

# UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



UFR Sciences et Technologies

Département de physique

Mémoire de Master

Mention : Physique et Applications

Spécialité: Sciences de l'Atmosphère et de l'Océan

**Effets des paramètres physiques, géométriques et des nombres adimensionnels sur l'épaisseur du film liquide lors de la condensation d'un film mince en convection forcée dans un canal dont les parois sont recouvertes de matériaux poreux**

Présenté par : **Birame THIAW**

Sous l'encadrement de : Dr Momath NDIAYE et Dr Joseph Sambasene DIATTA

Soutenu publiquement le 08/05/2023 devant un jury composé de :

| Nom    | Prénom           | Grade                 | Qualité           | Etablissement |
|--------|------------------|-----------------------|-------------------|---------------|
| DIATTA | Samo             | Maitre de conférences | Président de jury | UASZ          |
| MBAYE  | Mamadou Lamine   | Maitre-assistant      | Examineur         | UASZ          |
| SENE   | Madialène        | Assistant             | Rapporteur        | USSEIN        |
| DIATTA | Joseph Sambasene | Maitre-assistant      | Co-encadreur      | UASZ          |
| NDIAYE | Momath           | Maitre-assistant      | Co-encadreur      | USSEIN        |
| SOW    | Bamol Ali        | Maitre de conférences | Superviseur       | UASZ          |

---

## DEDICACES

---

*Je dédie ce travail à mes très chers Parents, qui de près et de loin m'ont toujours accompagné, soutenu, encouragé, protégé... À tous les membres du dahira Matlabul Fawzeyni de l'USZ, À tous mes Amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.*

---

## REMERCIEMENTS

---

Avant tout d'abord, je rends grâce à Dieu le Miséricorde, qui m'a donné tout ce dont j'ai besoin pour bien suivre ma formation jusqu'à ce niveau, ensuite, prier sur l'Elu, le prophète Seydina Mohamed (PSL).

Ce sujet de mémoire de Master m'a été proposé par **Dr Momath NDIAYE** Directeur Adjoint de l'UFR Sciences Fondamentales et de l'ingénieur (SFI) de l'Université de El Hadji Ibrahima NIASS du Sine-Saloum, par l'intermédiaire du **Dr Joseph Sambasene DIATTA**. Je tiens à leur exprimer ma profonde reconnaissance de m'avoir donné cet opportunité accompagné d'une série de conseils durant tout le long du travail. Leur enthousiasme ainsi que la qualité de leur suivi aussi m'a permis de mener à bien cette activité. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude. Mes remerciements vont aussi à l'endroit du Dr **Bamol Ali SOW**, le superviseur. Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Alioune Badara DIENG, Monsieur Yaya DIALLO et madame MANE qui m'ont considéré comme membre de leur famille et m'aide à chaque fois sur tous mes projets. Merci également aux membres du jury dont le président est Dr Samo DIATTA, Dr Mamadou Lamine MBAYE, l'examineur et le rapporteur Dr Madialdene SENE pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier aussi particulièrement toute l'équipe pédagogique et l'ensemble des professeurs qui ont contribué à ma formation (de la licence jusqu'au master) de l'UFR-ST et les enseignants chercheurs du département de Physique, plus particulièrement ceux du Laboratoire d'Océanographie, de la Science de l'Environnement et du Climat (LOSEC) : Dr **Bamol Ali Sow**, Pr **Moctar Camara**, Dr **Mamadou Lamine Mbaye**, Dr **Joseph Diatta**, Dr **Samo Diatta**, Dr **Habib Dieng** pour cette formation de qualité de l'Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ). Mes remerciements aussi vont à l'endroit de tous les membres du dahira Matlabul Fawzeyni de l'UASZ et m'avoir aidé et conseillé pour une bonne réalisation de ce travail.

Je remercie aussi tous mes camarades de classe à qui on a fait ensemble le cycle master qui ont été très généreux avec moi. Mes remerciements aussi vont à l'endroit monsieur Omar DIOP, qui m'orienté et me donne tout le temps des conseils. Je ne saurais terminer sans adresser ma profonde gratitude à tous les membres de ma famille, mes parents, mes oncles, mes frères et

sœurs pour leur soutien permanent, à tous ceux qui de près ou de loin, directement ou indirectement, de façon active ou même passive ont apporté leurs contributions et prier pour l'achèvement de ce mémoire et à l'édification de ce que je deviens aujourd'hui.

## Résumé

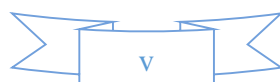
Une étude numérique des effets physiques, géométriques et adimensionnels sur la variation de l'épaisseur du film liquide lors de la condensation en convection forcée dans un canal dont les parois sont recouvertes d'un matériau poreux, est présentée. Dans le milieu poreux, l'écoulement est décrit par le modèle de **Darcy-Brinkman-Forchheimer** tandis que les transferts d'énergie dans le liquide pur sont régis par les équations classiques de la couche limite. Nous examinons plus particulièrement l'influence de la porosité, du rapport de forme, du rapport de viscosités cinématiques du milieu liquide et du milieu poreux, le rapport de conductivité thermique, du nombre de Reynolds, du nombre de Jacob, du nombre de Darcy, du nombre de Prandtl et du nombre de Froude. Nous avons utilisé la méthode des différences finies pour la discrétisation des équations aux nœuds d'un maillage prédéfini. A l'intérieur du domaine discrétisé, les dérivées partielles de premier et de second ordre sont respectivement approchées par un schéma aux différences finies en utilisant un développement en série de Taylor, nous approchons les dérivées partielles de premier ordre par les différences finies décentrées rétrogrades ou régressives (ou amont). Une résolution numérique des systèmes d'équations algébriques couplés ainsi obtenus, grâce à une méthode de double balayage combinée à un schéma itératif de type relaxation ligne par ligne de type Gauss-Seidel. La méthode itérative de relaxation ligne par ligne de type de Gauss-Seidel est utilisée pour la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. Nous avons montré par la simulation numérique que l'épaisseur du film liquide augmente avec le rapport de forme, le nombre Jacob et varie en sens inverse avec l'épaisseur de la couche poreuse, le nombre de Prandtl, du nombre de Reynolds et le rapport de conductivité thermique. Alors que le rapport de viscosité cinématique du milieu liquide et du milieu poreux, la porosité et le nombre de Froude, n'ont aucune influence sur la variation de cette épaisseur.

Mots clés : Milieu poreux, Darcy-Brinkman-Forchheimer, film liquide, condensation, convection forcée

## Summary

An analytical study of the physical, geometric and dimensionless effects on the variation of the thickness of the liquid film during condensation in forced convection in a channel whose walls are covered with a porous material, is presented. In the porous medium, the flow is described by the **Darcy-Brinkman-Forchheimer** model while the energy transfers in the pure liquid are governed by the classical boundary layer equations. In particular, we examine the influence of porosity, shape ratio, kinematic viscosity ratio of liquid and porous medium, thermal conductivity ratio, Reynolds number, Jacob number, Darcy number, Prandtl number and Froude number. We used the finite difference method for discretizing equations at nodes of a predefined mesh. Within the discretized domain, the first- and second-order partial derivatives are respectively approximated by a finite difference scheme using a Taylor series expansion, we approach the first-order partial derivatives by the retrograde or regressive (or upstream) off-center finite differences. A numerical solution of the coupled algebraic equation systems thus obtained, thanks to a double scanning method combined with an iterative scheme of the Gauss-Seidel type relaxation type line. We have shown by numerical simulation that the thickness of the liquid film increases with the shape ratio, the Jacob number and varies in the opposite direction with the thickness of the porous layer, the Prandtl number, of the Reynolds number and the thermal conductivity ratio. So as for the kinematic viscosity ratio of the liquid medium and the porous medium, the porosity and the Froude number, have no influence on the variation of this thickness.

**Key words:** Porous medium, Darcy-Brinkman-Forchheimer, liquid film, condensation, forced convection



# Tables des Matières

|              |   |               |               |
|--------------|---|---------------|---------------|
| 1            | INTRODUCTION  | GENERALE..... | - 1 -         |
| 2            | Chapitre1: Généralités et Synthèse Bibliographique .....                      |               | - 3 -         |
| 2.1          | Introduction : .....  |               | - 3 -         |
| 2.2          | Généralités sur les milieux poreux .....                                      |               | - 5 -         |
| 2.2.1        | L'espace poreux et sa représentation .....                                    |               | - 5 -         |
| 2.2.2        | Le volume élémentaire représentatif ( <b>V.E.R.</b> ) .....                   |               | - 6 -         |
| 2.2.3        | Les propriétés du milieu poreux .....   |               | - 7 -         |
| 2.3          | Différentes formulations des équations du mouvement dans les milieux poreux   |               | - 10 -        |
| 2.4          | Transfert thermique dans un milieu poreux : équation d'énergie .....          |               | - 13 -        |
| 2.5          | Synthèse bibliographique : .....  |               | - 14 -        |
| 2.6          | Conclusion .....  |               | - 19 -        |
| 3            | Chapitre2:                    FORMULATION mathématique .....                  |               | - 21 -        |
| 3.1          | Introduction .....  |               | - 22 -        |
| 3.2          | Position du problème .....  |               | - 22 -        |
| 3.3          | Les hypothèses simplificatrices .....   |               | - 23 -        |
| 3.3.1        | Équations de transferts .....   |               | - 23 -        |
| 3.3.2        | Equation de conservation de la masse .....                                    |               | - 24 -        |
| 3.3.3        | Equations de l'énergie .....  |               | - 24 -        |
| 3.3.4        | Les équations de mouvement .....  |               | - 25 -        |
| 3.3.5        | Conditions aux limites : .....  |               | - 27 -        |
| <b>3.3.6</b> | <b>Equations des bilans massique et thermique</b> .....                       |               | <b>- 28 -</b> |
| 3.4          | Transformations des équations .....   |               | - 29 -        |
| 3.4.1        | Variables adimensionnelles .....  |               | - 29 -        |
| 3.4.2        | Transformation du domaine physique .....                                      |               | - 30 -        |
| <b>3.4.3</b> | <b>Equations adimensionnelles dans le nouveau système de coordonnées.....</b> |               | <b>- 31 -</b> |
|              | <b>(X, η).....</b>  |               | <b>- 31 -</b> |
| 3.4.4        | Conditions aux limites et aux interfaces .....                                |               | - 33 -        |
| 3.4.5        | Equations des bilans massique et thermique .....                              |               | - 34 -        |
| 3.5          | Conclusion .....  |               | - 35 -        |
| 4            | Chapitre 3 : formulation Numérique .....                                      |               | - 37 -        |
| 4.1          | Introduction .....  |               | - 38 -        |
| 4.2          | Méthode des différences finies .....  |               | - 39 -        |
| 4.3          | Discretisations du domaine et des fonctions dérivées .....                    |               | - 40 -        |

|              |   |        |
|--------------|---|--------|
| 4.3.1        | Maillage du domaine .....   | - 40 - |
| 4.4          | Les équations aux mailles.....  | - 42 - |
| 4.4.1        | Equation de continuité discrétisée.....   | - 42 - |
| 4.4.2        | Equation de la chaleur discrétisée .....  | - 43 - |
| 4.4.3        | Equation du mouvement suivant X discrétisée : .....   | - 44 - |
| 4.5          | Discrétisation des conditions aux limites .....   | - 45 - |
| 4.6          | Discrétisation des conditions à l'interface $j = jint$ .....  | - 46 - |
| 4.7          | Discrétisation des bilans thermique et massique .....   | - 46 - |
| 4.8          | Méthodes de résolution des systèmes algébriques ou des systèmes matriciels du modèle .....                        | - 47 - |
| 4.9          | Méthode itérative de Gauss-Seidel .....   | - 49 - |
| 4.10         | Méthode itérative de relaxation de Gauss-Seidel.....  | - 51 - |
| 4.11         | Convergence et sous-relaxation .....  | - 52 - |
| 4.12         | Algorithme général de résolution.....   | - 53 - |
| 4.13         | Organigramme de l'algorithme général de résolution .....  | - 54 - |
| 4.14         | Conclusion .....  | - 56 - |
| 5            | Chapitre 4 : Résultats et discussions .....   | - 57 - |
| 5.1          | Introduction .....  | - 58 - |
| 5.1.1        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $\lambda^*$ : ..... | - 59 - |
| 5.1.2        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs L/A.....            | - 60 - |
| 5.1.3        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Ja.....             | - 61 - |
| 5.1.4        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Fr.....             | - 62 - |
| 5.1.5        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $H^*$ .....         | - 63 - |
| 5.1.6        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Pr.....             | - 64 - |
| 5.1.7        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Re.....             | - 65 - |
| <b>5.1.8</b> | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $\varepsilon$ ..... | - 66 - |
| 5.1.9        | Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $\nu^*$ .....       | - 67 - |
| 5.2          | Conclusion .....  | - 68 - |



5.3 Conclusion générale et Perspectives..... - 69 -  
6 Bibliographie..... A

## Liste des Tableaux

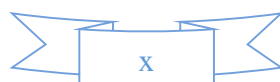
|  |        |
|--|--------|
| Tableau 3.: Porosité de quelques matériaux [7] .....     | - 8 -  |
| Tableau 4: Perméabilité de quelques matériaux [9]. ..... | - 10 - |

# Liste des figures

|   |        |
|---|--------|
| Figure 1: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $\lambda^*$ : .....   | - 59 - |
| Figure 2: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $L/A$ : .....         | - 60 - |
| Figure 3: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $Ja$ : .....          | - 61 - |
| Figure 4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $Fr$ : .....          | - 62 - |
| Figure 5: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $H^*$ : .....         | - 63 - |
| Figure 6: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $Pr$ : .....          | - 64 - |
| Figure 7: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $Re$ : .....          | - 65 - |
| Figure 8: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $\varepsilon$ : ..... | - 66 - |
| Figure 9: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse $x$ pour différentes valeurs $\nu^*$ : .....       | - 67 - |

## NOMENCLATURES

| Variables                  | Nom des variables                              | Dimensions ou Expressions |
|----------------------------|--|---------------------------|
| <b>Lettres latines</b>     |  |                           |
| <b>A</b>                   | Largeur du canal                               | M                         |
| <b><math>C_p</math></b>    | Chaleur spécifique                             | $J.Kg^{-1}.K^{-1}$        |
| <b>F</b>                   | Paramètre adimensionnel de Forchheimer         |                           |
| <b>G</b>                   | Accélération de pesanteur                      | $m.s^{-1}$                |
| <b>h</b>                   | Coefficient de transfert de chaleur convection | $W.m^{-2}.K^{-1}$         |
| <b><math>h_{fg}</math></b> | Enthalpie d'évaporation                        | $J.Kg^{-1}$               |
| <b>H</b>                   | Epaisseur de la couche poreuse                 | M                         |
| <b>K</b>                   | Conductivité hydraulique ou perméabilité       | $m^2$                     |
| <b>L</b>                   | Longueur de la plaque                          | M                         |
| <b>T</b>                   | Température                                    | K                         |
| <b><math>U_0</math></b>    | Vitesse du fluide libre ( vapeur )             | m/s                       |
| <b>U</b>                   | Vitesse suivant x                              | m/s                       |
| <b>V</b>                   | Vitesse suivant y                              | m/s                       |
| <b>x, y</b>                | Les coordonnées cartésiennes                   | <b>M</b>                  |
| <b>Symboles grecs</b>      |  |                           |
| <b><math>\alpha</math></b> | Diffusivité thermique                          | $m^2.s^{-1}$              |



|               |                                       |                    |
|---------------|---------------------------------------|--------------------|
| $\delta$      | Epaisseur du condensât                | <b>M</b>           |
| $\varepsilon$ | Porosité                              |                    |
| $\eta$        | Coordonnée curviligne adimensionnelle |                    |
| $\theta$      | Température adimensionnelle           |                    |
| $\lambda$     | Conductivité thermique                | $W.m^{-1}.K^{-1}$  |
| $\mu$         | Viscosité dynamique                   | $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ |
| $\nu$         | Viscosité cinématique                 | $m^2.s^{-1}$       |
| $\rho$        | Masse volumique                       | $Kg/m^3$           |

### Indices-exposants

|            |                                   |  |
|------------|-----------------------------------|--|
| <i>eff</i> | Valeur effective                  |  |
| <b>I</b>   | Interface substrat poreux/liquide |  |
| <b>L</b>   | Liquide                           |  |
| <b>P</b>   | Poreux                            |  |
| <b>S</b>   | Saturation                        |  |
| <b>V</b>   | Vapeur                            |  |
| <b>W</b>   | Paroi                             |  |
| *          | Grandeur adimensionnelle          |  |

### Nombres caractéristiques

|           |                  |                           |
|-----------|------------------|---------------------------|
| <b>Da</b> | Nombre de Darcy  | $Da = \frac{A^2}{K}$      |
| <b>Fr</b> | Nombre de Froude | $Fr^2 = \frac{u_0^2}{gL}$ |

|                  |                    |   |
|------------------|--------------------|---|
| <b><i>Ja</i></b> | Nombre de Jacob    | $Ja = \frac{C_{p_l}(T_s - T_w)}{h_{fg}}$                                    |
| <b><i>Nu</i></b> | Nombre de Nusselt  | $Nu = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4T_2 - T_3 - 3T_p}{\partial y}$ |
| <b><i>Pe</i></b> | Nombre de Peclet   | $(Pe)_{eff} = \lambda^* \cdot Pr \cdot Re$                                  |
| <b><i>Pr</i></b> | Nombre de Prandtl  | $Pr = \frac{\mu_l C_{P_l}}{\lambda_l} = \frac{\nu_l}{\alpha_l}$             |
| <b><i>Re</i></b> | Nombre de Reynolds | $Re = \frac{u_0 L}{\nu_l}$  |

---

# 1 INTRODUCTION

## GENERALE

---

Les questions sur l'étude de la convection dans un milieu poreux ont acquis ces dernières années une importance cruciale et ont suscité et suscitent encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels : depuis les travaux de Darcy en 1856, un nombre considérable de travaux a été entrepris. L'étude de ce type de convection s'est particulièrement développée ces dernières années, vu son importance dans certains problèmes technologiques importants.

Par exemple dans les industries alimentaires lors du changement de phase où la zone diphasique, dite zone pâteuse, est représentée par un milieu poreux saturé par un fluide binaire [1].

La condensation dans les milieux poreux est un sujet d'intérêt croissant en raison de ses applications techniques diverses et importantes dans les échangeurs de chaleur, dans le refroidissement des équipements électroniques, dans le stockage d'énergie etc. De nombreuses études ont été réalisées en utilisant des développements théoriques, l'expérimentation pratique (expérience de laboratoire) et depuis un certain temps l'expérimentation numérique (simulation numérique).

S'il s'avère que l'expérimentation de laboratoire est d'une importance cruciale pour valider les deux autres approches, il n'en demeure pas moins qu'elle reste handicapée par le coût élevé du matériel et les difficultés de réalisation et de reproductibilité. Cependant la simulation numérique reste la méthode la moins coûteuse et la plus utilisable même si elle est confrontée encore aujourd'hui aux problèmes de stockage de données dans le cas des écoulements tridimensionnels turbulents.

Néanmoins l'évolution rapide des capacités des calculateurs au cours de ces vingt dernières années a permis un progrès notable dans la compréhension des phénomènes de transport en général et de transfert de chaleur et de masse couplé en particulier [1].

Des hypothèses simplificatrices sont souvent adaptées au problème traité, tels que l'élimination de certains termes intervenant dans les équations [2].

Notre travail porte sur les effets des paramètres physiques, géométriques et des nombres adimensionnels sur l'épaisseur du film liquide lors de la condensation d'un film mince en convection forcée dans un canal dont les parois sont recouvertes de matériaux poreux.

Notre objectif est d'étudier les variations des paramètres physiques, géométriques et les nombres adimensionnels sur l'épaisseur du film liquide.

Ce travail sera scindé en quatre (4) chapitres. Nous allons consacrer au premier chapitre à des généralités et à une revue bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques ayant traité l'étude de la condensation d'un film mince en convection forcée d'une vapeur saturée en milieu poreux. Dans le second chapitre, nous présenterons le modèle mathématique du problème où le modèle physique choisi, les équations gouvernantes, les conditions aux limites associées seront présentées. Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations décrivant l'écoulement par la méthode des différences finies. Pour le quatrième et dernier chapitre, les principaux résultats obtenus seront présentés et nous les analysons à partir des distributions de certaines grandeurs physiques, géométriques et les nombres adimensionnels. Pour finir, ce travail sera achevé par une conclusion générale résumant les principaux résultats trouvés au cours de cette étude et des perspectives futures.



---

# 2 CHAPITRE 1: GÉNÉRALITÉS ET SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

---

## 2.1 Introduction :

La condensation dans un milieu poreux intéresse les scientifiques depuis plusieurs siècles. La richesse et la complexité des phénomènes liés à ce type de condensation expliquent l'engouement et l'intérêt des chercheurs et des industriels à ce genre de configurations. L'évolution rapide de la technologie et des outils informatiques a permis aux chercheurs de traiter des cas de plus en plus complexes. Dans notre environnement naturel ou anthropique, la matière solide est le plus souvent poreuse. Rares sont les solides rigoureusement non poreux. Les sols et presque toutes les roches sont poreux, susceptibles de contenir de l'eau, rarement pure, et par conséquent, le siège de tous les phénomènes de transfert évoqués [3].

