UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES
OPTION : ANALYSE ET GÉOMÉTRIE COMPLEXE

Thème : L'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$

Présenté par : Christ Jésus BASSE

Sous la direction de : Dr Mamadou Eramane BODIAN & Dr Souhaibou SAMBOU

Sous la supervision du : Pr Marie Salomon SAMBOU

Soutenu publiquement le 20 Juin 2023 devant le jury ci-après :

Prénom(s) et Nom	**Grade**	**Qualité**	**Établissement**
Amoussou Thomas GUEDENON	Professeur assimilé	Président	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Superviseur	UASZ
Mansour SANE	Maître de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Moussa FALL	Maître de Conférences assimilé	Examinateur	UASZ
Mamadou Eramane BODIAN	Maître de Conférences Assimilé	Directeur	UASZ
Souhaibou SAMBOU	Chercheur	Directeur	UASZ

Année scolaire 2021/2022.

REMERCIEMENTS

Après avoir exprimé ma profonde gratitude à l'ETERNEL DIEU, LUI sans qui rien ne peut se faire ; il est important pour moi, de remercier avec beaucoup de cœur les personnes qui m'ont accompagnées, encouragées et m'ont permises, quelle que fut la manière, d'en être arrivé là.

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à mes directeurs de mémoire Docteur Mamadou Eramane BODIAN et Docteur Souhaibou SAMBOU, pour leur disponibilité, leurs remarques scientifiques constructives et leurs grandes qualités humaines.
Je tiens à remercier très sincèrement Professeur Marie Salomon SAMBOU d'avoir accepté de superviser notre travail et de m'avoir initié à la recherche à travers ses projets.

C'est également un honneur pour moi de compter parmi les membres de jury le professeur Amoussou Thomas GUEDENON, Docteur Moussa FALL et Docteur Mansour SANÉ. Je remercie également tous les enseignants de l'UFR ST en particulier ceux du département de mathématiques pour la qualité de l'enseignement qu'ils dispensent.

Je n'oublie pas les membres du groupe de recherche en analyse et géométrie complexe qui sont en master : Malick FAYE, Marie FAYE, Abdourahmane DIATTA et Papa Ali CISSE, mes camarades de Master de Mathématiques pures et appliquées à l'occurrence Abdoulaye DIOUF, Ibrahima TRAORE, Mohamed Fadel AIDARA, Thierno DIALLO, Malick SAGNA, Fatou DIEME, Bamba SECK, Aliou B WADE, Boubacar BALDE (de Zig), Boubacar BALDE (de Kolda), Omar DIOP, Pathé BA, Lamine MANE, Serge R MENDY, ainsi que tous les étudiants du département de mathématique pour l'aide et l'amitié qu'ils m'ont apportés, ainsi que pour les échanges et discussions autour des mathématiques.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de mes aînés doctorants et docteurs, Papa BADIANE, Dieynaba SAMB, Daouda DIACK, Amadou SEYDI, Jules BASSE qui m'ont aussi bien aidés à rendre ce document meilleur. A Mr Alassane TAMBOURA responsable de l'institut polytechnique de Ziguinchor (ZIP).
Au Pr Mélyan MENDY du département d'économie gestion.

J'adresse une pensée spéciale à mon oncle Lucien GOMIS, ma tante Victorine MENDY ainsi que tous les membres de le famille qui m'ont accueillis et pris comme fils à Ziguinchor.
Je veux aussi remercier mes oncles et tantes : Richard BASSE, Paul BASSE, Paul GOMIS, Jacques GOMIS, Victorine MENDY, Binta DIATTA, Mame DIALLO pour leurs encouragements et soutiens financiers.
A tous mes frères et sœurs de Boutoupa, Ziguinchor, Dakar, etc, sans distinction.
Aux familles DIANDY, MALACK et voisins depuis Kandé.

Je remercie Mr MENDY, Mr BA, Mr THIAM, Mr FAYE (mes encadreurs), collègues stagiaires ainsi que le corps professoral et administratif du Collège Saint Charles LWANGA.

Qu'il soit financier ou moral, leur soutien est sans faille. Merci à mes parents de m'avoir donné la chance de faire les études et pour votre amour, je veux citer Gerrard BASSE, Micheline GOMIS.
Merci également à Célesta, Esther, Richard, ...

Dédicace

Je dédie ce travail :
« A ma marraine Suzanne MENDY, que luit sur elle la lumière sans fin. »

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Préliminaires **3**

2.1 Quelques outils sur la géométrie différentielle . . . 3
2.2 Fibrés vectoriels . . . 4
2.3 Structure complexe . . . 6
2.4 Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ . . . 9
2.5 Harmonicité & Pseudoconvexité . . . 10
2.5.1 Harmonicité . . . 10
2.5.2 Pseudoconvexité . . . 11
2.6 Outils d'analyse fonctionnelle . . . 12
2.6.1 Notion de distribution . . . 13
2.6.2 Théorie des opérateurs . . . 13

3 La formule explicite de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann **18**

3.1 Cas d'un domaine pseudoconvexe relativement compact à bord lisse d'une variété hermitienne . . . 18
3.2 Cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. . . . 25

4 Conclusion **39**

Résumé

Dans ce mémoire, il est question de l'expression explicite de l'opérateur ∂-Neumann sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ due à Michael Range. Pour ce faire, l'auteur s'est référé des résultats de Kohn concernant la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann ($\bar{\partial} g = f$) sur un domaine pseudoconvexe, donnant l'expression du ∂-Neumann en fonction de l'opérateur solution canonique. Le résultat principal est obtenu grâce au résultat de Lieb qui montre l'équivalence entre l'opérateur solution canonique $S_q = \bar{\partial} N_{q+1}$ et l'opérateur intégral T_q sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

1 Introduction

L'équation de Cauchy-Riemann $\bar{\partial} g = f$ a été longtemps le thème central de l'analyse complexe à plusieurs variables. Diverses méthodes de résolutions de cette équation ont été proposées dont celle dite le problème du $\bar{\partial}$-Neumann.
Soit Ω un domaine pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. L'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial} : L^2_{0,q}(\Omega) \to L^2_{0,q+1}(\Omega)$ est linéaire, dense, fermé et satisfait $\bar{\partial}^2 = 0$. Soient $\bar{\partial}^*$ l'adjoint de $\bar{\partial}$ et $\Box = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ le laplacien complexe. Pour $1 \leq q \leq n$, le potentiel inverse de $\Box$ noté N_q et est appelé opérateur $\bar{\partial}$-Neumann.
Récemment, Phong dans [10] et Stanton dans [13] ont obtenu des formules de représentations explicites de N_q dans des domaines spéciaux comme le demi espace supérieur de Siegel et Harvey et Polking dans [4] sur la boule.
Kohn a montré que résoudre le problème du $\bar{\partial}$-Neumann revient à donner les propriétés de régularité et exprimer explicitement l'opérateur N_q. Ainsi si f est $\bar{\partial}$-fermée, il prouve l'existence d'un opérateur appelé solution canonique noté $S_q = \bar{\partial}^* N_{q+1}$ tel qu'on ait $g = \bar{\partial}^* N_q f$, solution de l'équation de Cauchy-Riemann. Il a établi le résultat suivant :

Théorème 1.1 Soient Ω un domaine pseudoconvexe relativement compact à bord lisse d'une variété hermitienne, f une (0,q)-forme différentielle et H_q la projection orthogonale. Supposons que $R(\Box)$ est fermé et soit

$$S_q = \bar{\partial}^* N_{q+1} : L^2_{0,q+1}(\Omega) \to L^2_{0,q}(\Omega)$$

l'opérateur solution canonique, alors

$$f - H_q f = S_q \bar{\partial} f + S^*_{q-1} \bar{\partial}^* f$$

pour $f \in L^2_{0,q}(\Omega) \cap Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$ *et*

$$N_q = S_q S_q^* + S^*_{q-1} S_{q-1}.$$

Lieb dans [8] a prouvé que si D est la boule unité de $\mathbb{C}^n$, alors l'opérateur intégral T_q défini de $L^2_{0,q+1}(D)$ à valeur dans $L^2_{0,q}(D)$ est égal à l'opérateur solution canonique $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ sur $R(\bar{\partial})$. Ainsi nous pouvons énoncer le résultat principal de ce document.

Théorème 1.2 L'opérateur solution canonique $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ correspond à l'opérateur intégral T_q sur tout $L^2_{0,q+1}(D)$.

L'objectif de ce mémoire est de donner une expression explicite de l'opérateur N_q sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ due à Michael RANGE dans [12], en partant du résultat de Lieb appliqué à ceux de Kohn.
Dans la première partie, nous allons commencer par introduire les notions de base nécessaires pour la compréhension du document. Ensuite, on donnera la formule explicite de l'opérateur N_q sur un domaine pseudoconvexe relativement compact à bord lisse d'une variété hermitienne X. Enfin, on va introduire les noyaux régularisants des fonctions à coefficients dans L^2 sur D et faire la preuve du Théorème (1.2), qui permet la déduction de l'expression de N_q, dans le cas où D est la boule unité dans $\mathbb{C}^n$.

2 Préliminaires

Dans cette section nous allons définir des notions tirées de [3] que nous utiliserons dans la suite du document.

2.1 Quelques outils sur la géométrie différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois différentiables et dont la dérivée k-ième est continue et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

Définition 2.1 (Carte)

Soit M un espace topologique. Une carte sur M est un couple (U, φ) où $U \subset M$ et $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

Définition 2.2 (Atlas)

Un atlas de classe C^k est une collection d'homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$, appelée carte différentielle où $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ constitue un recouvrement d'ouverts de M, $(V_\alpha)_\alpha$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous $\alpha \; et \; \beta \in I$, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^k.
Les composantes $\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ sont appelées coordonnées locales sur U_α définies par la carte locale $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Définition 2.3 (Variété différentiable)

Une variété différentiable X de dimension n et de classe C^k est un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.4 Soit X une variété différentiable de classe C^k et de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert et $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$. Une fonction f est de classe C^s sur Ω si $f o \varphi_\alpha^{-1}$ est de classe C^s sur $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \Omega)$ pour tout $\alpha \in I$. L'ensemble des fonctions de classe C^s sur Ω est noté $C^s(\Omega, \mathbb{R})$.

Définition 2.5 (Vecteur tangent)

Un vecteur v, tangent à X au point x_0, est par définition un opérateur différentiel de premier ordre qui agit sur les fonctions,
c'est-à-dire pour tout $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on associe localement $v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$; où les v_j sont des réels.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ autour de x_0 sur Ω,
on écrit simplement

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définition 2.6 (Espace tangent, Espace cotangent)

L'ensemble des vecteurs tangents est appelé espace tangent. Par conséquent, pour tout $x_0 \in \Omega$, le n-uplet $\{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\}_{1 \leq j \leq n}$ constitue une base de l'espace tangent à X au point x_0 ;

noté $T_{x_0}X$. Son dual $T^*_{x_0}X$ est l'espace vectoriel cotangent à X au point x_0.
Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, sa différentielle au point x_0 est une forme linéaire sur $T_{x_0}X$, définie par :

$$df_{x_0}(v) = v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \ \forall v \in T_{x_0}X.$$

En particulier, si $v_j = dx_j(v)$, alors localement $df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$.
La famille $\{dx_1, ..., dx_n\}$ est la base duale de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Donc c'est une base de l'espace cotangent $T^*_{x_0}X$.

Définition 2.7 (Champ de vecteurs)

Soit X une variété différentiable de classe C^s. On appelle champ de vecteur de classe C^k $(s \geq k)$ sur un ouvert $\Omega \subset X$, toute application $s : \Omega \longrightarrow TX = \bigcup_{x \in X} T_xX$ de classe C^k telle que $s(x) \in T_xX$ pour tout $x \in X$.
On note $\Gamma^k(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^k sur X.

Définition 2.8 Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à bord lisse de classe C^k avec $1 \leq k \leq \infty$, en un point $p \in b\Omega$ s'il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^d$ et une fonction de classe C^k $r : U \to \mathbb{R}$ tels que

$$\Omega \cap U = \{x \in U : r(x) < 0\}$$
$$b\Omega \cap U = \{x \in U : r(x) = 0\}$$

r est appelé fonction définissante locale de Ω en p.
Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à bord lisse de classe C^k s'il l'est en tout point p $\in b\Omega$.

2.2 Fibrés vectoriels

Définition 2.9 Soient M une variété différentiable de dimension n et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ un champ scalaire. Un fibré vectoriel de rang r au-dessus de M est une variété E de classe C^∞ munie d'une application $\pi : E \longrightarrow M$ de classe C^∞ appelée projection et d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r sur chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$. Cela veut dire qu'il existe un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ de M et des C^∞-difféomorphismes θ_α appelés trivialisations

$$\theta_\alpha : E_{|V_\alpha} \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{K}^r \quad \text{où} \quad E_{|V_\alpha} = \pi^{-1}(V_\alpha)$$

telle que pour tout $x \in V_\alpha$ l'application

$$E_x \xrightarrow{\theta_\alpha} \{x\} \times \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Pour chaque $\alpha, \beta \in I$, l'application

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

peut se mettre sous la forme

$$\theta_{\alpha\beta}(x, \xi) = (x, g_{\alpha\beta}(x).\xi), (x, \xi) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

où la famille $(g_{\alpha\beta})$ est inversible à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(V_\alpha \cap V_\beta, \mathrm{Gl}(\mathrm{r}, \mathbb{K}))$, d'inverse $(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g_{\beta\alpha})$ et satisfaisant à la condition de cocycle

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{sur} \quad \mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{V}_\beta \cap \mathrm{V}_\gamma.$$

La collection $(g_{\alpha\beta})$ est appelée système de matrices de transition. Réciproquement, toute collection de matrices inversibles satisfaisant la condition de cocycle définit un fibré vectoriel E, obtenu en recollant les cartes $V_\alpha \times \mathbb{K}^r$ via les identifications $\theta_{\alpha\beta}$.

Exemple 2.1 Les fibrés tangents $TM = \bigcup_{a\in M} T_aM$ et cotangent $T^*M = \bigcup_{a\in M} T_a^*M$ d'une variété différentiable M de dimension n sont des fibrés vectoriels localement triviaux de rang n au-dessus de M.

Définition 2.10 Soient $\Omega \subset M$ un ouvert, E un fibré vectoriel sur M et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty, \omega\}$. Une section de classe C^k de $E_{|\Omega}$ est une application $s : \Omega \longrightarrow E$ de classe C^k telle que $s(x) \in E_x$, pour tout $x \in \Omega$ (i.e $\pi \circ s = \mathrm{Id}_\Omega$).

Exemple 2.2

1. Une 1-forme différentielle est une section du fibré cotangent.
2. Un champ de vecteur est une section du fibré tangent.

Définition 2.11 Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}$ et M une variété différentiable de classe C^r de dimension n, avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Une p-forme différentielle de classe C^r sur M est une section de classe C^r du fibré vectoriel des p-formes extérieures $\Lambda^p T^*M$.
Ainsi, une p-forme différentielle ω associe à tout x dans M, une forme p-linéaire alternée ω_x sur l'espace tangent T_xM à M.
On note $\mathcal{E}_r^p(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^r sur M.

