



UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
SPÉCIALITÉ : BIOSCIENCES
OPTION : BIOMATHÉMATIQUES

Thème: Estimation de l'état et d'un paramètre pour une classe de modèles de la schistosomiase

Présenté par :
ABDOUL KHADRE NIANG

Sous la direction de **Pr DIÈNE NGOM**

Soutenu publiquement le 03 juin 2023 devant le jury composé de :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Edouard DIOUF	Professeur Assimilé	Président	UASZ
M.Samsidy GOUDIABY	Professeur Assimilé	Examineur	UASZ
Timack NGOM	Maitre de Conférences Titulaire	Examineur	UASZ
Diène NGOM	Professeur Titulaire	Directeur	UASZ

Année universitaire 2022-2023

Table des matières

1	Introduction générale	5
2	Outils mathématiques	8
2.1	Introduction	8
2.2	Notion de stabilité	8
2.2.1	Attractivité	10
2.2.2	Stabilité au sens de Lyapunov	10
2.3	Quelques matrices particulières	13
2.4	Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0	14
2.5	Observabilité, identifiabilité	15
2.6	Notion d'observateur	15
2.6.1	Observabilité et observateurs des systèmes linéaires	17
2.7	Conclusion	18
3	Observateur pour un modèle de la schistosomiase de MacDonald	19
3.1	Introduction	19
3.2	Présentation et analyse du modèle de la schistosomiase de MacDonald	19
3.2.1	Linéarisation du modèle	20
3.2.2	Estimation de la variable d'état du modèle lorsque tous les paramètres sont connus	21
3.3	Estimation à la fois des variables d'état et d'un paramètre du modèle	22
3.3.1	Transformation linéaire	22
3.3.2	Expression explicite de l'observateur de l'état x et du paramètre a	25
3.4	Estimation de l'état du modèle lorsque le processus d'infection escargot-hôte n'est pas connu	26
3.5	Simulations numériques et commentaires	27
3.6	Conclusion	30
4	Observateur pour un modèle de la schistosomiase de Patches	31
4.1	Introduction	31
4.2	Propriétés d'une métapopulation	31
4.3	Présentation du modèle de la schistosomiase de patches	31
4.4	Un observateur du modèle de patches	33
4.5	Conclusion	33
5	Conclusion et perspectives	34

REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce projet.

Je remercie mon Professeur Mr. Diène Ngom qui m'a proposé ce sujet de mémoire et a pris la responsabilité de m'encadrer, je le remercie de m'avoir initié au monde de la recherche et d'avoir cru à mes compétences.

Je tiens aussi à remercier tous les professeurs du département de Mathématiques de UFR ST de l'UASZ.

Je tiens à remercier le Docteur Abdoulaye Diouf pour la relecture minutieuse du document.

Je n'oublie pas de remercier ma famille et surtout mon épouse qui m'ont toujours soutenus durant mes années d'études.

Résumé

Ce mémoire reprend l'article publié par notre directeur et ses co-auteurs, dans le but d'approfondir certaines notions et résultats. la notion d'observateur est abordée pour estimer la proportion d'escargots infectés et le paramètre de transmission escargot-homme pour un modèle décrivant l'évolution de la schistosomiase en l'occurrence la version homogène du modèle classique de McDonald et le résultat mesurable : le nombre de schistosomes femelles par hôte.

La méthode proposée consiste à concevoir un système dynamique auxiliaire, appelé observateur, dont les solutions convergent exponentiellement vers celles du système du modèle de la schistosomiase.

Ces estimations sont au cœur de deux des stratégies de contrôle de la schistosomiase, à savoir l'utilisation de molluscicides et l'administration massive de médicaments aux populations concernées.

Pour les stratégies de contrôle à plus grande échelle, un modèle hétérogène a été étudié qui se compose d'un nombre arbitraire de groupes d'hommes (villages) et d'un nombre arbitraire de sources d'eau douce, habitats naturels des escargots.

En effet, avec les hypothèses sur la charge de vers sur les hommes infectés dans chaque parcelle ou groupe, il a été proposé une méthode d'estimation de la proportion d'escargots infectés dans chaque habitat naturel d'escargot.

Chapitre 1

Introduction générale

La schistosomiase, également connue sous le nom de bilharziose, est une maladie parasitaire majeure qui cause plus de 200 millions de morbidités et plus de 700 millions de personnes sont à risque dans le monde (voir [18] et [54]). La maladie sévit principalement dans les zones tropicales et subtropicales. Elle tombe sous l'égide des maladies tropicales négligées et n'est dominée que par le paludisme en termes d'incidence et de fardeau économique dans les régions endémiques. Par conséquent, comprendre les mécanismes à l'origine de la transmission de la schistosomiase et fournir des outils pour la contrôler devrait être une priorité mondiale.

La schistosomiase est le produit final d'un cycle biologique complexe qui implique deux hôtes (les Hommes et les escargots) ; deux agents pathogènes de transmission libres (les cercaires et miracidiums) et une variété d'environnements.

En effet, la transmission globale se déroule comme suit : les œufs de schistosomes sont secrétés par l'Homme dans l'environnement via l'urine ou les matières fécales (selon les espèces de schistosomes). Les œufs éclosent et libèrent les miracidiums après un contact avec de l'eau douce. Les miracidiums infectent les escargots d'eau à travers leurs tissus mous, ce qui entraîne une amplification du nombre de parasites par reproduction asexuée. Le parasite quitte l'hôte intermédiaire en l'occurrence l'escargot à travers les cercaires qui peuvent pénétrer la peau des hommes au contact avec l'eau, complétant ainsi le cycle de vie.

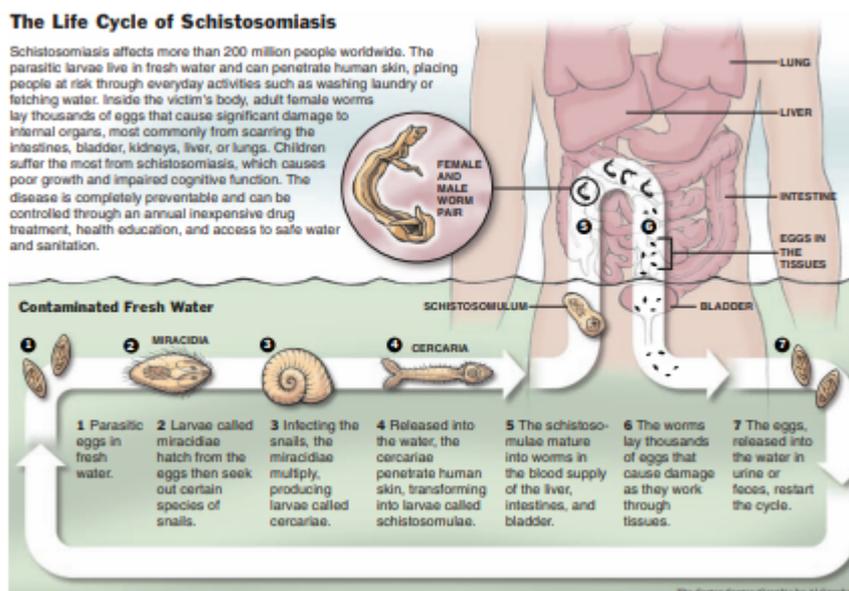


FIGURE 1.1 – cycle de transmission

Différentes stratégies d'intervention ont été mises en œuvre pour tenter d'éradiquer la schistosomiase ou d'atténuer sa morbidité dans de nombreux pays endémique [34]. En effet, la campagne d'administration massive de médicaments a été largement utilisée avec plus ou moins de succès. Cependant, cette méthode a montré ses limites en raison de facteurs tels que le développement de la résistance aux médicaments, les difficultés à maintenir la couverture d'une masse critique de la population cible et la rareté des ressources pour entreprendre des programmes à l'échelle nationale (voir [26] et [47]). La deuxième stratégie de lutte consiste à contrôler les escargots hôtes intermédiaires à l'aide de molluscicides chimiques. Toutefois, cette stratégie de contrôle présente deux principaux défis : évaluer le nombre d'escargots infectés dans une source d'eau douce donnée et les habitats d'escargots à cibler. L'objectif de ce mémoire est d'aborder ces deux dernières questions.

Vue le coût exorbitant des deux stratégies de contrôle de la maladie, il serait pertinent d'explorer d'autres solutions plus économe. C'est ainsi que l'estimation du nombre d'escargots infectés dans une source d'eau douce est obtenue à travers des modèles mathématiques. L'utilisation des modèles mathématiques pour comprendre la dynamique des interactions entre l'hôte et les vecteurs remonte à l'article de Ross de 1911 [41]. Ross fournit un modèle donnant l'évolution globale du paludisme, une maladie causée par le parasite *Plasmodium falciparum* transmis entre hôtes humains et Anophèles femelles. Comme mentionné ci-dessus, la schistosomiase a un cycle de transmission quelque peu similaire mais plus complexe et son modèle mathématique a d'abord été donné par Macdonald [37] et plus tard développé dans des directions différentes et les références qui y figurent dans [4], [8], [9] et [40].

L'estimation des variables d'états et/ou des paramètres du modèle est un problème récurrent en épidémiologie en général et dans la compréhension de la dynamique de la schistosomiase en particulier. Par exemple, certains paramètres des modèles de schistosomiase, comme la durée de vie des escargots, pourraient être obtenus expérimentalement (2-3 ans) (voir [24] et [48]) ou la durée de vie des hôtes humains. Certains paramètres sont inconnus et très difficiles à estimer. C'est le cas du taux de transmission escargot-homme. Cependant, l'estimation de la valeur de ce terme de transmission escargot-homme est cruciale dans une stratégie de lutte qui consiste à bloquer la transmission de la schistosomiase. De plus, une facette de cette stratégie est la lutte chimique, dans laquelle des molluscicides chimiques sont utilisés pour cibler les escargots infectés dans un environnement donné. C'est également une tâche difficile car elle nécessite de faire la distinction entre les escargots non infectés et infectés dans les environnements naturels. De plus, à notre connaissance, il n'existe aucune méthode dans la littérature qui estime les escargots infectés dans une source d'eau.

C'est dans ce cadre que ce mémoire utilise des éléments de la théorie du contrôle pour estimer la proportion d'escargots infectés dans une source d'eau douce donnée et le taux de transmission escargot-Homme. En effet, la schistosomiase, également connue sous le nom de maladie de la pauvreté, est endémique dans les pays en développement où les ressources sont très limitées et les habitats des mollusques (mares, marais, sources d'eau douce, ...) sont répandus. Et donc, déterminer quels habitats d'escargots ciblés pour un contrôle biologique ou quel(s) groupe(s) d'âges ou patch(s) humain(s) ciblés pour l'administration massive de médicaments, est un problème majeur [40]. Pour la schistosomiase, il est largement rapporté qu'il est possible de mesurer le nombre de parasites par hôte (voir [12] et [52]) en utilisant des matières fécales ou de l'urine.

Le point focal de ce mémoire est de développer un cadre général pour estimer la proportion d'escargots infectés et le paramètre de transmission escargot-homme en utilisant les

données disponibles et l'évolution temporelle de la schistosomiase. Plus précisément, la méthode consiste à construire un observateur.

Un observateur est un système dynamique auxiliaire qui utilise les données disponibles sur certaines variables d'état et/ou paramètres et fournit des estimations dynamiques des variables d'état non mesurées. Les solutions de ce système dynamique auxiliaire doivent converger (le plus vite possible) vers les solutions du système original. La notion d'observateur trouve son origine dans la théorie des systèmes [36]. L'utilisation de cet outil puissant de la théorie du contrôle est récente en épidémiologie (voir [1], [7] et [14]).

Ce mémoire est composé de cinq chapitres présentés comme suit :

Après l'**introduction générale**, le **chapitre 2** est consacré aux rappels de quelques outils de base et des résultats utiles pour notre travail notamment les préliminaires sur les observateurs.

La transmission de la schistosomiase à plus grande échelle est abordée dans les chapitres 3 et 4.

Dans le **chapitre 3**, le modèle classique de l'évolution de la schistosomiase de Macdonald (voir [8], [9] et [52]) a été revisité et en supposant que la sortie mesurable est la variable d'état considérée est le nombre de schistosomes femelles. Avec l'observateur, on pourra estimer la proportion d'escargots infectés et le taux de transmission escargot-homme inconnu.

