UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

U.F.R SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE : Science et Technologie
MENTION : Mathématiques et Applications
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Pures
OPTION : Algèbre

Thème : Sur la cohomologie des (C,H)-modules relatifs de Hopf

Présenté par : Abdoulaye DIOUF

Directeur : Pr Thomas GUÉDÉNON
Co-directeur : Dr Christophe Lopez NANGO

Devant le jury ci-après :

Prénom(S) et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Oumar SALL	Professeur titulaire	Président du jury	UASZ
Thomas GUÉDÉNON	Professeur Assimilé	Directeur	UASZ
Moussa FALL	Maitre de Conf. Titulaire	Examinateur	UASZ
Christophe Lopez NANGO	Docteur	Examinateur	UASZ

Année universitaire : 2021−2022

Sur la cohomologie des (C,H)-modules relatifs de Hopf

Abdoulaye DIOUF

25 Mars 2023

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude à **DIEU L'ÉTERNEL** , pour toute la force, le courage et la persévérance qu'il m'a octroyé afin d'accomplir ce modeste travail.

Que louanges et gloire Lui reviennent.

La première personne que je tiens à remercier, est mon Directeur de mémoire **Thomas GUEDENON**, pour les orientations, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité. Par ailleurs je remercie mon Co-directeur de mémoire **Christophe Lopez NANGO** qui est un frère sympa, je le remercie pour le soutien et les encouragements.
Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les enseignants de l'Université Assane Seck, en particulier ceux du Département de Mathématiques pour leur grande contribution à ma formation de la licence 1 au Master 2.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les membres du jury : Professeur **Oumar SALL**, Docteur **Moussa FALL** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon projet en acceptant d'examiner mon travail et d'apporter des propositions pertinentes ayant permis de réaliser ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi aux anciens : **Saliou DIAW, Alioune BA, Moustapha CAMARA, Raymond DIATTA** $\cdots$ Je remercie également mes camarades de classe : **Ibrahima TRAORE, Malick FAYE, Christ Jesus BASSE, Marie FAYE , Abdourahmane DIATTA, Thierno DIALLO** sans oublier mes doyens **M. Mouhamed Fadel AIDARA et M. Papa Aly CISSE** et l'ensemble des étudiants du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université Assane Seck.

Mes chaleureux et cordiaux remerciements à mon défunt père **Djibril DIOUF**, ma mère **Ndeye NDIAYE** et à mon oncle **Mamadou NDIAYE**, ma tante **Mariama NDIAYE**, pour leur amour inestimable, leur confiance, leurs soutiens, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

RÉSUMÉ

Soient $\mathbb{K}$ un corps, H une algèbre de Hopf d'antipode bijective et C une coalgèbre de H-module. Supposons qu'il existe un antimorphisme de coalgèbres $\phi : C \longrightarrow H$ avec $\phi(1_C) = 1_H$ en utilisant ϕ on définit une structure de C^*-module sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $Hom(M, N)$ pour tous C-comodules à droite M et N, et on considère le sous-module maximal rationnel $HOM(M, N)$ de $Hom(M, N)$. C'est un C-comodule à droite maximal contenu dans $Hom(M, N)$. Soit $Hom^C(M, N)$ l'ensemble des morphismes de C-comodules de M vers N. On considère ensuite les foncteurs dérivés à droite des deux foncteurs $HOM(M, -)$ et $Hom^C(-, -)$, qui donnent lieu à deux versions différentes du foncteur Ext. Ces deux versions du foncteur Ext sont liées dans une suite spectrale en utilisant le foncteur coinvariant et un endofunctor $\overline{(\ \ )}$ de $\mathcal{M}^C$ où $\mathcal{M}^C$ est la catégorie des C-comodules à droite.

Table des matières

INTRODUCTION

Soient $\mathbb{K}$ un corps et H une algèbre de Hopf d'antipode bijective. Dans [1], **S. Caenepeel et T. Guédénon** ont étudié l'algèbre homologique des (A, H)-modules relatifs de Hopf gauche-droite en mettant l'accent sur les modules injectifs, les résolutions injectives minimales et la cohomologie. Dans [10] **Zhu Hong, Chen, Hui-Xiang** et **Tang, Haijun** ont généralisé les résultats de [1] aux (H, A, C)-modules de Doi-Hopf. Lorsque $A = \mathbb{K}$, un $(H, \mathbb{K}, C)$-module de Doi-Hopf s'appelle un (H, C)-module relatif de Hopf. Dans ce mémoire, nous essayons de comprendre les résultats établis dans [1] et [10] dans le contexte des (H,C)-modules relatifs de Hopf. Dans la première partie, nous allons rappeler les notions de base de l'algèbre homologique. Dans la seconde, nous introduisons les notions préliminaires des algèbres de Hopf.
Enfin la troisième et principale partie, consistera à expliquer les résultats de [1] et [10] dans la catégorie des (H, C)-modules relatifs de Hopf. Cette étude concerne essentiellement les résultats suivants :

Proposition 0.0.1 *[1, Proposition 1.10]*

Soient M, N, $P \in \mathscr{M}^C$. On considère l'application suivante :

$$\varphi : Hom(N \otimes M, P) \longrightarrow Hom(M, Hom(N, P)) \ , \ \varphi(f)(m)(n) = f(n \otimes m).$$

(1) *Si $f \in Hom(N \otimes M, P)$ est C-colinéaire, alors $\varphi(f)(m) \in HOM(N, P)$; $\forall \ m \in M$. Par ailleurs, $\varphi(f)$ est C-colinéaire.*

(2) *φ induit un isomorphisme :*

$$\varphi : Hom^C(N \otimes M, P) \longrightarrow Hom^C(M, HOM(N, P)).$$

(3) *Si C a la propriété de symétrie, alors φ induit un isomorphisme*

$$\psi : Hom^C(M \otimes N, P) \longrightarrow Hom^C(M, HOM(N, P)).$$

Proposition 0.0.2 *[1, Proposition 1.4]*
Soit I un objet injectif dans $\mathscr{M}^C$.
(1) *$HOM(N, I)$ est **injectif** dans $\mathscr{M}^C$ pour tout $N \in \mathscr{M}^C$.*
(2) *$HOM(-, I)$ est un **endofoncteur** exact de $\mathscr{M}^C$.*

Proposition 0.0.3 *[1, Proposition 1.11]*
Soient M, $N \in \mathscr{M}^C$.
(1) *On a la suite spectrale suivante :*

$$R^p a(coC, EXT^q(M, N)) \to Ext^{C^{p+q}}(\overline{M}, N) \quad \text{avec } p \geq 0 \ , \ q \geq 0.$$

(2) *Si M est de dimension finie, alors*

$$R^p a(coC, M^* \otimes N) = Ext^{C^p}(\overline{M}, N), \text{ pour tout } p \geq 0.$$

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Suites exactes et Foncteurs

Définition 1.1.1 *Une suite d'applications linéaires de A-modules est la donnée de A-modules M_0, M_1, M_2 où A est un anneau commutatif et de deux applications linéaires*

$$f : M_0 \longrightarrow M_1 \quad et \quad g : M_1 \longrightarrow M_2. \tag{1.1}$$

Cette situation est représentée par :

$$M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2, \tag{1.2}$$

pour souligner qu'on peut composer f et g.

Une suite d'applications de A-modules

$$M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{g} M_2 \tag{1.3}$$

est dite exacte en M_1 si $Im(f) = Ker(g)$.

Plus généralement si I est un intervalle de $\mathbb{Z}$, une suite d'applications linéaires f_i de A-modules M_i.

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

est une suite exacte si elle est exacte en M_i pour tout $i \in I$, c'est-à-dire

$\forall i \in I \; Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$ (sauf aux extrémité).

Remarque 1.1.2

Une suite exacte peut être éventuellement infinie à gauche ou à droite, (sauf aux éventuelles extrémités.)
On peut aussi définir des suites exactes pour d'autres structures et morphismes de ces structures (groupes , anneaux , d'algèbres etc).
Dans ce document on va s'intéresser aux suites exactes de C-comodules et de morphismes de C-comodules.

1.2 Suites exactes courtes

Définition 1.2.1 *Soient M, N, P des A-modules. Une suite exacte courte est une suite de la forme :*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Vérifiant : f est injective, g surjective et $Im(f) = Ker(g)$.

1.3 Suites exactes scindées

Définition 1.3.1 *Considérons une suite exacte courte de A-modules*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0, \tag{1.5}$$

elle est dite scindée s'il existe un morphisme

$$r : P \longrightarrow M \quad tel \quad que \quad g \circ r = Id_P \tag{1.6}$$

r est appelé section ou inverse à droite.

Lemme 1.3.2 *Si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ est une application A-linéaire.*
Alors, l'application suivante

$$f_* : Hom(M, M_1) \longrightarrow Hom(M, M_2) \quad ; \quad \varphi \longmapsto f \circ \varphi = f_*(\varphi), \tag{1.7}$$

est un morphisme de groupes abéliens pour tout A-module M.

Preuve : *A-t-on $f_*(\varphi + \varphi') = f_*(\varphi) + f_*(\varphi')$?*

Pour tout φ , $\varphi' \in Hom_A(M, M_1)$, $x \in M$.

$$\begin{aligned} f_*(\varphi + \varphi')(x) \quad &= f \circ (\varphi + \varphi')(x) \\ &= (f \circ \varphi + f \circ \varphi')(x) \\ &= f_*(\varphi)(x) + f_*(\varphi')(x) \end{aligned}$$

d'où f_* est un morphisme de groupes abéliens.

Proposition 1.3.3 *[6, Proposition B.3]*
Soit (ε) : $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte scindée.

Alors, pour tout A-module M, les suites suivantes

$$0 \longrightarrow Hom_A(M, M_1) \xrightarrow{f_*} Hom_A(M, M_2) \xrightarrow{g_*} Hom_A(M, M_3) \longrightarrow 0; \tag{1.8}$$

$$0 \longrightarrow Hom_A(M_3, M) \xrightarrow{f^*} Hom_A(M_2, M) \xrightarrow{g^*} Hom_A(M_1, M) \longrightarrow 0 \tag{1.9}$$

sont exactes où $f_* = f \circ -$, $g_* = g \circ -$, $f^* = - \circ f$, $g^* = - \circ g$.

Proposition 1.3.4 *[5]*

Soit (λ) *:* $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ *une suite exacte.*

Alors, pour tout A-module N*, la suite suivante*

$$0 \longrightarrow N \otimes M_1 \longrightarrow N \otimes M_2 \longrightarrow N \otimes M_3 \longrightarrow 0 \tag{1.10}$$

est exacte.

1.4 Catégorie

Définition 1.4.1 *Une catégorie* C *est la donnée :*

1. *d'une classe* $Ob(C)$ *d'objets de* C *;*
2. *pour tout couple* (X, Y) *d'objets de* C *d'un ensemble noté* $Hom_C(X, Y)$ *dont les éléments sont appelés* ***morphismes*** *de* X *dans* Y *de* C *avec la notion* $f : X \longrightarrow Y$ *pour dire que* $f \in Hom_C(X, Y)$ *;*
3. *pour tout triplet* (X, Y, Z) *d'objets de* C*, d'une application*

$$\begin{aligned} Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z) &\longrightarrow Hom_C(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

appelée ***composition*** *des morphismes, qui est associative, et telle que pour tout objet* X *de* C *il existe* $1_X \in Hom_C(X, X)$*, appelé identité de* X *(noté parfois* id_X*), tel que :*
$\forall\ f \in Hom_C(X, Y)$*, on a* $f \circ 1_X = f$ *et* $\forall\ f \in Hom_C(Y, X)$*, on a* $1_X \circ f = f$*.*

Exemple 1.4.2 *On a :*
"Ens" qui est la catégorie des ensembles. Les morphismes sont les applications.
"$_A\mathscr{M}$*" qui est la catégorie des A-modules à gauche où* A *est un anneau. Les morphismes sont les applications A-linéaires.*
"$\mathscr{A}b$*" qui est la catégorie des groupes abéliens. Les morphismes sont ceux des groupes abéliens.*
"Top" qui est la catégorie des espaces topologiques. Les morphismes sont les applications continues.

