UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine :	Sciences et Technologies
Mention :	Mathématiques et Applications
Spécialité :	Mathématiques Pures
Option :	Analyse et géométrie complexe

Thème: Compacité du problème du $\bar{\partial}$-Neumann sur les domaines convexes.

Présenté par : Malick FAYE

Sous la direction de : Dr Souhaibou SAMBOU & Dr Eramane BODIAN

Sous la supervision de : Pr Marie Salomon SAMBOU

Soutenu publiquement le 12 Mai 2023 devant le jury ci après :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Mouhamadou Samsidy GOUDIABY	Professeur Assimilé	Président	UASZ
Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Superviseur	UASZ
Mamadou GUEYE	Maitre de Conférences Assimilé	Examinateur	UASZ
Mansour SANE	Maitre de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Mamadou Eramane BODIAN	Maitre de Conférences Titulaire	Encadreur	UASZ
Souhaibou SAMBOU	Chercheur	Encadreur	UASZ

Année universitaire : 2021−2022

Table des matières

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers le **Tout-Puissant**, pour m'avoir guidé tout au long de mon parcours scolaire et universitaire et pour m'avoir donné la force et la persévérance nécessaires à l'accomplissement de ce travail de recherche.

Je voudrais également exprimer ma reconnaissance envers mes encadreurs, Dr **Souhaibou SAMBOU** et Dr **Mamadou Eramane BODIAN**, pour leur soutien, leur patience et leur expertise. Vos conseils précieux ont été essentiels pour la réussite de mon mémoire de Master. Je tiens à remercier très sincèrement le Professeur **Marie Salomon SAMBOU** pour avoir accepté de superviser ce travail.

Je tiens également à remercier le Professeur **Mouhamadou Samsidy GOUDIABY**, le Docteur **Mamadou GUEYE** et le Docteur **Mansour SANÉ** pour avoir accepté de participer au jury de la soutenance. Je veux aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques.

J'exprime aussi ma reconnaissance envers mes professeurs de mathématiques du moyen et du secondaire, **M. Amadou SARR**, **M. DRAME** et **M. Daouda SARR** ; merci d'avoir cultivé en moi l'amour des mathématiques. Vos enseignements ont eu un impact majeur sur ma vie universitaire.

Mes remerciements s'adressent également à mes camarades de géométrie complexe, **Christ Jésus Basse**, **Abdourahmane DIATTA** et **Marie FAYE**, et aussi à mes autres camarades de la M2, en particulier **Abdoulaye DIOUF**, **Ibrahima TRAORE**, **Thierno DIALLO**, **Fatou DIEME**, **Bamba SECK**, **M. Papa Ali CISSE** et **M. Mouhamed Fadel AIDARA**. Votre présence et votre soutien ont été précieux tout au long de ce périple, et je suis fier d'avoir partagé cette expérience avec vous. Merci d'avoir été là pour moi, pour les encouragements, les échanges et les moments de camaraderie. Je vous souhaite à tous le meilleur pour vos projets futurs et j'ai la conviction que vous réussirez dans tout ce que vous entreprendrez.

Je suis convaincu que cette expérience universitaire restera gravée dans ma mémoire, et je suis reconnaissant envers tous ceux qui ont contribué à sa réussite.

DÉDICACES

Ce travail est dédié aux personnes de bonne foi qui ont toujours cru en moi et qui m'ont toujours accompagné dans les prières et les bénédictions. Je dédie donc ce mémoire :

- À mon papa et ami **Doudou Samba Faye** qui m'a élevé et a cultivé en moi le sens du respect de la dignité de l'honneur de l'intégrité et de la responsabilité. Je vous souhaite une longue vie pleine de bonheur et de réussite.

- À ma bien aimée mère **Fatou Camara** qui m'a toujours soutenu et encouragé. Si nous sommes parvenus à ce niveau, c'est grâce à vous. Longue vie à vous aussi.

- À mes frères et sœurs, **Aissatou Suzanne**, **Binta**, **Samba**, **Ibrahima**, **Semou Madior** ainsi qu'à leurs petites familles respectives, sans oublier **Fatou Diouf**, **Mamadou Diouf**, **Diogoye Sarr**, **Fatou Diarra Sakho**, **Chérif Sène**, **Cheikh Tidiane Ndiaye**, **Mariama Sarr** et **Diatou Diop**. Merci pour votre soutien constant et vos encouragements.

- À **Mame Baba** et sa famille (mention spéciale à l'oncle **Massa Mbaye**). Votre soutien et votre amour on été une source de motivation pour moi.

- À ma tante **Bintou**, **Tonton Touré** et toute leur famille.

- À **Tonton Balla** et sa famille.

- À mes grandes sœurs, **Siga Fall Diouf** et **Khady Gueye** ainsi qu'à **Babacar Faye**, **Marième Gueye** et leurs familles. Merci pour votre soutien inconditionnel et votre amour.

- À mes "bradaframanadamada" **Alioune Badara Wade**, **Lamine Mané**, **Mouhamed Anta Gaye**, **Saliou Touré**, **Oumar Diop**, **Malang Badiane**, **Seydina Mouhamed Mbaye** et **Assane Sarr**.

- À mes camarades de la TS1, en particulier **Wagane Ndour**, **Célestin Diatta** et **Sambaré Diop**, pour leur esprit de fraternité.

Résumé

Ce travail sur l'œuvre de **Siqi FU** et **Emil J. STRAUBE** a pour principal objectif d'étudier la compacité du problème du $\bar{\partial}$-Neumann sur les domaines convexes. Il se base sur l'absence de variété affine ou d'ensemble analytique irréductible au bord avec des dimensions appropriées et aussi sur l'existence d'un opérateur solution compact pour le $\bar{\partial}$ sur les $(0, q)$-formes différentielles.

Introduction

Le problème du $\bar{\partial}$-Neumann revêt une importance capitale dans la théorie de l'analyse complexe de plusieurs variables. Sa compacité est une propriété basique avec pas mal de conséquences utiles. Dans le cas des domaines à bord lisse, elle implique la régularité globale du problème $\bar{\partial}$-Neumann. La théorie de Fredholm pour les opérateurs de Toeplitz est aussi une conséquence directe de cette compacité. Ainsi Catlin [4] a montré la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann pour les domaines à bord lisse pour lesquels le bord satisfait la propriété P_q définie en (2.3).
Il sera question alors dans ce mémoire d'étudier la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann dans les domaines convexes bornés. Pour l'obtention de cette compacité, l'accent sera surtout mis sur l'absence au bord de variétés affines ou analytiques avec les dimensions appropriées.
Pour ce faire nous aurons pour support le théorème principal suivant :

Théorème 1

Soient Ω un domaine convexe de $\mathbb{C}^n$ et $1 \leq q \leq$ n. Il y a équivalence entre :

1. Il existe un opérateur solution compact pour le $\bar{\partial}$ sur les $(0, q)$-formes différentielles.
2. Le bord de Ω ne contient pas de variété affine de dimension plus grande ou égale à q.
3. Le bord de Ω ne contient pas de ensemble analytique irréductible de dimension plus grande ou égale à q.
4. L'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann N_q est compact.

Ceci étant, en premier lieu, nous allons montrer que (4) $\Rightarrow$ (1) en utilisant l'écriture de N_q sous la forme

$$N_q = (\bar{\partial}^* N_q)^* (\bar{\partial}^* N_q) + (\bar{\partial}^* N_{q+1})^* (\bar{\partial}^* N_{q+1}). \tag{1}$$

Ensuite pour montrer l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) nous allons utiliser les notions d'hyperplan de support et d'enveloppe convexe.
Pour (2) $\Rightarrow$ (4) on va définir les ensembles et fonctions à pics, se servir du théorème des ensembles pics de Glicksberg [10] et de la proposition suivante qui permettra de faire le rapport entre l'absence de variété affine au bord et la propriété de Catlin P_q qui, implique la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann.

Proposition 0.1 Soient X un sous ensemble compact convexe, $z_0 \in X$ et $1 \leq q \leq n$.
Alors il existe un sous ensemble affine L de dimension inférieure ou égale à $q-1$ tel que $X \cap L$ soit un ensemble à pic si et seulement si il ne contient pas de variété affine de dimension supérieure ou égale à q contenant z_0.

Et pour l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) nous allons utiliser le Théorème d'Oshawa Takegoshi [22] et les propriétés du noyau de Bergman. Enfin, l'application aura pour but de montrer que l'opérateur intégral de Henkin-Ramirez défini dans [19] est une solution compacte du $\bar{\partial}$ sur les $(0, q)$-formes différentielles, ce qui nous permettra d'aboutir à la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann N_q d'après le Théorème (1).

1 Préliminaires

1.1 Quelques outils sur la géométrie différentielle

1.1.1 Variétés différentiables

Les définitions de cette partie sont tirées de [7].
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty, \omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois différentiables et dont la dérivée k-ième est continue (si $k = \infty$ c'est l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables), et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

Définition 1.1 (Carte)

Soit X un espace topologique. Une carte sur X est un couple (U, φ) où $U \subset M$ et $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

Définition 1.2 (Atlas)

Soit X un espace topologique. Un atlas de classe C^k est une collection de cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ où $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$ et $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ constitue un recouvrement d'ouverts de X, $(V_\alpha)_\alpha$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous $\alpha\ et\ \beta \in I$, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^k [1].
Les composantes $\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ sont appelées coordonnées locales sur U_α définies par la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Définition 1.3 (Variété différentiable et variété différentiable analytique)

Une variété différentiable X de dimension n et de classe C^k est un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Lorsque les fonctions de transition sont des difféomorphismes analytiques on parle de variété différentiable analytique.

Définition 1.4 (Fonction de classe C^s)

Soient X une variété différentiable de classe C^k et de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert et $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$. Une fonction f est de classe C^s sur Ω si $fo\varphi_\alpha^{-1}$ est de classe C^s sur $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \Omega)$ pour tout $\alpha \in I$. L'ensemble des fonctions de classe C^s sur Ω est noté $C^s(\Omega, \mathbb{R})$.

Définition 1.5 (Vecteur tangent)

Soit X une variété différentiable.
Un vecteur v, tangent à X au point x_0, est par définition un opérateur différentiel qui agit sur les fonctions,
c'est-à-dire pour tout $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on associe localement $v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$; où les v_j sont des réels.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ autour de x_0 sur Ω,
on écrit simplement

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $U \subset E$, $V \subset F$ deux ouverts, $f : U \to V$ une application. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^r si f est inversible et si f et f^{-1} sont différentiables de classe C^r.

Définition 1.6 (Espace tangent, Espace cotangent)
L'ensemble des vecteurs tangents est appelé espace tangent. Par conséquent, pour tout $x_0 \in \Omega$, le n-uplet $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{1\leq j\leq n}$ constitue une base de l'espace tangent à X au point x_0 ; noté $T_{x_0}X$. Son dual $T^*_{x_0}X$ est l'espace vectoriel cotangent à X au point x_0.
Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, sa différentielle au point x_0 est une forme linéaire sur $T_{x_0}X$, définie par :

$$df_{x_0}(v) = v.f = \sum_{1\leq j\leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \; \forall v \in T_{x_0}X.$$

En particulier, si $v_j = dx_j(v)$, alors localement $df = \sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$.
La famille $\{dx_1, ..., dx_n\}$ est la base duale de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Donc c'est une base de l'espace cotangent $T^*_{x_0}X$.

Définition 1.7 Soient M et N deux variétés différentiables de classes respectives C^p et C^s et de dimensions respectives m et n. Soit $k \leq \min(p, s)$.
On dit qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est de classe C^k lorsque pour toutes cartes locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sur M et (V_β, ψ_β) sur N, l'application $f_{\beta\alpha} : \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ qui envoie l'ouvert $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^m$ dans l'ouvert $\psi_\beta(V_\beta)$ de $\mathbb{R}^n$ est de classe C^k. On dit que f est un C^k-difféomorphisme lorsque f est inversible et si f et f^{-1} sont différentiables de classe C^k.

Définition 1.8 Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à bord lisse de classe C^k avec $1 \leq k \leq \infty$, en un point $p \in b\Omega$ s'il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^d$ et une fonction de classe C^k $r : U \to \mathbb{R}$ tels que :

1. $$\Omega \cap U = \{x \in U : r(x) < 0\}$$
$$b\Omega \cap U = \{x \in U : r(x) = 0\}$$
2. La différentielle de la fonction r est non nulle en p.

La fonction r est appelée fonction définissante locale de Ω en p.
Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à bord lisse de classe C^k s'il l'est en tout point p $\in b\Omega$.

1.1.2 Fibrés vectoriels

Définition 1.9 Soient X une variété différentiable de dimension n, de classe C^∞ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ un champ scalaire. Un fibré vectoriel de rang r au-dessus de X est une variété E de classe C^∞ munie d'une application $\pi : E \longrightarrow X$ de classe C^∞ appelée projection et d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r sur chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$. Cela veut dire qu'il existe un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ de X et des C^∞-difféomorphismes θ_α appelés trivialisations

$$\theta_\alpha : E_{|V_\alpha} \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{K}^r \quad \text{où} \quad E_{|V_\alpha} = \pi^{-1}(V_\alpha)$$

telle que pour tout $x \in V_\alpha$ l'application

$$E_x \xrightarrow{\theta_\alpha} \{x\} \times \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Pour chaque $\alpha, \beta \in I$, l'application

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

peut se mettre sous la forme

$$\theta_{\alpha\beta}(x, \xi) = (x, g_{\alpha\beta}(x).\xi), (x, \xi) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

où la famille $(g_{\alpha\beta})$ est inversible à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(V_\alpha \cap V_\beta, \mathrm{Gl}(\mathrm{r}, \mathbb{K}))$, d'inverse $(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g_{\beta\alpha})$ et satisfaisant à la condition de cocycle

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{sur} \quad \mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{V}_\beta \cap \mathrm{V}_\gamma.$$

La collection $(g_{\alpha\beta})$ est appelée système de matrices de transition. Réciproquement, toute collection de matrices inversibles satisfaisant la condition de cocycle définit un fibré vectoriel E, obtenu en recollant les cartes $V_\alpha \times \mathbb{K}^r$ via les identifications $\theta_{\alpha\beta}$.

Exemple 1.1 Les fibrés tangent $TX = \bigcup_{a \in X} T_a X$ et cotangent $T^*X = \bigcup_{a \in X} T^*_a X$ d'une variété différentiable X de dimension n sont des fibrés vectoriels localement triviaux de rang n au-dessus de X.

Définition 1.10 Soient X une variété différentiable et $\Omega \subset X$ un ouvert. Soit E un fibré vectoriel sur X. Une section de classe C^k de $E_{|\Omega}$ est une application $s : \Omega \longrightarrow E$ de classe C^k telle que $s(x) \in E_x$, pour tout $x \in \Omega$ (i.e $\pi \circ s = \mathrm{Id}_\Omega$).

Définition 1.11 (Champ de vecteurs)

Soit X une variété différentiable de classe C^s. On appelle champ de vecteurs de classe C^k $(s \geq k)$ sur un ouvert $\Omega \subset X$, toute section C^k du fibré tangent. C'est-à-dire toute application $s : \Omega \longrightarrow TX$ de classe C^k telle que $s(x) \in T_x X$ pour tout $x \in \Omega$.
On note $\Gamma^k(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^k sur X.