Le chapitre 4 est consacré à un modèle de schistosomiase hétérogène, qui est composé d'hôtes humains, structurés en groupes ou patchs qui interagissent avec les escargots, structurés en divers habitats naturels (étangs, eau douce, etc.). En supposant la possibilité de mesurer la charge de vers chez les hôtes dans chaque groupe : il s'agit d'une technique de routine disponible dans la plupart des pays.

Pour ce dernier modèle, l'observateur fournit un outil pour estimer la proportion d'escargots infectés dans chaque habitat d'escargots, permettant ainsi une carte pour optimiser l'allocation des ressources dans le contrôle de la schistosomiase.

Enfin le **chapitre 5** est une conclusion qui récapitule le travail et ouvre des pistes de recherches sur ce sujet.

Chapitre 2

Outils mathématiques

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions fondamentales et des concepts de base d'analyse utilisés tout le long de ce travail. Pour une bonne étude des modèles épidémiologiques, ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes. Nous avons accordé une attention particulière à la notion d'observateur qui revêt un caractère central pour cette partie. Pour plus de détails, des références dans la littérature seront systématiquement données.

Considérons un phénomène biologique dont l'évolution est donnée par un système dynamique :

$$\dot{x} = f(x, \theta) \quad (2.1)$$

où x est le vecteur représentant les variables d'état et θ le vecteur de paramètres du modèle considéré. Supposons que seules certaines ou une combinaison de variables d'état soient disponibles comme mesures. Dans la nomenclature de la théorie du contrôle, cette quantité est appelée sortie mesurable et est notée par $y = h(x)$ où h est une fonction lisse de l'état x . Le système d'entrées-sorties qui prend compte de la dynamique du système avec les données disponibles est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) \\ y = h(x). \end{cases} \quad (2.2)$$

Prenons l'écriture simplifiée

$$\dot{x} = X(x), x \in \Omega. \quad (\mathcal{A}.1)$$

On suppose que pour tout $x \in \Omega$, cette équation admet une seule solution $X_t(x)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans la suite nous choisissons $\Omega = \mathbb{R}^n$.

2.2 Notion de stabilité

Définition 2.2.1 (*ensemble absorbant*)

Supposons que le système $(\mathcal{A}.1)$ est tel que f est de classe C^1 et que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons de plus que cette équation admet des solutions quel que soit $t \geq 0$. Un voisinage D de Ω est dit absorbant suivant $(\mathcal{A}.1)$ si tout voisinage borné de K de Ω satisfait $f(t, K) \subset \overset{\circ}{D}$ pour tout $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$).

On considère maintenant que le système autonome $(\mathcal{A}.1)$ est de classe C^1 et qu'il satisfait $f(t, K) \subset \overset{\circ}{D}$. On peut, quitte à reparamétriser les trajectoires considérer qu'il est

complet. Cela signifie que l'on peut trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que $\dot{x} = \varphi(x)f(x)$ soit complet.

Définition 2.2.2 (*ensemble invariant*)

On dit qu'un ensemble M est positivement invariant pour le système (A.1) si pour tout $x_0 \in M$ on a $x(t, x_0) \in M$ pour tout $t \geq 0$.

Pour prouver qu'un ensemble est positivement invariant, nous utilisons en général le théorème suivant dit théorème de la barrière.

Théorème 2.2.1 [40]

Soit $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $a \in \mathbb{R}$ et $\nabla H(x) \neq 0$ pour tout $x \in H^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = a\}$.

Soit

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) \leq a\}.$$

Si $\langle \nabla H(x), X(x) \rangle \leq 0$ pour tout $x \in H^{-1}(a)$, alors G est un ensemble positivement invariant pour le système (A.1).

Lemme 2.2.1 Soit Ω un ouvert contenant un point x_0 de la frontière de G , $\partial G = \{x \mid H(x) = 0\}$. On suppose qu'en tout point x de $\partial G \cup \Omega$ on a $\nabla H(x) \neq 0$ et

$$\langle X(x) | \nabla H(x) \rangle \leq 0$$

alors aucune trajectoire de X ne sort de G par $\partial G \cup \Omega$.

Preuve 2.2.1 On va décomposer la démonstration en deux cas. Dans le premier cas, on suppose qu'en x_0 on a:

$$\langle X(x_0) | \nabla H(x_0) \rangle < 0$$

Par un argument de continuité, il existe $\varepsilon > 0$ et une boule de centre x_0 et rayon η telle que pour tout $y \in B(x_0, \eta)$ on ait:

$$\langle X(y) | \nabla H(y) \rangle < \varepsilon < 0$$

On considère la trajectoire $X_t(x_0)$ issue de x_0 . Pour $t \geq 0$ suffisamment petit, elle reste dans la boule $B(x_0, \eta)$. On a

$$\frac{d}{dt} H(X_t(x_0)) = \langle \nabla H(X_t(x_0)) | X(X_t(x_0)) \rangle < \varepsilon < 0$$

Ce qui prouve que $X_t(x_0) \in \overset{\circ}{G}$. Supposons maintenant que $\langle X(x_0) | \nabla H(x_0) \rangle = 0$. On considère le champ

$$X^\varepsilon(x) = X(x) - \varepsilon \frac{\nabla H(x)}{\|\nabla H(x)\|}$$

Ce champ vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$ l'hypothèse de la démonstration suivante sur $\Omega \cup \partial G$. Soit η tel que la boule fermée $B(x_0, \eta)$ soit dans Ω . On choisit $t \leq T$ suffisamment petit tel que $X_t(x_0) \in B(x_0, \eta)$. Comme X^ε est un champ ε -approché de X , on applique le lemme de Gronwall :

$$\|X_t^\varepsilon(x_0) - X_t(x_0)\| \leq \varepsilon \frac{e^{LT} - 1}{L}$$

Ceci prouve qu'en choisissant T suffisamment petit on aura

$$X_t^\varepsilon(x_0) - X_t(x_0) \in B(x_0, \eta)$$

Ceci montre par le même argument que la Preuve précédente que $X_t^\varepsilon(x_0) \in \overset{\circ}{G}$, par conséquent $X_t(x_0)$ est limite de points de G qui est fermé, donc dans G . La trajectoire issue de x_0 ne peut quitter G localement. Comme ceci est vrai pour tout point x_0 de ∂G , on a montré le résultat sur Ω .

2.2.1 Attractivité

Définition 2.2.3 Un point $\bar{x} \in \Omega$ est un point d'équilibre pour le système (A.1) si $X(\bar{x}) = 0$

Définition 2.2.4 Un point \bar{x} est dit attractif s'il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \Omega$ de \bar{x} tel que : $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = \bar{x}; \forall x \in \mathcal{U}$.

Définition 2.2.5 Soit \mathcal{A} l'ensemble des points $x \in \Omega$ pour lesquels $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = \bar{x}$. \mathcal{A} est appelé bassin d'attraction de \bar{x} . Un équilibre est dit globalement attractif si $\mathcal{A} = \Omega$ c'est à dire si

$$\forall x \in \Omega, \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = \bar{x}.$$

2.2.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Le système est stable (Lyapunov stable) en \bar{x} si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \gamma > 0 : \forall x \in \Omega, \|x - \bar{x}\| < \gamma \Rightarrow \|x_i(x) - \bar{x}\| < \epsilon$$

Si le système n'est pas stable en \bar{x} , on dit qu'il est instable en \bar{x} ou que \bar{x} est instable pour le système (A.1).

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule d'exigence de rayon ϵ , il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de rayon r telle que pour toute condition initiale comprise dans cette sous-boule, la trajectoire résultante sera, en tout temps, comprise dans la boule d'exigence de rayon ϵ .

Dans un langage plus imagé, un petit déséquilibre initiale n'entraîne qu'un petit déséquilibre au cours du temps, déséquilibre qui peut très bien être permanent. Il existe plusieurs notions de stabilité :

- Stabilité asymptotique.
- Stabilité exponentielle.
- Stabilité locale et globale.

Définition 2.2.6 (Stabilité asymptotique).

Le point d'équilibre \bar{x} est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Outre la stabilité, la stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage du point d'équilibre, tel que pour toute condition initiale appartenant à ce voisinage, l'état $x(t)$ converge vers \bar{x} lorsque le temps tend vers l'infini.

Cependant, la définition de la stabilité asymptotique ne donne pas une idée sur la rapidité de convergence de la trajectoire $x(t)$ vers le point d'équilibre \bar{x} . D'où la notion de stabilité exponentielle.

Définition 2.2.7 [56] (Stabilité exponentielle).

Le point d'équilibre \bar{x} est exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ tel que, $\forall \epsilon > 0$, il existe $\rho(\epsilon)$ tel que

$$\forall t \geq t_0, \text{ si } \|x_0 - \bar{x}\| \leq \rho \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon \|x_0 - \bar{x}\| \exp(-\alpha(t - t_0))$$

Définition 2.2.8 [56] (Stabilité Globale).

Si la condition de stabilité asymptotique (resp. exponentielle) est vérifiée pour tout \mathbb{R}^n , le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable.

Définition 2.2.9 (*Fonction de Lyapunov*)

Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

V est dite fonction de Lyapunov pour le système (A.1) si $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$.

Les théorèmes ci-dessous seront plus souvent utilisés pour montrer la stabilité du point d'équilibre sans maladie.

Théorème 2.2.2 (*Lyapunov 1892*) [23]

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (A.1), et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. S'il existe une fonction de Lyapunov V définie sur D , alors le point d'équilibre $x_E = 0$ est stable. Si en plus, $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D - \{0\}$, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Preuve 2.2.2 Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $r \in (0, \varepsilon]$ tel que

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\} \subset D.$$

Soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$. Alors $\alpha > 0$ (par la première hypothèse du théorème). Choisissons $\beta \in (0, \alpha)$ et soit

$$\Omega_\beta = \{x \in B(r), V(x) \leq \beta\}.$$

Alors Ω_β est dans l'intérieur de $B(r)$, car dans le cas contraire, il existerait $p \in \Omega_\beta$ qui soit en même temps sur la frontière de $B(r)$. En ce point p , on aurait,

$$V(p) \geq \alpha > \beta$$

or, pour tout $x \in \Omega_\beta, V(x) \leq \beta$, ce qui constitue une contradiction.

L'ensemble Ω_β a la propriété suivante : n'importe quelle trajectoire dans Ω_β , issue de $t = 0$ reste dans Ω_β pour tout $t \geq 0$. En effet, par la deuxième hypothèse du théorème nous avons

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0.$$

Par la compacité de l'ensemble Ω_β , on conclut que le système (A.1) a une unique solution pour tout $t \geq 0$ tel que $x(0) \in \Omega_\beta$. Comme V est continue et vérifie $V(0) = 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta.$$

Par suite

$$B(\delta) \subset \Omega_\beta \subset B(r)$$

et les implications suivantes sont vérifiées

$$x(0) \in B(\delta) \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B(r).$$

Par conséquent

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Ce qui signifie que le point d'équilibre $x = 0$ est stable. Reste donc à (A.1) montrer la stabilité asymptotique. Pour se faire, supposons donc

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0, x \in D. \tag{A.2}$$

et montrons que $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est à dire pour tout $a > 0$, il existe $T = T(a) > 0$ tel que $\|x(t)\| \leq a$, pour tout $t \geq T$.

Par les mêmes arguments que précédemment, on sait que pour tout $a > 0$, on peut choisir $b > 0$ tel que $\Omega_\beta \subset B(a)$. Il suffit alors de montrer que

$$V(x(t)) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty$$

Comme $V(x(t))$ est décroissante et minorée par zéro, il vient que

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Pour montrer que $c = 0$, on supposera le contraire ($c > 0$). Par la continuité de $V(x)$, il existe $d > 0$ tel que $B(d) \subset \Omega_c$. La limite $V(x(t)) \rightarrow c > 0$ implique que la trajectoire $x(t)$ reste à l'extérieur de la boule $B(d)$ pour tout $t \geq 0$. Posons

$$-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$$

(γ existe car \dot{V} est continue sur le compact $\{d \leq \|x\| \leq r\}$). Par l'hypothèse (A.2), nous avons $-\gamma < 0$. Il vient donc

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq V(x(0)) - \gamma t \rightarrow -\infty, \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse $c > 0$.

Il est en général très fastidieux de montrer que $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$. Ainsi, le plus souvent, on fait appel au principe d'invariance de Lasalle pour étudier la stabilité globale.

Définition 2.2.10 [55]

Étant donné un état x_0 , on appelle la fonction $t \rightarrow X(t, x_0)$ un mouvement du système dynamique, et l'ensemble des positions $\{X(t, x_0), t \in \mathbb{R}^+\}$ la trajectoire correspondant à ce mouvement.

