

# UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



U.F.R. : SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
Département de Mathématiques

## *Mémoire de Master*

DOMAINE : Sciences et Technologies  
MENTION : Mathématiques et Applications  
SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées  
OPTION : Equations aux Dérivées Partielles

### Sujet

---

## Contrôle des équations de Saint-Venant couplées à une équation de sédiment dans un canal ouvert

---

Présenté et soutenu par : Emile Ndene NDONG  
Sous la direction du : Docteur Mouhamadou Samsidy GOUDIABY  
Et sous la supervision du : Professeur Abdou SENE

Le Jury est composé de :

Prénom(s) et Nom	grade	Qualité	Université
Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président	UASZ
Abdou SENE	Professeur Titulaire	Examineur	UVS
Timack NGOM	Maître conférence Titulaire	Examineur	UASZ
Mouhamadou S. GOUDIABY	Maitre de Conférences Titulaire	Directeur	UASZ

---

Année universitaire : 2019/2020

<b>Résumé</b>		<b>7</b>
<b>Introduction Générale</b>		<b>8</b>
<b>I Généralités sur les équations de Saint-Venant et de l'équation de transport des sédiments</b>		<b>10</b>
I.1	INTRODUCTION . . . . .	10
I.2	Les équations de Saint-Venant . . . . .	10
	I.2.1 Vision simple sur l'origine des équations . . . . .	11
	I.2.2 Les équations de Saint-Venant dans un canal ouvert . . . . .	14
	I.2.3 Propriétés du modèle de Saint-Venant. . . . .	16
I.3	Transport des sédiments . . . . .	18
	I.3.1 Modélisation du transport de sédiments . . . . .	19
	I.3.2 L'équation d'Exner . . . . .	20
	I.3.3 Formules de transport solides . . . . .	21
I.4	Le modèle couplé . . . . .	22
	I.4.1 Saint-Venant-Exner . . . . .	22
	I.4.2 Le modèle objet de notre mémoire . . . . .	23
I.5	Algorithmes de contrôle des canaux . . . . .	24
	I.5.1 Les variables contrôlées . . . . .	24
	I.5.2 Logique de contrôle . . . . .	25
	I.5.3 Techniques de conception . . . . .	26
I.6	Espaces Fonctionnels . . . . .	26
	I.6.1 Les Espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	26
	I.6.2 Les espaces de Lebesgue $L^p$ , $1 \leq p \leq \infty$ . . . . .	27
	I.6.3 Les espaces de Sobolev . . . . .	29
	I.6.4 Convergence forte, faible et faible-* . . . . .	30
I.7	La méthode de Galerkin . . . . .	31
I.8	La méthode des volumes Finis . . . . .	31
	I.8.1 Le RARS . . . . .	31
	I.8.2 La méthode de projection . . . . .	32
<b>II Contrôle du Système de Saint-Venant - Exner dans un Canal Ouvert</b>		<b>33</b>
II.1	Introduction . . . . .	33
II.2	Linéarisation du modèle couplé . . . . .	33
	II.2.1 États d'équilibre du système . . . . .	34
	II.2.2 Linéarisation . . . . .	34
II.3	Espace de fonctions . . . . .	37
	II.3.1 Définitions . . . . .	37
	II.3.2 Proposition II.1 . . . . .	37

---

II.3.3	Notions de distribution . . . . .	37
II.4	Formulation faible et estimation à priori . . . . .	39
II.4.1	Formulation faible . . . . .	39
II.4.2	Estimation de l'énergie à priori . . . . .	40
II.5	Résultat principal . . . . .	44
II.5.1	Théorème . . . . .	44
II.5.2	Preuve . . . . .	44
<b>III</b>	<b>Résolution numérique</b> . . . . .	<b>57</b>
III.1	Introduction . . . . .	57
III.2	Hyperbolicité du modèle couplé . . . . .	58
III.3	La méthode des volumes finis avec le modèle linéaire . . . . .	59
III.3.1	Maillage . . . . .	59
III.3.2	Le modèle RARS . . . . .	60
III.3.3	Le schéma de Roe . . . . .	60
III.4	Les données expérimentales pour le modèle non linéaire . . . . .	61
III.5	Résultats numériques . . . . .	61

---

## TABLE DES FIGURES

---

I.1	Volume de contrôle des équations en $1D$ . . . . .	12
I.2	Modes de transport solide, d'après Graf et Altinakar [18]. . . . .	20
I.3	Vue longitudinale du canal. . . . .	24
I.4	contrôle rétroactif. . . . .	25
I.5	contrôle boucle ouvert. . . . .	26
I.6	Feedforward contrôle + Feedforward contrôle. . . . .	26
III.1	Discrétisation de l'espace [27]. . . . .	59
III.2	L'évolution de l'énergie . . . . .	62
III.3	L'évolution de l'énergie en fonction de $\mu$ . . . . .	62
III.4	L'évolution du niveau d'eau. . . . .	62
III.5	L'évolution de la bathymétrie . . . . .	62
III.6	La vitesse d'écoulement. . . . .	63

---

## Remerciements et dédicace :

Cout d'abord, je rend grâce à Dieu de m'avoir donné la force et le courage de surmonter toutes les épreuves que j'ai traversées depuis le début de ce travail, surtout la mort de mon père suivie de celle de mon grand frère, et de m'accorder une bonne santé afin de mener à bien mes recherches.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon Directeur de mémoire Docteur Moukamadou Samsidy GOUNDOBY, Maître de Conférences Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, d'avoir accepté de diriger ce travail. Je le suis très reconnaissant pour sa disponibilité et de m'avoir, par son aide et ses précieux conseils, amené à faire preuve d'exigence et de pédagogie scientifique. Sa compétence et sa bonne humeur ont contribué à rendre le climat du travail plus agréable.

Je joins ces remerciements à Monsieur Salomon SAMBOR, Professeur Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor pour l'honneur qu'il m'a fait d'être le président du Jury.

Je joins aussi ces remerciements à Monsieur Abdou SENE Professeur Titulaire à l'Université Virtuelle du Sénégal et à Monsieur Cimack NGOM Maître de Conférences Titulaire à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, membres du jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire part au Jury et d'avoir consacré de leur temps pour examiner ce travail.

Je tient par ailleurs à exprimer également ma gratitude à tous nos enseignants de la filière M.P.I. (Mathématiques - Physique - Informatique) pour leurs enseignements de qualité qu'ils nous ont dispensés.

Un grand merci à mes parents et à tous les membres de la famille qui ont rendu possible l'aboutissement de ce travail.

Mes vifs remerciements vont également à mon grand frère, Jean Pierre Samba SENE et à toute sa famille. Grâce à vous j'ai pas vécu un calvaire ici à l'université.

Je remercie aussi ma tante Josephine et à toute sa famille Je remercie vivement ma très chère ESTO pour ton soutien et pour l'attention que tu portes à l'égare de ma modeste personne.

---

Je joins ces remerciements à ma très chère amie LALA DENE et toute sa famille. Mes vifs remerciements vont aussi également à tous mes camarades de promo et à tous mes amis.

Je ne saurais terminer cette partie sans dire merci à toutes ces personnes merveilleuses qui m'ont aider à m'épanouir à chaque fois que l'occasion se présente, je veux nommer les choristes de la C.S.C.A.

Biens de choses à vous!!!

Je dédie ce travail :

- ♣ A mon défunt père;
- ♣ A mon défunt frère;
- ♣ A mon homonyme, papa Ndeme NDONG;
- ♣ A ma maman Marie Pierre Pouye;
- ♣ A Jean Pierre Samba SENE;
- ♣ A mes grandes sœurs Monique, Cita et Mado;
- ♣ A mon grand frère Isidor NDONG;
- ♣ A Lala DENE;
- ♣ A Elisabeth KotoMoto

---

### Résumé :

Dans ce document, basé sur les travaux de Ababacar Diagne et Abdou Sene [4], nous traitons un problème de contrôle des canaux d'irrigation à bathymétrie variable. Nous présentons une méthode algébrique pour concevoir un contrôle rétroactif (Feedback contrôle) linéaire pour réguler le niveau de la colonne d'eau, le débit d'eau et le niveau du fond (la bathymétrie) dans les canaux ouverts. Nous traitons un système hyperbolique d'équations aux dérivées partielles décrivant le comportement du flux d'eau (à travers les équations de Saint-Venant) et le transport des sédiments (à travers l'équation d'Exner). Ce système est linéarisé au tour d'un état d'équilibre. En utilisant des techniques d'estimation a priori et la méthode de Galerkin, nous construisons un contrôle frontière. Cette loi de contrôle assure une diminution de l'énergie et de la convergence du système contrôlé. La diminution de l'énergie est basé sur le choix d'un taux de stabilisation arbitraire pouvant varier en fonction du temps. Enfin, nous donnons des résultats numériques qui sont en concordance avec les résultats théoriques obtenus sur le modèle linéaire à travers la méthode des volumes finis.

**Mots clés :** *Equations de Saint-Venant, équation d'Exner, Feedback contrôle, la méthode Faedo-Galerkin*

L'étude mathématique des écoulements à surface libre en régime transitoire a débuté il y a déjà plus de 200 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace en 1776 et de Lagrange vers 1781 sur la propagation des ondes à la surface des canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant<sup>1</sup> a formulé mathématiquement, par un système d'équations différentielles, le mouvement des eaux à surface libre pouvant faire l'objet d'une description filaire. Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre en rivière, en canaux,...

La compréhension et la prévision du comportement de l'écoulement à surface libre a un intérêt stratégique. La prévision des crues<sup>2</sup> et les délinéations ; la conception des ouvrages de protection contre les crues, des évacuateurs de crues et des canaux de déviation et l'évaluation de l'impact de rupture de barrage sont autant de sujets, parmi beaucoup d'autres, qui requièrent de façon cruciale une bonne maîtrise des phénomènes de l'hydraulique et de la mécanique des fluides [35].

Le transport des sédiments est le phénomène qui permet de déplacer une masse solide composée d'éléments granulaires (sédiments fins, sable,...) sous l'action de l'écoulement de l'eau. Comprendre l'impact du transport de sédiments en milieu naturel est fondamental en ce qu'il constitue un processus physique responsable de la modification des fonds des rivières ; ces derniers tendent vers un état d'équilibre fortement influencé par les phases hydraulique et solide. Le contrôle des écoulements est un des domaines de la mécanique des fluides qui étudie les possibilités d'action sur les écoulements dans le but de les améliorer relativement à divers objectifs, qu'il s'agisse d'écoulement libres ou d'écoulement au voisinage d'une paroi.

Ce document est consacré à la régulation du débit d'eau dans des canaux ouverts avec des sédiments transport. Le travail effectué dans ce mémoire s'articule autour de la question du contrôle des équations en eau peu profond couplées à une équation de transport solide.