On peut effectuer plusieurs opérations avec les p-formes différentielles, par exemple :

- **Produit extérieur**

Soient u une p-forme différentielle et v une q-forme différentielle définies localement par :

$$v(x) = \sum_{|J|=q}' v_J(x)dx_J \text{ et } u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x)dx_I.$$

Alors le produit extérieur de u avec v est la forme de degré $(p+q)$ définie localement par :

$$u \wedge v(x) = \sum_{|I|=p,|J|=q}' u_I(x)v_J(x)dx_I \wedge dx_J \text{ avec } 0 \leq p+q \leq n$$
$$I = (i_1, ...i_p) \text{ avec } 1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$$
$$J = (j_1, ...j_q) \text{ avec } 1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$$
$$dx_I = dx_{i_1} \wedge ..... \wedge dx_{i_p} \text{ et } dx_J = dx_{j_1} \wedge ..... \wedge dx_{j_q}.$$

- **Dérivée extérieure**

La dérivée extérieure des p-formes différentielles est un opérateur différentiel

$$d : \mathcal{E}_r^p(M) \longrightarrow \mathcal{E}_{r-1}^{p+1}(M)$$

défini localement par la formule

$$du = \sum_{|I|=p}' \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I,$$

pour

$$u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x)dx_I$$

et vérifie les propriétés suivantes :

i) $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ (Règle de Leibnitz) ;

ii) $d^2 u = 0$ (idem-potence).

Une forme u est dite fermée si $du = 0$ et elle est dite exacte s'il existe une forme v, telle que $deg(v) = deg(u) - 1$ vérifiant $u = dv$.

• **Pull-back**

Soit $F : X \to Y$ une application C^∞ entre deux variétés orientées de dimension respective n_1, n_2. Si $v(y) = \sum_{|I|=p}' v_I(y) dy_I$ est une p-forme différentielle sur Y, le pull-back (tiré-en-arrière) $F^* v$ est la p-forme différentielle sur X obtenue en remplaçant y par $F(x)$ dans l'écriture de v, c'est-à-dire

$$F^* v(x) = \sum_{|I|=p}' v_I(F(x)) dF_{i_1} \wedge ... \wedge dF_{i_p}.$$

Définition 2.12 (Variété complexe)

Une variété complexe X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ où les U_α sont des ouverts de X tels que $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ et $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes pour lesquels on a :
si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes.
$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sont appelées cartes locales.

$$z \in U_\alpha, \ \varphi_\alpha(z) = (z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha) \in \mathbb{C}^n.$$

$(z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha)$ sont appelés coordonnées locales autour de z.
La collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ est appelée atlas complexe.

2.3 Structure complexe

Soit X une variété analytique complexe de dimension (complexe) n. Considérons X comme une variété différentiable de dimension $2n$. Pour tout $z \in X$, on a l'espace cotangent $T_z^* X$ de X en z et la structure complexe J_z de $T_z^* X$ définie localement par

$$J_z(dx_j) = dy_j \text{ et } J_z(dy_j) = -dx_j.$$

Remarque 2.1 *J_z est un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $T_z^* X$ vérifiant*

$$J_z \circ J_z = -Id_{T_z^* X}.$$

Soit $T_z^* X^{\mathbb{C}}$ le complexifié de $T_z^* X$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme

$$u + iv \text{ où } u, v \in T_z^* X \text{ et } i = \sqrt{-1}.$$

J_z se prolonge en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_z^* X^{\mathbb{C}}$ noté encore J_z tel que

$$J_z^2 = -Id_{T_z^* X^{\mathbb{C}}}$$

et

$$J_z(u+iv) = J_z(u) + iJ_z(v)$$

pour tous $u, v \in T^*_z X$.
J_z admet deux valeurs propres i et $-i$, ce qui permet la décomposition de $T^*_z X^{\mathbb{C}}$ suivant.

$$T^*_z X^{\mathbb{C}} = T^*_{z1,0} X \oplus T^*_{z0,1} X$$

où

$$T^*_{z1,0} X = \{v \in T^*_z X^{\mathbb{C}} / J_z v = iv\}$$

$$T^*_{z0,1} X = \{v \in T^*_z X^{\mathbb{C}} / J_z v = -iv\}$$

$$T^*_{1,0} X = \bigcup_{z \in X} T^*_{z1,0} X \text{ et } T^*_{0,1} X = \bigcup_{z \in X} T^*_{z0,1} X$$

sont respectivement des fibrés cotangents holomorphes et antiholomorphes.
Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p, q \leq n$, notons par $\Lambda^p T^*_{z1,0} X$ et $\Lambda^q T^*_{z0,1} X$ respectivement les espaces vectoriels des p-formes alternées sur $T^*_{z1,0} X$ et des q-formes alternées sur $T^*_{z0,1} X$.
Dans un système de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$,

$$\Lambda^p T^*_{z1,0} X = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n}$$

$$\Lambda^q T^*_{z0,1} X = vect\{d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}_{1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n}$$

où $(dz_1, ..., dz_n)$ et $(d\bar{z}_1, ..., d\bar{z}_n)$ sont des bases locales de $T^*_{z1,0} X$ et $T^*_{z0,1} X$
donc

$$\Lambda^p T^*_{1,0} X := \bigcup_{z \in X} \Lambda^p T^*_{z1,0} X \text{ et } \Lambda^q T^*_{0,1} X := \bigcup_{z \in X} \Lambda^q T^*_{z0,1} X$$

sont respectivement les fibrés des p-formes extérieures sur le fibré $T^*_{1,0} X$ et des q-formes extérieures sur le fibré $T^*_{0,1} X$.
On pose

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = \Lambda^p T^*_{z1,0} X \oplus \Lambda^q T^*_{z0,1} X$$

donc

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ..... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}$$

avec $1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$.

Définition 2.13

Le fibré $\Lambda^{(p,q)} T^* X^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T^*_{1,0} X \otimes \Lambda^q T^*_{0,1} X$ est appelé fibré des (p,q)-formes extérieures sur le fibré cotangent complexifié

$$T^* X^{\mathbb{C}} := \bigcup_{z \in X} T^*_z X^{\mathbb{C}}.$$

Définition 2.14 (Formes différentielles)

Soit $\Omega \subset X$ un ouvert. On appelle forme différentielle de bidegré (p,q) (ou (p,q)-forme différentielle) et de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) sur Ω, toute section sur Ω de classe C^k du fibré $\Lambda^{(p,q)} T^* X^{\mathbb{C}}$.
On note $C^k_{p,q}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur X et $\mathcal{E}^{p,q}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^∞ sur X.

Dans un ouvert $\Omega \subset X$ de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$, une (p, q)-forme différentielle u de classe C^k s'écrit

$$u(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} u_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les u_{IJ} sont des fonctions de classe C^k, $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ sont des multi-indices d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$,

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p},$$

$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

et $\sum^{\prime}$ indique que la somme se fait suivant les indices croissants.
On note par $D^{p,q}(\Omega)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par des (p, q)-formes à support compact dans Ω (on l'appelle aussi l'espace des formes tests) et par $C_0^\infty(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par des fonctions de classe C^∞ à support compact sur X. Toute fonction $f \in C_0^\infty(X)$ est appelée fonction test.

Définition 2.15 ***(Produit scalaire hermitien)***
Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Une forme hermitienne sur X est la donnée en tout point $z_0 \in X$ d'une application qui varie de manière C^∞ en fonction de z
$h : T_{z_0}X \times T_{z_0}X \to \mathbb{C},$ définie par :
pour deux vecteurs

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \textit{appartenant à } T_{z_0}X;$$

$$h(u, v)(z_0) = \sum_{j,k=1}^{n} h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0) u_j \overline{v}_k = \sum_{j,k=1}^{n} h_{j,k}(z_0) u_j \overline{v}_k$$

où

$$h_{j,k}(z_0) = h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $h(\lambda u, v) = \lambda h(u, v),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},$

ii) $h(u, v) = \overline{h(v, u)},\ \forall u,\ v \in T_{z_0}X,$

iii) $h(u, u) \geq 0,\ \forall u \in T_{z_0}X,$

iV) $h(u, u) > 0\ \forall\ u \neq 0,$

V) $h(u + v, w) = h(u, w) + h(v, w),\ \forall u,\ v$ *et* $w \in T_{z_0}X.$

On note $her(T_{z_0}X)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur $T_{z_0}X$.

Définition 2.16 ***(Variété hermitienne)***
Soient X une variété complexe de dimension n et h une métrique hermitienne sur X. Alors le paire $(X$,h) est appelé variété hermitienne sur X.

2.4 Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$

Définition 2.17 (Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$) *(cf [2])*

Soient X une variété complexe et $\Omega \subset X$ un ouvert. Si f est une fonction de classe C^1 sur un voisinage d'un point $a \in \Omega$, on a localement

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)dy_j,$$

on pose

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}) \ et \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}).$$

Puisque z_j peut s'écrire comme suit :

$$z_j = x_j + iy_j,$$

alors on a $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$, où x_j et y_j sont des réels. Cette transformation permet d'écrire df_a sous la forme suivante :

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j.$$

Posons

$$\partial f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j \ et \ \bar{\partial} f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j,$$

donc

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

La décomposition

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

se généralise sur toutes les formes différentielles.
En effet, si

$$w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} w_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

est une (p,q)-forme différentielle de classe C^1

$$dw(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} dw_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} (\partial w_{I,J}(z) + \bar{\partial} w_{I,J}(z)) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

On posera

$$\partial w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \partial w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \ et \ \bar{\partial} w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \bar{\partial} w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants :

$$\partial : C^s_{p,q}(\Omega) \longrightarrow C^{s-1}_{p+1,q}(\Omega)$$
$$\bar{\partial} : C^s_{p,q}(\Omega) \longrightarrow C^{s-1}_{p,q+1}(\Omega).$$

Propriétés 2.1

1) $d = \partial + \bar{\partial}$ *et* $d^2 = 0.$

2) $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0.$

Définition 2.18 *[11]* Soit (X, ω) une variété hermitienne compacte avec $dim_{\mathbb{C}} X = n$. L'opérateur de Hodge est un isomorphisme noté $\star$ défini par

$$\star = \star_\omega : C^\infty_{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{n-q,n-p}(X, \mathbb{C})$$

tel que $u \wedge \star\overline{v} =< u, v >_\omega dV_\omega$, avec ω une forme hermitienne et $<, >_\omega$ un produit scalaire hermitien.

Lemme 2.1 *[11]* L'opérateur de Hodge a des propriétés supplémentaires suivantes :

1) $\star\star\phi = (-1)^{p+p}\phi$ pour $\phi \in C^\infty_{p,q}(X, \mathbb{C})$.
2) $\star dV_\omega = 1$ et $\star 1 = dV_\omega$.

2.5 Harmonicité & Pseudoconvexité

Les domaines pseudoconvexes sont définis à partir des fonctions harmoniques. Les definitions de cette partie sont tirées de [7].

2.5.1 Harmonicité

Définition 2.19 *(Fonction harmonique)*
Une fonction u de classe C^2 définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$ est dite harmonique si

$$\Delta u = 0$$

où $\Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ désigne l'opérateur de Laplace.

Remarque 2.2 En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on va voir que les fonctions harmoniques sont très liées aux fonctions holomorphes.
On rappelle qu'une fonction $f : z \in \Omega \mapsto f(z)$ continue est holomorphe si elle est différentiable et satisfait l'équation de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Définition 2.20 *(Fonction sous-harmonique)*
Une fonction u définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

i) u est semi-continue supérieurement (s.c.s.), c'est-à-dire $\{z \in D \,;\, u(z) < s\}$ est ouvert pour tout $s \in \mathbb{R}$.

ii) Pour tout compact $K \subset D$ et toute fonction h continue sur K, harmonique sur $\mathring{K}$, telle que $h \geq u$ sur bK, alors $h \geq u$ sur K.

Définition 2.21 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et φ une fonction de classe C^2 sur Ω. On appelle forme Lévi de φ en $z \in \Omega$ la Hessienne complexe noté $L_z\varphi$ de φ, c'est-à-dire

$$w \mapsto L_z\varphi(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k.$$

Définition 2.22 Une fonction φ de classe C^2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite plurisousharmonique si

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) t_j \overline{t}_k \geq 0,$$

$\forall\, z \in \Omega,\ t \in \mathbb{C}^n.$

Une fonction φ de classe C^2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite strictement plurisousharmonique si

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) t_j \overline{t}_k > 0,$$

$\forall\, t \neq 0.$

2.5.2 Pseudoconvexité

Définition 2.23 Une fonction φ continue définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles est une fonction d'exhaustion pour D si, pour tout c $\in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$D_c = \Big\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \varphi(z) < c \Big\}$$

est relativement compact dans D.

Remarque 2.3 Une fonction d'exhaustion φ vérifie $\varphi(z) \longrightarrow \infty$ quand z s'approche du bord de D.

Si Ω n'est pas borné, on définit la pseudoconvexité comme suit :

Définition 2.24 Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit pseudoconvexe si Ω admet une fonction d'exhaustion φ plurisousharmonique continue.

Définition 2.25 Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et φ une fonction définissante de classe C^2 de Ω. On dit que Ω est pseudoconvexe au point $p \in b\Omega$, si la forme de Lévi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) t_j \overline{t}_k \geq 0$$

$\forall t \in \mathbb{C}^n$ vérifiant

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(p) t_j = 0. \tag{1}$$

Le domaine Ω est strictement pseudoconvexe si la forme de Lévi est strictement positive pour tout $t \neq 0$ et $\forall t \in \mathbb{C}^n$, la relation (1) est vérifiée.

Ω est dit domaine pseudoconvexe s'il est pseudoconvexe en tout point du bord $b\Omega$.

Ω est dit domaine strictement pseudoconvexe s'il l'est en tout tout point de son bord.

Remarque 2.4 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine pseudoconvexe et φ une fonction d'exhaustion lisse et plurisousharmonique sur Ω. Alors

$$\Omega = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \Omega_c$$

où $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$ sont des domaines relativement compacts.

2.6 Outils d'analyse fonctionnelle

Dans cette partie, on va rappeler quelques notions d'analyse fonctionnelle.

Définition 2.26 Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$- espace vectoriel Ω est une application affine de $\Omega \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique, définie positive et notée $< .;. >$.

Définition 2.27 Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien.

Définition 2.28 Soit Ω un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur Ω, l'application notée $\| \,.\, \|$ et définie de Ω dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

1. $\forall\ x \in \Omega$: $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall\ x\ \in \Omega$ *et* $\forall\ \lambda\ \in K$: $\| \lambda x \| = |\lambda|\ \| x \|$.
3. $\forall\ (x;y)\ \in \Omega^2$: $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Définition 2.29 Un espace vectoriel normé $(\Omega, \| \,.\, \|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy (pour cette norme) d'éléments de Ω est convergente dans Ω. Un tel espace est appelé espace de Banach.
Si $(\Omega, \| \,.\, \|)$ est complet et que la norme est issue d'un produit scalaire, alors $(\Omega, \| \,.\, \|)$ est un espace d'Hilbert.