Un milieu poreux se compose d'une matrice solide et de son complément géométrique, l'espace poreux. L'espace poreux peut être occupé par un ou des fluides.

La matrice solide, peut être déformable. En fonction d'elle, On distingue deux types :

- 1 - les matrices solides non consolidées ou granulaire où la phase solide est formée de grains: graviers, sables, limons, les lits poreux de billes ou autres éléments les fibres (amiante, laine de verre, coton, laine), [3].
- 2 - les matrices solides consolidées : les calcaires, grés, argile, les céramiques, les poudres frittés et les tissus végétaux et animaux vivants ou morts comme le bois et le cuir.

Les pores permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides.

On peut alors, suivant les phases en présence à l'intérieur des pores, classer les problèmes rencontrés en trois catégories:

1 - Dans la première catégorie, on range les milieux saturés d'un seul fluide ou encore un ensemble de fluides miscibles (par exemple un sol imbibé d'eau).

2 - Les milieux composés de plusieurs fluides non miscibles constituent la seconde catégorie. Un ensemble de ménisques sépare alors les différentes phases (par exemple un mélange eau- huile- gaz dans les roches pétrolifères, ou un sol partiellement saturé d'eau, le deuxième composant étant l'air).

3 - Enfin dans la troisième et dernière catégorie, on trouve les milieux qui sont le siège d'un transport de fluide et de particules solides [4]. Ils agissent en général comme des filtres, mais leurs propriétés hydrodynamiques se modifient au cours du temps (dépollution des eaux contenant de grosses particules par percolation à travers le sol).

## 2.2 Généralités sur les milieux poreux

### 2.2.1 L'espace poreux et sa représentation

Comme nous l'avons indiqué en introduction, nous nous intéressons aux milieux poreux en fonction des fluides qui sont susceptibles d'occuper l'espace poreux et des phénomènes de transport et transfert qui les affectent. Lorsque deux (ou plusieurs) fluides immiscibles se partagent l'espace poreux, leur distribution spatiale est gouvernée par les effets de la tension interfaciale qui règne dans les couches moléculaires, qui constituent la frontière entre deux fluides ou entre un fluide et la paroi solide et les propriétés de mouillage du solide qui en découlent. Il est donc clair que la morphologie de l'espace poreux est l'élément structurant de la distribution spatiale des phases fluides en son sein, avec tout ce qui en découle pour les phénomènes de transport et de transfert [5].

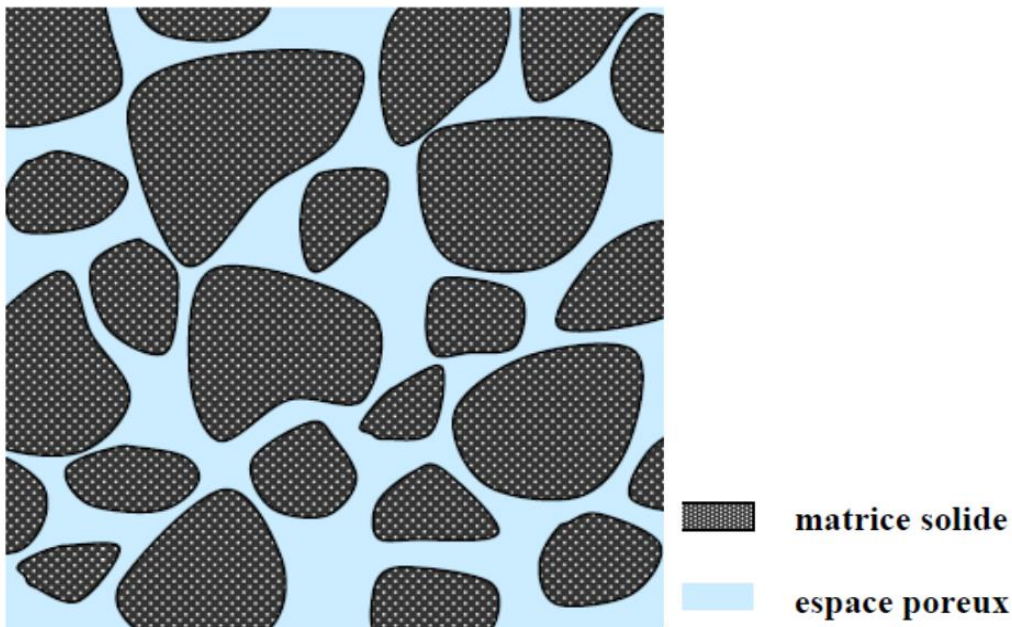


Figure 1.1: Matrice solide et espace poreux [5].

Le schéma proposé à la figure 1.1 ne donne qu'une faible idée de la complexité qui est celle de la plupart des matériaux (Figure 1.2). Il faut avant tout remarquer que toute représentation bidimensionnelle d'un milieu poreux est par nature biaisée. En effet, si la surface de la feuille de papier doit être partagée ne serait-ce qu'entre deux phases - le solide et le «vide», l'une des deux seulement sera connexe. Nous privilégions l'espace poreux et c'est naturellement celui que nous choisissons d'être connexe. Dans la réalité tridimensionnelle, il en va autrement. La matrice solide et l'espace poreux peuvent parfaitement être tous les deux connexes. L'espace poreux lui-même peut être partagé entre deux phases, voire plus, toutes simultanément

connexes. Il faut donc s'habituer à lire les schémas comme des représentations symboliques et non comme des coupes à travers l'espace tridimensionnel [5].

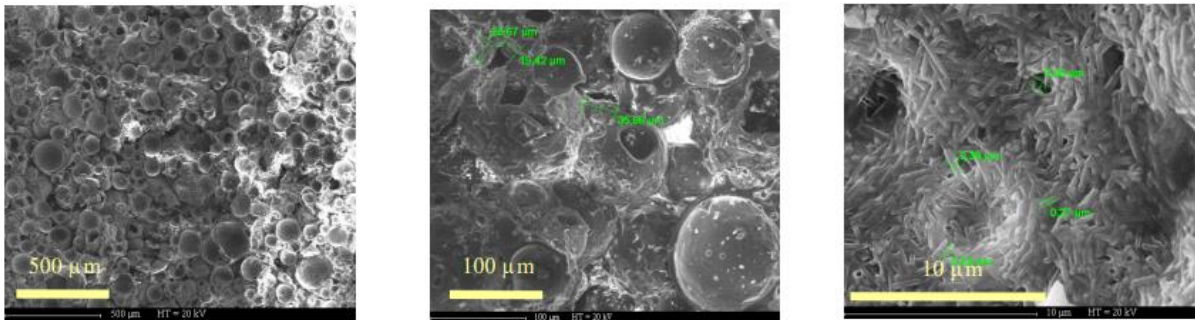


Figure 1.2: Une brique spéciale observée à différents grossissements [6].

### 2.2.2 Le volume élémentaire représentatif (*V.E.R.*)

La formulation des phénomènes dans des milieux poreux, fait apparaître deux échelles microscopique et macroscopique pour la description. L'échelle microscopique (ou des pores) est liée au diamètre des pores, elle est très difficile à mettre en œuvre, puisque les conditions aux limites sont inconnues dans leurs détails. Il est donc nécessaire de passer à l'échelle macroscopique où la taille du volume élémentaire représentatif (*V.E.R.*) est plus grande comparée à celles des pores. Maintenant on peut passer d'un milieu poreux discontinu à un autre continu fictif, en vertu de ce changement d'échelle.

L'échelle du pore  $d$  varie généralement de  $0,05 \mu m$  pour les nano pores à  $0,5 mm$  pour les macropores. Par ailleurs, la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression, la vitesse et la température varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux. Cette moyenne s'effectue donc sur de nombreux pores par l'intermédiaire d'un volume élémentaire du milieu appelé Volume Élémentaire Représentatif (*V. E. R.*), (Voir figure 1.3). L'échelle  $l$  du *V. E. R.* doit vérifier :

$d \ll l \ll L$ , avec  $L$  l'échelle macroscopique du domaine d'étude.

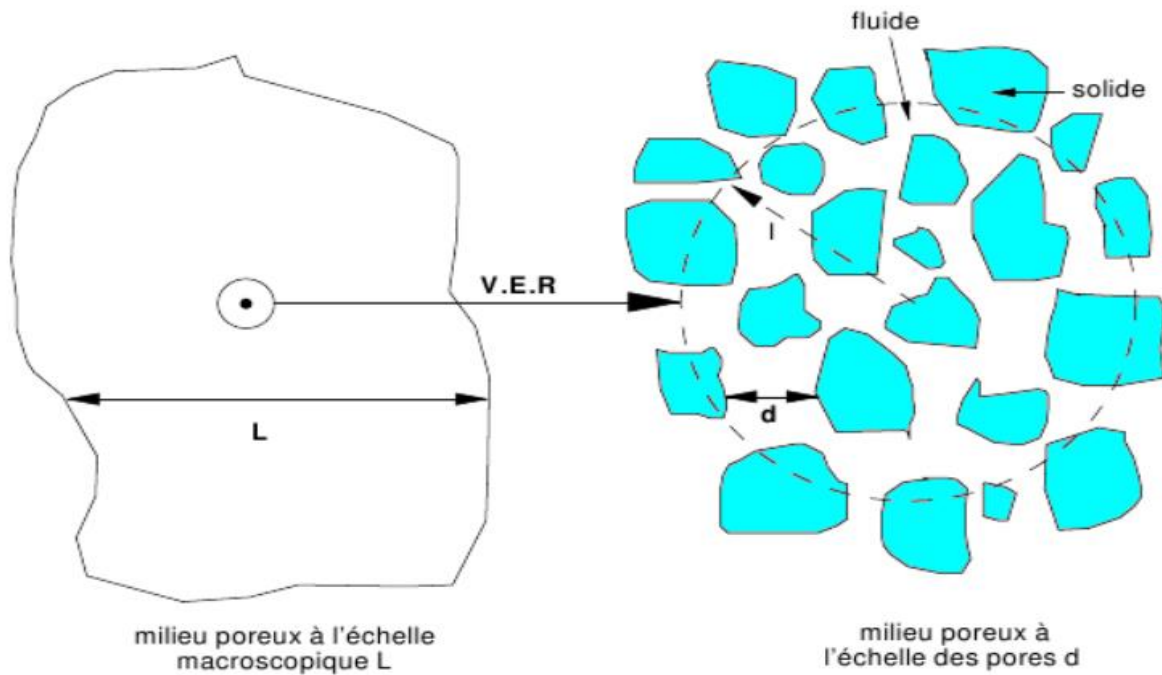


Figure 1.3 : La figure illustre la taille  $l$  du Volume Élémentaire Représentatif (V. E. R.) entre la taille des milieux poreux à l'échelle macroscopique  $L$  et à l'échelle des pores  $d$ .

On obtient donc les grandeurs caractéristiques de la vitesse, la pression et la température en faisant la moyenne sur le V. E. R. Cela permet de représenter un point dans un nouveau milieu continu fictif par changement d'échelle. Il est équivalent au domaine poreux étudié mais à l'échelle macroscopique.

Lorsque les propriétés locales, définies sur le V. E. R., sont indépendantes de la position de celui-ci, le milieu est dit homogène à l'échelle macroscopique [1].

### 2.2.3 Les propriétés du milieu poreux

#### ○ Porosité

La porosité d'un milieu poreux est une grandeur physique qui définit les capacités d'écoulement et de rétention d'un substrat. Leur valeur numérique notée  $\varepsilon$ , s'exprime comme étant la fraction du volume des pores (espaces vides) au volume total du milieu poreux.

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total du milieu poreux}} \quad (1.1)$$

Des mesures expérimentales faites par Kaviany (1995) donnent dans le Tableau 1.1 ci-dessous quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux.

**Tableau 1: Porosité de quelques matériaux [7].**

| Matériaux                | Porosités   |
|--------------------------|-------------|
| Matériau mousseux        | 0,98        |
| Fibre de verre           | 0,88-0,93   |
| Fil à tisser             | 0,68-0,76   |
| Grains de silice         | 0, 65       |
| Poudre d'ardoise noire   | 0,57-0,66   |
| Cuir                     | 0,56-0,59   |
| Catalyseur               | 0,45        |
| Granulé de pierres       | 0,44-0,45   |
| Terre                    | 0,43-0,54   |
| Sable                    | 0,37-0,50   |
| Poudre de silice         | 0,37-0,49   |
| Sphère bien empilée      | 0,36-0,43   |
| Filtre de cigarettes     | 0, 17–0, 49 |
| Briques                  | 0,12-0,34   |
| Poudre de cuivre         | 0,09-0,34   |
| Pierre à chaud, Dolomite | 0,04-0,10   |
| Houille                  | 0,02-0,07   |

○ **Perméabilité intrinsèque**

La perméabilité est une grandeur statistique du milieu poreux qui traduit la facilité avec laquelle le fluide s'écoule dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. La perméabilité intrinsèque, noté  $K$ , se trouve dans l'expression du nombre de Darcy. Basé sur la porosité et la géométrie de la matrice solide, on distingue différents types de perméabilité: la perméabilité spécifique (ou absolue) qu'on mesure avec un seul fluide dans le milieu poreux, par exemple la perméabilité à l'eau, perméabilité à l'air. La perméabilité effective est mesurée à l'aide d'un second fluide présent dans le milieu poreux. Le rapport de ces deux derniers types de perméabilité est appelé la perméabilité relative. Dans cette étude, nous nous intéressons qu'à la perméabilité spécifique. Plusieurs relations ont été établies dont celle empirique

de Kozeny–Carmen qui donne une estimation de la perméabilité  $K$  pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple [8].

$$k = \frac{d^2 \varepsilon^3}{36 C_0 (1-\varepsilon)^2} \quad (1.2)$$

Où  $d$  désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et  $C_0$  une constante dépendant de la forme des grains ( $3, 6 < C_0 < 5$ ) [7].

Ergun S. (1988) établit une expression semblable à l'équation de Kozeny–Carmen en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètres  $d$  et soumise à un gradient de pression.

$$k = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150 (1-\varepsilon)^2} \quad (1.3)$$

Ce qui correspond à une constante  $C_0$  de Kozeny–Carmen égale à  $\frac{25}{6}$ .

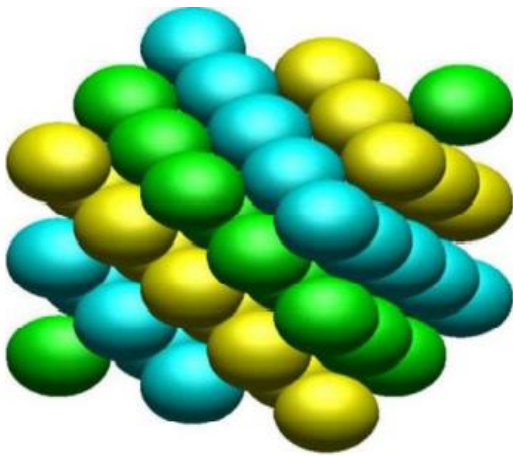


Figure 1 : Exemple de géométrie Kozeny-Carmen [8].

**Tableau 2: Perméabilité de quelques matériaux [9].**

| Matrice                   | Perméabilités k [m <sup>2</sup> ]              |
|---------------------------|--|
| Brique                    | 4,8.10 <sup>-15</sup> – 2,2. 10 <sup>-13</sup> |
| Pierre à chaud ; Dolomite | 2,0.10 <sup>-15</sup> – 4,5. 10 <sup>-14</sup> |
| Cuir                      | 9,5.10 <sup>-14</sup> – 1,2. 10 <sup>-13</sup> |
| Poudre d'ardoise noir     | 4,9.10 <sup>-14</sup> – 1,2. 10 <sup>-13</sup> |
| Terre                     | 2,9.10 <sup>-13</sup> – 1,4. 10 <sup>-11</sup> |
| Fibres de verre           | 2,4.10 <sup>-11</sup> – 5,1. 10 <sup>-11</sup> |
| Sable                     | 2,0.10 <sup>-11</sup> – 1,8.10 <sup>-10</sup>  |
| Cheveux artificiels       | 8,3.10 <sup>-10</sup> – 1,2. 10 <sup>-9</sup>  |
| Plaque de liège           | 3,3.10 <sup>-10</sup> – 1,5. 10 <sup>-9</sup>  |
| Fils à tisser             | 3,8. 10 <sup>-9</sup> – 1,0. 10 <sup>-8</sup>  |

## 2.3 Différentes formulations des équations du mouvement dans les milieux poreux

### ➤ Loi de Darcy

Les écoulements en milieu poreux ne peuvent pas être considérés comme des écoulements de fluides parfaits à cause de la viscosité. Néanmoins, si l'on fait abstraction de la complexité (à l'échelle de la porosité) de l'écoulement et si l'on ne retient que le mouvement global du liquide, on est amené à une description très voisine de celle des écoulements potentiels. C'est ce que permet de confirmer la loi de Darcy qui exprime sous forme analytique une observation expérimentale. La loi de Darcy exprime une relation de proportionnalité entre la vitesse de filtration et le gradient de pression appliquée dans la direction de l'écoulement [10].

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{k}\vec{V} \quad (1.4)$$



Où  $\vec{V}$  est la vitesse de filtration,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide,  $K$  la perméabilité du milieu poreux et  $P$  la pression appliquée. Cependant la loi de Darcy, encore largement utilisée, s'est avérée insuffisante. Sa principale limite réside dans le fait qu'elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide sur l'écoulement notamment près des parois. En effet, avec ce modèle, la condition de non glissement au niveau des parois est retenue quel que soit le fluide considéré. Cette équation ne tient pas compte non plus d'éventuels effets inertiels [10].

### ➤ Formulation de Brinkman

Pour calculer la force visqueuse exercée par un fluide sur des particules sphériques composant un milieu poreux, Brinkman H. C. (1947) a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes.

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{k}\vec{V} + \mu_{eff}\nabla^2(\vec{V}) \quad (1.5)$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy- Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation (1.5) est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman. Brinkman H. C. justifie cette loi empirique par le fait que, pour les faibles valeurs de la perméabilité  $K$ , l'équation (1.5) dégénère en loi de Darcy (équation (1.4)), et lorsque la perméabilité tend vers l'infini, on retrouve l'équation de Stokes. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside essentiellement dans l'évaluation de la viscosité effective  $\mu_{eff}$ .

### ➤ Formulation de Forchheimer

Dans le cas d'un écoulement de faible intensité, l'équation de Darcy suffit pour décrire l'écoulement. En revanche, avec l'augmentation de la vitesse, l'effet inertiel non linéaire devient important et l'équation de Brinkman devient insuffisante pour décrire l'écoulement. C'est pourquoi en 1964, Ward J. C propose de remplacer l'équation de Darcy- Brinkman par l'équation.

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{k}\vec{V} + \mu_{eff}\nabla^2(\vec{V}) + F\frac{\rho_f}{\sqrt{K}}|\vec{V}|\vec{V} \quad (1.6)$$

Dans le terme convectif  $F\frac{\rho_f}{\sqrt{K}}|\vec{V}|\vec{V}$ , appelé terme de Forchheimer,  $F$  est une constante adimensionnelle qui dépend des propriétés du milieu poreux et  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide. L'étude de Ward J. C (1964) a montré que, pour des vitesses relativement faibles, le terme de Darcy est prédominant, l'équation de Darcy constitue alors une bonne approximation

de l'équation de Darcy-Forchheimer. En revanche, pour des vitesses d'écoulement assez élevées, le terme convectif de Forchheimer devient prépondérant.  $F$  est le paramètre adimensionnel de Forchheimer caractéristique de la matrice solide. Il peut être estimé pour les milieux poreux granulaires par la relation [11].

$$F = \frac{1,75(1-\varepsilon)\sqrt{K}}{d.\varepsilon^2} \quad (1.7)$$

Où  $d$  est le diamètre moyen des grains et  $\varepsilon$  la porosité du milieu.

Toutefois, la valeur la plus couramment adoptée par les auteurs est  $F = 0,55$  [11].

### ➤ Terme convectif

Les modèles ci-dessus ne tenant pas compte de l'effet convectif, [2] a alors proposé une extension de l'équation de Darcy en introduisant un terme convectif par analogie avec les équations de Navier-Stokes et qui tient compte de la nature poreuse du milieu.

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P - \frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (1.8)$$

Le membre de gauche de l'équation (1.8) est le terme de convection qui tient compte des effets inertiels quand les vitesses sont importantes. Cependant des travaux théoriques et numériques [2]; [3] et [4] ont montré que le terme de convection ne tient pas compte des déviations de sources par rapport au terme de Darcy. C'est pourquoi, pour tenir compte des effets inertiels, beaucoup d'auteurs optent alors pour le modèle de Forchheimer [2].

