents équivaut à :

$$m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$$

et

$$m_0 \varepsilon_C(m_1) = m = \varepsilon_C(m_0) m_1.$$

2.1.5 Morphisme de comodules

On dualise la notion de morphisme de modules pour obtenir un morphisme de comodules.

Définition 2.4
Soit C une coalgèbre et soient M et N deux C-comodules à droite.
Une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de C-comodules à droite ou une application C-colinéaire à droite si le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & N \arrow[d, "\lambda_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire : $\lambda_N \circ f = (f \otimes id_C) \circ \lambda_M$. Donc $\forall\ m \in M$ on a :

$$(\lambda_N \circ f)(m) = [(f \otimes id_C) \circ \lambda_M](m)$$

$$(f(m))_0 \otimes (f(m))_1 = f(m_0) \otimes (m_1)$$

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

Ainsi, f est C-colinéaire si et seulement si

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1. \tag{13}$$

Remarque 2.5
On peut aussi définir un C-comodule à gauche M avec la coaction à gauche définie par :

$$\lambda_M(m) = m_{-1} \otimes m_0 \in C \otimes M.$$

2.2 Module de Hopf relatif

2.2.1 Algèbre de H-comodule

Définition 2.6
Soit H une algèbre de Hopf. Un $\mathbb{K}$-module A est une algèbre de H-comodule à droite si A est une $\mathbb{K}$-algèbre et un H-comodule à droite tel qu'on ait :
• $\lambda_A(aa') = (aa')_0 \otimes (aa')_1 = a_0a'_0 \otimes a_1a'_1$ *: la co-action est compatible avec le produit tensoriel,*
• $\lambda_A(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

Exemple 2.7
L'algèbre de Hopf H est une algèbre de H-comodule à droite avec $\lambda =\triangle$, c'est-à-dire $\lambda(h) =\triangle(h)\ \forall\ h \in H$: on a donc $h_0 \otimes h_1 = h_1 \otimes h_2$.

3 PRODUIT SEMI-DIRECT D'ALGEBRES DE H-DIMODULE

3.1 H-dimodule

Définition 3.1
Un $\mathbb{K}$-module M qui est à la fois un H-module à gauche et un H-comodule à droite est appelé un H-dimodule gauche-droite si $\forall\ m \in M, h \in H$, on a la condition suivante :

$$(hm)_{(0)} \otimes (hm)_{(1)} = hm_{(0)} \otimes m_{(1)}. \tag{14}$$

Ici $\rho_M^+(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. De facon similaire, nous pouvons définir un H-dimodule droite-gauche. Soit un $\mathbb{K}$-module M qui est à la fois un H-module à droite et un H-comodule à gauche, M est appelé un H-dimodule droite-gauche si $\forall\ m \in M, h \in H$, on a la condition suivante :

$$(mh)_{(-1)} \otimes (mh)_{(0)} = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}h. \tag{15}$$

Ici $\rho_M^-(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$.

3.2 Algèbre de H-dimodule

Dans cette partie, les H-dimodules sont toujours considérés comme des H-dimodules gauche-droite.

Définition 3.2
Une algèbre de H-dimodule M est un H-dimodule qui est à la fois une algèbre de H-module à gauche et une algèbre de H-comodule à droite.

Définition 3.3
Soient A et B deux algèbres de H-dimodule et $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On dit que f est un morphisme d'algèbres de H-dimodules si f est un morphisme de H-dimodules et un morphisme d'algèbres.

3.3 Algèbre de Hopf coquasitriangulaire

Définition 3.4
Soit H une algèbre de Hopf. On dit que H est coquasitriangulaire s'il existe une forme bilinéaire $\sigma : H \otimes H \longrightarrow K$, qui est inversible pour le produit de convolution dans Hom($H \otimes H, K$) telle que $\forall\ x, y, z \in H$,

$$\Sigma\sigma(x_1, y_1)y_2x_2 = \Sigma x_1y_1\sigma(x_2, y_2) \tag{16}$$

$$\sigma(x, yz) = \Sigma\sigma(x_1, y)\sigma(x_2, z) \tag{17}$$

$$\sigma(xy, z) = \Sigma\sigma(x, z_2)\sigma(y, z_1) \tag{18}$$

$$\sigma(x, 1) = \varepsilon_H(x) = \sigma(1, x). \tag{19}$$

Proposition 3.5
Soit (H,σ) une algèbre de Hopf coquasitriangulaire. On définit une action de H sur H :
$$\begin{array}{l} H \otimes H \longrightarrow H \\ h \otimes x \longrightarrow h \rightharpoonup x = \Sigma\sigma(h, x_1)x_2. \end{array}$$
Avec cette action, (H,σ) est une algèbre de H−dimodule avec la structure de comodule $\Delta_H : H \longrightarrow H \otimes H$.