Exemple 2.3 *(Espace de Banach)*
On note $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, l'espace vectoriel des classes de fonction f, mesurable presque partout, on note par $||.||_{L^p}$ la norme associée à $L^p(\Omega)$ et est définie par :

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = \infty$, L^∞ est défini par

$$L^\infty(\Omega) = \{f \text{ mesurable presque partout } : |f(x)| < \infty\}$$

et sa norme par

$$||f||_{L^\infty} = inf\{c \geq, \ |f(x)| \leq c, \ presque\ partout\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{L^p}$ est un espace de Banach.

Exemple 2.4 (Espace de Hilbert) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine.
$L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$||f||_{L^2} = \left(\int_\Omega |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui provient du produit scalaire : $\forall f, g \in \Omega$ on a

$$< f, g > = \int_\Omega (f \times \overline{g}) dx$$

est un espace de Hilbert.

2.6.1 Notion de distribution

Définition 2.30 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$D(\Omega) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(\varphi) \subset \Omega, \text{ et supp}(\varphi) \text{ compact } \}$$

où $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}}$.
Une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(\Omega)$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

i) $\forall\ j$, le support de φ_j et celui de φ sont contenus dans un compact $K \subset \Omega$,

ii) $(D^\alpha \varphi_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi(x)$ sur $K \subset \Omega$, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} .....\partial {x_n}^{\alpha_n}}$ est la dérivée d'ordre $|\alpha| =: \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, on désigne par D_K l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K.

Définition 2.31 Une forme linéaire T sur $D(\Omega)$ est dite séquentiellement continue sur $D(\Omega)$ si l'application $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(\Omega)$, si φ_j converge vers φ dans $D(\Omega)$, la suite des nombres complexes $T(\varphi_j)$ converge vers $T(\varphi)$.

Définition 2.32 Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $D(\Omega)$ séquentiellement continue. On note $D^{'}(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Remarque 2.5 Si $T \in D^{'}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors l'application $\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$ est une distribution appelée dérivée d'ordre α de T. On la note par $D^\alpha T$.

Exemple 2.5

1) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\delta_a\ : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle$ est une distribution appelée mesure de Dirac.

2) Soit f une fonction localement intégrable[1] sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors l'application T_f : $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $T_f(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ est une distribution sur Ω.

2.6.2 Théorie des opérateurs

Comme nous essayons d'établir l'expression explicite de l'opérateur inverse du Laplacien complexe, il est primordial d'énoncer quelques définitions et propriétés sur la théorie des opérateurs (voir [9], [14] et [15]).

Définition 2.33 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur est une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $Dom(T) \subset H_1$ à valeurs dans H_2. $Dom(T)$ est le domaine définition de l'opérateur T.

Définition 2.34 Soient X et Y deux espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues et $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.
On dit que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si l'image par T de la boule unité fermée B_X de X est relativement compacte dans l'espace Y (ie $\overline{T(B_X)}$ est compact).

1. Une fonction à valeurs complexes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact de Ω est intégrable au sens de Lebesgue.

Remarque 2.6

1. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans X, la suite image (Tx_n) admet des sous-suites convergentes dans Y.
2. Si T_1 , $T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ sont compacts, alors $a_1T_1+a_2T_2$ est compact pour tous scalaires a_1, a_2. Ainsi, les opérateurs compacts de X dans Y forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$. Cet espace des opérateurs compacts sera noté $\mathcal{K}(X,Y)$.

Définition 2.35 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et T : $H_1 \to H_2$. L'unique application linéaire $T^* : H_2 \to H_1$ telle que pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$ on ait :

$$< Tx, y >=< x, T^*y >$$

est appelée adjoint de T.

Remarque 2.7 Par définition de la norme de l'opérateur et en utilisant un corollaire d'Hahn-Banach, on a

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{y\in H_2,\|y\|\leq 1} \|T^*y\| = \sup_{\substack{x\in H_1,\|x\|\leq 1\\ y\in H_2,\|y\|\leq 1}} |\langle x, T^*y\rangle| \\ &= \sup_{\substack{x\in H_1,\|x\|\leq 1\\ y\in H_2,\|y\|\leq 1}} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{x\in H_1,\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\|.\end{aligned}$$

Ainsi $\|T^*\| = \|T\|$.

Proposition 2.1 Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert. L'application $T \longmapsto T^*$ est une isométrie de $\mathcal{L}(H_1,H_2)$ dans $\mathcal{L}(H_2,H_1)$, elle est linéaire si les espaces sont réels et sesquilinéaire si les espaces sont complexes. De plus, $\forall\, T \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$,

$$(T^*)^* = T \text{ et } \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Enfin $(TS)^* = S^*T^* \quad \forall S \in \mathcal{L}(H_2,H_1)$.

Preuve 2.1 Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in H_1$, $y \in H_2$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, (T_1+\lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1+\lambda T_2)(x), y\rangle \\ &= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda\langle T_2(x), y\rangle \\ &= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \left\langle x, \bar{\lambda}T_2^*(y)\right\rangle \\ &= \left\langle x, \left(T_1^* + \bar{\lambda}T_2^*\right)(y)\right\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi $T \longmapsto T^*$ est antilinéaire. Elle est isométrique d'après la définition de l'adjoint. Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on a

$$\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle.$$

On a

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme de l'opérateur est une norme d'algèbre et donc en particulier,

$$\|T^*T\| \leq \|T\| \, \|T^*\| = \|T\|^2.$$

D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\
&\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\
&\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\
&\geq \|T\|^2.
\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$ d'après les deux inégalités précédentes. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$, on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par définition de l'adjoint,

$$\begin{aligned}
\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\
&= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\
&= \langle S^*T^*(x), y\rangle .
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous x et y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

Définition 2.36 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est fermé si son graphe noté $\Gamma(T)$ et défini par

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in Dom(T)\} \subset H_1 \times H_2$$

est fermé.

Définition 2.37 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est à domaine dense si $\overline{Dom(T)} = H_1$.

Définition 2.38 Soit H_1 un espace de Hilbert. Un opérateur $T : Dom(T) \subset H_1 \to H_1$ à domaine dense est auto-adjoint si $T^* = T$.

Proposition 2.2 *[3]* Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Si $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur fermé et à domaine dense, alors son adjoint est fermé.

Définition 2.39 Soient X et Y deux espaces vectoriels normés de normes respectives $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dit borné si,

$$\exists\, M \geq 0 : \quad \forall x \in X; \quad \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Remarque 2.8 Si $X = Y = H$ est un espace de Hilbert, un opérateur T est borné dans H si $Dom(T) = H$ et $T : H \to H$ est continue.

Exemple 2.6 L'homothétie vectorielle de rapport k :

$$H_k : X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto H_k(x) = k \bullet x$$

$$\forall x \in X : \|H_k(x)\| = \|k \bullet x\| = |k|\|x\|,$$

est un opérateur linéaire borné.

Dans la suite, nous utiliserons $Ker(T)$ et $R(T)$ pour représenter respectivement le noyau et l'image de T.

Proposition 2.3 (cf [2]) *Soit T un opérateur défini de H_1 à valeurs dans H_2.*

1. *Si T est fermé, alors $Ker(T)$ est fermé.*
2. *Soit $\overline{R(T)}$ l'adhérence de $R(T)$. Par la définition de l'opérateur adjoint, on a*

$$H_1 = Ker(T) \oplus \overline{R(T^*)}$$

et

$$H_2 = Ker(T^*) \oplus \overline{R(T)}.$$

Proposition 2.4 *Soit T un opérateur fermable à domaine dense sur H, alors*

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Ker}(\bar{T})^{\perp} = \overline{\mathrm{R}\left(T^*\right)} & et & \mathrm{Ker}\left(T^*\right) = \mathrm{R}(T)^{\perp} \\ \mathrm{Ker}(\bar{T}) = \mathrm{R}\left(T^*\right)^{\perp} & et & \mathrm{Ker}\left(T^*\right)^{\perp} = \overline{\mathrm{R}(T)}. \end{array}$$

Preuve 2.2 Montrons d'abord $\mathrm{Ker}(\bar{T}) = \mathrm{R}\left(T^*\right)^{\perp}$.
On a

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{R}\left(T^*\right)^{\perp} \Rightarrow \left(\langle y, T^*x\rangle = 0, \forall x \in Dom\left(T^*\right)\right) &\Rightarrow \Big(y \in Dom(\bar{T}) \;\; et \;\langle Ty, x\rangle = 0, \forall x \in Dom\left(T^*\right)\Big) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\bar{T}) \\ &\mathrm{R}\left(T^*\right)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(\bar{T}) \\ y \in \ker\left(\bar{T}\right) \Rightarrow \left(\langle Ty, x\rangle = 0, \forall x \in Dom\left(T^*\right)\right) &\Rightarrow \Big(y \in ker(\bar{T}) \;\; et \;\langle y, T^*x\rangle = 0, \forall x \in Dom\left(T^*\right)\Big) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{R}(T^*)^{\perp} \\ &\Rightarrow \mathrm{Ker}(\bar{T}) \subset \mathrm{R}\left(T^*\right)^{\perp}. \end{aligned}$$

Ainsi par ces deux inclusions, on a l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\bar{T}) = \mathrm{R}\left(T^*\right)^{\perp}.$$

Montrons maintenant $R(T)^{\perp} = \ker(T^*)$

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{R}(T)^{\perp} \Rightarrow \left(\langle y, Tx\rangle = 0, \forall x \in Dom(T)\right) &\Rightarrow \quad \left(y \in Dom\left(T^*\right) \;\; et \;\; \langle T^*y, x\rangle = 0, \forall x \in Dom(T)\right) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}\left(T^*\right) \\ &\Rightarrow \mathrm{R}(T)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\left(T^*\right) \\ y \in \ker(T^*) \Rightarrow \left(\langle T^*y, x\rangle = 0, \forall x \in Dom(T)\right) &\Rightarrow \quad \left(y \in Dom\left(T^*\right) \;\; et \;\; \langle y, Tx\rangle = 0, \forall x \in Dom(T)\right) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{R}\left(T\right)^{\perp} \\ &\Rightarrow \ker(T^*) \subset \mathrm{R}\left(T\right)^{\perp}. \end{aligned}$$

Par suite on a :

$$R(T)^{\perp} = \ker(T^*).$$

Les deux autres relations s'obtiennent en prenant l'orthogonale et en remarquant que $\mathrm{Ker}(\bar{T})$ est fermé.

Lemme 2.2 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire, fermé et dense.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $R(T)$ est fermé.

(b) Il existe une constante C telle que :
$$\|f\|_1 \leq C\|Tf\|_2 \quad \forall f \in Dom(T) \cap \overline{R(T^*)}.$$

(c) $R(T^*)$ est fermée.

(d) Il existe une constante C telle que :
$$\|g\|_2 \leq C\|T^*g\|_1 \quad \forall g \in Dom(T^*) \cap \overline{R(T)}.$$

Preuve 2.3 Supposons que $R(T)$ est fermée. De la proposition (2.3), on a :
$$T : Dom(T) \cap \overline{R(T^*)} \to R(T)$$
est bijectif et d'inverse
$$T^{-1} : R(T) \to Dom(T) \cap \overline{R(T^*)}$$
est bien défini et est aussi un opérateur fermé. Ainsi d'après le théorème du graphe fermé, T^{-1} est continu et cela prouve (b). En supposant (b) vraie on obtient $\overline{R(T)} \subset R(T)$. Ce qui montre que $(b) \Longleftrightarrow (a)$.
De façon analogue on montre (c) et (d) sont équivalentes.
Montrons que (b) implique (d). On a
$$| < g, Tf >_2 | = | < T^*g, f >_1 | \leq C\|T^*g\|_1 \, \|Tf\|_2,$$
pour $g \in Dom(T^*) \cap \overline{R(T)}$ *et* $f \in Dom(T) \cap \overline{R(T^*)}$. Donc
$$| < g, h >_2 | \leq C\|T^*g\|_1 \, \|h\|_2, \; pour \; g \in Dom(T^*) \cap \overline{R(T)} \; et \; h \in R(T),$$
qui implique (d). Par analogie, on montre que $(d) \Rightarrow (b)$.

Théorème 2.1 Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est borné ;
2. T est continu sur tout l'espace X ;
3. T est continu en 0.

Preuve 2.4 L'implication $(1 \Longrightarrow 2)$, découle du fait qu'un opérateur borné est une application Lipschitzienne donc continue. $2 \Longrightarrow 3$ car l'opérateur T est continu sur tout l'espace X en particulier en 0. Il suffit de démonter l'implication $(3 \Longrightarrow 1)$. Supposons donc que l'application linéaire T est continue au point 0 de X. On a
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X \;\; et \quad \|x\|_X < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|T(x) - T(0_X)\|_Y = \|T(x)\|_Y < \varepsilon.$$
Soit maintenant $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \neq 0$. Alors,
$$\left\| \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left\| T\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \varepsilon.$$
En d'autres termes,
$$\forall x \in X \text{ et } \quad \|x\|_X \neq 0 \Longrightarrow \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon}.$$
Par conséquent,
$$\forall x \in X \Longrightarrow \|T(x)\|_Y \leq \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \|x\|_X.$$
Donc T est borné, d'où l'équivalence des trois propriétés.

3 La formule explicite de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann

On s'intéressera dans cette section à la formule explicite de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann. Nous commencerons par le cas d'un domaine pseudoconvexe relativement compact à bord lisse d'une variété hermitienne et finir par le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

3.1 Cas d'un domaine pseudoconvexe relativement compact à bord lisse d'une variété hermitienne

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine pseudoconvexe.
Si

$$f = \sum_{|I|=p,|J|=q}' f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

et

$$g = \sum_{|I|=p,|J|=q}' g_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

sont deux (p,q)-formes différentielles à coefficients dans $L^2(\Omega)$, nous définissons le produit scalaire et la norme comme suit :

$$< f, g >= \sum_{|I|=p,|J|=q}' < f_{I,J}, g_{I,J} >, \quad |f|^2 =< f, f >= \sum_{|I|=p,|J|=q}' |f_{I,J}|^2$$

$$||f||^2 = \int_\Omega < f, f > dx = \sum_{|I|=p,|J|=q}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 dx.$$

L'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}$ pour les (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur Ω s'étend aux (p,q)-formes différentielles de carré intégrable sur Ω et est donné par

$$\bar{\partial} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega)$$

avec

$$Dom(\bar{\partial}) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) : \bar{\partial} f \in L^2_{p,q+1}(\Omega)\}.$$

Puisque $L^2_{p,q}(\Omega)$ est muni d'un produit scalaire, alors $\bar{\partial}$ admet un adjoint noté $\bar{\partial}^*$, c'est-à-dire que

$$< \bar{\partial} f, g >=< f, \bar{\partial}^* g >,$$

$\forall\ f \in Dom(\bar{\partial})$ et $g \in Dom(\bar{\partial}^*)$.
Notons

$$\Box = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial},$$

le laplacien complexe avec

$$Dom(\Box) = \Big\{f \in Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*) :\ \bar{\partial} f \in Dom(\bar{\partial}^*) \text{ et } \bar{\partial}^* f \in Dom(\bar{\partial})\Big\}.$$

Nous pouvons ainsi énoncer ces propriétés du laplacien.