### ➤ Modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer

C'est ainsi que généralement dans les récents travaux les équations de mouvement en milieu poreux sont exprimées en se basant sur un modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer avec un terme instationnaire et un terme de convection [15] et [16].

$$\underbrace{\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}}_2 = \underbrace{-\vec{\nabla} P}_3 - \underbrace{\frac{\mu}{K} \vec{V}}_4 + \underbrace{\mu_{eff} \nabla^2 (\vec{V})}_5 - \underbrace{F \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \vec{V}}_6 + \underbrace{\rho_f \vec{g}}_7 \quad (1.9)$$

Les différents termes de l'équation traduisent :

(1) : le terme de l'effet d'accélération visqueuse (instationnaire)

(2) : le terme de l'effet convectif qui tient compte de la couche limite dynamique.

(3) : le terme de gradient de pression.

(4) : le terme de Darcy (résultant des effets de viscosité à l'échelle microscopique).

(5) : le terme de Brinkman (qui tient compte des effets visqueux à l'échelle macroscopique).

(6) : le terme de Forchheimer (qui traduit l'influence de l'effet d'inertie à l'échelle microscopique).

(7) : le terme de pesanteur.

Après avoir rappelé les principales modèles de formulations des équations du mouvement dans les milieux poreux, nous allons aborder le transfert thermique dans les milieux poreux.

## 2.4 Transfert thermique dans un milieu poreux : équation d'énergie

Pour établir l'équation d'énergie issue du premier théorème de la thermodynamique dans un milieu poreux, on fait recours à quelques simplifications et quelques approximations dans le but d'enlever la complexité et l'hétérogénéité du milieu poreux. Pour cela, on considère un cas simple où le milieu est isotrope et où les effets radiatifs et la dissipation visqueuse sont négligeables. Les pores sont interconnectés pour former un milieu homogène isolé du milieu solide, comme si nous avons deux milieux adjacents chacun à ses propres propriétés thermodynamiques. On admet aussi qu'il n'y a pas de transfert thermique entre les deux phases solide et fluide [17].

L'équation d'énergie de la fraction de volume pour chaque phase sera défini comme suit : Pour la phase solide:

$$(1 - \varepsilon)(\rho C_p)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \varepsilon)\vec{\nabla} \cdot (\lambda_s \vec{\nabla} T_s) \quad (1.10)$$

Et pour la phase fluide:

$$\varepsilon(\rho C_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho C_p)_f \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_f = \varepsilon\vec{\nabla} \cdot (\lambda_f \vec{\nabla} T_f) \quad (1.12)$$

Les indices  $f$  et  $s$  font référence respectivement à la phase fluide et solide. Dans les équations de transfert précédentes nous avons supposé que le volume poreux est égal à la porosité (par unité de volume). Par exemple,  $\lambda_s \vec{\nabla} T_s$  est le flux de chaleur par conduction à travers le solide, et donc  $\vec{\nabla} \cdot (\lambda_s \vec{\nabla} T_s)$  est le taux de transfert par conduction par unité de volume du solide. En adoptant l'hypothèse que les phases solide et fluide du milieu poreux sont en équilibre thermique ( $T_s = T_f = T$ ), et en ajoutant l'équation (1-10) à l'équation (1-11), on trouve :

$$(\rho C_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p) \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T_f = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_{eff} \vec{\nabla} T) \quad (1.13)$$

Avec :

$$(\rho C_p)_m = (1 - \varepsilon)(\rho C_p)_s + \varepsilon(\rho C_p)_f \quad (1.14)$$

$(\rho C_p)_m$ ,  $(\rho C_p)_s$  et  $(\rho C_p)_f$ , les chaleurs massiques à pression constante respectivement du milieu poreux, des phases solide et fluide.

La conductivité thermique du milieu poreux  $\lambda_{eff}$  dépend en général des conductivités thermiques des phases fluide et solide  $\lambda_f$ ,  $\lambda_s$  respectivement, et de la façon avec laquelle s'effectue le transfert thermique au sein de la matrice poreuse [17]. Si le transfert s'effectue en parallèle, la conductivité thermique est alors la moyenne arithmétique pondérée des conductivités  $\lambda_f, \lambda_s$ :

$$\lambda_{eff} = (1 - \varepsilon)\lambda_s + \varepsilon\lambda_f \quad (1.15)$$

Si la structure et l'orientation du matériau exigent un transfert thermique en série poreux de tel sort que le flux de chaleur traverse à la fois la phase solide et la phase fluide alors la conductivité thermique du bloc s'écrit sous la forme suivant :

$$\frac{1}{\lambda_{eff}} = \frac{(1-\varepsilon)}{\lambda_s} + \frac{\varepsilon}{\lambda_f} \quad (1.16)$$

$\lambda_{eff}$ ,  $\lambda_s$  et  $\lambda_f$  les conductivités thermiques respectivement effective du milieu poreux, des phases solide et fluide.

Après avoir rappelé les principaux modèles de transport dans l'étude des milieux poreux, nous allons, dans la section suivante, analyser les travaux les plus importants qui traitent des écoulements et transferts induits par convection forcée dans les milieux poreux avec changement de phase.

## 2.5 Synthèse bibliographique :

Il se trouve en abondance dans la littérature, un nombre considérable de travaux de recherches sur la condensation dans les milieux poreux en convection forcée au cours de ces dernières décennies. Nous allons présenter une synthèse de revue bibliographique sur ces travaux de recherche déjà menés au cours de ces dernières années sur le phénomène de transfert de chaleur

et parfois de transferts couplés (chaleur et masse) lors de la condensation en convection forcée dans les milieux poreux.

Un modèle d'étude numérique de la condensation de vapeur pure saturée de type film mince en convection forcée sur une paroi couverte de matériau poreux a été proposé par [18]. Les transferts dans le milieu poreux et le film liquide sont décrits respectivement par le modèle de Darcy-Brinkman et les équations classiques de la couche limite. Les équations adimensionnelles sont résolues par une méthode implicite aux différences finies combinée avec une méthode itérative de type Gauss-Seidel. Ils ont analysé les influences des nombres de Prandtl et Froude sur les transferts dans la phase liquide. Les paramètres relatifs au problème thermique (nombre de Prandtl) n'ont pas d'influence sur la vitesse adimensionnelle bien que les problèmes thermique et hydrodynamique soient couplés via l'équation du bilan thermique. L'étude a montré que les transferts de chaleur augmente quand  $Pr \leq 0,2$ , cependant pour les valeurs  $Pr > 0,2$  il n'y a pas de changement sur les transferts chaleur. Toutefois les valeurs de  $FrK \geq 0,001$  n'ont pas d'effet sur le champ hydrodynamique, pour  $FrK < 0,001$ , la vitesse augmente significativement dans le film liquide et les effets d'inertie ne peuvent plus être ignorés (une réduction du nombre de Froude entraîne une augmentation de la perméabilité  $K$  du milieu poreux ainsi la substance deviennent de plus en plus perméables).

NDIAYE M. et al. (2013b) ont proposé encore un modèle d'étude numérique de la condensation de vapeur pure saturée de type film mince en convection forcée sur une paroi couverte de matériau poreux et ils ont analysé les influences des nombres de Reynolds et de Jacob, l'épaisseur adimensionnelles de la couche poreuse et la conductivité de transfert thermique adimensionnelle sur les transferts dans la phase liquide. Ils ont utilisé les mêmes résolutions que précédemment. Leurs résultats ont montré que le champ thermique n'est pas influencé par les problèmes dynamiques malgré leur couplage à l'interface. Les paramètres liés au problème thermique (rapport de conductivité thermique et nombre de Jacob) n'ont pas d'effets sur la vitesse longitudinale. Il apparaît également que le nombre de Reynolds a peu d'influence sur le champ thermique. La vitesse longitudinale augmente avec l'épaisseur de la couche poreuse. La diminution de l'épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse et le rapport de conductivité thermique et une augmentation du nombre de Jacob entraîne une augmentation de la température.

NDIAYE M. et al. (2014a) en utilisant le même modèle numérique, ont analysé l'influence des nombres de Reynolds et de l'épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse sur les transferts

dans la phase liquide et le milieu poreux ainsi que l'épaisseur du film liquide. L'épaisseur du film de condensât est déterminé par l'équation du bilan thermique à l'interface liquide-vapeur qui est résolue grâce à une procédure itérative de type Gauss-Seidel. Leurs résultats ont montré que le nombre de Reynolds n'influent sur le champ thermique, la température augmente avec une diminution de l'épaisseur de la couche poreuse adimensionnelle. L'augmentation du nombre de Reynolds et de l'épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse entraîne une augmentation de la vitesse longitudinale et une diminution de l'épaisseur du film liquide. L'augmentation des nombres de Reynolds et de l'épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse a des effets défavorables sur la condensation (diminution de l'épaisseur du film liquide). L'étude a aussi montré que les effets d'inertie ne peuvent plus être ignorés dès lors que le nombre de Reynolds calculé à partir du coefficient de perméabilité supérieur à 7.

Asbik M. et al (2002, 2003 et 2007) se sont intéressés à une étude analytique et numérique de la condensation par convection forcée d'un film laminaire sur une couche poreuse verticale. Ces auteurs ont montré la contribution significative du substrat poreux et l'effet de la dispersion thermique sur une paroi plane provoquant un accroissement du taux de transfert.

Asbik M. et al (2002) ont étudié analytiquement la condensation en film mince laminaire d'une vapeur pure et saturée s'écoulant en convection forcée sur une plaque poreuse verticale. Les transferts dans le milieu poreux et le liquide pur sont respectivement décrits par le modèle de Darcy-Brinkman et les équations classiques de la couche limite. La dispersion thermique est prise en considération dans l'équation de la chaleur relative au transfert de chaleur dans la couche poreuse. L'analyse des profils de vitesse, de température et du nombre de Nusselt local montre l'influence de la dispersion thermique sur l'écoulement de condensât et sur les transferts thermiques. Les résultats montrent que l'augmentation du coefficient de dispersion thermique engendre un accroissement considérable des échanges thermiques. La comparaison des résultats déduits des expressions analytiques avec ceux obtenus, en résolvant à l'aide d'une méthode numérique les équations de conservation, de la quantité de mouvement et de la chaleur conduit à un accord quantitativement satisfaisant. L'écart est inférieur à 10%.

Asbik M. et al (2003) se sont intéressés à l'étude analytique d'un film de condensation déposé par convection forcée sur une surface verticale recouverte d'une couche poreuse. Un problème de condensation par convection forcée dans une couche mince poreuse est envisagé. Le débit dans la région est décrit par le modèle Darcy-Brinkman-Forchheimer (DBF), tandis que les équations classiques de couche limite sans termes d'inertie et d'enthalpie sont utilisées dans la région de condensât pur. Afin de résoudre ce problème, une méthode analytique est proposée.

Ensuite, des solutions analytiques pour la vitesse d'écoulement, les distributions de température et le nombre de Nusselt local sont obtenues. Les résultats sont présentés essentiellement sous la forme de profils des vitesses et des températures dans la couche poreuse. La comparaison du modèle Darcy-Brinkman-Forchheimer et celui de Darcy-Brinkman est effectuée. Les effets de la viscosité effective (nombre de Reynolds), la perméabilité (nombre de Darcy) et l'épaisseur du revêtement poreux sans dimension  $H^*$  sur la circulation et le renforcement de transfert de chaleur sont également illustrés.

Asbik M. et al (2007) ont présenté une étude analytique puis numérique de la condensation en film laminaire d'une vapeur pure et saturée dans un canal vertical dont les parois sont isothermes et recouvertes d'un matériau poreux. Dans le milieu poreux, l'écoulement est décrit par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer tandis que les transferts dans le liquide pur sont régis par les équations classiques de la couche limite. Ces auteurs ont examiné plus particulièrement l'influence de la porosité du milieu ( $\epsilon$ ) sur les transferts thermiques dans le matériau poreux, les épaisseurs adimensionnelles de la couche poreuse, du liquide et du rapport de forme sur les transferts dans les phases liquide et vapeur. Les équations de la chaleur et les conditions aux limites qui leurs sont associées, discrétisées à l'aide d'un schéma implicite aux différences finies, conduisent à des systèmes d'équations algébriques tridiagonales. Ces équations ont été résolues par l'algorithme de la matrice tridiagonale (TDMA). Le maillage du domaine est considéré uniforme dans les directions transversale et longitudinale. L'épaisseur du film liquide est calculée par une procédure itérative basée sur une comparaison entre la valeur attribuée à l'épaisseur du film liquide et celle calculée à l'aide de la méthode de la sécante à partir de la densité du flux de chaleur à l'interface liquide-vapeur. Le critère de convergence, fixé à  $10^{-8}$ , est vérifié après quatre à cinq itérations.

Merouani L. et Belhamri A. (2010) ont présenté une étude qui concerne la condensation en film lors de l'écoulement d'un mélange vapeur-gaz non condensables dans un tube vertical à paroi poreuse. Les équations de la couche limite et le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer sont respectivement appliqués pour les phases liquide et gazeuse et la couche poreuse. Le couplage des équations des trois milieux est exprimé par la continuité des contraintes de cisaillement et des densités des flux thermique et massique aux interfaces liquide-gaz et liquide-milieu poreux. Les systèmes d'équations sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les calculs effectués permettent de déterminer l'influence des propriétés du milieu poreux et du débit du mélange gazeux sur le comportement hydrodynamique du système. Les résultats obtenus montrent que dans les phases liquide et poreuse, les profils de vitesse sont d'allure sensiblement

parabolique croissante et nettement inférieure à celle du mélange gazeux. Les profils thermiques sont quasi-linéaires et tendent progressivement vers la température de paroi pratiquement atteinte à la sortie du tube. L'étude paramétrique a montré que le débit total de condensat augmente alors que l'épaisseur de film liquide diminue avec la porosité et la perméabilité du milieu poreux. Ces mêmes grandeurs augmentent avec le nombre de Reynolds du mélange gazeux à l'entrée du tube.

Une étude numérique des transferts de chaleur et de masse lors de la condensation en film laminaire d'une vapeur d'eau dans un canal incliné à paroi poreuse a été présentée par El Hammami Y. et al. (2010). Dans le milieu poreux, ils ont décrit l'écoulement par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer. Les résultats sont obtenus pour deux positions du canal, horizontal et vertical. L'analyse des effets de l'épaisseur de la couche poreuse  $H$ , la température d'entrée, la pression d'entrée, et le nombre de Reynolds d'entrée sont étudiés. Les résultats de la simulation montrent bien l'influence de l'épaisseur de la couche poreuse sur les performances de transfert de chaleur et de masse.

Merouani L. et al. (2013) ont étudié numériquement la condensation de type film avec des mélanges vapeur-gaz dans un canal incliné d'un mur supérieur isolé et un mur inférieur isotherme recouvert d'une couche poreuse mince. Un modèle bidimensionnel basé sur les équations de conditions aux limites du film liquide et du mélange vapeur-air alors que le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est appliqué dans la couche poreuse. Les équations régissant sont discrétisées avec un schéma de différence fini implicite et sont numériquement résolus en utilisant les algorithmes de Gauss et de Thomas. Les résultats numériques permettent de déterminer les profils de vitesse, de température et de concentration de vapeur dans le mélange vapeur/air, le film liquide et le substrat poreux. L'évolution axiale du débit de condensat et le flux de la chaleur de mur sont également présentés et analysés dans différentes conditions de fonctionnement. On constate que l'angle d'inclinaison, de l'humidité relative et le nombre de Reynolds exercent une influence sur le processus de condensation beaucoup plus significatif que celle qui vient d'un changement des propriétés poreuses de couche (nombre de Darcy, la viscosité effective, la conductivité thermique effective). La vitesse dans la couche poreuse et le film liquide augmente progressivement pendant l'écoulement mais reste beaucoup inférieurs à celui du mélange à la fin de la condensation. Dans toutes les régions du système, la température et la concentration de vapeur diminuent graduellement le long du canal et tendent aux valeurs finales correspondant à la saturation isotherme à la température de refroidissement de mur. Le débit de condensat et le flux de la chaleur de mur augmentent de manière



significative avec le nombre de Reynolds, l'humidité relative et l'angle d'inclination du canal. Cependant, leur augmentation avec l'épaisseur, la perméabilité et la conductivité thermique effective de la couche poreuse est beaucoup plus petite. Dans les conditions de fonctionnement utilisées dans cette étude, la longueur de mur exigée pour atteindre la fin de la condensation diminue avec une augmentation de l'humidité relative de mélange, de l'angle d'inclination du canal et des propriétés poreuses de la couche.

Nasr A. (2018) a numériquement étudié le problème du perfectionnement de transfert de la chaleur et de la masse lors de la condensation de type film liquide sur le long d'un canal vertical recouvert d'une couche poreuse sur une de ses parois. Le film liquide tombe vers le bas d'une paroi du canal sous la convection mixte. La paroi est couverte de couche poreuse mince et extérieurement soumis à un flux de refroidissement uniforme de la chaleur tandis que la deuxième paroi est sèche et isotherme. Les effets de la porosité, de l'épaisseur de la couche poreuse et des conditions ambiantes sur le perfectionnement de transfert de la chaleur et de la masse et sur la condensation de film liquide ont été examinés en détail. Les résultats numériques montrent que la performance de transfert de la chaleur et de la masse à l'interface liquide-vapeur pendant la condensation de film liquide est augmentée par la présence de la couche poreuse. Une diminution de la porosité  $\varepsilon$  et de l'épaisseur de la couche poreuse augmente les performances de transfert de la chaleur et de la masse à l'interface liquide-vapeur. Les augmentations de la porosité, l'épaisseur de la couche poreuse, de la pression ambiante, de l'humidité et du flux de chaleur de refroidissement augmente la condensation du film de l'eau contrairement à l'augmentation de la température d'entrée.

Afin d'examiner le refroidissement par évaporation de l'air ambiant à travers une interface couche poreuse/humide-air dans un canal vertical; Sellami K. et al. (2019) ont proposé une étude numérique des échanges couplés de chaleur et de masse. Ils ont constaté que le refroidisseur évaporatif est plus efficace pour une porosité élevée et un milieu poreux épais, avec une amélioration atteignant 23% pour une porosité élevée.

## 2.6 Conclusion

A travers cette étude bibliographique, nous avons constaté que les études concernant le transfert de chaleur induit par la condensation en convection forcée d'un film mince d'une vapeur saturée en milieu poreux, ont reçu une attention particulière en raison de leurs nombreuses applications dans divers domaines technologiques. Ainsi, la présence d'une couche de matériau poreux sur une paroi d'un canal engendre un accroissement du transfert de chaleur comparé à

celui observé pour une plaque plane, soumise aux mêmes conditions aéraulique et thermique. Néanmoins, la modélisation de la condensation de vapeur en présence de gaz non condensables est plus complexe et induit une convection naturelle. Ceci nous a incité, vu le grand champ d'applications, à développer la condensation de vapeur pure.

---

3 CHAPITRE 2:  
FORMULATION  
MATHÉMATIQUE

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous ne manquerons pas de décrire et de formuler le modèle physique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

### 3.2 Position du problème

Notre modèle est constitué d'un canal vertical formé de deux plaques de longueur  $L$ , espacées d'une distance  $2A$  (figure 1). Les faces internes de ces plaques, supposées de faibles épaisseur, sont recouvertes d'un matériau poreux d'épaisseur  $H$ , de perméabilité  $K$  et de porosité  $\varepsilon$  et maintenues à une température  $t_w$  inférieure à celle d'une vapeur saturée  $t_s$  qui entre dans le canal à une vitesse uniforme  $U_0$ . Il en résulte une condensation de cette vapeur dans le milieu poreux et la présence de trois zones : (1) le milieu poreux saturé par le liquide, (2) le film de condensât et (3) la vapeur saturante. Le film de condensât s'écoule sous l'effet de la gravité et des forces visqueuses de frottement. Soient  $(x, y)$  et  $(u, v)$ , respectivement les coordonnées cartésiennes et les composantes de la vitesse dans le milieu poreux et du liquide dans le repère associé au modèle.

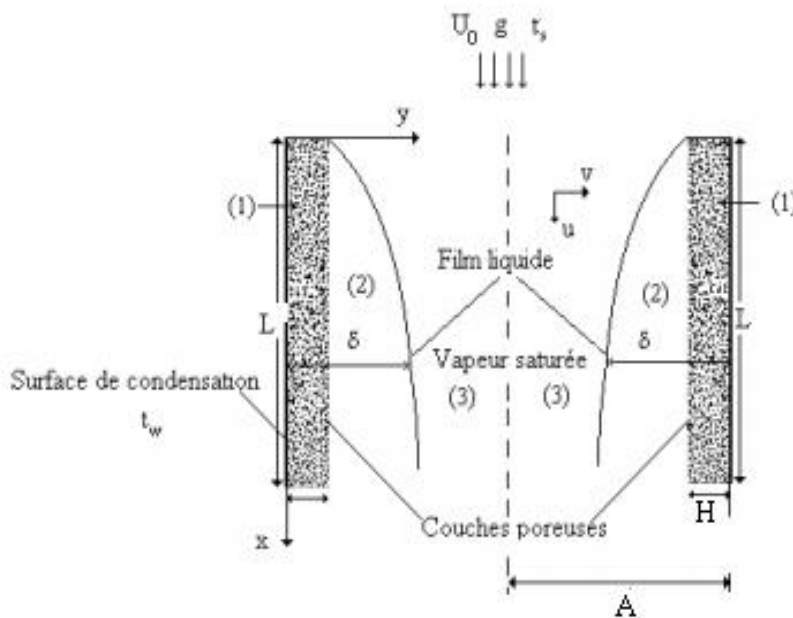


Figure 1 : Géométrie du modèle physique et système de coordonnées [19].