Remarque 1.4.3 *Dans ce travail, on écrit* $E \in Ob(C)$ *pour dire que* E *est un objet de* C *.*

1.5 Sous-catégorie

Définition 1.5.1 *Une sous-catégorie* C' *de* C *est une catégorie dont tous les objets sont des objets de* C *et tous les morphismes sont des morphismes de* C*.*
Une sous-catégorie pleine de C *est une catégorie* D *satisfaisant aux conditions suivantes :*
- *les objets de* D *sont des objets de* C*.*
- *Si* M *est objet de* D*, tout objet de* C *isomorphe à* M *est un objet de* D*.*
- *si* M *et* N *sont deux objets de* D*,* $Hom_D(M, N)$ *est égal à* $Hom_C(M, N)$*.*
- *La loi de composition de* D *est induite par celle de* C*.*

Définition 1.5.2 *Soit* C *une catégorie. On appelle catégorie opposée de* C*, la catégorie notée* C^{op}*, dont les objets sont les mêmes que ceux de* C *et telle que si* X*,*Y *sont des objets de* C^{op} $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$*.*

1.6 Foncteurs

Définition 1.6.1 *Un **foncteur covariant*** $F : C \longrightarrow C'$ *est la donnée*

(a) *Pour tout objet* X *de* C *d'un objet* $F(X)$ *de* C'.

(b) *Pour tout couple d'objets* (X, Y) *de* C *et tout morphisme* $f \in Hom_C(X, Y)$, *d'un morphisme* $F(f) \in Hom_{C'}(F(X), F(Y))$ *tel que :*

- $\forall\ X \in C, \quad F(1_X) = 1_{F(X)}$;
- $\forall\ f \in Hom_C(X, Y)$ *et* $g \in Hom_C(Y, Z), \quad F(g \circ f){=}F(g) \circ F(f)$.

Définition 1.6.2 *Un **foncteur contravariant*** F *d'une catégorie* C *vers une catégorie* C' *est un foncteur covariant* $F : C \longrightarrow C'^{op}$.

1.6.1 Foncteurs Hom

Définition 1.6.3 *Soient* C *une catégorie et* X *un objet dans* C.

(1) *Un foncteur **covariant*** $h_X = Hom(X, -)$. *Plus précisement*

$h_X = Hom(X, -) : C \longrightarrow Ens$ *est défini par :*

- $h_X(T) = Hom(X, T)$ *pour tout objet* T ;
- $h_X(f) = Hom(X, T_1) \longrightarrow Hom(X, T_2) \quad , \quad u \longmapsto f \circ u$ *pour toute flèche* $f : T_1 \longrightarrow T_2$.

Définition 1.6.4 *Soient* C *une catégorie et* X *un objet dans* C.

(2) *Un foncteur **contravariant*** $k_X = Hom(-, X)$. *Plus précisement*

$k_X : C^{op} \longrightarrow Ens$ *est défini par :*

- $k_X(T) = Hom(T, X)$ *pour tout objet* T ;
- $k_X(f) = Hom(T_2, X) \longrightarrow Hom(T_1, X) \quad , \quad v \longmapsto v \circ f$ *pour toute flèche* $f : T_1 \longrightarrow T_2$.

Remarque 1.6.5
Dans la suite du travail $\quad k_X = Hom(-, X) = f^* \quad$ *et* $\quad h_X = Hom(X, -) = f_*$.

1.6.2 Foncteur exact

Définition 1.6.6 *Soient* A, B *deux anneaux.*
Un foncteur $F : {}_A\mathscr{M} \longrightarrow {}_B\mathscr{M}$ *est dit additif si pour tout couple d'objet* (M, N) *de* ${}_A\mathscr{M}$, *l'application* $Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_B(F(M), F(N))$ *est un morphisme de groupe abélien.*

Définition 1.6.7 *Soit $F : P \longrightarrow Q$ un foncteur additif, on dit que :*
• *F est exact à gauche si et seulement si pour toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C, \tag{1.11}$$

la suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \tag{1.12}$$

• *F est exact à droite si et seulement si pour tout suite exacte*

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0, \tag{1.13}$$

la suite suivante est exacte

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0, \tag{1.14}$$

• *F est exact si et seulement si pour toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0, \tag{1.15}$$

la suite suivante est exacte,

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0. \tag{1.16}$$

Un foncteur contravariant $G : P \longrightarrow Q$ est exact si le foncteur covariant associé $F : P \longrightarrow Q^{op}$ est exact.

1.6.3 Modules injectifs et Projectifs

Définition 1.6.8 *Un A-module P est dit* ***projectif*** *si le foncteur covariant $Hom_A(P, -)$ est exact.*

Définition 1.6.9 *Un A-module N est dit* ***injectif*** *si le foncteur contravariant $Hom_A(-, N)$ est exact.*

Définition 1.6.10 *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois catégories. Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont des foncteurs covariants. Alors, $G \circ F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur covariant.*

Chapitre 2

ALGEBRE DE HOPF

2.1 Algèbre

Dans tout notre travail on adopte l'écriture Hom et $\otimes$ à la place $Hom_{\mathbb{K}}$ et $\otimes_{\mathbb{K}}$.

Définition 2.1.1 *Soit A un ensemble. On dit que A est une $\mathbb{K}$-algèbre (associative unitaire) s'il existe :*

- *deux lois internes :*
$$''+'' : \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (a,a') \longmapsto a+a',\ \forall\ a,a' \in A \end{array} \quad et \quad ''\times'' : \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (a,a') \longmapsto a \times a' = aa' \end{array}$$
- *et une loi externe :*
$$''.'' : \begin{array}{l} \mathbb{K} \times A \longrightarrow A \\ (\lambda, a) \longmapsto \lambda.a = \lambda a,\ \forall\ a \in A \ et\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

telles que :

(*i*) $(A,+,.)$ *est un $\mathbb{K}$-module,*

(*ii*) $(A,+,\times)$ *est un anneau,*

(*iii*) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Définition 2.1.2 *Une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire A est un triplet du type (A, m_A, μ_A) où A est un $\mathbb{K}$-module et les applications*

$$m_A : \begin{array}{l} A \otimes A \longrightarrow A \\ a \otimes a' \longmapsto aa', \forall\ a,a' \in A \end{array} \qquad et\ \mu_A : \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow A \\ \lambda \longmapsto \lambda 1_A, \forall\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

sont $\mathbb{K}$-linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m_A"] \arrow[d, "m_A \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m_A"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "m_A"] & \\ \mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "\mu_A \otimes id_A"] \arrow[dr, "\approx"'] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "id_A \otimes \mu_A"'] \arrow[dl, "\approx"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire,

- $m_A \circ (m_A \otimes id_A) = m_A \circ (id_A \otimes m_A)$ *: c'est l'associativité,*
- *et* $m_A \circ (id_A \otimes \mu_A) = m_A \circ (\mu_A \otimes id_A)$ *: c'est l'unité.*

L'application m_A *est appelée le produit ou la multiplication, l'application* μ_A *est l'application unité et* $\mu_A(1_{\mathbb{K}})$ *est l'élément unité de* A*.*

2.1.1 Morphisme d'algèbres

Définition 2.1.3 *Soient* A *et* B *deux algèbres. Une application* $\mathbb{K}$*-linéaire* $f : A \longrightarrow B$ *est un morphisme d'algèbres si les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "\mu_B"'] & A \arrow[dl, "f"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

1) $m_B \circ (f \otimes f) = f \circ m_A$,

2) $f \circ \mu_A = \mu_B$.

2.2 Coalgèbre

Définition 2.2.1 *Une coalgèbre est la notion duale d'algèbre. On la définit en renversant les flèches dans la définition d'algèbre. Une co-algèbre (ou coalgèbre)* C *est un triplet* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$*, où* C *est un* $\mathbb{K}$*-module,* $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ *et* $\varepsilon_C : C \longrightarrow \mathbb{K}$ *sont des applications* $\mathbb{K}$*-linéaires telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "id_C\otimes\Delta_C"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\Delta_C\otimes id_C"] & C \arrow[l, "\Delta_C"] \arrow[u, "\Delta_C"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon_C\otimes id_C"'] \arrow[dr, "id_C\otimes\varepsilon_C"] & \\
\mathbb{K} \otimes C & & C \otimes \mathbb{K} \\
& C \arrow[ul, "\approx"] \arrow[ur, "\approx"'] \arrow[uu, "\Delta_C"] &
\end{tikzcd}$$

ce qui se traduit par :
- $(\Delta_C \otimes id_C) \circ \Delta_C = (id_C \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C$*, c'est la co-associativité,*
- $(id_C \otimes \varepsilon_C) \circ \Delta_C = (\varepsilon_C \otimes id_C) \circ \Delta_C$*, c'est la co-unité.*

L'application Δ_C *est appelée la co-multiplication où le co-produit de* C *et l'application* ε_C *est appelée la co-unité de* C*.*

2.2.1 Sous-coalgèbre

Définition 2.2.2 *Soient* $\mathbb{K}$ *un corps et* C *une coalgèbre. Un sous-*$\mathbb{K}$*-module* D *de* C *est une sous-coalgèbre de* C *si* $\Delta_C(D) \subseteq D \otimes D$*.*

2.2.2 Notation de Sweedler-Heyneman

Définition 2.2.3 *Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre.*
Un élément de $C \otimes C$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i$. Pour uniformité d'écriture et par convention, on utilise la notation de Sweedler-Heyneman : Soit $c \in C$, on note

$$\Delta_C(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_1 \otimes c_2 = c_{(1)} \otimes c_{(2)} = c_1 \otimes c_2.$$

Les notations de Sweedler-Heyneman (ou Sweedler) sont très utiles pour faire les calculs dans les coalgèbres.
Dans la suite de tout ce travail, nous utiliserons la notation $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.
Avec cette notation, l'axiome de la co-associativité se traduit par :

$$\Delta_C(c_1) \otimes c_2 = c_1 \otimes \Delta_C(c_2),$$

c'est-à-dire,

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3, \quad \forall c \in C.$$

L'axiome de la co-unité se traduit par :

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2), \quad \forall c \in C.$$

Ainsi pour montrer qu'un $\mathbb{K}$-module C est une coalgèbre il suffit de montrer qu'il existe deux applications $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ et $\varepsilon_C : C \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que : $\forall c \in C$, avec $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$, on a :

$$c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}$$

et

$$\varepsilon_C(c_1)c_2 = c = c_1\varepsilon_C(c_2).$$

2.2.3 Produit tensoriel de coalgèbres

Définition 2.2.4 *Soient M et N deux $\mathbb{K}$-modules . L'application d'échange (tourist map) est l'application*

$$\begin{aligned} \tau :\ & M \otimes N \longrightarrow N \otimes M \\ & m \otimes n \longmapsto n \otimes m. \end{aligned}$$

Définition 2.2.5 *Soient $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $D = (D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ deux coalgèbres.*
On définit deux applications $\mathbb{K}$-linéaires $\Delta_{C\otimes D} : C \otimes D \longrightarrow C \otimes D \otimes C \otimes D$ et $\varepsilon_{C\otimes D} : C \otimes D \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\Delta_{C\otimes D} = (id_C \otimes \tau_{C\otimes D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D) \quad et \quad \varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D.$$

En d'autres termes, on a :

$$\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \quad et \quad \varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d),$$

avec $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$, $\Delta_D(d) = d_1 \otimes d_2$.
Ainsi ; $(C \otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$ est une coalgèbre.

2.2.4 Morphisme de coalgèbres

Définition 2.2.6 *Un Morphisme de coalgèbres est la notion duale du morphisme d'algèbres.On la définit en renversant les flèches dans la définition du morphisme d'algèbres.*

Définition 2.2.7 *Soient C et D deux coalgèbres. Une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : C \longrightarrow D$ est un morphisme de coalgèbres si les diagrammes suivants sont commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C \otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $\quad (f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f$ *et* $\varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$.