Preuve :
• Montrons que (H,σ) est un H-dimodule :
◦ H-module à gauche.
A-t-on $(hh') \rightharpoonup x = h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup x)$ et $1_H \rightharpoonup x = x$?
On a :

$$\begin{aligned} (hh') \rightharpoonup x &= \sigma((hh'), x_1)x_2 \\ &= \sigma(h, x_{12})\sigma(h', x_{11})x_2 \\ &= \sigma(h, x_2)\sigma(h', x_1)x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup (h' \rightharpoonup x) &= h \rightharpoonup [\sigma(h', x_1)x_2] \\ &= \sigma[h, (\sigma(h', x_1)x_2)_1](\sigma(h', x_1)x_2)_2 \\ &= \sigma(h', x_1)\sigma(h, x_{21})x_{22} \\ &= \sigma(h', x_1)\sigma(h, x_2)x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1_H \rightharpoonup x &= \sigma(1_H, x_1)x_2 \\ &= \varepsilon_H(x_1)x_2 \\ &= x \end{aligned}$$

Alors (H,σ) est un H-module à gauche.
∘ (H,σ) est un H-comodule à droite avec $\Delta = \lambda$
∘ A-t-on $(h \rightharpoonup x)_0 \otimes (h \rightharpoonup x)_1 = h \rightharpoonup x_0 \otimes x_1$?
On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_H(h \rightharpoonup x) &= \Delta_H(\sigma(h,x_1)x_2) \\
&= (\sigma(h,x_1)x_2)_1 \otimes (\sigma(h,x_1)x_2)_2 \\
&= \sigma(h,x_1)x_{21} \otimes x_{22} \\
&= \sigma(h,x_{11})x_{12} \otimes x_2 \\
&= (h \rightharpoonup x_1) \otimes x_2 \\
&= h \rightharpoonup x_0 \otimes x_1
\end{aligned}$$

Ainsi (H,σ) est un H-dimodule gauche-droite.
•• A-t-on $h \rightharpoonup xy = (h_1 \rightharpoonup x)(h_2 \rightharpoonup y)$ *et* $\varepsilon_H(h)1 = h \rightharpoonup 1$?
On a :

$$\begin{aligned}
h \rightharpoonup xy &= \Sigma\sigma(h,x_1y_1)x_2y_2 \\
&= \Sigma\sigma(h_1,x_1)\sigma(h_2,y_1)x_2y_2 \\
&= \Sigma\sigma(h_1,x_1)x_2\sigma(h_2,y_1)y_2 \\
&= (h_1 \rightharpoonup x)(h_2 \rightharpoonup y)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
h \rightharpoonup 1_H &= \Sigma\sigma(h,1_H)1_H \\
&= \sigma(h,1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)1_H
\end{aligned}$$

$\forall\ h,x,y \in H$. Donc (H,σ) est une algèbre de H-module à gauche.
• • • Puisque Δ_H est un morphisme d'algébres, (H,σ) est une algébre de H-comodule à droite. Ainsi l'algébre de Hopf coquasitriangulaire (H,σ) est une algébre de H-dimodule.■

3.4 Produit semi-direct d'algèbres de H-dimodule

Soient H une algèbre de Hopf, A et B deux algèbres de H-dimodule telles que les deux conditons suivantes soient vérifiées :

$$\Sigma h_1.a \otimes h_2 = \Sigma h_2.a \otimes h_1, \quad \textit{pour tous } a \in A, \quad h \in H; \tag{20}$$

$$\Sigma b_{(0)} \otimes b_{(1)}h = \Sigma b_{(0)} \otimes hb_{(1)}, \quad \textit{pour tout } h \in H, \quad b \in B. \tag{21}$$

Si H est cocommutative alors la condition (20) est satisfaite .
Si H est commutative alors la condition (21) est satisfaite.
Ainsi, si H est cocommutative et commutative alors les conditions (20) et (21) sont satisfaites.

Définition 3.6
Le produit semi-direct de A et B noté $A\#B$ est defini comme suit :
$A\#B = A \otimes B$ comme $\mathbb{K}$-module et sa multiplication est donnée par :
$(a\#x)(b\#y) = \Sigma a(x_{(1)}.b)\#x_{(0)}y$.
Notre but est de montrer que $A\#B$ est une algèbre de H dimodule sous les conditions (20) et (21).

Lemme 3.7

1. *Muni de l'action $h.(a\#b) = h_1.a\#h_2.b$, le produit semi-direct $A\#B$ est un H-module à gauche.*

2. *Muni du coproduit $\Delta_{A\#B}(a\#b) = (a_1\#b_1) \otimes (a_2\#b_2)$ et de la counité $\varepsilon_{A\#B}(a\#b) = \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)$, $A\#B$ est une coalgèbre.*

3. *Muni de la coaction $\varphi(a\#b) = (a_0\#b_0)\otimes a_1b_1$, $A\#B$ est un H-comodule à droite.*

Preuve :

1. *A-t-on : $(hh').(a\#b) = h[h'(a\#b)]$ et $1_H.(a\#b) = a\#b$?*

On a :

$$\begin{aligned} * \quad (hh').(a\#b) &= (hh')_1.a\#(hh')_2.b \\ &= (h_1h'_1).a\#(h_2h'_2).b \\ &= (h_1(h'_1.a))\#(h_2(h'_2.b)) \\ &= h(h'_1.a\#h'_2.b) \\ &= h(h'.(a\#b)). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} * \quad 1_H.(a\#b) &= 1_{H_1}.a\#1_{H_2}.b \\ &= 1_H.a\#1_H.b \\ &= a\#b. \end{aligned}$$

Donc $A\#B$ est un H-module à gauche.