La notion de stabilité asymptotique nécessite d'observer les trajectoires quand le temps t tend vers l'infini. Il nous sera alors très utile de considérer les ensembles limites de ces trajectoires \mathcal{L}^+ , défini par

Définition 2.2.11 [55]

Étant donnée un état initial x_0 , un point p est appelé un point limite positif du mouvement $X(t, x_0)$ s'il existe une séquence $\{t_n\}$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$ et $X(t_n, x_0) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. L'ensemble de tous les points limites positifs est appelé l'ensemble limite positif \mathcal{L}^+ .

Lemme 2.2.2 [55]

Soit un flot $X(t, x)$ continu par rapport aux conditions initiales, alors quelque soit le mouvement, l'ensemble limite correspondant à $X(t, x_0)$ est invariant.

Lemme 2.2.3 [55]

Soit un flot $X(t, x)$ borné, alors quelque soit le mouvement, les trajectoires convergent vers l'ensemble limite positif correspondant \mathcal{L}^+

$$X(t, x_0) \rightarrow \mathcal{L}^+ \text{ quand } t \rightarrow \infty,$$

Théorème 2.2.3 [55] (Principe d'invariance de Lasalle)

Soient $\Omega \subset \mathcal{X}$ un ensemble compact et $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant (i) l'ensemble Ω est positivement invariant,

$$\forall x \in \Omega, \forall t \geq 0, X(t, x) \in \Omega,$$

(ii) la fonction V est une fonction non-croissante du temps lorsque la trajectoire commence dans Ω ,

$$\forall x \in \Omega, \forall t \geq 0, V(X(t, x)) \leq V(x),$$

(iii) le sous-ensemble $\mathcal{E} \subset \Omega$ rassemble tous les états où la fonction V est constante dans le temps,

$$\forall x \in \Omega, \forall t > 0, V(X(t, x)) = V(x) \implies x \in \mathcal{E}.$$

Si les trajectoires du système dynamique sont continues par rapport aux conditions initiales, alors toutes les trajectoires débutant dans Ω convergent asymptotiquement quand $t \rightarrow \infty$ vers le plus grand sous-ensemble invariant \mathcal{M} de \mathcal{E} .

Preuve 2.2.3 Puisque Ω est un ensemble compact et invariant, quelque soit $x_0 \in \Omega$, $X(t, x_0)$ est borné, donc l'ensemble limite correspondant \mathcal{L}^+ est non-vide, c'est un sous-ensemble de Ω , le lemme 2.2.3 nous permet ensuite de conclure que $X(t, x_0)$ approche \mathcal{L}^+ quand $t \rightarrow \infty$.

De plus, nous savons d'après le lemme 2.2.2 que cet ensemble \mathcal{L}^+ est également invariant, nous pouvons donc conclure que chaque trajectoire débutant dans Ω approche un sous-ensemble invariant de Ω quand $t \rightarrow \infty$.

Il nous reste simplement à prouver que ce sous-ensemble invariant se trouve dans \mathcal{E} . D'après la condition (ii) de ce théorème, on sait que $V(X(t, x_0))$ est une fonction non-croissante du temps, et $V(x)$ étant également une fonction continue de x , elle est donc bornée inférieurement sur l'ensemble compact Ω , donc $V(X(t, x_0))$ a une limite l quand $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t, x_0)) = l.$$

Par définition, pour tout $p \in \mathcal{L}^+$ il existe une séquence t_n avec $t_n \rightarrow \infty$ et $X(t_n, x_0) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. Par continuité de $V(x)$, nous avons

$$V(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t, x_0)) = l.$$

Donc $V(x) = l$ sur \mathcal{L}^+ , et puisque \mathcal{L}^+ est un ensemble invariant,

$$\forall x \in \mathcal{L}^+, \forall t \geq 0, V(X(t, x)) = V(x),$$

aussi nous avons $\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{E}$. Toutes les trajectoires débutant dans Ω tendent vers un sous-ensemble invariant de \mathcal{E} , elles tendent donc vers le plus grand sous-ensemble invariant \mathcal{M} de \mathcal{E} quand $t \rightarrow \infty$.

2.3 Quelques matrices particulières

On appelle module de stabilité $s(A)$ d'une matrice A , la plus grande partie réelle des valeurs propres de A .

$$s(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$$

où $Sp(A)$ est le spectre de la matrice A . Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A , est le plus grand module des valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

Définition 2.3.1 [23]

Une matrice carrée est dite de Hurwitz (ou stable) si toutes ses valeurs propres sont des parties réelles strictement négatives.

Définition 2.3.2 (Matrice à diagonale dominante)

a) Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale dominante colonne si pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|.$$

b). Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale dominante ligne si pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Si une matrice A est à diagonale dominante stricte, alors elle est inversible

Définition 2.3.3 [23]

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ matrice carrée. On dit que la matrice A est réductible, s'il existe une matrice de permutation P telle que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice A est dite irréductible si et seulement si elle n'est pas réductible.

Définition 2.3.4 [23] (Matrice de Metzler)

On dira qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est de Metzler r si tous ses coefficients extra-diagonaux sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $(a_{ij}) \geq 0$ pour tout les i et j avec $j \neq i$.

Théorème 2.3.1 Le système linéaire $\dot{x} = Ax$ laisse invariant l'orthant positif si et seulement si A est une matrice de Metzler.

Théorème 2.3.2 Le système linéaire $\dot{x} = Ax + b$ laisse invariant l'orthant positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $b \geq 0$.

Définition 2.3.5 Le système dynamique $(\dot{x} = f(t, x))$ est coopératif si et seulement si la fonction $f(t, x)$ est telle que :

$$\forall i \neq j, \forall t \geq 0, \forall x \in D, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \geq 0$$

i.e. $Df(\cdot)$, la matrice Jacobienne du système $(\dot{x} = f(t, x))$ est en tout temps et en tout point une matrice de Metzler.

2.4 Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0

Définition 2.4.1 En épidémiologie la quantité \mathcal{R}_0 , sans dimension, est le nombre moyen de cas secondaires engendrés par un individu infectieux typique durant sa période d'infectiosité (période maximale pendant laquelle un individu malade peut transmettre l'infection à d'autres individus), quand il est introduit dans une population constituée entièrement de susceptibles. On suppose également qu'il n'y a pas eu d'intervention.

Pour le modèle mathématique de Macdonald considéré dans le chapitre 3, nous avons les résultats suivants:

Théorème 2.4.1 [40]

Si $\mathcal{R}_0 < 1$ alors l'équilibre sans maladie ou DFE est globalement asymptotiquement stable.
 Si $\mathcal{R}_0 > 1$ alors le DFE est instable et il existe un unique équilibre endémique $p \gg 0$ dans Ω , qui est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 2.4.2 [40]

Si le réseau de patches est fortement connexe, alors le DFE est globalement asymptotiquement stable dans le domaine $\mathbb{R}^{m+n} \times [0, 1]^n$ quand $\mathcal{R}_0 = 1$.

2.5 Observabilité, identifiabilité

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ y = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec :

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ la variable d'état du système à l'instant t .
- $u(t) \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ la variable d'entrée encore appelée la commande appliquée au système.
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la sortie mesurable ou variable observée au temps t .
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, la fonction indiquant la dynamique du système à travers le temps.

Définition 2.5.1 [45] Deux états x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$) sont dits distinguables, s'il existe un contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$ et un temps $t \geq 0$ tel que $y(x_1, u(\cdot), t) \neq y(x_2, u(\cdot), t)$.

Si le système est sans entrée donc sans contrôle, x_1 et x_2 sont distinguables s'il existe un temps $t \geq 0$ tel que $y(x_1, u(\cdot), t) \neq y(x_2, u(\cdot), t)$.

Définition 2.5.2 [45]

Le système (2.3) est observable, si pour tout x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$), on a x_1 et x_2 distinguables.

Si le système est sans entrée donc sans contrôle, x_1 à un temps $t \geq 0$ tel que $y(x_1, u(\cdot), t) \neq y(x_2, u(\cdot), t)$.

Définition 2.5.3 [45]

Le système (2.3) est identifiable si pour tout paramètre p_1 et p_2 , on a :

$$y(t, p_1) = y(t, p_2) \Rightarrow p_1 = p_2.$$

En général, on parle d'observabilité quand on veut estimer les variables d'état d'un modèle et d'identifiabilité lorsqu'il s'agit d'estimer des paramètres.

2.6 Notion d'observateur

Définition 2.6.1 [44]

Un observateur du système dynamique (2.3) est un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrées et de sorties du système (2.3) à observer et dont le vecteur de sortie, noté $\hat{x}(t)$ est l'état estimé du système :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases}$$

Ce système est tel que :

1. $\|e(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
2. Si à l'état initial t_0 on a $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$, alors pour tout $t \geq t_0$, on a : $\hat{x}(t) = x(t)$.

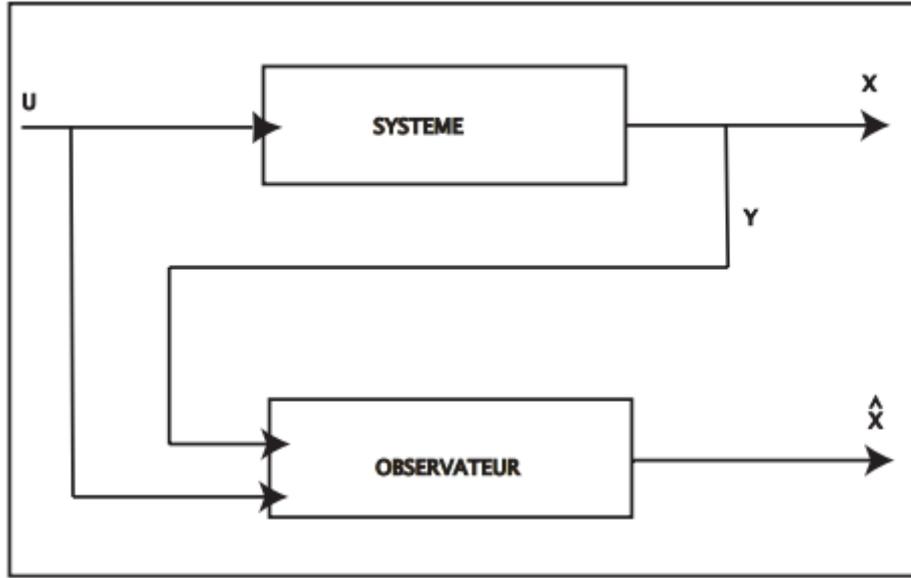


FIGURE 2.1 – Ensemble système-observateur

Remarque 2.6.1 En particulier, si le vecteur de paramètres θ est connu, un observateur de système (2.3) à la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = g(\hat{z}(t), y(t), \theta) \\ \hat{x} = k(\hat{z}(t), y(t), \theta) \end{cases} \quad (2.4)$$

Le défi de la conception d'un observateur consiste à trouver les deux fonctions g et k de telle sorte que les solutions du système (2.4) convergent exponentiellement vers celui du système (2.3), quelles que soient les conditions initiales. Les fonctions g et k doivent satisfaire, pour toute condition initiale $x(t_0)$:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|x(t_0) - \hat{x}(t_0)\| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Remarque 2.6.2 Si le système (2.3) est linéaire, le problème pour trouver un observateur est complètement résolu par la l' observateur Luenberger [36] et la possibilité de réaliser une estimation rapide arbitraire équivaut à ce que l'on appelle propriété observabilité (voir ci-dessous définition 2.6.4 et théorème 2.6.1. Si le système considéré est non linéaire, il n'y a généralement pas de méthode pour concevoir un observateur[11] et [32].

Lorsque le vecteur de paramètres θ n'est pas entièrement connu, il est possible de concevoir un observateur pour le système. Ces types d'observateurs sont définis comme suit:

Observateur adaptatif

Définition 2.6.2 [11]

Un observateur adaptatif pour le système (2.3) est un observateur pour l'estimation conjointe de l'état $x(t)$ et le vecteur de paramètres θ . Un observateur adaptatif (exponentiel) pour système (2.3) est un système dynamique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = g_1(\hat{z}(t), \hat{\theta}(t), y(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = g_2(\hat{z}(t), \hat{\theta}(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = k(\hat{z}(t), \hat{\theta}(t), y(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

telle que les solutions de (2.5) et ceux de (2.3) vérifie que $\hat{x}(t) - x(t)$ et $\hat{\theta}(t) - \theta$ convergent (exponentiellement vite) vers zéro quand le temps t tend vers l'infini.