Donc f est un morphisme de coalgèbres si :

$$f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_1) \otimes f(c_2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_D[f(c)] = \varepsilon_C(c) \quad \forall c \in C, \quad \text{avec} \quad \Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Remarque 2.2.8 *Soient C et H deux coalgèbres. Une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : C \longrightarrow H$ est un antimorphisme de coalgèbres si :*
$f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_2) \otimes f(c_1)$ *avec* $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$, $\Delta_H(h) = h_1 \otimes h_2$.

2.3 Bialgèbre

Lemme 2.3.1 *Soient (B, m_B, μ_B) une algèbre et $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ une coalgèbre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) Δ_B et ε_B sont des morphismes d'algèbres,
(ii) m_B et μ_B sont des morphismes de coalgèbres,
(iii) Pour tous $a, b \in B$,

$$\Delta_B(ab) = a_1b_1 \otimes a_2b_2, \quad \Delta_B(1_B) = 1_B \otimes 1_B,$$

$$\varepsilon_B(ab) = \varepsilon_B(a)\varepsilon_B(b), \quad \varepsilon_B(1_B) = 1_{\mathbb{K}}.$$

Définition 2.3.2 *On dit qu'un $\mathbb{K}$-module B est une bi-algèbre (ou bialgèbre) si B est une algèbre (B, m_B, μ_B) et une coalgèbre $B = (B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ satisfaisant l'une des propriétés du Lemme 2.3.1 .*

2.3.1 Morphisme de bialgèbres

Définition 2.3.3 *Soient B et B' deux bialgèbres.*
On dit que $f : B \longrightarrow B'$ est un morphisme de bialgèbres si f est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de coalgèbres.

2.3.2 Elément de type-groupe et élément primitif

Définition 2.3.4 *Soit C une bialgèbre. On dit qu'un élément x de C est de type-groupe si*

$$\Delta_C(x) = x \otimes x \text{ et } \varepsilon_C(x) = 1_K.$$

2.4 Algèbre de Hopf

Dans cette section, nous allons définir la notion d'algèbre de Hopf. C'est une structure algébrique qui va lier celle d'algèbre et de co-algèbre.

2.4.1 Produit de convolution

Définition 2.4.1 *Soient $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. La convolution est définie par :*

$$f \star g = m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C, \tag{2.1}$$

ce qui se traduit par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "f\otimes g"] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\
C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "f\star g"'] & A
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, avec la notation de *Sweedler*, pour tout $c \in C$ on a :

$$(f \star g)(c) = f(c_1)g(c_2). \tag{2.2}$$

Ce produit est appelé *produit de convolution. Muni du produit de convolution, $Hom_K(C, A)$ est une algèbre associative unitaire d'unité $\mu_A \circ \varepsilon_C$.*

Définition 2.4.2 *Soit C une coalgèbre. Alors $C^* = Hom(C, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre munie d'un produit dit **convolution** donné par $(f \star g)(c) = f(c_1)g(c_2)$ où $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.*

Définition 2.4.3 *Soit $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H)$ une bialgèbre. Considérons l'algèbre associative unitaire $Hom_K(H, H)$ dont le produit est celui du convolution et l'unité est $\mu_H \circ \varepsilon_H$, id_H l'application identique de $Hom_K(H, H)$. Si id_H est inversible son inverse s'appélle l'antipode de H et se note S_H.*

Remarque 2.4.4 *Une algèbre de Hopf est donc une bialgèbre qui possède une antipode.*

2.4.2 Formule de l'antipode

Théorème :

Soient $(H, m_H, \mu_H, \triangle_H, \varepsilon_H, S_H)$ une algèbre de Hopf d'antipode S_H, on a :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

Preuve :

Par définition, on a :

$$S_H \star id_H = \mu_H \circ \varepsilon_H = id_H \star S_H. \tag{2.3}$$

Ainsi, on a : $\forall\ h \in H$,

$$\begin{aligned}(S_H \star id_H)(h) &= \mu_H \circ \varepsilon_H(h)\\ S_H(h_1)id_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})\\ S_H(h_1)h_2 &= \varepsilon_H(h)1_H.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(id_H \star S_H)(h) &= (\mu_H \circ \varepsilon_H)(h)\\ id_H(h_1)S_H(h_2) &= \mu_H(\varepsilon_H(h))\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)\mu_H(1_{\mathbb{K}})\\ h_1S_H(h_2) &= \varepsilon_H(h)1_H,\end{aligned}$$

d'où la formule :

$$S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S_H(h_2).$$

$$\begin{array}{ll} \text{Donc :} & \\ S_H(1_H) & = 1_HS_H(1_H)\\ & = \varepsilon_H(1_H)1_H\\ & = 1_H\\ & \text{ou bien}\\ S_H(1_H) & = S_H(1_H)1_H\\ & = 1_H\varepsilon_H(1_H)\\ & = 1_H\\ \text{d'où} & S_H(1_H) = 1_H. \blacksquare \end{array}$$

Proposition 2.4.5 *Soit H une algèbre de Hopf. On a :*

$$\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H, \quad \forall\ h \in H. \tag{2.4}$$

Preuve :

Montrons que $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H$. Soit $h \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_H(h) &= \varepsilon_H(\varepsilon_H(h)1_H) \\
&= \varepsilon_H(h_1 S_H(h_2)) \\
&= \varepsilon_H(h_1)\varepsilon_H(S_H(h_2)) \\
&= \varepsilon_H(\varepsilon_H(h_1)S_H(h_2)) \\
&= \varepsilon_H(S_H(\varepsilon_H(h_1)h_2)) \\
&= \varepsilon_H(S_H(h)) \\
&= (\varepsilon_H \circ S_H)(h)
\end{aligned}$$

d'où $\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H$.■

Chapitre 3

COHOMOLOGIE DES (C,H)-MODULES RELATIFS DE HOPF

3.1 Coalgèbre de H-module

Les notions de comodules et de morphismes de comodules sont des notions duales de modules et de morphismes de modules. Afin de mieux comprendre ces deux notions, nous allons définir les modules et les morphismes de modules par des diagrammes.

3.1.1 Module sur une algèbre

Définition 3.1.1 *Soit A une algèbre. Un $\mathbb{K}$-module M est un A-module à gauche s'il existe une application $\mathbb{K}$-linéaire :*

$\lambda_M : \quad A \otimes M \longrightarrow M$

$\quad a \otimes m \longmapsto a.m = am, \quad \forall\, a \in A,\ m \in M$

telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes \lambda_M"] \arrow[d, "m_A \otimes id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\lambda_M"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes M \arrow[rr, "\mu_A \otimes id_M"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\lambda_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

La commutativité du rectangle équivaut à :

$$\lambda_M \circ (id_A \otimes \lambda_M) = \lambda_M \circ (m_A \otimes id_M),$$

$$(ab)m = a(bm), \quad \forall\, a,\ b \in A,\ m \in M.$$

Celle du triangle équivaut à :

$$\lambda_M \circ (\mu_A \otimes id_M) = f,$$

$$1_A m = m.$$

On dit alors que A agit à gauche sur M. L'application λ est l'action sur M.

Définition 3.1.2 *Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et M un A-module à gauche. Un sous-ensemble N de M est dit sous-A-module de M si N est un sous-$\mathbb{K}$-module de M et $\lambda(A \otimes M) \subseteq N$.*

3.1.2 Morphisme de A-modules

Définition 3.1.3 *Soit A une algèbre et soient M et N deux A-modules à gauche. Un morphisme de A-modules $f : M \longrightarrow N$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ A \otimes M \arrow[u, "\lambda_M"] \arrow[r, "id_A \otimes f"'] & A \otimes N \arrow[u, "\lambda_N"'] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire :

$$f \circ \lambda = \lambda \circ (id_A \otimes f).$$

Donc $\forall\ a \in A,\ m \in M$, on a :

$$(f \circ \lambda_M)(a \otimes m) = (\lambda_N \circ (id_A \otimes f))(a \otimes m),$$

c'est-à-dire,

$$f(a.m) = a.f(m).$$

3.2 Comodule sur une Coalgèbre

La notion de comodule est celle duale de module. On la définit en renversant les flèches dans la définition du module.

Définition 3.2.1 *Soit $C = (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une coalgèbre. Un $\mathbb{K}$-module à gauche M est un C-comodule à droite s'il existe une application $\mathbb{K}$-linéaire*

$$\rho_M : M \longrightarrow M \otimes C$$

qui rend commutatif les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \Delta_C"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho_M \otimes id_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes C \arrow[d, "id_M \otimes \varepsilon_C"] \\ & M \otimes \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Ce qui équivaut à :

- $(id_M \otimes \Delta_C) \circ \rho_M = (\rho_M \otimes id_C) \circ \rho_M$,
- $(id_M \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_M = f$.

L'application ρ_M est appelée la C-coaction ou la coaction de C sur M.

3.2.1 Sous-comodule

Définition 3.2.2 *Soit M un C-comodule à droite. Un sous-ensemble N de M est un sous-comodule si N est un sous- $\mathbb{K}$-module de M et $\rho_M(N) \subseteq N \otimes C$.*

3.2.2 Notation de Sweedler pour les comodules

Notation : Soit $M = (M, \varphi_M)$ un C-comodule à droite. Pour $m \in M$, on note :

$$\rho_M(m) = \Sigma m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \Sigma m_0 \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1. \tag{3.1}$$

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons la notation $\rho_M(m) = m_0 \otimes m_1$.

Avec la notation de Sweedler, la commutativité des diagrammes précédents équivaut à :

$$m_0 \otimes m_{11} \otimes m_{12} = m_{00} \otimes m_{01} \otimes m_1 = m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$$

et

$$m_0 \varepsilon_C(m_1) = m = \varepsilon_C(m_0) m_1.$$

Définition 3.2.3 *Soit M un C-comodule.*
Soit x un élément de type-groupe de C. On dit qu'un élément m de M est (C, x)-coinvariant si $\rho_M(m) = m \otimes x$.

On note $M^{Co,x} = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes x\}$, ***l'ensemble des éléments C-coinvariants***.

3.2.3 Morphisme de comodules

Pour définir un morphisme de comodules, on dualise tout simplement la notion de morphisme de modules.

Définition 3.2.4 *Soit C une coalgèbre et soient M et N deux C-comodules à droite.*
Une application $\mathbb{K}$-linéaire $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de C-comodules ou une application C-colinéaire si le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id_C"'] & N \otimes C
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire : $\rho_N \circ f = (f \otimes id_C) \circ \rho_M$. Donc $\forall\ m \in M$ on a :

$$(\rho_N \circ f)(m) = [(f \otimes id_C) \circ \rho_M](m)$$

$$(f(m))_0 \otimes (f(m))_1 = f(m_0) \otimes (m_1)$$

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1.$$

Ainsi, f est C-colinéaire si et seulement si

$$f(m)_0 \otimes f(m)_1 = f(m_0) \otimes m_1. \tag{3.2}$$

3.2.4 Produit tensoriel de comodules

Proposition 3.2.5 *Soit $C = (C, m_C, \mu_C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une bialgèbre.*
Soient $M = (M, \rho_M)$ et $N = (N, \rho_N)$ deux C-comodules à droite. L'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\rho_{M\otimes N} : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes C$$

munit $M \otimes N$ d'une structure de C-comodule à droite. C'est la coaction diagonale.
Le comodule $M \otimes N = (M \otimes N, \rho_{M\otimes N})$ est appelé produit tensoriel des comodules M et N.
Dans la notation de Sweedler, on a :

$$\rho_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1.$$

Preuve : A-t-on :

$$(id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \rho_{M\otimes N} = (\rho_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \rho_{M\otimes N}$$

et

$$(id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_{M\otimes N} = id_{M\otimes N}?$$

Soit $m \otimes n \in M \otimes N$.