Ce manuscrit est une suite directe des travaux de Séné et al. [4]. Ils ont prouvé, en utilisant le modèle de l'eau peu profonde, qu'une certaine fonction d'énergie qui dépend de la trajectoire de l'écoulement diminue de façon exponentielle avec un taux de stabilisation arbitraire. Ce taux peut varier en fonction du temps. Ils ont conçu, en utilisant la technique d'estimation a priori de l'énergie, un contrôle rétroactif. Les concepts de la théorie du contrôle rétroactif ont été appliqués par de nombreux auteurs en utilisant les équations des eaux peu profondes. La synthèse d'un contrôleur LQ (contrôleur Linéaire Quadratique) pour un tel système peut-être trouvée dans [19]. Les auteurs [19] ont présenté une méthode pour concevoir des contrôleurs automatiques efficaces pour un bassin de canaux d'irrigation, qui réalisent un compromis entre

---

1. Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886) était un mécanicien français. Polytechnicien de formation, il étudia aussi à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussée, où il fit l'essentiel de sa carrière. Ses travaux de recherche ont couvert un champ considérable de domaines scientifiques et d'application : hydraulique maritime, navigation le long des canaux et sur route, élasticité, théorie des fluides visqueux, turbulence et perte de charge dans les conduites. Avant Reynolds, il avait pressenti l'importance de la turbulence dans le calcul des pertes de charge. En 1871, il proposa un jeu d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement unidimensionnel d'une onde de crue.

2. Augmentations rapide du niveau des cours d'eau

---

la gestion des ressources en eau et la performance en termes de rejet des perturbations non mesurées. Le modèle qu'ils ont utilisé pour concevoir le contrôleur est dérivé des équations de Saint-Venant discrétisées par le schéma implicite de Preissmann. Litrico et al. ont étudié un régulateur  $H_\infty$  pour un canal d'irrigation. Dans le cas du réseau de canaux ouverts, des auteurs ont conçu une loi de contrôle rétroactif. Tsien [20] a obtenu un résultat présentant une existence et décomposition des solutions classiques des systèmes hyperboliques et son application dans les réseaux de canal ouvert. Leugering et Schimidt [21] ont utilisé ce résultat de Tsien pour prouver la stabilité dans un système de canaux en utilisant la technique des invariants de Riemann. Cette approche de Riemann a été également utilisée par Ndiaye et Bastin [16]. Ils ont proposé une loi de commande par amortissement frontière ayant pour objectif de stabiliser le niveau et le débit d'eau autour d'un équilibre désiré. Ces documents visaient à ne contrôler que les équations de la dynamique des fluides. Le processus de transport de sédiments constitue un phénomène complexe résultant d'interactions entre de nombreux paramètres dépendant des propriétés physiques de l'écoulement, du cours d'eau et de son lit. Un des enjeux de la modélisation repose sur le calage de ces paramètres permettant de corrélérer les débits liquide et solide avec les données expérimentales dans les modèles utilisés. Par exemple, on peut citer ceux établis par Meyer-Peter et Muller [22], Grass [23] et Van Rijn [24]. Avec la méthode Grass, on examine l'influence des infiltrations sur le mouvement et le transport de sédiment. L'infiltration à travers l'interface sédiments/fluides a également eu une forte influence sur la croissance des ondulations de sable, même à des gradients de pression de l'ordre de 0,1. Ces résultats suggèrent que la dynamique des ondulations dans le littoral peut être affectée par le niveau de la nappe phréatique et le drainage dans une plage. Par ailleurs la méthode de Van Rijn permet de calculer le transport de la charge de lit comme produit de la hauteur de salaison, de la vitesse des particules et de la concentration de la charge de lit. Les auteurs de [29] ont présenté plusieurs modèles de sédiments déterministes et leurs approches numériques. Le modèle STF couplé a été utilisé dans de nombreux ouvrages de génie côtier. Dans [25], deux approches : une approche stable et une approche instable, sont discutées et cinq formulations différentes sont dérivées dans ces cadres. Une version à flux limité du schéma de Roe est utilisée avec les différentes formulations sur un problème de test de canal et les résultats comparés. Dans [31], il est démontré que des techniques numériques mal formulées conduisent à l'introduction de la diffusion, de la dispersion et des oscillations d'élévation de lit. Quatre schémas de mise à jour des lits différents sont ensuite examinés et testés par rapport aux solutions analytiques de référence. Tandis que les schémas ENO et WENO sont étendus au cas de l'équation unidimensionnelle de transport des sédiments dans [38], les techniques de Galerkin sont étudiées par Kubatko et al. [32]. Cette méthode est une méthode robuste qui convient particulièrement bien à ce type d'équation de transport dominée par l'advection. Il incorpore des flux numériques et des limiteurs de pente ascendants pour fournir une résolution nette de bathymétrie. Elle possède une propriété de conservation locale qui conserve la masse sédimentaire au niveau élémentaire. L'aspect de la simulation numérique de la sédimentation des rivières et de la morphologie sont examinées de manière exhaustive dans [26].

L'objectif de notre mémoire est, dans un canal ouvert, comment agir en amont et aval pour qu'en un certain temps suffisamment grand, la hauteur d'eau, la vitesse d'écoulement et la bathymétrie soient constantes. Nous effectuons la régulation du débit d'eau et du transport des sédiments, en utilisant le contrôle rétroactif en aval ( $x = L$ ) comme prévu dans [4]. Dans un premier temps nous faisons une étude sur les équations de Saint-Venant et sur l'équation de transport de Sédiment. Puis, nous allons faire quelques rappels sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev et aussi sur la méthode des volumes finis. Dans le deuxième chapitre, on traite le modèle couplé (Saint-Venant – Exner). On présente ici la loi de contrôle conçue et le résultat principal. Enfin, le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique par un schéma de type volume fini afin d'illustrer les résultats théoriques obtenues au chapitre 2.

# CHAPITRE I

---

## GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT ET DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT DES SÉDIMENTS

---

### I.1 INTRODUCTION

Le système de Saint-Venant a été initialement introduit dans sa version unidimensionnelle par l'ingénieur des Ponts et Chaussées, Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant en 1871 dans un *Compte Rendu de l'Académie des Sciences* (voir [2]). Il s'agit d'un système *hyperbolique* modélisant généralement, les écoulements à surface libre dits en "eaux peu profondes" —*shallow-water*—. En d'autres termes, il s'agit d'une approximation d'ondes longues traduisant le fait que la dimension verticale caractéristique de l'écoulement soit faible devant la dimension horizontale. Dans ce chapitre, nous traitons des généralités sur les équations de Saint-venant et sur l'équation de transport solides. Nous faisons, dans la première section, une étude sur des équations de Saint-Venant et dans la deuxième section, une étude sur de l'équation de transport de sédiments. Dans la troisième section, nous présentons le modèle couplé. Et enfin, on termine par donner quelques rappels qui nous seront utiles.

### I.2 Les équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant sont obtenues à partir de celles de Navier-Stokes grâce aux hypothèses suivantes (voir [36]) :

- le fluide est supposé visqueux<sup>1</sup> et newtonien<sup>2</sup> ;
- l'accélération du mouvement sur la verticale est négligeable devant celle due à la gravité (**Écoulement hydrostatique**) ;
- la hauteur de l'écoulement est largement inférieur à la largeur ;
- on suppose qu'il n'y pas de transfère de masse à travers le fond et la surface libre et qu'une particule d'eau situé sur l'une de ces deux surfaces y reste au cours du temps (**Imperméabilité du fond et de la surface**) ;
- la viscosité trouble est constante ;
- nous négligeons, dans les équations de quantités de mouvements, les variations de densité de l'eau par rapport à la densité de référence (**Boussinesq**).

---

1. La viscosité est le paramètre qui définit la résistance à l'écoulement d'un fluide, c'est la consistance plus ou moins épaisse ou sirupeuse d'un fluide qui permet à celui-ci de s'écouler plus ou moins rapidement. Plus un fluide est visqueux plus il s'écoule lentement.

2. Un fluide newtonien est un fluide dont la viscosité ne dépend pas des contraintes qui lui sont appliquées. Autrement dit sa viscosité ne varie pas quand on agite le fluide.

Le modèle de Saint-Venant est constitué de deux lois de conservation : une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de la quantité de mouvement. La conservation de la masse stipule que la variation de masse de fluide au sein d'un volume élémentaire pendant un temps  $dt$  est égale à la différence de la masse entrante et de la masse sortante. Pour la conservation de la quantité de mouvement, le taux de variation de la quantité de mouvement au sein du volume est égale à la somme des forces extérieures exercées sur ce volume. Ce système possède une propriété remarquable similaire à celle mise en évidence par Bernard Riemann pour des équations de la dynamique des gaz. Si  $v$  est la vitesse du fluide,  $h$  sa hauteur et  $g$  l'accélération due à la gravité, l'un des invariants de Riemann correspond à une onde qui remonte le courant à la vitesse  $v - \sqrt{gh}$ , tandis que l'autre invariant de Riemann correspond à une onde qui descend le courant à la vitesse  $v + \sqrt{gh}$  [37].

Ces équations complexes, du fait de leur non linéarité, sont par exemple résolues par simulation numérique à l'aide d'une discrétisation par éléments finis ou volumes finis.

## I.2.1 Vision simple sur l'origine des équations

### I.2.1.1 L'approximation Hydrostatique

La suite de cette sous section repose sur la formule d'équilibre de la pression dans un fluide au repos. La formule traduit l'équilibre des forces de pression sous gravité [1],

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g.$$

On définit  $z = f$  comme étant le fond de la rivière et  $z = \eta$  la cote de la surface libre. La hauteur d'eau est  $h = \eta - f$ .

Au dessus de la surface libre, l'air assure une pression atmosphérique  $P_0$  que l'on suppose constante. On néglige la densité de l'air ( $1.2kgm^3$ ) par rapport à celle de l'eau ( $10kgm^3$ ). On a donc la relation "hydrostatique" dans le fluide :

$$p = P_0 + \rho g(\eta - z) \quad (I.1)$$

ce que l'on peut appeler loi du nivellement barométrique. Au fond de l'eau en  $z = f$ , on a  $p = P_0 + \rho gh$ , tandis qu'à la surface libre, on ne se soucie pas de l'air. Dans la suite, on prend la référence de pression à la surface libre, on ne tient compte que de la surpression  $\rho g(\eta - z)$  par rapport à  $P_0$ .

**Définition 1** *On nomme équations de Saint Venant le système suivant (que nous prouverons au paragraphe suivant), où  $u$  et  $v$  sont des vitesses moyennes dans le plan horizontal. Il y a en fait plusieurs formes légèrement différentes suivant que l'on est sous forme conservatrice ou non, ou que l'on tienne compte de la largeur du canal ou non. On définit  $z = f(x, y)$  comme étant le fond de la rivière et  $z = \eta(x, y, t)$ , la cote de la surface libre. La hauteur d'eau est  $h(x, y, t) = \eta(x, y, t) - f(x, y)$ . La conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement s'écrivent :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = hg \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + F_x, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -hg \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + F_y. \end{array} \right. \quad (I.2)$$

où  $\tau_x$  et  $\tau_y$  sont des contraintes de frottement au fond,  $F_x$  et  $F_y$  sont des forces comme l'accélération de Coriolis ou une force d'entraînement due au vent.