### 3.3 Les hypothèses simplificatrices

Pour bien aborder notre travail, nous admettons les hypothèses simplificatrices suivantes.

- 1- Nous nous plaçons dans des conditions où les approximations des couches limites hydrodynamiques et thermiques sont valables.
- 2- La matrice poreuse est isotrope et homogène.
- 3- Nous introduisons la dispersion dans le modèle car il a été montré que dans les problèmes qui traitent la condensation en convection forcée dans les milieux poreux, l'effet de dispersion devrait être incluse.
- 4- Le milieu poreux est saturé par un fluide (vapeur pure saturée) supposé newtonien et incompressible (où les équations de l'écoulement et de transfert dans la phase vapeur sont généralement négligées).
- 5- L'écoulement engendré est permanent, laminaire et bidimensionnel
- 6- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable (la diffusion d'énergie d'origine purement mécanique est négligée du fait que la vitesse et la viscosité du fluide sont faibles).
- 7- Les propriétés thermo-physiques des fluides et celles de la matrice poreuse sont supposées constantes dans la gamme de température (les écarts de température imposés ne modifient pas les propriétés thermo physiques du fluide qui restent constantes).
- 8- Le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé pour décrire l'écoulement dans la couche poreuse.
- 9- La condensation se produit sous forme d'un film mince d'épaisseur supérieure à celle du matériau poreux
- 10- La matrice poreuse est en équilibre local avec le condensât
- 11- L'interface liquide-vapeur est en équilibre thermodynamique
- 12- les phases solide et fluide du milieu poreux sont en équilibre thermique
- 13- La variation transversale et longitudinale de la pression n'est pas prise en compte dans la matrice poreuse.
- 14- On néglige le transfert d'énergie par rayonnement.
- 15- La géométrie du problème fait que l'écoulement est considéré axisymétrique.

#### 3.3.1 Équations de transferts

Résoudre un problème de convection forcée consiste à déterminer les champs de vitesse et de température en chaque point du domaine occupé par le fluide. L'établissement des

équations de base qui régissent le problème nous permet de faire cette tâche. Dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus, elles sont déduites de l'équation générale des bilans. Pour le milieu poreux, l'écoulement est régi par un modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer de telle sorte que l'on puisse tenir compte de l'influence des forces d'inertie. Compte tenu des hypothèses simplificatrices formulées ci-dessus, les équations qui régissent les transferts dans la couche poreuse et le liquide pur ainsi que les conditions aux limites qui leur sont associées s'écrivent comme indiqué dans les sections suivantes.

### 3.3.2 Equation de conservation de la masse

Hypothèse d'un écoulement de fluide incompressible ( $Ma \ll 1$ ), nous avons donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

Couche poreuse  $0 < y < H$

L'équation de conservation de la masse dans le milieu poreux s'écrit :

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Liquide pur  $H < y < (x)$

L'équation de conservation de la masse dans le liquide s'écrit :

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial v_l}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

### 3.3.3 Equations de l'énergie

Equation de l'énergie dans la couche poreuse  $0 < y < H$ :

L'équation de l'énergie dans le milieu poreux, en tenant compte des hypothèses simplificatrices, s'écrit comme suit :

$$(\rho C_p)_l \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_{eff} \vec{\nabla} T) \quad (2.4)$$

En projetant :

$$(\rho C_p)_l \left( u_p \frac{\partial T_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial T_p}{\partial y} \right) = \lambda_{eff} \left( \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2} \right) \quad (2.5)$$

$T_p$  est la température du milieu poreux tandis que  $u_p$  et  $v_p$  sont les composantes de la vitesse du fluide dans ce milieu.

Avec  $\lambda_{eff}$  conductivité thermique effective du milieu poreux

Avec les hypothèses de la couche limite et en posant :

$$\lambda^* = \frac{\lambda_l}{\lambda_{eff}} \quad \text{le rapport de conductivités thermiques et}$$

$$\alpha_l = \frac{\lambda_l}{(\rho C_p)_l} \quad \text{le coefficient de diffusivité thermique du milieu liquide,}$$

Alors il vient :

$$u_p \frac{\partial T_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial T_p}{\partial y} = \frac{\alpha_l}{\lambda^*} \cdot \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

Equation de l'énergie dans le film liquide  $H < y < (x)$

$$(\rho C_p)_l \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_l \vec{\nabla} T) \quad (2.7)$$

L'équation de l'énergie dans le liquide eu égard aux hypothèses de la couche limite s'écrit :

$$u_l \frac{\partial T_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial T_l}{\partial y} = \alpha_l \cdot \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \quad (2.8)$$

Avec  $\alpha_l = \frac{\lambda_l}{(\rho C_p)_l}$  le coefficient de diffusivité thermique du liquide.

### 3.3.4 Les équations de mouvement

Equations de mouvement dans la couche poreuse  $0 < y < H$

Dans cette région, le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer en régime permanent suivant (Ox) est utilisé pour décrire l'écoulement :

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P - \frac{\mu_l}{K} \vec{V} + \mu_{eff} \nabla^2 (\vec{V}) - F \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \vec{V} + \rho_f \vec{g} \quad (2.9)$$

En tenant compte des hypothèses simplificatrices formulées ci-dessus, les équations projetées sur les axes de coordonnées qui régissent le mouvement du fluide dans la couche poreuse s'écrivent :

Equation du mouvement dans la couche poreuse suivant x.

$$\mathbf{u}_p \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial x} + \mathbf{v}_p \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial y} = -\frac{\varepsilon^3}{\rho_l} \frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{g} - \varepsilon^2 \frac{\nu_l}{K} \mathbf{u}_p + \varepsilon^2 \cdot \nu_{eff} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{y^2} - \varepsilon^2 \cdot F \cdot \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} \mathbf{u}_p^2 \quad (2.10)$$

$\nu_{eff} = \frac{\mu_{eff}}{\rho_l}$  est la viscosité cinématique effective du milieu poreux.

### Equations de mouvement dans le liquide pur $H < y < (x)$

Dans cette région, l'équation de Navier Stokes en régime permanent suivant est utilisée pour décrire l'écoulement :

$$\rho_f (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \mu_f \overline{\nabla(\vec{\nabla} \vec{V})} + \rho_f \vec{g} \quad (2.11)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant x s'écrit :

$$\rho_l \left( \mathbf{u}_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x} + \mathbf{v}_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_l \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial y^2} + \rho_l \cdot \vec{g} \quad (2.12)$$

Nous admettons que l'écoulement loin de la couche limite est de type Bernoulli dans la phase vapeur pure afin d'éliminer le terme  $\frac{\partial P}{\partial x}$  qui est assez gênant.

Nous avons donc :

$$\rho_v \cdot \mathbf{u}_v \frac{\partial \mathbf{u}_v}{\partial x} = -\frac{\partial P_v}{\partial x} + \rho_v \cdot \mathbf{g} \quad (2.13)$$

Comme  $\frac{\partial P}{\partial x} = \mathbf{0}$  dans la phase liquide (d'après les hypothèses de la couche limite), alors le théorème du continuum entraîne :

$$P_v(x) = P(x) \quad (2.14)$$

Dans ces conditions l'équation du mouvement dans la phase liquide s'écrit :

$$\mathbf{u}_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x} + \mathbf{v}_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial y} = \frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \mathbf{u}_v \frac{\partial \mathbf{u}_v}{\partial x} + \nu_l \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial y^2} + \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l} \cdot \mathbf{g} \quad (2.15)$$



Puisque loin de la couche limite du liquide pur, la vitesse de la vapeur  $\mathbf{u}_v$  est constante, alors l'écoulement du mouvement dans la phase liquide devient:

$$\mathbf{u}_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \mathbf{v}_l \frac{\partial u_l}{\partial y} = \mathbf{v}_l \cdot \frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2} + \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l} \cdot \mathbf{g} \quad (2.16)$$

### 3.3.5 Conditions aux limites :

Pour compléter notre système, nous associons aux équations des bilans les conditions aux limites suivantes: Conditions à l'entrée  $x = 0$

$$T(0,y) = T_S \quad (2.17)$$

$$u(0,y) = U_0 \quad (2.18)$$

$$v(0,y) = 0 \quad (2.19)$$

#### Sur la paroi $y = 0$

La paroi est supposée isotherme et maintenue à la température  $T_w$ , alors nous avons:

$$T_p(x, 0) = T_w \quad (2.20)$$

Comme le fluide est visqueux et que la paroi est immobile, alors la condition de non glissement se traduit par:

$$\mathbf{u}_p(x, 0) = \mathbf{v}_p(x, 0) = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

A l'interface couche poreuse/liquide pur  $y = H$

L'interface étant lisse et séparant deux milieux dont les lois de comportements sont différentes, alors les conditions à l'interface se traduisent par des conditions de continuité des fonctions, des contraintes et des flux thermiques. On a ainsi :

Continuité des vitesses et des températures:

$$\mathbf{u}_p(x, H) = \mathbf{u}_l(x, H) \quad (2.22)$$

$$T_p(x, H) = T_l(x, H) \quad (2.23)$$

Continuité des contraintes :

$$(\mu)_{eff} \cdot \left. \frac{\partial u_p}{\partial y} \right]_{y=H} = \mu_l \cdot \left. \frac{\partial u_l}{\partial y} \right]_{y=H} \quad (2.24)$$

Continuité des flux de chaleur :

$$(\lambda)_{eff} \cdot \left. \frac{\partial T_p}{\partial y} \right]_{y=H} = \lambda_l \cdot \left. \frac{\partial T_l}{\partial y} \right]_{y=H} \quad (2.25)$$

A la frontière de la couche limite hydrodynamique:  $y = \delta(x)$

En supposant que la vapeur est un fluide parfait, alors la continuité des contraintes se ramène à

$$\left. \frac{\partial u_{t,l}}{\partial n} \right]_{y=\delta(x)} = 0 \quad (2.26)$$

Avec  $u_{t,l}$  la composante tangentielle de la vitesse dans la phase liquide et  $\left. \frac{\partial}{\partial n} \right]_{y=\delta(x)}$  la dérivée locale par rapport à la direction normale au niveau de la frontière de la couche limite  $\delta(x)$ . Puisque l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique est supérieure à celle de la couche limite thermique ( $Pr \approx 7 > 1$ ) alors la condition sur la température se ramène à:

$$T_l(x, \delta(x)) = T_s \quad (2.27)$$

### 3.3.6 Equations des bilans massique et thermique

L'épaisseur de la couche limite étant une inconnue du problème, il faut dès lors adjoindre aux conditions limites ci-dessus des conditions supplémentaires qui nous permettront de la déterminer. Pour ce faire nous faisons appel aux bilans massique (Conservation du débit massique) et thermique qui s'expriment, à chaque position dans la direction longitudinale, par: Conservation du débit massique :

$$\rho_l \left\{ \int_0^H u_p dy + \int_H^{\delta(x)} u_l dy \right\} = \rho_v \delta(x) u_0 \quad (2.28)$$

**Bilan thermique:**

$$\begin{aligned} (\lambda)_{eff} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} &= \frac{d}{dx} \int_0^H \rho_l \{ h_{fg} + C_p(T_s - T_l) \} u_p dy + \frac{d}{dx} \int_H^{\delta(x)} \rho_l \{ h_{fg} + \\ &C_p(T_s - T_l) \} u_l dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 3.4 Transformations des équations

### 3.4.1 Variables adimensionnelles

L'emploi des variables réduites dans les équations permet d'approcher au plus près la réalité des phénomènes physiques, car leurs existences et leurs évolutions sont indépendantes du système d'unités de mesure utilisé pour les étudier. On peut dire aussi que ces variables permettent d'obtenir des informations générales, qui jouent un rôle prépondérant dans les similitudes. En effet, pour ramener les équations phénoménologiques sous une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir, moyennant des grandeurs caractéristiques, des changements de variables.

Les équations du problème sont rendues adimensionnelles à l'aide des grandeurs de référence suivantes :

- ✓ Longueur de référence: elle a été définie suivant la direction considérée.

Suivant la direction (ox), la longueur de référence est définie comme étant la longueur des plaques :

$$L_{r,x} = L \quad (2.30)$$

Suivant la direction (oy), la longueur de référence est définie comme étant la demi-largeur du canal:

$$L_{r,y} = A \quad (2.31)$$

- ✓ La vitesse de référence  $\mathbf{u}_r$  est définie par la vitesse d'entrée:

$$\mathbf{u}_r = U_0 \quad (2.32)$$

- ✓ La différence des températures entre la vapeur saturée et la plaque va constituer

L'écart de température de référence :

$$\Delta T = T_s - T_w \quad (2.33)$$

A partir de ce jeu de grandeurs de référence, nous allons former les variables adimensionnelles suivantes:

$$\mathbf{x}^* = \frac{x}{L} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{y}^* = \frac{y}{A} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{H}^* = \frac{H}{A} \quad (2.36)$$

$$\delta^* = \frac{\delta}{A} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{u}^* = \frac{u}{U_0} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{v}^* = \frac{v}{U_0} \quad (2.39)$$

$$\theta = \frac{T-T_w}{T_s-T_w} \quad (2.40)$$

### 3.4.2 Transformation du domaine physique

La frontière de la couche limite  $\delta^*$  étant curviligne et fonction de la coordonnée longitudinale ( $\mathbf{x}^*$ ), il est alors utile de ramener notre domaine curviligne en un domaine rectangulaire ( $\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}$ ) dans le quel la frontière est repérée par une ligne de coordonnée constante [1].

Dans la couche poreuse  $0 \leq \mathbf{y}^* \leq \mathbf{H}^*$

Dans ce milieu, nous posons:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = \mathbf{X} \\ \mathbf{y}^* = \mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (2.41)$$

Les dérivées partielles premières et secondes s'écrivent alors:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^*} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^*} = \frac{1}{\mathbf{H}^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \end{cases} \quad (2.42)$$

Alors

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{*2}} = \frac{1}{(\mathbf{H}^*)^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\eta}^2} \quad (2.43)$$

Dans le liquide pur  $H^* \leq y^* \leq \delta^*(X)$

Dans la couche limite liquide nous prenons:

$$\begin{cases} x^* = X \\ y^* = [\delta^*(X) - H^*]. \eta + 2H^* - \delta^*(X) \end{cases} \quad (2.44)$$

Dans ce cas-ci les dérivées partielles premières et secondes sont alors transformées comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\eta-1}{\delta(X)-H} \frac{d\delta(X)}{dX} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y^*} = \frac{1}{\delta(X)-H} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases} \quad (2.45)$$

Alors

$$\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} = \frac{1}{(\delta(X)-H)^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (2.46)$$

### 3.4.3 Equations adimensionnelles dans le nouveau système de coordonnées $(X, \eta)$

Eu égard aux lois de transformation ci-dessus, les équations adimensionnelles dans les deux milieux ainsi que les conditions aux limites qui leurs sont associées s'écrivent comme suit

Couche poreuse  $0 < \eta < 1$

Le système d'équations définissant le transfert s'écrit alors sous la forme adimensionnelle

Equation de continuité

$$\frac{\partial u_p^*}{\partial X} + \frac{L}{A} \frac{1}{H^*} \frac{\partial v_p^*}{\partial \eta} = 0 \quad (2.47)$$

Equation du bilan de la quantité du mouvement suivant X

$$\begin{aligned} u_p^* \frac{\partial u_p^*}{\partial X} + \frac{L}{A} \frac{v_p^*}{H^*} \frac{\partial u_p^*}{\partial \eta} = -\varepsilon^2 \frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{\varepsilon^2}{F_r} - \varepsilon^2 \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{D_a}{R_e} u_p^* + \\ \varepsilon^2 \left(\frac{L}{A}\right)^2 v^* \frac{1}{R_e H^{*2}} \frac{\partial^2 u_p^*}{\partial \eta^2} - \varepsilon^2 F \sqrt{D_a} \frac{L}{A} u_p^{*2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Equation de la chaleur

$$u_p^* \frac{\partial \theta_p}{\partial X} + \frac{L v_p^*}{A H^*} \frac{\partial \theta_p}{\partial \eta} = \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re(P_r)_{eff}} \frac{1}{H^{*2}} \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial \eta^2} \quad (2.49)$$

Liquide pur  $1 < \eta < 2$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u_l^*}{\partial X} - \frac{\eta-1}{\delta^*-H^*} \frac{\partial \delta^*}{\partial X} \frac{\partial u_l^*}{\partial \eta} + \frac{L}{A} \frac{1}{\delta^*-H^*} \frac{\partial v_l^*}{\partial \eta} = 0 \quad (2.50)$$

Equation du bilan de la quantité du mouvement suivant X

$$u_l^* \left( \frac{\partial u_l^*}{\partial X} - \frac{\eta-1}{\delta^*-H^*} \frac{\partial \delta^*}{\partial X} \frac{\partial u_l^*}{\partial \eta} \right) + \frac{L}{A} \frac{v_l^*}{(\delta^*-H^*)} \frac{\partial v_l^*}{\partial \eta} = \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re(\delta^*-H^*)^2} \frac{\partial^2 u_l^*}{\partial \eta^2} + \frac{1}{Fr} \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \quad (2.51)$$

Equation de la chaleur :

$$u_l^* \left( \frac{\partial \theta_l^*}{\partial X} - \frac{\eta-1}{\delta^*-H^*} \frac{\partial \delta^*}{\partial X} \frac{\partial \theta_l^*}{\partial \eta} \right) + \frac{L}{A} \frac{v_l^*}{(\delta^*-H^*)} \frac{\partial \theta_l^*}{\partial \eta} = \frac{1}{Re P_r} \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re(\delta^*-H^*)^2} \frac{\partial^2 \theta_l^*}{\partial \eta^2} \quad (2.52)$$

Nous avons ainsi diminué le nombre de paramètres et fait apparaître des grandeurs qui caractérisent les transferts.

Dans ces relations nous avons posé

$F_r = \frac{U_0^2}{gL}$  : le nombre de Froude qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie et de gravité.

$Re = \frac{U_0 L}{\nu_l}$  : le nombre de Reynolds qui compare les effets d'inertie et de viscosité. C'est le nombre caractéristique le plus important en Mécanique des Fluides.

$Da = \frac{A^2}{K}$  : le nombre de Darcy

$Pr = \frac{\nu_l}{\alpha_l} = \frac{\mu_l C_p}{\lambda_l}$  : le nombre de Prandtl liquide, il représente le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité thermique. Ce nombre ne dépend que de la nature du fluide.

On a  $P_r < 1$  pour les métaux liquides,  $P_r > 1$  pour la plupart des autres liquides (eau, huiles, solvants organiques,...), et  $P_r \approx 1$  pour l'air.

Une analyse plus détaillée permettrait de montrer que le rapport de l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique sur l'épaisseur de la couche limite thermique est une fonction de ce nombre.

$(P_r)_{eff} = \frac{v_l}{\alpha_{eff}} = \frac{\mu_l C_p}{\lambda_{eff}} = \lambda^* P_r$  : le nombre de Prandtl calculé sur la base de la diffusivité thermique effective.

$(P_e)_{eff} = R_e (P_r)_{eff} = \lambda^* P_e$  : le nombre de Peclet calculé sur la base de la diffusivité thermique effective.