Proposition 3.1

Le laplacien $\Box$ est un opérateur linéaire, dense, fermé et auto-adjoint.

Preuve 3.1 Soit $D^{p,q}(\Omega)$ l'ensemble des (p,q)-formes différentielles à support compact. $\Box$ est donc linéaire.

Montrons que $\Box$ est dense.
On sait que :

$$D^{p,q}(\Omega) \subset Dom(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$

Le passage à l'adhérence nous donne les inclusions suivantes :

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} \subset \overline{Dom(\Box)} \subset \overline{L^2_{p,q}(\Omega)}.$$

Or

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} = L^2_{p,q}(\Omega) = \overline{L^2_{p,q}(\Omega)},$$

donc on a

$$L^2_{p,q}(\Omega) \subset \overline{Dom(\Box)} \subset L^2_{p,q}(\Omega),$$

d'où

$$\overline{Dom(\Box)} = L^2_{p,q}(\Omega).$$

Ce qui montre que $Dom(\Box)$ est dense.
Montrons que $\Box$ est fermé.
Soit f_n une suite d'éléments de $Dom(\Box)$ telle que $f_n \to f$, avec $f \in Dom(\Box)$. Montrons que $\Box f_n = \Box f$:

$$\begin{aligned} <(\Box)^* f_n, f_n> &= <(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) f_n, f_n> \\ &= <\bar\partial\bar\partial^* f_n + \bar\partial^*\bar\partial f_n, f_n> \\ &= <\bar\partial\bar\partial^* f_n, f_n> + <\bar\partial^*\bar\partial f_n, f_n> \\ &= <\bar\partial^* f_n, \bar\partial^* f_n> + <\bar\partial f_n, \bar\partial f_n> \\ &= ||\bar\partial^* f_n||^2 + ||\bar\partial f_n||^2. \end{aligned}$$

Puisque $\bar\partial$ et $\bar\partial^*$ sont des opérateurs fermés, il existe $f \in Dom(\bar\partial) \cap Dom(\bar\partial^*)$ telle que $\bar\partial^* f_n \to \bar\partial^* f$ et $\bar\partial f_n \to \bar\partial f$. Il découle à nouveau du fait que $\bar\partial$ et $\bar\partial^*$ sont des opérateurs fermés que $\bar\partial^*\bar\partial f_n \to \bar\partial^*\bar\partial f$ et $\bar\partial\bar\partial^* f_n \to \bar\partial\bar\partial^* f$.
Nous avons donc prouvé que $\Box$ est un opérateur fermé.
Montrons que le laplacien est auto-adjoint. En effet pour $f, g \in Dom(\Box)$ on a :

$$\begin{aligned} <(\Box)^* f, g> &= <f, \Box g> \\ &= <f, (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) g> \\ &= <f, \bar\partial\bar\partial^* g + \bar\partial^*\bar\partial g> \\ &= <f, \bar\partial\bar\partial^* g> + <f, \bar\partial^*\bar\partial g> \\ &= <\bar\partial\bar\partial^* f, g> + <\bar\partial^*\bar\partial f, g> \\ &= <(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) f, g> \\ &= <\Box f, g>. \end{aligned}$$

Donc $\Box$ est auto-adjoint. $\blacksquare$

Théorème 3.1 *[2]* Soit Ω un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$, pour tout $f \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap ker(\bar\partial)$ avec $0 \le p \le n$ et $0 < q \le n$, il existe $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ tel que $\overline{\partial} u = f$ et :

$$q \int_\Omega |u|^2 dV \le e\delta^2 \int_\Omega |f|^2 dV,$$

où $\delta := \sup\limits_{z,z' \in \Omega} |z - z'|$ le diamètre de Ω.

Lemme 3.1 Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine pseudoconvexe borné, alors

$$Ker(\Box) = \{0\}.$$

Preuve 3.2 Soit $\alpha \in Ker(\Box)$, ainsi $\alpha \in Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$ et

$$\begin{aligned} <\alpha, \Box\alpha> &= <\alpha, (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})\alpha> \\ &= ||\bar{\partial}^*\alpha||^2 + ||\bar{\partial}\alpha||^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\bar{\partial}^*\alpha = 0$ et $\bar{\partial}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in Ker(\bar{\partial}) \cap Ker(\bar{\partial}^*)$, on a donc $Ker(\Box) \subset Ker(\bar{\partial}) \cap Ker(\bar{\partial}^*)$. On a aussi d'autre part, si $\alpha \in Ker(\bar{\partial}) \cap Ker(\bar{\partial}^*) \Rightarrow \alpha \in Dom(\Box)$, $\bar{\partial}\alpha = 0$ et $\bar{\partial}^*\alpha = 0$, il s'en suit $\bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha = 0$ et $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha = 0$, donc $\alpha \in Ker(\Box)$.

$$Ker(\Box) = Ker(\bar{\partial}) \cap Ker(\bar{\partial}^*).$$

Soit $\alpha \in Ker(\bar{\partial}) \cap Ker(\bar{\partial}^*) \Rightarrow \alpha \in Ker(\bar{\partial})$ et $\alpha \in Ker(\bar{\partial}^*) \Rightarrow \bar{\partial}\alpha = 0$ et $\bar{\partial}^*\alpha = 0$. Puisque Ω est pseudoconvexe borné, alors il existe u tel que $\bar{\partial}u = \alpha$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{\partial}u = \alpha \\ &\Rightarrow \bar{\partial}^*\bar{\partial}u = \bar{\partial}^*\alpha = 0 \\ &\Rightarrow <\bar{\partial}^*\bar{\partial}u, u> = 0 \\ &\Rightarrow <\bar{\partial}u, \bar{\partial}u> = 0 \\ &\Rightarrow ||\bar{\partial}u||^2 = 0 \\ &\Rightarrow \bar{\partial}u = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(\bar{\partial}) \cap Ker(\bar{\partial}^*) = \{0\}$, donc $Ker(\Box) = \{0\}$.

Lemme 3.2 Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$, alors $R(\Box)$ est fermée.

Preuve 3.3 Puisque Ω est un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$, d'après le théorème (3.1), pour tout $f \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap ker(\bar{\partial})$ il existe un $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ tel que $\bar{\partial}u = f$, et u satisfait

$$\begin{aligned} q\int_\Omega |u|^2 dV &\leq e\delta^2 \int_\Omega |f|^2 dV \\ ||u||^2 &\leq \frac{e\delta^2}{q}||\bar{\partial}u||^2. \end{aligned}$$

Ainsi en posant $C = \sqrt{\frac{e\delta^2}{q}}$, on a

$$||u|| \leq C||\bar{\partial}u||.$$

D'après le lemme(2.2), $R(\bar{\partial})$ est fermé, par conséquent $R(\bar{\partial}^*)$ est aussi fermé et $R(\bar{\partial}) = ker(\bar{\partial})$. Ainsi nous avons la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2_{p,q}(\Omega) = ker(\bar{\partial}) \oplus R(\bar{\partial}^*) = R(\bar{\partial}) \oplus R(\bar{\partial}^*).$$

Pour tout $f \in Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$, on a :

$$f = f_1 + f_2 \quad où \quad f_1 \in R(\bar{\partial}) \quad et \quad f_2 \in R(\bar{\partial}^*).$$

On a $f_1, f_2 \in Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$ et

$$\bar{\partial} f = \bar{\partial} f_2 \quad , \quad \bar{\partial}^* f = \bar{\partial}^* f_1.$$

Toujours d'après le Lemme (2.2), on a les estimations suivantes :

1) $\|f\|_1 \leq C\|\bar{\partial} f\|_2$ pour tout $f \in Dom(\bar{\partial}) \cap \overline{R(\bar{\partial}^*)}$.

2) $\|f\|_2 \leq C\|\bar{\partial}^* f\|_1$ pour tout $f \in Dom(\bar{\partial}^*) \cap \overline{R(\bar{\partial})}$.

D'après le théorème (3.1), on a :

$$\|f_1\|^2 \leq C_q\|\bar{\partial}^* f_1\|^2 \text{ et } \|f_2\|^2 \leq C_{q+1}\|\bar{\partial} f_2\|^2$$

où $\quad C_q = e\dfrac{\delta^2}{q} \quad$ est une constante.

Puisque

$$\bar{\partial} f = \bar{\partial} f_2 \quad , \quad \bar{\partial}^* f = \bar{\partial}^* f_1,$$

on a

$$\|f_1\|^2 \leq C_q\|\bar{\partial}^* f\|^2 \quad et \quad \|f_2\|^2 \leq C_{q+1}\|\bar{\partial} f\|^2.$$

Par conséquent, on a :

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \leq C_q\|\bar{\partial}^* f\|^2 + C_{q+1}\|\bar{\partial} f\|^2.$$

Or $C_q = e\dfrac{\delta^2}{q}$, donc $C_q > C_{q+1}$. Ainsi, on a

$$\|f\|^2 \leq C_q(\|\bar{\partial}^* f\|^2 + \|\bar{\partial} f\|^2) \quad \forall f \in Dom(\bar{\partial}^*) \cap Dom(\bar{\partial}).$$

Pour tout $f \in Dom(\Box)$, on a

$$\|f\|^2 \leq C_q(< \bar{\partial} f, \bar{\partial} f > + < \bar{\partial}^* f, \bar{\partial}^* f >) = C_q(< \bar{\partial}^*\bar{\partial} f, f > + < \bar{\partial}\bar{\partial}^* f, f >) = C_q < \Box f, f > .$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous permet d'écrire :

$$C_q < \Box f, f > \leq C_q\|\Box f\|\|f\|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \leq C_q\|\Box f\|\|f\| \\ \Rightarrow \|f\| &= \leq C_q\|\Box f\|. \end{aligned}$$

D'où, d'après le lemme (2.2), $R(\Box)$ est fermée. ■

Définition 3.1 Le problème du $\bar{\partial}$-Neumann (resp. le problème du $\bar{\partial}$-Neumann avec poids) consiste à chercher un opérateur inverse du laplacien, appelé l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann et noté $N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega)$ (resp. inverse du laplacien à poids, appelé l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann à poids et noté $N_{\phi\ p,q} : L^2_{p,q}(\Omega, \phi) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega, \phi)$.)

Remarque 3.1 Puis que $L^2_{p,q}(\Omega)$ est un espace de Hilbert et $\Box$ un opérateur auto-adjoint sur $L^2_{p,q}(\Omega)$, alors on a la décomposition de Hodge suivante :

$$L^2_{p,q}(\Omega) = Ker(\Box) \oplus \overline{R(\Box)}. \tag{2}$$

Si Ω est borné, d'après le lemme (3.1) et le lemme(3.2), $Ker(\Box) = \{0\}$ et $R(\Box) = \overline{R(\Box)} = L_{p,q}(\Omega)$, donc $\Box$ bijectif.

Théorème 3.2 Soit Ω un domaine pseudoconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Pour tous $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, il existe un opérateur $N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega)$ tel que :

1. $R(N_{p,q}) \subset Dom(\Box)$.
2. $N_{p,q}\Box = \Box N_{p,q} = I$ où I désigne l'application identité.
3. Pour toute $f \in L^2_{p,q}(\Omega)$,
$$f = \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} f \oplus \bar{\partial}^*\bar{\partial} N_{p,q} f.$$
4. $\bar{\partial} N_{p,q} = N_{p,q+1}\bar{\partial}$, $\forall\ 1 \leq q \leq n-1$ sur $Dom(\bar{\partial})$.
5. $\bar{\partial}^* N_{p,q} = N_{p,q-1}\bar{\partial}^*$, $\forall\ 2 \leq q \leq n$ sur $Dom(\bar{\partial}^*)$.
6. Soit
$$\delta := \sup_{z,z' \in \Omega} |z - z'|$$
le diamètre de Ω, pour toute $f \in L^2_{p,q}(\Omega)$, on a les estimations suivantes :
$$\|N_{p,q} f\| \leq \frac{e\delta^2}{q}\|f\|$$
$$\|\bar{\partial} N_{p,q} f\| \leq \sqrt{\frac{e\delta^2}{q}}\|f\|$$
$$\|\bar{\partial}^* N_{p,q} f\| \leq \sqrt{\frac{e\delta^2}{q}}\|f\|.$$

Preuve 3.4 *On a*

$$\Box : Dom(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega).$$

Par définition, l'opérateur $N_{p,q}$ est l'inverse de $\Box$, avec

$$N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to Dom(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$

Par conséquent, on a (1) et (2).
C'est-à-dire $R(N_{p,q}) \subset Dom(\Box)$ et $N_{p,q}\Box{=}\Box N_{p,q}{=}I$.
Montrons la relation (3).
Comme $L^2_{p,q}(\Omega)$ est un espace de Hilbert et que $\ker(\Box) = \{0\}$, la décomposition de Hodge nous permet d'avoir la relation suivante :

$$L^2_{p,q}(\Omega) = R(\Box) = \bar{\partial}\bar{\partial}^*(Dom(\Box)) \oplus \bar{\partial}^*\bar{\partial}(Dom(\Box)).$$

Donc $\forall f \in L^2_{p,q}(\Omega)$ on a

$$f = \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} f \oplus \bar{\partial}^*\bar{\partial} N_{p,q} f.$$

Montrons la relation (4).
Soit $f \in Dom(\bar{\partial})$, on a :

$$\begin{aligned}
f &= \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} f \oplus \bar{\partial}^*\bar{\partial} N_{p,q} f \\
\bar{\partial} f &= \bar{\partial}\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_{p,q} f \ \ car\ \ \bar{\partial}\bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} f = 0 \\
N_{p,q+1}\bar{\partial} f &= N_{p,q+1}\bar{\partial}\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_{p,q} f \\
N_{p,q+1}\bar{\partial} f &= N_{p,q+1}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})\bar{\partial} N_{p,q} f
\end{aligned}$$

or $N_{p,q+1}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) = I$ d'après la relation (2).
Donc
$$N_{p,q+1}\bar{\partial}f = \bar{\partial}N_{p,q}f \quad \forall f \in Dom(\bar{\partial}),$$
ainsi on a établi
$$N_{p,q+1}\bar{\partial} = \bar{\partial}N_{p,q}.$$
Pour obtenir la relation (5), on utilise le même procédé. C'est-à-dire : soit $f \in Dom(\bar{\partial}^*)$, on a

$$\begin{array}{rcl} f & = & \bar{\partial}\bar{\partial}^*N_{p,q}f \oplus \bar{\partial}^*\bar{\partial}N_{p,q}f \\ \bar{\partial}^*f & = & \bar{\partial}^*\bar{\partial}\bar{\partial}^*N_{p,q}f \ car\ \bar{\partial}^*\bar{\partial}^*\bar{\partial}N_{p,q}f = 0 \\ N_{p,q-1}\bar{\partial}^*f & = & N_{p,q-1}\bar{\partial}^*\bar{\partial}\bar{\partial}^*N_{p,q}f \\ N_{p,q-1}\bar{\partial}^*f & = & N_{p,q-1}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})\bar{\partial}^*N_{p,q}f \end{array}$$

or $N_{p,q-1}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) = I$ d'après la relation (2).
Donc
$$N_{p,q-1}\bar{\partial}^*f = \bar{\partial}^*N_{p,q}f \quad \forall f \in Dom(\bar{\partial}^*),$$
ainsi on a établi
$$N_{p,q-1}\bar{\partial}^* = \bar{\partial}^*N_{p,q}.$$
Enfin montrons la relation(6).
Comme Ω est pseudoconvexe borné alors $R(\Box)$ fermée, d'après le lemme (2.2) on a :

$$\|f\| \ \leq \ C_q\|\Box f\| \ \ \forall f \in Dom(\Box)$$

$$\Longrightarrow \|N_{p,q}f\| \ \leq \ C_q\|\Box N_{p,q}f\| = C_q\|f\|.$$

Donc on a la relation suivante :

$$\|N_{p,q}f\| \leq C_q\|f\|.$$

On a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \|\bar{\partial}N_{p,q}f\|^2 + \|\bar{\partial}^*N_{p,q}f\|^2 & = & <\bar{\partial}N_{p,q}f, \bar{\partial}N_{p,q}f> + <\bar{\partial}^*N_{p,q}f, \bar{\partial}^*N_{p,q}f> \\ & = & <\bar{\partial}^*\bar{\partial}N_{p,q}f, N_{p,q}f> + <\bar{\partial}\bar{\partial}^*N_{p,q}f, N_{p,q}f> \\ & = & <\Box N_{p,q}f, N_{p,q}f> \\ & = & <f, N_{p,q}f> \\ & \leq & \|f\|\|N_{p,q}f\|. \end{array}$$