Définition 1.12 (1-forme différentielle)

Soient X une variété différentiable et $U \subset X$ un ouvert. Une 1-forme différentielle sur U est une section du fibré cotangent . C'est une application

$$\begin{aligned} w :\ U &\longrightarrow T^*X = \bigcup_{a \in U} T^*_a X \\ a &\longmapsto w_a \end{aligned}$$

à valeurs dans l'espace cotangent à X en tout point a.
Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on a

$$w(a) = \sum_{i=1}^{n} w_i(a)(dx_i)_a$$

où les coefficients $w_i(a) \in \mathbb{R}$ dépendent de a.
Localement une 1-forme différentielle s'écrit $w = \sum_{i=1}^{n} w_i dx_i$ où les coefficients $(w_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des fonctions définies de U à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Une 1-forme différentielle est de classe C^k si les coefficients w_i le sont.

Exemple 1.2 (1-forme différentielle)

1. dx est une 1-forme différentielle de coefficient 1.
2. $w(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} dx - \dfrac{y}{x^2 + y^2} dy$ est une 1-forme différentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.

Définition 1.13 Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}$ et M une variété différentiable de classe C^r de dimension n, avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. L'ensemble des applications multilinéaires alternées sur $T_x M$ forme un espace vectoriel noté $\Lambda^k T^*_x M$. L'ensemble de ces espaces définit un fibré vectoriel sur M, noté $\Lambda^k T^* M$ et appelé fibré des k-formes extérieures.
Une p-forme différentielle de classe C^r sur M est une section de classe C^r du fibré vectoriel des p-formes

extérieures $\Lambda^p T^* M$.
Ainsi, une p-forme différentielle ω associe à tout x dans M, une forme p-linéaire alternée ω_x sur l'espace tangent $T_x M$ à M.
On note $\mathcal{E}_r^p(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^r sur M.

On peut effectuer plusieurs opérations avec les p-formes différentielles, par exemple :

• **Produit extérieur**
Soient u une p-forme différentielle et v une q-forme différentielle définies localement par :

$$v(x) = \sum_{|J|=q}' v_J(x) dx_J \text{ et } u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x) dx_I.$$

Alors le de u avec v est la forme de degré $(p+q)$ définie localement par :

$$u \wedge v(x) = \sum_{|I|=p,|J|=q}' u_I(x) v_J(x) dx_I \wedge dx_J \text{ avec } 0 \leq p+q \leq n$$
$$I = (i_1, \ldots, i_p) \text{ avec } 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$$
$$J = (j_1 \ldots j_q) \text{ avec } 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$$
$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \text{ et } dx_J = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

• **Dérivée extérieure**
La dérivée extérieure des p-formes différentielles est un opérateur différentiel

$$d : \mathcal{E}_r^p(M) \longrightarrow \mathcal{E}_{r-1}^{p+1}(M)$$

défini localement par la formule

$$du = \sum_{|I|=p}' \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I,$$

pour

$$u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x) dx_I$$

et vérifie les propriétés suivantes :

i) $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ (Règle de Leibnitz),

ii) $d^2 u = 0$ (idempotence).
Une forme u est dite fermée si $du = 0$ et elle est dite exacte s'il existe une forme v, telle que $deg(v) = deg(u) - 1$ vérifiant $u = dv$.

1.2 Notions de géométrie complexe

1.2.1 Variétés complexes et convexité

Définition 1.14 (Variété complexe)

Une variété complexe X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ où les U_α sont des ouverts de X tels que $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ et
$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes pour lesquels on a :
si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes.
$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sont appelées cartes locales.

$$z \in U_\alpha,\ \varphi_\alpha(z) = (z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha) \in \mathbb{C}^n.$$

$(z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha)$ sont appelés coordonnées locales autour de z.
La collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ est appelée atlas complexe.

Définition 1.15 (Domaine étoilé et domaine convexe)

1. On dit qu'un domaine $D \subset \mathbb{C}^n$ est étoilé en un point $P \in D$ si pour tout $M \in D$, le segment $[P, M]$ est contenu dans D.
2. On dit qu'un domaine est étoilé s'il est au moins étoilé par rapport à un de ses points.
3. On dit qu'un domaine est convexe s'il est étoilé par rapport à tous ses points.

Exemple 1.3 La boule unité de $\mathbb{C}^n$ est un domaine étoilé, mieux elle est convexe.

1.2.2 Structure complexe

Soit X une variété analytique complexe de dimension (complexe) n. Considérons X comme une variété différentiable de dimension $2n$. Pour tout $z \in X$, on a l'espace cotangent T_z^*X de X en z et une structure complexe J_z de T_z^*X et définie localement par

$$J_z(dx_j) = dy_j \text{ et } J_z(dy_j) = -dx_j.$$

Remarque 1.1 *J_z est l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de T_z^*X vérifiant*

$$J_z \circ J_z = -Id_{T_z^*X}.$$

Soit $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ le complexifié de T_z^*X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme

$$u + iv \text{ où } u, v \in T_z^*X$$

et $i = \sqrt{-1}$. J_z se prolonge en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ noté encore J_z tel que $J_z^2 = -Id_{T_z^*X^{\mathbb{C}}}$ et

$$J_z(u + iv) = J_z(u) + iJ_z(v)$$

pour tous $u, v \in T_z^*X$.
On a

$$T_z^*X^{\mathbb{C}} = T_{z1,0}^*X \oplus T_{z0,1}^*X$$

où

$$T_{z1,0}^*X = \{v \in T_z^*X^{\mathbb{C}} / J_z v = iv\}$$

$$T_{z0,1}^*X = \{v \in T_z^*X^{\mathbb{C}} / J_z v = -iv\}$$

$$T_{1,0}^*X = \bigcup_{z\in X} T_{z1,0}^*X \text{ et } T_{0,1}^*X = \bigcup_{z\in X} T_{z0,1}^*X$$

sont respectivement des fibrés cotangents holomorphes et antiholomorphes.
Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p, q \leq n$, notons par $\Lambda^p T_{z1,0}^*X$ et $\Lambda^q T_{z0,1}^*X$ respectivement les espaces vectoriels des p-formes alternées sur $T_{z1,0}^*X$ et des q-formes alternées sur $T_{z0,1}^*X$.
Dans un système de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$,

$$\Lambda^p T^*_{z1,0}X = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p}\}_{1\leq i_1<....<i_p\leq n}$$
$$\Lambda^q T^*_{z0,1}X = vect\{d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}_{1\leq j_1<....<j_q\leq n}$$
où $(dz_1, ..., dz_n)$ et $(d\bar{z}_1, ..., d\bar{z}_n)$ sont des bases locales de $T^*_{z1,0}X$ et $T^*_{z0,1}X$
donc
$$\Lambda^p T^*_{1,0}X := \bigcup_{z\in X} \Lambda^p T^*_{z1,0}X \text{ et } \Lambda^q T^*_{0,1}X := \bigcup_{z\in X} \Lambda^q T^*_{z0,1}X$$
sont respectivement les fibrés des p-formes extérieures sur le fibré $T^*_{1,0}X$ et des q-formes extérieures sur le fibré $T^*_{0,1}X$.
On pose
$$\Lambda^{(p,q)}T^*_z X^{\mathbb{C}} = \Lambda^p T^*_{z1,0}X \oplus \Lambda^q T^*_{z0,1}X$$
donc
$$\Lambda^{(p,q)}T^*_z X^{\mathbb{C}} = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ..... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}$$
avec $1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$.

Définition 1.16
Le fibré $\Lambda^{(p,q)}T^*X^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T^*_{1,0}X \otimes \Lambda^q T^*_{0,1}X$ est appelé fibré des (p,q)-formes extérieures sur le fibré cotangent complexifié
$$T^*X^{\mathbb{C}} := \bigcup_{z\in X} T^*_z X^{\mathbb{C}}.$$

Définition 1.17 (Formes différentielles)
Soient X une variété analytique complexe et $\Omega \subset X$ un ouvert. On appelle forme différentielle de bidegré (p,q) (ou (p,q)-forme différentielle) et de classe C^k sur Ω, toute section sur Ω de classe C^k du fibré $\Lambda^{(p,q)}T^*X^{\mathbb{C}}$.
On note $C^k_{p,q}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe C^k sur X.
Dans un ouvert $\Omega \subset X$ de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$, une (p,q)-forme différentielle u de classe C^k s'écrit
$$u(z) = \sum'_{|I|=p,|J|=q} u_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$
où les u_{IJ} sont des fonctions de classe C^k, $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ sont des multi-indices d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$,
$$dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p},$$
$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}$$
et $\sum'$ indique que la somme se fait suivant les indices croissants.
On note par $D^k_{p,q}(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par des (p,q)-formes différentielles à support compact dans X (on l'appelle aussi l'espace des formes tests) et par $C^\infty_0(X)$ le sous-espace vectoriel de $C^k_{p,q}(X)$ formé par des fonctions de classe C^∞ à support compact sur X. Toute fonction $f \in C^\infty_0(X)$ est appelée fonction test.

Définition 1.18 *Produit scalaire hermitien*
Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Une forme hermitienne définie positive sur X est la donnée en tout point $z_0 \in X$ d'une application
$h : T_{z_0}X \times T_{z_0}X \to \mathbb{C},$ définie par :
pour deux vecteurs
$$u = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad v = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \textit{appartenant à } T_{z_0}X;$$

$$h(u,v)(z_0)=\sum_{j,k=1}^{n} h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j},\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)u_j\overline{v}_k=\sum_{j,k=1}^{n} h_{j,k}(z_0)u_j\overline{v}_k$$

où

$$h_{j,k}(z_0)=h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j},\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $h(\lambda u,v)=\lambda h(u,v),\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$,

ii) $h(u,v)=\overline{h(v,u)},\ \forall u,\ v\in T_{z_0}X$,

iii) $h(u,u)\geq 0,\ \forall u\in T_{z_0}X$,

iV) $h(u,u)>0\ \forall\ u\neq 0$,

V) $h(u+v,w)=h(u,w)+h(v,w),\ \forall u,\ v$ *et* $w\in T_{z_0}X$.

On note $her(T_{z_0}X)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur $T_{z_0}X$.

1.3 Variétés algébriques affines et variétés algébriques analytiques

Les définitions de cette section sont tirées de [12].

Définition 1.19 (Ensemble algébrique affine)
Un ensemble algébrique affine est l'ensemble des solutions dans un corps algébriquement clos [2] $\mathbb{K}$ d'un système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$. Plus précisément, si $P_1,\ldots,P_m$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors ils définissent un ensemble algébrique affine

$$V(P_1,\ldots,P_m)=\{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n\mid P_1(a_1,\ldots,a_n)=\ldots=P_m(a_1,\ldots,a_n)=0\}.$$

Définition 1.20
Une variété (algébrique) affine est un ensemble algébrique affine qui ne peut pas s'écrire comme union de deux sous-ensembles algébriques affines propres. Un tel ensemble est dit irréductible.
Une variété affine de dimension q est (relativement) un sous ensemble ouvert d'un sous espace affine complexe de $\mathbb{C}^n$ de dimension q (cf [9]).

Définition 1.21
Soit $G\subset\mathbb{C}^n$. Un ensemble $V\subseteq G$ est dit ensemble analytique dans G si pour tout $p\in G$, il existe un voisinage U de p dans G et des fonctions holomorphes $f_1,\ldots,f_m$ définies dans U telles que

$$U\cap V=\{z: f_k(z)=0,\ \forall\ 1\leq k\leq m\}.$$

Définition 1.22 [12](Point régulier)
Soit V un ensemble analytique.
Un point $p\in V$ est dit régulier s'il existe un voisinage U de p tel que $U\cap V$ soit une variété analytique complexe. Tout autre point est appelé un point singulier.
Une variété singulière est une variété dont tout point est singulier.

2. Un corps algébriquement clos est un corps commutatif $\mathbb{K}$ dans lequel tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K}$ possède une racine dans $\mathbb{K}$.

1.4 Harmonicité & Pseudoconvexité

1.4.1 Harmonicité

Définition 1.23 [7] (Fonction harmonique)
Une fonction u de classe C^2 définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$ est dite harmonique si

$$\Delta u = 0 \text{ où } \Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \text{ désigne l'opérateur de Laplace.}$$

Définition 1.24 [7] (Fonction sousharmonique)
Une fonction u définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sousharmonique si :

i) u est semi-continue supérieurement (s.c.s.), c'est-à-dire $\{z \in D\ ;\ u(z) < s\}$ est ouvert pour tout $s \in \mathbb{R}$.

ii) Pour tout compact $K \subset D$ et toute fonction h continue sur K, harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, telle que $h \geq u$ sur bK, alors $h \geq u$ sur K.

Définition 1.25 [7] Une fonction φ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite plurisousharmonique si :

i) φ est semi-continue supérieurement.

ii) La restriction $\varphi_{|L}$ est sousharmonique sur $\Omega \cap L$ pour toute droite complexe $L \subset \mathbb{C}^n$.

Définition 1.26 [7] Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et φ une fonction de classe C^2 sur Ω. On appelle forme de Lévi de φ en $z \in \Omega$, la hessienne complexe notée $L_z\varphi$, c'est-à-dire

$$w \mapsto L_z\varphi(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k, \text{ pour tout } w \in \Omega.$$

Définition 1.27 [7] Une fonction φ de classe C^2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite plurisousharmonique si

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) t_j \bar{t}_k \geq 0,$$

$\forall\ z \in \Omega,\ t \in \mathbb{C}^n$.

1.4.2 Pseudoconvexité

Définition 1.28 [16] Une fonction φ continue définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles est une fonction d'exhaustion pour D si, pour tout c $\in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$D_c = \left\{ z \in D \mid \varphi(z) < c \right\}$$

est relativement compact dans D.

Remarque 1.2 Une fonction d'exhaustion φ vérifie $\varphi(z) \longrightarrow \infty$ quand z s'approche du bord de D.

Si Ω n'est pas borné, on définit la pseudoconvexité comme suit :

Définition 1.29 [16] Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit pseudoconvexe si Ω admet une fonction d'exhaustion φ plurisousharmonique continue.

Définition 1.30 [16] Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et φ une fonction définissante de classe C^2 de Ω. On dit que Ω est pseudoconvexe au point $p \in b\Omega$, si la forme de Lévi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) t_j \bar{t}_k \geq 0$$

$\forall t \in \mathbb{C}^n$ *vérifiant*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(p) t_j = 0. \tag{2}$$

Le domaine Ω est strictement pseudoconvexe si la forme de Lévi est strictement positive pour tout $t \neq 0$ et $\forall t \in \mathbb{C}^n$, la relation (2) est vérifiée.
Ω est dit domaine pseudoconvexe s'il est pseudoconvexe en tout point du bord $b\Omega$.
Ω est dit domaine strictement pseudoconvexe s'il l'est en tout point de son bord.