$\nu^* = \frac{\nu_l}{\nu_{eff}}$  : le rapport de viscosités cinématiques du milieu poreux et du film liquide

$\mu^* = \frac{\mu_l}{\mu_{eff}}$  : le rapport de viscosités dynamiques du milieu poreux et du film liquide

$\lambda^* = \frac{\lambda_l}{\lambda_{eff}}$  : le rapport de conductivités thermiques du milieu poreux et du film liquide

$\alpha_{eff} = \frac{\lambda_{eff}}{(\rho C_p)_l}$  : la diffusivité thermique du milieu poreux

### 3.4.4 Conditions aux limites et aux interfaces

Les équations de base décrites précédemment sont résolues en tenant compte des conditions aux frontières spécifiques à notre problème. Ces dernières sont les suivantes :

Conditions à l'entrée  $X = 0$

$$\theta_p(0, \eta) = 1 \quad (2.53)$$

$$u_p^*(0, \eta) = 1 \quad (2.54)$$

$$v_p^*(0, \eta) = 0 \quad (2.55)$$

A la paroi  $\eta = 0$

$$\mathbf{u}_p^*(X, 0) = \mathbf{v}_p^*(X, 0) = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

$$\theta_p(X, 0) = 0 \quad (2.57)$$

A l'interface couche poreuse/liquide pur  $\eta = 1$

Continuité des vitesses et des températures adimensionnelles

$$\mathbf{u}_p^*(X, 1) = \mathbf{u}_l^*(X, 1) \quad (2.58)$$

$$\theta_p(X, 1) = \theta_l(X, 1) \quad (2.59)$$

A l'interface liquide/vapeur  $\eta = 2$

$$\theta_l(X, 2) = 1 \quad (2.60)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_l^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=2} = 0 \quad (2.61)$$

Continuité des contraintes adimensionnelles

$$\left. \frac{\mu^*}{H^*} \frac{\partial \mathbf{u}_p^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \left. \frac{1}{\delta^* - H^*} \frac{\partial \mathbf{u}_l^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=2} \quad (2.62)$$

Continuité des flux adimensionnels

$$\left. \frac{1}{H^*} \frac{\partial \theta_p}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \left. \frac{\lambda^*}{\delta^* - H^*} \frac{\partial \theta_l}{\partial \eta} \right|_{\eta=2} \quad (2.63)$$

### 3.4.5 Equations des bilans massique et thermique

Le débit massique et le bilan thermique adimensionnels s'expriment respectivement par les relations suivantes:

$$H^* \int_0^1 \mathbf{u}_p^* d\eta + (\delta^* - H^*) \int_1^2 \mathbf{u}_l^* d\eta = \frac{\rho_v}{\rho_l} \delta^* \quad (2.64)$$



$$\begin{aligned} \frac{Ja}{(Pe)_{eff}} \left( \frac{L}{A} \right)^2 \frac{1}{H^*} \frac{\partial \theta_p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= \frac{d}{dX} \int_0^1 H^* \{1 + Ja(1 - \theta_p)\} u_p^* d\eta \\ &+ \frac{d}{dX} \int_1^2 (\delta^* - H^*) \{1 + Ja(1 - \theta_l)\} u_l^* d\eta \end{aligned} \quad (2.65)$$

Eu égard à l'équation de conservation du débit massique (2.64), l'équation du bilan thermique (2.65) se réduit à:

$$\begin{aligned} \frac{Ja}{(Pe)_{eff}} \left( \frac{L}{A} \right)^2 \frac{1}{H^*} \frac{\partial \theta_p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= \frac{d}{dX} \left\{ (1 - Ja) \delta^* u_0^* \frac{\rho_v}{\rho_l} \right\} \\ -Ja \frac{d}{dX} \left\{ H^* \int_0^1 \theta_p u_p^* d\eta + (\delta^* - H^*) \int_1^2 \theta_l u_l^* d\eta \right\} & \end{aligned} \quad (2.66)$$

$(Pe)_{eff} = \lambda^* \cdot Pe = \lambda^* \cdot Pr \cdot Re$  est le nombre de Peclet modifié.

Avec:

$(Pr)_{eff} = \lambda^* \cdot Pr$  Est le nombre de Prandtl modifié

$Ja = \frac{(c_p)_l (T_s - T_w)}{h_{fg}}$  Représente le nombre de Jacob qui compare les chaleurs sensible et latente.

### 3.5 Conclusion

Après avoir décrit le problème, nous avons sur la base d'hypothèses simplificatrices jugées raisonnables d'établir les équations qui régissent les transferts dans le milieu poreux et dans la phase liquide ainsi que les conditions aux limites et aux interfaces qui les complètent.

Pour décrire l'écoulement dans le milieu poreux, nous avons choisi le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer tandis que dans le liquide pur nous avons choisi les équations classiques de la couche limite. Dans le but de réduire les paramètres et de généraliser l'étude, nous avons rendu adimensionnelles les équations générant ainsi des nombres qui caractérisent les transferts.

Cependant le domaine physique étant à frontière curviligne (l'épaisseur de la couche limite est une fonction de l'abscisse longitudinale), l'utilisation d'une transformation homotopique nous a permis de le ramener en un domaine rectangulaire dans lequel la couche limite

hydrodynamique est repéré par une ligne de coordonnée constante. Nous avons aussi défini le taux de transfert thermique à l'interface milieu poreux/film liquide pure. Puisque les équations obtenues sont fortement non linéaires et couplées non seulement entre elles mais aussi avec les conditions aux limites et alors pour les résoudre, l'utilisation d'une méthode numérique s'impose. La description de la méthode choisi et les questions relatives à la technique de résolution, au traitement des interfaces milieu poreux/liquide seront l'objet du chapitre suivant.

---

4 CHAPITRE 3 :

FORMULATION

NUMÉRIQUE

---

## 4.1 Introduction

Les équations qui régissent le transfert dans un canal à paroi poreuse, forment un système d'équations aux dérivées partielles, non-linéaires et sont non seulement couplées entre elles mais aussi avec leurs conditions aux limites, n'admettant pas une solution analytique sauf pour des cas très simplifiés. Par conséquent, un recours aux méthodes numériques est dans ce cas nécessaire.

Les résolutions numériques passent par deux étapes : une étape de maillage et une étape de discrétisation.

Il existe plusieurs méthodes de discrétisation, les plus couramment utilisées sont:

❖ La méthode des différences finies :

Elle consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann [2].

❖ La méthode des volumes finis :

Elle intègre les équations écrites sous forme de loi de conservation sur des volumes élémentaires de forme simple. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangulaires.

Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination facile des conditions aux limites de type Neumann.

Inconvénient : peu de résultats théoriques de convergence [2].

❖ La méthode des éléments finis :

Elle consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous format variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.

Avantages : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Inconvénient : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

Cependant, le choix d'une bonne représentation doit être gouverné non seulement par la nature même du problème physique concret et la forme du modèle mathématique continu mais aussi par des critères d'économie (temps et volumes de calculs réduits) et surtout de stabilité et de convergence.

Dans le cadre de notre étude, nous avons opté pour la méthode des différences finies qui s'avère la plus adaptée et la plus facile à mettre en œuvre et à utiliser pour les problèmes à géométrie simple. Dans ce chapitre nous présentons d'abord la méthode des différences finies utilisée qui nous a permis de ramener les équations continues en des systèmes d'équations algébriques linéaires. Pour les résoudre nous allons alors faire appel à des techniques itératives. Enfin nous allons rassembler toutes les étapes de calcul qui vont nous conduire aux résultats sous la forme d'algorithme et finir par l'interprétation et la discussion des résultats obtenus [2].

*NB : Pour ne pas alourdir les écritures nous allons omettre dans tout ce qui suit les astérisques dans les grandeurs adimensionnelles.*

## 4.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies, bien qu'étant la plus ancienne des méthodes numériques utilisée en Mécanique des Fluides Numérique (C.F.D), demeure celle qui est la plus facile à mettre en œuvre et celle qui présente le plus faible coût de calcul et s'avère la plus adaptée pour les problèmes à géométrie simple. Son défaut majeur réside dans la non-garantie absolue de la continuité des flux aux interfaces des volumes élémentaires de discrétisation. Le transfert de masse étant négligé dans notre cas il sera plus facile d'assurer la continuité des flux aux interfaces avec le transfert thermique.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini (voir Figure 3.1). En calculant chaque dérivée partielle à l'aide de séries de Taylor tronquées, on obtient des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins [2].

## 4.3 Discrétisations du domaine et des fonctions dérivées

### 4.3.1 Maillage du domaine

Le domaine continu est approché par un nuage de points qui forme un domaine discret constitué par un réseau des volumes élémentaires  $\Delta V$  de dimensions  $\Delta X$ ,  $\Delta \eta$  et  $\Delta Z$ . A chaque point  $\mathbf{M}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta})$  du domaine physique on fait correspondre un nœud du domaine numérique identifié par le couple d'indices  $(i, j)$  repérant les lignes d'intersection du maillage. Si le maillage du domaine est considéré uniforme dans les directions transversale et longitudinale, nous posons:

$$X_i = (i - 1)\Delta X \quad (3.1)$$

$$\eta_j = (j - 1)\Delta \eta \quad (3.2)$$

En repérant les interfaces milieu poreux/phase liquide et phase liquide/phase vapeur respectivement par les indices  $j_{int}$  et  $j_m$ , l'uniformité du maillage exige alors:

$$1 + j_m = 2j_{int} \quad (3.3)$$

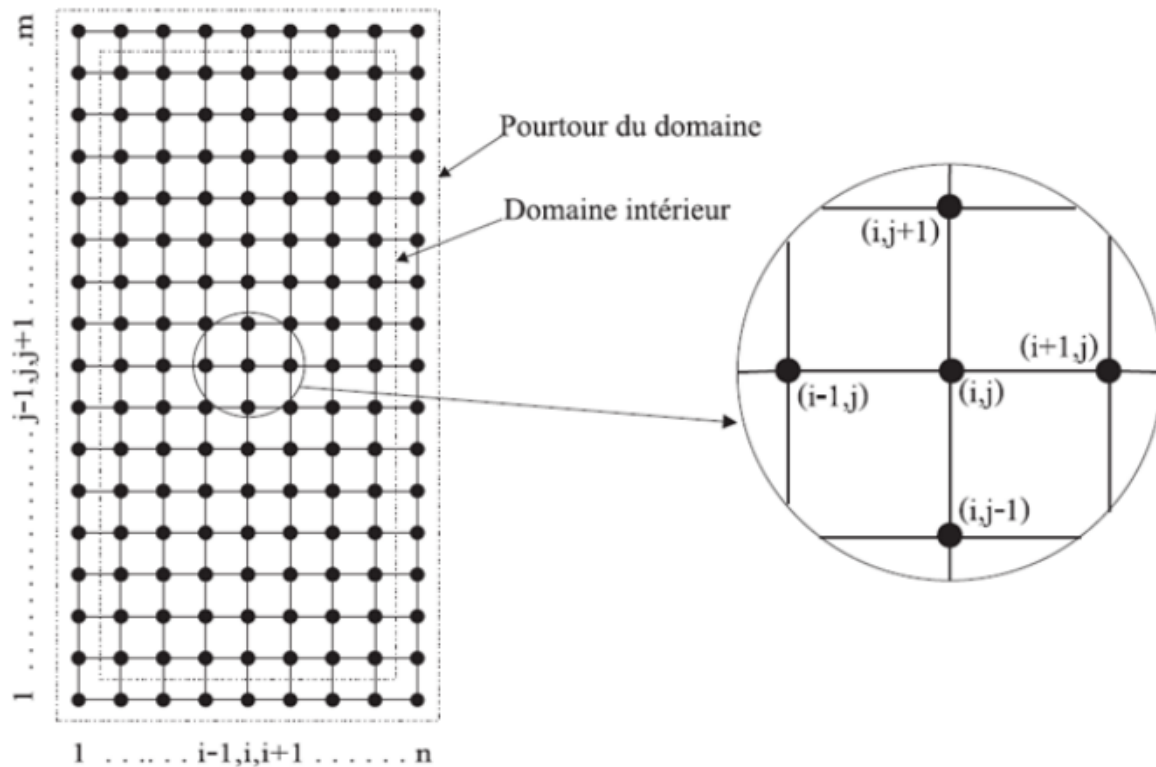


Figure 3.1 : Maillage du domaine  $(i, j)$  [1].

Approximations des dérivées partielles :

A l'intérieur du domaine discrétisé, les dérivées partielles de premier et de second ordre sont respectivement approchées par un schéma aux différences finies. Soient  $f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta})$  une fonction au moins de classe  $C^4$  du domaine continu et  $f(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\eta}_j)$  sa correspondante dans le domaine numérique que nous notons  $f_{i,j}$  pour des raisons de commodités. En utilisant un développement en série de Taylor, nous approchons les dérivées partielles de premier ordre par les différences finies décentrées rétrogrades ou régressives (ou amont). L'écoulement ayant lieu dans le sens descendant, les champs de vitesse et de température à chaque section ou nœuds  $\mathbf{X}_i$  dépendent des solutions en amont (derrière). Cette propriété impose une discrétisation amont des dérivées partielles [1].

- ✓ Approximations des dérivées partielles de premier ordre par les différences finies décentrées rétrogrades (régressive) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial X} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta X} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\nabla \eta} \end{cases} \quad (3.4)$$

- ✓ Pour les approximations des dérivées partielles de second ordre nous utilisons des différences finies centrées. Il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\nabla X)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\nabla \eta)^2} \end{cases} \quad (3.5)$$

## 4.4 Les équations aux mailles

Les équations différentielles gouvernantes du problème vont être approchées par un système d'équations algébriques dans lesquelles les valeurs des variables aux nœuds sont les inconnues du problème. Ainsi en approximant les dérivées premières et secondes par les différences finies données par les relations (3-4) et (3-5), les équations gouvernantes se ramènent aux systèmes linéaires ou algébriques suivants.

### 4.4.1 Equation de continuité discrétisée

$$v_{i,j} = v_{i,j-1} + C_{0_1} - C_{0_2} \quad (3.6)$$

Dans le milieu poreux:

$$C_{0_1} = 0 \quad (3.6.a)$$

$$C_{0_2} = \frac{A H \Delta \eta}{L \Delta X} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \quad (3.6.b)$$

Dans la phase liquide

$$C_{0_1} = \frac{A (\eta_j - 1) (\delta_i - \delta_{i-1})}{L \Delta X} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \quad (3.6.c)$$

$$C_{0_2} = \frac{A (\delta_i - H) \Delta \eta}{L \Delta X} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \quad (3.6.d)$$



#### 4.4.2 Equation de la chaleur discrétisée

$$\mathbf{b}_T \cdot \boldsymbol{\theta}_{i,j} = \mathbf{ami}_T \cdot \boldsymbol{\theta}_{i-1,j} + \mathbf{amj}_T \cdot \boldsymbol{\theta}_{i,j-1} + \mathbf{apj}_T \cdot \boldsymbol{\theta}_{i,j+1} + \mathbf{C}_T \quad (3.7)$$

Dans le milieu poreux :

$$\mathbf{b}_T = \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{\Delta X} + \frac{L}{A} \frac{1}{H} \frac{v_{i,j}}{\Delta \eta} + \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re(P_r)_{eff}} \frac{1}{H^2 (\Delta \eta)^2} \quad (3.7.a)$$

$$\mathbf{ami}_T = \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{\Delta X} \quad (3.7.b)$$

$$\mathbf{amj}_T = \frac{L}{A} \frac{v_{i,j}}{H} \frac{1}{\Delta \eta} + \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re(P_r)_{eff}} \frac{1}{H^2 (\Delta \eta)^2} \quad (3.7.c)$$

$$\mathbf{apj}_T = \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re(P_r)_{eff}} \frac{1}{H^2 (\Delta \eta)^2} \quad (3.7.d)$$

$$\mathbf{C}_T = \mathbf{0} \quad (3.7.e)$$

Dans la phase liquide :

$$\mathbf{b}_T = \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{\Delta X} - \frac{(\eta_j - 1)}{\delta_i - H} \frac{(\delta_i - \delta_{i-1})}{\Delta X} \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{\Delta \eta} + \frac{L}{A} \frac{v_{i,j}}{(\delta_i - H)} \frac{1}{\Delta \eta} + \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re P_r} \frac{1}{(\delta_i - H)^2} \frac{1}{(\Delta \eta)^2} \quad (3.7.f)$$

$$\mathbf{ami}_T = \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{\Delta X} \quad (3.7.g)$$

$$\mathbf{amj}_T = -\mathbf{u}_{i,j} \frac{(\eta_j - 1)}{\delta_i - H} \frac{(\delta_i - \delta_{i-1})}{\Delta X \Delta \eta} + \frac{L}{A} \frac{v_{i,j}}{(\delta_i - H)} \frac{1}{\Delta \eta} + \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re P_r} \frac{1}{(\delta_i - H)^2} \frac{1}{(\Delta \eta)^2} \quad (3.7.h)$$

$$apj_T = \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{RePr} \frac{1}{(\delta_i - H)^2} \frac{1}{(\Delta\eta)^2} \quad (3.7.i)$$

$$C_T = 0 \quad (3.7.j)$$

4.4.3 Equation du mouvement suivant X discrétisée :

$$b_u u_{i,j} = amiu \cdot u_{i-1,j} + amju \cdot u_{i,j-1} + apju \cdot u_{i,j+1} + C_u \quad (3.8)$$

Dans le milieu poreux :

$$b_u = \frac{u_{i,j}}{\Delta X} + \frac{L}{A} \frac{v_{i,j}}{H^* \Delta\eta} + \varepsilon^2 \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{D_a}{Re} + \varepsilon^2 \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{2v^*}{ReH^2(\Delta\eta)^2} - \varepsilon^2 F \sqrt{D_a} \frac{L}{A} u_{i,j} \quad (3.8.a)$$

$$amiu = \frac{u_{i,j}}{\Delta X} \quad (3.8.b)$$

$$amju = \frac{L}{A} \frac{v_{i,j}}{H^* \Delta\eta} + \varepsilon^2 \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{v^*}{ReH^2(\Delta\eta)^2} \quad (3.8.c)$$

$$apju = \varepsilon^2 \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{v^*}{ReH^2(\Delta\eta)^2} \quad (3.8.d)$$

$$C_u = \frac{\varepsilon^2}{Fr} \quad (3.8.e)$$

Dans la phase liquide :

$$b_u = \frac{u_{i,j}}{\Delta X} - \frac{(\eta_j - 1)(\delta_i - \delta_{i-1})}{\delta_i - H} \frac{u_{i,j}}{\Delta X} + \frac{L}{A} \frac{v_{i,j}}{(\delta_i - H) \Delta\eta} + \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{2}{Re(\delta_i - H)^2(\Delta\eta)^2} \quad (3.8.f)$$

$$amiu = \frac{u_{i,j}}{\Delta X} \quad (3.8.g)$$

$$amj_u = \frac{L}{A} \frac{v_{ij}}{(\delta_i - H) \Delta \eta} \frac{1}{\Delta \eta} - u_{i,j} \frac{(\eta_j - 1) (\delta_i - \delta_{i-1})}{\delta_i - H} \frac{1}{\Delta X \Delta \eta} + \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re (\delta_i - H)^2 (\Delta \eta)^2} \quad (3.8.h)$$

$$apj_u = \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{1}{Re (\delta_i - H)^2 (\Delta \eta)^2} \quad (3.8.i)$$

$$C_u = \frac{1}{Fr} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) \quad (3.8.j)$$

## 4.5 Discrétisation des conditions aux limites

Conditions aux limites à la paroi  $j = 1$

$$\theta_{i,1} = 0 \quad (3.9.a)$$

$$u_{i,1} = 0 \quad (3.9.b)$$

$$v_{i,1} = 0 \quad (3.9.c)$$

Conditions aux limites à l'interface liquide/vapeur  $j = j_m$

$$\theta_{i,j_m} = 1 \quad (3.10.a)$$

$$u_{i,j_m} = 1 \quad (3.10.b)$$

$$v_{i,j_m} = 1 \quad (3.10.c)$$

Conditions aux limites à l'entrée  $i = 1$

$$\theta_{1,j} = 1 \quad (3.11.a)$$

$$\mathbf{u}_{1,j} = \mathbf{1} \quad (3.11.b)$$

$$\mathbf{v}_{1,j} = \mathbf{0} \quad (3.11.c)$$

$$\delta_1 = H \quad (3.11.d)$$

## 4.6 Discrétisation des conditions à l'interface $j = j_{int}$

En approchant  $\frac{\partial f_p}{\partial \eta}$  et  $\frac{\partial f_l}{\partial \eta}$  respectivement par des schémas de différences finies amont et aval, nous obtenons :

Continuité des contraintes adimensionnelles

$$\mathbf{u}_{i,j_{int}} = \frac{H\mathbf{u}_{i,j_{int}+1} + (\delta_i - H)\mu^*(\mathbf{u}_{i,j_{int}-1})}{(\delta_i - H)\mu^* + H} \quad (3.12)$$

Continuité des flux thermiques adimensionnels

$$\theta_{i,j_{int}} = \frac{H\lambda^*\theta_{i,j_{int}+1} + (\delta_i - H)\theta_{i,j_{int}-1}}{(\delta_i - H) + H\lambda^*} \quad (3.13)$$

## 4.7 Discrétisation des bilans thermique et massique

Pour simplifier les écritures, mettons l'équation des bilans thermique et massique (2.66) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{Ja}{Re(Pe)_{eff}} \left( \frac{L}{A} \right)^2 \frac{1}{H} \frac{\partial \theta_p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= \frac{d}{dX} \left\{ (\mathbf{1} + Ja)\mathbf{u}_0 \delta \frac{\rho_v}{\rho_l} \right\} \\ &- Ja \frac{d}{dX} \{ H F_1 + (\delta - H) F_2 \} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Avec :

$$\begin{cases} F_1 = \int_0^1 \theta_p u_p d\eta \\ F_2 = \int_0^2 \theta_l u_l d\eta \end{cases} \quad (3.15)$$