2. *Montrons que $A\#B$ est une coalgèbre :*
   ◦ *Co-associativité*
   A-t-on $(\triangle_{A\#B} \otimes id_{A\#B})\circ \triangle_{A\#B} = (id_{A\#B} \otimes \triangle_{A\#B})\circ \triangle_{A\#B}$?
   Soient $a\#b \in A\#B$ on a :

$$\begin{aligned} ((\triangle_{A\#B} \otimes id_{A\#B})\circ \triangle_{A\#B})(a\#b) &= (\triangle_{A\#B} \otimes id_{A\#B})\ \triangle_{A\#B}\ (a\#b) \\ &= (\triangle_{A\#B} \otimes id_{A\#B})(a_1\#b_1 \otimes a_2\#b_2) \\ &= \triangle_{A\#B}\ (a_1\#b_1) \otimes id_{A\#B}(a_2\#b_2) \\ &= (a_{11}\#b_{11}) \otimes (a_{12}\#b_{12}) \otimes (a_2\#b_2) \\ &= a_1\#b_1 \otimes a_2\#b_2 \otimes a_3\#b_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((id_{A\#B} \otimes \triangle_{A\#B})\circ \triangle_{A\#B})(a\#b) &= (id_{A\#B} \otimes \triangle_{A\#B})\ \triangle_{A\#B}\ (a\#b) \\ &= (id_{A\#B} \otimes \triangle_{A\#B})(a_1\#b_1 \otimes a_2\#b_2) \\ &= id_{A\#B}(a_1\#b_1) \otimes \triangle_{A\#B}\ (a_2\#b_2) \\ &= (a_1\#b_1) \otimes (a_{21}\#b_{21}) \otimes (a_{22}\#b_{22}) \\ &= a_1\#b_1 \otimes a_2\#b_2 \otimes a_3\#b_3. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété de la co-associativité est vérifiée.

◦ *Co-unité*
A-t-on $\varepsilon_{A\#B}(a_1\#b_1)(a_2\#b_2) = (a_1\#b_1)\varepsilon_{A\#B}(a_2\#b_2) = a\#b$?
On a : $\varepsilon_A(a_1)a_2 = a_1\varepsilon_A(a_2) = a$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{A\#B}(a_1\#b_1)(a_2\#b_2) &= (\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_1))(a_2\#b_2)\\
&= (\varepsilon_A(a_1)a_2)\#\varepsilon_B(b_1)(b_2)\\
&= a\#b,\\
(a_1\#a_1)\varepsilon_{A\#B}(a_2\#b_2) &= (a_1\#b_1)(\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_2))\\
&= (a_1\varepsilon_A(a_2))\#(b_1\varepsilon_B(b_2))\\
&= a\#b.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété de la co-unité est vérifiée, donc $A\#B$ est une coalgèbre.

3. *A-t-on* $\varphi_{A\#B}(a_0\#b_0)\otimes(a_1b_1) = (a_0\#b_0)\otimes\Delta_{A\#B}(a_1b_1)$? *et* $(a_0\#b_0)\varepsilon(a_1b_1) = a\#b$?
On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{A\#B}(a_0\#b_0)\otimes(a_1b_1) &= (a_{00}\#b_{00})\otimes(a_{01}b_{01})\otimes(a_1b_1)\\
&= a_0\#b_0\otimes(a_{11}b_{11})\otimes(a_{12}b_{12})\\
&= (a_0\#b_0)\otimes\Delta_{A\#B}(a_1b_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_0\#b_0)\varepsilon_{A\#B}(a_1b_1) &= (a_0\#b_0)\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_1)\\
&= (a_0\varepsilon_A(a_1))\#(b_0\varepsilon_B(b_1))\\
&= a\#b
\end{aligned}$$

Donc $A\#B$ est un H-comodule à droite.■

Proposition 3.8

1. *Le produit semi-direct $A\#B$ est une algèbre de H-dimodule.*
2. *Si A et B sont deux bialgèbres, alors la structure du produit tensoriel de coalgèbre sur $A\#B$ est compatible avec l'algèbre du produit semi-direct faisant de $A\#B$ une bialgèbre si et seulement si l'application*

$$\begin{aligned} f:\ & A\#B \longrightarrow A\#B \\ & a\#b \longmapsto b_{(1)}.a\#b_{(0)} \end{aligned}$$ *est un morphisme de coalgèbres.*

3. *Dans cette situation, si A et B sont deux algèbres de Hopf, alors le produit semi-direct $A\#B$ est une algèbre de Hopf dont l'antipode $S_{A\#B}$ est définie par :*
   $S_{A\#B}(a\#b) = (1\#S_B(b))(S_A(a)\#1)$.