1.5 Opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$

Définition 1.31 ([28] **Les opérateurs** ∂ **et** $\bar{\partial}$)

Soient X une variété complexe et $\Omega \subset X$ un ouvert. Si f est une fonction de classe C^1 sur un voisinage d'un point $a \in \Omega$, on a localement

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) dy_j,$$

on pose

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}).$$

Puisque z_j peut s'écrire comme suit :

$$z_j = x_j + iy_j, \quad \text{alors on a}$$

$$dz_j = dx_j + idy_j \text{ et } d\bar{z}_j = dx_j - idy_j,$$

où x_j et y_j sont des réels.
Cette transformation permet d'écrire df_a sous la forme suivante :

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) d\bar{z}_j.$$

Posons

$$\partial f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) dz_j \text{ et } \bar{\partial} f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) d\bar{z}_j,$$

donc

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

La décomposition

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

se généralise sur toutes les formes différentielles.
En effet, si

$$w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} w_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

est une (p,q)-forme différentielle de classe C^1

$$dw(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} dw_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} (\partial w_{I,J}(z) + \bar{\partial} w_{I,J}(z)) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

On posera

$$\partial w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \partial w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \text{ et } \bar{\partial} w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \bar{\partial} w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants :

$$\partial : C^k_{p,q}(\Omega) \longrightarrow C^{k-1}_{p+1,q}(\Omega)$$
$$\bar{\partial} : C^k_{p,q}(\Omega) \longrightarrow C^{k-1}_{p,q+1}(\Omega).$$

Propriétés 1.1

1) $d = \partial + \bar{\partial}$ *et* $d^2 = 0.$

2) $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0.$

Définition 1.32 [28] Soient X une variété analytique complexe et Ω un ouvert de X.
Une (p, q)-forme différentielle w de classe C^k définie sur Ω est dite $\bar{\partial}$-fermée si $\bar{\partial} w = 0$.
On note

$$Z^k_{p,q}(\Omega) = \{w \in C^k_{p,q}(\Omega)/\bar{\partial} w = 0\}.$$

C'est un sous groupe de $C^k_{p,q}(\Omega)$.
Une (p, q)-forme différentielle w de classe C^k définie sur un ouvert Ω est dite $\bar{\partial}$-exacte s'il existe une $(p, q-1)$-forme différentielle u de classe C^k telle que $\bar{\partial} u = w$.

$$B^k_{p,q}(\Omega) = \{\bar{\partial} u \in C^k_{p,q}(\Omega)/u \in C^k_{p,q-1}(\Omega)\}.$$

C'est aussi un sous groupe de $C^k_{p,q}(\Omega)$.
Puisque $\bar{\partial}^2 = 0$, alors $B^k_{p,q}(\Omega) \subset Z^k_{p,q}(\Omega)$.
L'espace vectoriel

$$H^k_{p,q}(\Omega) = \frac{Z^k_{p,q}(\Omega)}{B^k_{p,q}(\Omega)}$$

est appelé le (p, q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe C^kdéfinies sur Ω.

1.6 Outils d'analyse fonctionnelle

Dans cette partie, on va rappeler quelques notions d'analyse fonctionnelle en se référant à [3].

Définition 1.33 Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$- espace vectoriel E est une application affine définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive notée $< .; . >$.

Définition 1.34 Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien.

Définition 1.35 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E, l'application notée $\| \, . \, \|$ et définie de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que :
1) $\forall\ x \in E$ *:* $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2) $\forall\ x \ \in E$ *et* $\forall\ \lambda \ \in K$ *:* $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|.$
3) $\forall\ (x; y) \ \in E^2$ *:* $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

1.6.1 Présentation des espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

On considère Ω comme un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$. Les fonctions f et g seront considérées de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.36 Soient deux fonctions mesurables f et g définies sur un espace mesuré (Ω, μ), on dit que f et g sont équivalentes presque partout (noté $f \sim g$) si

$$f(x) = g(x)$$

pour presque tous les $x \in X$, c'est-à-dire si l'ensemble $E = \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ a une mesure nulle, en d'autres termes $\mu(E) = 0$.
En utilisant cette relation d'équivalence, l'espace $L^p(\Omega)$ est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables f telles que $\|f\|_p < \infty$.
Plus précisément, nous définissons :

$$L^p(\Omega) = \{[f] : f \textit{est mesurable sur } \Omega, \|f\|_p < \infty\}, \tag{3}$$

où $[f]$ est la classe d'équivalence de la fonction f. L'espace $L^p(\Omega)$ est donc un espace de fonctions mesurables modulo l'équivalence presque partout, avec la norme $\|\cdot\|_p$ qui est définie sur $L^p(\Omega)$ comme suit :
Pour $1 \leq p < \infty$,

$$|[f]|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Si $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \{|f(x)|\}.$$

1.6.2 Notion de distribution

Définition 1.37 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$D(\Omega) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega, \text{ et } \operatorname{supp}(\varphi) \text{ compact } \}$$

où $\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}}$.
Une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(\Omega)$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

i) $\forall\, j$, le support de φ_j et celui de φ sont contenus dans un compact $K \subset \Omega$,

ii) $(D^\alpha \varphi_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi(x)$ sur $K \subset \Omega$,
pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et
$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} .....\partial {x_n}^{\alpha_n}}$ est la dérivée d'ordre $|\alpha| =: \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, on désigne par D_K l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K.

Définition 1.38 Une forme linéaire T sur $D(\Omega)$ est dite séquentiellement continue sur $D(\Omega)$ si l'application $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(\Omega)$, si φ_j converge vers φ dans $D(\Omega)$, la suite des nombres complexes $T(\varphi_j)$ converge vers $T(\varphi)$.

Définition 1.39 Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $D(\Omega)$ séquentiellement continue. On note $D^{'}(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Remarque 1.3 Si $T \in D^{'}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors l'application $\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$ est une distribution appelée dérivée d'ordre α de T. On la note par $D^\alpha T$.

Exemple 1.4

1) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. La fonction
$\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$ est une distribution appelée mesure de Dirac.

2) Soit f une fonction localement intégrable[3] sur $G \subset \mathbb{R}$. Alors l'application $T_f : \mathcal{D}(G) \to \mathbb{R}$ définie par $T_f(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)dx$ est une distribution sur G.

1.6.3 Espace de Sobolev

Étant donné que nous avons déjà défini les espaces L^p et une distribution, ainsi on peut définir des espaces de Sobolev sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ comme suit :

Définition 1.40 On appelle espace de Sobolev noté $W^{m,p}(\Omega)$, l'espace donné par

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq m\}$$

où $D^\alpha u$ est la dérivée d'ordre α de u au sens des distributions, $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On définit une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \ si \ 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \ si \ p = \infty.$$

Remarque 1.4

1 Si $m_0 < m$, alors on a une injection continue de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m_0,p}(\Omega)$.

2 $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Définition 1.41 Un espace vectoriel normé (E, $\| \cdot \|$) est dit complet si toute suite de Cauchy (pour cette norme) d'éléments de E est convergente dans E . Un tel espace est appelé espace de Banach.
Si $(E, \| \cdot \|)$ est complet et que la norme est issue d'un produit scalaire, alors (E, $\| \cdot \|$) est un espace d'Hilbert.

Exemple 1.5

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, tout espace $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ est un espace de Banach.
L'espace $L^2(\Omega)$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

qui provient du produit scalaire $(f, g) \mapsto < f, g >= \int_\Omega f.\bar{g}dx$, est un espace d'Hilbert.

Maintenant donnons quelques notions pour définir un espace réflexif de Banach.
En effet, soient E un espace vectoriel normé et $E^\star$ son espace dual avec la norme :

$$\|f\|_{E^\star} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

Le bidual est le dual de $E^\star$ avec la norme :

$$\|\xi\|_{E^{\star\star}} = \sup_{\substack{f \in E^\star \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle| \quad (\xi \in E^{\star\star}).$$

3. Une fonction à valeurs complexes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact de Ω est intégrable au sens de Lebesgue.

Ainsi, on a l'injection canonique $J_0 : E \to E^{\star\star}$ définie comme suit :
pour tout $x \in E$, l'application

$$f \mapsto \langle f, x \rangle$$

est linéaire continue sur $E^\star$; donc c'est un élément de $E^{\star\star}$ qui est noté par $J_0 x$. On a

$$\langle J_0 x, f \rangle_{E^{\star\star}, E^\star} = \langle f, x \rangle_{E^\star, E} \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E^\star.$$

Remarque 1.5 J_0 est linéaire et c'est une isométrie. Ainsi,

$$\|J_0 x\|_{E^{\star\star}} = \|x\|_E.$$

Définition 1.42 *[3]* Soient E un espace de Banach et $J : E \to E^{\star\star}$ l'injection canonique. E est dit réflexif si J est surjective, c'est-à-dire

$$J(E) = E^{\star\star}.$$

Proposition 1.1 Soit X un espace de Banach, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) X est réflexif.
2) La boule unité fermée de X est faiblement compacte.
3) Toute suite bornée de X admet une sous-suite faiblement convergente.

Exemple 1.6 Tout espace d'Hilbert est reflexif, de même que les espaces L^p, avec $1 < p < \infty$.

1.6.4 Théorie des opérateurs

Comme nous essayons d'établir la compacité d'un opérateur particulier, il est primordial d'énoncer quelques définitions et propriétés des opérateurs (cf [20], [29] et [30]).

Définition 1.43 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur est une application linéaire T définie sur un sous espace vectoriel $D(T) \subset H_1$ à valeurs dans H_2. $D(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur.

Définition 1.44 Soient X et Y deux espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues et $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.
On dit que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si l'image par T de la boule unité fermé B_X de X est relativement compacte dans l'espace Y, ($\overline{T(B_X)}$ est compact).

Remarque 1.6

1. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans X, la suite image (Tx_n) admet des sous-suites convergentes dans Y.
2. Si T_1 , $T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ sont compacts, alors $a_1 T_1 + a_2 T_2$ est compact pour tous scalaires a_1, a_2. Ainsi, l'ensemble des opérateurs compacts de X dans Y forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$. Cet espace des opérateurs compacts sera noté $\mathcal{K}(X, Y)$.

Définition 1.45 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et T : $H_1 \to H_2$. L'unique application linéaire $T^* : H_2 \to H_1$ telle que pour tous $x \in H_1$ et $y \in H_2$ on ait :

$$< Tx, y >=< x, T^* y >$$

est appelée adjoint de T.

Remarque 1.7 Par définition de la norme de l'opérateur et en utilisant un corolaire de d'Hahn-Banach (cf [3] corollaire 14), on a

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{y\in F, \|y\|\leq 1} \|T^*y\| = \sup_{\substack{x\in E, \|x\|\leq 1 \\ y\in F, \|y\|\leq 1}} |\langle x, T^*y\rangle| \\ &= \sup_{\substack{x\in E, \|x\|\leq 1 \\ y\in F, \|y\|\leq 1}} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\|\end{aligned}$$

Ainsi $\|T^*\| = \|T\|$.

Proposition 1.2 Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \longmapsto T^*$ est une isométrie de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F,E)$, elle est linéaire si les espaces sont réels et sesquilinéaire si les espaces sont complexes. De plus, $\forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$(T^*)^* = T \text{ et } \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Enfin $(TS)^* = S^*T^* \quad \forall S \in \mathcal{L}(F,E)$.

Preuve 1.1 Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in E$, $y \in F$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, (T_1 + \lambda T_2)^* (y)\rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), y\rangle \\ &= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda \langle T_2(x), y\rangle \\ &= \langle x, T_1^*(y)\rangle + \left\langle x, \bar{\lambda} T_2^*(y)\right\rangle \\ &= \left\langle x, \left(T_1^* + \bar{\lambda} T_2^*\right)(y)\right\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi $T \longmapsto T^*$ est antilinéaire. Elle est isométrique d'après la définition de l'adjoint. Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle.$$

On a

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme opérateur [4] est une norme d'algèbre et donc en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\|\,\|T^*\| = \|T\|^2$. D'autre part, en utilisant encore une fois de plus le Théorème d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \qquad . \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\ &= \|T\|^2.\end{aligned}$$

4. Si $\mathcal{L}(H)$ est l'ensemble des opérateurs sur H on définit la norme opérateur de $A \in \mathcal{L}(H)$ par $\|A\| = \sup\{\|Ah\| : h \in H, \|h\| < 1\}$ il vérifie certaines propriétés dont le fait que si A, $B \in \mathcal{L}(H)$, alors $AB \in \mathcal{L}(H)$ et $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par définition de l'adjoint,

$$\begin{aligned} \langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\ &= \langle T^*(x), S(y)\rangle . \\ &= \langle S^*T^*(x), y\rangle . \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous x et y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

Définition 1.46 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est fermé si son graphe noté $\Gamma(T)$ et défini par

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset H_1 \times H_2$$

est fermé.

Définition 1.47 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est à domaine dense si $\overline{D(T)} = H_1$.

Définition 1.48 Soit H_1 un espace de Hilbert. Un opérateur $T : D(T) \subset H_1 \to H_1$ à domaine dense est auto-adjoint si $T^* = T$.

Définition 1.49 Soient X et Y deux espaces vectoriels normés de normes respectives $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dit borné si,

$$\exists\, M \geq 0 : \quad \forall x \in X; \quad \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Exemple 1.7 . Les opérateurs linéaires suivants sont tous bornés :
1. L'opérateur identité : $\quad Id_X : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto Id_X(x) = x\,;$

$$\forall x \in X : \|Id_X(x)\| = \|x\|.$$

2. L'homothétie vectorielle de rapport k : $\quad H_k : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto H_k(x) = k \bullet x\,;$

$$\forall x \in X : \|H_k(x)\| = \|k \bullet x\| = |k|\|x\|.$$

Remarque 1.8 Si $X = Y = H$ est un espace de Hilbert, un opérateur T est borné dans H si $D(T) = H$ et $T : H \to H$ est continue.

Définition 1.50 On dit qu'un opérateur $(T, D(T))$ est fermable s'il possède une extension fermée notée $\bar{T}$.

Proposition 1.3 Soit T un opérateur fermable à domaine dense sur H, alors

$$\begin{array}{lcl} (\mathrm{Ker}(\bar{T}))^{\perp} = \overline{\mathrm{R}\,(T^*)} & et & \mathrm{Ker}\,(T^*) = (\mathrm{R}(T))^{\perp} \\ \mathrm{Ker}(\bar{T}) = (\mathrm{R}\,(T^*))^{\perp} & et & \mathrm{Ker}\,(T^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{R}(T)}. \end{array}$$

Preuve 1.2 Montrons d'abord $\mathrm{Ker}(\bar{T}) = (\mathrm{R}\,(T^*))^{\perp}$.
On a

$$\begin{aligned} y \in (\mathrm{R}\,(T^*))^{\perp} \Rightarrow (\langle y, T^*x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)) &\Rightarrow \left(y \in D(\bar{T}) \;\; et \; \langle Ty, x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)\right) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\bar{T}) \\ &(\mathrm{R}\,(T^*))^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(\bar{T}) \\ y \in \ker\left(\bar{T}\right) \Rightarrow (\langle Ty, x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)) &\Rightarrow \left(y \in ker(\bar{T}) \;\; et \; \langle y, T^*x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)\right) \\ &\Rightarrow y \in (\mathrm{R}(T^*))^{\perp} \\ &\Rightarrow \mathrm{Ker}(\bar{T}) \subset (\mathrm{R}\,(T^*))^{\perp}. \end{aligned}$$

Ainsi par ces deux inclusions, on a l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\bar{T}) = (\mathrm{R}\,(T^*))^{\perp}.$$

Montrons maintenant $(R(T))^{\perp} = \ker(T^*)$

$$\begin{aligned}
y \in (\mathrm{R}(T))^{\perp} \Rightarrow (\langle y, Tx\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \Rightarrow &\quad (y \in D\,(T^*) \;\; et \;\; \langle T^* y, x\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \\
&\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}\,(T^*) \\
&\Rightarrow (\mathrm{R}(T))^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(T^*) \\
y \in \ker(T^*) \Rightarrow (\langle T^* y, x\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \Rightarrow &\quad (y \in D\,(T^*) \;\; et \;\; \langle y, Tx\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \\
&\Rightarrow y \in (\mathrm{R}\,(T))^{\perp} \\
&\Rightarrow \ker(T^*) \subset \mathrm{R}\,(T)^{\perp}.
\end{aligned}$$

Par suite on a :

$$(R(T))^{\perp} = \ker(T^*).$$

Les deux autres relations s'obtiennent en prenant l'orthogonale et en remarquant que $\mathrm{Ker}(\bar{T})$ est fermé.

Lemme 1.1 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire, fermé et dense.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $R(T)$ est fermé.