Or $\|N_{p,q}f\| \leq C_q\|f\|$, donc
$$\|\bar{\partial}N_{p,q}f\|^2 + \|\bar{\partial}^*N_{p,q}f\|^2 \leq C_q\|f\|^2. \tag{3}$$
D'après (3) on a :
$$\|\bar{\partial}N_{p,q}f\|^2 \leq C_q\|f\|^2 \ \ et \ \ \|\bar{\partial}^*N_{p,q}f\|^2 \leq C_q\|f\|^2.$$
Ainsi, on obtient les deux résultats suivants :
$$\|\bar{\partial}N_{p,q}f\| \leq \sqrt{C_q}\|f\| \ et \ \|\bar{\partial}^*N_{p,q}f\| \leq \sqrt{C_q}\|f\| \ \ \forall f \in Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*).$$

Remarque 3.2 Puisque f est quelconque dans $L^2_{p,q}(\Omega)$, alors $\bar{\partial}N_{p,q}$ et $\bar{\partial}^*N_{p,q}$ sont des opérateurs bornés.

Remarque 3.3 *1)* Si l'opérateur $N_{p,q}$ existe avec les propriétés du Théorème (3.2), alors pour tout $u \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap ker(\bar{\partial})$, il existe $v \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ telle que $\bar{\partial} v = u$ sur Ω. En effet

$$\begin{aligned} u &= \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} u + \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_{p,q} u \\ &= \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} u + \bar{\partial}^* N_{p,q+1} \bar{\partial} u \\ &= \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_{p,q} u \end{aligned}$$

car $N_{p,q+1}\bar{\partial} u = 0$.

2) L'opérateur $N_{\phi\ p,q}$ a des propriétés analogues à celles de l'opérateur $N_{p,q}$ énumérées au Théorème (3.2) et on obtient une solution canonique $v = \bar{\partial}^* N_{\phi\ p,q} u$ de l'équation $\bar{\partial}\ v = u\ \forall u \in L^2_{\phi,p,q}(\Omega) \cap ker(\bar{\partial})$.

Dans la suite, la donnée f est une $(0,q)$-forme différentielle et on notera N_q au lieu de $N_{0,q}$ l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann.

Définition 3.2 Soit T un opérateur sur $L^2_{0,q}(\Omega)$.
On appelle projection orthogonale noté H_q, l'application définie de $L^2_{0,q}(\Omega)$ à valeurs dans $Ker(T)$.
Si $q = 0$, on l'appelle la projection de Bergman.

Théorème 3.3 Sous les hypothèses du théorème (3.2), on a les égalités suivantes dans $L^2_{0,q}(\Omega)$:
i) $\Box N_q = N_q \Box = I - H_q$,
ii) $H_q N_q = N_q H_q = 0$,

Preuve 3.5 La preuve est une conséquence du Théorème (3.2). Du fait que le domaine est pseudoconvexe borné alors $ker(\Box) = \{0\}$, donc la projection orthogonale est dans ce cas l'application nulle.

Théorème 3.4 Soient X une variété Hermitienne et $\Omega \Subset X$ un domaine pseudoconvexe relativement compact. Supposons que $R(\Box)$ est fermé et soit

$$S_q = \bar{\partial}^* N_{q+1} : L^2_{0,q+1}(\Omega) \to L^2_{0,q}(\Omega)$$

l'opérateur solution canonique. Alors

$$f - H_q f = S_q \bar{\partial} f + S^*_{q-1} \bar{\partial}^* f$$

pour tout $f \in L^2_{0,q}(\Omega) \cap Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$.

$$N_q = S_q S^*_q + S^*_{q-1} S_{q-1}.$$

Preuve 3.6 D'après le théorème (3.2), S_q est un opérateur borné, pour $0 \leq q \leq n-1$. Son adjoint est donné par :

$$S^*_q = (\bar{\partial}^* N_{q+1})^* = N_{q+1}\bar{\partial} = \bar{\partial} N_q.$$

Soit $f \in L^2_{0,q}(\Omega) \cap Dom(\bar{\partial}) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$. On sait que

$$N_q \Box = \Box N_q = I - H_q,$$

alors

$$\begin{aligned}(I-H_q)f &= \Box N_q f\\ f-H_qf &= (\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial)N_qf\\ &= \bar\partial\bar\partial^*N_qf+\bar\partial^*\bar\partial N_qf\\ &= \bar\partial N_{q-1}\bar\partial^*f+\bar\partial^*N_{q+1}\bar\partial f\\ &= S_{q-1}^*\bar\partial^*f+S_q\bar\partial f\\ &= (S_{q-1}^*\bar\partial^*+S_q\bar\partial)f. \end{aligned} \tag{4}$$

En remplaçant f par N_qf dans l'égalité (4), on a

$$\begin{aligned}(I-H_q)N_qf &= (S_{q-1}^*\bar\partial^*+S_q\bar\partial)N_qf\\ N_qf-H_qN_qf &= S_{q-1}^*\bar\partial^*N_qf+S_q\bar\partial N_qf\\ N_qf &= S_{q-1}^*S_{q-1}f+S_qS_q^*f,\ car\ H_qN_qf=0\\ &= (S_{q-1}^*S_{q-1}+S_qS_q^*)f\end{aligned}$$

donc

$$N_q = S_{q-1}^*S_{q-1}+S_qS_q^*. \qquad \blacksquare \tag{5}$$

On a ainsi une expression de l'opérateur $\bar\partial$-Neumann en fonction de l'opérateur solution canonique et de son adjoint dans un domaine pseudoconvexe relativement compact à bord lisse d'une variété hermitienne.

3.2 Cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

Nous allons dans cette partie réécrire l'expression de l'opérateur $\bar\partial$-Neumann de la relation (5) dans le cas où le domaine est la boule unité de $\mathbb{C}^n$.
Soit D la boule unité de $\mathbb{C}^n$, alors

$$D=\{z\in\mathbb{C}^n : |z|<1\},$$

avec $r(z)=|z|^2-1$ la fonction définissante.

Définition 3.3 *[2]* Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$. On note $H(D)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de carré intégrable. L'ensemble $H(D)$ est un sous espace de $L^2(D)$, et est lui même un espace de Hilbert. Si D est borné, on a

$$\begin{aligned}\wedge_\omega : H(D) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ f &\longmapsto f(\omega)\end{aligned}$$

avec $\omega\in\mathbb{C}$.
Selon l'estimation de Cauchy

$$|f(\omega)| = cd(\omega)^{-n}||f||_{L^2(D)}$$

où c est une constante qui ne dépend que de n et $d(\omega)$ une distance sur D. Ainsi d'après le théorème de représentation de Riez, il existe un élément unique, noté $K_D(.,\omega)$ dans $H(D)$ tel que

$$f(\omega) = \wedge_\omega(f) = (f, K_D(.,\omega)) = \int_D f(z)\overline{K_D(z,\omega)}dV_z$$

pour tout $f \in H(D)$.
La fonction $K_D(z,\omega)$ ainsi définie est appelée fonction noyau de Bergman sur D.

Dans le but d'écrire les expressions des $(0,q)$-formes différentielles dans $L^2(D)$, nous rappelons d'abord les formules de base et les noyaux introduits dans [8].
Soient W une (1,0)-forme différentielle donnée par

$$W = \frac{\partial r(\xi)}{(1- < z, \xi >)}, \tag{6}$$

et $\Omega_0(W)$ une double forme différentielle donnée par

$$\begin{aligned}
\Omega_0(W) &= (2i\pi)^{-n} W \wedge (\bar{\partial}_\xi W)^{n-1} \\
&= (2i\pi)^{-n} W \wedge \Big(\frac{\bar{\partial}(\partial r(\xi))(1- < z,\xi >) - \bar{\partial}_\xi(1- < z,\xi >) \wedge \partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)^2}\Big)^{n-1} \\
&= (2i\pi)^{-n} W \wedge \Big(\frac{\bar{\partial}\partial r(\xi)(1- < z,\xi >) + \sum_{j=1}^n z_j d\bar{\xi_j} \wedge \partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)^2}\Big)^{n-1} \\
&= (2i\pi)^{-n} \frac{\partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)} \wedge \Big(\frac{\bar{\partial}\partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)} + \frac{\sum_{j=1}^n z_j d\bar{\xi_j} \wedge \partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)^2}\Big)^{n-1}.
\end{aligned}$$

On sait que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (la formule du binôme de Newton).
On note aussi $\forall\ t \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $t + r = n - 1$.

$$\frac{\partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)} \wedge \Big(\frac{\bar{\partial}\partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)}\Big)^t \wedge \Big(\frac{\sum_{j=1}^n z_j d\bar{\xi_j} \wedge \partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)^2}\Big)^r = 0$$

si $r \neq 0$ du fait du caractère alterné du produit vectoriel $(\partial r(\xi) \wedge \partial r(\xi) = 0)$. Si $r = 0$ c'est-à-dire $t = n - 1$, alors

$$\Omega_0(W) = (2i\pi)^{-n} \frac{\partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)} \wedge \Big(\frac{\bar{\partial}\partial r(\xi)}{(1- < z,\xi >)}\Big)^{n-1},$$

d'où

$$\Omega_0(W) = (2i\pi)^{-n} W \wedge (\bar{\partial}_\xi W)^{n-1} = (2i\pi)^{-n} \frac{\partial r \wedge (\bar{\partial}\partial r(\xi))^{n-1}}{(1- < z,\xi >)^n}. \tag{7}$$

Avec ces choix de W et $\Omega_0(W)$, le noyau de Bergmann K_D est donné par

$$K_D(z,\xi) \quad = \quad \star\partial_\xi \overline{\Omega_0(W)}$$

où $\star$ est l'isomorphisme de Hodge.

$$
\begin{aligned}
\overline{\Omega_0(W)} &= \overline{\Big((2i\pi)^{-n}\frac{\partial r(\xi)\wedge(\bar\partial\partial r(\xi))^{n-1}}{(1-<z,\xi>)^n}\Big)}\\
&= (2i\pi)^{-n}\frac{\bar\partial r(\xi)\wedge\big(\partial\bar\partial r(\xi)\big)^{n-1}}{(1-<\xi,z>)^n}
\end{aligned}
$$

On a

$$
\bar\partial r(\xi)=\sum_{k=1}^n \xi_k d\bar\xi_k
$$

$$
\partial\bar\partial r(\xi)=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^j d\xi_j\wedge d\bar\xi_k
$$

et d'après [8]

$$
\begin{aligned}
(\partial\bar\partial r(\xi))^{n-1} &= (\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^j d\xi_j\wedge d\bar\xi_k)^{n-1}\\
&= (n-1)!\sum_{|J|=n-1}^{\prime}\ \sum_{|K|=n-1}^{\prime} \varepsilon_K^J d\xi^J\wedge d\bar\xi^K
\end{aligned}
$$

en remplaçant ces expressions dans $\overline{\Omega_0(W)}$, on a

$$
\begin{aligned}
\overline{\Omega_0(W)} &= (2i\pi)^{-n}\frac{\bar\partial r(\xi)\wedge\big(\partial\bar\partial r(\xi)\big)^{n-1}}{(1-<\xi,z>)^n}\\
&= (2i\pi)^{-n}\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k d\bar\xi_k}{(1-<\xi,z>)^n}\wedge(n-1)!\sum_{|J|=n-1}^{\prime}\ \sum_{|K|=n-1}^{\prime}\frac{\varepsilon_K^J d\xi^J\wedge d\bar\xi^K}{(1-<\xi,z>)^n}\\
&= (2i\pi)^{-n}(n-1)!\sum_{|J|=n-1}^{\prime}\ \sum_{|K|=n}^{\prime}\frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_K^{Jk}\xi_k d\xi^J\wedge d\bar\xi}{(1-<\xi,z>)^n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\xi\overline{\Omega_0(W)} &= \partial_\xi\Big((2i\pi)^{-n}(n-1)!\sum_{|J|=n-1}^{\prime}\ \sum_{|K|=n}^{\prime}\frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_K^{Jk}\xi_k d\xi^J\wedge d\bar\xi}{(1-<\xi,z>)^n}\Big)\\
&= (2i\pi)^{-n}(n-1)!\sum_{|J|=n}^{\prime}\ \sum_{|K|=n}^{\prime}\frac{\sum_{j,k=1}^n \varepsilon_K^J\varepsilon_k^j d\xi\wedge d\bar\xi(1-<\xi,z>)^n}{(1-<\xi,z>)^{2n}}\\
&\quad +(2i\pi)^{-n}(n-1)!n\frac{\sum_{j=1}^n \bar z_j d\xi_j(1-<\xi,z>)^{n-1}}{(1-<\xi,z>)^{2n}}\wedge\sum_{|J|=n-1}^{\prime}\ \sum_{|K|=n}^{\prime}\frac{\sum_{k=1}^n \varepsilon_K^{Jk}\xi_k d\xi^J\wedge d\bar\xi}{(1-<\xi,z>)^{2n}}\\
&= (2i\pi)^{-n}(n-1)!\sum_{|J|=n}^{\prime}\ \sum_{|K|=n}^{\prime}\frac{\sum_{j,k=1}^n \varepsilon_K^J\varepsilon_k^j d\xi\wedge d\bar\xi}{(1-<\xi,z>)^n}\\
&\quad +(2i\pi)^{-n}(n-1)!n\sum_{|J|=n}^{\prime}\ \sum_{|K|=n}^{\prime}\frac{\sum_{j,k=1}^n \varepsilon_K^J\varepsilon_k^j\bar z_j\xi_k d\xi\wedge d\bar\xi}{(1-<\xi,z>)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\sum_{|J|=n}^{\prime}\ \sum_{|K|=n}^{\prime}\epsilon_K^J d\xi\wedge d\bar\xi=(2i)^n dV,
$$

l'expression devient

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \overline{\Omega_0(W)} &= (2i\pi)^{-n}(n-1)!\left(\frac{n(2i)^n dV}{(1-<\xi,z>)^n}+\frac{n<\xi,z>(2i)^n dV}{(1-<\xi,z>)^{n+1}}\right. \\
&= \pi^{-n} n! \frac{(1-<\xi,z>)dV+<z,\xi>dV}{(1-<\xi,z>)^{n+1}} \\
&= \pi^{-n} n! \frac{dV}{(1-<\xi,z>)^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_D(z,\xi) &= \star\partial_\xi \overline{\Omega_0(W)} \\
&= \star\left(\frac{n!}{\pi^n}\frac{dV}{(1-<\xi,z>)^{n+1}}\right) \\
&= \frac{n!}{\pi^n}\frac{\star dV}{(1-<\xi,z>)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$K_D(z,\xi) = \frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-<\xi,z>)^{n+1}}, \qquad car \quad \star\, dV = 1.$$