Les deux définitions et théorèmes suivants seront utilisés pour prouver certains des résultats des chapitres 2 et 3.

2.6.1 Observabilité et observateurs des systèmes linéaires

Cas de systèmes autonomes

Considérons le système linéaire autonome suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\mathcal{A}.3)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$. La paire de matrices (A, C) est supposée observable (détectable), c'est-à-dire que la matrice $\Delta = (C, CA, \dots, CA^{n-1})^T$ est de rang maximal. La paire (A, C) étant détectable, on peut trouver un vecteur $K \in \mathbb{R}^n$ tel que le spectre de la matrice $A - KC$ soit dans le demi-plan complexe gauche. Cette opération est appelée « placement des pôles ».

Définition 2.6.3 Un observateur de type Luenberger pour le système (A.3) est définie par le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$

Ainsi, le problème de l'observateur se résume à trouver le vecteur $K \in \mathbb{R}^n$ de manière à rendre la matrice $A - KC$ stable.

Définition 2.6.4 (Condition de rang d'observabilité de Kalman)[51]

Soit A une matrice $n \times n$ et C une matrice $q \times n$. La paire (A, C) est dit observable ou

satisfait la condition de rang d'observabilité de Kalman si la matrice : $\mathcal{O}_{(C,A)} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

est de rang n .

Théorème 2.6.1 (Le théorème du placement des pôles)[51]

Si la paire de matrices (A, C) satisfait la condition de rang d'observabilité de Kalman alors il est possible de trouver une matrice K de telle manière que les valeurs propres de la matrice $A - KC$ sont tous à partie réelle négative, pour les systèmes linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Proposition 2.6.1 [23] (un observateur exponentiel)

Si le système linéaire (2.6) satisfait la condition de rang d'observabilité de Kalman, alors un observateur exponentiel est simplement donné par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) - K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

L'erreur $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ satisfait $\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$ et la matrice K peut être choisie telle que la matrice $A - KC$ soit Hurwitz.

Cas des systèmes non autonomes

Considérons le système linéaire non autonome suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (\mathcal{A}.4)$$

où $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

Théorème 2.6.2 [27] *Si le système (A.4) est complètement uniformément observable et si les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont bornées, alors le système :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u(t) + PC^T(t)R(t)^{-1}(y - C(t)\hat{x}) \\ \dot{P} = A(t)P + PA^T(t) - PC^T(t)R(t)^{-1}C(t)P + Q(t) \end{cases}$$

est un observateur exponentiel global pour le système (A.4), avec $P(t_0) = P_0$ une matrice semi-définie positive. Les matrices $R(t)$ et $Q(t)$ sont des matrices respectivement définies et semi-définies positives et sont choisies de façon appropriée.

2.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à quelques rappels et notions d'algèbre linéaire, des systèmes dynamiques et de la théorie de contrôle.

Premièrement, la notion de stabilité la plus classique, celle au sens de Lyapunov a été rappelée. Ensuite, la caractérisation de quelques matrices particulières a été exposée.

Dans un deuxième temps, nous avons développé la notion d'observateur avec les différents définitions et théorèmes liés à ce dernier concept.

Le chapitre suivant sera dédié à l'observateur du modèle de lq schistosomiase de MacDonald.

Chapitre 3

Observateur pour un modèle de la schistosomiase de MacDonald

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, il a été conçu un observateur pour le modèle de la schistosomiase de MacDonald afin d'estimer le nombre d'escargots infectés et le taux de transmission des escargots aux hôtes humains. Nous terminerons ce chapitre par quelques simulations numériques qui seront faites pour montrer la convergence de ces observateurs et l'effet de la présence ou de l'absence d'un traitement sur l'évolution de la maladie.

3.2 Présentation et analyse du modèle de la schistosomiase de MacDonald

Macdonald, dans son modèle, s'intéresse à la transmission de la bilharziose dans une communauté homogène comportant une seule mare. Les hypothèses fondamentales de ce modèle sont les suivantes:

1. La population humaine est constante.
2. Le nombre total de mollusques est constant et égale à N car on suppose que la mort d'un mollusque est immédiatement compensée par la naissance d'un autre.
3. Le taux d'acquisition d'œufs de schistosomes par la population humaine, qui donneront naissance à des schistosomes femelles, est proportionnel à la taille de la population humaine, à la fréquence des contacts avec l'eau par personne et par jour, à la densité de mollusques infectés.
4. L'infection d'un mollusque par plus d'un miracidium ne fait pas augmenter le taux de cercaires libérés par le mollusque. La dynamique globale de la schistosomiase est donnée par le modèle suivant:

$$\begin{cases} \dot{w} = -\gamma w + as \\ \dot{s} = b(1-s)w - \mu s \end{cases} \quad (3.1)$$

- w est la charge moyenne en vers de schistosomes femelles au sein de la communauté;
- s est la prévalence chez les mollusques ou la proportion d'escargots infectés;
- a est le taux auquel les cercaires produits se développeront en schistosomes femelles au sein d'un hôte humain;
- μ est la mortalité naturelle des mollusques;
- b est la probabilité qu'un œuf de schistosome éclore et donne naissance à un miracidium qui va pénétrer avec succès un mollusque;
- γ est le taux de mortalité naturelle des schistosomes [45] et [8].

Ce modèle (3.1) est une version du modèle de MacDonald et est proposé en premier par Barbour [8] dans l'étude de la dynamique de la bilharziose. Il a été documenté que le nombre de schistosomes femelles (vers) par hôte pourrait être mesuré à l'aide d'échantillons d'urine ou de matières fécales [13]. On suppose désormais que la variable d'état w dans le modèle (3.1) est mesurée.

Proposition 3.2.1 *L'ensemble compact*

$$\Omega = \left\{ (w, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq w \leq \frac{a}{\gamma}; 0 \leq s \leq 1 \right\} \quad (3.2)$$

est un ensemble positivement invariant et absorbant pour le système (3.1), rendant ainsi les solutions biologiquement fondées.

Preuve 3.2.1 Le système (3.1) peut être réécrit de la façon suivante sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & a \\ (1-\mathbf{s})b & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}.$$

La matrice $M(\mathbf{w}, \mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \gamma & a \\ (1-\mathbf{s})b & -\mu \end{bmatrix}$ est une matrice de Metzler pour $0 \leq \mathbf{s} \leq 1$, c'est à dire une matrice dont tous les termes hors diagonaux sont positifs ou nuls. Les matrices de Metzler sont aussi appelées matrices quasi-positives. Les matrices de Metzler ayant la propriété de laisser l'orthant positif positivement invariant donc \mathbb{R}^+ est positivement invariant. Utilisons le théorème de la barrière pour montrer que $[0; 1]$ est aussi positivement invariant.

Soit $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable,

Sur $s = 0$, $H(w, s) = -s$. Le produit scalaire entre le gradient de $H(w, s)$ et le vecteur champ du système (3.1) au point $s = 0$ est:

$$\langle \nabla H, X(x) \rangle = -bw \leq 0$$

Sur $s = 1$, $H(w, s) = s$ et nous avons :

$$\langle \nabla H, X(x) \rangle = -\mu \leq 0$$

Donc $[0; 1]$ est aussi positivement invariant. D'où Ω le domaine est positivement invariant. Les solutions w et s du système (3.1) étant bornées dans Ω donc Ω est aussi un compact absorbant.

3.2.1 Linéarisation du modèle

La sortie mesurable est $y(t) = w$. en désignant $x = (w, s)^T$, le système dynamique qui décrit l'évolution de la schistosomiase avec les données disponibles pourraient être écrites sous une forme compacte comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x} = Mx + U(y)x \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $M = \begin{pmatrix} -\gamma & a \\ b & -\mu \end{pmatrix}$, $U(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -by \end{pmatrix}$ et $C = (1, 0)$

Certains des paramètres du modèle sont inconnus. Par exemple, les taux de mortalité des schistosomes γ , et escargots infectés μ respectivement, pourraient être mesurés par

des considérations biologiques [19]. Cependant, les paramètres de transmission sont généralement inconnus et les valeurs proposées existantes sont convenables. Dans les deux sous-sections suivantes, nous concevons un observateur pour estimer la variable d'états dans deux cas: lorsque tous les paramètres sont connus, et lorsqu'un seul des paramètres de transmission est connu. En fait, les observateurs proposés fournissent des outils pour estimer la variable d'états sans utiliser les paramètres de transmission mentionnés ci-dessus. De plus, nous utilisons cet observateur pour estimer ce paramètre. Enfin, l'estimation de la variable d'état est obtenu lorsque tous les paramètres sont connus.

3.2.2 Estimation de la variable d'état du modèle lorsque tous les paramètres sont connus

Le théorème suivant fournit un observateur (estimateur d'état) utilisant une injection de sortie pour le système (3.3).

Théorème 3.2.1 *Un observateur exponentiel pour le modèle de bilharziose de MacDonald (3.3) avec sortie mesurable $y(t) = w(t)$ est donné par*

$$\dot{\hat{x}} = M\hat{x} + U(y)\hat{x} - K(C\hat{x} - y) \quad (3.4)$$

où $K^T = (k_1, a + b)$ avec k_1 une constante positive.

Preuve 3.2.2 Il suffit de montrer que les trajectoires du système (3.4) convergent exponentiellement vers celles du système (3.3) pour toute condition initiale du (3.4). Pour ce faire, nous montrons que l'équation décrivant l'évolution de l'erreur $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ converge exponentiellement vers zéro. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= M\hat{x} + U(y)\hat{x} - K(C\hat{x} - y) - Mx - U(y)x \\ &= (M - KC)e + U(y)e \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considérons la fonction de Lyapunov $\mathcal{L} = \frac{1}{2}e^T e$. La dérivé de \mathcal{L} le long des trajectoires de (3.5) est:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2}\dot{e}^T e + \frac{1}{2}e^T \dot{e} \\ &= \frac{1}{2}[(M - KC)e + U(y)e]^T e + \frac{1}{2}e^T [(M - KC)e + U(y)e] \\ &= \frac{1}{2} [e^T (M - KC)^T + e^T U^T(y)] e + \frac{1}{2}e^T [(M - KC)e + U(y)e] \\ &= \frac{1}{2}e^T [(M - KC)^T + (M - KC)] e + \frac{1}{2}e^T [U^T(y) + U(y)] e \end{aligned} \quad (3.6)$$

En utilisant les expressions de M, K, C et U donnés en (3.3), équation (3.4) nous donne:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}(e) &= e^T \begin{pmatrix} -k_1 - \gamma & 0 \\ 0 & -\mu - by \end{pmatrix} e \\ &\leq 0, \quad \text{puisque} \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

De plus $\dot{\mathcal{L}}$ est une fonction quadratique définie négativement. Il s'ensuit que, d'après le théorème de Lyapunov, toutes les trajectoires de (3.5) s'approchent de l'origine avec un taux de convergence exponentiel quand t tend vers l'infini. On en déduit donc que le système (3.4) est un observateur exponentiel du système (3.3).

Remarque 3.2.1 Dans le théorème 3.2.1, on choisit $K^T = (k_1, k_2)$ et $k_2 = a + b$ tel que pour tout vecteur K , $M - KC$ soit Hurwitz.

3.3 Estimation à la fois des variables d'état et d'un paramètre du modèle

Dans le paragraphe précédent, il a été conçu un observateur pour estimer une variable d'état, à savoir la proportion d'escargots infectés, étant donné que tous les paramètres du modèle sont connus. En effet, l'observateur (3.4) dépend de tous les paramètres de modèle (3.1). Cependant, les valeurs de certains paramètres dans les modèles épidémiques ne sont généralement pas connues. Un problème récurrent dans les modèles épidémiques est l'estimation des paramètres de transmission. Pour le modèle de la schistosomiase, c'est le paramètre a qui représente le taux d'infection escargot-hôte difficile à estimer. Dans cette partie, nous concevons un observateur qui permet d'estimer simultanément la variable d'état et le taux de transmission escargot-hôte a étant donné que w est mesuré. Un tel observateur est appelé observateur adaptatif.

3.3.1 Transformation linéaire

Soit a le paramètre inconnu. En utilisant la transformation linéaire

$$(z_1, z_2)^T = (w, -\gamma w + as)^T = Tx$$

avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & a \end{pmatrix}$, le modèle (3.1) peut être écrit, avec les nouvelles coordonnées comme

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A + B(y))z(t) + \psi(y(t))a, \\ y = C_0 z, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma\mu & -(\mu + \gamma) \end{pmatrix}$, $B(y) = -by \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $\psi(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ by \end{pmatrix}$ et $C_0 = (1, 0)$.