(b) Il existe une constante C telle que :

$$\|f\|_1 \leq C\|Tf\|_2 \quad \forall f \in D(T) \cap \overline{R(T^*)}.$$

(c) $R(T^*)$ est fermée.

(d) Il existe une constante C telle que :

$$\|g\|_2 \leq C\|T^* g\|_1 \quad \forall g \in D(T^*) \cap \overline{R(T)}.$$

Preuve 1.3 Supposons que $R(T)$ est fermée. De l'égalité (4.1.1) de [6], on a :

$$T : D(T) \cap \overline{R(T^*)} \to R(T)$$

est bijectif et d'inverse

$$T^{-1} : R(T) \to D(T) \cap \overline{R(T^*)}$$

est bien défini et est aussi un opérateur fermé. Ainsi d'après le théorème du graphe fermé, T^{-1} est continu et cela prouve (b). En supposant (b) vraie on obtient $\overline{R(T)} \subset R(T)$. Ce qui montre que $(b) \Longleftrightarrow (a)$.
De façon analogue on montre (c) et (d) sont équivalentes.
Montrons que (b) implique (d). On a

$$|< g, Tf >_2| = |< T^* g, f >_1| \leq C\|T^* g\|_1 \, \|Tf\|_2,$$

pour $g \in D(T^*) \cap \overline{R(T)}$ *et* $f \in D(T) \cap \overline{R(T^*)}$. Donc

$$|< g, h >_2| \leq C\|T^* g\|_1 \, \|h\|_2, \; pour \; g \in D(T^*) \cap \overline{R(T)} \; et \; h \in R(T),$$

qui implique (d). Par analogie on montre que $(d) \Rightarrow (b)$.

Th*é*orème 1.1 Soient X et Y deux espaces de Banach.
$A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes
1. A est borné ;
2. A est continu sur tout l'espace X ;
3. A est continu en 0.

Preuve 1.4 L'implication ($1 \implies 2$), découle du fait qu'un opérateur borné est une application Lipschitzienne donc continue. $2 \Longrightarrow 3$ car l'opérateur A est continu sur tout l'espace X en particulier en 0. Il suffit de démonter l'implication ($3 \Longrightarrow 1$). Supposons donc que l'application linéaire A est continue au point 0 de X. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X \ \ et \quad \|x\|_X < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|A(x) - A(0_X)\|_Y = \|A(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Soit maintenant $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \neq 0$. Alors,

$$\left\| \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left\| A\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \varepsilon.$$

En d'autres termes,

$$\forall x \in X \text{ et } \quad \|x\|_X \neq 0 \Longrightarrow \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in X \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \leq \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \|x\|_X.$$

Donc A est borné, d'où l'équivalence des trois propriétés.

Le théorème suivant est tiré de [6].

Théorème 1.2 *(Lemme de Rellich)*
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à bord Lipschitzien. Si $s > t \geq 0$, alors l'inclusion

$$W^s(\Omega) \hookrightarrow W^t(\Omega)$$

est compact.

Dans la suite on va s'intéresser à l'espace $L^2(\Omega)$. En particulier aux espaces de Sobolev qui sont dans $L^2(\Omega)$.

1.7 Le $\overline{\partial}$-Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine. Dans cette partie, on va introduire l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann (cf [6]). Ainsi, le $\overline{\partial}$ défini pour les (p, q)-formes différentielles s'étend à l'espace des (p, q)-formes différentielles dont les coefficients sont dans L^2 au sens des distributions noté $L^2_{p,q}(\Omega)$.

Si

$$f = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

et

$$g = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} g_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

sont deux (p, q)-formes différentielles dans $L^2_{(p,q)}(\Omega)$, nous définissons le produit scalaire et la norme comme suit :

$$< f, g >= \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} < f_{I,J}, g_{I,J} >, \quad |f|^2 =< f, f >= \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} |f_{I,J}|^2$$

$$||f||^2 = \int_\Omega < f, f > dx = \sideset{}{'}\sum_{|I|=p,|J|=q} \int_\Omega |f_{I,J}|^2 dx.$$

Puisque $L^2_{p,q}(\Omega)$ est muni d'un produit scalaire, on définit respectivement le $\bar{\partial}$ et son adjoint $\bar{\partial}^*$ par

$$\bar{\partial} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega)$$

$$D(\bar{\partial}) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) : \bar{\partial} f \in L^2_{p,q+1}(\Omega)\}$$

$$\bar{\partial}^* : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q-1}(\Omega).$$

$$D(\bar{\partial}^*) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) : \bar{\partial}^* f \in L^2_{p,q-1}(\Omega)\}.$$

Ainsi, le laplacien est défini comme suit :

$$\Box : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega)$$

et

$$\Box = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial},$$

avec

$$D(\Box) = \Big\{f \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*) : \ \bar{\partial} f \in D(\bar{\partial}^*) \text{ et } \bar{\partial}^* f \in D(\bar{\partial})\Big\}.$$

Proposition 1.4

Le laplacien $\Box$ est un opérateur fermé, dense et auto-adjoint.

Preuve 1.5

Montrons que $\Box$ est fermé.
Soit (x_n) une suite d'éléments de $D(\Box)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ avec $x \in D(\Box)$; montrons alors $\Box x_n \longrightarrow \Box x$.
Soit $y \in D(\Box)$; on a :

$$< \Box x_n, y >=< (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})(x_n), y >=< \bar{\partial}\bar{\partial}^*(x_n), y > + < \bar{\partial}^*\bar{\partial}(x_n), y > .$$

Comme $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$ sont fermés alors

$$\bar{\partial} x_n \to \bar{\partial} x \quad et \quad \bar{\partial}^* x_n \to \bar{\partial}^* x.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} < \Box x_n, y >=< \bar{\partial}\bar{\partial}^* x + \bar{\partial}^*\bar{\partial} x, y >=< (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})x, y > .$$

Ainsi, on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} < \Box x_n, y >=< \Box x, y > \quad \forall y \in D(\Box).$$

Donc $\Box$ est un opérateur fermé.

Montrons que $\Box$ est dense.
On a $\overline{D^{p,q}(\Omega)} = L^2_{p,q}(\Omega)$ et $D^{p,q}(\Omega) \subset D(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega)$

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} \subset \overline{D(\Box)} \subset L^2_{p,q}(\Omega)$$

$$L^2_{p,q}(\Omega) \subset \overline{D(\Box)} \subset L^2_{p,q}(\Omega),$$

où $D^{p,q}(\Omega)$ est l'espace des (p,q)-formes différentielles à support compact.
Donc $\overline{D(\Box)} = L^2_{p,q}(\Omega)$. Par suite $D(\Box)$ est dense.
Montrons que le laplacien est auto-adjoint. En effet on a :

$$\begin{aligned}
< (\Box)^* x, y > &= < x, \Box y > \\
&= < x, \bar\partial\bar\partial^* y + \bar\partial^*\bar\partial y > \\
&= < x, \bar\partial\bar\partial^* y > + < x, \bar\partial^*\bar\partial y > \\
&= < \bar\partial\bar\partial^* x, y > + < \bar\partial^*\bar\partial x, y > \\
&= < (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) x, y > \\
&= < \Box x, y > .
\end{aligned}$$

Donc $\Box$ est auto-adjoint.

Le problème du $\overline{\partial}$-Neumann consiste à chercher un opérateur inverse du laplacien noté $N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega)$ vérifiant les propriétés du théorème qui suit(cf [6]) :

Théorème 1.3 L'opérateur $N_{p,q}$ vérifie les propriétés suivantes :

1 $R(N_{p,q}) \subset D(\Box)$.

2 $N_{p,q}\Box = \Box N_{p,q} = I$ où I désigne l'application identité.

3 Pour tout $f \in L^2_{p,q}(\Omega)$,
$$f = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f.$$

4 $\bar\partial N_{p,q} = N_{p,q+1}\bar\partial$, $\forall 1 \leq q \leq n-1$ sur $D(\bar\partial)$.

5 $\bar\partial^* N_{p,q} = N_{p,q-1}\bar\partial^*$, $\forall 2 \leq q \leq n$ sur $D(\bar\partial^*)$.

Preuve 1.6 *Si $\Box$ admet un inverse $N_{p,q}$ on a :*

$$\Box : D(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega).$$

Par définition, l'opérateur $N_{p,q}$ est l'inverse de $\Box$, avec

$$N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to D(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$

Par conséquent on a (1) et (2).
C'est-à-dire $R(N_{p,q}) \subset D(\Box)$ et $N_{p,q}\Box = \Box N_{p,q} = I$.
Montrons la relation (3).
Comme $L^2_{p,q}(\Omega)$ est un espace d'Hilbert et que $\Box$ est un opérateur fermé et que $\ker(\Box) = 0$, la décomposition de Hodge ($L^2_{p,q}(\Omega) = R(\Box) \oplus \ker(\Box)$) nous permet d'avoir la relation suivante :

$$L^2_{p,q}(\Omega) = R(\Box) = \bar\partial\bar\partial^*(D(\Box)) \oplus \bar\partial^*\bar\partial(D(\Box)).$$

Donc $\forall f \in L^2_{p,q}(\Omega)$ on a
$$f = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f.$$

Montrons la relation (4).
Soit $f \in D(\bar\partial)$, on a :

$$\begin{aligned}
f &= \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \\
\bar\partial f &= \bar\partial\bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \ \textit{car}\ \bar\partial\bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f = 0 \\
N_{p,q+1}\bar\partial f &= N_{p,q+1}\bar\partial\bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \\
N_{p,q+1}\bar\partial f &= N_{p,q+1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\bar\partial N_{p,q} f
\end{aligned}$$

or $N_{p,q+1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) = I$ d'après la relation (2).
Donc

$$N_{p,q+1}\bar\partial f = \bar\partial N_{p,q} f \quad \forall f \in D(\bar\partial).$$

Ainsi on a établi

$$N_{p,q+1}\bar\partial = \bar\partial N_{p,q}.$$

Pour obtenir la relation (5), on utilise le même procédé. C'est-à-dire :
soit $f \in D(\bar\partial^*)$, on a

$$\begin{array}{rcl} f & = & \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \\ \bar\partial^* f & = & \bar\partial^*\bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \ car\ \bar\partial^*\bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f = 0 \\ N_{p,q-1}\bar\partial^* f & = & N_{p,q-1}\bar\partial^*\bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \\ N_{p,q-1}\bar\partial^* f & = & N_{p,q-1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\bar\partial^* N_{p,q} f \end{array}$$

or $N_{p,q-1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) = I$ d'après la relation (2).
Donc

$$N_{p,q-1}\bar\partial^* f = \bar\partial^* N_{p,q} f \quad \forall f \in D(\bar\partial^*).$$

Ainsi on a établi

$$N_{p,q-1}\bar\partial^* = \bar\partial^* N_{p,q}.$$

Remarque 1.9 Si l'opérateur $N_{p,q}$ existe avec les propriétés du Théorème (1.3), alors pour tout $u \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap ker(\bar\partial)$, il existe $v \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ telle que $\bar\partial v = u$ sur Ω. En effet

$$u = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} u + \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} u = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} u + \bar\partial^* N_{p,q+1}\bar\partial u = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} u$$

car $N_{p,q+1}\bar\partial u = 0$. Ainsi $v = \bar\partial^* N_{p,q} u$ est appelée la solution canonique de l'équation $\bar\partial v = u$.

2 Compacité du $\bar\partial$-Neumann sur les domaines convexes

Dans cette partie nous établissons la compacité du $\bar\partial$-Neumann en s'appuyant sur le Théorème (1). On va donc donner les conditions nécessaires à la compacité du $\bar\partial$-Neumann puis les conditions suffisantes de compacité de l'opérateur solution du $\bar\partial$. Mais avant cela, montrons l'implication (4) $\Rightarrow$ (1) qui nous permettra plus tard de compléter les équivalences du Théorème (1).

Théorème 1
Soient Ω un domaine convexe de $\mathbb{C}^n$ et $1 \le q \le$ n. Il y a équivalence entre :

1. Il existe un opérateur solution compact pour le $\bar\partial$ sur les $(0,q)$-formes différentielles.
2. Le bord de Ω ne contient pas de variété affine de dimension plus grande ou égale à q.
3. Le bord de Ω ne contient pas d'ensemble analytique irréductible de dimension plus grande ou égale à q.
4. L'opérateur $\bar\partial$-Neumann N_q est compact.

2.1 Première partie : (4)$\Rightarrow$ (1)

Il est question ici de montrer que la compacité du $\bar\partial$-Neumann entraine l'existence d'une solution compacte pour le $\bar\partial$ pour les $(0,q)$-formes différentielles.

$$\begin{array}{rcl} N_q & = & N_q I \\ & = & N_q \square N_q \\ & = & N_q\left(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial\right) N_q \\ & = & \left(N_q\bar\partial\right)\bar\partial^* N_q + \bar\partial^* N_{q+1}\left(N_{q+1}\bar\partial\right) \end{array}$$

$$= \left(\bar{\partial}^* N_q\right)^* \bar{\partial}^* N_q + \bar{\partial}^* N_{q+1} \left(\bar{\partial}^* N_{q+1}\right)^*. \quad (5)$$

Puisque l'ensemble des opérateurs compacts est un espace vectoriel et que

$$N_q = (\bar{\partial}^* N_q)^* (\bar{\partial}^* N_q) + (\bar{\partial}^* N_{q+1})(\bar{\partial}^* N_{q+1})^*,$$

alors les compacités de $\bar{\partial}^* N_q$ et $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ équivalent à celle de N_q. Ainsi si N_q est compact alors on a la compacité de $\bar{\partial}^* N_q$ qui s'avère être la solution canonique pour le $\bar{\partial}$ sur les $(0,q)$-formes différentielles.

2.2 Conditions suffisantes de compacité de N_q

2.2.1 Deuxième partie : (2) ⇔ (3)

Puisque toute variété affine est un ensemble analytique irréductible, alors l'absence d'ensemble analytique irréductible au bord entraine l'absence de variété affine. En effet les ensembles analytiques dans $\mathbb{C}^n$, sont définis à partir de fonctions holomorphes (analytiques) et les variétés affines à partir de polynômes (qui sont aussi des fonctions holomorphes). Ainsi (3) ⇒ (2).
Il nous reste donc à montrer que (2) ⇒ (3).

Définition 2.1 (Enveloppe convexe)
Soit A une partie d'un ensemble E, l'enveloppe convexe de l'ensemble A est la plus petite partie convexe de E qui contient A.
C'est l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A.

Définition 2.2 [2] (Hyperplan de support)
Un hyperplan de support d'un ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est un hyperplan qui vérifie les propriétés suivantes :

1. S est entièrement contenu dans un des deux demi-espaces fermés délimités par l'hyperplan.
2. Il existe au moins un point du bord de S qui appartient à l'hyperplan.