On remarque que dans cette partie le fond,  $f(x, y)$ , est fixe par rapport à  $t$ , c'est une donnée du problème, on cherche à établir comment l'eau s'écoule sur une topographie donnée.

### I.2.1.2 Approche heuristique simple 1D

En 1D, ces équations s'écrivent simplement comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho h} + F_x. \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

où  $z = f(x)$  comme étant le fond de la rivière et  $z = \eta(x, t)$ , la cote de la surface libre. La hauteur d'eau est  $h(x, t) = \eta(x, t) - f(x)$ .

On peut obtenir ces équations en partant d'une vision simple des écoulements. La manière simple de présenter les équations est de se donner la Figure I.1 suivante

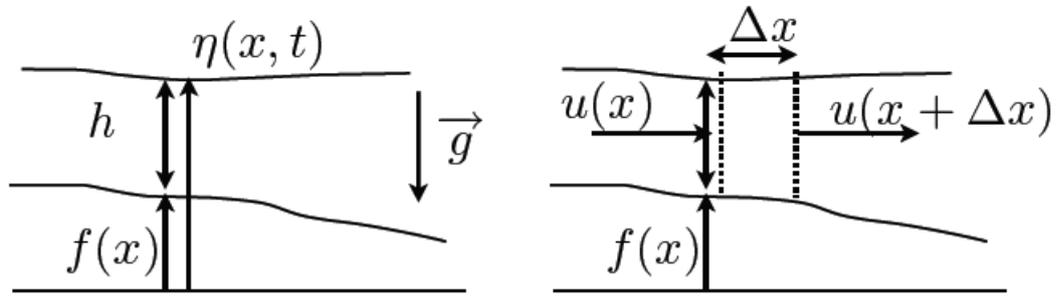


FIGURE I.1 – Volume de contrôle si on veut établir des équations 1D [1].

On a une tranche de fluide d'épaisseur  $\Delta x$  dans laquelle circule un écoulement de vitesse constante,  $u(x, t)$ . Cette hypothèse met en défaut le non glissement à la paroi (effet de la viscosité). Ce dernier est cependant réintroduit dans l'équation de la quantité de mouvement par le frottement à la paroi. On dit que  $u(x, t)$  est une vitesse moyenne par tranche.

Il y a un flux,  $h(x, t)u(x, t)$  qui entre en  $x$  et un autre qui sort en  $x + \Delta x$  qui est  $h(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t)$  et un flux dû au déplacement de la surface libre vers le haut :  $\Delta x \partial \eta / \partial t$ . Donc, puisque le fond,  $f$ , ne dépend pas du temps, le bilan de la masse s'écrit :

$$\Delta x \partial h / \partial t = h(x, t)u(x, t) - h(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t). \quad (\text{I.4})$$

En faisant apparaître la dérivée, on a :

$$\Gamma(x + \Delta x, t) = \Gamma(x, t) + \Delta x \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \dots$$

D'où par analogie, le terme  $h(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t)$  peut s'écrire comme suit :

$$h(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t) = h(x, t)u(x, t) + \Delta x \partial_x hu.$$

Par conséquent

$$-\Delta x \partial_x hu = h(x, t)u(x, t) - h(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t).$$

L'équation (I.4) devient,

$$\Delta x \partial h / \partial t = -\Delta x \partial_x hu.$$

D'où, on retrouve la relation du flux que l'on a annoncée

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x}. \quad (\text{I.5})$$

Passons à la quantité de mouvement.

On a une tranche de fluide d'épaisseur  $\Delta x$ . Il y circule un écoulement de vitesse constante en  $z$  qui est  $u(x, t)$  et la surpression  $p(x, z, t) = \rho g(\eta - z)$  qui varie du haut vers le bas. La masse est  $\rho h \Delta x$  et l'accélération est donnée par :  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . La tranche est soumise à des forces de pression que l'on écrit dans le cadre hydrostatique précédent. Les forces de pression poussent vers la droite en  $x$  soit sur toute la hauteur on a :

$$\begin{aligned} \int_f^\eta p(x, z, t) dz &= \int_f^\eta \rho g(\eta - z) dz \\ &= -\rho g \left[ \frac{(\eta - z)^2}{2} \right]_f^\eta \\ &= \rho g \frac{(\eta - f)^2}{2} \\ &= \rho g \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Et elles poussent vers la gauche en  $x + \Delta x$ . Le bilan des forces de pression est donc :

$$\begin{aligned} \int_{f(x)}^{\eta(x,t)} p(x, z, t) dz - \int_{f(x+\Delta x)}^{\eta(x+\Delta x,t)} p(x + \Delta x, z, t) dz &= \int_{f(x)}^{\eta(x,t)} \rho g(\eta - z) dz - \int_{f(x+\Delta x)}^{\eta(x+\Delta x,t)} \rho g(\eta - z) dz \\ &= \rho g \left( \frac{h(x, t)^2}{2} - \frac{h(x + \Delta x, t)^2}{2} \right). \end{aligned}$$

En appliquant le développement de Taylor à  $\frac{h(x+\Delta x, t)^2}{2}$ , on obtient :

$$\frac{h(x + \Delta x, t)^2}{2} = \frac{h(x, t)^2}{2} + \Delta x \frac{h(x, t)^2}{2} + \dots$$

On en déduit :

$$\frac{h(x, t)^2}{2} - \frac{h(x + \Delta x, t)^2}{2} = -\Delta x \frac{h(x, t)^2}{2} + \dots$$

Ainsi le bilan des forces de pression devient

$$\int_{f(x)}^{\eta(x,t)} p(x, z, t) dz - \int_{f(x+\Delta x)}^{\eta(x+\Delta x,t)} p(x + \Delta x, z, t) dz = -\Delta x \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} \right) + \dots$$

Notons aussi la présence d'autres forces qui agissent sur la tranche :

- un terme un peu subtil de poids dû à la pente  $f'$ , qui projette la pesanteur en une très faible force  $-\Delta x \rho g h \frac{df}{dx}$  ;
- la contrainte de frottement visqueux  $\tau_x$  qui agit sur la surface en  $z = f(x)$  et qui dépend de  $u$ . Sa résultante sera  $-\tau_x \Delta x$ .

En faisant la somme de tous ces termes et en factorisant par  $\Delta x$  on trouve la résultante globale (pression + pente + frottement) qui s'exerce sur la tranche :

$$\left( -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} \right) - \rho g h \frac{df}{dx} - \tau_x \right) \Delta x.$$

Pour calculer l'accélération de la tranche il suffit de faire un bilan de la variation de quantité de mouvement dans la tranche  $\Delta x \frac{\partial(\rho u h)}{\partial t}$  compte tenu du flux qui sort à droite,  $\rho u(x + \Delta x, t)^2 h(x + \Delta x)$ , et de celui qui rentre à gauche,  $\rho u(x, t)^2 h(x, t)$ . Donc en écrivant le développement de Taylor, le flux qui sort à droite devient :

$$\rho u(x + \Delta x, t)^2 h(x + \Delta x) = \rho u(x, t)^2 h(x, t) + \Delta x \left[ \frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} + \dots \right].$$

Ainsi, d'après le **principe fondamental de la dynamique** ( $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ ), le bilan de la quantité de mouvement dans la tranche  $(\Delta x) \frac{\partial(\rho u h)}{\partial t}$  s'écrit :

$$\Delta x \frac{\partial(\rho u h)}{\partial t} - \rho u(x, t)^2 h(x, t) + \rho u(x, t)^2 h(x, t) + \Delta x \frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} = -\Delta x \left[ \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} \right) + \rho g h \frac{df}{dx} + \tau_x \right].$$

Après simplification de part et d'autre, l'équation devient :

$$\frac{\partial(\rho u h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} \right) - \rho g h \frac{df}{dx} - \tau_x. \quad (\text{I.6})$$

En appliquant les dérivés partielles, le terme à gauche devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} &= \rho u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial h u}{\partial x} + h u \frac{\partial \rho u}{\partial x} \\ &= h \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \rho u \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h u)}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de la conservation de la masse, (I.4), le dernier terme à droite est nul. Ainsi, on a :

$$\frac{\partial(\rho u h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} = h \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + 0.$$

Par conséquent, l'équation (I.6) devient,

$$\begin{aligned} \rho h \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} \right) - \rho g h \frac{df}{dx} - \tau_x \\ &= -\rho g h \frac{\partial}{\partial x} (h + f) - \tau_x. \end{aligned}$$

D'où, on a la deuxième équation du système (I.3),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho h}. \quad (\text{I.7})$$

Ainsi, de (I.4) et (I.7), on retrouve le système (I.3).

Dans toute la suite, nous considérons un canal d'irrigation, soumis à un écoulement d'eau dont la dynamique est décrite par les équations de Saint-Venant.

## I.2.2 Les équations de Saint-Venant dans un canal ouvert

**Définition 2** *On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique. On distingue ce pendant deux types de canaux :*

- **les canaux naturels** : ceux sont les cours d'eau qui existent naturellement sur terre, tels que les ruisselets, rivières,...
- **les canaux artificiels** : ceux sont des cours d'eau réalisés par l'homme tel que les canaux découverts construits ou ras de sol, les tuyaux de drainages, ...

### I.2.2.1 Système de Saint-Venant dans un canal ouvert

Généralement écrit sous forme conservative, le système de Saint-Venant décrit un écoulement dans un canal rectiligne à fond plat à l'aide de la hauteur d'eau  $h(t, x) \geq 0$  et de la vitesse moyennée sur la lame d'eau  $u(t, x) \in \mathbb{R}$ . Le système homogène s'écrit (voir [2]),

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + \frac{gh^2}{2}) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

où  $g$  représente la gravité. On introduit la variable conservative  $q(t, x) := h(t, x)u(t, x)$  correspondant au débit ou à la quantité de mouvement. Utilisé pour des études sur les écoulements géophysiques, plusieurs termes sources peuvent compléter le modèle pour prendre en compte les variations de topographie, des termes de frottement, de diffusion et/ou de dissipation. Ce faisant, on obtient le système de Saint-Venant suivant,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + \frac{gh^2}{2}) = -gh\partial_x b - \frac{\tau}{\rho_w} \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

où  $b$  désigne la cote topographique,  $\rho_w$  la masse volumique de l'eau et  $\tau \in \mathbb{R}$  correspond à la contrainte de frottement au fond.