En effet, y est une sortie mesurable et satisfait l'équation $\dot{y} := y(t)$.

Si $y(0) > 0$, y est une sortie mesurable et on a: $\dot{y} = -\gamma y + as$.

Prenons l'écosystème comme une situation endémique (voir [9])

$$\mathcal{R}_0 = \frac{ab}{\gamma\mu} \text{ donc } \mathcal{R}_0 > 1$$

et [9] nous donne $y(t) \rightarrow \bar{y} = \frac{a}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma\mu}{ab}\right)$.

Le théorème suivant donne un observateur qui estime à la fois les variables d'état et le paramètre de transmission a .

Théorème 3.3.1 *Un observateur adaptatif exponentiel pour le système (3.7) est donné par le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = (A + B(y))\hat{z}(t) + \psi(y(t))\hat{a}(t) - K(y(t))(C_0\hat{z}(t) - y(t)), \\ \dot{\hat{a}}(t) = -\Lambda(y(t))(C_0\hat{z}(t) - y(t)) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(y) = 3(\lambda + 1) - \gamma - \mu - by \\ k_2(y) = \gamma^2 + \mu^2 + \gamma\mu + b^2y^2 + (2\mu + \gamma)by + 3\lambda(\lambda + 2) + 2 - 3 \\ \quad (\lambda + 1)(by + \mu + \gamma) \\ \quad = -3(\mu + \gamma) + \gamma^2 + \mu^2 + \gamma\mu + b^2y^2 + (2\mu + \gamma - 3 - 3\lambda) \\ \quad by + 3\lambda(\lambda + 2) + 2 - 3\lambda(\mu + \gamma) \\ \Lambda(y) = \frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{by} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

avec $K(y(t)) = (k_1(y(t)), k_2(y(t)))^T$ et $\Lambda(y(t))$ est définie par les relations de (3.9).
L'expression de $\Lambda(y)$ dans (3.9) est bien définie puisque $y(t) > 0$ pour tous $t \geq 0$.

La preuve du Théorème 3.3.1 utilise un résultat classique concernant une classe des systèmes linéaires variant dans le temps, que nous rappelons ici:

Théorème 3.3.2 Soit D une matrice constante dont les racines caractéristiques $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont toutes simples, et soit ξ_i le vecteur caractéristique de D correspondant aux racines caractéristiques λ_i ($i = 1, \dots, n$).

Si $R(t)$ est une matrice définie par $t \geq t_0$ tel que

$$\int_{t_0}^{\infty} |R(t)| dt < \infty,$$

alors l'équation $\dot{x} = (D + R(t))x$ admet un système fondamental de solutions $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ qui satisfait

$$x_k(t) \sim e^{\lambda_k t} \xi_k \text{ quand } t \rightarrow \infty, \quad (k = 1, \dots, n).$$

Le symbole \sim désigne l'équivalence asymptotique.

Preuve 3.3.1 le but est de montrer que l'erreur entre les systèmes (3.7) et (3.8) converge exponentiellement vers zéro. L'erreur d'estimation

$$e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_a(t))^T = (\hat{z}_1(t) - z_1(t), \hat{z}_2(t) - z_2(t), \hat{a}(t) - a(t))^T \text{ et on a :}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \begin{pmatrix} -k_1(y(t)) & 1 & 0 \\ -k_2(y(t)) - \gamma\mu - b\gamma y(t) & -\gamma - \mu - by(t) & by(t) \\ -\Lambda(y(t)) & 0 & 0 \end{pmatrix} e(t) \\ &:= M(y(t))e(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La matrice variant dans le temps $M(y)$ peut s'écrire sous la forme

$$M(y) = \tilde{A}(y) - \tilde{K}(y)\tilde{C},$$

$$\text{avec } \tilde{A}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\mu - b\gamma y & -\gamma - \mu - by & by \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\tilde{K}(y) = \begin{pmatrix} k_1(y) \\ k_2(y) \\ \Lambda(y) \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{O}(y)$ est une matrice d'observabilité au couple $(\tilde{A}(y), \tilde{C}(y))$

$$\text{et ce qui donne: } \mathcal{O}(y) = \begin{pmatrix} \tilde{C}(y) \\ \tilde{C}(y)\tilde{A}(y) \\ \tilde{C}(y)\tilde{A}(y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma\mu - b & -\gamma - \mu - by & by \end{pmatrix}$$

Pour tout $y > 0$, $\text{rang}(\mathcal{O}(y)) = 3$ donc le couple $(\tilde{A}(y), \tilde{C}(y))$ est observable. Autrement dit, il satisfait la condition de rang d'observabilité de Kalman (voir définition 2.6.4). Par conséquent, par le théorème de placement des pôles (voir théorème 2.6.1), il existe un gain $\tilde{K}(y)$ dépendant de y tel que $\text{sp}(M(y)) = \{-\lambda - 2, -\lambda - 1, -\lambda\}$, où $\text{sp}(M(y))$ désigne le spectre de $M(y)$ et λ est tout nombre réel positif. Ce gain $\tilde{K}(y)$ est donnée par les relations (3.9) et peut être calculé en utilisant par exemple la formule d'Ackermann [6]

$$\tilde{K}(y) = (\tilde{A}(y) + \lambda I_3) \cdot (\tilde{A}(y) + (\lambda + 1)I_3) \cdot (\tilde{A}(y) + (\lambda + 2)I_3) \cdot \mathcal{O}^{-1}(y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où I_3 est une 3×3 matrice identité. Le spectre de la matrice $M(y(t))$ est fixe, et se trouve entièrement dans la gauche du plan complexe car les valeurs propres de $M(y(t))$ sont $-\lambda - 2, -\lambda - 1, \text{ et } -\lambda$ avec $\lambda > 0$. Ce qui n'est pas suffisant pour conclure que les solutions de $\dot{e}(t) := M(y(t))e(t)$ convergent vers zéro à une vitesse exponentielle puisque le système (3.10) est un système non autonome.

Montrons que le système (3.10) peut être écrit sous la forme suivante:

$$\dot{x} = (D + R(t))x \quad (3.11)$$

où D est une matrice constante.

Sous certaines conditions sur $R(t)$, le comportement des solutions pour ces types de systèmes non autonomes peut être obtenu en utilisant le théorème 3.3.2

Soit $D = \text{diag}(-\lambda, -(\lambda + 1), -(\lambda + 2))$ $P(t)$ une matrice dépendant du temps, puisque $M(y(t))$ est diagonalisable on a:

$$D = P^{-1}(t)M(y(t))P(t).$$

Un calcul simple des vecteurs propres de $M(y(t))$, associés aux valeurs propres correspondantes, permet de déterminer $P(t)$ et donc P^{-1} . On obtient successivement

$$P(t) = -b y(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)} & \frac{1}{\lambda(\lambda + 2)} & \frac{1}{\lambda(\lambda + 1)} \\ \frac{\gamma + \mu - 2\lambda - 3 + by(t)}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)} & \frac{\gamma + \mu - 2\lambda - 2 + by(t)}{\lambda(\lambda + 2)} & \frac{\gamma + \mu - 2\lambda - 1 + by(t)}{\lambda(\lambda + 1)} \\ \frac{1}{-by(t)} & \frac{1}{-by(t)} & \frac{1}{-by(t)} \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\gamma + \mu - \lambda + by(t))}{2by(t)} & -\frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2by(t)} & \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2} \\ \frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\gamma + \mu - \lambda - 1 + by(t))}{by(t)} & \frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{by(t)} & -\lambda(\lambda + 2) \\ -\frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\gamma + \mu - \lambda - 2 + by(t))}{2by(t)} & -\frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2by(t)} & \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} \end{pmatrix}$$

Posons le changement de variable $u = P(t)^{-1}e$ et la nouvelle variable $u(t)$ satisfait l'équation linéaire à variation temporelle avec $R(t) = \frac{dP^{-1}(t)}{dt}P(t)$. Par un simple calcul on a :

$$R(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda(\lambda - by(t) + 3) & \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda - by(t) + 2) & \frac{1}{2}(\lambda + 2)(\lambda - by(t) + 1) \\ -\lambda(\lambda - by(t) + 2) & -(\lambda + 1)(\lambda - by(t) + 1) & -(\lambda + 2)(\lambda - by(t)) \\ \frac{1}{2}\lambda(\lambda - by(t) + 1) & \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda - by(t)) & \frac{1}{2}(\lambda + 2)(\lambda - by(t) - 1) \end{pmatrix}.$$

En prenant la norme infinie on a:

$$\|R(t)\|_\infty = \left| \frac{y'(t)}{y(t)} \right| |(3(\lambda + 1)(\lambda - by(t)) + 3\lambda + 1)|.$$

Les solutions du système (3.1) évoluent dans l'ensemble compact défini dans (3.3), donc $y(t) = w(t)$ est une fonction positive et bornée de t . Nous choisissons λ suffisamment grand de manière à ce que $\lambda - by(t) \geq 0$.

$$\|R(t)\|_\infty = \left| \frac{y'(t)}{y(t)} \right| (3(\lambda + 1)(\lambda - by(t)) + 3\lambda + 1) = \left| \frac{y'(t)}{y(t)} \right| (3\lambda^2 + 6\lambda + 1 - 3b(\lambda + 1)y(t)).$$

Puisque le système (3.1) est un système coopératif planaire, il existe $T \geq 0$ tel que $y(t)$ est non croissant ou non décroissant sur $t \geq T$ (voir [42] dans chapitre 3, théorème 2.2, page 43, [28] dans le théorème 3.21, ou [29], Proposition 2.5). Ceci implique que $y'(t)$ change de signe au plus une fois (pour $t = T$). En utilisant l'identité de Chasles,

$$\int_0^\infty \|R(t)\|_\infty dt = \int_0^T \|R(t)\|_\infty dt + \int_T^\infty \|R(t)\|_\infty dt, \text{ et}$$

$$\int_T^\infty \|R(t)\|_\infty dt = \pm \int_T^\infty \frac{y'(t)}{y(t)} (3\lambda^2 + 6\lambda + 1 - 3b(\lambda + 1)y(t)) dt \quad (3.12)$$

Le signe dans (3.12) est positif lorsque $y'(t) \geq 0$ et négatif dans le cas contraire. Ainsi, on obtient, en utilisant le fait que $y(t)$ tend vers $\bar{y} = \frac{a}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma\mu}{ab}\right)$ lorsque t tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \|R(t)\|_\infty dt &= \pm \left[(3\lambda^2 + 6\lambda + 1) \int_T^\infty \frac{y'(t)}{y(t)} dt - 3b(\lambda + 1) \int_T^\infty y'(t) dt \right] \\ &= \pm \left[(3\lambda^2 + 6\lambda + 1) \log \left(\frac{\bar{y}}{y(T)} \right) - 3b(\lambda + 1)(\bar{y} - y(T)) \right] \\ &< \infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $\int_0^\infty \|R(t)\|_\infty dt < \infty$ et donc nous pouvons appliquer [20] (Chap. IV, Théorème 2): les solutions du système (3.11) satisfont $u_i(t) \sim e^{-\lambda_i t}$, quand $i = 1, 2, 3$ pour $t \rightarrow \infty$.

Avec l'erreur $e(t) = P(t)u(t)$, on obtient, pour t suffisamment grand, $|e(t)| \leq \chi(y(t))e^{-\lambda t}|e(0)|$ avec χ étant une fonction continue positive. Puisque $y(t)$ est une fonction continue bornée, on en déduit que $|e(t)| \leq C_2 e^{-\lambda t}|e(0)|$, pour une certaine constante positive C_2 . Ce qui met fin à la preuve.