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \rho_{M\otimes N}](m \otimes n) \quad &= [id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes (m_1 n_1)_1 \otimes (m_1 n_1)_2 \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_{11} n_{11} \otimes m_{12} n_{12} \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2. \quad (i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\rho_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \rho_{M\otimes N}](m \otimes n) \quad &= [\rho_{M\otimes N} \otimes id_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_{00} \otimes n_{00} \otimes m_{01} n_{01} \otimes m_1 n_1 \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1 \otimes m_2 n_2. \quad (ii)
\end{aligned}$$

$$(i) \text{ et } (ii) \Leftrightarrow \quad (id_{M\otimes N} \otimes \Delta_C) \circ \rho_{M\otimes N} = (\rho_{M\otimes N} \otimes id_C) \circ \rho_{M\otimes N}$$

$$\begin{aligned}
[(id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_{M\otimes N}](m \otimes n) \quad &= [id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C](m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \otimes \varepsilon_C(m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \varepsilon_C(m_1 n_1) \\
&= m_0 \otimes n_0 \varepsilon_C(m_1) \varepsilon_C(n_1) \\
&= m_0 \varepsilon_C(m_1) \otimes n_0 \varepsilon_C(n_1) \\
&= m \otimes n \\
&= id_{M\otimes N}(m \otimes n), \\
\text{d'où} \quad (id_{M\otimes N} \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_{M\otimes N} &= id_{M\otimes N}. \blacksquare
\end{aligned}$$

3.3 Coalgèbre de H-module

Définition 3.3.1 *Soit H une algèbre de Hopf. Un $\mathbb{K}$-module C est une Coalgèbre de H-module à gauche si C est une coalgèbre et un H-module à gauche tel qu'on ait :*
• $\Delta_C(h \triangleright c) = (h_1 \triangleright c_1) \otimes (h_2 \triangleright c_2)$;
• $\varepsilon_C(h \triangleright c) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_C(c)$.

Exemple 3.3.2 *Soit H une bialgèbre, alors H est elle - même une coalgèbre de H-module pour l'action régulière à gauche $g \triangleright h$.*

3.4 (C,H)-module relatif de Hopf

Définition 3.4.1 *Soient H une algèbre de Hopf, C une coalgèbre de H-module et 1_C un élément de type-groupe de C. Un $\mathbb{K}$-module M est un (C,H)-module relatif de Hopf à droite à gauche si M est un C-comodule à droite et un H-module à gauche : tel que*

$$(hm)_0 \otimes (hm)_1 = h_1 m_{(0)} \otimes h_2 m_{(1)} \text{ où } \rho_{M,C}(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}.$$

On note $\mathscr{M}^C$ la catégorie des C-comodules à droite. On note maintenant ${}_H\mathscr{M}^C$ la catégorie des (C,H)-modules relatifs de Hopf à droite et à gauche. Les objets sont les (C,H)-modules relatifs de Hopf à droite et à gauche les morphismes sont les applications simultanément C-colinéaires à droite et H-linéaires à gauche.

Définition 3.4.2 *Soient M, $N \in \mathscr{M}^C$. On note ${}_HHom^C(M,N)$, l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires de $f : M \longrightarrow N$ qui sont simultanément H-linéaires à gauche et C-colinéaires à droite, par ailleurs on note par :*

$${}_HHom^C(M,N) = \{ f \in {}_HHom(M,N) \cap Hom^C(M,N) \mid M,\, N \in {}_H\mathscr{M}^C \}.$$

Définition 3.4.3 *Soient H une algèbre de Hopf, C une coalgèbre de H-module. On utilisera la notation de sweedler-heyneman sans la sommation pour la comultiplication et la coaction de H et C. $\forall\ h \in H$ et $c \in C$ on a :*

$$\Delta_H(h) = h_1 \otimes h_2 \text{ et } \Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Si M est un C-comodule à droite on écrit :

$$\rho_{M,C}(m) = m_0 \otimes m_1 \ ,\ m \in M.$$

Définition 3.4.4 *Soient H une algèbre de Hopf et C une coalgèbre de H-module d'élément de type-groupe 1_C.*
L'application suivante $\phi : C \longrightarrow H$ est un antimorphisme de coalgèbres telle que : $\phi(1_C) = 1_H$. Et on a la condition suivante ;

$$\phi(h \cdot c) = \phi(c) S_H^{-1}(h) \quad \text{pour} \quad \text{tous} \quad h \in H, c \in C. \tag{3.3}$$

Lemme 3.4.5 *On considère que la relation* (3.3) *est vérifiée.*
Si g est un élément de type-groupe de C, alors $\phi(g)\cdot g$ est un élément de type-groupe de C et $\phi(\phi(g)\cdot g) = \phi(g)S_H^{-1}(\phi(g)) = 1_H$.

Preuve :

A-t-on $\Delta_C(\phi(g)\cdot g) = (\phi(g)\cdot g)\otimes(\phi(g)\cdot g)$ et $\varepsilon_C(\phi(g)\cdot g) = 1_{\mathbb{K}}$?

$$\begin{aligned}\Delta_C(\phi(g)\cdot g) &= (\phi(g)_1\cdot g_1)\otimes(\phi(g)_2\cdot g_2)\\ &= (\phi(g_2)\cdot g_1)\otimes(\phi(g_1)\cdot g_2)\\ &= (\phi(g)\cdot g)\otimes(\phi(g)\cdot g) \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_C(\phi(g)\cdot g) &= \varepsilon_H(\phi(g))\varepsilon_C(g)\\ &= \varepsilon_H(\phi(g))1_{\mathbb{K}}\\ &= \varepsilon_C(g)\\ &= 1_{\mathbb{K}} \qquad (2)\end{aligned}$$

d'après (1) , (2) *$\phi(g)\cdot g$ est un élément de type-groupe de C.*

par ailleurs $\phi : C \longrightarrow H$ est un antimorphisme de coalgèbres et $\forall\ g\in C$, $\phi(g)\in H$.
On sait que $\phi(h\cdot c) = \phi(c)S_H^{-1}(h)$ et que $\phi(g)$ est un élément de type-groupe de H car

$$\begin{aligned}\Delta_C(\phi(g)) &= \phi(g)_1\otimes\phi(g)_2\\ \Delta_C(\phi(g)) &= \phi(g_2)\otimes\phi(g_1)\\ \Delta_C(\phi(g)) &= \phi(g)\otimes\phi(g)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_H(\phi(g)) = \varepsilon_C(g) = 1_{\mathbb{K}}$$

donc

$$\begin{aligned}\phi(\phi(g)\cdot g) &= \phi(g)S_H^{-1}(\phi(g))\\ &= \phi(g)_1S^{-1}(\phi(g)_2)\\ &= \varepsilon_H(\phi(g))\\ &= 1_H.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Remarque 3.4.6 *$\mathbb{K}$ est un C-comodule pour la coaction définie par : $\rho(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}}\otimes 1_C$.*

Définition 3.4.7 *Soient M, N deux C-comodules, $f\in Hom(M,N)$. On considère les applications suivantes :*

$$\rho : Hom(M,N)\longrightarrow Hom(M,N\otimes C),\ \rho(f)(m) = f(m_0)_0\otimes\phi(m_1)\cdot f(m_0)_1, \forall\ m\in M$$

$$\theta : Hom(M,N)\otimes C\longrightarrow Hom(M,N\otimes C),\ \theta(f\otimes c)(m) = f(m)\otimes c \text{ où } \theta \text{ injective.}$$

*On appelle $HOM(M,N) = \{f \in Hom(M,N) \mid \rho(f) \in Im\theta\}$, **l'ensemble des applications rationnelles**.*

Proposition 3.4.8 *Soient C^* le dual de C et M, $N \in \mathscr{M}^C$. Alors, $Hom(M,N)$ est un C^*-module à gauche avec une action définie par :*

$$(\alpha \cdot f)(m) = \alpha(\phi(m_1) \cdot f(m_0)_1) f(m_0)_0 \quad \alpha \in C^*, f \in Hom(M,N). \tag{3.4}$$

Preuve 2 :

- *A-t-on $(\alpha \cdot \beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$ et $\varepsilon_C \cdot f = f$, $\forall\ \alpha, \beta \in C^*$?*

Soit $m \in M$

$$\begin{aligned}
[(\alpha \cdot \beta) \cdot f](m) &= (\alpha \cdot \beta)[\phi(m_1) \cdot f(m_0)_1] f(m_0)_0 \\
&= \alpha[(\phi(m_1) \cdot f(m_0)_1)_1] \beta[(\phi(m_1) \cdot f(m_0)_1)_2] f(m_0)_0 \\
&= \alpha[\phi(m_1)_1 \cdot f(m_0)_{11}] \beta[\phi(m_1)_2 \cdot f(m_0)_{12}] f(m_0)_0 \\
&= \alpha[\phi(m_{12}) \cdot f(m_0)_1] \beta[\phi(m_{11}) \cdot f(m_0)_2] f(m_0)_0 \\
&= \alpha[\phi(m_2) \cdot f(m_0)_1] \beta[\phi(m_1) f(m_0)_2] f(m_0)_0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha \cdot (\beta \cdot f)](m) &= \alpha[\phi(m_1) \cdot (\beta \cdot f)(m_0)_1](\beta \cdot f)(m_0)_0 \\
&= \alpha[\phi(m_1) \cdot \{\beta[\phi(m_{01}) \cdot f(m_{00})_1] f(m_{00})_0\}_1]\{\beta[\phi(m_{01}) \cdot f(m_{00})_1] f(m_{00})_0]\}_0 \\
&= \alpha[\phi(m_1) \cdot \beta[\phi(m_{01}) \cdot f(m_{00})_1]_1 f(m_{00})_{01}] \beta[\phi(m_{01}) \cdot f(m_{00})_1]_0 f(m_{00})_{00} \\
&= \alpha[\phi(m_1) \cdot 1_{\mathbb{K}} f(m_{00})_{01}] \beta[\phi(m_{01}) \cdot f(m_{00})_1] f(m_{00})_{00} \\
&= \alpha[\phi(m_2) \cdot f(m_0)_1] \beta[\phi(m_1) \cdot f(m_0)_2] f(m_0)_0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_C \cdot f)(m) &= \varepsilon_C[\phi(m_1) \cdot f(m_0)_1] f(m_0)_0 \\
&= \varepsilon_H(\phi(m_1)) \varepsilon_C(f(m_0)_1) f(m_0)_0 \\
&= \varepsilon_C(m_1) f(m_0) \\
&= f(m) \qquad (3)
\end{aligned}$$

d'après (1), (2), (3) *$Hom(M,N)$ est un C^*-module à gauche.*■

Définition 3.4.9 *Considérons les deux applications suivantes :*

$$\omega : Hom(M,N) \longrightarrow Hom(C^*, Hom(M,N)), \quad \omega(f)(c^*) = c^* \cdot f$$

$$\psi : Hom(M,N) \otimes C \longrightarrow Hom(C^*, Hom(M,N)), \quad \psi(f \otimes c)(c^*) = < c^*, c > f$$

*On appelle $Hom(M,N)^{rat} = \{f \in Hom(M,N) \mid \omega(f) \in Im(\psi)\}$, **le sous-module maximal rationnel** du C^*-module $Hom(M,N)$. Considérons l'application injective suivante :*

$$\lambda : Hom(M, N \otimes C) \longrightarrow Hom(C^*, Hom(M,N)), \quad \lambda(g)(c^*)(m) = (id \otimes c^*)(g(m)),$$

on a : $\lambda \circ \rho = \omega$ et $\lambda \circ \theta = \psi$ où ρ et θ sont des applications définies ci-dessus.

Proposition 3.4.10 *Si M et $N \in \mathscr{M}^C$, alors $HOM(M,N) = Hom(M,N)^{rat}$.*

Preuve *:*

• *A-t-on* $HOM(M,N) \subset Hom(M,N)^{rat}$?