Lorsque les effets latéraux ne sont plus négligeables, il devient nécessaire de considérer la formulation bidimensionnelle du système de Saint-Venant ; cette dernière introduit des termes sources liés entre autres à la topographie et aux frottements. Le modèle  $2D$  est très utilisé pour les études hydrauliques en décrivant un écoulement, une nouvelle fois, à travers la donnée de la hauteur d'eau  $h(t, x, y) \geq 0$  et de la vitesse moyennée  $u(t, x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{cases} \partial_t h + \text{div}(hu) = 0, \\ \partial_t (hu) + \text{div}(hu \otimes u) + \nabla(\frac{gh^2}{2}) = -gh \nabla b - \frac{\tau}{\rho_w} \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

où  $g$  correspond toujours à la gravité,  $b(x, y)$  désigne la cote du fond du canal,  $\rho_w$  est la masse volumique de l'eau et  $\tau := (\tau_x, \tau_y) \in \mathbb{R}$  représente la contrainte de frottement au fond. En pratique, le terme est défini par les lois de frottement empirique telles que les lois de *Manning* et *Strickler* ou de *Chézy* et de *Darcy-Weisbach*.

### I.2.2.2 La topographie

La topographie  $b$  est ici représentée comme une fonction de l'espace. Elle est alors une donnée du problème et occupe une place centrale dans les applications puisque sa variation est souvent le moteur de l'écoulement, en particulier pour les applications en rivière. Le terme de topographie intervient aussi dans les états stationnaires caractéristiques du système de Saint-Venant que nous étudierons plus loin dans ce chapitre. Mais la topographie peut-être également une fonction du temps. Cette variation peut-être l'effet de contraintes extérieures, par exemple des tremblements de terre ou des glissements terrain sous-marins. Mais la variation du fond peut aussi être la conséquence des contraintes exercées par l'écoulement fluide. Il s'agit alors de la modélisation des phénomènes de transport sédimentaire, que l'on étudiera aussi plus loin dans ce chapitre. Dans ce cas, la fonction  $b$  devient une inconnue du problème, solution d'une équation de conservation supplémentaire.

---

### I.2.2.3 Coefficients de frottements

Le terme de frottement peut être défini par les formules de Chézy ou de Manning-Strickler [2],

$$\frac{\tau}{\rho_w} = ghJ \quad (\text{I.11})$$

où  $J$  est la *perte de charge*.

La perte de charge linéique correspond à la dissipation d'énergie du fluide lors de son écoulement. Cette dernière résulte de l'action conjointe de la résistance à l'écoulement relative à la viscosité du fluide, et du frottement entre le fluide et la paroi du canal.

- *La loi Chézy* : Elle s'applique aux écoulements turbulents rugueux et permet d'exprimer la perte de charge  $J$  d'un écoulement gravitaire en fonction de la vitesse d'écoulement. Elle est connue sous la forme,

$$J = \frac{|u|u}{C^2h}, \quad (\text{I.12})$$

où  $C$  est le coefficient de Chézy pouvant être défini par différentes formules empiriques. En particulier, ce dernier dépend de la rugosité du canal et du rayon hydraulique. Une formule très répandue a été énoncée par Manning.

- *La loi de Manning* : Elle peut être vue comme une amélioration de la formule de Chézy. En raison de sa simplicité d'écriture, il s'agit d'une des formules les plus répandues. Elle est définie à partir d'un coefficient de Chézy dépendant du coefficient de rugosité des parois du canal aussi appelé coefficient de Manning-Strickler ou simplement de Strickler  $K_s$ , et du rayon hydraulique  $R_h \sim h$ ,

$$C = K_s h^{1/6}. \quad (\text{I.13})$$

En tenant compte de ce coefficient, la formule (1.5) donne la formule de Manning,

$$J = \frac{|u|u}{K_s^2 h^{4/3}}. \quad (\text{I.14})$$

## I.2.3 Propriétés du modèle de Saint-Venant.

Nous présentons ici des propriétés importantes du système de Saint-Venant. Ces propriétés seront données pour le cas unidimensionnel mais elles pourront aisément être étendues en dimension deux. Le système de Saint-Venant est constitué de deux lois de conservation : une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de la quantité de mouvement. On travaillera essentiellement avec la forme non homogène du système de Saint-Venant suivante pour laquelle le terme source est défini à partir de la pente du fond,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + \frac{gh^2}{2}) = -gh\partial_x b \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

où la hauteur d'eau  $h(t, x)$  et le débit  $h(t, x)u(t, x)$  correspondent aux variables conservatives,  $g$  désigne toujours la gravité et  $b(x)$  indique la cote du fond. Le débit,  $h(t, x)u(t, x)$ , ainsi que le terme  $(hu^2 + \frac{gh^2}{2})$  correspondent respectivement au flux associé à la hauteur d'eau et au débit. Cette formulation permet de caractériser un écoulement au dessus d'un fond donné initialement.

### I.2.3.1 L'hyperbolicité.

En dehors des zones sèches ( $h = 0$ ), le système de Saint-Venant est un système strictement hyperbolique de lois de conservation du premier ordre avec termes sources [2]. On introduit la

formulation vectorielle du système de Saint-Venant (I.15),

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = S(W), \quad (\text{I.16})$$

où

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x b \end{pmatrix},$$

avec  $W$  le vecteur des variables conservatives,  $F(W)$  et  $S(W)$  sont respectivement le flux et le terme source. En dérivant le terme de flux, il est possible de réécrire l'équation (I.16) sous forme *quasi-linéaire*,

$$\partial_t W + F'(W)\partial_x W = S(W). \quad (\text{I.17})$$

Ainsi la matrice jacobienne du flux  $F'(W)$  est définie comme suit,

$$F'(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}. \quad (\text{I.18})$$

En zone mouillée ( $h > 0$ ), la matrice  $F'(W)$  est diagonalisable et ses valeurs propres associées sont données par,

$$\lambda_{\pm} = u \pm c, \quad (\text{I.19})$$

où  $c := \sqrt{gh}$  désigne la vitesse à laquelle se propage l'information dans l'écoulement (par exemple, la vitesse du sommet d'une vague) aussi appelée vitesse des ondes de gravité. Ces valeurs propres sont également connues comme étant les vitesses d'onde ou vitesses caractéristiques du système de Saint-Venant. Si la hauteur d'eau est non nulle, il apparaît clairement que  $\lambda_- < \lambda_+$ , ce qui démontre bien la stricte hyperbolicité du système.

### I.2.3.2 Le nombre de froude

Le nombre de Froude introduit par William Froude en 1874 établit le rapport des forces d'inertie sur les forces de pesanteur. Ferdinand Reech avait néanmoins établi ce critère de similitude pour les ondes à surface libre en 1852 donnant ainsi lieu au nombre de Reech analogue au nombre de Froude. Ce nombre adimensionnel défini pour des hauteurs d'eau non nulles s'écrit,

$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad (\text{I.20})$$

où  $h$  désigne la hauteur d'eau,  $u$  la vitesse moyennée et  $g$  la gravité. Ce nombre permet de caractériser les écoulements :

- $F_r < 1$ , l'écoulement est dit fluvial, l'information se propage à la fois de l'amont vers l'aval et de l'aval vers l'amont ; typiquement, l'écoulement se produit à faible vitesse pour une hauteur d'eau élevée ;
- $F_r = 1$ , l'écoulement est critique, et lorsque le nombre de Froude passe d'une valeur supérieure à une valeur inférieure à un et inversement, il est dit transcritique ;
- $F_r > 1$ , l'écoulement est torrentiel, l'information se propage de l'amont vers l'aval ; l'écoulement a une vitesse importante et une hauteur faible.

Par ailleurs, on parle de ressaut hydraulique lorsqu'une variation brutale de la hauteur d'eau entraîne un passage du régime torrentiel au régime fluvial.

---

### I.2.3.3 La stabilité

Nous distinguons trois propriétés assurant que la solution approchée respecte certains principes physiques de base.

Commençons par la nature conservative du système de Saint-Venant. Elle traduit le fait que la quantité totale d'eau (ainsi que la quantité de mouvement à l'absence de termes sources) est constant. Le fait que le système de Saint-Venant soit une loi de conservation assure également l'existence de bornes de type  $L^1$ , au moins pour la hauteur d'eau.

Nous pouvons exhiber une deuxième propriété liée à la décroissance de l'énergie du système. En effet le système de Saint-Venant admet l'énergie suivante (voir [14])

$$E(t, x) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2} + ghb. \quad (\text{I.21})$$

Des calculs classiques en une dimension, par exemple la méthode de viscosité (voir [15]), montrent qu'elle vérifie l'égalité suivante

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} \left[ \left( E + \frac{gh^2}{2} \right) u \right] = 0,$$

pour les solutions suffisamment régulières.

Dans le cas du système homogène (sans terme source), l'énergie n'est qu'une des entropies qu'il convient d'associer au système pour que le problème soit bien posé.

Une troisième propriété de stabilité, est l'existence de domaine invariant. En l'occurrence pour le système de Saint-Venant, la positivité de la hauteur d'eau définit un domaine invariant. Par ailleurs, la décroissance de l'énergie peut aussi être vue comme la préservation d'un domaine invariant.

### I.2.3.4 L'équilibre

L'existence d'états stationnaires non triviaux, c'est-à-dire pour lesquels les inconnues ne sont pas constantes sur le domaine, est une des spécificités du système de Saint-Venant, liée à la présence des termes sources. En dimension une, en l'absence de frottements et pour des solutions régulières, ils sont par exemple caractérisés par les relations suivantes

$$\frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

où  $H(t, x) = \frac{u^2}{2} + g(h + b)$  désigne la charge hydraulique. La préservation numérique de ces états stationnaires n'a rien d'évident. Ils correspondent en effet à un équilibre entre termes de flux et termes sources, dont les discrétisations sont habituellement décorréélées.

## I.3 Transport des sédiments

Le transport de sédiments et la déposition des sédiments intéressent les hydrologistes, car ils affectent tout l'aménagement globale des bassins versants.

Dans un sens large, on peut appeler sédiment tout matériau fragmenté qui est transporté, suspendu dans ou déposé par les agents naturels, tels l'eau, l'air et la glace.

Le transport de sédiments se caractérise principalement par deux processus, le transport en suspension et le transport par charriage.

---

### I.3.1 Modélisation du transport de sédiments

Deux modes de transport fondamentalement différents sont à distinguer : le transport par charriage sous l'effet de la tension de frottement moyen au fond, et le transport en suspension sous l'effet de la turbulence.

#### I.3.1.1 Le transport par charriage :

C'est le mode de transport, où les granulats restent en contact avec le fond. Le transport de sédiments par charriage,  $q_{sb}$  [ $m^2/s$ ] dépend pour le cas simplifié de sept paramètres [3] qui sont :

- $\rho$  et  $v$  qui caractérisent le fluide ;
- $\rho_s$  et  $d$  caractérisent les sédiments ;
- $R_h$  (ou  $h$ ),  $J$  et  $g$  qui caractérisent l'écoulement.

En combinant ces trois derniers paramètres, on trouve  $u_* = \sqrt{gR_hJ}$ , qui paramètre la tension de frottement appliquée aux granulats du lit ainsi que la turbulence qui maintient les granulats en suspension.