Après calcul, nous obtenons

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \frac{1}{(1+Ja)u_0} \frac{\rho_l}{\rho_v} \left\{ \frac{Ja}{(Pe)_{eff}} \left(\frac{L}{A}\right)^2 \frac{\Delta X}{H\Delta\eta} (\theta_{i,1} - \theta_{i,2}) + Ja \{ H(F_{1i} - F_{1i-1}) + (\delta_i - H)F_{2i} + (\delta_{i-1} - H)F_{2i-1} \} \right\} \quad (3.16)$$

Les  $F_{1i}$  et  $F_{2i}$  sont donnés par les expressions suivantes obtenues en utilisant une quadrature de Newton :

$$F_{1i} = \Delta\eta \left\{ \frac{u_{i,1} \cdot \theta_{i,1} + u_{i,j_{int}} \cdot \theta_{i,j_{int}}}{2} + \sum_{j=2}^{j=j_{int}-1} u_{i,j} \cdot \theta_{i,j} \right\} \quad (3.17)$$

$$F_{2i} = \Delta\eta \left\{ \frac{u_{i,j_{int}} \cdot \theta_{i,j_{int}} + u_{i,j_m} \cdot \theta_{i,j_m}}{2} + \sum_{j=j_{int}-1}^{j=j_m-1} u_{i,j} \cdot \theta_{i,j} \right\}$$

## 4.8 Méthodes de résolution des systèmes algébriques ou des systèmes matriciels du modèle

Les systèmes matriciels ou systèmes algébriques linéaires (3.6), (3.7) et (3.8), approchant les équations de la continuité, de la chaleur et du mouvement dans le milieu poreux et dans la phase liquide, peuvent être mises sous la forme suivante :

$$A_{i,j} \cdot f_{i,j-1} + B_{i,j} \cdot f_{i,j} + C_{i,j} \cdot f_{i,j+1} = D_{i,j} \quad (3.19)$$

Avec

$$f_{i,j} = u_{i,j}; v_{i,j}; \theta_{i,j}$$

En développant, on a :

Pour  $i$  fixé et  $1 < i < i_m$

$$\begin{pmatrix} B_{i,1} & C_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{i,2} & B_{i,2} & C_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{i,j} & B_{i,j} & C_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i,j_{m-1}} & B_{i,j_{m-1}} & C_{i,j_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i,j_m} & B_{i,j_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ \vdots \\ f_{i,j} \\ \vdots \\ f_{i,j_{m-1}} \\ f_{i,j_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{i,1} \\ D_{i,2} \\ \vdots \\ D_{i,j} \\ \vdots \\ D_{i,j_{m-1}} \\ D_{i,j_m} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

On pose :

$$\sum_j a_{i,j} f_{i,j} = D_{i,j} \quad (3.21)$$

Ou

$$af = D \quad (3.22)$$

Avec

$$a = \begin{pmatrix} B_{i,1} & C_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{i,2} & B_{i,2} & C_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{i,j} & B_{i,j} & C_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i,j_{m-1}} & B_{i,j_{m-1}} & C_{i,j_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i,j_m} & B_{i,j_m} \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ \vdots \\ f_{i,j} \\ \vdots \\ f_{i,j_{m-1}} \\ f_{i,j_m} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{i,1} \\ D_{i,2} \\ \vdots \\ D_{i,j} \\ \vdots \\ D_{i,j_{m-1}} \\ D_{i,j_m} \end{pmatrix}$$

Il existe deux méthodes de résolutions des systèmes linéaires : les méthodes dites directes et les méthodes dites itératives. Les méthodes directes sont très efficaces : elles donnent la solution exacte (aux erreurs d'arrondi près) du système linéaire considéré mais leur inconvénient est la nécessité d'une assez grande place mémoire pour le stockage. Lorsqu'on a affaire à de très gros systèmes issus par exemple de l'ingénierie (calcul des structures, mécanique des fluides, . . .), où  $n$  peut être de l'ordre de plusieurs milliers, on cherche à utiliser des méthodes nécessitant le moins de mémoire possible [20]. Il y a aussi le fait que le système n'est pas réellement linéaire car les coefficients  $A_{i,j}$ ,  $B_{i,j}$ ,  $C_{i,j}$  et  $D_{i,j}$  sont fonction de  $f_{i,j}$  ( $f_{i,j} = u_{i,j}; v_{i,j}; \theta_{i,j}$ ) et l'épaisseur de la couche limite. On a intérêt dans ce cas à utiliser des méthodes itératives ligne par ligne. Ces méthodes ne font appel qu'à des produits matrice vecteur, et ne nécessitent donc pas le stockage du profil de la matrice mais uniquement des termes non nuls [2]. La méthode itérative de résolution du système algébrique (3-21), est une méthode qui construit une suite  $f_{i,j}^{(k)}$   $k \in \mathbb{N}$  (où l'itéré  $f_{i,j}^{(k)}$  est calculé à partir des itéré  $f_{i,j}^{(0)}$  .....  $f_{i,j}^{(k-1)}$  Censée converger vers  $f_{i,j}$ , solution de (3-21)). Il existe plusieurs méthodes itératives parmi lesquelles nous choisissons celle de Gauss-Seidel. Elle présente l'avantage d'occuper une place mémoire plus réduite. L'algorithme de Gauss- 44 Seidel ne nécessite qu'un vecteur de stockage, étant  $f_{i,j}^{(k)}$  remplacé par  $f_{i,j}^{(k+1)}$  au cours de l'itération. Il est en général plus rapide que plusieurs autres algorithmes (comme l'algorithme de Jacobi), donc préférable [20].

## 4.9 Méthode itérative de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel consiste à décomposer la matrice  $a$  en une somme de matrice inversible diagonale ( $I$ ), une matrice triangulaire inférieure ( $L$ ) et une matrice triangulaire supérieure ( $U$ ) et en remplaçant les composantes  $f_{i,j}^{(k)}$  dans la matrice inversible diagonale ( $I$ ) et la matrice triangulaire inférieure ( $L$ ) par  $f_{i,j}^{(k+1)}$  puisque les composantes  $f_{*,j}^{(k)}$  sont déjà calculées au moment où l'on calcule  $f_{i,*}^{(k+1)}$ . C'est l'idée de la méthode de Gauss-Seidel qui consiste à utiliser le calcul des composantes de l'itéré ( $k + 1$ ) dès qu'il est effectué.

On a : pour  $i$  toujours fixé,

$$\begin{cases} f_{i,j}^0 & \text{donnée} \\ a_{i,j} f_{i,j}^{(k+1)} = - \sum_{j < i} a_{i,j} f_{i,j}^{(k+1)} - \sum_{i < j} a_{i,j} f_{i,j}^{(k)} + D_{i,j} \end{cases} \quad (3.23)$$

Ou

$$\begin{cases} f_{i,j}^0 \text{ donnée} \\ If_{i,j}^{(k+1)} = -Lf_{i,j}^{(k+1)} - Uf_{i,j}^{(k)} + D \end{cases} \quad (3.24)$$

La racine entre deux itérations consécutives est donc :

$$f_{i,j}^{(k+1)} = Gf_{i,j}^{(k)} + H \quad (G \text{ est la matrice de Gauss - Seidel}) \quad (3.25)$$

Et nous avons:

$$\begin{cases} G = \frac{-U}{I+L} \\ H = \frac{D}{I+L} \end{cases} \quad (3.26)$$

Avec la matrice inversible diagonale  $I$  :

$$I = a_{i,j} = \begin{pmatrix} B_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{i,j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{i,j_{m-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{i,j_m} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

La matrice triangulaire inférieure  $L$ :

$$L = a_{i,j/j < i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{i,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i,j_{m-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i,j_m} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

La matrice triangulaire supérieure  $U$ :

$$U = a_{i,j/i < j} = \begin{pmatrix} 0 & C_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{i,j_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$



Afin de mieux contrôler la convergence du processus itératif, une méthode de relaxation a été prise en considération dans les équations algébriques [2].

#### 4.10 Méthode itérative de relaxation de Gauss-Seidel

L'idée de la méthode de relaxation est d'utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour calculer un itéré intermédiaire  $f_{i,j}^{(k+1)}$  qu'on "relaxe" ensuite pour améliorer la vitesse de convergence de la méthode.  $w$  est appelé coefficient de relaxation, on se donne  $0 < w < 2$ . Si  $0 < w < 1$ , on parle de sous-relaxation et si  $1 < w < 2$ , on a la sur-relaxation (SOR = Successive Over Relaxation).

On modifie l'algorithme de Gauss-Seidel de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i,j}^{(0)} \text{ donnée} \\ \tilde{f}_{i,j}^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j<i} a_{i,j} f_{i,j}^{(k+1)} - \sum_{i<j} a_{i,j} f_{i,j}^{(k)} + D_{i,j}}{a_{i,j}} \\ f_{i,j}^{(k+1)} = w \tilde{f}_{i,j}^{(k+1)} + (1-w) f_{i,j}^{(k)} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Ou

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i,j}^{(0)} \text{ donnée} \\ \tilde{f}^{(k+1)} = \frac{-L\tilde{f}^{(k+1)} - U\tilde{f}^{(k)} + D}{I} \\ \tilde{f}^{(k+1)} = w \tilde{f}^{(k+1)} + (1-w) \tilde{f}^{(k)} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

En remplaçant, on a l'algorithme de la méthode itérative de relaxation de Gauss-Seidel :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i,j}^{(0)} \text{ donnée} \\ f_{i,j}^{(k+1)} = w \left[ \frac{-\sum_{j<i} a_{i,j} f_{i,j}^{(k+1)} - \sum_{i<j} a_{i,j} f_{i,j}^{(k)} + D_{i,j}}{a_{i,j}} \right] + (1-w) f_{i,j}^{(k)} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Ou

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i,j}^{(0)} \text{ donnée} \\ f^{(k+1)} = w \left[ \frac{-L\tilde{f}^{(k+1)} - U\tilde{f}^{(k)} + D}{I} \right] + (1-w) f^{(k)} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Nous pouvons écrire alors :

$$f^{(k+1)} = G_r f^{(k)} + H_r \quad (G_r \text{ est la matrice de Gauss-Seidel relaxée}). \quad (3.34)$$

$$\text{Et nous obtenons : } \begin{cases} G_r = \frac{-wU+I-wI}{I+wL} \\ H_r = \frac{wD}{I+wL} \end{cases} \quad (3.35)$$

Lorsque  $w < 1$ , on retrouve la méthode de Gauss–Seidel. Plus la valeur de  $w$  est faible, plus le nombre d’itération est élevé tout en évitant la divergence du processus itératif, d’où nous choisissons la sous relaxation ( $0 < w < 1$ ) [2].

## 4.11 Convergence et sous-relaxation

La convergence du processus itératif est assurée lorsque les valeurs de chaque variable entre 2 itérations successives sont sensiblement identiques, selon la condition suivante [15].

$$\varepsilon = \frac{\sum_{j=1}^{j=m} |f_{ij}^{(k+1)} - f_{ij}^{(k)}|}{\sum_{j=1}^{j=m} |f_{ij}^{(k+1)}|} < \varepsilon_{\text{arrêt}} \quad \forall i \text{ fixé} \quad (3.36)$$

$k$  : indice de l’itération sur une ligne  $j$ .

Le critère d’arrêt des itérations a été fixé à  $\varepsilon_{\text{arrêt}} = 10^{-6}$ . Cette valeur est choisie pour répondre à la fois à la rapidité, à la précision et à la convergence des calculs. Des valeurs plus faibles de  $\varepsilon_{\text{arrêt}}$  auront pour effet d’augmenter inutilement le volume des calculs sans amélioration notable de la précision.

On utilise une méthode de sous-relaxation qui permet d’atténuer les variations des variables entre 2 itérations successives  $k + 1$  et  $k$ . Plus la valeur de  $w$ , coefficient de sous-relaxation est faible, plus le nombre d’itérations est élevé tout en évitant la divergence du processus itératif et en accélérant la convergence du processus itératif. Ce qui va garantir à nos schémas une forte convergence et une forte stabilité (Réciproque du Théorème de Lax-Richtmeyer).

Les valeurs optimales des coefficients de sous-relaxation, peuvent être différentes pour chaque équation algébrique. A chaque grandeur  $f_{i,j}(u_{i,j}; v_{i,j}; \theta_{i,j})$ , correspond une valeur de  $\omega$  déterminée au cours des calculs de façon empirique pour assurer la convergence de la méthode [2].

## 4.12 Algorithme général de résolution

Le code de calcul que nous allons mettre au point repose sur l'algorithme suivant :

1<sup>ère</sup> étape: on rentre les constantes numériques, les paramètres géométriques et physiques et on donne les conditions d'entrée  $i = 1$ , les conditions aux limites à la paroi  $j = 1$ , les conditions à l'interface  $j = j_{int}$  et à l'interface liquide/vapeur  $j = j_m$ .

2<sup>ème</sup> étape : Etape d'initialisation

On débute les calculs en prenant  $i = 2$ . On se donne une valeur de  $(\delta_i)^a$  et des profils «arbitraires» de  $(u_{i,j})^a$  ;  $(v_{i,j})^a$  et  $(\theta_{i,j})^a$ , Ce qui correspond à l'itération  $k = 0$ .

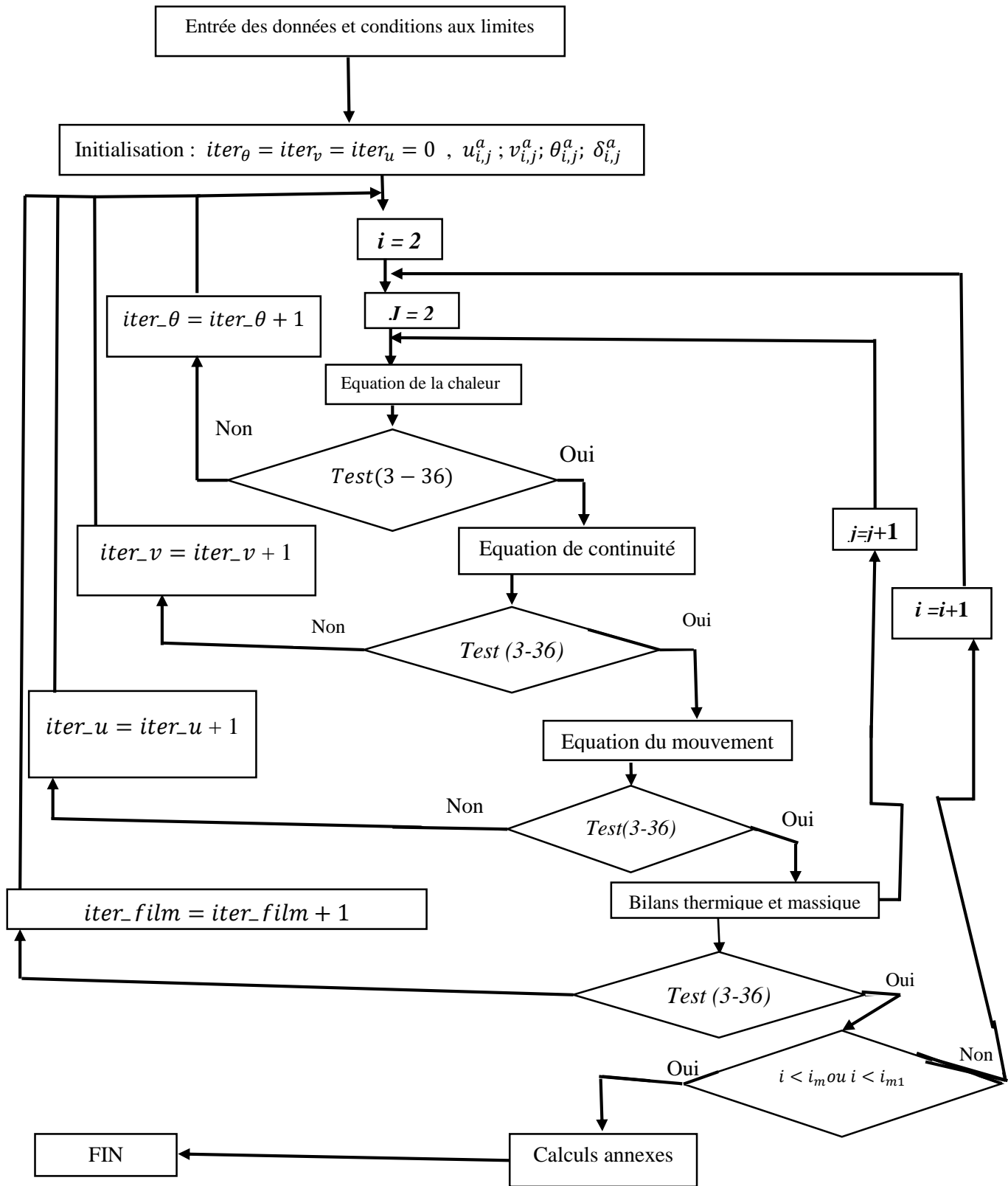
3<sup>ème</sup> étape : Etape de résolutions

Pour  $j$  allant de 2 à  $j_m - 1$  et à l'itération  $k = 1$ , on résout successivement les systèmes (3-7), (3-6) et (3-8) en utilisant l'algorithme de double balayage et le schéma itératif (3-31) ou (3-32). On obtient de nouveaux profils relaxés de température  $\theta_{i,j}$  et des vitesses  $v_{i,j}$ ,  $u_{i,j}$  que l'on compare avec les valeurs données  $(\theta_{i,j})^a$ ,  $(v_{i,j})^a$  et  $(u_{i,j})^a$  via l'équation (3-35). Si la comparaison n'est pas satisfaisante, on retourne à l'étape 3 en passant à l'itération suivante et en remplaçant les  $(\theta_{i,j})^a$ ,  $(v_{i,j})^a$ ,  $(u_{i,j})^a$  données respectivement par les  $\theta_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$ ,  $u_{i,j}$  calculées. On compare encore via l'équation (3-35), si elle est satisfaite, on détermine ensuite une nouvelle valeur de  $\delta_i$  grâce à la relation (3-16) que l'on compare avec la valeur donnée  $(\delta_i)^a$  via l'équation (3-35). Si la comparaison n'est pas satisfaisante, on reprend à l'étape 3 en passant à l'itération suivante et en remplaçant les  $(\delta_i)^a$  par les  $\delta_i$  calculées. Si elle est satisfaite, on passe à l'étape 4 suivante.

4<sup>ème</sup> étape : On compare  $i$  à  $i_m$  et à  $i_{m1}$ .

Si l'une d'elle n'est pas atteinte, on incrémente la valeur de  $i$  d'une unité ( $i = i + 1$ ) et on reprend l'étape 3, en prenant comme nouvelles valeurs arbitraires les dernières valeurs des profils calculés (principe de Gauss-Seidel). Dans le cas contraire ( $i \geq i_m$  ou  $i \geq i_{m1}$ ), on arrête les calculs des profils  $\theta_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$ ,  $u_{i,j}$  et  $\delta_i$  et on calcule les grandeurs pariétales [2].

### 4.13 Organigramme de l'algorithme général de résolution



**Figure 3.2 : Organigramme de l'algorithme [2].**

## 4.14 Conclusion

La méthode aux différences finies nous a permis de discrétiser les équations de transfert. Les termes d'advection et de diffusion sont discrétisés respectivement avec un schéma décentré arrière et centré afin de rendre les diagonales principales des matrices les plus dominantes possibles. Une résolution numérique des systèmes d'équations algébriques couplés ainsi obtenus, grâce à une méthode de double balayage combinée à un schéma itératif de type relaxation ligne par ligne de type Gauss-Seidel. Pour garantir la non croissance des erreurs lors du processus itératif, nous avons pris des coefficients de relaxation, définis de façons empiriques, ce qui va garantir à nos schémas une forte stabilité et une convergence. Nous procédons par la suite à nos simulations numériques pour dégager l'influence des paramètres physiques et géométriques et les nombres adimensionnels caractérisant le problème. La présentation ainsi que l'analyse des résultats issus de nos simulations sera l'objectif du chapitre suivant.