Soit $f \in HOM(M,N) \Leftrightarrow \rho(f) \in Im\theta$, *car f est* ***rationnelle****.*

Considérons les applications suivantes :

$\lambda \circ \theta : Hom(M,N) \otimes C \longrightarrow Hom(C^*, Hom(M,N))$

$\lambda \circ \rho : Hom(M,N) \longrightarrow Hom(C^*, Hom(M,N))$ *telle que* $\lambda \circ \theta = \psi$, $\lambda \circ \rho = \omega$

$\theta : Hom(M,N) \otimes C \longrightarrow Hom(M, N \otimes C)$

$\rho(f) \in Im(\theta) \Leftrightarrow \rho(f) \in Hom(M, N \otimes C)$ *donc* $\lambda(\rho(f)) = (\lambda \circ \rho)(f) \in Im(\lambda \circ \theta)$

or $\lambda(\rho(f)) = \omega(f)$ *et* $Im(\lambda \circ \theta) = Im\psi$ *donc* $\omega(f) \in Im\psi \Rightarrow f \in Hom(M,N)^{rat}$.

D'où $HOM(M,N) \subset Hom(M,N)^{rat}$ (1)

• *A-t-on* $Hom(M,N)^{rat} \subset HOM(M,N)$?

Soit $f \in Hom(M,N)^{rat} \Leftrightarrow \omega(f) \in Im\psi \Leftrightarrow (\lambda \circ \rho)(f) \in Im(\lambda \circ \theta)$ *puisque* λ *est* ***injective****,*

alors $\rho(f) \in Im\theta \Rightarrow f \in HOM(M,N)$,

d'où $Hom(M,N)^{rat} \subset HOM(M,N)$. (2)

D'aprés (1), (2) $HOM(M,N) = Hom(M,N)^{rat}$. ■

Définition 3.4.11 *D'aprés la proposition ci-dessus* $HOM(M,N)$ *est un C-comodule à droite et pour tout* $f \in Hom(M,N)$,

$$\rho(f) = f_0 \otimes f_1 \Leftrightarrow f_0(m) \otimes f_1 = f(m_0)_0 \otimes \phi(m_1) \cdot f(m_0)_1, m \in M. \tag{3.5}$$

Définition 3.4.12 *Pour tout* $M \in \mathscr{M}^C$, *on appelle* $M^{coC} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1_C\}$,

l'ensemble des éléments C***-coinvariants de*** M.

Proposition 3.4.13 *Soit* $M \in \mathscr{M}^C$ *et* $\overline{M}$ *un* $\mathbb{K}$*- espace vectoriel on pose* $M = \overline{M}$, *alors l'application suivante*

$$\rho_{\overline{M}} : \overline{M} \longrightarrow \overline{M} \otimes C \tag{3.6}$$

est un C-comodule à droite pour la coaction définie par :

$$\rho_{\overline{M}}(m) = m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C, m \in M = \overline{M}. \tag{3.7}$$

Preuve :

$\overline{M}$ est un $\mathbb{K}$-module et on note l'application $\mathbb{K}$-linéaire suivante :

$$\begin{aligned}\rho_{\overline{M}}(m) :\ & \overline{M} \longrightarrow \overline{M} \otimes C \\ & m \longmapsto m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)).1_C, m \in M = \overline{M}.\end{aligned}$$

- *A-t-on* $(\rho_{\overline{M}} \otimes id_C) \circ \rho_{\overline{M}} = (id_{\overline{M}} \otimes \Delta_C) \circ \rho_M$ *et* $(id_{\overline{M}} \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_M = id_{\overline{M}}$?

Soit $m \in \overline{M}$.

$$\begin{aligned}[(\rho_{\overline{M}} \otimes id_C) \circ \rho_{\overline{M}}](m) &= (\rho_{\overline{M}} \otimes id_C)(\rho_{\overline{M}}(m)) \\ &= (\rho_{\overline{M}} \otimes id_C)(m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C) \\ &= \rho_{\overline{M}}(m_0) \otimes id_C(S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C) \\ &= m_{00} \otimes S_H(\phi(m_{01})) \cdot 1_C \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C \\ &= m_0 \otimes S_H(\phi(m_{11})) \cdot 1_C \otimes S_H(\phi(m_{12})) \cdot 1_C \\ &= m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C \otimes S_H(\phi(m_2)) \cdot 1_C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(id_{\overline{M}} \otimes \Delta_C) \circ \rho_{\overline{M}}](m) &= (id_{\overline{M}} \otimes \Delta_C)(\rho_{\overline{M}}(m)) \\ &= (id_{\overline{M}} \otimes \Delta_C)(m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C) \\ &= (id_{\overline{M}}(m_0) \otimes \Delta_C(S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C) \\ &= m_{00} \otimes (S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C)_1 \otimes (S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C)_2 \\ &= m_0 \otimes S_H(\phi(m_1))_1 \cdot 1_C \otimes S_H(\phi(m_1))_2 \cdot 1_C \\ &= m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)_2) \cdot 1_C \otimes S_H(\phi(m_1)_1) \cdot 1_C \\ &= m_0 \otimes S_H(\phi(m_{11})) \cdot 1_C \otimes S_H(\phi(m_{12})) \cdot 1_C \\ &= m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C \otimes S_H(\phi(m_2)) \cdot 1_C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(id_{\overline{M}}) \otimes \varepsilon_C) \circ \rho_{\overline{M}}](m) &= (id_{\overline{M}} \otimes \varepsilon_C)(\rho_{\overline{M}}(m)) \\ &= (id_{\overline{M}} \otimes \varepsilon_C)(\rho_{\overline{M}}(m)) \\ &= (id_{\overline{M}} \otimes \varepsilon_C)(m_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C) \\ &= id_{\overline{M}}(m_0) \otimes \varepsilon_C(S_H(\phi(m_1) \cdot 1_C)) \\ &= m_0 \otimes \varepsilon_H(S_H(\phi(m_1))\varepsilon_C(1_C) \\ &= m_0 \otimes \varepsilon_H(\phi(m_1))1_{\mathbb{K}} \\ &= m_0 \otimes \varepsilon_C(m_1) \\ &= m_0\varepsilon_C(m_1) \\ &= m.\end{aligned}$$

Donc $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$ est un C-comodule à droite pour la coaction ci-dessus. ■

Définition 3.4.14 *Soit $\overline{\mathscr{M}}^C$ une sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}^C$ satisfaisant $\rho_{\overline{M}} = \rho_M$. Alors on a :*

$$\overline{\mathscr{M}}^C = \{M \in \mathscr{M}^C \ \mid\ \overline{M} = M\}, \tag{3.8}$$

si la condition (3.3) est vérifiée :

$$\overline{\mathscr{M}}^C = \{\overline{M} \ \mid\ M \in \mathscr{M}^C\}. \tag{3.9}$$

Lemme 3.4.15 *Pour tous M, $N \in \mathscr{M}^C$, on a : $HOM(M,N)^{coC} = Hom^C(\overline{M}, N)$.*

En particulier, si $M \in \overline{\mathscr{M}}^C$, alors $HOM(M,N)^{coC} = Hom^C(M,N)$.

Preuve *:*

• *A-t-on* $Hom^C(M,N) \subset HOM(M,N)^{coC}$ *?*

Soit $f \in Hom(M,N)$. *Si* $f \in Hom^C(\overline{M},N)$ *on a :*

$$\begin{aligned}
f(m)_0 \otimes f(m)_1 &= f(m_0) \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C \\
&= f(m_0)_0 \otimes \phi(m_1) \cdot f(m_0)_1 \\
&= f(m_{00}) \otimes \phi(m_{11}) \cdot [S_H(\phi(m_{12}) \cdot 1_C] \\
&= f(m_0) \otimes \phi(m_{11}) \cdot [S_H(\phi(m_{12}) \cdot 1_C] \\
&= f(m_0) \otimes [\phi(m_1)_1 S_H(\phi(m_1)_2)] \cdot 1_C \\
&= f(m_0) \otimes [\varepsilon_H(\phi(m_1))1_H] \cdot 1_C \\
&= f(m_0) \otimes \varepsilon_C(m_1)1_C \\
&= f(m_0 \varepsilon_C(m_1)) \otimes 1_C \\
&= f(m) \otimes 1_C \qquad (1)
\end{aligned}$$

• *A-t-on* $HOM(M,N)^{coC} \subset Hom^C(M,N)$ *?*

Soit $f \in HOM(M,N)^{coC}$, *alors* $\rho(f) = f \otimes 1_C$. *Ainsi pour tout* $m \in \overline{M} = M$,

$$\begin{aligned}
\rho_N(f(m)) &= f(m)_0 \otimes f(m)_1 \\
&= f(m_0 \varepsilon_C(m_1))_0 \otimes f(m)_1 \\
&= f(m_0)_0 \otimes \varepsilon_C(m_1) \cdot f(m_0)_1 \\
&= f(m_0)_0 \otimes \varepsilon_H(\phi(m_1)1_H \cdot f(m_0)_1 \\
&= f(m_0)_0 \otimes [S_H(\phi(m_1)_1)\phi(m_1)_2] \cdot f(m_0)_1 \\
&= f(m_0)_0 \otimes [S_H(\phi(m_{12}))\phi(m_{11})] \cdot f(m_0)_1 \\
&= f(m_0) \otimes [S_H(\phi(m_2))\phi(m_1)] \cdot f(m_0)_1 \\
&= f(m_0)_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot [\phi(m_1) \cdot f(m_0)_1] \\
&= f(m_0) \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot 1_C \\
&= (f \otimes id)\rho_{\overline{M}}(m) \qquad (2).
\end{aligned}$$

D'après (1) , (2) $HOM(M,N)^{coC} = Hom^C(M,N)$. ■

Proposition 3.4.16 *Soient* $(M,\rho_M), (N,\rho_N)$ *deux* C*-comodules à droite.*
Alors $(M \otimes N, \rho_{M\otimes N})$ *est un* C*-comodule à droite pour la coaction définie par :*

$\rho_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_0 \otimes n_0 \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot n_1 \ \forall\ m \in M$ *et* $n \in N$.

Preuve :

• *A-t-on* $\rho_{M\otimes N}((m \otimes n)_0) \otimes ((m \otimes n)_1) = (m \otimes n)_0 \otimes \Delta_C((m \otimes n)_1)$?
et $(m \otimes n)_0 \varepsilon_C((m \otimes n)_1) = m \otimes n$

Soient $m \in M$, $n \in N$.

$$\begin{aligned}
\rho_{M\otimes N}((m\otimes n)_0)\otimes((m\otimes n)_1) &= \rho_{M\otimes N}(m_0\otimes n_0)\otimes S_H(\phi(m_1))\cdot n_1\\
&= m_{00}\otimes n_{00}\otimes S_H(\phi(m_{01}))\cdot n_{01}\otimes S_H(\phi(m_1))\cdot n_1\\
&= m_0\otimes n_0\otimes S_H(\phi(m_1))\cdot n_1\otimes S_H(\phi(m_2))\cdot n_2\\
&= m_0\otimes n_0\otimes S_H(\phi(m_{11}))\cdot n_{11}\otimes S_H(\phi(m_{12})\cdot n_{12}\\
&= m_0\otimes n_0\otimes S_H(\phi(m_1)_2)\cdot n_{11}\otimes S_H(\phi(m_1)_1)\\
&= m_0\otimes n_0\otimes S_H(\phi(m_1))_1\cdot n_{11}\otimes S_H(\phi(m_1))_2\cdot n_{12}\\
&= m_0\otimes n_0\otimes [S_H(\phi(m_1)\cdot n_1]_1\otimes [S_H(\phi(m_1)\cdot n_1]_2\\
&= m_0\otimes n_0\otimes [(m\otimes n)_1]_1\otimes [(m\otimes n)_1]_2\\
&= (m\otimes n)_0\otimes \Delta_C((m\otimes n)_1) \qquad (1)
\end{aligned}$$

- *A-t-on* $(m\otimes n)_0\varepsilon_C((m\otimes n)_1) = m\otimes n$?

$$\begin{aligned}
&= (m_0\otimes n_0)\varepsilon_H[S_H(\phi(m_1))\cdot n_1]\\
&= m_0\otimes n_0\varepsilon_H(S_H(\phi(m_1))\varepsilon_C(n_1)\\
&= m_0\varepsilon_H(S_H(\phi(m_1))\otimes n_0\varepsilon(n_1)\\
&= m_0\varepsilon_C(m_1)\otimes n\\
&= m\otimes n \qquad (2).
\end{aligned}$$