Preuve :

1. D'aprés (3.7) $A\#B$ est un H-module à gauche et un H-comodule à droite.
   A-t-on $(h(a\#b))_0 \otimes (h(a\#b))_1 = h.(a\#b)_0 \otimes (a\#b)_1$?

$$\begin{aligned}(h(a\#b))_0 \otimes (h(a\#b))_1 &= (h_1.a\#h_2.b)_0 \otimes (h_1.a\#h_2.b)_1\\ &= (h_1.a)_0\#(h_2.b)_0 \otimes (h_1.a)_1(h_2.b)_1\\ &= h_1.a_0\#h_2.b_0 \otimes a_1b_1\\ &= h.(a_0\#b_0) \otimes a_1b_1\\ &= h.(a\#b)_0 \otimes (a\#b)_1\end{aligned}$$

Ainsi $A\#B$ est un H-dimodule.

$$\begin{aligned}\rho_{A\otimes B}((a\#x)(b\#y)) &= \rho_{A\otimes B}(a(x_{(1)}.b)\#x_{(0)}y)\\ &= (a(x_{(1)}.b))_{(0)}\#(x_{(0)}y)_{(0)} \otimes (a(x_{(1)}.b))_{(1)}(x_{(0)}y)_{(1)}\\ &= a_{(0)}(x_{(1)}.b)_{(0)}\#x_{(0)(0)}y_{(0)} \otimes a_{(1)}(x_{(1)}.b)_{(1)}x_{(0)(1)}y_{(1)}\\ &\overset{(14)}{=} a_{(0)}(x_{(1)}.b_{(0)})\#x_{(0)(0)}y_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}x_{(0)(1)}y_{(1)}\\ &\overset{(21)}{=} a_{(0)}(x_{(1)}.b_{(0)})\#x_{(0)(0)}y_{(0)} \otimes a_{(1)}x_{(0)(1)}b_{(1)}y_{(1)}\\ &= a_{(0)}(x_{(1)(2)}.b_{(0)})\#x_{(0)}y_{(0)} \otimes a_{(1)}x_{(1)(1)}b_{(1)}y_{(1)}\\ &\overset{(20)}{=} a_{(0)}(x_{(1)(1)}.b_{(0)})\#x_{(0)}y_{(0)} \otimes a_{(1)}x_{(1)(2)}b_{(1)}y_{(1)}\\ &= a_{(0)}(x_{(0)(1)}.b_{(0)})\#x_{(0)(0)}y_{(0)} \otimes a_{(1)}x_{(1)}b_{(1)}y_{(1)}\\ &= (a_{(0)}\#x_{(0)})(b_{(0)}\#y_{(0)}) \otimes a_{(1)}x_{(1)}b_{(1)}y_{(1)}\\ &= (a_{(0)}\#x_{(0)} \otimes a_{(1)}x_{(1)})(b_{(0)}\#y_{(0)} \otimes b_{(1)}y_{(1)})\\ &= \rho_{A\otimes B}(a\#x)\rho_{A\otimes B}(b\#y).\end{aligned}$$

Donc $A\#B$ est une algèbre de H-comodule à droite.
Montrons que $A\#B$ est une algèbre de H-module à gauche
On sait dejà que $A\#B$ est une algèbre.

$A-t-on\ \ h((a\#b)(a'\#b')) = h_1.(a\#b)h_2.(a'\#b')$?
On a

$$\begin{aligned} h((a\#b)(a'\#b')) &= h(a(b_{(1)}.a')\#b_{(0)}b') \\ &= h_1.(a(b_{(1)}.a'))\#h_2.(b_{(0)}b') \\ &= (h_{11}.a)(h_{12}.(b_{(1)}.a'))\#(h_{21}.b_{(0)})(h_{22}.b') \\ &\overset{(20)}{=} (h_{11}.a)(h_{21}.(b_{(1)}.a'))\#(h_{12}.b_{(0)})(h_{22}.b') \\ &\overset{(21)}{=} (h_{11}.a)(b_{(1)}.h_{21}.a')\#(h_{12}.b_{(0)})(h_{22}.b') \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (h_1.(a\#b))(h_2.(a'\#b')) &= ((h_{11}.a)\#(h_{12}.b))((h_{21}.a')\#(h_{22}.b')) \\ &= (h_{11}.a)((h_{12}.b)_{(1)}.(h_{21}.a'))\#(h_{12}.b)_{(0)}(h_{22}.b') \\ &= (h_{11}.a)(b_{(1)}.h_{21}.a')\#(h_{12}.b_{(0)})(h_{22}.b') \end{aligned}$$

Ainsi $h((a\#b)(a'\#b')) = h_1.(a\#b)h_2.(a'\#b')$

$$\begin{aligned} h.(1_A\#1_B) &= (h_1.1_A)\#(h_2.1_B) \\ &= (\varepsilon_H(h_1)1_A)\#(\varepsilon_H(h_2)1_B) \\ &= \varepsilon_H(h)(1_A\#1_B) \end{aligned}$$

Donc $A\#B$ est une algèbre de H-module à gauche.
D'aprés ce qui précéde $A\#B$ est une algèbre de H-dimodule.