---

5 CHAPITRE 4 :

RÉSULTATS ET

DISCUSSIONS

---

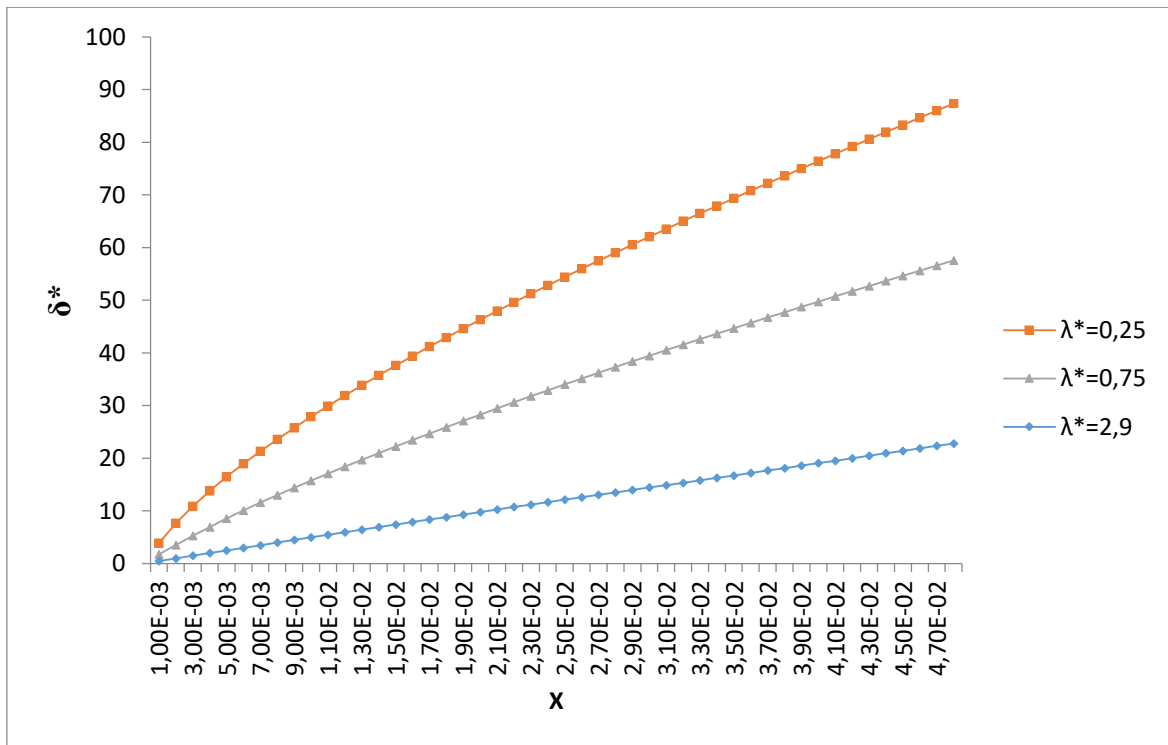
## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats obtenus au cours de notre travail. Le principal objectif consiste à analyser l'influence des paramètres de contrôle sur la variation de l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique, les mécanismes de transfert des champs thermique. Les résultats issus des simulations numériques sont relatifs à des pas d'espace  $\Delta X = 0,001$  et  $\Delta \eta = 0,02$  suivant les directions  $X$  et  $\eta$ , après une étude de sensibilité au maillage constituent un bon compromis entre une bonne précision et un temps de calcul acceptable. Le critère d'arrêt (de convergence) dans le processus itératif est fixé à  $\epsilon_{\text{arrêt}} = 10^{-6}$ . Cette valeur est choisie pour répondre à la fois à la rapidité, à la précision et à la convergence des calculs. Des valeurs plus faibles de  $\epsilon_{\text{arrêt}}$  auront pour effet d'augmenter inutilement le volume des calculs sans amélioration notable et significative de la précision [2].



### 5.1.1 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $\lambda^*$ :

Ce résultat issu de l'étude de l'effet du rapport de conductivité thermique sur la variation de l'épaisseur du film liquide. Cela consiste à fixer les autres paramètres et faire varier  $\lambda^*$ . La figure 1, nous montre la variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs du rapport de conductivité thermique. Nous avons remarqué que l'épaisseur du film liquide augmente en sens inverse du rapport de conductivité thermique. Cela peut être expliqué par le fait qu'une diminution de ce rapport est le résultat d'une baisse de l'échange thermique ou de transfert par conduction (l'épaisseur du film liquide supérieure à celle du matériau poreux) favorisant ainsi la convection et l'augmentation de la convection entraîne l'augmentation de l'épaisseur du film liquide. Car le transfert d'énergie par rayonnement est négligé.



**Figure 1.4:** Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs  $\lambda^*$ :

$Re = 1000$ ;  $Fr = 10^{-3}$ ;  $H^* = 2.10^{-3}$ ;  $Ja = 10^{-4}$ ;  $Pr = 2$ ;  $L/A = 125$ ;  $\nu^* = 10^{-7}$ ;  $\varepsilon = 0,4$

### 5.1.2 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs L/A

L'étude de l'influence du rapport de forme sur la variation de l'épaisseur du film liquide nous a permis d'obtenir le résultat consigné sur la figure 2.4. Cette étude consiste à fixer les paramètres adimensionnels et à varier  $L/A$ . Cette figure nous montre la variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs du rapport de forme. Nous avons constaté que l'épaisseur du film liquide augmente avec le rapport de forme. Cela peut être expliqué par le fait que lorsque la surface de la plaque (froide) augmente, la condensation augmente et cette dernière favorise l'augmentation de l'épaisseur du film liquide.

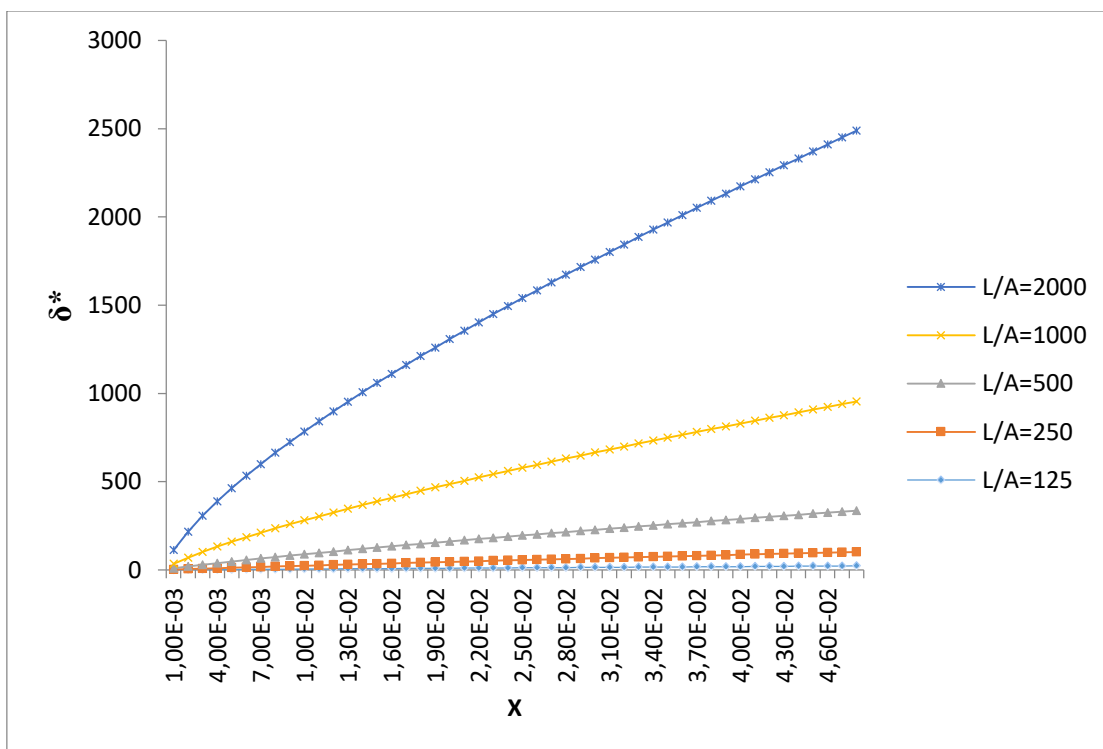


Figure 2.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs L/A

$Re = 1000$ ;  $Fr = 10^{-3}$ ;  $H^* = 2.10^{-3}$ ;  $Ja = 10^{-4}$ ;  $Pr = 2$ ;  $\lambda^* = 2,9$ ;  $\nu^* = 10^{-7}$ ;  $\varepsilon = 0,4 S$

### 5.1.3 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Ja

L'étude de l'influence du nombre de Jacob sur la variation de l'épaisseur du film liquide nous a permis d'obtenir le résultat consigné sur la figure 3.4. Cette étude consiste à fixer les paramètres adimensionnels et à varier **Ja**. Cette figure nous présente l'influence du nombre de Jacob sur l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x. Nous avons remarqué que l'épaisseur du film liquide augmente avec le nombre de Jacob. Cela peut avoir comme explication, le fait que l'augmentation de la chaleur sensible par rapport à la chaleur latente ou l'inverse, est le résultat de l'augmentation du nombre de Jacob et engendre une augmentation de l'écart entre la température de saturation et celle de la paroi; qui favorise la condensation.

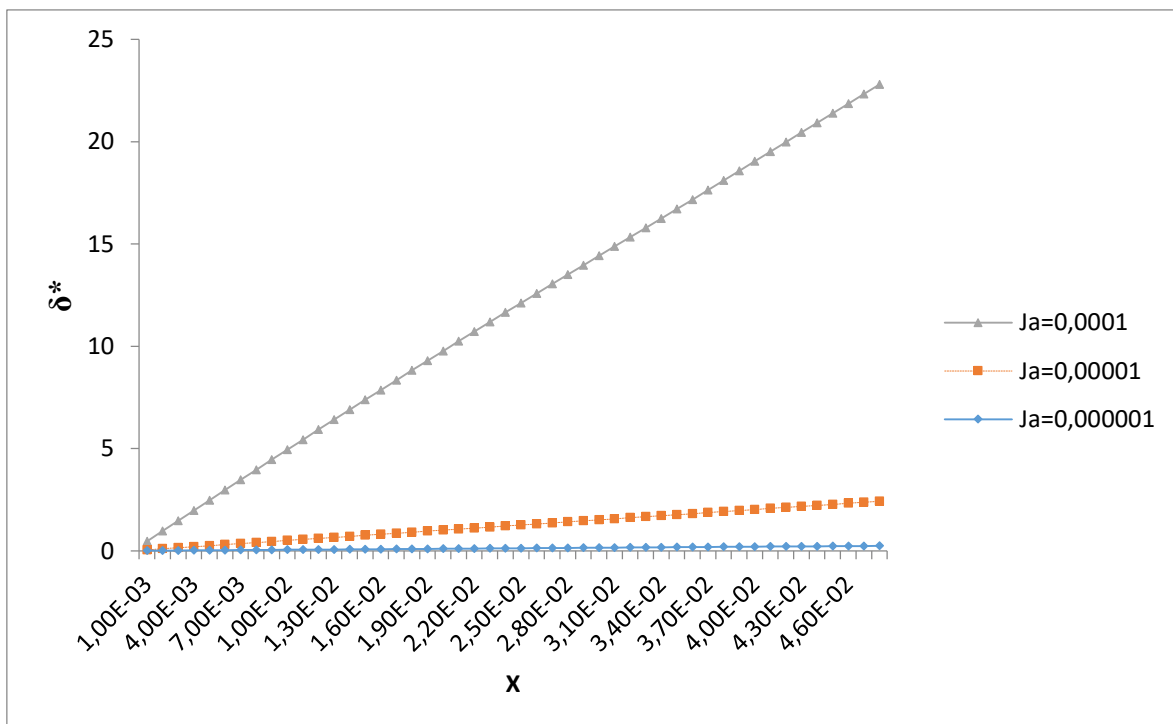


Figure 3.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Ja

$Re = 1000$ ;  $Fr = 10^{-3}$ ;  $H^* = 2.10^{-3}$ ;  $L/A=125$ ;  $Pr=2$ ;  $\lambda^*=2,9$ ;  $\nu^* = 10^{-7}$ ;  $\varepsilon = 0,4$

### 5.1.4 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Fr

Ce résultat est issu de l'étude de l'influence du nombre de Froude sur la variation de l'épaisseur du film liquide. Pour cela, nous avons fixé les autres paramètres en faisant varier **Fr** et le résultat est consigné sur la figure 4. La figure 4.4 nous montre l'influence du nombre de Froude sur l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x. Nous avons constaté que le nombre de Froude n'a pas une influence sur l'épaisseur du film liquide. D'après [47], cela peut être expliqué par le fait que les paramètres dynamiques (nombre de Froude et autres) n'ont aucune influence sur l'épaisseur du film liquide.

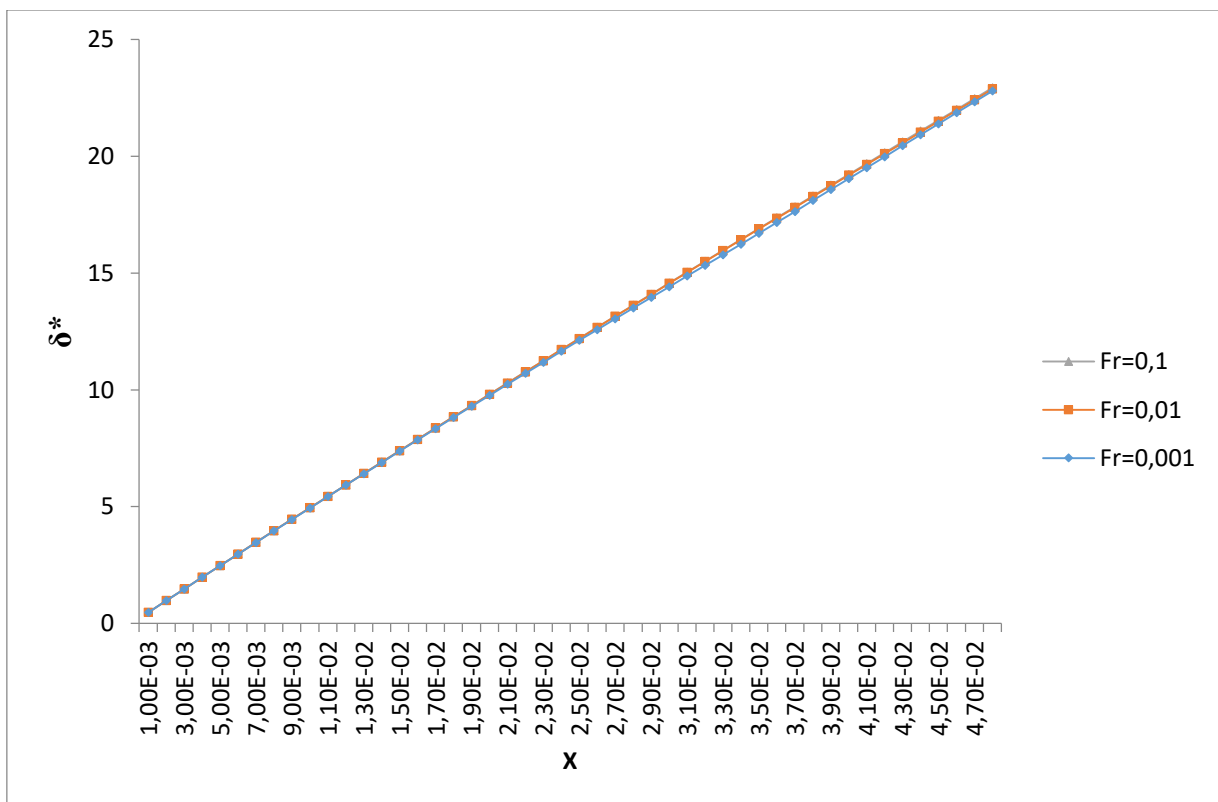


Figure 4.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Fr

Re = 1000; L/A=125;  $H^* = 2 \cdot 10^{-3}$ ; Ja=10<sup>-4</sup>; Pr=2;  $\lambda^* = 2,9$ ;  $\nu^* = 10^{-7}$ ;  $\epsilon = 0,4$

### 5.1.5 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $H^*$

Ce résultat est issu de l'étude de l'influence de l'épaisseur de la couche poreuse sur la variation de l'épaisseur du film liquide. Pour cela, nous avons fixé les autres paramètres en faisant varier  $H^*$  et le résultat est consigné sur la figure 5.4. Elle (figure 5.4) présente l'influence de l'épaisseur de la couche poreuse sur l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x. Nous avons constaté que lorsque l'épaisseur de la couche poreuse diminue, l'épaisseur du film liquide augmente. Cela peut être expliqué par le fait qu'une faible épaisseur de la couche poreuse engendre un meilleur échange thermique entre la paroi et la phase vapeur qui favorise la condensation.

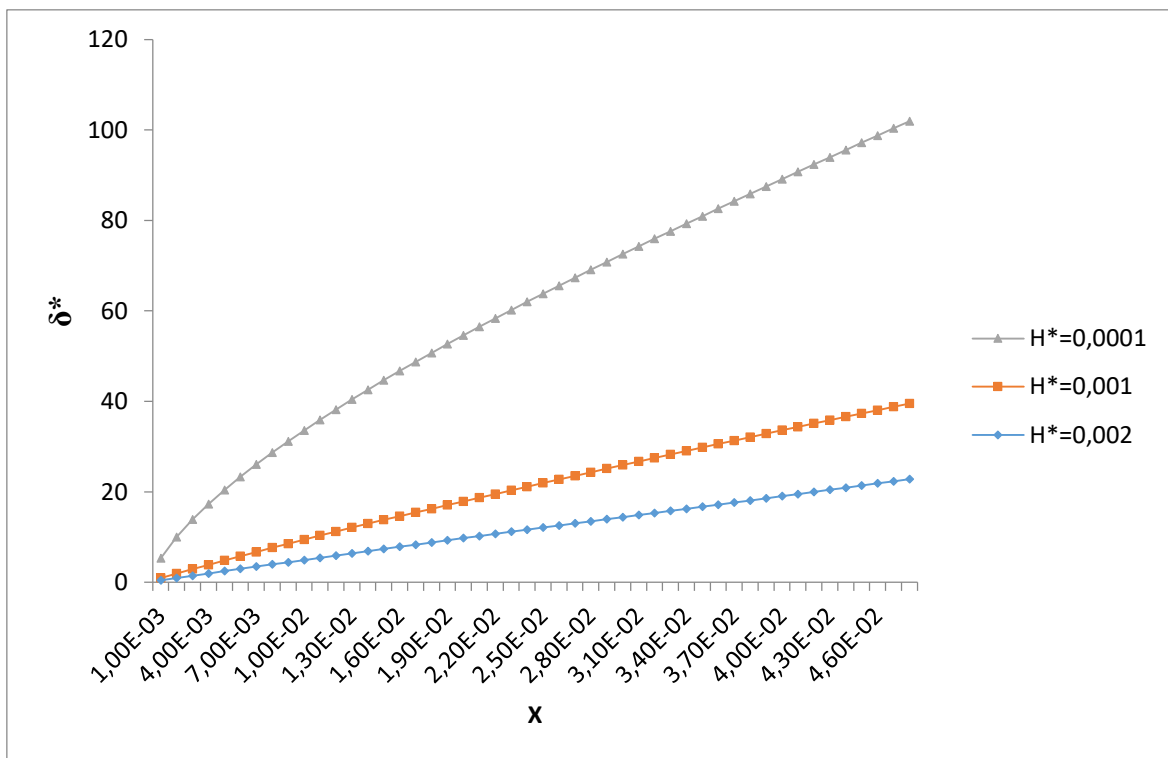


Figure 5.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs  $H^*$ :

$$Re = 1000; Fr = 10^{-3}; L/A = 125; Ja = 10^{-4}; Pr = 2; \lambda^* = 2,9; \nu^* = 10^{-7}; \varepsilon = 0,4$$

### 5.1.6 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Pr

Ce résultat est issu de l'étude de l'influence du nombre de Prandtl sur la variation de l'épaisseur du film liquide Elle (figure 6.4) présente la variation du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs du nombre de Prandtl. Nous avons remarqué que l'épaisseur du film du condensât augmente en sens inverse du nombre de Prandtl. Une faible valeur du nombre de Prandtl engendre un écoulement de faible vitesse et ce dernier favorise la condensation.