D'après (1), (2) $(\rho_{M\otimes N}, M\otimes N)$ *est un C-comodule à droite pour la coaction définie ci-dessus.*■

Définition 3.4.17 *Soient* M, N, $W \in \mathscr{M}^C$, *l'application naturelle :*

$$\Omega : \quad \begin{array}{l}(M\otimes N)\otimes W \longrightarrow M\otimes (N\otimes W)\\ (m\otimes n)\otimes w \longmapsto m\otimes(n\otimes w).\end{array} \tag{3.10}$$

est un isomorphisme de C-comodules si la condition (3.3) *est vérifiée.*

Définition 3.4.18 *Soient* M, $N \in \mathscr{M}^C$, *on dit que C a la propriété de symétrie si* $M\otimes N$ *et* $N\otimes M$ *sont des C-comodules isomorphes.*

Proposition 3.4.19 *Soient* M, N, $P \in \mathscr{M}^C$. *On considère l'application suivante :*

$$\varphi : Hom(N\otimes M, P) \longrightarrow Hom(M, Hom(N,P))\ ,\ \varphi(f)(m)(n) = f(n\otimes m).$$

(1) *Si* $f \in Hom(N\otimes M, P)$ *est C-colinéaire, alors* $\varphi(f)(m) \in HOM(N,P)$; $\forall\ m\in M$. *Par ailleurs,* $\varphi(f)$ *est C-colinéaire.*
(2) φ *induit un isomorphisme :*
$$\varphi : Hom^C(N\otimes M, P) \longrightarrow Hom^C(M, HOM(N,P)).$$
(3) *Si C a la propriété de symétrie, alors* φ *induit un isomorphisme*
$$\psi : Hom^C(M\otimes N, P) \longrightarrow Hom^C(M, HOM(N,P)).$$

Preuve :
(1) Soit $f\in Hom(N\otimes M,P)$. A-t-on $\rho(\varphi(f))(m))(n) = f(n\otimes m_0)\otimes m_1$, $m\in M$?
En effet $\forall\ n\in N$ on a :

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi(f)(m))(n) &= (\varphi(f)(m)(n_0))_0 \otimes \phi(n_1) \cdot (\varphi(f)(m)(n_0))_1 \\
&= f(n_0 \otimes m)_0 \otimes \phi(n_1) \cdot f(n_0 \otimes m)_1 \\
&= f(n_0 \otimes m_0) \otimes \phi(n_2) \cdot [S_H(\phi(n_1)) \cdot m_1] \\
&= f(n_0 \otimes m_0) \otimes [\phi(n_2) S_H(\phi(n_1)) \cdot m_1] \\
&= f(n_0 \otimes m_0) \otimes [\phi(n_{12}) S_H(\phi(n_{11}))] \cdot m_1 \\
&= f(n_0 \otimes m_0) \otimes [\phi(n_1)_1 S_H(\phi(n_1)_2] \cdot m_1 \\
&= f(n_0 \otimes m_0) \otimes [\varepsilon_H(\phi(n_1)) 1_H] \cdot m_1 \\
&= f(n_0 \otimes m_0) \otimes \varepsilon_C(n_1) \cdot m_1 \\
&= f(n_0 \varepsilon_C(n_1) \otimes m_0) \otimes m_1 \\
&= f(n \otimes m_0) \otimes m_1
\end{aligned}$$

donc $\varphi(f)(m) \in HOM(N, P)$.

Par ailleurs $\rho(\varphi(f)(m))(n) = f(n \otimes m_0) \otimes m_1 = \varphi(f)(m_0) \otimes m_1$
ce qui montre que $\varphi(f)$ est C-colinéaire.

(2) Soit $f \in HOM(N \otimes M, P)$, supposons que $\varphi(f) \in Hom^C(M, HOM(N, P))$.
Soint $n \in N$ et $m \in M$

$$\begin{aligned}
\rho(f(n \otimes m)) &= \rho(\varphi(f)(m)(n)) \\
&= \rho(\varphi(f)(m)(n_0)) \varepsilon_C(n_1)) \\
&= (\varphi(f)(m)(n_0))_0 \otimes (\varphi(f)(m)(n_0))_1 \varepsilon_C(n_1) \\
&= (\varphi(f)(m)(n_0))_0 \otimes \varepsilon_C(n_1)[\varphi(f)(m)(n_0)]_1 \\
&= (\varphi(f)(m)(n_0))_0 \otimes \varepsilon_H(\phi(n_1)) 1_H [\varphi(f)(m)(n_0)]_1 \\
&= (\varphi(f)(m)(n_0))_0 \otimes (S_H(\phi(n_1)_1) \phi(n_1)_2 \cdot \varphi(f)(m)(n_0)) \\
&= (\varphi(f)(m)(n_0))_0 \otimes (S_H(\phi(n_{12}) \phi(n_{11}) \cdot \varphi(f)(m)(n_0)) \\
&= (\varphi(f)(m)(n_0))_0 \otimes S_H(\phi(n_2)) \cdot [\phi(n_1) \cdot \varphi(f)(m)(n_0)] \\
&= \varphi(f)(m)_0(n_{00}) \otimes S_H(\phi(n_1)) \cdot (\varphi(f)(m))_1 \\
&= \varphi(f)(m_0)(n_0) \otimes S_H(\phi(n_1)) \cdot m_1 \\
&= f(n_0 \otimes m_0) \otimes S_H(\phi(n_1)) \cdot m_1 \\
&= f((n \otimes m)_0) \otimes (n \otimes m)_1 \\
&= f(n \otimes m)_0 \otimes f(n \otimes m)_1
\end{aligned}$$

d'où f est C-colinéaire.
(3) D'après la propriété du symétrie il existe un isomorphisme C-colinéaire
$\tau : N \otimes M \longrightarrow M \otimes N$. Donc l'application suivante :
$Hom^C(\tau, P) : Hom^C(M \otimes N, P) \longrightarrow Hom^C(N \otimes M, P)$ est un isomorphisme donc
$\psi = \varphi \circ Hom^C(\tau, P)$ est un isomorphisme.$\blacksquare$

Définition 3.4.20 *Si $M \in \mathscr{M}^C$ est de dimension finie, et alors*
$HOM(M, N) = Hom(M, N)$.

Définition 3.4.21 *Soient T et S deux C-comodules, avec T de dimension finie. Alors l'application* $\quad \delta : T^* \otimes S \longrightarrow Hom(T, S)$
définie par $\delta(f \otimes s)(t) = \delta(t)s \ \forall \ t \in T \ s \in S$ est un isomorphisme.

Corollaire 3.4.22 *Soient M, $V \in \mathscr{M}^C$, avec V de dimension finie et M* ***projectif*** *dans $\mathscr{M}^C$. Alors $V \otimes M$ est* ***projectif*** *dans $\mathscr{M}^C$.*

Preuve

Montrons que $V \otimes M$ est projectif dans $\mathscr{M}^C$.

• *$Hom^C(V \otimes M, -)$ est -il exact ?*

On sait que $V \in \mathscr{M}^C$ est de dimension finie, alors $HOM(V, P) = Hom(V, P)$, $\forall\ P \in \mathscr{M}^C$,

donc l'application suivante : $V^* \otimes P \longrightarrow HOM(V, P) = Hom(V, P)$ est

un isomorphisme de C-comodules du coup $Hom(V, -) : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}^C$ est exact.

Par ailleurs M est projectif dans $\mathscr{M}^C$ donc, $Hom^C(M, -) : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}$ est exact.

On considère maintenant : $Hom(V, -) : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}^C$ et $Hom^C(M, -) : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}$.

Alors, $Hom^C(M, -) \circ Hom(V, -) : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}$ est exact donc, $\forall\ P \in \mathscr{M}^C$

$(Hom^C(M, -) \circ Hom(V, -))(P) = Hom^C(M, Hom(V, P)) = Hom^C(M, HOM(V, P))$.

D'après (3.4.19) (2) $\varphi : Hom^C(N \otimes M, P) \longrightarrow Hom^C(M, HOM(N, P))$ est un

isomorphisme donc $Hom^C(M, HOM(V, P)) \cong Hom^C(V \otimes M, P)$ et dans ce cas

$Hom^C(V \otimes M, -) : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}$ est exact d'où $V \otimes M$ est projectif dans $\mathscr{M}^C$.$\blacksquare$

Proposition 3.4.23 *Soient M, $N \in \mathscr{M}^C$ et $f \in Hom(M, N)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in HOM(M, N)$;

(ii) Il existe un C-comodule V de dimension finie , un élément v dans V et une application C-colinéaire $F : M \otimes V \longrightarrow N$ tels que : $F(m \otimes v) = f(m)$, $\forall\ m \in M$.

Preuve : A-t-on $(ii) \Rightarrow (i)$?

Puisque F est C-colinéaire alors on a :

$$\begin{aligned}
\rho(f)(m) &= f(m_0)_0 \otimes \phi(m_1)\cdot f(m_0)_1 \\
&= F(m_0\otimes v)_0 \otimes \phi(m_{11})\cdot F(m_0\otimes v)_1 \\
&= F(m_{00}\otimes v_0)\otimes \phi(m_2)\cdot [S_H(\phi(m_{01}))\cdot v_1] \\
&= F(m_0\otimes v_0)\otimes \phi(m_2)\cdot [S_H(\phi(m_1))\cdot v_1] \\
&= F(m_0\otimes v_0)\otimes [\phi(m_2)S_H(\phi(m_1))]\cdot v_1 \\
&= F(m_0\otimes v_0)\otimes [\phi(m_{12})S_H(\phi(m_{11})]\cdot v_1 \\
&= F(m_0\otimes v_0)\otimes [\phi(m_1)_1 S_H(\phi(m_1)_2)]\cdot v_1 \\
&= F(m_0\otimes v_0)\otimes [\varepsilon_H(\phi(m_1))1_H]\cdot v_1 \\
&= F(m_0\otimes v_0)\otimes \varepsilon_C(m_1)\cdot v_1 \\
&= F(m_0\varepsilon_C(m_1)\otimes v_0)\cdot v_1 \\
&= F(m\otimes v_0)\otimes v_1 \quad \text{d'où } f\in HOM(M,N).
\end{aligned}$$

A-t-on $(i)\Rightarrow(ii)$?

Comme $HOM(M,N)$ est un C-comodule à droite, d'après le théorème fondamental des comodules dans [4] Théorème, 2.1.7. Pour tout $f\in HOM(M,N)$ il existe un sous-comodule V contenant f et on note l'application suivante $F: M\otimes V \longrightarrow N$ définie par $F(m\otimes v)=v(m)$. Donc notre application F existe et il est clair que $F(m\otimes f)=f(m)$.
Montrons maintenant que F est C-colinéaire. En utilisant le fait que $v\in V$ est rationnel , il advient que

$$\begin{aligned}
F(m_0\otimes v_0)\otimes S_H(\phi(m_1))\cdot v_1 &= v_0(m_0)\otimes S_H(\phi(m_1))\cdot v_1 \\
&= v(m_0)_0\otimes S_H(\phi(m_2))\cdot v_1 \\
&= v(m_0)_0\otimes S_H(\phi(m_2))\cdot[\phi(m_1)\cdot f(m_0)_1] \\
&= v(m_0)_0\otimes S_H(\phi(m_2))\cdot[\phi(m_1)\cdot v(m_0)_1] \\
&= v(m_0)_0\otimes S_H(\phi(m_{12}))\cdot[\phi(m_{11})\cdot v(m_0)_1] \\
&= v(m_0)_0\otimes [S_H(\phi(m_{12})\phi(m_{11})]\cdot v(m_0)_1 \\
&= v(m_0)_0\otimes [S_H(\phi(m_1)_1)\phi(m_1)_2]\cdot v(m_0)_1 \\
&= v(m_0)_0\otimes [\varepsilon_H(\phi(m_1))1_H]\cdot v(m_0)_1 \\
&= v(m_0)_0\otimes \varepsilon_C(m_1)\cdot v(m_0)_1 \\
&= \varepsilon_C(m_1)(v(m_0)_0\otimes v(m_0)_1) \\
&= \varepsilon_C(m_1)\rho(v(m_0)) \\
&= \rho(\varepsilon_C(m_1)v(m_0)) \\
&= \rho(v(\varepsilon_C(m_1)m_0)) \\
&= v(m)_0\otimes v(m)_1 = F(m\otimes v)_0\otimes F(m\otimes v)_1
\end{aligned}$$

donc F est C-colinéaire.$\blacksquare$

Corollaire 3.4.24 *On suppose que (3.3) est vérifée. Soient M, N, $P\in\mathscr{M}^C$, $g\in HOM(M,N)$ et $f\in HOM(N,P)$ rationnelles. Alors, $f\circ g\in HOM(M,P)$.*

Preuve :

D'après (3.4.23) il existe V, $W\in\mathscr{M}^C$ de dimension finies, $v\in V$ $w\in W$ et deux applications C-colinéaires

$$G: M\otimes V\longrightarrow N\,;\; F: N\otimes W\longrightarrow P$$

telles que : $G(m \otimes v) = g(m)$, $F(n \otimes w) = f(n)$.