2. On a :

$$\begin{aligned} \bullet(\Delta_{A\#B}\circ f)(a\#b) &= \Delta_{A\#B}(f(a\#b)) \\ &= \Delta_{A\#B}(b_{(1)}.a\#b_{(0)}) \\ &= (b_{(1)}.a)_1\#(b_{(0)})_1 \otimes (b_{(1)}.a)_2\#(b_{(0)})_2 \\ &= b_{(1)1}.a_1\#b_{1(0)} \otimes b_{(1)2}.a_2\#b_{(0)2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet(f\otimes f)\circ\Delta_{A\#B}(a\#b) &= (f\otimes f)(a_1\#b_1\otimes a_2\#b_2)\\ &= f(a_1\#b_1)\otimes f(a_2\#b_2)\\ &= b_{1(1)}.a_1\#b_{1(0)}\otimes b_{2(1)}.a_2\#b_{2(0)}\end{aligned}$$

Ainsi $(\Delta_{A\#B}\circ f)(a\#b) = (f\otimes f)\circ\Delta_{A\#B}(a\#b)$ si et seulement si :
$b_{(1)1}\#b_{1(0)}\otimes b_{(1)2}\#b_{(0)2} = b_{1(1)}\#b_{1(0)}\otimes b_{2(1)}\#b_{2(0)}$
Si f est un morphisme de coalgèbres on a

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{A\#B}\circ f)(a\#b) &= \varepsilon_{A\#B}(f(a\#b))\\ &= \varepsilon_{A\#B}(b_{(1)}.a\#b_{(0)})\\ &= \varepsilon_A(b_{(1)}.a)\varepsilon_B(b_{(0)})\\ &= \varepsilon_A(b_{(1)}.a)\varepsilon_B(b_{(0)})\\ &= (\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B)(b_{(1)}.a\otimes b_{(0)})\\ &= (\varepsilon_A\#\varepsilon_B)(f(a\#b))\\ &= \varepsilon_{A\#B}(a\#b)\end{aligned}$$

On a
$1_{A\#B\otimes A\#B} = 1_{A\#B}\otimes 1_{A\#B} = \Delta_{A\#B}(1_{A\#B})$
On a

$$\begin{aligned}\varepsilon_{A\#B}(1_{A\#B}) &= \varepsilon_{A\#B}(1_A\#1_B)\\ &= \varepsilon_A(1_A)\varepsilon_B(1_B).\\ &= 1_k1_k\\ &= 1_k\end{aligned}$$

D'où $\varepsilon_{A\#B}(1_{A\#B}) = 1_k$.
On a

$$\begin{aligned}\Delta_{A\#B}(a\#b)\Delta_{A\#B}(a'\#b') &= [(a_1\#b_1)\otimes(a_2\#b_2)][(a'_1\#b'_1)\otimes(a'_2\#b'_2)]\\ &= [(a_1\#b_1)(a'_1\#b'_1)]\otimes[(a_2\#b_2)(a'_2\#b'_2)]\\ &= [(a_1(b_{1(1)}.a'_1)\#b_{1(0)}b'_1]\otimes[(a_2(b_{2(1)}.a'_2)\#b_{2(0)}b'_2]\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\Delta_{A\#B}(a\#b)(a'\#b') &= \Delta_{A\#B}[ab_(1).a'\#b_{(0)}b'] \\ &= (a(b_{(1)}.a')_1\#(b_{(0)}b')_1 \otimes (a(b_{(1)}.a')_2\#(b_{(0)}b')_2 \\ &= a_1b_{(1)1}.a'_1\#b_{(0)1}b'_1 \otimes a_2b_{(1)2}.a'_2\#b_{(0)2}b'_2\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\Delta_{A\#B}(a\#b)\Delta_{A\#B}(a'\#b') = \Delta_{A\#B}(a\#b)(a'\#b')$ si et seulement si :
$b_{(1)1}\#b_{1(0)} \otimes b_{(1)2}\#b_{(0)2} = b_{1(1)}\#b_{1(0)} \otimes b_{2(1)}\#b_{2(0)}$
Si f est un mophisme de coalgèbres, alors on a

$$\begin{aligned}\varepsilon_{A\#B}((a\#b)(a'\#b')) &= \varepsilon_{A\#B}(a(b_{(1)}.a')\#b_{(0)}b') \\ &= (\varepsilon_{A\#B}(a(b_{(1)}.a')\#b_{(0)}b')) \\ &= \varepsilon_A(a(b_{(1)}.a')\varepsilon_B(b_{(0)}b') \\ &= \varepsilon_A(a)\varepsilon_A(b_{(1)}.a')\varepsilon_B(b_0)\varepsilon_B(b') \\ &= \varepsilon_A(a)\varepsilon_{A\#B}(a'\#b)\varepsilon_B(b') \\ &= \varepsilon_A(a)\varepsilon_A(a')\varepsilon_B(b)\varepsilon_B(b') \\ &= \varepsilon_{A\#B}(a\#b)\varepsilon_{A\#B}(a'\#b')\end{aligned}$$

Ainsi on peut conclure que $A\#B$ est une bialgèbre si et seulement si f est un morphisme de coalgèbres.