D'après la théorie de l'analyse dimensionnelle, ces sept paramètres peuvent être réduits à cinq paramètres adimensionnels. Pour modéliser le transport par charriage,  $q_{sb}$  [ $m^2/s$ ] on prend les cinq paramètres suivants dont la signification physique est importante :

- $S_s = \rho_s/\rho$ , est une densité relative ;
- $\Phi = q_{sb*} = \frac{q_{sb}}{\sqrt{(S_s-1)gd^3}}$  : est une intensité adimensionnelle du transport par charriage tel que  $q_{sb}$  [ $m^2/s$ ] représente le débit solide volumique par large unitaire ;
- $d_* = d\left(\frac{\gamma_s/\gamma-1}{v^2}\right)^{1/3}$  : est un diamètre adimensionnel des particules, où  $\gamma$  dénote le poids spécifique du fluide ( $\gamma = g\rho$ ) et  $\gamma_s$  dénote le poids spécifique des sédiments ( $\gamma_s = g\rho_s$ ) ;
- $\tau_* = \frac{\rho u_*^2}{(\gamma_s-\gamma)d}$  : est une tension adimensionnelle de frottement ;
- $R_h/d$  ou  $h/d$  : une profondeur relative.

La formulation générale du transport de sédiments par charriage est donnée par (voir [3]) :

$$\phi = \phi(d_*, \tau_*, R_h/d, S_s).$$

#### I.3.1.2 Transport en suspension :

C'est le mode de transport, où les particules restent dans la colonne d'eau (les granulats n'ont plus qu'occasionnellement contact avec le fond).

Le flux de sédiments transportés en suspension dans la colonne d'eau s'écrit sous la forme :

$$q_{ss} = \int_{z_{sb}}^h c_s(z)u(z)dz.$$

Si on admet que la répartition de la vitesse  $u(z)$  est connue, le problème est ramené à la détermination du profil de la concentration volumique  $c_s(z)$  et du niveau de référence,  $z_{sb}$ .

La concentration de sédiments en suspension,  $c_s$  [ ] dépend pour le cas simplifié des 7 mêmes paramètres que dans le cas de charriage ( $\rho, v, \rho_s, d, R_h, J, g$ ).

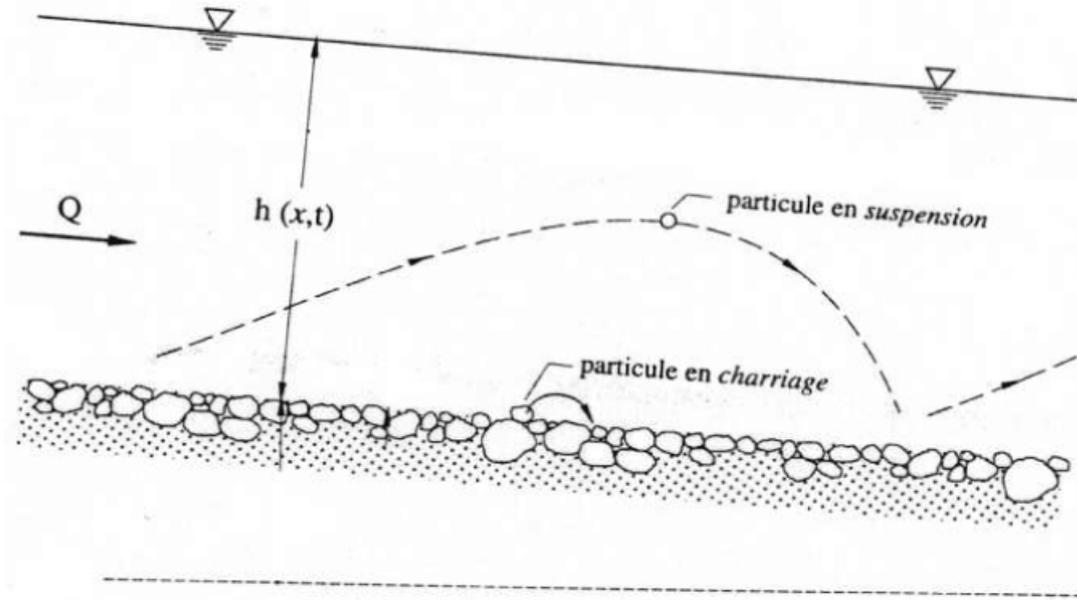


FIGURE I.2 – Modes de transport solide, d'après Graf et Altinakar [18].

### I.3.1.3 Le transport total

Deux approches existent pour déterminer le transport total,  $q_s$  :

- (i)  $q_s = q_{sb} + q_{ss}$ , en calculant  $q_{sb}$  et  $q_{ss}$  avec une formule de charriage et de suspension respectivement, et en combinant les deux par le choix du niveau et de la concentration de référence,  $z_{sb}$  et  $\bar{c}_s(z_{sb})$ .
- (ii) Par des formules empiriques qui donnent directement le transport total en fonction des paramètres du liquide, du sédiment et de l'écoulement.

### I.3.2 L'équation d'Exner

L'équation d'Exner décrit le processus de transport par charriage, et donc d'érosion et d'engrèvement du lit. Le taux d'échange de la masse solide totale sur une cellule  $\mathcal{C}_i := [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  de  $x_{i-1/2}$  à  $x_{i+1/2}$  est égale à la différence des flux solides entrant et sortant de la cellule. La masse totale sur une cellule  $\mathcal{C}_i$  est définie par,

$$\int_{\mathcal{C}_i} \int_0^{b(t,x)} dz dx = \int_{\mathcal{C}_i} b(t,x) dx.$$

Donc par dérivation en temps, le taux d'échange de masse totale sur  $\mathcal{C}_i$  s'écrit,

$$\partial_t \left( \int_{\mathcal{C}_i} b(t,x) dx \right). \quad (\text{I.22})$$

En outre, on introduit les expressions des débits ou flux solides entrants en  $x_{i+1/2}$  et sortant en  $x_{i-1/2}$  respectivement données par  $\xi q_s(h, u)_{x_{i-1/2}}$  et  $\xi q_s(h, u)_{x_{i+1/2}}$  avec  $\xi := 1/(1-p)$  et  $p$  représente la porosité du lit [6]. Ces dernières permettent d'écrire la forme intégrale de l'équation d'évolution du fond,

$$\partial_t \left( \int_{\mathcal{C}_i} b(t,x) dx \right) + \xi [q_s(h, u)]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = 0. \quad (\text{I.23})$$

En intégrant l'équation (I.23) en temps sur l'intervalle arbitraire  $[t^n, t^{n+1}]$  et en considérant que  $h(t, x)$  et  $u(t, x)$  sont dérivables, il résulte l'équation suivante :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \partial_t b(t, x) + \xi \partial_x q_s(h, u) dx dt = 0. \quad (\text{I.24})$$

Ainsi, puisque les variables d'espace et de temps sont indépendantes et après simplification, on obtient l'équation d'Exner,

$$\partial_t b + \xi \partial_x q_s = 0. \quad (\text{I.25})$$

L'essentiel de l'équation d'Exner repose sur la définition du flux de sédiment  $q_s$ .

### I.3.3 Formules de transport solides

Les formules de transport solide sont principalement basées sur des approches déterministes. Il existe de nombreuses formules de transport de sédiments, telles que les formules d'Einstein, Fernandez-Luque et Van Beek, Van Rijn, Nielsen...

#### I.3.3.1 Grass(1981) :

Elle s'avère être une des plus basiques mais bien adaptée à la modélisation pour des matériaux granulaires non cohésifs (absence de force de liaison entre les grains). Elle s'exprime sous la forme,

$$q_s(h, u) = A_g u |u|^{m_g - 1},$$

où  $A_g$  et  $m_g$  sont les constantes empiriquement déterminées. Typiquement,  $m_g$  est un entier naturel pris entre 1 et 4. La constante de calibration  $A_g$  est liée à la granulométrie et la viscosité dynamique.

#### I.3.3.2 Meyer-Peter et Muller (1948) :

Elle est une des formules les plus utilisées par les ingénieurs pour les études hydrauliques impliquant un fond mobile. Historiquement, cette formule est une extension de la formule de Meyer-Peter (Zurich, 1934) établie à partir d'expériences en canal avec un fond composé de grains de taille variable.

Pour établir la formule de Meyer-Peter et Muller, les expériences ont été menées pour un nombre de variable plus étendu, en particulier, la pente du canal. Certaines expériences ont été réalisées pour des pentes de 0,2 et des particules grossières de 30mm. Les travaux de Meyer-Peter et Muller ont principalement porté sur le transport de sédiments par charriage, impliquant uniquement un mouvement des grains par roulement ou sauts le long du lit, et par la même, excluant le transport par suspension. L'expression du flux solide dépend de la constante de cisaillement  $\tau^*$  adimensionnelle donnée par,

$$\tau^* = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho_w)gd}.$$

Où  $\tau$  le terme de frottement,  $\rho_s$ ,  $\rho_w$  désignent respectivement les masses volumiques du solide et du liquide (ici, l'eau),  $g$  la gravité, et  $d$  le diamètre du sédiment. Dans ce cas la formule de Meyer-Peter et Muller s'écrit,

$$q_s = 8 \sqrt{g \left( \frac{\rho_s}{\rho_w} - 1 \right)} d^3 (\tau_{eff}^* - \tau_{c+}^*)^{3/2}.$$

Où  $\tau_{eff}^*$  correspond à la contrainte de cisaillement effective dépendant du coefficient de Strickler  $K_s$  et de la rugosité des grains  $K_p$ ,

$$\tau_{eff}^* = \left( \frac{K_s}{K_p} \right)^{3/2} \tau^*.$$

Et  $\tau_c^*$  est la contrainte critique généralement égale à 0.047. L'opérateur  $(.)_+$  correspond à la fonction  $max(., 0)$ .

Par ailleurs, en imposant une valeur de contrainte de cisaillement critique nulle, on peut relier la formule de Meyer-Peter et Muller à celle de Grass en prenant  $m_g = 3$  et,

$$A_g = \frac{8\sqrt{g}}{(\rho_s/\rho_w - 1)K_s^3 R1/2_h},$$

où  $R_h$  est le rayon hydraulique correspondant au rapport de la section mouillée  $\mathcal{S}$  sur le périmètre mouillé  $\mathcal{P}$ .

### I.3.3.3 Engelund et Hansen :

Contrairement aux formules précédentes qui sont adaptées au transport par charriage, il s'agit d'une formule traduisant le transport total en volume de grains à saturation c'est-à-dire qu'elle prend en compte le transport de sédiments par charriage et par suspension. Par ailleurs, elle s'avère être adéquate lorsque le processus de transport en suspension n'est pas négligeable, et donc lorsque la granulométrie est relativement homogène pour des particules de faible diamètre. On exprime la formule d'Engelund et Hansen comme suit,

$$q_s = 0.05 \sqrt{\frac{(\rho_s/\rho_w - 1)d^3}{g} R_h^{1/3} K_s^2 (\tau^*)^{5/2}}.$$

### I.3.3.4 Schoklisch de 1934 et 1943

Cette formule est obtenue en considérant les hypothèses suivantes :

(i) De nombreuses formules de rejets de sédiments comme le modèle Grass prennent la forme,

$$q_s = \alpha(u, h, \dots)u^m,$$

où  $\alpha$  est une formule empirique qui dépend des paramètres d'écoulement et des propriétés des sédiments.