Preuve 2.1 (2) ⇒ (3)
D'après [2] on a observé la chose suivante : Si V est une variété q-dimensionnelle de $\mathbb{C}^n$, son enveloppe convexe $\hat{V}$ contient une variété affine de dimension q.
Pour $n = 1$, on a $q = 1$ (puisque $1 \leq q \leq n$) donc V est une variété de dimension 1 de $\mathbb{C}$, donc une courbe, ainsi son enveloppe convexe contient un sous ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$.
De façon générale pour n on a l'induction suivante sur les dimensions : Si $\hat{V}$ est d'intérieur non vide (dans $\mathbb{C}^n$) alors cet intérieur est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$ donc une variété affine. Si l'intérieur de $\hat{V}$ est vide, alors $\hat{V}$ est contenu dans un hyperplan réel.
Notons cet hyperplan $\{a_1 y_1 + ... + a_n y_n = 0\}$. En effectuant le changement de coordonnées suivant

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = x_n,$$

cet hyperplan devient $\{x_n = 0\}$.
D'après la propriété de l'image ouverte des fonctions holomorphes non constantes appliquée à la restriction de la fonction z_n à V, c'est à dire la fonction

$$p : \mathbb{C}^n_{|V} \to \mathbb{C} \text{ telle que } \quad p(z_1, \ldots, z_n) = z_n,$$

V est contenu dans l'hyperplan complexe $\{z_n = 0\}$.
En effet puisque p est holomorphe non constante donc l'image de tout ouvert par p est un ouvert de $\mathbb{C}$. Ainsi en supposant que V n'est pas inclus dans l'hyperplan complexe $\{z_n = 0\}$, l'image de V par p est un ouvert de $\mathbb{C}$ inclus dans l'axe des imaginaires (dû au fait que $V \subset \{x_n = 0\}$), ce qui est absurde. De ce fait V est inclus dans l'hyperplan complexe $\{z_n = 0\}$.

Pour prouver que (2) ⇒ (3) dans le Théorème (1), on suppose maintenant que le bord de Ω contient une

variété V analytique de dimension q.
Soit p_0 un point régulier de V. On suppose sans perte de généralité qu'un hyperplan de support pour Ω est donné par $\{x_n = 0\}$ en p_0. L'argument dans le paragraphe précédent montre si V_{p_o} est l'intersection entre V et un petit voisinage de p_0 alors,

$$V_{p_o} \subseteq \{z_n = 0\} \subseteq \{x_n = 0\} .$$

Par conséquent l'enveloppe convexe de V_{p_o} est contenu à la fois dans $\{z_n = 0\}$ et dans $\bar{\Omega}$, donc dans $b\Omega$. Or par l'observation précédente cet enveloppe convexe contient une variété affine de dimension q.
Donc si le bord de Ω ne contient pas de variété affine il ne contient pas d'ensemble analytique irréductible, d'où (2) $\Rightarrow$ (3).

2.2.2 Troisième partie 2)$\Rightarrow$ 4)

Dans cette partie on montre que l'absence de variété affine sur le bord entraine la compacité de N_q.

Définition 2.3 [4]

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné, on dit que $b\Omega$ satisfait la propriété P_q de Catlin si $\forall\ M > 0,\ \exists$ un voisinage $U = U_M$ de $b\Omega$ et une fonction lisse $\lambda = \lambda_M$ de classe C^2 sur U tel que :
(i) $0 \leq \lambda(z) \leq 1,\ \forall z \in U$ *et*
(ii) $\forall z \in U,$ la somme des q valeurs propres de la forme hermitienne

$$\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\right)_{j,k},$$

est supérieure ou égale à M. C'est-à-dire pour toute $(0, q)$-forme différentielle u et $z \in U$,

$$\sum_{|K|=q-1} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) u_{j,K}(z) \overline{u}_{k,K}(z) \geq M|u(z)|^2.$$

Pour montrer que (2) $\Rightarrow$ (4), on aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.1 [4] Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné dont le bord satisfait le propriété P_q de Catlin, Alors on a la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann sur Ω.

Le Lemme suivant nous sera utile pour la preuve de la proposition (2.1).

Lemme 2.1 Soit Ω un domaine borné pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, avec $1 \leq q \leq n$.
N_q est compact sur $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ si et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que l'on ait l'estimateur compact suivant :

$$||u||^2 \leq \varepsilon\Big(||\bar{\partial} u||^2 + ||\bar{\partial}^* u||^2\Big) + C_\varepsilon ||u||^2_{-1}.$$

Pour tout $u \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*)$.

Preuve 2.2 Soit $j_q : \mathrm{D}(\bar{\partial}) \cap \mathrm{D}(\bar{\partial}^*) \hookrightarrow L^2_{(0,q)}(\Omega)$ l'injection canonique où $\mathrm{D}(\bar{\partial}) \cap \mathrm{D}(\bar{\partial}^*)$ est muni de la norme du graphe [5]. D'après le Théorème 2.9 (cf [27]), on a $N_q = j_q \circ j_q^*$ comme opérateur sur $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ et $N_q = j_q^*$ de $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ à $\mathrm{D}(\bar{\partial}) \cap \mathrm{D}(\bar{\partial}^*)$. La Proposition 4.2 de [27] nous dit que si Ω est un domaine pseudoconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$ avec $1 \leq q \leq n$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

5. La norme du graphe d'une fonction $f : X \to Y$ est définie comme la norme de l'opérateur linéaire $T : X \to X \times Y$ défini par $T(x) = (x, f(x))$:

$$\|f\|_{\text{graphe}} = \inf\{\|T\| : T(x) = (x, f(x)), x \in X\}$$

où $\|T\|$ est la norme de l'opérateur T définie comme la borne supérieure des ratios $\|Tx\|_Y / \|x\|_X$ pour tous les vecteurs $x \in X$ non nuls.

N_q est un opérateur compact de $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ dans lui même,
N_q est un opérateur compact de $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ dans $\mathrm{D}(\bar\partial)\cap\mathrm{D}(\bar\partial^*)$,
l'application qui va de $\mathrm{D}(\bar\partial)\cap\mathrm{D}(\bar\partial^*)$ à $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ est compact.
Autrement dit $j_q\circ j_q^*$ compact $\Leftrightarrow j_q^*$ compact $\Leftrightarrow j_q$ compact. Mais un opérateur A est compact si et seulement si A^* est compact et un opérateur de la forme AA^* est compact si et seulement si A et A^* sont compacts. Retenons aussi que le fait de dire que $\bar\partial^* N_q$ et $\bar\partial^* N_{q+1}$ sont compacts dans $L^2(\Omega)\cap\ker(\bar\partial)$ est équivalent de dire que $\bar\partial^* N_q$ et $\bar\partial^* N_{q+1}$ sont compacts sur tout espace $L^2(\Omega)$, puisque les deux s'annulent sur le complément orthogonal de $\ker(\bar\partial)$. De plus, on a la formule suivante

$$\begin{aligned} N_q &= N_q\left(\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial\right)N_q\\ &= \left(N_q\bar\partial\right)\bar\partial^*N_q+\bar\partial^*N_{q+1}\left(N_{q+1}\bar\partial\right)\\ &= \left(\bar\partial^*N_q\right)^*\bar\partial^*N_q+\bar\partial^*N_{q+1}\left(\bar\partial^*N_{q+1}\right)^*, \end{aligned}\tag{6}$$

les parenthèses sont destinées à indiquer que nous considérons $N_q\bar\partial$ et $N_{q+1}\bar\partial$ comme des opérateurs bornés sur $L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ et $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ respectivement (alternativement, on peut observer qu'il suffit d'établir (6) pour les formes lisses à supports compacts, puisque l'espace de telles formes différentielles est dense dans $L^2_{(0,q)}(\Omega)$. Les deux opérateurs à droite de (6) sont bornés, donc N_q est compact si et seulement si ces deux opérateurs sont compacts. Mais encore une fois, un opérateur de la forme A^*A est compact si et seulement si A est compact.
Montrons maintenant le fait de dire que l'application qui va de $\mathrm{D}(\bar\partial)\cap\mathrm{D}(\bar\partial^*)$ à $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ est compact, est équivalente à dire pour tout $\varepsilon>0$, $\exists\, C_\varepsilon$ telle que on a l'estimation compact suivant

$$||u||^2\le\varepsilon\Big(||\bar\partial u||^2+||\bar\partial^*u||^2\Big)+C_\varepsilon||u||^2_{-1},$$

pour tout $u\in D(\bar\partial)\cap D(\bar\partial^*)$.
D'après la propriété (i) du Lemme 4.3 de [27] on a

$$\|Tx\|_Y\le\epsilon\|x\|_X+C_\epsilon\|Sx\|_Z.$$

où $T:X\to Y$ est un opérateur linéaire et $S:X\to Z$ un opérateur linéaire, injectif et continu. Donc en posant $X=D(\bar\partial)\cap D(\bar\partial^*)$, $Y=L^2_{(0,q)}(\Omega)$ $\quad T=j_q$,

$$S:D(\bar\partial)\cap D(\bar\partial^*)\subset L^2_{(0,q)}(\Omega)\to W^{-1}_{(0,q)}(\Omega),$$

avec $Z=W^{-1}_{(0,q)}(\Omega)$. D'après le Lemme de Rellich (voir Théorème (1.2)), S est compact.

On peut maintenant faire la preuve de la proposition (2.1). Elle est tirée de [4].

Preuve 2.3 On utilisera la méthode de l'estimation de Carleman pour l'opérateur $\bar\partial$, telle qu'introduit par Hörmander [16]. On rappelle que pour une fonction donnée Φ sur Ω et une $(0,q)$- forme différentielle $f=\sum\limits_{|I|=q}f_Id\bar z_I$, on définit

$$\|f\|^2_\Phi=\int_\Omega|f|^2e^{-\Phi}dV,$$

où $|f|^2$ est donnée par

$$|f|^2=\sum_{|I|=q}|f_I|^2.$$

On note par $L^2_{(0,q)}(\Omega,\Phi)$ l'espace des $(0,q)$-formes différentielles f telles que $\|f\|^2_\Phi<\infty$.
Pour toutes fonctions poids Φ_1 , Φ_2 et Φ_3, l'opérateur $\bar\partial$ nous permet de définir les opérateurs T et S qui sont fermés et denses comme suit :

$$L^2_{(0,0)}(\Omega,\Phi_1)\xrightarrow{T}L^2_{(0,1)}(\Omega,\Phi_2)\xrightarrow{S}L^2_{(0,2)}(\Omega,\Phi_3),$$

avec $Tf = \overline{\partial} f$ et $Sf = \bar{\partial} f$ où f est une $(0,0)$-forme différentielle ou une $(0,1)$-forme différentielle respectivement. D'après [16], l'adjoint T^* est défini par

$$T^* f = e^{-\Phi_1}\bar{\partial}^*(e^{-\Phi_2} f),\ f \in D(T^*).$$

Maintenant on suppose que Φ et Ψ sont des fonctions dans $C^2(\overline{\Omega})$, telles que :

$$\Phi_1 = \Phi - 2\Psi,\ \Phi_2 = \Phi - \Psi\ et\ \Phi_3 = \Phi.$$

Toujours dans [16] on a l'estimation suivante :

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j e^{-\Phi} dV + \int_{b\Omega} \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j e^{-\Phi} dS + \sum_{i,j=1} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}_j} \right\|^2_{\Phi_3}$$
$$\leq \|Sf\|^2_{\Phi_3} + 2\|T^* f\|^2_{\Phi_1} + 2\int_\Omega |\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial z_j} f_j|^2 e^{-\Phi} dV,\ \forall f \in D(T^*) \cap D(S), \tag{7}$$

où r est la fonction définissante de Ω. En fait ce qui fait différence entre l'estimation obtenue dans [16] et (7) est le fait que l'intégrale sur le bord n'existe pas. Ce terme intervient ici car la fonction Ψ est dans $C^2(\overline{\Omega})$ et ne s'annule pas au bord comme dans [16]. Aussi en examinant la preuve de l'estimation (7), on peut toujours vérifier que le terme $2\displaystyle\int_\Omega |\partial\Psi|^2 |f|^2 e^{-\Phi} dV$ trouvé dans [16] peut être remplacé par le dernier terme de l'estimation (7).

L'idée de cette preuve est de choisir des fonctions Φ et Ψ pour que tout d'abord $\Phi_2 = \Phi - \Psi \equiv 0$. De cette façon l'opérateur

$$T^* f = e^{\Phi_1}\bar{\partial}^*(e^{\Phi_2} f) = e^{\Phi_1}\bar{\partial}^* f$$

est simplement un multiple de $\bar{\partial}^* f$ par une fonction lisse. Donc il est possible d'estimer $2\|T^* f\|^2_{\Phi_1}$ en termes de $\|\bar{\partial}^* f\|^2$. Ensuite on doit choisir Φ et Ψ de telle sorte que le dernier terme de (7) soit dominé par le premier terme de (7). Donc on pose $\Phi = \Psi = \dfrac{1}{6} e^\lambda$, $\lambda \in C^\infty(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 e^\lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial e^\lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \Big) f_i \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \left(e^\lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \right) f_i \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \Big(\frac{e^\lambda \partial \lambda}{\partial z_i} f_i \Big) \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \Big) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n e^\lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial z_i} f_i \Big) \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \Big) = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2.$$

Par suite

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j = \frac{1}{6} e^\lambda \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j + \frac{1}{6} e^\lambda \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial z_j} f_j \right|^2 &= \left| \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n \frac{\partial e^\lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2 \\
&= \frac{1}{36} \left| e^\lambda \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2 \\
&= \frac{1}{36} e^{2\lambda} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2
\end{aligned}$$

Si on substitue ces deux expressions obtenues ci-dessus dans (7), on obtient l'estimation suivante :

$$\frac{1}{6}\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}f_i\overline{f}_j e^{\lambda-\Phi}dV+\frac{1}{6}\int_{\Omega}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial z_j}f_j\right|^2(e^{\lambda}-\frac{2}{6}e^{2\lambda})e^{-\Phi}dV\leq\|Sf\|^2_{\Phi_3}+\|T^*f\|^2_{\Phi_1},\tag{8}$$

car

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}f_i\overline{f}_j\geq 0.$$

Si $0\leq\lambda\leq 1$, alors $e^{\lambda}-\dfrac{2}{6}e^{2\lambda}\geq 0$. Donc

$$\frac{1}{6}\int_{\Omega}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial z_j}f_j\right|^2\Big(e^{\lambda}-\frac{2}{6}e^{2\lambda}\Big)e^{-\Phi}dV\geq 0.$$

En outre si $0\leq\lambda\leq 1$, $e^{\lambda-\Phi}\geq\dfrac{3}{4}$ et $e^{-\Phi}\leq 1$, alors

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}.\frac{1}{6}\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}f_i\overline{f}_j dV &\leq \int_{\Omega}|\bar{\partial}f|^2e^{-\Phi}dV+2\int_{\Omega}|\bar{\partial}^*f|^2e^{-\Phi}dV\\ &\leq 2\|\bar{\partial}f\|^2+2\|\bar{\partial}^*f\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que si pour toute fonction $\lambda\in C^2(\overline{\Omega})$, $0\leq\lambda\leq 1$, alors

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}f_i\overline{f}_j dV\leq 16\|\bar{\partial}f\|^2+16\|\bar{\partial}^*f\|^2.\tag{9}$$

On observe que si $\lambda(z)=\left|\dfrac{z}{D}\right|^2$ avec $D:=\sup\{|z|;z\in\overline{\Omega}\}$, alors en s'appuyant sur (9) on a

$$\|f\|^2\leq 16D^2Q(f,f).\tag{10}$$

Partant des hypothèses de la définition de la propriété P_q, pour tout $M>0$, il existe une fonction $\lambda\in C^2(\overline{\Omega})$ avec $0\leq\lambda\leq 1$ telle que pour tout $z\in b\Omega$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}t_i\bar{t}_j>M|t|^2.\tag{11}$$

Par continuité des dérivées secondes de λ, il existe un nombre positif δ (qui dépend de M) tel que (11) est valable pour tout $z\in S_\delta=\Big\{z;-\delta\leq r(z)\leq 0\Big\}$. L'inégalité (9) implique que :

$$M\int_{S_\delta}|f|^2dV\leq 16Q(f,f).\tag{12}$$

On choisit $\gamma_\delta\in C_0^\infty(\Omega)$ (l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω) telle que $\gamma_\delta(z)=1$ à chaque fois que $r(z)\leq-\delta$.
Pour qu'une constante a soit déterminée, on a l'inégalité

$$\|\gamma_\delta f\|^2\leq a\|\gamma_\delta f\|_1^2+a^{-1}\|\gamma_\delta f\|^2_{-1}.$$