3. Soient A et B deux algèbres de Hopf. Montrons que $A\#B$ est une algèbre de Hopf c'est-à-dire que $A\#B$ est une bialgèbre qui posséde une antipode notée $S_{A\#B}$
   $A\#B$ est une algèbre de Hopf s'il existe une application $S : A\#B \longrightarrow A\#B$ tel que pour $a\#b \in A\#B$:
   $S_{A\#B}(a\#b) = (1_A\#S_B(b))(S_A(a)\#1_B)$.
   $\Delta_{A\#B}(a\#b) = (a_1\#b_1) \otimes (a_2\#b_2)$ *et* $\varepsilon_{A\#B}(a\#b) = \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)$
   Montrons que $S_{A\#B}((a_1\#b_1))(a_2\#b_2) = \varepsilon_{A\#B}(a\#b)1_{A\#B} = (a_1\#b_1)S_{A\#B}(a_2\#b_2)$
   On a :

$$\begin{aligned}
S_{A\#B}((a_1\#b_1))(a_2\#b_2) =&[(1_A\#S_B(b_1))(S_A(a_1)\#1_B)](a_2\#b_2)\\
&= (1_A\#S_B(b_1))(S_A(a_1)\#1_B)(a_2\#b_2)\\
&= (1_A\#S_B(b_1))[S_A(a_1)(1_{B(1)}.a_2)\#1_{B(0)}b_2]\\
&= (1_A\#S_B(b_1))(S_A(a_1)a_2\#b_2)\\
&= (1_A\#S_B(b_1))(\varepsilon_A(a)1_A\#b_2)\\
&= \varepsilon_A(a)(1_A\#S_B(b_1))(1_A\#b_2)\\
&= \varepsilon_A(a)1_A S_B(b_1)_{(1)}.1_A\#S_B(b_1)_{(0)}b_2\\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_H(S_B(b_1)_{(1)})1_A\#S_B(b_1)_{(0)}b_2\\
&= \varepsilon_A(a)1_A\#S_B(b_1)b_2\\
&= \varepsilon_A(a)1_A\#\varepsilon_B(b)1_B\\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)1_A\#1_B\\
&= \varepsilon_{A\#B}(a\#b)1_{A\#B}
\end{aligned}$$

De maniére similaire on aura $(a_1\#b_1)S_{A\#B}(a_2\#b_2) = \varepsilon_{A\#B}(a\#b)1_{A\#B}$. Donc $A\#B$ est une algèbre de Hopf.■

Dans ce qui suit, nous donnons un exemple pour démontrer que les conditions (20) et (21) généralisent la commutativité et la cocommutativité de H.

Exemple 3.9
Dans (19), on suppose que H est aussi commutative et $I = \langle\{\Sigma\sigma(h_1,x)h_2 - \sigma(h_2,x)h_1 \mid \text{pour tout } h,x \in H\}\rangle$. Alors I est aussi un coidéal de H. Ceci est dû au fait que :
$\Delta(\Sigma\sigma(h_1,x)h_2 - \sigma(h_2,x)h_1) = \Sigma\sigma(h_1,x)h_2 \otimes h_3 - \sigma(h_3,x)h_1 \otimes h_2$
$= \Sigma[\sigma(h_1,x)h_2 - \sigma(h_2,x)h_1)] \otimes h_3 + h_1 \otimes [\sigma(h_2,x)h_3 - \sigma(h_3,x)h_2]$
$\in I \otimes H + H \otimes I, et\ \varepsilon(\Sigma(\sigma(h_1,x)h_2 - \sigma(h_2,x)h_1)) = 0$
On suppose que $L = H/I$, alors L est une algèbre de Hopf. On définit

$$\begin{aligned}
\beta :\ & L \otimes L \longrightarrow k\\
& \bar{a} \otimes \bar{e} \longmapsto \sigma(a,e).
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous prouverons que l'application β est bien dèfinie par $\chi_{a,h} = \Sigma\sigma(h_1,a)h_2 - \sigma(h_2,a)h_1$.
Alors pour tous $\chi_{a,h}, \chi_{b,g} \in I$, nous avons :

$$\begin{aligned}\sigma(\chi_{a,h},\chi_{b,g})=&\sigma(\Sigma\sigma(h_1,a)h_2-\sigma(h_2,a)h_1,\Sigma\sigma(g_1,b)g_2-\sigma(g_2,b)g_1)\\ &=\Sigma\sigma(h_1,a)\sigma(g_1,b)\sigma(h_2,g_2)-\sigma(h_2,a)\sigma(h_1,g_2)\sigma(g_1,b)\\ &-\sigma(h_1,a)\sigma(g_2,b)\sigma(h_2,g_1)+\sigma(h_2,a)\sigma(g_2,b)\sigma(h_1,g_1)\\ &=\Sigma\sigma(h,ag_2)\sigma(g_1,b)-\sigma(h,g_2a)\sigma(g_1,b)\\ &-\sigma(h,ag_1)\sigma(g_2,b)+\sigma(h,g_1a)\sigma(g_2,b)\\ &=0\quad(H\quad est\quad commutative).\end{aligned}$$