(ii) On définit le paramètre  $m$  à 1.

(iii) Et enfin on utilise l'hypothèse que  $\alpha = A_g h$  où  $A_g$  est un paramètre physique donné selon les propriétés des particules de sédiments.

Ainsi le modèle de Schoklitsch s'écrit,

$$q_s = A_g h u.$$

## I.4 Le modèle couplé

### I.4.1 Saint-Venant-Exner

Dans un écoulement à fond mobile la cote (niveau) du fond varie selon la relation d'Exner qui est une équation de continuité pour la phase solide. Ce phénomène est modélisé par un couplage d'un modèle<sup>3</sup> hydraulique (équation de Saint-Venant) et d'un modèle morphodynamique

3. Le principe d'un modèle est de remplacer un système complexe en un objet ou opérateur simple reproduisant les aspects ou comportements principaux de l'original (ex : modèle réduit, maquette, modèle mathématique ou numérique, modèle de pensée ou raisonnement).

(équation d'Exner). Ce couplage permet de traduire l'influence des sédiments sur l'écoulement. Ainsi, le modèle couplé, **Saint-Venant - Exner**, exprime trois principes fondamentaux :

- la conservation de la masse du fluide ;
- la conservation de l'énergie ;
- la conservation de la masse de sédiments.

Le système couplé, (I.9)-(I.25) (**Saint-Venant - Exner**), en une dimension d'espace se tient

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x b - \frac{\tau}{\rho_w} \\ (1-p)\partial_t b + \partial_x q_s = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

Pour rappel,  $h(t, x)$ ,  $u(t, x)$  désignent respectivement la hauteur d'eau et la vitesse moyenne de l'écoulement. Le paramètre  $g$  correspond à l'accélération gravitationnelle. Le terme  $\tau/\rho_w$  représente le terme de frottement,  $\rho_w$  caractérise la masse volumique de l'eau. Le paramètre  $p$  est la porosité,  $b(t, x)$  indique la cote du fond et  $q_s(t, x)$  est le débit solide ou flux de sédiments.

Dans la suite, nous allons définir le système objet de notre mémoire. On utilise le système précédent en remplaçant les variables  $h, u, q_s$  et  $b$  par  $H, V, Q_s$  et  $B$  respectivement.

## I.4.2 Le modèle objet de notre mémoire

Nous déduisons du système (I.26) le système objet de notre mémoire sous les hypothèses suivantes :

- On considère un canal rectiligne à fond plat de longueur  $L(m)$ , animé d'un écoulement d'eau de hauteur  $H(m)$  et de vitesse  $V(m.s^{-1})$ . La topographie du fond est représentée par  $B$  ;
- On néglige la contrainte de frottement au fond,  $\tau$  ;
- En outre, le rejet de sédiments est obtenue en fusionnant la formule de Schokltsch (voir section I.3.3.4) et la citation de Kubatko et Al. ("*Des termes diffusifs de ce type dans l'équation de la continuité des sédiments sont apparus dans la documentation (voir, par exemple, Watanabe, 1987; Daly et Porporato, 2005). Leur inclusion dans l'équation peut être justifiée par l'argument selon lequel le transport de sédiments dépend de la pente du lit, c'est-à-dire que les pentes descendantes (ascendantes) entraînent une augmentation (une diminution) du taux de transport des sédiments en raison des effets de pesanteur*").

D'où le flux de sédiment est donné par :

$$q_s = Q_s = A_g HV - \varepsilon \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (\text{I.27})$$

où  $\varepsilon$  est le coefficient de diffusion positif des sédiments,  $A_g$  est un paramètre physique donné selon les propriétés des particules de sédiments. Ainsi le système couplé en une dimension d'espace s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HV}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial HV^2}{\partial x} + \frac{1}{2}g \frac{\partial H^2}{\partial x} + gH \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \\ (1-p) \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.28})$$

Ce système est illustré par la Figure I.3. Le paramètre  $p$ ,  $0 < p < 1$ , est la porosité des sédiments.

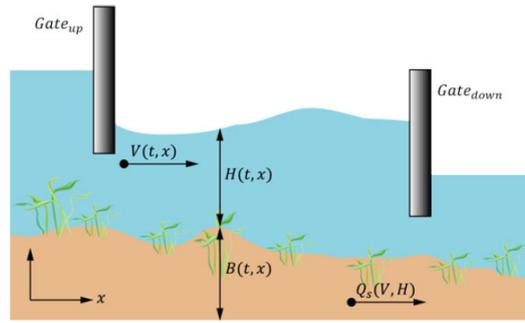


FIGURE I.3 – Vue longitudinale du canal.

## I.5 Algorithmes de contrôle des canaux

Un système de contrôle est un système élémentaire (algorithme + matériel) en charge du fonctionnement des structures transversales de canaux, basé sur les informations du système de canaux. Ces renseignements peuvent comprendre des variables mesurées, des conditions d'exploitation (p. ex., retraits prévus) et des objectifs (p. ex., cibles hydrauliques) [38].

Les stratégies de contrôle sont classés suivant la technique employée. L'ensemble de la communauté scientifique du contrôle des écoulements s'accorde sur la classification exprimée dans le schéma "Classification des stratégies de contrôle des écoulements" [33]. La difficulté que présente la classification des algorithmes de contrôle des canaux est due aux différentes façons de les caractériser (p. ex., variables contrôlées, configuration de l'implantation sur le terrain, gestion des communications, technique de conception, gestion des alarmes, emplacement le long d'un canal). Parmi tous ces critères, nous retenons les trois critères essentiels qui permettent de caractériser le comportement hydraulique, les performances et les contraintes des différents algorithmes de contrôle des canaux : les variables considérées, la logique de contrôle et la technique de conception.

### I.5.1 Les variables contrôlées

Les variables contrôlées sont les variables du système auxquelles le gestionnaire assigne des consignes. En automatique on parle de « poursuite » (« tracking ») lorsque ces consignes sont variables au cours du temps. Trois types de variables sont considérés dans les algorithmes de contrôle : les variables d'action de contrôle, les variables mesurées et les variables de contrôle.

#### I.5.1.1 Les variables d'action de contrôle

Les variables d'action de contrôle sont des variables issues de l'algorithme de contrôle et fournissent des structures croisées aux actionneurs (ex : les vannes, la décharge des niveaux d'eaux en amont et en aval).

#### I.5.1.2 Les variables mesurées

Les variables mesurées, également appelées entrées de l'algorithme de contrôle, sont les variables mesurées sur le système de canaux généralement les niveaux d'eau ou les débits.

#### I.5.1.3 Les variables de contrôle

Les variables de contrôle peuvent être des ouvertures de vanne, des incréments d'ouverture de vanne, des débits, des incréments de débit, etc.

---

## I.5.2 Logique de contrôle

La logique de contrôle fait référence au type et à l'orientation des liens entre les variables contrôlées et les variables d'action de contrôle. L'algorithme de contrôle utilise soit le contrôle de rétroaction (FB, également appelé contrôle en boucle fermée), le contrôle de transmission (FF, également appelé contrôle en boucle ouverte) soit la combinaison des deux.

### I.5.2.1 Feedback contrôle (contrôle en boucle fermé où contrôle rétroactif)

Il consiste à intégrer la réaction du système à la loi de commande. Ce type de contrôle nécessite de caractériser précisément le système avec un ensemble de variables d'états obtenues par des mesures suffisamment précises.

#### Principe

Dans un algorithme de contrôle rétroactif, les variables contrôlées ( $Y$ ) sont mesurées ou directement obtenues à partir de mesures. Tout écart par rapport à la cible ( $Y_c$ ) est réinjecté dans l'algorithme de contrôle afin de produire une mesure corrective  $U$  (cf figure I.4). Les perturbations ( $P$ ), même si elles sont inconnues, sont prises en compte indirectement, à travers leurs effets sur la sortie  $Y$  du système. En théorie du contrôle, ce concept est essentiel puisqu'il relie une variable d'action de contrôle  $U$  à une variable contrôlée  $Y$  [8].

- **Les variables  $U$**  sont les variables de contrôle du système, sur lesquelles on peut agir, afin de modifier l'état du système.
- **Les variables  $Y$**  sont les variables contrôlées du système, auxquelles on peut assigner des consignes (constantes ou variables).

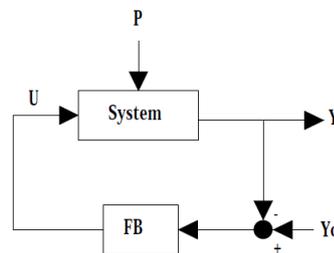


FIGURE I.4 – contrôle rétroactif.

### I.5.2.2 Feedforward contrôle (contrôle en boucle ouvert)

Le feedforward contrôle consiste à contrôler un système sans prendre en compte la réponse de ce système. Ce type de contrôle est simple sur le principe car il suffit d'appliquer une consigne de contrôle et laisser le système évoluer librement pour qu'il atteigne l'état souhaité. Cependant il est à utiliser avec précaution, car la plupart des systèmes sont instables par nature et l'état souhaité est parfois impossible à atteindre.

#### Principe

Dans un algorithme de contrôle en boucle ouverte, les variables d'action de contrôle  $U$  sont calculées à partir des variables ciblées  $Y_c$ , des estimations de perturbation  $P$  et de la simulation de processus (figure 5). Le contrôle de la transmission améliore habituellement le rendement du contrôle lorsque peu de perturbations inconnues se produisent dans le réseau de canaux. Le contrôle de la ligne d'alimentation peut compenser les retards inhérents au système en anticipant

les besoins des utilisateurs. Ces besoins doivent être estimés le plus précisément possible.

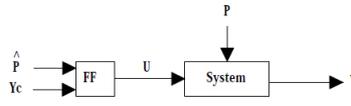


FIGURE I.5 – contrôle boucle ouvert.

Le feedforward contrôle est généralement insuffisant en soi, en raison des erreurs de modèle, des erreurs d'estimation des perturbations et des perturbations inconnues, et doit être combiné avec le contrôle rétroactif pour compenser ces erreurs

### I.5.2.3 Combinaison Feedforward control - Feedback control

Le contrôle rétroactif et le contrôle direct ont des avantages et des limites. Pour ces raisons, on utilise souvent la combinaison des deux. Pour un système multivariable (avec plusieurs actions de contrôle et variables contrôlées), plusieurs contrôleurs avec différentes logiques de contrôle peuvent être combinés. Par exemple, les rejets peuvent être contrôlés dans le contrôle des lignes d'alimentation et les niveaux d'eau dans le contrôle de la rétroaction. Par conséquent, certaines méthodes de réglementation peuvent apparaître dans plusieurs catégories.