Soit L_q une forme différentielle donnée par

$$L_q = \sum_{\mu=0}^{n-q-2} \gamma_{\mu,q} C_{\mu,q}$$

avec

$$C_{\mu,q} = \sideset{}{'}\sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\le i,j\le n}} \frac{\xi_j z_j d\xi^{ijq} \wedge dz^q}{(1-<\xi,z>)^{\mu+1}\,\left[|\xi-z|^2+r(\xi)r(z)\right]^{n-\mu-1}}$$

et $\gamma_{\mu,q}$ une constante réelle convenablement choisie.
Soit ω_q une forme différentielle donnée par

$$\omega_q = 2^{-q}\omega \sideset{}{'}\sum_{|J|=q} d\bar{\xi}^J \wedge dz^J \tag{8}$$

avec

$$\omega(\xi,z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} log|\xi-z|^2 & si\ n=1 \\ \dfrac{(n-2)!}{2\pi^n}\dfrac{1}{|\xi-z|^{2n-2}} & si\ n>1 \end{cases}$$

la solution fondamentale du laplacien ou encore appelé le noyau de Green.
On pose

$$C_{\mu,q} = \sideset{}{'}\sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\le i,j\le n}} m_{ij} d\xi^{\bar{i}\bar{j}Q} dz^Q$$

où

$$m_{ij} = \xi_i z_j \bar{\phi}^{-(\mu+1)} b^{-(n-\mu-1)}$$

avec

$$\bar{\phi} = (1-<\xi,z>) \quad et \quad b = |\xi-z|^2 + r(\xi)r(z).$$

Posons

$$m_{ijkl} = \frac{\partial^2}{\partial\xi_l \partial\bar{\xi}_k} m_{ij} \quad et \quad p_{ijkl} = \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial\bar{\xi}_k} m_{ij}. \tag{9}$$

Pour démontrer le Lemme principal, on a besoin des résultats suivants :

Lemme 3.3 Pour Q et K fixes, avec $|Q| = q$ et $|K| = q + 2$

$$S_{K,Q} = \sum_{\substack{L \\ i,j,k,l}} \varepsilon^{ijQ}_{lL} \varepsilon^{K}_{kL} m_{ijkl} = 0. \tag{10}$$

Preuve 3.7 On remarque que $\varepsilon^{ijQ}_{lL} \varepsilon^{K}_{kL} \neq 0$, si $|Q \cap K| \geq q - 1$.
Il n'y a donc que deux cas non triviaux à considérer :
Cas A : Si $Q \subset K$, on a comme ensemble $K = \{\alpha, \beta\} \cup Q$
Cas B : Si $Q \cap K = J$ où $|J| = q - 1$, $K = \{\alpha, \beta, \nu\} \cup J$ et $Q = \{\lambda\} \cup J$ où $\lambda \notin \{\alpha, \beta, \nu\}$.

Considérons d'abord le **Cas A**.
Après permutation, on peut supposer que $K = \alpha\beta Q$. Dans la somme (10), on sépare les termes avec $k = l$ de ceux avec $k \neq l$.
Si $k = l$,

$$0 \neq \varepsilon^{ijQ}_{lL} \varepsilon^{\alpha\beta Q}_{lL} = \varepsilon^{\alpha\beta}_{ij}.$$

Pour $l \in K$, L est alors complètement déterminé par l ; ces termes donnent donc

$$\sum_{\substack{l \in K \\ i,j}} \varepsilon^{\alpha\beta}_{ij} m_{ijkl} = \sum_{l \in K} (m_{\alpha\beta ll} - m_{\beta\alpha ll}). \tag{11}$$

Si $k \neq l$,

$$0 \neq \varepsilon^{ijQ}_{lL} \varepsilon^{\alpha\beta Q}_{kL} = -\varepsilon^{l\alpha\beta}_{ijk}.$$

Pour $l \notin K$, L est alors complètement déterminé par i et j ; donc les termes avec $k \neq l$ conduisent à :

$$\sum_{\substack{l \notin K \\ l \neq k \\ i,j}} -\varepsilon^{l\alpha\beta}_{ijk} m_{ijkl} = \sum_{l \notin K} (m_{\alpha l\beta l} + m_{l\beta\alpha l} - m_{l\alpha\beta l} - m_{\beta l\alpha l}). \tag{12}$$

Calculons maintenant m_{ijkl}.
On a :

$$\begin{aligned}
m_{ijkl} &= \frac{\partial^2}{\partial_{\xi_l} \partial_{\bar{\xi}_k}} m_{ij} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_l} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_k} \xi_i z_j \bar{\phi}^{-(\mu+1)} b^{-(n-\mu-1)} \\
&= -(n - \mu - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_l} \Big[\xi_i z_j \Big((\xi_k - z_k) - \xi_k (|z|^2 - 1) \Big) \bar{\phi}^{-(\mu+1)} b^{-(n-\mu-1)-1} \Big] \\
&= (-n + \mu + 1) \frac{\partial}{\partial \xi_l} \Big[\Big(\xi_i z_j \xi_k - \xi_i z_j z_k + \xi_i z_j \xi_k |z|^2 - \xi_i z_j \xi_k \Big) \bar{\phi}^{-(\mu+1)} b^{-(n-\mu)} \Big] \\
&= (-n + \mu + 1) \Big(- \delta_{il} z_j z_k + \delta_{il} z_j \xi_k |z|^2 + \delta_{lk} \xi_i |z|^2 \Big) \bar{\phi}^{-(\mu+1)} b^{-(n-\mu)} \\
&\quad + (-n + \mu + 1)(\mu + 1) \bar{z}_l \Big(- \xi_i z_j z_k + \xi_i z_j \xi_k |z|^2 \Big) \bar{\phi}^{-(\mu+2)} b^{-(n-\mu)} \\
&\quad - (-n + \mu + 1)(n - \mu) \Big(\bar{\xi}_l - \bar{z}_l + \bar{\xi}_l (|z|^2 - 1) \Big) \Big(- \xi_i z_j z_k + \xi_i z_j \xi_k |z|^2 \Big) \bar{\phi}^{-(\mu+2)} b^{-(n-\mu)} \\
&= (n - \mu - 1) \Big(\delta_{il} z_j (z_k - \xi_k |z|^2) - \xi_i z_j \delta_{kl} |z|^2 \Big) \bar{\phi}^{-(\mu+1)} b^{-(n-\mu)}
\end{aligned}$$

$$+(n-\mu-1)(\mu+1)\Big(\bar{z}_l\xi_i z_j z_k - \bar{z}_l\xi_i z_j\xi_k|z|^2\Big)\bar{\phi}^{-(\mu+2)}b^{-(n-\mu)}$$

$$+(n-\mu-1)(n-\mu)\Big(\xi_i z_j(z_k\bar{z}_l - z_k\bar{\xi}_l|z|^2 - \bar{z}_l\xi_k|z|^2 + \xi_k\bar{\xi}_l|z|^4)\Big)\bar{\phi}^{-(\mu+1)}b^{-(n-\mu+1)}.$$

Posons

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{n-\mu-1}{\phi^{\mu+1}b^{n-\mu}} \\ H_2 &= \frac{(\mu+1)(n-\mu-1)}{\phi^{\mu+2}b^{n-\mu}} \\ H_3 &= \frac{(n-\mu)(n-\mu-1)}{\phi^{\mu+1}b^{n-\mu+1}}, \end{aligned} \tag{13}$$

alors

$$\begin{aligned} m_{ijkl} &= H_1\Big[\delta_{il}z_j(z_k - \xi_k|z|^2) - \xi_i z_j\delta_{kl}|z|^2\Big] \\ &\quad +H_2\Big[\bar{z}_l\xi_i z_j z_k - \bar{z}_l\xi_i z_j\xi_k|z|^2\Big] \\ &\quad +H_3\Big[\xi_i z_j(z_k\bar{z}_l - z_k\bar{\xi}_l|z|^2 - \bar{z}_l\xi_k|z|^2 + \xi_k\bar{\xi}_l|z|^4)\Big], \end{aligned} \tag{14}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Pour k=l

$$S_{\alpha\beta Q,Q} = \sum_{l\in K}(m_{\alpha\beta ll} - m_{\beta\alpha ll}) \tag{15}$$

en remplaçant les m_{ijkl} par leurs valeurs de la relation (14) dans la relation (15) et en combinant les termes avec H_1, H_2 resp H_3, et comme ils sont constants par rapport à l, on peut donc poser :

$$S_{\alpha\beta Q,Q} = H_1S_1 + H_2S_2 + H_3S_3.$$

Déterminons les termes S_1, S_2, et S_3 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_l(\delta_{\alpha l}(z_\beta z_l - z_\beta\xi_l|z|^2) - \delta_{ll}\xi_\alpha z_\beta|z|^2 - \delta_{\beta l}(z_\alpha z_l - z_\alpha\xi_l|z|^2) + \delta_{ll}\xi_\beta z_\alpha|z|^2) \\ &= \sum_l(\delta_{\alpha l}(z_\beta z_l - z_\beta\xi_l|z|^2) - \delta_{\beta l}(z_\alpha z_l - z_\alpha\xi_l|z|^2)) + \sum_l(\delta_{ll}\xi_\beta z_\alpha|z|^2 - \delta_{ll}\xi_\alpha z_\beta|z|^2) \\ &= \sum_l(\delta_{\alpha l}(z_\beta z_l - z_\beta\xi_l|z|^2) - \delta_{\beta l}(z_\alpha z_l - z_\alpha\xi_l|z|^2)) + (\xi_\beta z_\alpha|z|^2 - \xi_\alpha z_\beta|z|^2)\sum_l(1). \\ &= (z_\beta z_\alpha - z_\beta\xi_\alpha|z|^2) - (z_\alpha z_\beta - z_\alpha\xi_\beta|z|^2) + n(\xi_\beta z_\alpha|z|^2 - \xi_\alpha z_\beta|z|^2) \\ &= -\xi_\alpha z_\beta|z|^2 + \xi_\beta z_\alpha|z|^2 + n(\xi_\beta z_\alpha|z|^2 - \xi_\alpha z_\beta|z|^2) \\ &= (n+1)(\xi_\beta z_\alpha|z|^2 - \xi_\alpha z_\beta|z|^2) \\ &= -(n+1)(\xi_\alpha z_\beta|z|^2 - \xi_\beta z_\alpha|z|^2). \end{aligned}$$

<u>NB</u> : l parcourt l'ensemble K, comme α et β sont des éléments de K, si l coïncide avec α et avec β alors $\delta_{\alpha l} = \delta_{\beta l} = 1$ et sinon $\delta_{\alpha l} = \delta_{\beta l} = 0$.

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_l(\bar{z}_l\xi_\alpha z_\beta z_l - \bar{z}_l\xi_\alpha z_\beta\xi_l|z|^2 - \bar{z}_l\xi_\beta z_\alpha z_l + \bar{z}_l\xi_\beta z_\alpha\xi_l|z|^2) \\ &= (\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\sum_l(\bar{z}_l z_l - \bar{z}_l\xi_l|z|^2) \\ &= (\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)(|z|^2 - |z|^2\sum_l\bar{z}_l\xi_l) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)(1- <\xi, z>)\\
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\bar{\phi},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \sum_l (\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)(\bar{z}_l z_l - z_l\bar{\xi}_l|z|^2 - \bar{z}_l\xi_l|z|^2 + \bar{\xi}_l\xi_l|z|^4)\\
&= (\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\Big(\sum_l \bar{z}_l z_l - |z|^2\sum_l(z_l\bar{\xi}_l + \bar{z}_l\xi_l) + |z|^4\sum_l \bar{\xi}_l\xi_l\Big)\\
&= (\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\Big(|z|^2 - |z|^2\sum_l(z_l\bar{\xi}_l + \bar{z}_l\xi_l) + |\xi|^2|z|^4\Big)\\
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\Big(1 + |\xi|^2|z|^2 - \sum_l(z_l\bar{\xi}_l + \bar{z}_l\xi_l)\Big)\\
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\Big(1 + |\xi|^2|z|^2 + |\xi - z|^2 - |\xi|^2 - |z|^2\Big)\\
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\Big(|\xi - z|^2 + (|\xi|^2 - 1)(|z|^2 - 1)\Big)\\
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\Big(|\xi - z|^2 + r(\xi)r(z)\Big)\\
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)b.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a :

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha\beta Q,Q} &= -(n+1)|z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)H_1 + |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\bar{\phi}H_2 + |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)bH_3\\
&= |z|^2(\xi_\alpha z_\beta - \xi_\beta z_\alpha)\Big(-(n+1)H_1 + \overline{\phi}H_2 + bH_3\Big).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
\Big(-(n+1)H_1 + \overline{\phi}H_2 + bH_3\Big) &= \Big(-(n+1)\frac{n-\mu-1}{\overline{\phi}^{\mu+1}b^{n-\mu}} + \overline{\phi}\frac{(\mu+1)(n-\mu-1)}{\overline{\phi}^{\mu+2}b^{n-\mu}}\\
&\quad + b\frac{(n-\mu)(n-\mu-1)}{\overline{\phi}^{\mu+1}b^{n-\mu+1}}\Big)\\
&= \Big(\frac{-(n+1)(n-\mu-1)}{\overline{\phi}^{\mu+1}b^{n-\mu}} + \frac{(\mu+1)(n-\mu-1)}{\overline{\phi}^{\mu+1}b^{n-\mu}}\\
&\quad + \frac{(n-\mu)(n-\mu-1)}{\overline{\phi}^{\mu+1}b^{n-\mu}}\Big)\\
&= \Big(-(n+1)(n-\mu-1) + (\mu+1)(n-\mu-1)\\
&\quad + (n-\mu)(n-\mu-1)\Big)\overline{\phi}^{-(\mu+1)}b^{-(n-\mu)}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
S_{\alpha\beta Q,Q} = 0.
$$

Pour $k \neq l$, on a :

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta Q,Q} &= \sum_{\substack{l \notin K \\ l \neq k \\ i,j}} -\varepsilon^{l\alpha\beta}_{ijk} m_{ijkl} \\
&= \sum_{l} (m_{\alpha l \beta l} + m_{l\beta\alpha l} - m_{l\alpha\beta l} - m_{\beta l \alpha l}) \\
&= \sum_{l} (m_{\alpha l \beta l} - m_{l\alpha\beta l}) + \sum_{l} (m_{l\beta\alpha l} - m_{\beta l\alpha l}).
\end{aligned}$$

Ici on a deux sommations presque identiques avec celui du cas $k = l$, par analogie

$$S_{\alpha\beta Q,Q} = 0.$$

Ce qui prouve la relation (10) dans le **cas A**.