3.3.2 Expression explicite de l'observateur de l'état x et du paramètre a

L'observateur du théorème 3.3.1 donne une estimation \hat{z} de z et \hat{a} de a . Par conséquent, en utilisant la transformation linéaire et inversible $z = Tx$, on obtient une estimation de x . En effet, dans les coordonnées originales $\hat{x} = (\hat{w}, \hat{s})$, l'observateur adaptatif (3.8) nous donne:

$$(3.13) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\gamma & \hat{a}(t) \\ b & -\mu - by(t) \end{pmatrix} \hat{x}(t) - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\hat{a}(t)} & \frac{1}{\hat{a}(t)} \end{pmatrix} K(y(t)) - \frac{\hat{s}(t)}{\hat{a}(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda(y(t)) \end{pmatrix} \right] (C_0 \hat{x}(t) - y(t)), \\ \hat{a}(t) = -\Lambda(y(t)) (C_0 \hat{x}(t) - y(t)) \end{cases}$$

3.4 Estimation de l'état du modèle lorsque le processus d'infection escargot-hôte n'est pas connu

Pour estimer la proportion d'escargots infectés, nous avons utilisé le modèle de MacDonald (3.1). Ici, nous proposons un outil qui permet d'estimer la proportion d'escargots infectés lorsque le processus d'infection est donnée par une fonction quelconque $f(w, s)$ dont l'expression analytique n'est pas nécessairement connue. En effet, dans ce cas, le modèle de MacDonald modifié peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \dot{w} = -\gamma w + f(w, s) \\ \dot{s} = b(1-s)w - \mu s \\ y = w \end{cases} \quad (3.14)$$

avec son équivalence

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx + Ef(x) + g(x), \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.15a)$$

$$(3.15b)$$

où

$$x = (w, s)^T, G = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ b & -\mu \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (1, 0) \text{ et } g(w, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -bsw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -bys \end{pmatrix}$$

Théorème 3.4.1 Soit $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T$, $\bar{G} = (I_2 - EC)G$, $K = (k_1, k_2)$, avec $k_1 > 0, k_2 = b > 0$ et $\hat{g}(t) = (0, -byz_2^T)$.

Le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = (\bar{G} - KC)z + (K + (\bar{G} - KC)E)y + \hat{g} \\ \hat{x} = z + Ey \end{cases} \quad (3.16)$$

est un observateur exponentiel pour le système (3.15), c'est-à-dire que $\hat{x}(t)$ converge exponentiellement vers $x(t)$.

Preuve 3.4.1 La construction de l'observateur est inspirée de [31]. Dérivons l'équation (3.15b)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= C\dot{x} \\ &= C(Gx + Ef(x) + g(x)) \\ &= CGx + CEf(x) + Cg(x). \end{aligned}$$

Puisque $CE = 1$, nous en déduisons que $f(x) = \dot{y} - CGx - Cg(x)$. En remplaçant l'entrée inconnue $f(x)$ dans l'équation (3.15a), on obtient:

$$\dot{x} = \bar{G}x + E\dot{y} + (I_2 - EC)g(x).$$

Il suffit maintenant d'étudier la dynamique de l'erreur $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. Nous avons:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= (\bar{G} - KC)e + \hat{g} - (I_2 - EC)g(x) \\ &= (\bar{G} - KC)e - by \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ b - k_2 & -\mu - by \end{pmatrix} e$$

On prend $k_2 = b$, ce qui donne $\frac{-1}{dt} (\|e(t)\|_2^2) = 2(-k_1 e_1^2 - (\mu + by(t))e_2^2)$.

Puisque $y(t) \geq 0$, il s'ensuit que $\frac{d}{dt} (\|e(t)\|_2^2) \leq -2(k_1 e_1^2 + \mu e_2^2) \leq -2 \min(k_1, \mu) \|e(t)\|_2^2$.

Par conséquent, $\|e(t)\|_2^2 \leq e^{-2 \min(k_1, \mu)t} \|e(0)\|_2^2$ ce qui montre que l'erreur d'estimation $e(t)$ converge exponentiellement vers zéro quand t tend vers ∞ . Ceci met fin à la preuve.

3.5 Simulations numériques et commentaires

Pour générer les courbes issues des systèmes (3.3) et de l'observateur (3.4), nous utilisons les paramètres suivants: $\gamma = 0,05 \text{ jour}^{-1}$, $\mu = 0,04 \text{ jour}^{-1}$,

$a = 2 \text{ vers femelles} \times \text{jour}^{-1}$ et $b = 0,01 \text{ ver femelle}^{-1} \times \text{jour}^{-1}$.

Les conditions initiales sont données par $(w(0); s(0)) = (3; 0, 3)$ et $(\hat{w}(0); \hat{s}(0)) = (1; 0, 1)$

La convergence se produit bien avant que les deux solutions des systèmes atteignent la valeur d'équilibre (pointillés verts) à un temps $t \approx 7$. Nous notons que les trajectoires données par l'observateur (3.4) convergent vers l'état du système (3.3), pour n'importe quelles conditions initiales de l'observateur système. Nous avons les courbes suivantes:

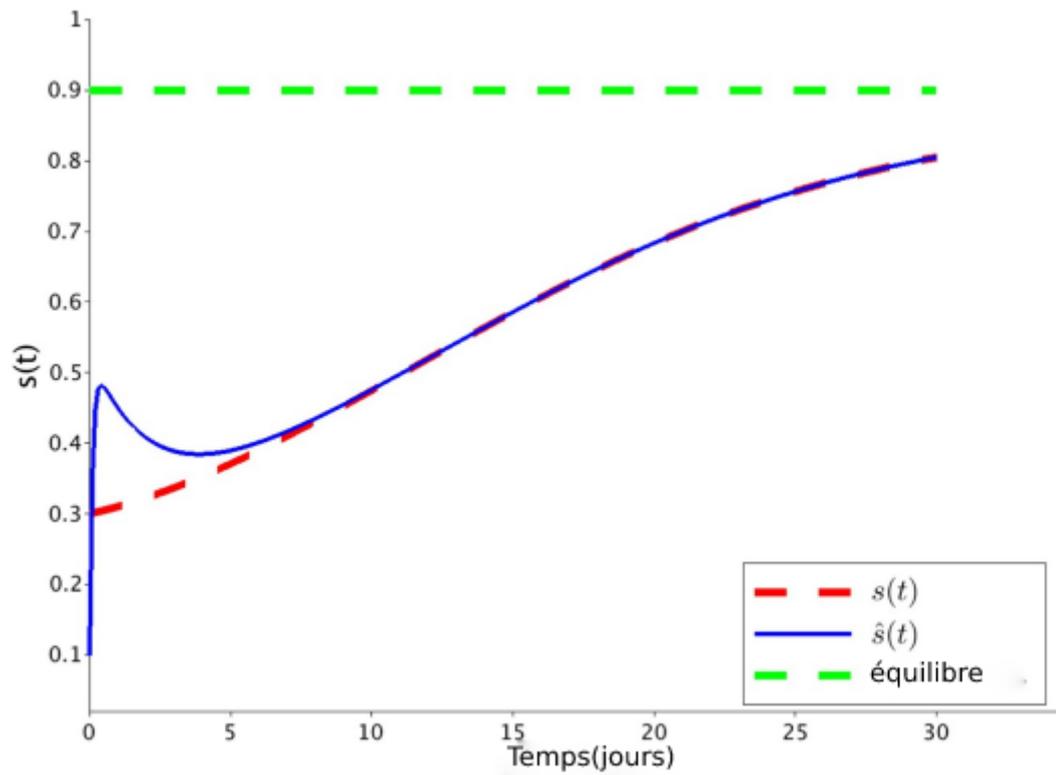


FIGURE 3.1 – Dynamique couplée de la proportion d’escargots infectés $s(t)$ (pointillés rouges) telle que donnée par le système (3.3) et de son estimation $\hat{s}(t)$ (bleu) telle que donnée par l’observateur (3.4)

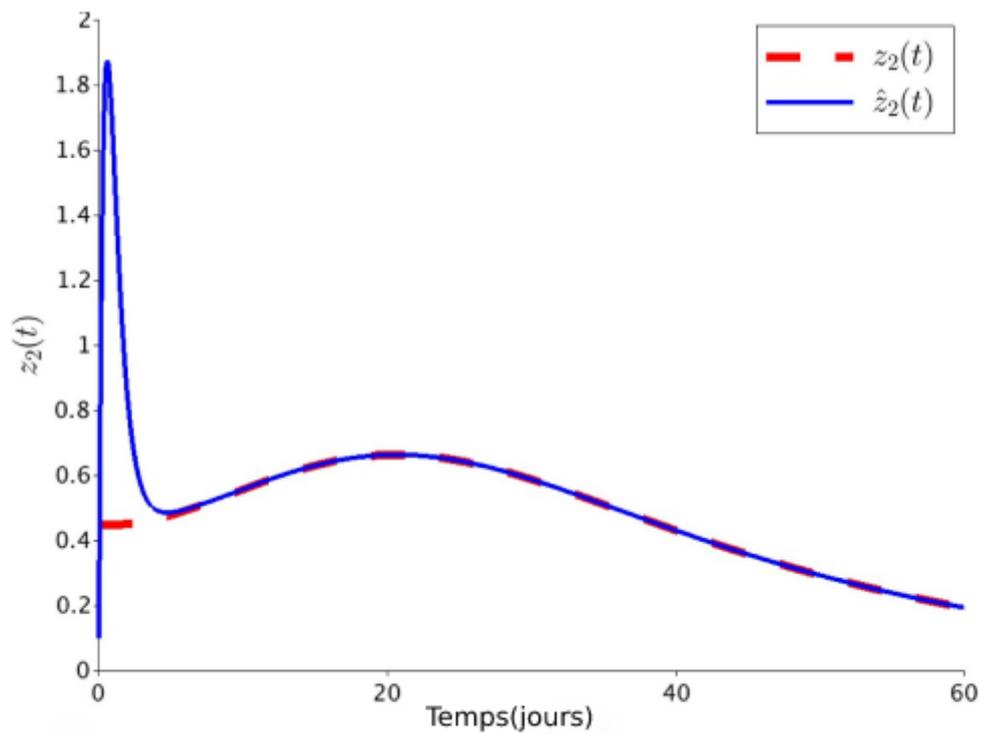


FIGURE 3.2 – Dynamique de la variable d’état $z_2(t)$ (tirets rouges) donnée par le système (3.7) et son estimation correspondante $\hat{z}_2(t)$ (bleu) donnée par l’observateur (3.8)

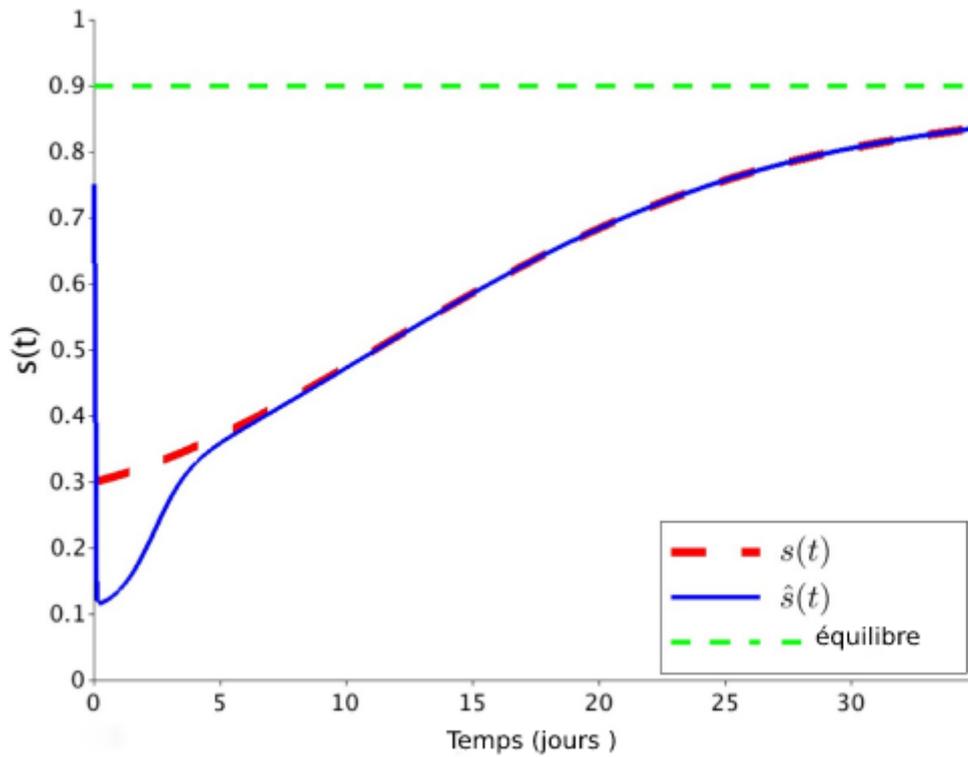


FIGURE 3.3 – Dynamique de la proportion d’escargots infectés $s(t)$ (tirets rouges) donnée dans (3.1) et de son estimation (bleu) fournie par l’observateur dans le théorème (3.3.2). L’estimation $\hat{s}(t)$ de $s(t)$ est obtenue sans utiliser le paramètre inconnu a . Les conditions initiales sont telles que $(w(0), s(0)) = (3; 0.3)$ et $(\hat{z}_1(0); \hat{z}_2(0)) = (1; 0, 1)$.