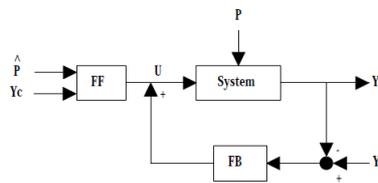


FIGURE I.6 – Feedforward contrôle + Feedback contrôle.

## I.5.3 Techniques de conception

La théorie du contrôle implique un processus en trois étapes : la modélisation du système (c.-à-d. la définition d'un modèle), l'analyse du système (c.-à-d. l'étude du comportement du modèle) et la conception du contrôleur. La technique de conception est l'algorithme ou la méthodologie utilisée dans l'algorithme de contrôle afin de générer les variables d'action de contrôle à partir des variables mesurées.

## I.6 Espaces Fonctionnels

### I.6.1 Les Espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

**Définition 3** On définit le support de  $f$  et on le note par

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$$

**Définition 4** L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  indéfiniment différentiables dont le support est un ensemble compact contenu dans  $\Omega$ .

**Définition 5** Soit  $p$  une multi-indices,

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n, |p| = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Pour toute fonction régulière  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on note par

$$D^p u = \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}},$$

la dérivée partielle d'ordre  $|p|$  de  $u$ .

**Définition 6** On dit qu'une suite  $\phi_j$  converge vers  $\phi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  quand  $j \rightarrow +\infty$  si

1. les  $\phi_j$  et  $\phi$  ont leur support dans un même compact  $K \subset \Omega$  ;
2. pour tout multi-indices  $p$ ,  $D^p \phi_j$  converge vers  $D^p \phi$  uniformément sur  $K$  ce qui revient à une convergence uniforme sur  $\Omega$ .

**Définition 7** Une distribution  $T$  sur  $\Omega$  est une forme linéaire "séquentiellement" continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ , c'est à dire  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi \mapsto T(\phi)$ , linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite  $\phi_j$  qui converge vers  $\phi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , la suite de nombres complexes  $T(\phi_j)$  converge vers  $T(\phi)$ .

Les distributions sur  $\Omega$  forment un espace vectoriel noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$  : c'est le dual topologique de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

## I.6.2 Les espaces de Lebesgue $L^p$ , $1 \leq p \leq \infty$

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $f$  une fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  où  $\mathbb{C}$ .

### I.6.2.1 Définitions

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré de mesure positive  $\mu$ , où  $\mathcal{T}$  est une tribu sur  $\Omega$ .

**Définition 8** Soit  $1 \leq p < \infty$ . On note  $\mathcal{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  l'ensemble des fonctions  $\mu$ -mesurables à valeurs réelles, qui sont définies p.p. sur  $\Omega$  et qui vérifient

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty.$$

**Définition 9** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . L'espace de **Lebesgue**  $L^p(\Omega) = L_{\mathbb{K}}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  est défini par

$$L^p(\Omega) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\},$$

où

$$[f] := \{h \in \mathcal{L}^p(\Omega) : h = f \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On définit l'espace  $L^\infty$  comme suit :

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f : f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega \right\}$$

---

**Définition 10** Pour  $1 \leq p < \infty$ , on appelle **norme**  $L^p$  et on note  $\|\cdot\|_p$ , l'application définie par

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Pour toute fonction,  $f$  mesurable, définie p.p sur  $\Omega$ , on note  $\|\cdot\|_{\infty}$ , l'application définie par

$$\|f\|_{\infty} := \text{Inf} \left\{ C > 0, \text{ tel que } \forall x \in \Omega, |f(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega \right\},$$

le supremum essentiel de la fonction  $f$ .

**Définition 11** Pour tout exposant réel  $1 < p < \infty$ , on appelle **exposant conjugué** de  $p$  l'exposant réel  $q$  tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dans la suite nous donnons quelques inégalités relatives aux espaces  $L^p$ .

### I.6.2.2 Théorème I.1 (Inégalité de Holder)

Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ , avec  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ . Alors  $f.g \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |f(x).g(x)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \text{ pour tout } 1 \leq p \leq \infty.$$

En particulier, pour  $p = 2$ ,  $q = 2$ , on a l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** suivante

$$\left| \int_{\Omega} f(x).g(x) \right| \leq \left( \int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} g^2 \right)^{1/2}.$$

### I.6.2.3 Théorème I.2 (Inégalité triangulaire)

Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . Soient  $f$  et  $g$  définies de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , des fonctions mesurables, alors on a :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

### I.6.2.4 Théorème I.3

Pour tout exposant  $1 \leq p \leq +\infty$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  est complet c'est-à-dire, c'est un espace de Banach.

### I.6.2.5 Proposition I.1

Soit  $f$  une fonction mesurable bornée positive d'un ensemble mesurable  $\Omega$ , de mesure finie non nulle dans  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \implies f = 0 \text{ pp.}$$

### I.6.3 Les espaces de Sobolev

Un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme  $L^p$  de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

**Définition 12** L'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est formé par l'ensemble des distributions  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telle que  $\partial^\alpha f \in L^2(\Omega)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha| \leq m$  c'est-à-dire,

$$H^m(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

**Définition 13** L'espace  $H^1(\Omega)$  est défini par :

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \partial u / \partial x_i \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est dans  $H^1(\Omega)$  s'il existe des fonctions  $v_1, \dots, v_N$  dans  $L^2(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est muni de la norme :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &:= \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 (dx) + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

**Définition 14** Soit  $F$  un espace pré-hilbertien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Une famille  $(e_j)_{j \in J \subset \mathbb{N}} \subset F$  est un système orthonormé si l'on a

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout } k, l \in J.$$

On dit que c'est une base hilbertienne si de plus  $(e_j)_{j \in J}$  est totale dans  $F$  (c'est-à-dire si le sous espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $F$ ).

#### I.6.3.1 Proposition I.2

L'espace  $H^1(\Omega)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  est un espace de Hilbert.

**Définition 15** On définit l'espace  $H(\text{div}, \Omega)$  par

$$H(\text{div}, \Omega) := \left\{ \mathcal{V} \in L^2(\Omega)^N ; \text{div} \mathcal{V} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

#### I.6.3.2 Théorème I.4

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert lipschitzien continue de  $\mathbb{R}^N$  (pas nécessairement borné). L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)^N$  est dense dans  $H(\text{div}, \Omega)$  [7].

---

### I.6.3.3 Théorème I.5 [Trace]

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- Pour les fonctions de  $H^1(\Omega)$ , on définit l'application trace  $\gamma_0$ ,

$$\begin{aligned}\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\partial\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  notée encore  $\gamma_0$ . Il existe  $c > 0$  /  $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$ .

- Pour les fonctions de  $H^2(\Omega)$ , on définit  $\gamma_1$ ,

$$\begin{aligned}\gamma_1 : H^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\partial\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto \gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \nabla v \cdot n\end{aligned}$$

qui se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ .

- Lorsque  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on définit  $\gamma_0$ ,

$$\begin{aligned}\gamma_0 : H^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\partial\Omega) &\longrightarrow H^1(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

qui se prolonge en une application linéaire continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $H^1(\partial\Omega)$ .

### I.6.4 Convergence forte, faible et faible-\*

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient  $\|\cdot\|$  une norme et  $f$  une forme linéaire sur  $E$ .

Dans cette section,  $(E, \|\cdot\|)$  désigne un espace de Banach de dual  $E'$ . Il est muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes, que l'on appelle **topologie forte**.

**Définition 16** On dit qu'une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $E$  converge fortement vers  $x \in E$  et on note  $x_n \longrightarrow x$  si :

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty$$

**Définition 17** La topologie faible  $\sigma(E, E')$  sur  $E$  est la topologie la moins fine sur  $E$ , c'est-à-dire, avec le minimum d'ensembles ouverts, rendant continus toutes les applications  $f \in E'$ .

On définit la convergence d'une suite de  $E$  pour la topologie faible  $\sigma(E, E')$  de la façon suivante.

**Définition 18** On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  converge faiblement vers  $x \in E$ , et on note  $x_n \rightharpoonup x$  si :

$$\text{pour tout } f \in E', \quad \langle f, x_n \rangle_{E', E} \longrightarrow \langle f, x \rangle_{E', E} \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

**Définition 19** On dit qu'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  converge faible-\* vers  $f$  dans  $E'$ , et on note  $f_n \xrightarrow{*} f$ , si pour tout  $x \in E$ ,

$$\langle f_n, x \rangle_{E', E} \longrightarrow \langle f, x \rangle_{E', E}, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

---

### I.6.4.1 Proposition I.3

Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $E'$  telle que  $f_n \rightharpoonup f$  faiblement dans  $E$ , alors  $f_n \xrightarrow{*} f$  faiblement- $*$  dans  $E'$ .

**Remarque 1** Si la suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $E$  converge faiblement vers  $x \in E$  alors  $x$  est appelée la limite faible de  $(x_n)$ .

## I.7 La méthode de Galerkin

En mathématiques, dans le domaine de l'analyse numérique, la méthode de Galerkin est une classe de méthodes permettant de transformer un problème continu (par exemple une équation différentielle) en un problème discret. C'est une méthode approximative parmi d'autres, utilisée pour résoudre (déterminer l'existence et l'unicité des solutions) des équations aux Dérivées partielles d'évolution.

### Principe

La méthode de Galerkin<sup>4</sup> est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation [13].

## I.8 La méthode des volumes Finis

La méthode des volumes finis (MVF) est utilisée pour discrétiser la partie spatiale des lois de conservation. Cette méthode, développée initialement dans le cadre du traitement numérique des équations d'Euler, présente le grand intérêt d'être intrinsèquement conservative et s'adapte très bien à l'aspect discontinu des solutions. L'approche de la méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en plusieurs cellules  $\mathcal{C}_i$ , qui ne se chevauchent pas et dont la somme fait exactement le volume du domaine de calcul, puis intégrer sur chaque cellule et sur un pas de temps. Apparaissent alors les moyennes des solutions sur chaque cellule et des termes de bords, autrement dit les flux échangés entre les cellules au niveau de leur frontière, ou interface. Ainsi le flux sortant d'une cellule est égale à celui qui rentre dans la cellule voisine, d'où l'algorithme conservatif.

Dans les modèles de volumes finis existants, qui sont basés sur la résolution des équations de Saint-Venant, deux techniques ont été principalement utilisées : le solveur de l'approximation Riemann de Roe (RARS : *Roe's Approximate Riemann Solver*) et la méthode de projection (MP).