En outre, pour tout $t\in H$,

$$\begin{aligned}\sigma(\chi_{a,h},t)=&\sigma(\Sigma\sigma(h_1,a)h_2-\sigma(h_2,a)h_1,t)\\ &=\Sigma\sigma(h_1,a)\sigma(h_2,t)-\sigma(h_2,a)\sigma(h_1,t)\\ &=\sigma(h,at)-\sigma(h,ta)=0.\end{aligned}$$

D'une manière similaire, $\sigma(t,\chi_{a,h})=0$.
Jusqu'à présent tout $x=s\chi_{a,h},y=t\chi_b,g\in I,\sigma(x,y)=0$ et il existe l'application $\beta:L\otimes L\longrightarrow K$, tel que $\forall\ \bar{a},\bar{e}\in L,\beta(\bar{a},\bar{e})=\sigma(a,e)$.
Par la structure de l'application dans (19) il va de soi que (L,β) est une algèbre de L-dimodule, et $\forall\ \bar{a},\bar{e}\in L,\Sigma\beta(\bar{a_1},\bar{e})\bar{a}_2=\Sigma\beta(\bar{a_2},\bar{e})\bar{a}_1$, c'est l'equation (20).
Donc L#L est une algèbre de L-dimodule.

Exemple 3.10
Soit $H=L(R^\phi)=k\langle x_i|i=1,2,...,6\rangle$ une algèbre libre générée par six générateurs.
Sa comultiplication Δ et sa counité ε sont données par :

$$\begin{aligned}&\Delta(x_1)=x_1\otimes x_1,\\ &\Delta(x_2)=x_2\otimes x_2,\\ &\Delta(x_3)=x_3\otimes x_2+x_4+x_3+(x_2-x_3-x_4)\otimes x_5,\\ &\Delta(x_4)=x_4\otimes x_4+(x_2-x_3-x_4)\otimes(x_2-x_5-x_6),\\ &\Delta(x_5)=x_5\otimes x_2+(x_2-x_5-x_6)\otimes x_3+x_6\otimes x_5,\\ &\Delta(x_6)=(x_2-x_5-x_6)\otimes(x_2-x_3-x_4)+x_6\otimes x_6,\\ &\varepsilon(x_1)=\varepsilon(x_2)=\varepsilon(x_4)=\varepsilon(x_6)=1,\\ &\varepsilon(x_3)=\varepsilon(x_5)=0.\end{aligned}$$

Maintenant, si nous dénotons $c_{11}=x_1,c_{22}=x_2,c_{32}=x_3,c_{33}=x_4,c_{42}=x_5,c_{44}=x_6$ et soit $\phi(x_1)=1,\phi(x_2)=\phi(x_3)=\phi(x_4)=2,\sigma(c_{iv},c_{ju})=$

$\delta_{uv}\delta_{\phi(i)v}$, *alors,*
(H,σ) *est une bialgèbre de Long d'après [5] (p.2406). Cest-à-dire pour une bialgèbre H, il existe une forme bilinéaire $\sigma : H\otimes H \longrightarrow K$, telle que pour tout a, b, $c\in H$,*

$$\Sigma\sigma(a_1,b)a_2=\Sigma\sigma(a_2,b)a_1; \tag{22}$$

$$\sigma(a,1)=\varepsilon(a); \tag{23}$$

$$\sigma(a,bc)=\Sigma\sigma(a_1,b)\sigma(a_2,c); \tag{24}$$

$$\sigma(1,a)=\varepsilon(a); \tag{25}$$

$$\sigma(ab,c)=\Sigma\sigma(a,c_2)\sigma(b,c_1). \tag{26}$$

Par l'exemple 3.10 dans [5], on obtient
$\sigma(x_1,x_1)=1$,
$\sigma(y,x_1)=0\ \forall\ y\in S=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ (♠)
Soit $\Delta(y)=\Sigma y_1\otimes y_2, \forall y\in S$.*Puis par* Δ,
$y_1,y_2\in S,\forall y\in S$ (♠♠).
Supposons que $I=\langle\{x_1y-yx_1|\ \forall\ y\in S\}\rangle$ *alors I est aussi un coidéal pour une bialgèbre de Long (H,σ), par conséquent I est un biidéal. Donc $L=H/I$ c'est encore une bialgèbre.*
On définit

$$\begin{aligned}\gamma :\ & L\otimes L\longrightarrow k\\ & \bar{a}\otimes\bar{e}\longmapsto\sigma(a,e).\end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous prouverons que l'application γ est bien définie, c'est-à-dire que nous n'avons qu'à prouver que
$\sigma(u,v)=0,\forall u,v\in I$.
En fait, $\forall\ \ y,z\in S, a(x_1y-yx_1)b, c(x_1z-zx_1)d\in I$,
$\sigma(a(x_1y-yx_1)b, c(x_1z-zx_1)d)$
$=\sigma(ax_1yb,cx_1zd)-\sigma(ayx_1b,cx_1zd)+\sigma(ayx_1b,czx_1d)$ (♠♠♠).
D'aprés (♠) *et* (♠♠)

$$\begin{aligned}\sigma(ax_1yb,cx_1zd)&=\Sigma\sigma(a_1x_1y_1b_1,c)\sigma(a_2x_1y_2b_2,x_1)\sigma(a_3x_1y_3b_3,z)\sigma(a_4x_1y_4b_4,d)\\ &=\sigma(a_1x_1y_1b_1,c)\sigma(a_2,x_1)\sigma(x_1,x_1)\sigma(y_2,x_1)\sigma(b_2,x_1)\sigma(a_3x_1y_3b_3,z)\times\\ &\qquad\sigma(a_4x_1y_4b_4,d)=0.\end{aligned}$$