On a : $G : (M \otimes V) \otimes W \longrightarrow N \otimes W$ et $F : N \otimes W \longrightarrow P$ donc la composition donne :

$$K = F \circ G : (M \otimes V) \otimes W \longrightarrow P.$$

D'après la condition (3.3), l'appliction suivante :

$$\Omega : M \otimes (V \otimes W) \longrightarrow (M \otimes V) \otimes W$$

est un isomorphisme de C-comodules. Donc $M \otimes (V \otimes W) \cong (M \otimes V) \otimes W$.

Ainsi l'application $K : M \otimes (V \otimes W) \cong (M \otimes V) \otimes W \longrightarrow P$, est C-colinéaire

donc $\forall\ m \in M,\ s \in V,\ t \in W$

$K(m \otimes (s \otimes t)) = F(G(m \otimes s) \otimes t) = f(G(m \otimes s)) = f(g(m)) = (f \circ g)(m)$

d'où $f \circ g \in HOM(M, P)$.■

Lemme 3.4.25 *Soient M, N, $T \in \mathscr{M}^C$. Si $f : M \longrightarrow N$ est un C-comodule à droite, alors les applications suivantes :*

$$f^* = Hom(f, T) : Hom(N, T) \longrightarrow Hom(M, T), \tag{3.11}$$

$$f_* = Hom(T, f) : Hom(T, M) \longrightarrow Hom(T, N) \tag{3.12}$$

sont des morphismes de C^*-modules à gauche.

Preuve :

• **Montrons que f^* est un morphisme de C^*-modules à gauche.**

Soient $\alpha \in C^*$, $g \in Hom(N, T)$ et $m \in M$ on a :

$$\begin{aligned}
(f^*(\alpha \cdot g))(m) &= ((\alpha \cdot g) \circ f)(m) \\
&= (\alpha \cdot g)(f(m)) \\
&= \alpha[\phi(f(m)_1) \cdot g(f(m)_0)_1]g(f(m)_0)_0 \\
&= \alpha[\phi(m_1) \cdot g(f(m_0))_1]g(f(m_0))_0 \\
&= \alpha[\phi(m_1) \cdot (f^*(g)(m_0))_1](f^*(g)(m_0))_0 \\
&= (\alpha \cdot f^*(g))(m).
\end{aligned}$$

Donc f^* est un morphisme de C^*-modules à gauche.

• **Montrons que f_* est un morphisme de C^*-modules à gauche.**

Soient $\alpha \in C^*$, $g \in Hom(T, M)$ et $m \in M$ on a :

$$\begin{aligned}
f_*(\alpha\cdot g)(m) &= (f\circ(\alpha\cdot g))(m)\\
&= f(\alpha\cdot g)(m)\\
&= f(\alpha(\phi(m_1)\cdot g(m_0)_1)g(m_0)_0)\\
&= f(\alpha(\phi(g(m)_1)(g(m)_0)_1)\cdot(g(m)_0)_0)\\
&= \alpha[\phi(g(m)_1)(g(m)_0)_1]f((g(m)_0)_0)\\
&= \alpha[(\phi(g(m)_1)f(g(m)_0)_1]f(g(m)_0)_0\\
&= \alpha[\phi(m_1)\cdot f(g(m_0))_1]f(g(m)_0)_0\\
&= \alpha[\phi(m_1)(f\circ g)(m_0))_1(f\circ g)(m_0)_0]\\
&= (\alpha\cdot f_*(g))(m).
\end{aligned}$$

Donc f_* est un morphisme de C^*-modules à gauche.■

Corollaire 3.4.26 *Pour tout $T\in\mathscr{M}^C$, $HOM(-,T)$ et $HOM(T,-)$ sont des endofoncteurs exacts à gauche de $\mathscr{M}^C$.*

Preuve :

• ***Montrons que*** $HOM(-,T)$ ***est un endofoncteur exact à gauche***.

Soit $T\in\mathscr{M}^C$.

A-t-on $0\longrightarrow HOM(P,T)\xrightarrow{\pi^*}HOM(N,T)\xrightarrow{i^*}HOM(M,T)$ *exacte dans* $\mathscr{M}^C$?

Soit $0\longrightarrow M\xrightarrow{i}N\xrightarrow{\pi}P\longrightarrow 0$ *une suite exacte dans* $\mathscr{M}^C$*, donc*

$0\longrightarrow Hom(P,T)\xrightarrow{\pi^*}Hom(N,T)\xrightarrow{i^*}Hom(M,T)$ *est une suite exacte de C^*-modules à gauche, alors on a :*

$\pi^*(Hom(P,T)^{rat})\subseteq Hom(N,T)^{rat}$, $i^*(Hom(N,T)^{rat})\subseteq Hom(M,T)^{rat}$.

Puisque π^* est un ***monomorphisme*** *de C^*-modules, alors*

$$\begin{aligned}
\pi^*(Hom(P,T)^{rat}) &= (\pi^*(Hom(P,T)))^{rat}\\
&= \pi^*(Hom(P,T))\cap Hom(N,T)^{rat}\\
&= im(\pi^*)\cap Hom(N,T)^{rat}\\
&= ker(i^*)\cap Hom(N,T)^{rat}\\
&= ker(i^*: Hom(N,T)^{rat}\longrightarrow Hom(M,T)^{rat})
\end{aligned}$$

donc $im(\pi^*)=ker(i^*)$, alors d'après (3.4.10)

$0\longrightarrow HOM(P,T)\xrightarrow{\pi^*}HOM(N,T)\xrightarrow{i^*}HOM(M,T)$ *est exact d'où $HOM(-,T)$ est un endofoncteur exact à gauche.*

• ***Montrons que*** $HOM(T,-)$ ***est un endofoncteur exact à gauche***.

Soit $T \in \mathscr{M}^C$.

A-t-on $0 \longrightarrow HOM(T,M) \xrightarrow{\pi_*} HOM(T,N) \xrightarrow{i_*} HOM(T,P)$ *exacte dans* $\mathscr{M}^C$?

Soit $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$ *une suite exacte dans* $\mathscr{M}^C$, *donc*

$0 \longrightarrow Hom(T,M) \xrightarrow{\pi_*} Hom(T,N) \xrightarrow{i_*} Hom(T,P)$ *est une suite exacte de* C^**-modules à gauche, alors on a :*

$\pi_*(Hom(T,M)^{rat}) \subseteq Hom(T,N)^{rat}$, $i_*(Hom(T,N)^{rat}) \subseteq Hom(T,P)^{rat}$.

Puisque π_* *est un* ***monomorphisme*** *de* C^**-modules alors*

$$\begin{aligned}
\pi_*(Hom(T,M)^{rat}) &= (\pi_*(Hom(T,M)))^{rat} \\
&= \pi_*(Hom(T,M)) \cap Hom(T,N)^{rat} \\
&= im(\pi_*) \cap Hom(T,N)^{rat} \\
&= ker(i_*) \cap Hom(T,N)^{rat} \\
&= ker(i_* : Hom(T,N)^{rat} \longrightarrow Hom(T,P)^{rat})
\end{aligned}$$

donc $im(\pi_*) = ker(i_*)$, *alors d'après* (3.4.10) *la suite suivante est exacte*

$0 \longrightarrow HOM(T,P) \xrightarrow{\pi_*} HOM(T,N) \xrightarrow{i_*} HOM(T,M)$ *d'où* $HOM(-,T)$ *est un endofoncteur exact à gauche.*■

Proposition 3.4.27 *Soit* I *un objet injectif dans* $\mathscr{M}^C$.

(1) $HOM(N,I)$ *est* ***injectif*** *dans* $\mathscr{M}^C$ *pour tout* $N \in \mathscr{M}^C$
(2) $HOM(-,I)$ *est un* ***endofoncteur*** *exact de* $\mathscr{M}^C$.

Preuve :

(1) *Montrons que* $HOM(N,I)$ *est* ***injectif*** *dans* $\mathscr{M}^C$ *pour tout* $N \in \mathscr{M}^C$.

- *La suite suivante est-elle exacte ?*

$0 \longrightarrow Hom^C(Q, HOM(N,I)) \longrightarrow Hom^C(P, HOM(N,I)) \longrightarrow Hom^C(N, HOM(N,I)) \longrightarrow 0.$

Pour tous M, P, Q *dans* $\mathscr{M}^C$, $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ *est exacte dans* $\mathscr{M}^C$ *donc*

$0 \longrightarrow N \otimes M \longrightarrow N \otimes P \longrightarrow N \otimes Q \longrightarrow 0$ *est exacte dans* $\mathscr{M}^C$, *par conséquent*

$0 \longrightarrow Hom^C(N \otimes Q, I) \longrightarrow Hom^C(N \otimes P, I) \longrightarrow Hom^C(N \otimes M, I) \longrightarrow 0$ *est exacte*

pour tout I *dans* $\mathscr{M}^C$. *D'après* (3.4.19)(2) $\varphi : Hom^C(N \otimes M, P) \longrightarrow Hom^C(M, HOM(N,P))$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-modules donc*

$0 \longrightarrow Hom^C(Q, HOM(N,I)) \longrightarrow Hom^C(P, HOM(N,I)) \longrightarrow Hom^C(M, HOM(N,I)) \longrightarrow 0$

est exacte dans $\mathscr{M}$ *d'où* $HOM(N,I)$ *est injectif.*

(2) *Montrons que* $HOM(-,I)$ *est un* ***endofoncteur*** *exact de* $\mathscr{M}^C$.

Soit $\quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0 \quad$ *une suite exacte dans* $\mathscr{M}^C$.

- *La suite suivante est-elle exacte dans* $\mathscr{M}^C$ *?*

$0 \longrightarrow HOM(P,I) \xrightarrow{i^*} HOM(N,I) \xrightarrow{\pi^*} HOM(M,I) \longrightarrow 0.$

D'après (3.4.26) $0 \longrightarrow HOM(P,I) \xrightarrow{i^*} HOM(N,I) \xrightarrow{\pi^*} HOM(M,I)$ *est exacte à gauche.*

- *Montrons maintenant que* $HOM(N,I) \xrightarrow{\pi^*} HOM(M,I)$ *est* ***surjective***

Soit $f \in HOM(M,I)$.

Comme $HOM(M,I)$ *est un* C*-comodule à droite, donc il existe un sous-comodule* V *de dimension finie contenant* f.

L'application $i \otimes id_V : M \otimes V \longrightarrow N \otimes V$ *est un monomorphisme de* C*-comodules à droite.*

D'après (3.4.23) (1) $\Rightarrow$ (2), *il existe une application* C*-colinéaire :*

$F : M \otimes V \longrightarrow I$ telle que $F(m \otimes v) = v(m)$, $\forall\ m \in M$, $v \in V$.

Puisque I est injectif dans $\mathscr{M}^C$, alors il existe une application C-colinéaire

$G : N \otimes V \longrightarrow I$ telle que : $G \circ (i \otimes id_V) = F$. D'après ce qui découle de (3.4.23),

l'application $g : N \longrightarrow I$, $g(n) = G(n \otimes f)$, $n \in N$ est rationnelle.