Par l'inégalité de Garding, il existe une constante C_1 qui dépend seulement du diamètre de Ω telle que

$$\|\gamma_\delta f\|_1^2\leq C_1Q(\gamma_\delta f,\gamma_\delta f).$$

Ici, nous avons omis le terme usuel de la forme $C\|\gamma_\delta f\|^2$ car, d'après l'inégalité (10), on a

$$\|\gamma_\delta f\|^2\leq 16D^2Q(\gamma_\delta f,\gamma_\delta f).$$

Ainsi $\|\gamma_\delta f\|^2$ peut être estimée

$$\|\gamma_\delta f\|_1^2 \leq C_1 Q(\gamma_\delta f, \gamma_\delta f) \leq 2C_1\left(\|\gamma_\delta \bar{\partial} f\|^2 + \|\gamma_\delta \bar{\partial}^* f\|^2\right) + 2C_1\left(\|[\gamma_\delta, \bar{\partial}]f\|^2 + \|[\gamma_\delta, \bar{\partial}^*]f\|^2\right).$$

Puisque la somme des termes du commutateur est bornée par $C_2\|f\|^2$ pour une certaine constante C_2 qui dépend de δ, on obtient l'inégalité

$$\|\gamma_\delta f\|^2 \leq 2aC_1 Q(f,f) + 2aC_1C_2\|f\|^2 + a^{-1}\|\gamma_\delta f\|_{-1}^2. \tag{13}$$

Maintenant on choisit a telle que $2aC_1 < 4/M$ et $2aC_1C_2 < \frac{1}{2}$. En combinant (12) et (13), on obtient

$$\begin{aligned} M\|f\|^2 &\leq M\int_{S_\delta} |f|^2 dV + M\|\gamma_\delta f\|^2 \\ &\leq 20Q(f,f) + (M/2)\|f\|^2 + a^{-1}M\|\gamma_\delta f\|_{-1}^2, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\|f\|^2 \leq (40/M)Q(f,f) + (2/a)\|\gamma_\delta f\|_{-1}^2.$$

Maintenant on choisit M telle que $40/M < \varepsilon$ et soit $\xi_\epsilon = (2/a)^{1/2}\gamma_\delta$, on obtient alors l'estimation de compacité suivante

$$\|f\|^2 \leq \varepsilon Q(f,f) + \|\xi_\varepsilon f\|_{-1}^2.$$

Ainsi, d'après la Proposition (2.1), l'opérateur N_q est compact. ■

Pour faire le lien entre l'absence de variété affine au bord et la propriété de Catlin on va se servir de la Proposition (2.2). Mais avant cela donnons quelques définitions et théorèmes qui seront utiles pour la preuve de cette Proposition.

Définition 2.4 (Ensemble à pic)
Un sous ensemble fermé E de X est un ensemble à pic s'il existe une fonction $f \in H(X)$ (qui est la fermeture des fonctions holomorphes dans l'algèbre des fonctions continues) telle que $f(z) = 1$ sur E et $|f(z)| < 1$ sur $X \setminus E$. La fonction f sera dite fonction pic.

Définition 2.5 [31] Soit X un sous ensemble compact de $\mathbb{C}^n$. On appelle enveloppe polynômialement convexe de X l'ensemble

$$h(X) := \left\{z \in \mathbb{C}^n, |Q(z)| \leq \max_{x\in X} |Q(x)| \text{ pour tout polynôme } Q\right\}.$$

X est dit polynômialement convexe si $h(X) = X$.

Théorème 2 [31](Oka-Weil)

Soit X un ensemble polynômialement convexe de $\mathbb{C}^n$. Alors pour toute fonction holomorphe f sur un voisinage de X, il existe une suite de polynômes $\{P_j\}$ dans $z_1, ..., z_n$ tel que

$$P_j \longrightarrow f \text{ uniformément sur X.}$$

Définition 2.6 [10] Une mesure μ sur X est dite orthogonale de A si $\int_X f d\mu = 0$, $\forall f \in A$. On notera $\mu \in A^\perp$.

Le Théorème suivant est celui des ensembles pics de Glicksberg.

Théorème 3 [10] E est un ensemble pic si et seulement si pour toute mesure de Borel finie $v \in H(X)^\perp$ on a $v_E \in H(X)^\perp$ où v_E est la restriction de v sur E.

Proposition 2.2 Soient $X \subset \mathbb{C}^n$ un sous ensemble compact convexe, $z_0 \in X$ et $1 \leq q \leq n$. Alors il existe un sous ensemble affine L de dimension inférieure ou égale à $q-1$ tel que $X \cap L$ soit un ensemble pic si et seulement si il ne contient pas de variété affine de dimension supérieure ou égale à q contenant z_0.

Entamons donc la preuve de la Proposition (2.2).

Preuve 2.4

Supposons que $X \cap L$ soit un ensemble pic et qu'il contienne une variété affine, c'est-à-dire un sous ensemble ouvert qu'on va noter θ. Alors il existe une fonction $f \in H(X)$ telle que $f(z) = 1$ sur $X \cap L$ et $|f(z)| < 1$ sur $X \setminus L$.
Comme f est holomorphe non constante, alors d'après la propriété de l'image ouverte, l'image de tout ouvert par f est un ouvert.
Or $f(\theta) = \{1\}$ qui n'est pas un ouvert, ce qui est absurde.
Donc $X \cap L$ ne contient pas de variété affine. D'où le premier sens de la proposition.
Maintenant place à la preuve du sens inverse.
Définissons d'abord la branche principale de la racine carrée. C'est la fonction $h : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée comme suit :
pour $z_n = x + iy$

$$h(z) =_{br} \sqrt{z_n} := e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{2}}\right).$$

On peut voir que h est définie sur $\{z \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_n) \geq 0\}$ et que $(h(z))^2 = ({}_{br}\sqrt{z_n})^2 = z_n$.
On raisonne par récurrence.
Pour $n = 1$ on a $q = 1$, donc L est de dimension 0 ; c'est un point.
Notons ce point l. Donc $X \cap L = \{l\}$.
On suppose sans perte de généralité que $X \subseteq \{Re(z-l) \geq 0\}$.
Étant donné $f(z) = exp(-_{br}\sqrt{z-l})$, définie sur $X \cap L = \{l\}$, on a $f(z) = 1$ sur $X \cap L$ et $|f(z)| < 1$ sur $X \setminus L$.
Ainsi $X \cap L$ est un ensemble pic.
Supposons que l'implication est vraie jusqu'au rang $n-1$ et montrons qu'elle est vraie au rang n. Puisqu'il n'y a pas de variété affine de dimension supérieure ou égale à q contenant z_0 contenue dans X, alors z_0 est un point du bord de X.
Sans perte de généralité, on suppose que z_0 est l'origine et $X \subseteq \{Re z_n \geq 0\}$. Posons $g(z) = exp(-_{br}\sqrt{z_n})$. Et $J = X \cap \{z_n = 0\}$. Si $q = n$, on prendra $L = \{z_n = 0\}$.
Ainsi J est un ensemble pic et la fonction g une fonction pic pour J.
Maintenant supposons que $1 \leq q \leq n-1$.
Alors J est un sous ensemble convexe compact de $\mathbb{C}^{n-1}$ et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un sous espace affine complexe $L \subseteq \{z_n = 0\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$ de dimension inférieure ou égale à $q-1$ tel que $J \cap L$ soit un ensemble pic pour $H(J)$.
Montrons à présent que $X \cap L = J \cap L$ est un ensemble pic pour $H(X)$.
Soit ν une mesure de Borel finie sur X telle que $\nu \in H(X)^{\perp}$. Ainsi nous avons pour tout polynôme holomorphe f et un entier m que $\int_X f g^m \mathrm{d}\nu = 0$, donc $\int_J f g^m \mathrm{d}\nu + \int_{X\setminus J} f g^m \mathrm{d}\nu = 0$.
En tendant m vers $+\infty$ on obtient que $\int_J f \mathrm{d}\nu = 0$. L'ensemble convexe J est polynômialement convexe (cf [28] Lemme 1.4) donc les polynômes holomorphes sont denses dans $H(J)$ par le Théorème d'approximation d'Oka-Weil (2).
Par conséquent, $\nu_J \in H(J)^{\perp}$ et donc $\nu_{J\cap L} \in H(J)^{\perp}$.
En utilisant le Théorème de Glicksberg (3) dans l'autre direction ; on conclut que $J \cap L$ est un ensemble pic pour $H(X)$. Ceci complète la récurrence et la preuve de la Proposition (2.2). ■

Maintenant on peut achever la preuve de (2) $\Rightarrow$ (4).

Preuve 2.5 Pour un ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{C}^n$, on note $P_q(U)$ l'ensemble des fonctions continues λ sur U tels que pour tout $z \in U$ et $\{t_1, ..., t_q\}$ une famille de vecteurs orthonormaux de $\mathbb{C}^n$; la fonction

$$\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_q) \in \mathbb{C}^q \mapsto \lambda(z + \zeta_1 t_1 + ... + \zeta_q t_q)$$

est sousharmonique sur $\{\zeta \in \mathbb{C}^q; z + \zeta_1 t_1 + ... + \zeta_q t_q \in U\}$. Ainsi $P_q(U)$ est donc l'ensemble des fonctions continues sur U qui sont sousharmoniques sur chaque sous espace affine de dimension q. En particulier, $P_1(U)$ est l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques continues et $P_n(U)$ est l'ensemble des fonctions sousharmoniques continues. $P_q(U)$ est un cône convexe de $C(U)$ (C'est à dire un sous ensemble d'un espace vectoriel qui est stable par combinaison linéaire avec des scalaires positifs) qui est fermé si on prend le maximum ponctuel d'un nombre fini de ses éléments. On note que chaque fonction dans $P_q(U)$ est localement une limite uniforme d'éléments C^∞-lisses de $P_q(O)$ avec O un ensemble ouvert légèrement plus petit. Cela découle de l'argument usuel de la suite régularisante. Finalement on a

$$-\sum_{j=1}^{q-1}|z_j|^2 + (q-1)\sum_{j=q}^{n}|z_j|^2 \in P_q(\mathbb{C}^n).$$

Maintenant pour un domaine pseudoconvexe borné Ω, on note $P_q(b\Omega)$ la fermeture dans $C(b\Omega)$ de $P_q(V)$ avec V un voisinage de $b\Omega$. Une mesure de probabilité μ sur $b\Omega$ est dite P_q-mesure (cf [11]) pour $z \in b\Omega$ si

$$\lambda(z) \leq \int_{b\Omega} \lambda \mathrm{d}\mu \qquad \lambda \in P_q(b\Omega). \tag{14}$$

Soit Ω un domaine convexe à bord et z_0 un point du bord par lequel il n'y a pas de variété affine de dimension supérieure ou égale à q qui soit contenue dans $b\Omega$. On suppose que la seule P_q-mesure pour z_0 est la masse de Dirac en z_0.

On note qu'il n'y a aussi aucune variété affine de dimension supérieure ou égale à q contenant z_0 qui soit contenue dans $\bar{\Omega}$ (C'est un cas particulier de l'argument à la fin de la section 2). D'après la Proposition (2.2), il existe un sous espace affine complexe L de dimension inférieure ou égale à $q-1$ tel que $b\Omega \cap L$ soit un ensemble pic pour $H(\bar{\Omega})$. Soit f la fonction pic correspondante. Puisque $f \in H(\bar{\Omega})$, alors $|f| \in P_q(b\Omega)$ d'après le Corollaire 2.1.11 dans [18]. La relation (14) nous montre que toute P_q-mesure ν pour z_0 est à support dans $b\Omega \cap L$. Après un changement de coordonnées on peut supposer que z_0 est l'origine et $L \subseteq \{z_q = ... = z_n = 0\}$. En (14) prenons maintenant

$$\lambda = -\sum_{j=1}^{q-1}|z_j|^2 + (q-1)\sum_{j=q}^{n}|z_j|^2 \in P_q(\mathbb{C}^n). \tag{15}$$

On sait maintenant que le support de ν est contenu dans L où λ est réduit à $-\sum_{j=1}^{q-1}|z_j|^2$. On obtient ainsi de (14) que le support de ν est le point z_0. Après on fait appel au Théorème d'Edwards [11] (Théorème (2.2)) qui dit que pour toute fonction continue u sur $b\Omega$ et $z \in b\Omega$,

$$\inf\left\{\int_{b\Omega} u\mathrm{d}\mu,\ \mu\ P_q - \text{mesure pour } z\right\} = \sup\{\lambda(z);\ \lambda \in P_q(b\Omega),\ \lambda \leq u,\ \text{sur } b\Omega\}.$$

Du fait que toutes les mesures ont pour support des singletons, le théorème donne :

$$u(z) = \sup\{\lambda(z);\ \lambda \in P_q(b\Omega),\ \lambda \leq u,\ sur\ b\Omega\} \tag{16}$$

pour toute fonction $u \in C(b\Omega)$.

Pour $M > 0$, soit $u_M(z) = -M|z|^2$. Il découle de (16) et d'un argument de compacité similaire à la preuve du Théorème de Dini que u_M peut être approximé uniformément sur $b\Omega$ par des fonctions dans $P_q(b\Omega)$, donc par des fonctions qui sont lisses et dans $P_q(V)$ avec V un voisinage de $b\Omega$. En particulier, il existe un voisinage U de $b\Omega$ et une fonction $\lambda \in P_q(U) \cap C^2(U)$, tels que $0 \leq \lambda + M|z|^2 \leq 1$ sur U (après rétrécissement de U si nécessaire).

La somme des q plus petites valeurs propres de la hessienne de $\lambda + M|z|^2$ est supérieure ou égale à $qM \geq M$ (parce que $\lambda \in P_q(U)$, et la somme des q plus petites valeurs propres de la hessienne est supérieure ou égale à 0). Ainsi Ω satisfait les hypothèses de la Proposition (2.1) donc le $\bar{\partial}$-Neumann est compact, ce qui termine la preuve de (2) $\Rightarrow$ (4). ■

2.3 Conditions nécessaires de compacité de la solution de l'opérateur du $\bar{\partial}$

2.3.1 Quatrième partie (1)⇒ (2)

Pour montrer que l'existence d'une solution compacte pour le $\bar{\partial}$ sur les $(0,q)$-formes différentielles implique l'absence de variété affine au bord de Ω, on va se servir du Théorème d'Ohsawa Takegoshi ([22] ; [21]) mais aussi du Théorème de convergence de Vitali.

Théorème 4 [8] (Vitali) Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ avec $\mu(X)<\infty$un espace mesuré, $p\in[1,+\infty[$ et $f,(f_n)_{n\in\mathbb{N}}:X\to\mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles que les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $L^p(X)$. Alors $f\in L^p$ et $f_n\to f$ dans L^p si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f.
2. La famille $(f_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable [6].

Théorème 5 [22]

Soient Ω un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, $\psi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ une fonction plurisousharmonique et $H\subset\mathbb{C}^n$ un hyperplan complexe. Il existe une constante C dépendant seulement du diamètre de Ω telle que pour toute fonction $f\in H\cap\Omega$ satisfaisant

$$\int_{\Omega\cap H} e^{-\psi}|f|^2\mathrm{d}V_{n-1}<\infty,$$

il existe une fonction holomorphe F satisfaisant $F_{|\Omega\cap H}=f$ et

$$\int_{\Omega} e^{-\psi}|F|^2\mathrm{d}V_n\le C\int_{\Omega\cap H} e^{-\psi}|f|^2\mathrm{d}V_{n-1}.$$

où dV_{n-1} est une mesure Lebesgue de dimension $2n-1$.