On a $\sigma(ayx_1b,cx_1zd)=\sigma(ayx_1b,czx_1d)=\sigma(ax_1yb,czx_1d)=0$. *Alors* $\sigma(a(x_1y-yx_1)b,c(x_1z-zx_1)d)=0$ *d'aprés* (♠♠♠).
De même, on a $\sigma(I,I)=0$. *Ainsi l'application γ est bien définie et (L,γ) est une bialgèbre de Long.*

Soient $A = L$ et $B = k\langle \bar{I}, \bar{x_1}\rangle$. Donc A et B sont deux algèbres de L-dimodules par la structure de l'application définie dans (3.5).
(20) est vérifiée par (22). En outre, $\forall \bar{a} \in L, \bar{x_1} \otimes \bar{a}\bar{x_1} = \bar{x_1} \otimes \bar{x_1}\bar{a}$, tel que (21) est vérifiée. Ainsi $A\#B$ est une algèbre de L-dimodule.
Mais L est ni commutative ni cocommutative.■

Corollaire 3.11
Soient A une algèbre de H-dimodule et (H, γ) une algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire commutative. Si la conditon (20) est vérifiée, alors $A\#H$ est une algèbre de H-dimodule.

Preuve :
A est une algèbre de H-dimodule. On sait aussi que H est une algèbre de H-dimodule. Comme H est commutative, alors la condition (21) est verifiée. D'après (3.8), $A\#H$ est une algèbre de H-dimodule.

Proposition 3.12
Soit (H, σ) une algèbre de Hopf coquasitriangulaire. Si H est une coalgèbre cocommutative alors H est commutative.

Preuve :
Pour tous $x, y \in H$ on a

$$\begin{aligned}
xy &= \Sigma x_1 y_1 \varepsilon_H(x_2 y_2) \\
&= \Sigma x_1 y_1 \sigma(x_2, y_2)\sigma^{-1}(x_3, y_3) \\
&= \Sigma \sigma(x_1, y_1) y_2 x_2 \sigma^{-1}(x_3, y_3) \\
&= \Sigma \sigma(x_1, y_1) y_3 x_3 \sigma^{-1}(x_2, y_2) \quad (H \;\; \textit{est} \;\; \textit{cocommutative}) \\
&= \Sigma y_1 x_1 \varepsilon_H(y_2 x_2) \\
&= yx
\end{aligned}$$

Ainsi H est commutative.■

Corollaire 3.13
Soit A une algèbre de H-dimodule. Si (H, σ) est une algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire cocommutative, alors $A\#H$ est une algèbre de H-dimodule.

Preuve :
A est une algèbre de H-dimodule. On sait aussi que H est une algèbre de H-dimodule. Comme H est cocommutative, alors la condition (20) est verifiée. D'après le lemme précédant, $A\#H$ est une algèbre de H-dimodule.

CONCLUSION

En somme les théorèmes (0.1) et (0.2) ont joué d'importants rôles dans l'étude de notre mémoire. Ainsi si une algèbre de Hopf sous-jacente est à la fois commutative et cocommutative alors les algèbres de modules de Yang-Baxter quantiques sont exactement des dimodules.

Références

[1] Caenepeel, S., Oystaeyen, F. Van, Zhang, Yin-huo(1994). Quantum Yang-Baxter module algebra. K-Theorem 8 :231-255.

[2] Dàscàlescu, S., Raianu, S., Zhang, Yin huo(1995). Finite Hopf-galois coextensions, crossed coproducts, and duality. J. Algebra 178 :400-413.

[3] Liu, Gui-long(1994). The duality betwen modules and comodules. Acta Mathematica Sinica 37(2) :150-154.

[4] Long F. W. (1974). The Brauer group of dimodule algebras. J. Algebra 31 :559-601.

[5] Militaru, G. (1999). A class of non-symmetric solutions for the integrability condition of the Knizhnik-Zamolodchikov equation : a Hopf algebra approach. Comm. Algebra 27(5) :2393-2407.

[6] Montgonery, S. (1993). Hopf Algebras And Their Actions on Rings. Vol. 82. CBMS Series in Math. Providence : American Mathematical Society.

[7] Zhang, Liang Yun (1997). The duality of relative Hopf module. Acta Mathematica Sinica 40(1) :73-79.

[8] Zhang, L-yun ; Tong, Wen-ting.Quantum Yang-Baxter H-module algebras and their braided products. Comm. Algebra 31 (2003), no. 5, 2471-2495.