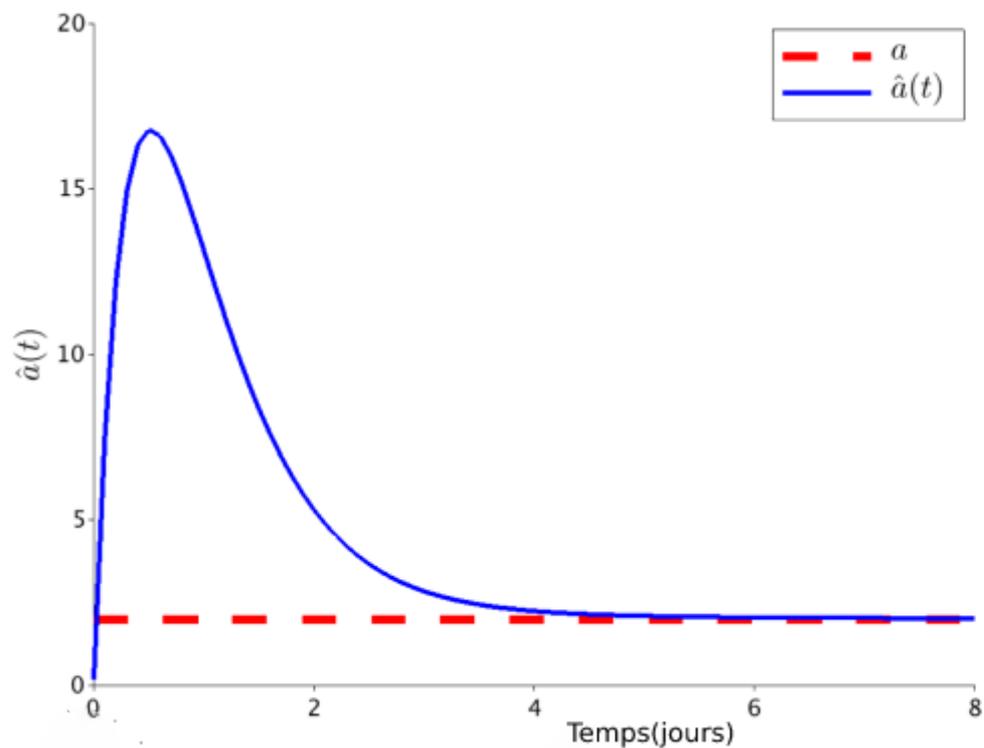


FIGURE 3.4 – Comparaison entre l’estimation du paramètre inconnu a , $\hat{a}(t)$ l’estimateur (3.8) ou (3.3.2) et la valeur de a

Remarque 3.5.1

- On note que les estimateurs (3.7) et (3.4) sont complètement indépendants de a .
- Comme prévu par le théorème 3.2.1, $\hat{z}_2(t)$ (FIGURE 3.2) et $\hat{s}(t)$ (FIGURE 3.3) l'état estimé converge exponentiellement vers $z_2(t)$ et $s(t)$ respectivement bien avant qu'ils n'atteignent tous deux la valeur d'équilibre ce qui confirme l'efficacité de l'observateur.
- L'observateur (3.4) et l'observateur adaptatif (3.8) estiment tous deux la proportion d'escargots infectés $s(t)$, et pour notre modèle et les valeurs des paramètres de base.

Les simulations numériques indiquent que les estimations données par les deux observateurs convergent vers les variables d'état du modèle (3.3) avec approximativement la même période de temps d'environ 5 jours (voir FIGURE 3.2). Cependant, l'observateur adaptatif (3.3.2) permet d'estimer non seulement les variables d'état non mesurées mais aussi le paramètre a de transmission de l'homme-escargot inconnu.

Remarque 3.5.2 Le système (3.16) est appelé observateur avec entrée inconnue[30] et [31].

3.6 Conclusion

Le problème de l'estimation de l'état et des paramètres du modèle de MacDonald (3.1) a été traité à l'aide d'un observateur à gain élevé. Dans le théorème (3.2.1), nous avons fourni une estimation de la proportion d'escargots infectés $s(t)$ lorsque tous les paramètres sont supposés connus. Et, dans le théorème (3.3.1), nous avons conçu un observateur adaptatif pour estimer simultanément la variable d'état $s(t)$ et un paramètre inconnu à savoir le taux de transmission escargot-homme. En effet, ces estimations sont basées sur le modèle Macdonald, qui est une représentation grossière de la dynamique de la schistosomiase.

Chapitre 4

Observateur pour un modèle de la schistosomiase de Patches

4.1 Introduction

Barbour a proposé une extension du modèle de MacDonald sur l communautés humaines et m mares pour tenir compte des hétérogénéités aussi bien au sein de la population humaine que celle des mollusques. Dans ce chapitre, nous proposons de concevoir un observateur pour le modèle de la schistosomiase qui tient compte de l'hétérogénéité des individus et des bassins. En effet, nous revisitons un modèle dynamique proposé dans [40] pour lequel les individus sont structurés en l patches ou groupes qui interagissent avec les escargots qui sont dispersés dans m sites de contact en eau douce.

4.2 Propriétés d'une métapopulation

Un patch est considéré comme vide si aucun individu n'y est présent et occupé si un individu au moins y réside.

- L'extinction locale est temporaire grâce à l'immigration inter-patches.
- On suppose que la colonisation des patches se fait de façon égale ; la colonisation faisant référence au processus par lequel un patch vide est occupé par un migrant d'un patch occupé.
- Les patches vides proches de patches occupés sont plus susceptibles d'être occupés que ceux éloignés des patches occupés.
- Les qualités d'un patch varient d'un patch à l'autre à cause de facteurs comme la taille du patch, le flux de migration, la disponibilité des ressources.

4.3 Présentation du modèle de la schistosomiase de patches

La dynamique de la schistosomiase résulte des interactions de m groupes d'individus dans l sources d'eau douce [40] est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{w} = -\text{diag}(\gamma)w + As \\ \dot{s} = \text{diag}(\mathbb{1} - s)Bw - \text{diag}(\mu)s \end{cases} \quad (4.1)$$

En utilisant la même configuration que dans le cas homogène et en désignant par:

- $w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$ le vecteur correspondant au nombre de schistosomes femelles (vers) par hôte (pour l patches ou groupes)
- $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ le vecteur correspondant à la proportion d'escargots infectés (pour m sites ou étangs d'eau douce)
- $A = (a_{ij}) \in M_{l,m}(\mathbb{R})$ est une matrice non négative de $l \times m$, qui représente la transmission de l'escargot à l'homme,
- $B = (b_{ij}) \in M_{m,l}(\mathbb{R})$ une matrice non négative de $m \times l$, qui représente la transmission de l'homme à l'escargot,
- $\mathbb{1}$ est le vecteur $(1, \dots, 1)^T$ de \mathbb{R}^m .

Plus précisément, a_{ij} est la transmission des escargots de l'étang j aux humains du patch i et b_{ij} est la transmission des humains du patch i aux escargots de l'étang j . Comme pour le cas homogène, $\gamma \in \mathbb{R}_+^l$ est le vecteur des taux de mortalité du schistosome femelle dans les populations hôtes humaines, $\mu \in \mathbb{R}_+^m$ est le vecteur des taux de mortalité des escargots dans le site aquatique.

Proposition 4.3.1 *L'ensemble*

$$\mathcal{D} = \left\{ (w, s) \in \mathbb{R}_+^{l+m} \mid 0 \leq w \leq \text{diag}(\gamma)^{-1} A \mathbb{1}; 0 \leq s \leq \mathbb{1} \right\}$$

est un ensemble absorbant et positivement invariant pour le système (4.1), rendant ainsi les solutions de (4.1) biologiquement fondées.

Preuve 4.3.1 Par le terme absorbant, nous entendons que les trajectoires du système (4.1) tendent vers le compact D quand t tend vers l'infini. Pour montrer que l'ensemble D est positivement invariant, nous utilisons le théorème de la barrière. Ainsi :

$$\text{sur } w = 0, H(w, s) = -w \text{ donc } \nabla H = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle \nabla H, X(x) \rangle = -As \leq 0$$

avec $X(x)$ le vecteur champ du système (4.1) en $w = 0$.

Sur $w = \text{diag}(\gamma)^{-1} N$,

$$H(w, s) = w \Rightarrow \nabla H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla H, X(x) \rangle &= As - A\mathbb{1} \\ &\leq A(A\mathbb{1}) - A\mathbb{1} \end{aligned}$$

or

$$A(A\mathbb{1}) - A\mathbb{1} = (A - D)A\mathbb{1} \ll 0$$

car nous définissons D comme étant la matrice dont tous les termes valent 1 et la matrice A est composée (par définition) de termes tous plus petits que 1.

$$\text{Sur } s = 0, H(w, s) = -s \Rightarrow \nabla H = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla H, X(x) \rangle &= -Bs \\ \langle \nabla H, X(x) \rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Et enfin, sur } y = A\mathbb{1}, H(w, s) = s \Rightarrow \nabla H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla H, X(x) \rangle &= \text{diag}(\mathbf{1} - \text{diag}(A\mathbb{1})^{-1} A\mathbb{1}) Bw - \text{diag}(\mu) A\mathbb{1} \\ &= -\text{diag}(\mu) A\mathbb{1} \leq 0 \text{ ce qui met fin à la preuve.} \end{aligned}$$

4.4 Un observateur du modèle de patches

La méthode est inspirée de [38] et [40]. Nous supposons que le résultat mesurable est le vecteur w . On a mesuré les vers chez l'hôte humain dans chaque groupe. En notant que $\text{diag}(\mathbb{1} - s)Bw - \text{diag}(\mu)s = Bw - \text{diag}(Bw)s - \text{diag}(\mu)s$, avec la sortie mesurable $y = w$, le modèle (4.1) avec les données mesurées peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Mx + U(y)x \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$x = (w, s)^T, M = \begin{pmatrix} -\text{diag}(\gamma) & A \\ B & -\text{diag}(\mu) \end{pmatrix}, U(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\text{diag}(By) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{l \text{ colonnes}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ colonnes}}$

Le théorème suivant donne un observateur exponentiel pour le système (4.2).

Théorème 4.4.1 *Un observateur d'état exponentiel pour le système (4.2) est donné par*

$$\dot{\hat{x}} = M\hat{x} + U(y)\hat{x} - K(C\hat{x} - y) \quad (4.3)$$

où $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$ avec $K_2 = A^T + B$, et K_1 toute matrice carrée $l \times l$ dont les composantes sont toutes positives.

Preuve 4.4.1 Soit $e = \hat{x} - x$, l'erreur entre les solutions des systèmes (4.3) et (4.2). L'évolution de l'équation d'erreur est $\dot{e} = (M + U(y) - KC)e$.

En considérant la fonction $V = \frac{1}{2}e^T e$, on obtient:

$$\dot{V} = -e_1^T (K_1^T + \text{diag}(\gamma)) e_1 - e_2^T (\text{diag}(\mu) + \text{diag}(By)) e_2 + e_2^T (A^T + B - K_2) e_1$$

Ainsi, il est possible de trouver K_1 et K_2 qui font que \dot{V} est définie négative. Un choix simple est $K_2 = A^T + B$ et $K_1 > 0$. D'après le théorème de Lyapunov e converge vers 0, ce qui met fin à la preuve.

4.5 Conclusion

L'observateur obtenu dans le théorème 4.4.1 permet d'estimer la proportion d'escargots infectés dans chaque site d'eau douce. Ce dernier est particulièrement utile pour fournir un outil permettant de mieux contrôler la schistosomiase, comme le contrôle biologique des escargots ou pour allouer des ressources (comme l'utilisation de molluscicides chimiques [43]) aux habitats des escargots d'eau douce appropriés selon la proportion d'escargots infectés.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié des outils et des méthodes pour estimer les variables d'état et les paramètres d'une classe de modèle de la schistosomiase en utilisant des éléments de la théorie du contrôle. L'un des problèmes fondamentaux dans la modélisation et le contrôle de la transmission de la schistosomiase est d'estimer la proportion d'escargots infectés dans un habitat d'escargot donné et le paramètre de transmission escargot-hôte. En revisitant le modèle classique de la schistosomiase de MacDonald (voir [4], [8] et [9]) et utilisé le fait qu'une variable d'état clé pouvait être mesurée, à savoir la charge de vers chez les humains. Notre méthode consiste à utiliser des éléments de la théorie des systèmes pour concevoir un système dynamique auxiliaire, appelé observateur, qui converge de manière exponentielle vers le modèle original.