Dans la suite du document on aura besoin du noyau de Bergman, et pour ce faire nous allons introduire les notions suivantes tirées de [1] qui vont nous aider à le définir.
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$.
On note $H^2(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes L^2-intégrables sur Ω. Pour $f\in H^2(\Omega)$, $|f|^2$ est sous harmonique et pour $B(z,r)\subset\Omega$

$$|f(z)|^2\le\frac{1}{\lambda(B(z,r))}\int_{B(z,r)}|f(z)|^2\mathrm{d}\lambda.$$

Ainsi

$$|f(z)|^2 \quad\le\quad \frac{c_n}{(dist(z,\partial\Omega))^n}\|f\|_\Omega \tag{17}$$

et

$$\sup_K|f(z)|\le C(K,\Omega)\|f\|_\Omega \text{ avec } K\subset\Omega \text{ un compact}$$

où $\|f\|_\Omega$ désigne la norme L^2 de f sur Ω. Il en résulte que la convergence dans $H^2(\Omega)$ implique la convergence localement uniforme, et donc $H^2(\Omega)$ est un sous espace fermé de L^2. De ce fait $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable avec le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega f\bar{g}\mathrm{d}\lambda.$$

6. Une famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ définies sur un espace mesuré (X,Σ,μ) est dite uniformément intégrable si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout ensemble mesurable E avec $\mu(E)<\delta$ et pour tout sous-ensemble fini $B\subset A$, on a :

$$\sup_{\alpha\in B}\int_E|f_\alpha|\,d\mu<\varepsilon$$

De par (2.2), pour $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction

$$f \in H^2(\Omega) \longrightarrow f(\omega) \in \mathbb{C}$$

est continue.
Ainsi d'après le Théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de $H^2(\Omega)$, que l'on note $K(.,\omega)$, tel que

$$f(\omega) = \langle f, K(.,\omega)\rangle$$

ou de façon équivalente

$$f(\omega) = \int_\Omega f(z)\overline{K(z,\omega)}\mathrm{d}\lambda(z)$$

pour tout $f \in H^2(\Omega)$.

Définition 2.7 (Noyau de Bergman) [17]
La fonction

$$K_\Omega : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

est appelée le noyau de Bergman pour le domaine Ω.

Propriétés 2.1 [17]
Le noyau de Bergman vérifie les propriétés suivantes :

1. $|K_\Omega(x,y)|^2 \leq K_\Omega(x,x)K_\Omega(y,y)$ pour tous $x, y \in \Omega$.

2. $\dfrac{|f(z)|}{\sqrt{K_\Omega(z,z)}} \leq \|f\|_\Omega$.

3. On a : $0 \leq K_\Omega(z,z) = \|K_\Omega(.,z)\|^2_\Omega = \sup\left\{|f(z)|^2 : \ f \in H^2(\Omega), \ \|f\| = 1\right\}$.
De ce fait, si $\Omega \subset \Omega_1$, alors $K_{\Omega_1}(z,z) \leq K_\Omega(z,z)$, pour tout $z \in \Omega$.

Nous aurons aussi besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.2 Soit Ω un domaine convexe borné de $\mathbb{C}^n$. On note $K_\Omega(z,w)$ le noyau de Bergman défini sur Ω.

1. Pour tous $p_0 \in b\Omega$ et $p_1 \in \Omega$, il existent des constantes $C > 0$ et $\delta_0 > 0$ telles que :

$$K_\Omega(p_\delta, p_\delta) \geq CK_\Omega(p_{2\delta}, p_{2\delta})$$

pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$ où $p_\delta = p_0 + \delta\dfrac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|}$.

2. Pour toute suite $(p_j)_j$ d'éléments de Ω convergeant vers $p_0 \in b\Omega$,

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{K_\Omega(z,p_j)}{\sqrt{K_\Omega(p_j,p_j)}} = 0$$

localement uniformément [7] sur Ω.

Preuve 2.6

7. Une suite de fonctions $(f_n) : X \to M$ converge localement uniformément vers $f : X \to M$ si et seulement si tout point de X possède un voisinage sur lequel (f_n) converge uniformément vers f.

1) Soit U une boule de centre p_0 et de rayon r qui est le minimum entre la distance $d(p_1, b\Omega)$ et $\dfrac{\|p_1 - p_0\|}{2}$.
Posons $\vec{n} := \dfrac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|}$.
Comme Ω est convexe, alors $T_\delta(\Omega \cap U) \subset \Omega$ pour $0 < \delta < \dfrac{\|p_1 - p_0\|}{2}$ où $T_\delta(z) = z + \delta\vec{n}$.
On pose $\delta_0 = \dfrac{r}{2}$.
Ainsi pour $0 \leq \delta \leq \delta_0$,

$$K_\Omega(p_\delta, p_\delta) \geq CK_{\Omega\cap U}(p_\delta, p_\delta) = CK_{T_\delta(\Omega\cap U)}(p_{2\delta}, p_{2\delta}) \geq CK_\Omega(p_{2\delta}, p_{2\delta}).$$

2) Sans perte de généralité on suppose que Ω contient l'origine. Il suffit d'établir la convergence simple. D'après le point 2. des propriétés (2.1) et le Théorème (4) de Vitali, on obtient la convergence localement uniforme.
Pour $z \in \Omega$, soit $f(\omega) = K_\Omega(z, \omega)$.
Dans ce cas, $\|f(\omega) - f(t\omega)\|_\Omega \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow 1^-$. Maintenant on prend t de sorte que $0 < t < 1$, on obtient,

$$\begin{aligned}\frac{|f(p_j)|}{\sqrt{K_\Omega(p_j, p_j)}} &\leq \frac{|f(p_j) - f(tp_j)|}{\sqrt{K_\Omega(p_j, p_j)}} + \frac{|f(tp_j)|}{\sqrt{K_\Omega(p_j, p_j)}} \\ &\leq \|f(\omega) - f(t\omega)\|_\Omega + \frac{|K_\Omega(z, tp_j)|}{\sqrt{K_\Omega(p_j, p_j)}}.\end{aligned}$$

Le domaine est convexe donc satisfait la condition de cône externe (cf [17] Théorème 6.1.17) c'est-à-dire que pour un point $z_0 \in b\Omega$, il existe $r \in]0, 1]$, $a \geq 1$, et une suite $(\omega_j)_j$ de points n'appartenant pas à Ω tels que

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} \omega_j = z_0$$

et

$$\Omega \cap B(\omega_j, r\|\omega_j - z_0\|^a) = \emptyset.$$

Sous ces conditions, pour toute suite $(z_j)_j$ telle que $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} z_j = z_0$, on a

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} K_\Omega(z, z) = +\infty.$$

Donc si $j \longrightarrow +\infty$, alors $K_\Omega(p_j, p_j) \longrightarrow +\infty$.
Ainsi en tendant $j \longrightarrow +\infty$ puis $t \longrightarrow 1^-$, on obtient la partie 2 du Lemme.

Nous pouvons maintenant donner la preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) dans le Théorème (1). C'est-à-dire que l'existence d'un opérateur solution compact pour le $\bar{\partial}$ sur les $(0, q)$-formes différentielles entraine l'absence au bord de variété affine de dimension supérieure où égale à q.

Preuve 2.7 (1) $\Rightarrow$ (2)

On suppose qu'il existe un opérateur solution compact S_q sur les $(0, q)$-formes différentielles et que $b\Omega$ contienne une variété affine de dimension q. (Ainsi $q \leq n - 1$). Après une transformation affine nous pouvons supposer que

$$\{(z', 0) \in \mathbb{C}^n, |z'| < 2\} \subseteq b\Omega$$

où $z' = (z_1, ..z_q)$. Soit $z" = (z_{q+1}, ..., z_n)$.
Posons

$$\Omega_1 = \left\{z" \in \mathbb{C}^{n-q}, (0, z") \in \Omega\right\},$$

puisque Ω est convexe alors Ω_1 (qui est non vide) est aussi un domaine convexe de $\mathbb{C}^{n-q}(z")$.
Posons

$$\Omega_2 = \left\{ z" \in \mathbb{C}^{n-q}; 2z" \in \Omega_1 \right\},$$

alors

$$\{z' \in \mathbb{C}^q; |z'| < 1\} \times \Omega_2 \subseteq \Omega.$$

Tout point de cet ensemble est le milieu d'un segment de droite joignant un point de $\{|z'| < 2\} \times \{0\}$ à un point de $\{0\} \times \Omega_1$.
Soient $p_0 \in \Omega_2$ et $p_j = \dfrac{p_0}{j}$, $j \in \mathbb{N}^*$.
Posons $f_j(z") = \dfrac{K_{\Omega_1}(z", p_j)}{\sqrt{K_{\Omega_1}(p_j, p_j)}}$.
Puisque $K_\Omega(z, z) = \|K_\Omega(., z)\|^2_\Omega$ alors $\|f_j\|_{\Omega_1} = 1$.
On a,

$$\begin{aligned} \|f_j(z")\|^2_{\Omega_2} &= \frac{\|K_{\Omega_1}(., p_j)\|^2_{\Omega_2}}{K_{\Omega_1}(p_j, p_j)} \geq \frac{K_{\Omega_1}(p_j, p_j)}{K_{\Omega_2}(p_j, p_j)} \\ &= 2^{-2(n-q)} \frac{K_{\Omega_1}(p_j, p_j)}{K_{\Omega_1}(2p_j, 2p_j)} \geq C \quad \text{pour j assez grand.} \end{aligned}$$

La première inégalité découle du fait que $K_{\Omega_1}(p_j, p_j) \leq K_{\Omega_2}(p_j, p_j)^{\frac{1}{2}} \|K_{\Omega_1}(., p_j)\|_{\Omega_2}$ obtenu en appliquant la propriété de reproduction de $K_{\Omega_2}(p_j, .)$ à la fonction $K_{\Omega_1}(., p_j)$ c'est à dire en appliquant le point (3.) des Propriétés (2.1) et en prenant $f = K_{\Omega_1}(., p_j)$. La dernière égalité découle de la transformation du noyau de Bergman faite en (cf [17] Proposition 6.1.7). Elle dit que pour une fonction $h : G \longrightarrow D$ holomorphe entre deux domaines de $\mathbb{C}^n$ nous avons :

$$K_D(h(z), h(\omega))\, det\, h'(z)\, \overline{det\, h'(\omega)} = K_G(z, \omega).$$

Donc en prenant $G = \Omega_2$, $D = \Omega_1$ et $h : p_j = (p_{j_{q+1}}, ..., p_{j_n}) \in \Omega_2 \longrightarrow 2p_j \in \Omega_1$ on obtient $det\, h'(p_j, p_j) = 2^{n-q}$.
Alors on a :

$$2^{2(n-q)} K_{\Omega_1}(2p_j, 2p_j) = K_{\Omega_2}(p_j, p_j).$$

De plus, $\|K_{\Omega_1}(., p_j)\|^2_{\Omega_2} = K_{\Omega_1}(p_j, p_j)$.
Ce qui donne alors :

$$\frac{\|K_{\Omega_1}(., p_j)\|^2_{\Omega_2}}{K_{\Omega_2}(p_j, p_j)} = 2^{-2(n-q)} \frac{K_{\Omega_1}(p_j, p_j)}{K_{\Omega_1}(2p_j, 2p_j)}.$$

La dernière inégalité quand à elle, provient du Lemme (2.2). D'autre part, par le Lemme (2.2), $f_j \longrightarrow 0$ uniformément et localement sur Ω_1.
Par conséquent, aucune sous-suite de $\{f_j\}$ ne peut converger dans $L^2(\Omega_2)$. D'après le Théorème (5) d'Ohsawa Takegoshi [22] (cf [21]) il existe des fonctions L^2-holomorphes $F_j(z', z")$ sur Ω tels que $F_j(0, z") = f_j(z")$ et $\|F_j\|_\Omega \leq C$.
Maintenant on utilise une idée de [5].
Soit $\alpha_j = F_j(z', z")d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_q$. Ainsi $\bar{\partial}\alpha_j = 0$, $\|\alpha_j\|_{L^2(0,q)(\Omega)} \leq C$.
Posons $g_j = S_q \alpha_j$.
On note $\hat{g}_j$ la forme obtenue de g_j en éliminant les termes contenant $d\bar{z}_j$, avec $q + 1 \leq j \leq n$. Pour $z" \in \Omega_2$ fixé, on peut voir les formes α_j et $\hat{g}_j$ comme des $(0, q)$ et des $(0, q-1)$ formes différentielles respectivement, dans les variables $z' = (z_1, ..., z_q)$, $|z'| < 1$.
On a $\bar{\partial}_{z'} \hat{g}_j = \alpha_j$, où $\bar{\partial}_{z'}$, définit le $\bar{\partial}$ dans les variables z'.
Soit $\chi \in C_0^\infty(]-\infty, +\infty[)$ une fonction régularisante $0 \leq \chi \leq 1$, telle que $\chi = 1$ si $t \leq \dfrac{1}{2}$ et $\chi = 0$ si

$t \geq \frac{3}{4}$.
Soient $\beta = \chi(|z'|)d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_q$ et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur les formes différentielles dans $\mathbb{C}^q$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} |f_j(z") - f_k(z")| &= C \Big| \int_{|z'|<1} \langle \alpha_j - \alpha_k, \beta \rangle \mathrm{d}V(z') \Big| \\ &= C \Big| \int_{|z'|<1} \langle \bar{\partial}_{z'} \hat{g}_j - \bar{\partial}_{z'} \hat{g}_k, \beta \rangle \mathrm{d}V(z') \Big| \\ &= C \Big| \int_{|z'|<1} \langle \hat{g}_j - \hat{g}_k, \bar{\partial}^*_{z'} \beta \rangle \mathrm{d}V(z') \Big| \\ &\leq C \left\{ \int_{|z'|<1} |\hat{g}_j - \hat{g}_k|^2 \mathrm{d}V(z') \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi après intégration en $z"$;

$$\|f_j - f_k\|_{\Omega_2} \leq C \|\hat{g}_j - \hat{g}_k\|_{L^2_{(0,q-1)}(\Omega)} \leq C \|g_j - g_k\|_{L^2_{(0,q)}(\Omega)}.$$

Puisque $\{f_j\}$ n'a pas de sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega_2)$, alors $\{g_j\}$ n'a pas de sous-suite qui converge dans $L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$, ce qui est en contradiction avec la compacité de S_q Cela complète la preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) dans le Théorème (1). ■

Ainsi toutes les assertions du Théorème (1) sont équivalentes.
D'où, en définitive, sur les domaines convexes de $\mathbb{C}^n$, la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann équivaut à l'absence au bord de variétés affines ou analytiques de dimensions supérieures ou égales à q avec $1 \leq q \leq n$ et à l'existence d'un opérateur solution compacte pour le $\bar{\partial}$ sur les $(0, q)$-formes différentielles.

3 Application

Dans cette partie, nous allons montrer que la formule intégrale de Henkin-Ramirez peut nous fournir un opérateur solution compact pour la résolution du $\bar{\partial}$ sur les $(0, q)$-formes différentielles, et c'est cette compacité qui va permettre l'obtention de la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann.
Pour y arriver, nous allons d'abord introduire quelques notions autour des noyaux de Henkin-Ramirez.