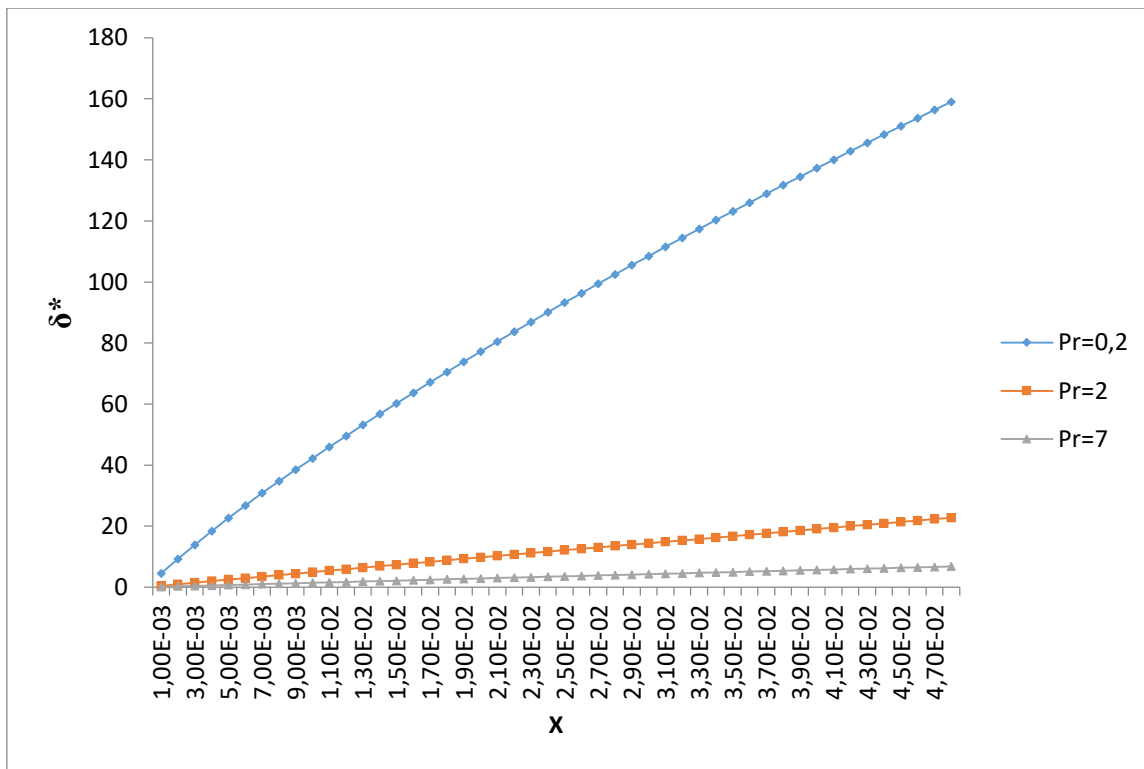


Figure 6.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Pr

Re = 1000 ;  $Fr = 10^{-3}$  ;  $H^* = 2.10^{-3}$  ;  $Ja = 10^{-4}$  ;  $L/A = 125$  ;  $\lambda^* = 2,9$  ;  $\nu^* = 10^{-7}$  ;  $\varepsilon = 0,4$

### 5.1.7 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Re

L'étude de l'effet du nombre de Reynolds sur la variation de l'épaisseur du film liquide. Cela consiste à faire varier **Re** en fixant les autres paramètres. Le résultat est consigné sur la figure 7.4. Elle nous montre l'influence du nombre de Reynolds sur l'épaisseur du film liquide. Un écoulement lent peut être traduit par une diminution du nombre de Reynolds et alors, ce type d'écoulement (écoulement de faible vitesse) favorise la condensation.

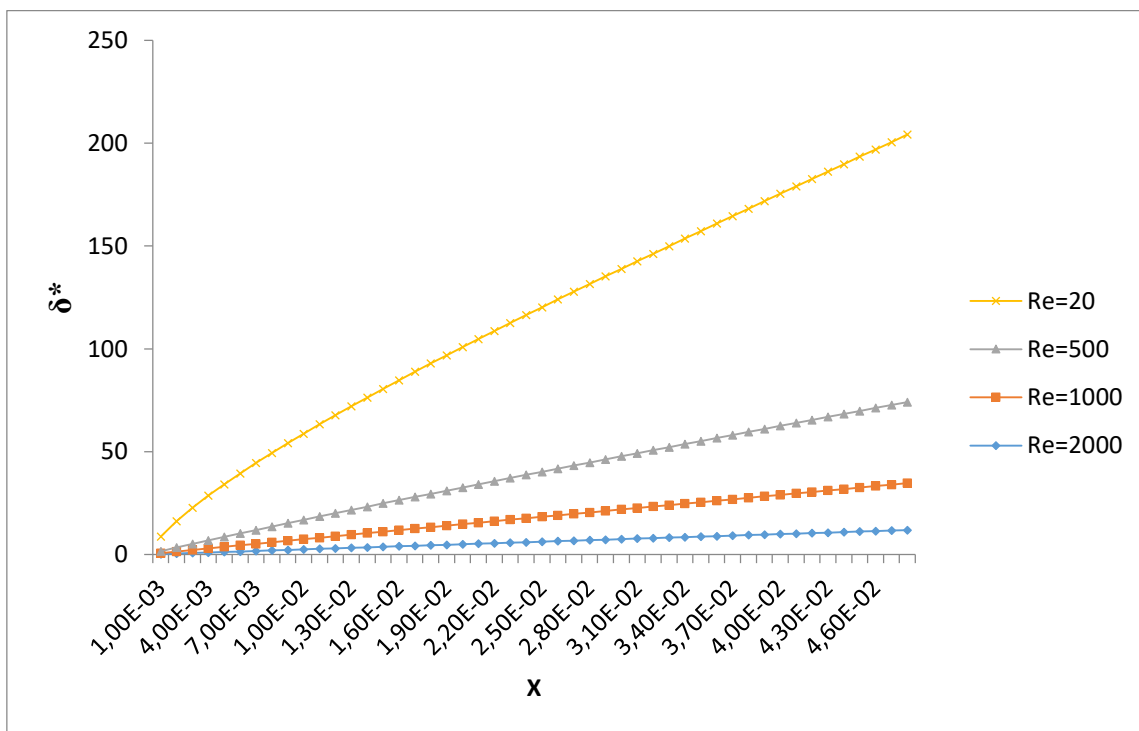


Figure 7.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs Re:

$$Fr = 10^{-3}; H^* = 2.10^{-3}; Ja=10^{-4}; Pr=2; \lambda^*=2,9; \nu^* = 10^{-7}; L/A=125; \varepsilon = 0,4$$

### 5.1.8 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $\epsilon$

La figure 8.4 présente l'étude de l'effet de la porosité sur la variation de l'épaisseur du film liquide. Cela consiste à faire varier  $\epsilon$  en fixant les autres paramètres. A l'issue de l'analyse de cette figure, nous remarquons que la porosité n'a aucune influence sur l'épaisseur du film liquide. L'hypothèse les phases solide et fluide du milieu poreux sont en équilibre thermique nous permet de dire qu'il y'a absence de transfert thermique et cela nous a donné la possibilité de dire que la porosité n'influe pas sur la condensation. Et c'est cette dernière qui détermine le sens de variation de l'épaisseur du film liquide.

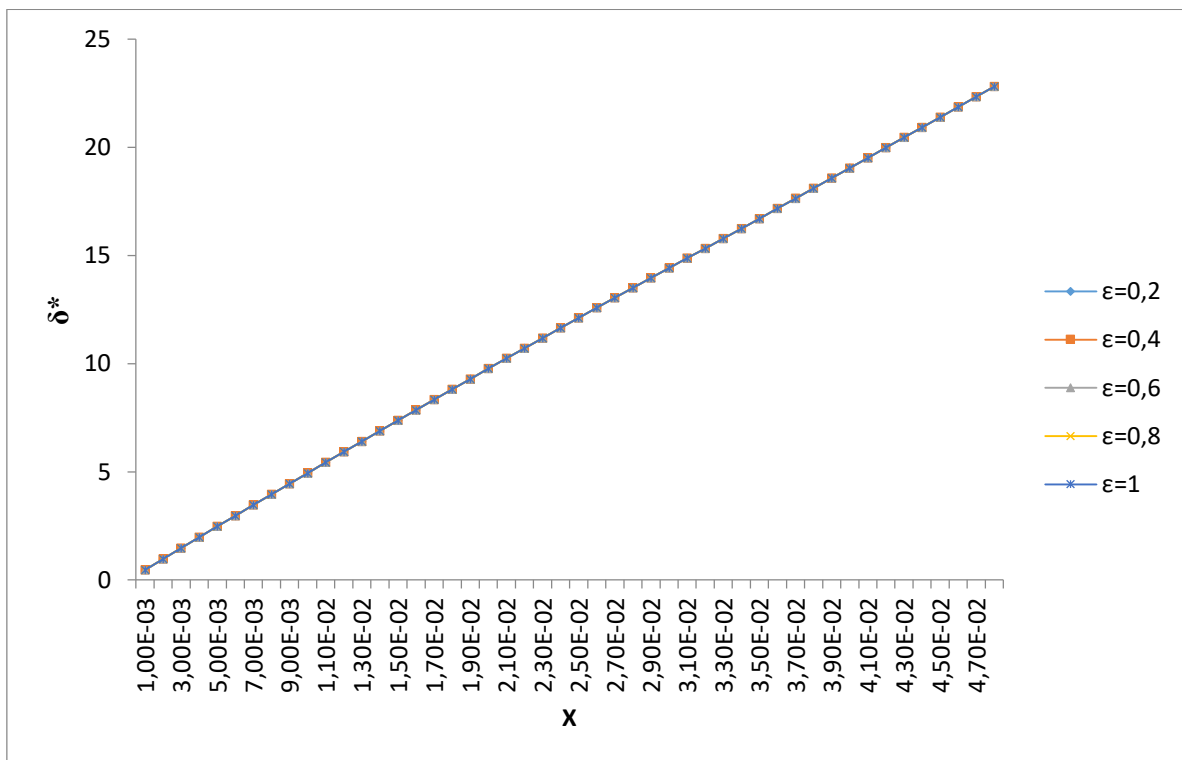


Figure 8.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs  $\epsilon$

$Re = 1000$ ;  $Fr = 10^{-3}$ ;  $H^* = 2.10^{-3}$ ;  $Ja=10^{-4}$ ;  $Pr=2$ ;  $\lambda^*=2,9$ ;  $\nu^* = 10^{-7}$ ;  $L/A=125$



### 5.1.9 Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs $\nu^*$

La figure 9.4 nous montre l'influence du rapport de viscosité cinématique du milieu poreux et du milieu liquide sur la variation de l'épaisseur du film liquide pour  $10^{-7} \leq \nu^* \leq 10^6$ .

Nous constatons que sur cette figure, quel que soit la valeur de cette viscosité, l'épaisseur du film liquide reste constante. Donc nous pouvons dire que le rapport de viscosité cinématique n'a aucun effet sur l'épaisseur du film liquide. Cela peut être due au fait que les équations de l'écoulement et de transfert dans la phase vapeur sont généralement négligées.

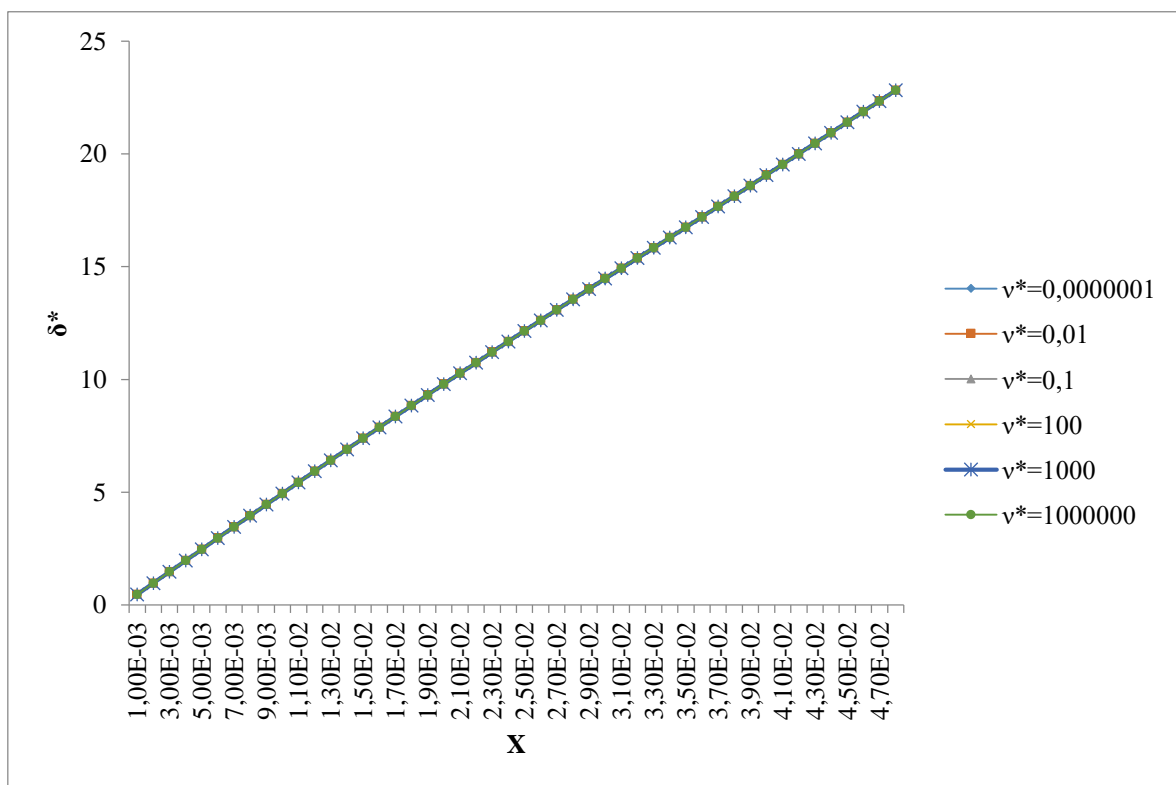


Figure 9.4: Variation de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'abscisse x pour différentes valeurs  $\nu^*$ :

$Re = 1000$ ;  $Fr = 10^{-3}$ ;  $H^* = 2,10 \cdot 10^{-3}$ ;  $Ja = 10^{-4}$ ;  $Pr = 2$ ;  $\lambda^* = 2,9$ ;  $L/A = 125$ ;  $\varepsilon = 0,4$

## 5.2 Conclusion

L'Analyse de l'influence des paramètres physiques, géométriques et les nombres adimensionnels nous a permis de montrer que l'épaisseur du film liquide augmente avec le rapport de forme, le nombre Jacob, diminue lorsqu'il y'a augmentation de l'épaisseur de la couche poreuse, du nombre de Prandtl, de la conductivité thermique adimensionnelle et du nombre de Reynolds. Le rapport de de viscosité cinématique du milieu liquide et du milieu poreux, la porosité et le nombre de Froude n'ont pas d'effets sur la variation de cette épaisseur.

### 5.3 Conclusion générale et Perspectives

L'objectif du travail réalisé dans ce mémoire est l'étude numérique des effets physiques, géométriques et les paramètres adimensionnels sur l'épaisseur du film liquide lors de la condensation en convection forcée dans un canal dont les parois sont recouvertes de couches poreuses. Après avoir décrit le problème, nous avons sur la base d'hypothèses simplificatrices jugé raisonnable d'établir les équations qui régissent les transferts dans le milieu poreux et dans la phase liquide ainsi que les conditions aux limites et aux interfaces qui les complètent. Nous avons choisi aussi le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour modéliser l'écoulement dans un milieu poreux alors celles classiques de la couche limite pour ce dans le liquide pur. Dans le but de réduire les paramètres et de généraliser l'étude, nous avons rendu adimensionnelles les équations générant ainsi des nombres qui caractérisent les transferts. En ce qui concerne l'étude numérique, nous avons utilisé la méthode aux différences finies qui nous a permis de discrétiser les équations de transfert. Et la méthode de double balayage combinée à un schéma itératif de type relaxation ligne par ligne de type Gauss-Seidel a été utilisé pour la discrétisation des termes d'advection et de diffusion respectivement avec un schéma décentré arrière et centré afin de rendre les diagonales principales des matrices les plus dominantes possibles. Nous procédons par la suite à nos simulations numériques pour dégager l'influence des paramètres physiques et géométriques caractérisant le problème de l'écoulement dans un canal contenant un milieu poreux.

Les résultats montrent que l'épaisseur du film liquide augmente avec le rapport de forme, le nombre Jacob et varie en sens inverse avec l'épaisseur de la couche poreuse, le nombre de Prandtl, du nombre de Reynolds et le rapport de conductivité thermique. Alors quant au rapport de viscosité cinématique du milieu liquide et du milieu poreux, à la porosité et au nombre de Froude, n'ont aucune influence sur la variation de cette épaisseur.

- Quand n'est-il des résultats si on tenait en compte de la variation transversale et longitudinale de pression dans la matrice poreuse tout en considérant le transfert d'énergie par rayonnement ?
- Si on considérait l'écoulement comme étant turbulente dans un canal cylindrique, est ce qu'on aura les mêmes résultats.

---

# 6 BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Ndiaye. M, «Etude Numérique de la Condensation de Type Film Mince en Convection Forcée sur une Paroi Verticale Recouverte d'un Matériau Poreux,» ED-PCSTUI, DAKAR, 2015.
- [2] NDIAYE. P. T, «Etude Numérique de la Condensation de Type Film Mince en Convection Forcée dans un Canal dont les Parois sont Recouvertes d'un Matériau Poreux- Détermination des Longueurs d'Entrée.,» ED-PCSTUI, DAKAR, 2020.
- [3] Daïan. J. F, Equilibre et Transferts en Milieux Poreux, Grenoble 1 (FRANCE): LTHE-, 2013, p. 642.
- [4] Muhieddine. M, «Simulation Numerique des Structures de Combustion préhistorique,» Rennes (France), 2009.
- [5] Daïan. J. F, «Equilibre et transferts en milieu poreux,» LTHE, 2010.
- [6] Dalla. C. C, «Transferts de traceur en milieu poreux consolidé et milieu poreux fissuré: Expérimentations et Modélisations,» Grenoble 1 (France), 2007.
- [7] Younsi. R, «Simulation numérique du transfert de chaleur et de masse en milieux Fluides et Poreux,» Alger (Algerie), 2002.
- [8] MAHDHAOUI. H, «Etude Numérique des Transferts de Masse et de Chaleur dans un Canal Contenant un Matériau Poreux de Section Carrée,» HAL open science, Tunisie, 2018.
- [9] Scheidegger. A. E, The Physics of Flow Through Porous Media, 3 éd., U. o. T. Press, Éd., 1974, p. 353.
- [10] De Wiest, Flow Through Porous Media, A. Press, Éd., 1969, p. 530.
- [11] Bories. S et Prat. M, «Transfert de Chaleur dans les milieux Poreux,» *Technique l'ingenieur*, 10 Aout 1995.
- [12] Vafai. K et Tien. C. T, «Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in Porous media,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 24, pp. 195-203, February 1981.

- [13] Lauriat. G et Prasad. V, «Natural convection in vertical porous cavity: Numerical Study for Brinkman Extended Darcy Formulation,» *J. Heat Transfer*, vol. 109, pp. 688-696, August 1987.
- [14] Lage. J. L, «Effect of the convective inertia term on Benard convection in a porous Medium,» *Num. Heat Transfer*, vol. 22, pp. 469-487, 1992.
- [15] Merouani. L, «Etude des transferts de chaleur et de masse lors de la condensation en film liquide,» Constantine (Algerie), 2011.
- [16] TRAD. M, «Convection naturelle et forcée dans un cylindre vertical poreux. Analyse Numerique du transfert de chaleur et influence de la matrice solide sur l'écoulement,» Batna (Algerie), 2015.
- [17] SAMMOUDA. M, «Modélisation théorique et numérique du phénomène de la convection naturelle et thermosolutale dans les milieux poreux à porosité variable,» Rabat (Maroc), 2012.
- [18] Ndiaye. M, Mbow. C, Sarr. J et Zeghmati. B, «Numerical Study of The Thin Film-Type Condensation of Saturated Forced Into a Vertical Wall Covered With a Porous Material Vapor Convection,» *International Journal on Heat and Mass Transfer-Theory and Applications (IREHEAT)*, vol. 1, n° 16, pp. 330-338, 2013.
- [19] Mouhamed. A, Belkacem. Z, Xavier. C et Wei-Mon. Y, «Etude Analytique de la Condensation Laminaire de Type Film d'une Vapeur Saturée dans un Canal Vertical dont les Parois sont Recouvertes d'une Couche Poreuse.,» *13ème journées internationales de thermique (JITH)*, p. 5, 30 Aout 2007.
- [20] Herbin. R, «Cours d'Analyse numerique I : Chapitre 1, Systeme lineaire, tele-enseignement, L3,» 2016.
- [21] Ndiaye. M, Mbow. C, Sarr. J, Zeghmati. B et Faye. M, «Numerical Investigation of Laminar Forced Thin Film Condensation of a Saturated Vapor Along a vertical Wall Covered With a Porous Material: Effet of Prandtl and Froude Numbers,» *International Journal on Heat and Mass Transfer-Theory and Applications (IREHEAT)*, vol. 1, n° 16, pp. 339-344, 2013.
- [22] Ndiaye. P. T, Ndiaye. M, Mbow. C et Ndiaye. G, «Numerical Study of Thin Film Condensation Forced Convection in a Canal Whose Walls Are Covered With a Porous Material: Influence of Jacob Number-Determination of Lengths of Entry,» *International Journal on Engineering Applications (IREA)*, vol. 8, n° 14, pp. 125-132, July 2020.
- [23] Ndiaye. P. T, Ndiaye. M, Mbow. C et Ndiaye. G, «Influence of Reynolds and Prandtl Numbers on Thin Film Condensation in Forced Convection in a Canal Covered With a Porous Material,» *International Journal on Engineering and Applications (IREA)*, vol. 8, n° 15, pp. 178-187, September 2020.
- [24] Connor. N, «Qu'est-ce que le mode de condensation – types de condensation –definition,» 2019.

- [25] Ergun. S, «Fluid flow through packed columns,» vol. 48, pp. 88-94, 1988.
- [26] Wooding. R. A, «Convection Thermique libre en régime Permanent d'un liquide dans un milieu perméable saturé,» *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 2, pp. 273-285, 1957.
- [27] Zouitene. S, «Étude numérique et expérimentale du refroidissement des convertisseurs auxiliaires de puissances dans les trains par convection naturelle, film liquide et caloduc,» Valenciennes ( FRANCE ), 2014.