Considérons maintenant le **cas B**. Après permutation on peut supposer

$$K = \alpha\beta\nu J, \quad Q = \lambda J \; et \quad \lambda \notin K.$$

Cela implique que

$$\varepsilon^{ij\lambda J}_{lL} \varepsilon^{\alpha\beta\nu J}_{kL} \neq 0$$

seulement pour $l = \lambda$, alors

$$\begin{aligned}
S_{K,Q} &= \sum_{\substack{i,j,k \\ L}} \varepsilon^{ij\lambda J}_{\lambda L} \varepsilon^{\alpha\beta\nu J}_{kL} m_{ijk\lambda} \\
&= \sum_{\substack{i,j \neq \lambda \\ k \neq \lambda}} \varepsilon^{\alpha\beta\nu}_{kij} m_{ijk\lambda}. \\
&= \sum_{\lambda} (m_{\beta\nu\alpha\lambda} - m_{\nu\beta\alpha\lambda} + m_{\nu\alpha\beta\lambda} - m_{\alpha\nu\beta\lambda} + m_{\alpha\beta\nu\lambda} - m_{\beta\alpha\nu\lambda}). \qquad (17)
\end{aligned}$$

Calculons $m_{ijk\lambda}$. D'après la relation (14) on voit que pour $i, j, k \neq \lambda$

$$\begin{aligned}
m_{ijk\lambda} &= H_1\Big[\delta_{i\lambda} z_j (z_k - \xi_k |z|^2) - \xi_i z_j \delta_{k\lambda} |z|^2\Big] + H_2\Big[\bar{z}_\lambda \xi_i z_j z_k - \bar{z}_\lambda \xi_i z_j \xi_k |z|^2\Big] \\
&\quad + H_3\Big[\xi_i z_j (z_k \bar{z}_\lambda - z_k \bar{\xi}_\lambda |z|^2 - \bar{z}_\lambda \xi_k |z|^2 + \xi_k \bar{\xi}_\lambda |z|^4)\Big] \\
&= H_2 \bar{z}_\lambda \xi_i z_j z_k - H_2 \bar{z}_\lambda \xi_i z_j \xi_k |z|^2 + H_3 \xi_i z_j z_k \bar{z}_\lambda - H_3 \xi_i z_j z_k \bar{\xi}_\lambda |z|^2 \\
&\quad - H_3 \xi_i z_j \bar{z}_\lambda \xi_k |z|^2 + H_3 \xi_i z_j \xi_k \bar{\xi}_\lambda |z|^4 \\
&= z_j z_k (H_2 \bar{z}_\lambda \xi_i + H_3 \xi_i \bar{z}_\lambda - H_3 \xi_i \bar{\xi}_\lambda |z|^2) + \xi_i \xi_k (H_3 z_j \bar{\xi}_\lambda |z|^4 - H_2 \bar{z}_\lambda z_j |z|^2 - H_3 z_j \bar{z}_\lambda |z|^2) \\
&= z_j z_k f_{\lambda i} + \xi_i \xi_k g_{\lambda j}, \qquad (18)
\end{aligned}$$

avec

$$f_{\lambda i} = H_2 \bar{z}_\lambda \xi_i + H_3 \xi_i \bar{z}_\lambda - H_3 \xi_i \bar{\xi}_\lambda |z|^2 \; et \; g_{\lambda j} = H_3 z_j \bar{\xi}_\lambda |z|^4 - H_2 \bar{z}_\lambda z_j |z|^2 - H_3 z_j \bar{z}_\lambda |z|^2.$$

On a, $f_{\lambda i}$ est indépendante de j et de k. Et aussi $g_{\lambda j}$ est indépendante de i et de k. Donc la relation (18) montre que $m_{ijk\lambda}$ est la somme d'un terme symétrique entre j, k et d'un terme

symétrique entre i, k.
Ainsi de la relation (17) devient :

$$\begin{aligned} S_{K,Q} &= \sum_{\lambda}\Big((z_\nu z_\alpha f_{\lambda\beta}+\xi_\alpha\xi_\beta g_{\lambda\nu})-(z_\beta z_\alpha f_{\lambda\nu}+\xi_\nu\xi_\alpha g_{\lambda\beta})+(z_\alpha z_\beta f_{\lambda\nu}+\xi_\nu\xi_\beta g_{\lambda\alpha}) \\ &\quad -(z_\nu z_\beta f_{\lambda\alpha}+\xi_\alpha\xi_\beta g_{\lambda\nu})+(z_\beta z_\nu f_{\lambda\alpha}+\xi_\alpha\xi_\nu g_{\lambda\beta})-(z_\alpha z_\nu f_{\lambda\beta}+\xi_\beta\xi_\nu g_{\lambda\alpha})\Big) \\ &= \sum_{\lambda}\Big(z_\nu z_\alpha f_{\lambda\beta}+\xi_\alpha\xi_\beta g_{\lambda\nu}-z_\beta z_\alpha f_{\lambda\nu}-\xi_\nu\xi_\alpha g_{\lambda\beta}+z_\alpha z_\beta f_{\lambda\nu}+\xi_\nu\xi_\beta g_{\lambda\alpha} \\ &\quad -z_\nu z_\beta f_{\lambda\alpha}-\xi_\alpha\xi_\beta g_{\lambda\nu}+z_\beta z_\nu f_{\lambda\alpha}+\xi_\alpha\xi_\nu g_{\lambda\beta}-z_\alpha z_\nu f_{\lambda\beta}-\xi_\beta\xi_\nu g_{\lambda\alpha}\Big) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Ceci achève la preuve du lemme (3.3). ■

Lemme 3.4 Pour L et K fixes, avec $|L| = q + 1$ et $|K| = q + 3$

$$R_{K,L} = \sum_{\substack{Q \\ i,j,k,Q}} \varepsilon^K_{kijQ}\varepsilon^L_{lQ}p_{ijkl} = 0. \tag{20}$$

Preuve 3.8 En faisant le changement de variable L=Q, on voit que le lemme (3.4) est identique au lemme (3.3) mais avec l'augmentation des longueurs des ensembles Q et K. Ainsi la preuve est similaire à celui du lemme (3.3).

Définition 3.4 *[8]* L'adjoint formel de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar\partial$ pour les formes différentielles de classe C^1 à support compact noté ϑ est défini par

$$\vartheta : L^2_{0,q}(\Omega) \to L^2_{0,q-1}(\Omega)$$

et vérifie

$$(\bar\partial f, g) = (f, \vartheta g).$$

On a :

$$\vartheta(\sum_A f_A d\bar z^A) = -2\sum_{A,k}\varepsilon^A_{kK}\frac{\partial f_A}{\partial z_k}d\bar z^K.$$

Lemme 3.5 *[8]* Soient $\xi, z \in \Omega$ et ω_q une double forme différentielle définie par la relation (8), pour $n > q \geq 1$ alors :

$$\vartheta_\xi\omega_q = \partial_z\omega_{q-1}.$$

Preuve 3.9 Soit

$$\omega_q(\xi,z) = 2^{-q}\omega\sum_{|J|=q} d\bar\xi^J\wedge dz^J = 2^{-q}\sum_{|J|=q}\frac{(n-2)!}{2\pi^n}\frac{1}{|\xi-z|^{2n-2}}d\bar\xi^J\wedge dz^J.$$

En lui appliquant l'adjoint formel, on a :

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi\omega_q(\xi,z) &= 2^{-q}\frac{(n-2)!}{2\pi^n}\vartheta_\xi(\sum_{|J|=q}\frac{1}{|\xi-z|^{2n-2}}d\bar\xi^J\wedge dz^J) \\ &= 2^{-q}\frac{(n-2)!}{2\pi^n}(-2)\sum_{|J|=q}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\frac{1}{|\xi-z|^{2n-2}})\varepsilon^J_{jK}d\bar\xi^K\wedge dz^J \\ &= 2^{-q}\frac{(n-2)!}{2\pi^n}(-2)\sum_{|J|=q}\sum_{1\leq k\leq n}\varepsilon^J_{jK}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(|\xi-z|^2(|\xi-z|^2)^{-n})d\bar\xi^K\wedge dz^J \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{-q}\frac{(n-2)!}{\pi^n}\sum_{|J|=q}\sum_{1\leq k\leq n}\varepsilon^J_{jK}\Big(-(\bar{\xi_k}-\bar{z_k})(|\xi-z|^2)^{-n} \\
&\quad +n((\bar{\xi_k}-\bar{z_k})|\xi-z|^2(|\xi-z|^2)^{-n-1}\Big)d\bar{\xi}^K\wedge dz^J \\
&= 2^{-q}\frac{(n-2)!}{\pi^n}\sum_{|J|=q}\sum_{1\leq k\leq n}\varepsilon^J_{jK}\Big((n-1)(\bar{\xi_k}-\bar{z_k})|\xi-z|^{-2n}\Big)d\bar{\xi}^K\wedge dz^J \\
&= 2^{-q}\frac{(n-1)!}{\pi^n}\sum_{|J|=q}\sum_{1\leq k\leq n}\varepsilon^J_{jK}\Big((\bar{\xi_k}-\bar{z_k})|\xi-z|^{-2n}\Big)d\bar{\xi}^K\wedge dz^J.
\end{aligned}
$$

Par analogie à ω_q, on connaît la formule de ω_{q-1}, ainsi

$$
\begin{aligned}
\partial_z\omega_{q-1}(\xi,z) &= 2^{-q+1}\frac{(n-2)!}{2\pi^n}\partial_z\sum_{|J|=q-1}\frac{1}{|\xi-z|^{2n-2}}d\bar{\xi}^J\wedge dz^J \\
&= 2^{-q+1}\frac{(n-2)!}{2\pi^n}\sum_{|J|=q-1}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\partial}{\partial_{z_k}}(|\xi-z|^2(|\xi-z|^2)^{-n})dz_K\wedge d\bar{\xi}^J\wedge dz^J \\
&= 2^{-q}\frac{(n-2)!}{\pi^n}\sum_{|J|=q}\sum_{1\leq k\leq n}\varepsilon^J_{jK}\Big((n-1)(\bar{\xi_k}-\bar{z_k})|\xi-z|^{-2n}\Big)d\bar{\xi}^K\wedge dz^J \\
&= 2^{-q}\frac{(n-1)!}{\pi^n}\sum_{|J|=q}\sum_{1\leq k\leq n}\varepsilon^J_{jK}\Big((\bar{\xi_k}-\bar{z_k})|\xi-z|^{-2n}\Big)d\bar{\xi}^K\wedge dz^J.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi l'égalité du lemme (3.5). ■

Nous pouvons ainsi énoncer le lemme principal.

Lemme 3.6 (**principal**)

$$\bar{\partial}_\xi(\vartheta_\xi L_q)=\bar{\partial}_\xi(\partial_z L_q)=0$$

sur $D\times D$ pour tout q.

Preuve 3.10 Rappelons que

$$L_q=\sum_{\mu=0}^{n-q-2}\gamma_{\mu,q}C_{\mu,q},$$

avec $\gamma_{\mu,q}$ une constante réelle convenablement choisie.
La démonstration du lemme principal revient à montrer que

$$\bar{\partial}_\xi(\vartheta_\xi C_{\mu,q})=\bar{\partial}_\xi(\partial_z C_{\mu,q})=0.$$

En fixant μ et q dans la suite, on écrit

$$C_{\mu,q}=\sum_{\substack{|Q|=q\\1\leq i,j\leq n}} m_{ij}d\bar{\xi}^{ijQ}dz^Q$$

où

$$m_{ij}=\xi_i z_j\bar{\phi}^{-(\mu+1)}b^{-(n-\mu-1)}.$$

Calculons alors $\bar{\partial}_\xi(\vartheta_\xi C_{\mu,q})$ et $\bar{\partial}_\xi(\partial_z C_{\mu,q})$.

$$\bar{\partial}_\xi\vartheta_\xi C_{\mu,q} = \bar{\partial}_\xi\vartheta_\xi\Big(\sum_{\substack{|Q|=q\\1\leq i,j\leq n}} m_{ij}d\bar{\xi}^{ijQ}dz^Q\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\partial}_\xi \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} (-2\sum_l \varepsilon_{lL}^{ijQ} \frac{\partial}{\partial \xi_l} m_{ij} d\bar{\xi}^L \wedge dz^Q) \\
&= -2 \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_{l,k} \varepsilon_{lL}^{ijQ} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l} m_{ij} d\bar{\xi}^k \wedge d\bar{\xi}^L \wedge dz^Q \\
&= -2 \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_{l,k} \varepsilon_{lL}^{ijQ} \varepsilon_{kK}^{L} \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \bar{\xi}_k} m_{ij} d\bar{\xi}^K \wedge dz^Q
\end{aligned}$$

d'après la relation (9)

$$\bar{\partial}_\xi \vartheta_\xi C_{\mu,q} = -2 \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_{l,k} \varepsilon_{lL}^{ijQ} \varepsilon_{kL}^{K} m_{ijkl} d\bar{\xi}^K \wedge dz^Q. \tag{21}$$

Et

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\xi \partial_z C_{\mu,q} &= \bar{\partial}_\xi \partial_z \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} m_{ij} d\bar{\xi}^{ijQ} dz^Q \\
&= \bar{\partial}_\xi \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_l \partial_{z_l} m_{ij} \wedge d\bar{\xi}^{ijQ} dz^Q \\
&= \bar{\partial}_\xi \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_{l,k} (\frac{\partial}{\partial z_l} m_{ij} dz^l \wedge d\bar{\xi}^{ijQ} \wedge dz^L) \\
&= \bar{\partial}_\xi \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_l (\varepsilon_{lQ}^{L} \frac{\partial}{\partial z_l} m_{ij} d\bar{\xi}^{ijQ} \wedge dz^L) \\
&= \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_{l,k} \varepsilon_{lQ}^{L} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_k} \frac{\partial}{\partial z_l} m_{ij} d\bar{\xi}^k \wedge d\bar{\xi}^{ijQ} \wedge dz^L \\
&= \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_{l,k} \varepsilon_{kijQ}^{K} \varepsilon_{lL}^{Q} \partial_{\bar{\xi}} \partial_z m_{ij} d\bar{\xi}^K \wedge dz^L.
\end{aligned}$$

D'après la relation (9)

$$\bar{\partial}_\xi \partial_z C_{\mu,q} = \sum_{\substack{|Q|=q \\ 1\leq i,j\leq n}} \sum_{l,k} \varepsilon_{kijQ}^{K} \varepsilon_{lQ}^{L} p_{ijkl} d\bar{\xi}^K \wedge dz^L. \tag{22}$$

Les sommes sont prises sur tous les indices strictement croissants $l, k \subset (1, \cdots, n)$ avec $|Q| = q$, $|L| = q+1$ et $|K| = q+2$ dans (21), respectivement $|K| = q+3$ dans (22). Et i,j sont entre 1 et n.