3.1 Les noyaux de Henkin-Ramirez

Les définitions et résultats de cette partie sont tirés de [25] et [13].
Dans cette section, on appellera double forme différentielle toute forme différentielle sur un ouvert d'un espace produit de deux variétés analytiques complexes.
Ainsi on dira que $f(\zeta, z)$ est une (p, q, r, s) double forme différentielle sur $W \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ avec Ω_1 et Ω_2 deux variétés analytiques complexes si f est une (p, q)-forme différentielle en ζ et une (r, s)-forme différentielle en z.

Définition 3.1 (Noyau de Cauchy- Fantappié)
Soit a une double forme différentielle de type $(1, 0, 0, 0)$ sur $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, les doubles formes différentielles de type $(n, n-q-1, 0, q)$

$$\Omega_q(a) = (-1)^{q(q-1)/2} \binom{n-1}{q} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n a \wedge (\overline{\partial}_\zeta a)^{n-q-1} \wedge (\overline{\partial}_z a)^q$$

sont appelés noyaux de Cauchy-Fantappié pour les $(0, q)$-formes différentielles associées à a.

Exemple 3.1 Si

$$a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{|\zeta - z|^2} d\zeta_j,$$

alors $\Omega_q(a) = B_{n,q}$ qui se trouve être le noyau de Bochner Martinelli pour les $(0, q)$-formes différentielles.

Définition 3.2 Soient a et b deux doubles formes différentielles de type $(1,0,0,0)$, les doubles formes différentielles

$$A_q(a,b) = (-1)^{q(q+1)/2} \times \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \times \sum_{l,h} \binom{l+h}{l}\binom{n-2-l-h}{q-l} a \wedge b \wedge (\bar{\partial}_\zeta a)^h \wedge (\bar{\partial}_\zeta a)^{n-2-q-h}$$

$$\wedge (\bar{\partial}_z a)^l \wedge (\bar{\partial}_z a)^{q-l}$$

sont appelés noyaux de transition entre $\Omega_q(b)$ et $\Omega_q(a)$.

Théorème 6 (Henkin-Ramirez)

Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe donné par

$$\Omega = \{\zeta : r(\zeta) < 0\}$$

avec r une fonction C^k strictement plurisousharmonique.
Alors il existe des constantes positives $\delta, \varepsilon, c, \gamma$ et une fonction $h(\zeta, z)$ qui est de classe C^{k-2} sur $\bar{V}_\delta \times \bar{\Omega}_\delta$ où

$$\Omega_\delta = \{\zeta : r(\zeta) < \delta\} \qquad V_\delta = \{\zeta : |r(\zeta)| < \delta\}$$

avec les propriétés suivantes :

i) h est holomorphe en z et toutes les dérivées en z sont de classe C^{k-2} en ζ et z.

ii) Pour $\|\zeta - z\| \leq \varepsilon$,

$$h(\zeta, z) = a(\zeta, z) F(\zeta, z)$$

où $a(\zeta, z)$ est une fonction holomorphe en z et de classe C^{k-2} en (ζ, z) avec $a(\zeta, \zeta) = 1$, et où F est un polynôme de Levi de r.

iii) En particulier $h(\zeta, \zeta) \equiv 0$.

iv) $|h(\zeta, z)| \geq c$ pour $\|\zeta - z\| \geq \varepsilon$.

v) $Re\ h(\zeta, z) \geq r(\zeta) - r(z) + \gamma\|\zeta - z\|^2$ pour $\|\zeta - z\| \leq \varepsilon$.

Définition 3.3 Une fonction h définie sur un voisinage de $b\Omega \times \Omega$ avec les propriétés de i) à iii) est dite fonction de Henkin-Ramirez.

Définition 3.4 Soient D un domaine strictement pseudoconvexe, r une fonction définissante plurisousharmonique de classe C^{k-2} et U un voisinage de $b\Omega$. Pour $\zeta \in U$, on appelle polynôme de Levi $F(\zeta, z) = F^{(r)}$ de r la fonction définie par

$$F(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k).$$

Théorème 7

Sous les hypothèses du Théorème (6), il existe une constante positive δ et des homéomorphismes de classe C^{k-2}

$$h_j : \bar{V}_\delta \longrightarrow O(\bar{\Omega}_\delta),$$

tels que

$$h(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n h_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$$

satisfait les propriétés et estimations du Théorème (6).

Maintenant utilisons les fonctions $h_j(\zeta, z)$ du Théorème (7) pour définir la forme suivante dite de Leray

$$k(\zeta, z) = \frac{1}{h(\zeta, z)} \sum_{j=1}^{n} h_j(\zeta, z) d\zeta_j.$$

Les estimations du Théorème (6) nous disent que $k(\zeta, z)$ est définie sur

$$\{(\zeta, z) : \zeta \in b\Omega_\eta, z \in \Omega_\eta\}$$

pour $|\eta|$ suffisamment petit.
Les noyaux de Cauchy Fantappié associés ont les propriétés suivantes :

i) $K(\zeta, z) := \Omega_0(k)$ est holomorphe en z et de classe C^{k-3} et toutes les dérivées en z sont de classe C^{k-3} en ζ et z.

ii) $\Omega_q(k) = 0$ pour $q \geq 1$.

On rappelle que

$$b(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{\|\zeta - z\|^2} d\zeta_j$$

est la forme génératrice du noyau de Bochner-Martinelli.
On introduit les noyaux de transitions

$$A_q(\zeta, z) := A_q(k, b).$$

Ils sont de classe C^{k-3} en ζ et z et toutes les dérivées en z et $\bar{z}$ sont aussi de classe C^{k-3}.

Théorème 8 (Henkin-Ramirez-Lieb)
Soient $f \in C^1_{(0,q)}(\overline{\Omega})$ où Ω est un domaine strictement pseudoconvexe à bord de classe C^k, $k \geq 3$; $K(\zeta, z)$ et $A_q(\zeta, z)$ les noyaux de Henkin-Ramirez associés à Ω. Alors on a, pour $z \in \Omega$, $q \geq 1$,

$$f(z) = \int_{b\Omega} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge A_q(\zeta, z) - \int_{\Omega} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge B_{n,q}(\zeta, z) + \bar{\partial}_z \Big[\int_{b\Omega} f(\zeta) \wedge A_{q-1}(\zeta, z) - \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta, z) \Big].$$

On pose

$$R_{q-1} f(z) := \int_{b\Omega} f(\zeta) \wedge A_{q-1}(\zeta, z) - \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge B_{n,q-1}(\zeta, z).$$

Si f est une forme différentielle $\bar{\partial}$-fermée alors $f = \bar{\partial} R_{q-1} f$ ce qui nous donne ainsi une solution pour le problème du $\bar{\partial}$. Maintenant nous allons utiliser ce résultat pour établir la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann.

3.2 La compacité de la solution de Henkin-Ramirez

Nous allons utiliser ici l'équivalence entre (4) et (1) dans le Théorème (1).
Mais avant cela considérons le théorème suivant :

Théorème 9 [13] Soient $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $\mathcal{S}$ une fonction mesurable au sens de Lebesgue sur $D \times D$. On suppose que $\mathcal{S}$ satisfait les estimations suivantes :

1. $\int_D |\mathcal{S}(\zeta, z)|^\gamma \mathrm{d}V(\zeta) \leq N^\gamma \leq \infty$ p.p en z,
2. $\int_D |\mathcal{S}(\zeta, z)|^\gamma \mathrm{d}V(z) \leq N^\gamma \leq \infty$ p.p en ζ,

pour $\gamma > 1$.
Alors l'opérateur intégral défini par $\mathcal{S}$ est compact sur $L^2(D)$. ■

La solution $R_{q-1}f$ admet une intégrale au bord, ce qui constitue une entrave pour les estimations de compacité. On va donc appliquer le Théorème de Stokes pour ramener l'intégrale au bord à une intégrale sur Ω.
Mais d'abord, puisque $A_{q-1}(\zeta,z)$ est définie sur $b\Omega\times\Omega$, on va utiliser l'extension $\hat{A}_{q-1}(\zeta,z)$ (cf [25] VII.5) définie sur $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\setminus\Delta_{b\Omega}$ et qui vérifie $\hat{A}_{q-1}(\zeta,z)=A_{q-1}(\zeta,z)$ sur $b\Omega\times\Omega$.
De ce fait on a

$$\int_{b\Omega} f(\zeta)\wedge A_{q-1}(\zeta,z)=\int_{\Omega} f\wedge(-1)^q\bar{\partial}_\zeta\hat{A}_{q-1}(\zeta,z).$$

Le Théorème suivant (cf [25] VII Lemme 5.5) va nous permettre d'avoir les estimations du Théorème (9).

Théorème 10 Soit $M(\zeta,z)$ un coefficient des doubles formes $\bar{\partial}_\zeta\hat{A}_{q-1}(\zeta,z)$ ou $B_{n,q-1}$. Alors pour tout s tel que $1\leq s\leq(2n+2)(2n+1)$, il existe une constante $C_s<\infty$ telle que

1. $\displaystyle\int_\Omega |M(\zeta,z)|^s \mathrm{d}V(\zeta)\leq C_s\leq\infty\quad\forall z\in\Omega,$
2. $\displaystyle\int_\Omega |M(\zeta,z)|^s \mathrm{d}V(z)\leq C_s\leq\infty\quad\forall \zeta\in\Omega.$

Donc, comme tous les coefficients de $\bar{\partial}_\zeta\hat{A}_{q-1}(\zeta,z)$ et $B_{n,q-1}$ vérifient les estimations du Théorème (9), alors $\displaystyle\int_\Omega f\wedge M(\zeta,z)$ est compact. De plus $\bar{\partial}_\zeta\hat{A}_{q-1}(\zeta,z)$ et $B_{n,q-1}$ sont de la forme $\displaystyle\sum_J M_J(\zeta,z)dx_J$, alors, les opérateurs intégraux définis par $\bar{\partial}_\zeta\hat{A}_{q-1}(\zeta,z)$ et $B_{n,q-1}$ s'écrivent

$$\int_\Omega f\wedge\sum_J M_J(\zeta,z)dx_J=\sum_J\int_\Omega f\wedge M_J(\zeta,z)dx_J$$

qui sont des sommes finies d'opérateurs compacts donc sont compacts.
De ce fait,

$$\int_\Omega(-1)^q f(\zeta)\wedge\bar{\partial}_\zeta\hat{A}_{q-1}(\zeta,z)$$

et

$$\int_\Omega f(\zeta)\wedge B_{n,q-1}(\zeta,z)$$

sont compacts. D'où $R_{q-1}f$ est un opérateur solution compact du $\bar{\partial}$ ce qui entraine la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann N_q d'après le Théorème (1).

Conclusion

Le travail présenté à travers ce mémoire est basé sur l'article de E.J Staube et Siqui Fu intitulé "Compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on convex domains". Après avoir introduit des notions préliminaires utiles à cette étude, nous avons donné des conditions suffisantes à la compacité du problème du $\bar{\partial}$-Neumann sur les domaines convexes, en utilisant notamment la propriété de Catlin, puis des conditions nécessaires de compacité de l'opérateur solution du $\bar{\partial}$ sur les $(0,q)$-formes différentielles en s'appuyant sur les propriétés du noyau de Bergman et le Théorème d'Ohsawa-Takegoshi. Et ceci a été établi autour de l'existence d'un opérateur solution compact pour le $\bar{\partial}$ sur les $(0,q)$-formes différentielles et sur l'absence de variétés affines ou analytiques au bord du domaine. Cette absence s'est avérée être une condition nécessaire et suffisante à la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann. Enfin pour l'application, nous avons montré que la formule intégrale de Henkin-Ramirez nous fournit un opérateur solution compact du problème du $\bar{\partial}$ sur les $(0,q)$-formes différentielles ce qui nous a permis d'établir la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann.

Références

[1] Z.Blocki, The Bergman kernel and metric phd course, Jagiellionian University 2010

[2] S. Boyd L. Vandenberghe, Convex Optimization Cambridge University Press 2004

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et application. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paolo 1987.

[4] D. Catlin, Global regularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem, in "Complex Analysis of Several Variables" (Y.-T. Siu, Ed.), Proceed. Sympos. Pure Math., Vol. 41, pp. $39-49$, Amer. Math. Soc., Providence, 1984.

[5] D.Catlin, Necessary conditions for subellipticity and hypoellipticity for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains, in "Recent Developments in Several Complex Variables" (J. E. Fornaess, Ed.), Ann. Math. Stud., Vol. 100, pp. $93-100$, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.

[6] S. C. Chen, M. C. Shaw : Partial differential equation in several complex variables, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, International Press, Boston, MA 2001.

[7] J.P.Demailly, Complex Analytic and Differential Geometry Universit ´e de Grenoble I Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS 38402 Saint-Martin d'H'eres, France Version of Thursday June 21,2012

[8] G.B.Folland, Real Analysis Modern Techniques And Their Applications Second Edition

[9] S. Fu and E. J. Straube, Compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann Problem on Convex Domains Received January 12, 1998 ; accepted April 4, 1998

[10] T W.Gamelin, "Uniform Algebras" Chelsea, New York,1984.

[11] T. W. Gamelin, "Uniform Algebras and Jensen Measures," London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 32, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1978

[12] R. Hartshorme "Agebraic geometry" Springer Science+Business Media, Inc. ISBN $978-1-4419-2807-8$ ISBN $978-1-4757-3849-0$ (eBook) 1977

[13] T.Hefer I.Lieb, On the compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann operator Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 9, no 3 (2000), p. $415-432$

[14] G.M. Henkin, Integral representation of a function in a strictly pseudo-convex domain and applications to the $\bar{\partial}$-problem (russian), Mat. Sb., 82 (1970), $300-308$

[15] L. Hörmander, L^2-estimates and existence theorems for the -operator, 2014 Acta Math. 113, $89-152=$ (1965).

[16] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, N.J, (1966).

[17] M. Jarnicki and P. Pflug, "Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis," de Gruyter, Berlin, 1993.

[18] S.G.Krantz, Function theory of several complex variables Second edition 2000 ISBN $0-8218-2724-3$

[19] I. Lieb J.Michel, The Cauchy-Riemann Complex : Integral Formulae and Neumann Problem

[20] B.Mauray, Théorie spectrale Décembre 2004. http ://www.math.jussieu.fr/ maurey/ts012/poly/index.html.

[21] T. Ohsawa, On the extension of L^2 holomorphic functions II, Publ. RIMS Kyoto Univ. 24(2) (1988), $265-275$.

[22] T. Ohsawa and K. Takegoshi, On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z. 195(2) (1987), $197-204$.

[23] T. Ohsawa, A remark on the completeness of the Bergman metric, Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci. 57(4) (1981), $238-240$.

[24] E.Ramirez De Arellano, Ein Divisionsproblem in der komplexen Analysis mit einer Anwendung auf Randintegraldarstellungen, Math. Ann. 184 (1970), $172-187$.

[25] R.M.Range, (R. M.). 2014 Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables, Second printing, Springer-Verlag, New York, 1998.

[26] W.Rudin, Functional Analysis, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1991.

[27] E. J. Straube, Lectures on the L^2-Sobolev Theory of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. ESI Lectures in Mathematics and physics, Vol. 7, European Mathemetical Society (EMS), Zürich, 2010.

[28] C.L.Thiébaut, Théorie des Fonctions Holomorphes De Plusieurs variables

[29] V. Trénoguine, Analyse Fonctionnelle. Éditions Mir. Moscou, 1985.

[30] V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Sobolev Problèmes et exercices d'analyse Fonctionnelle. Éditions Mir, 1987.

[31] J. Werner, Banach Algebras and Several Complex Variables Second Edition Graduate Texts in Mathematics.