En premier lieu avec le modèle prenant compte une seule source d'eau, l'estimation de la proportion d'escargots infectés, en supposant que tous les paramètres soient connus, est donnée par le théorème 3.2.1 et lorsque le paramètre de transmission escargot-hôte est inconnu par le théorème 3.3.1 dans un système homogène. De plus, en utilisant ce dernier observateur, nous avons estimé le paramètre inconnu. La comparaison de la valeur asymptotique du paramètre obtenu avec celle d'une constante évaluée utilisée dans la dynamique du modèle de la schistosomiase est illustrée par la FIGURE 3.4.

En second lieu, nous avons considéré un modèle de la schistosomiase hétérogène avec un nombre arbitraire de groupes d'âges (patches) dans la structure des hôtes-humains où les escargots sont distribués dans m sources d'eau, considérés dans [9], [38] et [40]. La méthode pour estimer la proportion d'escargots infectés dans chaque habitat d'escargot est aussi donnée l'observateur dans le théorème 4.4.1. Ce résultat pourrait aider à mieux concevoir des politiques de santé publique efficace, notamment en allouant les ressources disponibles là où elles sont le plus nécessaire, en ce qui concerne les groupes d'hôtes. Dans les deux cas, homogène comme hétérogène, nous avons estimé le taux de transmission escargot-homme. Cependant, une étude comparative des deux cas permettra une analyse plus poussée de l'état estimé. Ces observateurs sont conçus en supposant que la sortie mesurable soit une fonction continue dans le temps. Toutefois, dans la vie réelle, on peut espérer au mieux disposer d'un nombre limité d'échantillons de mesures à des moments discrets. Il serait intéressant de concevoir des observateurs pour des modèles d'épidémies qui sont continus dans le temps pour lesquels la sortie mesurable est discrète dans le temps.

Bibliographie

- [1] *A. Abdelhedi, D. Boutat, L. Sbita, R. Tami*, Extended observer to estimate the spreading of contagious disease, In 2014 European Control Conference (ECC), (2014), pp. 1843–1848. June
- [2] *A. Abdelhedi, D. Boutat, L. Sbita, R. Tami, D.Y. Liu*, Observer design for a class of nonlinear piecewise systems. application to an epidemic model with treatment, *Math. Biosci.* 271 (2016) 128–135.
- [3] *J. Alvarez-Ramirez, M. Meraz, J.X. Velasco-Hernandez*, Feedback control of the chemotherapy of HIV, *Int. J. Bifurc. Chaos* 10 (2000) 2207–2219.
- [4] *R.M. Anderson, R.M. May*, Helminth infections of humans : mathematical models, population dynamics, and control, *Adv. Parasitol.* 24 (1985) 1–101.
- [5] *R.M. Anderson, R.M. May*, *Infectious Diseases of Humans. Dynamics and Control*, Oxford Science Publications, 1991.
- [6] *P.J. Antsaklis, A.N. Michel*, *State Feedback and State Observers*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2007, pp. 351–410.
- [7] *M.S. Aronna, P.A. Bliman*, Interval observer for uncertain time-varying SIR-SI model of vector-borne disease, *Proc. of European Control Conference*, (2018).
- [8] *A. Barbour*, Modeling the transmission of schistosomiasis : an introductory view, *Am. J. Trop. Med. Hyg.* 55 (1996) 135–143.
- [9] *A.D. Barbour*, Macdonald’s model and the transmission of bilharzia, *Trans. R. Soc. Trop. Med. Hyg.* 72 (1978) 6–15.
- [10] *M.G. Basáñez, J.S. McCarthy, M.D. French, G.J. Yang, M. Walker, M. Gambhir, R.K. Prichard, T.S. Churcher*, A research agenda for helminth diseases of humans : modelling for control and elimination, *PLoS Neglected Trop. Dis.* 6 (2012) e1548.
- [11] *G.B. con.*, Nonlinear observers and applications. papers based on the presentations at the 28th grenoble international summer school on control, grenoble, france, september 2007, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 363, Springer, Berlin, 2007. Xiii, 224 p
- [12] *G. Besancon, Q. Zhang, H. Hammouri*, High gain observer based state and parameter estimation in nonlinear systems, *NOLCOS 2004*, (2004).
- [13] *J. Bethony, J.T. Williams, H. Kloos, J. Blangero, L. Alves-Fraga, G. Buck, A. Michalek, S. Williams-Blangero, P.T. LoVerde, R. Corrêa-Oliveira, A. Gazzinelli*, Exposure to schistosoma mansoni infection in a rural area in brazil. ii : household risk factors, *Trop. Med. Int. Health* 6 (2001) 136–145.
- [14] *D. Bichara*, Étude de modèles épidémiologiques : Stabilité, observation et estimation de paramètres, (2013) PhD thesis, Université de Lorraine.
- [15] *D. Bichara, N. Cozic, A. Iggidr*, On the estimation of sequestered infected erythrocytes in plasmodium falciparum malaria patients, *Math. Biosci. Eng.* 11 (2014) 741.

- [16] P.A. Bliman, B.D. Barros, Interval observers for SIR epidemic models subject to uncertain seasonality, *Positive Systems*, vol.471 of *Lect. Notes Control Inf. Sci.* Springer, Cham, 2017, pp. 31–39.
- [17] P.A. Bliman, D. Efimov, R. Ushirobira, A class of nonlinear adaptive observers for sir epidemic model, *Proc. of European Control Conference*,(2018).
- [18] Centers for disease control and prevention, Neglected tropical diseases, Centers for Disease Control and Prevention (2017). <https://www.cdc.gov/globalhealth/ntd/fastfacts.html>.
- [19] D. Colley, W. Secor, Immunology of human schistosomiasis, *Parasite Immunol.* 36 (2014) 347–357.
- [20] W.A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D. C. Heath and Co., Boston, Mass., 1965.
- [21] M. Darouach, M. Zasadzinski, S.J. Xu, Full-order observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Trans. Autom. Control* 39 (1994) 606–609.
- [22] K. Degue, D. Efimov, A. Iggidr, Interval estimation of sequestered infected erythrocytes in malaria patients, 2016 European Control Conference, ECC 2016, (2017), pp.1141–1145.
- [23] M. Diaby, A. Iggidr, M. Sy, Observer design for a schistosomiasis model, *Math. Biosci.* 269(2015)17~29.
- [24] Z. Feng, A. Eppert, F.A. Milner, D. Minchella, Estimation of parameters governing the transmission dynamics of schistosomes, *Appl. Math. Lett.* 17 (2004) 1105–1112.
- [25] J.P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman, A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors, *IEEE Trans. Autom. Control* 37 (1992) 875–880.
- [26] D.J. Gray, D.P. McManus, Y. Li, G.M. Williams, R. Bergquist, A.G. Ross, Schistosomiasis elimination, in : D.J. Gray, D.P. McManus, Y. Li, G.M. Williams, R. Bergquist, A.G. Ross (Eds.), *Lessons from the Past Guide the Future*, 2010. 10 pp. 733–736
- [27] A. Guiro, A. Iggidr, D. Ngom, H. Touré, On the stock estimation for some fishery systems, *Rev. Fish Biol. Fish.*19 (2009) 313–327.
- [28] M. Hirsch, H.L. Smith, *Handbook of Differential Equations 2*, Elsevier, 2005. *Monotone Dynamical Systems*
- [29] M.W. Hirsch, Systems of differential equations which are competitive or cooperative. i : limit sets, *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982) 167–179.
- [30] M. Hou, P. Muller, Design of observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Trans. Autom. Control* 37 (1992) 871~875.
- [31] M. Hou, P. Muller, Disturbance decoupled observer design : a unified viewpoint, *IEEE Trans. Autom. Control* 39 (1994) 1338–1341.
- [32] A. Iggidr, *Encyclopedia of life support systems (eolss)*, in : J.A. Filar (Ed.), *Mathematical Models*, UNESCO, Eolss Publishers, Oxford,UK,2004. Ch. Controllability, Observability and Stability of Mathematical Models
- [33] A. Iggidr, M.O. Souza, *State estimators for some epidemiological systems*, *J. Math. Biol.* (2018). *Encyclopedia of life support systems (eolss)*, in : J.A. Filar (Ed.), *Mathematical Models*, UNESCO, Eolss Publishers, Oxford,UK,2004. Ch. Controllability, Observability and Stability of Mathematical Models
- [34] M.T. Inobaya, R.M. Olveda, T.N. Chau, D.U. Olveda, A.G. Ross, Prevention and control of schistosomiasis : a current perspective, *Res. Rep. Trop. Med.*2014 (2014) 65.

- [35] *C.H. King, D. Bertsch*, Historical perspective : snail control to prevent schistosomiasis, *PLoS Negl. Trop. Dis.* 9 (2015) e0003657.
- [36] *D. Luenberger*, An introduction to observers, *IEEE Trans. Autom. control* 16 (1971) 596–602.
- [37] *G. Macdonald*, The dynamics of helminth infections, with special reference to schistosomes, *Trans. R. Soc. Trop. Med. Hyg.* 59 (1965) 489–506.
- [38] *L. Mari, M. Ciddio, R. Casagrandi, J. Perez-Saez, E. Bertuzzo, A. Rinaldo, S.H. Sokolow, G.A. De Leo, M. Gatto*, Heterogeneity in schistosomiasis transmission dynamics, *J. Theor. Biol.* 432 (2017) 87–99.
- [39] *arendra and A. M. Annaswamy*, Stable adaptive systems. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1989.
- [40] *G. Riveau, G. Sallet, L. Tendeng*, A transmission model of bilharzia a mathematical analysis of an heterogeneous model, *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées* 14 (2011). 1–3.
- [41] *R. Ross*, The Prevention of Malaria, John Murray, 1911.
- [42] *H.L. Smith*, Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems, *Mathematical Surveys and Monographs.* 41. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), (1995), p. 174. X
- [43] *S.J. Swartz, G.A. De Leo, C.L. Wood, S.H. Sokolow*, Infection with schistosome parasites in snails leads to increased predation by prawns : implications for human schistosomiasis control, *J. Exp. Biol.* 218 (2015) 3962–3967.
- [44] *Aboudramane Guiro*, *quelques problèmes d’observateurs, Applications à certains modèles d’ecosystème aquatique* , (2009), pp. 1–29.
- [45] *L. Tendeng*, Etude de modèles de transmission de la schistosomiase : Analyse mathématique, reconstruction des variables d’état et estimation des paramètres, (2013) PhD thesis, Université de Lorraine.
- [46] *G. Teschl*. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc., 2012.
- [47] *J. Utzinger, R. Bergquist, X. Shu-Hua, B.H. Singer, M. Tanner*, Sustainable schistosomiasis control—the way forward, *Lancet* 362 (2003) 1932–1934.
- [48] *H.J.V. Cleave, L.G. Lederer*, Studies on the life cycle of the snail, viviparus contectoides, *J. Morphol.* 53 (1932).
- [49] *J.X. Velasco-Hernández, J.A. García, D. Kirschner*, Remarks on modeling host-viral dynamics and treatment, in : C. Chavez (Ed.), *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases : an introduction*. Proceedings of a tutorial Introduction to epidemiology and immunology, Springer, 2002, pp. 287–308. IMA Vol. Math. Appl. 125
- [50] *W. Wonham*, *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach*, second ed., Springer, 1979.
- [51] *W. Wonham*, *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach*, second ed., Springer, 1979.
- [52] *M. Woolhouse*, On the application of mathematical models of schistosome transmission dynamics. ii. control, *Acta Tropica* 50 (1992) 189–204.
- [53] *M. Woolhouse, G. Hasibeder, S. Chandiwana*, On estimating the basic reproduction number for schistosoma haematobium, *Trop. Med. Int. Health* 1 (1996) 456–463.
- [54] World health organization, Schistosomiasis, World Health Organization (2017). <http://www.who.int/schistosomiasis/disease/en/>

- [55] *Sophie Chareyron*, Sophie Chareyron. Stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers, application aux robots marcheurs. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2005. Français.
- [56] , Bassem Bhiri. Stabilité et stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2017. Français.