Ainsi $\bar{\partial}_\xi \vartheta_\xi C_{\mu,q} = 0$ et $\bar{\partial}_\xi \partial_z C_{\mu,q} = 0$, respectivement d'après le lemme (3.3) et le lemme (3.4). ■

Définition 3.5 *[8]* Un noyau $\Gamma(\xi, z)$ sur $\bar{D} \times \bar{D}$ est dit admissible simple de classe C^1 si Γ est de classe C^1 sur $\bar{D} \times \bar{D} - \{(\xi, z) : \xi = z \in bD\}$, et si pour chaque $p \in bD$, il existe un voisinage U de p tel que Γ ait une représentation

$$\Gamma = \frac{\varepsilon_j r(\xi)^{s_1} r(z)^{s_2}}{b^{t_0} \phi^{t_1} \bar{\phi}^{t_2} \phi^{*t_3} \bar{\phi}^{*t_4}} \qquad sur\ (U \times U) \cap (\bar{D} \times \bar{D}) \tag{23}$$

pour certains entiers naturels $j, s_1,\ s_2,\ t_0, \cdots, t_4$. Si $t_0 = 0$, on dit que Γ est pur.

Définition 3.6 *[8]* Un noyau admissible simple Γ est d'ordre λ, si pour tout $p \in bD$ il a une représentation (23) avec les propriétés suivantes :

1. *si* $m = \sum_{j=1}^{4} t_j - s_1 - s_2 \geq 0$, *alors*
$$2n + min(2, m) + j - 2(t_0 + m) \geq \lambda.$$
2. *si* $m < 0$, *alors*
$$2n + j + |m| - 2t_0 \geq \lambda.$$

Remarque 3.4 Un noyau Γ est dit admissible s'il peut s'écrire sous la forme d'une somme finie de noyaux admissibles simples. Γ est de classe C^1 s'il est une somme de termes de classe C^1. Une forme double est admissible si tous ses coefficients sont admissibles.

Théorème 3.5 *[8]*
i) Si $f \in C^1(\bar{D})$, *alors*

$$f = (\bar{\partial} f, \vartheta_\xi L_0 - {}^*\overline{\Omega_0(W)} + \bar{\partial}\omega_0) + (f, K_D);$$

ii) Si $q \geq 1$ *et* $f \in C^1_{0,q}(\bar{D}) \cap Dom\bar{\partial}^*$, *alors*

$$f = (\bar{\partial} f, \vartheta_\xi L_q - \partial_z L_{q-1} + \bar{\partial}_\xi \omega_q) + (\bar{\partial}^* f, \bar{\vartheta}_\xi L^*_{q-1} + \vartheta_z \omega_{q-1}).$$

Définition 3.7 L'opérateur intégral

$$T_q : L^2_{0,q+1}(D) \longrightarrow L^2_{0,q}(D)$$

est défini par :

$$T_n = 0,$$

$$T_0 f = \left(f, \vartheta_\xi L_0 - {}^*\overline{\Omega_0(W)} + \bar{\partial}_\xi \omega_0\right)_D \tag{24}$$

et pour $1 \leq q < n$, par

$$T_q f = \left(f, \vartheta_\xi L_q - \partial_z L_{q-1} + \bar{\partial}_\xi \omega_q\right)_D. \tag{25}$$

Corollaire 3.1 *(cf [8])* Soit $T_q : L^2_{0,q+1}(D) \longrightarrow L^2_{0,q}(D)$ un opérateur linéaire défini par

$$T_q f(z) = (f, \Gamma(., z))_D$$

où Γ est une forme double sur $D \times D$, dont tous les coefficients sont des noyaux admissibles de classe C^1. Alors

1. si Γ est pur, T_q se prolonge en un opérateur borné,
2. si ordre de $\Gamma \geq 1$, T_q est borné en norme L^2, et lisse d'ordre $\frac{1}{2}$ dans le sens suivant :

$$|(T_q f)(z) - (T_q f)(z')| = c|f|_{L^\infty} |z - z'|^{\frac{1}{2}}, \qquad z, z' \in D.$$

Le corollaire (3.1) montre que le noyau de T_q est composé de termes admissibles d'ordre $\geq$1, et de $\bar{\partial}_\xi \omega_q$.

D'après le théorème (3.5) et la relation (24) respectivement (25), on a la formule de représentation suivante, pour $f \in C^1_{0,q}(\bar{D}) \cap Dom\bar{\partial}^*$
si $q = 0$

$$\begin{aligned} f &= (\bar{\partial} f, \vartheta_\xi L_0 - *\overline{\Omega_0(W)} + \bar{\partial}_\xi \omega_0) + (f, K_D) \\ f &= T_0 \bar{\partial} f + (f, K_D) \\ f - (f, K_D) &= T_0 \bar{\partial} f; \end{aligned} \tag{26}$$

et si $1 \leq q$

$$\begin{aligned} f &= (\bar{\partial} f, \vartheta_\xi L_q - \partial_z L_{q-1} + \bar{\partial}_\xi \omega_q) + (\bar{\partial}^* f, \bar{\vartheta}_\xi L^*{}_{q-1} + \vartheta_z \omega_{q-1}) \\ &= T_q \bar{\partial} f + (\bar{\partial}^* f, \bar{\vartheta}_\xi L^*{}_{q-1} + \vartheta_z \omega_{q-1}). \end{aligned} \tag{27}$$

Nous voulons maintenant mettre la relation (27) sous la forme plus symétrique, par analogie avec la formule générale de la relation (4).

Lemme 3.7 Si $q \geq 1$ et $f \in C^1_{0,q}(\bar{D}) \cap Dom\bar{\partial}^*$, alors

$$f = T_q \bar{\partial} f + T^*_{q-1} \bar{\partial}^* f. \tag{28}$$

Preuve 3.11 Soit T^*_{q-1} l'adjoint de T_{q-1}. T^*_{q-1} est un opérateur intégral et son noyau est donné par :

$$\bar{\vartheta}_\xi L^*_0 - *_z \overline{\Omega^*_0(W)} + \partial_z \omega_0, \qquad si\ q = 1$$

et

$$\bar{\vartheta}_z L^*_{q-1} - \bar{\vartheta}_\xi L^*_{q-2} + \partial_z \omega_{q-1}, \qquad si\ q \geq 2.$$

De la relation (6), on a

$$\overline{\Omega^*_0(W)} = (2\pi i)^{-n} \frac{(\partial \bar{\partial} r) \wedge \bar{\partial} r}{(1 - <\xi, z>)^n},$$

est holomorphe en ξ, par conséquent si $f \in Dom\bar{\partial}^*$ alors

$$(\bar{\partial}^* f, *_z \overline{\Omega^*_0(W)}) = (f, \bar{\partial}_\xi *_z \overline{\Omega^*_0(W)}) = 0,$$

de plus

$$(\bar{\partial}^* f, \bar{\partial} L^*_{q-2}) = (f, \bar{\partial}_\xi \bar{\partial}_\xi L^*_{q-2}) = 0.$$

T^*_{q-1} est défini par :

$$T^*_{q-1} f = (f, \vartheta_z L^*_{q-1} + \partial_\xi \omega_{q-1}),$$

ainsi

$$T^*_{q-1} \bar{\partial}^* f = (\bar{\partial}^* f, \vartheta_z L^*_{q-1} + \partial_\xi \omega_{q-1}),$$

d'après le lemme (3.5) $\partial_z \omega_{q-1} = \vartheta_\xi \omega_q$

$$T^*_{q-1} \bar{\partial}^* f = (\bar{\partial}^* f, \vartheta_z L^*_{q-1} + \vartheta_\xi \omega_q). \tag{29}$$

D'après les relations (25) et (27), on a :

$$\begin{aligned} f &= T_q \bar{\partial} f + (\bar{\partial}^* f, \bar{\vartheta}_\xi L^*{}_{q-1} + \vartheta_\xi \omega_q) \\ &= T_q \bar{\partial} f + T^*_{q-1} \bar{\partial}^* f; \end{aligned} \tag{30}$$

d'où l'égalité (28). ■

Comme dans un domaine pseudoconvexe la projection orthogonale du laplacien est une application nulle ; en comparant les relations (4) et (28), on a $T_q = S_q$, et d'après la relation (28), $T_q = \bar{\partial}^* N$ sur l'image $R(\bar{\partial})$. En effet, en remplaçant f par $\bar{\partial}^* N \bar{\partial} f$ dans la relation (30), on a :

$$
\begin{aligned}
\bar{\partial}^* N \bar{\partial} f &= T_q \bar{\partial}(\bar{\partial}^* N \bar{\partial} f) + T_{q-1}^* \bar{\partial}^* (\bar{\partial}^* N \bar{\partial} f) \\
&= T_q(\bar{\partial}\bar{\partial}^* N \bar{\partial} f) + T_{q-1}^* (\bar{\partial}^* \bar{\partial}^* N \bar{\partial} f) \\
&= T_q(\bar{\partial}\bar{\partial}^* N \bar{\partial} f) \qquad car \quad \bar{\partial}^* \bar{\partial}^* = 0 \\
&= T_q(\bar{\partial}\bar{\partial}^* N \bar{\partial} f) + T_q(\bar{\partial}^* \bar{\partial} N \bar{\partial} f) - T_q(\bar{\partial}^* \bar{\partial} N \bar{\partial} f) \\
&= T_q((\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \bar{\partial}) N \bar{\partial} f) - T_q(\bar{\partial}^* N \bar{\partial} \bar{\partial} f) \\
&= T_q(\Box N \bar{\partial} f) \qquad car \quad \bar{\partial}\bar{\partial} = 0 \\
&= T_q \bar{\partial} f.
\end{aligned}
$$

On obtient l'égalité sur R($\bar{\partial}$).
Le cas général est de montrer l'égalité sur l'espace L^2. Le résultat est le suivant :

Théorème 3.6 L'opérateur $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ correspond avec l'opérateur intégral T_q, défini par les relations (24), resp (25) sur tout $L^2_{0,q+1}(D)$.

Preuve 3.12 D'après [6], $L^2_{0,q+1}(D) = R(\bar{\partial}) \oplus R(\bar{\partial}^*)$. Puisque $T_q = \bar{\partial}^* N_{q+1}$ sur $R(\bar{\partial})$, il suffit de prouver que $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ est nul sur $R(\bar{\partial}^*)$, c'est-à-dire

$$T_q \bar{\partial}^* f = \bar{\partial}^* N \bar{\partial}^* f = 0. \tag{31}$$

Pour $f \in L^2_{0,q+2}(D) \cap Dom(\bar{\partial}^*)$

$$
\begin{aligned}
T_0 \bar{\partial}^* f &= (\bar{\partial}^* f, \vartheta_\xi L_0 - *\overline{\Omega_0(W)} + \bar{\partial}_\xi \omega_0) \\
&= (\bar{\partial}^* f, \vartheta_\xi L_0) - (\bar{\partial}^* f, *\overline{\Omega_0(W)}) + (\bar{\partial}^* f, \bar{\partial}_\xi \omega_0))
\end{aligned}
$$

et pour $q \geq 1$

$$
\begin{aligned}
T_q \bar{\partial}^* f &= (\bar{\partial}^* f, \vartheta_\xi L_q - \partial_z L_{q-1} + \bar{\partial}_\xi \omega_q) \\
&= (\bar{\partial}^* f, \vartheta_\xi L_q) - (\bar{\partial}^* f, \partial_z L_{q-1}) + (\bar{\partial}^* f, \bar{\partial}_\xi \omega_q).
\end{aligned}
$$

On sait que

$$(\bar{\partial}^* f, \bar{\partial}_\xi \omega_q) = (\bar{\partial}^* \bar{\partial}^* f, \omega_q) = 0;$$

et puisque $*\overline{\Omega_0(W)}$ est holomorphe en ξ, on a $(\bar{\partial}^* f, *\overline{\Omega_0(W)}) = 0$ au cas où $q = 0$. Une intégration par partie et le Lemme principal (3.6) implique que :

$$(\bar{\partial}^* f, \vartheta_\xi L_q) = (\bar{\partial}^* f, \partial_z L_{q-1}) = 0.$$

Ainsi T_q est nul sur $R(\bar{\partial}^*)$ pour tout q.
Comme $L^2_{0,q+1}(D)$ est la somme directe de $R(\bar{\partial})$ et $R(\bar{\partial}^*)$, donc $T_q = \bar{\partial}^* N_{q+1}$ sur tout $L^2_{0,q+1}(D)$.
■

Ainsi de la relation (5), nous avons la formule explicite de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

4 Conclusion

Ce travail porte sur un article de Michael RANGE intitulé **"The $\bar{\partial}$-Neumann operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$"**. Après avoir énoncé quelques notions préliminaires, nous avons pu à travers le Théorème (1.1), donner une expression explicite de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann en fonction de l'opérateur solution canonique et ses propriétés de régularités sur un domaine pseudoconvexe relativement compact à bord lisse d'une variété hermitienne. Et à travers le Théorème (1.2), en déduire la formule de N_q sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

Références

[1] H. Brezis : Analyse fonctionnelle Theorie et application. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paolo 1987.

[2] S.C. Chen, M.C. Shaw : Partial differential equation in several complex variables, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, International Press, Boston, MA 2001.

[3] J.P.Demailly : Complex analytic and diffentiel geometry, Intitut Fourier (Grenoble I), june 9,2007.

[4] F.R. Harvey, J. Polking : The $\bar{\partial}$-Neumann solution to the in homogeneous Cauchy-Riemann équation the ball in $\mathbb{C}^n$. Trans. Am. Math. Soc. (to appear).

[5] J.J. Kohn, D.C. Spencer : Complex Neumann problems. Ann.Math-66,89-(1957)

[6] J.J. Kohn : Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds.I.Ann.Math.78, $112-148$ (1963). II. Ann.Math. 79,$450-472$ (1964).

[7] C. Laurent-Thiébaut : Théories des fonctions de plusieurs variables. Inter Edition/CNRS Edition (1997)

[8] I. Lieb, R.M. Range : On integral represetations and a priori liepschitz estimates for the canonical solution of $\bar{\partial}$. Ann. $265, 221-251$(1983).

[9] B.Mauray : Théorie spectrale Décembre 2004. http ://www.math.jussieu.fr/ maurey/ts012/poly/index.html.

[10] D.H. Phong : On integral reppresantions for the operator. Porc. N. AS. USA $76.1554-1558$(1976).

[11] R.M. Range : Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, F.W. Gehring P.R. Halmos (Managing Editor).

[12] R.M. Range : The $\bar{\partial}$-Neumann operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Ann. $449-456$(1984)

[13] N.K. Stanton : The solution of the $\bar{\partial}-$Neumann probleme in a strictly pseudoconvex Siegel domain. Invent. Math. 65, $137-174$(1981).

[14] V. Trénoguine : Analyse Fonctionnelle. Éditions Mir. Moscou, 1985.

[15] V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Sobolev : Problèmes et exercices d'analyse Fonctionnelle. Éditions Mir, 1987.

[16] S.K. Vassiliadou : The $\bar{\partial}$-Neumann problem on certain piecewise smooth domains in $\mathbb{C}^n$, Complex Var, 46 (2001) $123-141$.