Donc $\forall\ m \in M$,

$f(m) = F(m \otimes f) = (G \circ (i \otimes id_V))(m \otimes f) = G(i(m) \otimes f) = g(i(m)) = (g \circ i)(m) = \pi^*(m)$,

ce qui montre que $HOM(N, I) \xrightarrow{\pi^*} HOM(M, I)$ est ***surjective*** *donc*

$0 \longrightarrow HOM(P, I) \xrightarrow{i^*} HOM(N, I) \xrightarrow{\pi^*} HOM(M, I) \longrightarrow 0$ est exacte dans $\mathscr{M}^C$

par conséquent $HOM(-, I)$ est un endofoncteur exact .■

Définition 3.4.28 *On définit les foncteurs dérivés suivants :*

(a) $R^p a(coC, -)$: *les foncteurs dérivés droits du foncteur co-invariant*

$$(-)^{coC} \quad : \quad \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}. \tag{3.13}$$

(b) $EXT^p(M, -)$: *les foncteurs dérivés droits du foncteur*

$$HOM(M, -) \quad : \quad \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}^C \tag{3.14}$$

(c) $Ext^{C^p}(-, -)$: *les foncteurs dérivés droits du foncteur*

$$Hom(-, -) \quad : \quad \mathscr{M}^C \times \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}. \tag{3.15}$$

Remarque 3.4.29 *Si M et N sont des C-comodules à droite, alors $EXT^p(M, N)$ est un C-comodule à droite.*

3.4.1 Suite spectrale de Grothendieck

Théorème :

Soient $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs covariants tels que : F envoie les objets injectifs de $\mathcal{A}$ dans les objets injectifs de $\mathcal{B}$. Alors pour tout $N \in \mathcal{A}$,
on a la relation suivante :

$$(R^p G \circ R^q F)(N) \rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(N)$$

où $R^p G$ désigne les foncteurs dérivés droits de G et $R^q F$ les foncteurs dérivés droits de F .

Proposition 3.4.30 *Soient M, $N \in \mathscr{M}^C$.*

(1) *On a la suite spectrale suivante :*

$$R^p a(coC, EXT^q(M,N)) \to Ext^{C^{p+q}}(\overline{M}, N) \quad \textit{avec } p \geq 0\ ,\ q \geq 0.$$

(2) *Si M est de dimension finie, alors*

$$R^p a(coC, M^* \otimes N) = Ext^{C^p}(\overline{M}, N), \textit{ pour tout } p \geq 0.$$

Preuve :

(1) On considère les foncteurs covariants suivants :

$$HOM(M,-) : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}^C \quad \text{et} \quad (-)^{coC} : \mathscr{M}^C \longrightarrow \mathscr{M}\,;$$

tels que $HOM(M,-)$ envoie les objets injectifs de $\mathscr{M}^C$ dans $\mathscr{M}^C$.

Donc pour tout $N \in \mathscr{M}^C$,

$[(-)^{coC} \circ HOM(M,-)](N) = (-)^{coC}(HOM(M,N)) = HOM(M,N)^{coC}$

d'aprés (3.4.33) $HOM(M,N)^{coC} = Hom(\overline{M}, N)$, donc $R^p a(coC, EXT^q(M,N)) \to Ext^{C^{p+q}}(\overline{M}, N)$.

(2) On sait que M est de dimension finie, donc les comodules

$HOM(M,N) = Hom(M,N)$ et $M^* \otimes N$ sont isomorphes du coup $M^* \otimes N$ et $HOM(M,N)$ ont les mêmes résolutions injectives.

D'après (3.4.33) $HOM(M,N)^{coC}$=$Hom^C(\overline{M}, N) \Rightarrow R^p a(coC, M^* \otimes N) = Ext^{C^p}(\overline{M}, N)$. ■

Définition 3.4.31 *Soit V un espace vectoriel, alors $V \otimes C$ est un C-comodule à droite pour la coaction induite par la comultiplication de C. Dans la suite, $V \otimes C$ est appelé un* ***C-comodule libre****.*

Définition 3.4.32 *Un C-comodule à droite M est injectif dans $\mathscr{M}^C$ si M est un* ***facteur direct*** *de C-comodule libre voir [4], Proposition 2.4.7.*

Lemme 3.4.33 *Soient M, $N \in \mathscr{M}^C$. Si N est injectif, alors $M \otimes N$ est aussi injectif.*
En particulier, $M \otimes C$ est injectif dans $\mathscr{M}^C$.

Preuve :

Comme N est injectif dans $\mathscr{M}^C$, alors N est facteur direct de C-comodule libre $V \otimes C$.

Donc $M \otimes N$ est facteur direct de $M \otimes (V \otimes C)$.

Soit M_0 un M espace vectoriel on oublie la structure de C-comodule sur M, et on considère le C-comodule libre $(M_0 \otimes V) \otimes C$ d'après (3.4.17) l'application suivante :

$f : M \otimes (V \otimes C) \longrightarrow (M_0 \otimes V) \otimes C \quad , \quad f(m \otimes (v \otimes c)) \longmapsto (m_0 \otimes v) \otimes S_H(\phi(m_1)) \cdot c$

est un isomorphisme de C-comodules qui a pour inverse

$f^{-1} : (M_0 \otimes V) \otimes C \longrightarrow M \otimes (V \otimes C) \quad , \quad f^{-1}((m \otimes v) \otimes c) \longmapsto m_0 \otimes (v \otimes S_H^2(\phi(m_1)) \cdot c)$

où $m \in M = M_0$, $v \in V$ et $c \in C$.

Donc $M \otimes N$ est facteur direct de $(M_0 \otimes V) \otimes C$ d'où $M \otimes N$ est injectif dans $\mathscr{M}^C$. ■

Définition 3.4.34 *Pour tout $M \in \mathscr{M}^C$. On définit $C^q(M)$ et $\varphi_q : C^q(M) \longrightarrow C^{q+1}(M)$ récursivement par :*

$$C^{-1}(M) = M \quad et \quad C^{q+1}(M) = C^q(M) \otimes C \ ;$$

$$\varphi_{-1} : M \longrightarrow M \otimes C, \quad \varphi_{-1}(m) = m_0 \otimes S^2(\phi(m_1)) \cdot m_2 \ ;$$

$$\varphi_{q+1}(u \otimes c) = (u \otimes c)_0 \otimes S^2(\phi(u \otimes c)_1) \cdot (u \otimes c)_2 - \varphi_q(u) \otimes c \quad ;$$

$$\forall \ u \in C^q(M),\ c \in C,\ q \geq -1.$$

Par ailleurs $\varphi_{q+1} \circ \varphi_q = 0$, soit $Im(\varphi_q) \subset Ker(\varphi_{q+1})$. Donc $(C^q(M))_{q \geq -1}$ est un complexe de cochaine dans $\mathscr{M}^C$. L'application φ_q est C-colinéaire ; car c'est une suite de morphismes de C-comodules.

On considère maintenant la suite d'applications linéaires suivante :

$$\psi_q : C^q(M) \longrightarrow C^{q-1}(M) \ , \ \psi(u \otimes c) = \varepsilon_H(c)u \ ; \ u \in C^{q-1}(M) \text{ c } \in C$$

- Vérifions que $\varphi_{q-1} \circ \psi_q + \psi_{q+1} \circ \varphi_q = id_{C^q(M)}$.

Pour tout $u \in C^q(M)$ et $c \in C$, on a :

$(\varphi_{q-1} \circ \psi_q \circ \psi_{q+1} \circ \varphi_q)(u \otimes c)$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_{q-1}(\varepsilon_C(c)u) + \psi_{q+1}((u\otimes c)_0 \otimes S^2(\phi(u\otimes c)_1)\cdot(u\otimes c)_2 - \varphi_{q-1}(u)\otimes c)\\
&= \varphi_{q-1}(\varepsilon_C(c)u) + \psi_{q+1}((u\otimes c)_0 \otimes S^2(\phi(u\otimes c)_1)\cdot(u\otimes c)_2) - \psi_{q+1}(\varphi_{q-1}(u)\otimes c)\\
&= \varphi_{q-1}(\varepsilon_C(c)u) + \psi_{q+1}((u\otimes c)_0 \otimes S^2(\phi(u\otimes c)_1)\cdot(u\otimes c)_2) - \varepsilon_C(c)\varphi_{q+1}(u)\\
&= \varepsilon_H(S^2(\phi(u\otimes c)_1)\varepsilon_C((u\otimes c)_2(u\otimes c)_0\\
&= \varepsilon_H((\phi(u\otimes c)_1)\varepsilon_C((u\otimes c)_2(u\otimes c)_0\\
&= \varepsilon_H((\phi(u\otimes c)_1\varepsilon_C((u\otimes c)_2))(u\otimes c)_0\\
&= \varepsilon_H((\phi(u\otimes c)_{11}\varepsilon_C((u\otimes c)_{12}))(u\otimes c)_0\\
&= \varepsilon_H(\phi(u\otimes c))(u\otimes c)_0\\
&= \varepsilon_C((u\otimes c)_1)(u\otimes c)_0\\
&= u\otimes c.
\end{aligned}
$$

Puisqu'il est évident que $\varphi_{q-1}\circ\psi_q + \psi_{q+1}\circ\varphi_q = id_{C^q(M)}$, donc $Im(\varphi_{q-1}) \supseteq Ker(\varphi_q)$ $\forall\ q \geq 0$.

Par conséquent $Im(\varphi_q) = Ker(\varphi_{q+1})$ ce qui implique que $C^\bullet(M)$ est un complexe acyclique, c'est-à-dire son homologie est nulle.

Remarque 3.4.35 *D'après (3.4.33) $C^q(M)$ est un objet injectif dans $\mathscr{M}^C$. Donc $C^\bullet(M)$ est une résolution injective de M dans $\mathscr{M}^C$.*

Définition 3.4.36 *$R^pa(coC, M)$ est le groupe de cohomologie du complexe $C^\bullet(M)^{coC}$ et $EXT^p(M,N)$ est le groupe de cohomologie du complexe $HOM(M, C^\bullet(N))$ $\forall\ p \geq 1$ où M, $N \in \mathscr{M}^C$.*

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a étudié la cohomologie des (C,H)-modules relatifs de Hopf droite gauche dont la plupart des résultats sont obtenus grâce au caractère de l'antimorphisme ϕ et la condition mise en évidence notée (3.3). Par la suite on a utilisé certains résultats de l'algèbre homologique à savoir les suites exactes et les foncteurs pour étayer notre étude.

Bibliographie

[1] S. Caenepeel, T. Guédénon, On the cohomologie of relative Hopf modules, Comm. Algebra. 33(2005), 4011-4034.

[2] S.Caenepeel, G. Militarn, S.Zhu, Crossed module and Doi-Hopf module, Israel J. Math. 100(1997), 221-247.

[3] S. Caenepeel, T. Guédénon, Projectivity of a relative Hopf module over the subring of coinvariants, "Hopf Algebra", 97-108, Lecture Note in Pure and Appl. Math. 237, Dekker, New York, 2004.

[4] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, Hopf algebra : An introduction, Monographs

[5] M. FALL (m.fall@univ-zig.sn).

[6] Julien Bichon et Rachel Taillefer. Algèbre Homologique. Université Clermont Auvergne 2020-2021.

[7] H. Kan, Injective envelopes, cogenerators and direct product in the Doi-Hopf module category, Chinese Science Bull. 44(1999), 1350-1356.

[8] M. E. Sweedler, Hopf Algebra, New York : Benjamin, 1969.

[9] R. Wisbauer, Decomposition of modules and comodules, contemp. Math. 259(2000),547-561.

[10] Zhu,Hong (PRC-YNG) ; Chen, Hui-Xiang[Chen, Hui Xiang] (PRC-YNG) ; Tang Haijun (PRC-YNG) On the cohomologie of Doi-Hopf module. (English summary) Comm. Algebra 38 (2010), 1869-1903. Textbooks in Pure Appl. Math. 235, New York : Marcel Dekker, 2001.