### I.8.1 Le RARS

Le RARS a été initialement proposé pour la résolution de l'équation hyperbolique homogène (Roe, 1981). Cette méthode de Roe (1981) permettant d'améliorer le rendement de la méthode

---

4. Boris Grigorievitch Galerkin est un mathématicien et un ingénieur russe puis soviétique, réputé pour ses contributions à l'étude des treillis de poutres et des plaques élastiques. Son nom reste lié à une méthode de résolution approchée des structures élastiques, qui est l'une des bases de la méthode des éléments finis.

---

de Godunov (moins coûteuse et moins dissipée) consiste à rechercher un problème de Riemann linéarisé qui peut être résolu exactement à l'aide des données initiales.

Nous développerons cette méthode plus loin dans le **Chapitre 3**.

## I.8.2 La méthode de projection

La méthode de projection (MP) proposée indépendamment par (Chorin, 1968 ; 1969 ; Temam, 1968 ; 1977) est la technique fréquemment utilisée pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en variables primitives. Cette méthode, est basée sur l'utilisation d'un champ de vecteurs vitesses auxiliaires (en ôtant les termes de pression des équations de Navier-Stokes), et sur l'aboutissement à une équation de Poisson pour la pression (comme la seule inconnue) par un couplage entre l'équation de continuité et celle de quantité de mouvement [36]. Guillou (1996) , Guillou et Nguyen (1999) ont utilisé la MP pour la résolution des équations de Saint-Venant dans un maillage curviligne et donc structuré<sup>5</sup>. Ils ont montré que l'utilisation d'un maillage non décalé pour la résolution des équations de Saint-Venant peut produire des oscillations indésirables non seulement dans les champs de la surface libre, mais également dans ceux de vitesses. La MP se montre très efficace pour calculer les écoulements à surface libre sur des fonds très irréguliers. L'utilisation de cette méthode est motivé, dans certains ouvrages, en prévision des applications de ce code à des problèmes qui représentent des termes sources importants dus principalement à une variation rapide et à une forte irrégularité du fond.

---

5. Un maillage structuré est un maillage à connectivité fixe. Le maillage est alors défini par sa seule liste de noeuds.

# CHAPITRE II

---

## CONTRÔLE DU SYSTÈME DE SAINT-VENANT - EXNER DANS UN CANAL OUVERT

---

### II.1 Introduction

En milieu naturel, les interactions entre un écoulement et le fond ont tendance à modifier la morphologie du lit. Sachant que le fond influence également l'écoulement, il existe donc une interdépendance entre les parties fluide et solide. Pour tenir compte du processus de sédimentation, le modèle de *Saint-Venant-Exner* demeure un des modèles les plus utilisés par les ingénieurs. La majorité des outils logiciels est basée sur ce modèle. Il constitue un modèle reconnu et bien adapté à la plupart des études géomorphologiques. Ce chapitre est consacré à la conception du contrôle rétroactif par estimation à priori du système *Saint-Venant-Exner* pour le contrôle des écoulements dans un canal ouvert. Nous présentons le résultat principal ainsi que sa preuve.

Dans la suite, nous considérons le modèle couplé, (*Saint-Venant-Exner*), en une dimension d'espace donné par (voir chapitre 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HV}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial HV^2}{\partial x} + \frac{1}{2}g \frac{\partial H^2}{\partial x} + gH \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \\ (1-p) \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_g HV - \varepsilon \frac{\partial B}{\partial x} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

où les variables  $H$ ,  $V$  et  $B$  indiquent respectivement la hauteur de la colonne d'eau, la vitesse et la bathymétrie. Le paramètre  $p$  est la porosité du sédiment.  $A_g$  est un paramètre physique donné et  $\varepsilon$  est le coefficient de diffusion positif des sédiments.

### II.2 Linéarisation du modèle couplé

**Définition 1** : La *linéarisation* consiste à remplacer une équation non linéaire  $\dot{x} = f(x)$ , près d'un équilibre  $x^*$ , par une équation linéaire. Cette dernière décrit les petites variations de la solution quand la condition initiale est une petite variation de l'équilibre.

Dans la suite, nous remplaçons le terme  $HV$  par  $Q$ . Ainsi, le système (II.1) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{H} \right) + \frac{1}{2}g \frac{\partial H^2}{\partial x} + gH \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{A_g}{1-p} \frac{\partial Q}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}. \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

où

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1-p}$$

### II.2.1 États d'équilibre du système

Les états d'équilibre sont des états stationnaires. Soit l'état d'équilibre associé au système (II.2) noté par  $(\bar{H}, \bar{Q}, \bar{B})$ . Il y a stabilité si, à partir d'un temps  $t$  donné, la hauteur d'eau, le débit et la bathymétrie ne varient plus, c'est-à-dire :

$$\partial_t \bar{H} = \partial_t \bar{Q} = \partial_t \bar{B} = 0. \quad (\text{II.3})$$

A l'équilibre, le système (II.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}} \right) + \frac{1}{2}g \frac{\partial \bar{H}^2}{\partial x} + g\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \frac{A_g}{1-p} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2}. \end{array} \right.$$

De (II.3), il résulte

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}} \right) + g\bar{H} \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

### II.2.2 Linéarisation

On introduit l'état résiduel  $(h, q, b)$  comme la différence entre l'état actuel  $(H, Q, B)$  et l'état d'équilibre  $(\bar{H}, \bar{Q}, \bar{B})$ , c'est-à-dire

$$h(x, t) = H(x, t) - \bar{H} ; \quad q(x, t) = Q(x, t) - \bar{Q} ; \quad b(x, t) = B(x, t) - \bar{B}.$$

Ensuite, on suppose que l'état résiduel est très petit par rapport par à l'état d'équilibre,

$$|h| \ll \bar{H}, \quad |q| \ll \bar{Q} \quad \text{et} \quad |b| \ll \bar{B}. \quad (\text{II.5})$$

En utilisant (II.4) et (II.5) dans (II.2), on obtient :

- Pour la première équation du système **(II.2)**

$$\frac{\partial(h + \bar{H})}{\partial t} + \frac{\partial(q + \bar{Q})}{\partial x} = 0$$

D'où

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.6})$$

- Pour l'équation deux de **(II.2)**,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( q + \bar{Q} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{H} \right) + g(h + \bar{H}) \frac{\partial(h + \bar{H})}{\partial x} + g(h + \bar{H}) \frac{\partial(b + \bar{B})}{\partial x} = 0.$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{H} \right) + g\bar{H} \frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + g\bar{H} \frac{\partial b}{\partial x} + g\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{H} \right) + g\bar{H} \frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H} \frac{\partial b}{\partial x} + g\bar{H} \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) = 0.$$

Posons

$$f(H, Q) = \frac{Q^2}{H}.$$

Linéarisons la fonction  $f$  :

$$f(H, Q) = f(h + \bar{H}, q + \bar{Q}) = f(\bar{H}, \bar{Q}) + h \frac{\partial f}{\partial H}(\bar{H}, \bar{Q}) + q \frac{\partial f}{\partial Q}(\bar{H}, \bar{Q}),$$

or

$$\frac{\partial f}{\partial H}(H, Q) = -\frac{Q^2}{H^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial Q}(H, Q) = 2\frac{Q}{H}.$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial H}(\bar{H}, \bar{Q}) = -\frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial Q}(\bar{H}, \bar{Q}) = 2\frac{\bar{Q}}{\bar{H}}.$$

Ainsi

$$\frac{Q^2}{H} = \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}} - h \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}^2} + 2q \frac{\bar{Q}}{\bar{H}}.$$

Par conséquent, en dérivant par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{H} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}} \right) - \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{H}} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2\frac{\bar{Q}}{\bar{H}} \frac{\partial q}{\partial x}.$$

D'où la deuxième équation de **(2.2)** devient :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2 \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{H}} \right) \frac{\partial q}{\partial x} - \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{H}} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H} \frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}} \right) + g\bar{H} \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) = 0.$$

D'après le système **(II.4)**,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}} \right) + g\bar{H} \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) = 0.$$

Ainsi

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2\left(\frac{\bar{Q}}{\bar{H}}\right)\frac{\partial q}{\partial x} - \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{H}}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H}\frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H}\frac{\partial b}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.7})$$

• Et enfin, pour la troisième équation de (II.2) :

$$\frac{\partial(b + \bar{B})}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial(q + \bar{Q})}{\partial x} = \varepsilon_1\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial q}{\partial x} = \varepsilon_1\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}. \quad (\text{II.8})$$

De (II.6) à (II.8), le système linéaire obtenu s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + 2\left(\frac{\bar{Q}}{\bar{H}}\right)\frac{\partial q}{\partial x} - \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{H}}\right)^2\frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H}\frac{\partial h}{\partial x} + g\bar{H}\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial q}{\partial x} = \varepsilon_1\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.9})$$

Posons :

$$\beta_1 = 2\frac{\bar{Q}}{\bar{H}}, \quad \beta_2 = \frac{A_g}{1-p}, \quad \gamma_1 = g\bar{H} - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}^2}, \quad \chi = g\bar{H}, \quad \chi_1 = \frac{\chi}{\beta_2}. \quad (\text{II.10})$$

Par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \beta_1\frac{\partial q}{\partial x} + \gamma_1\frac{\partial h}{\partial x} + \chi\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial q}{\partial x} = \varepsilon_1\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.11})$$

### II.2.2.1 Conditions initiales

Les conditions initiales sont données par

$$h(0, x) = h^0(x), \quad q(0, x) = q^0(x), \quad b(0, x) = b^0(x). \quad (\text{II.12})$$

### II.2.2.2 Conditions limites

On impose quatre conditions aux bords. En amont ( $x = 0$ ), on suppose qu'il n'y a pas de perturbations, c'est-à-dire le débit et la bathymétrie sont nuls. En aval, ( $x = L$ ), on construit un contrôle rétroactif  $q_L$  qui permet de régulariser ce modèle et on impose que le flux est nul. Ainsi les conditions limites sont données par :

$$q(t, 0) = 0, \quad q(t, L) = q_L(t), \quad b(t, 0) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial x}(t, L) = 0, \quad (\text{II.13})$$

où  $q_L$  est la loi de contrôle (contrôle rétroactif) à construire afin d'obtenir la convergence exponentielle de l'énergie associée au système (II.11) vers zéro.

**Remarque 1** : Dans un écoulement sous-critique, le coefficient  $\gamma_1$  est positif.

## II.3 Espace de fonctions

### II.3.1 Définitions

Soit  $\Omega = (0, T) \times (0, L)$ . On dénote l'intervalle  $(0, L)$  par  $\mathfrak{J}$ .

**Définition 2** On définit l'espace  $H(\text{div}, \Omega)$  par

$$H(\text{div}, \Omega) := \left\{ \mathcal{V} \in L^2(\Omega)^2 ; \text{div} \mathcal{V} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \text{avec } \text{div} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Le système (II.11) peut-être réécrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_1 q + \gamma_1 h + \chi b)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_2 q - \varepsilon_1 \frac{\partial b}{\partial x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Nous déduisons la proposition suivante du **Théorème II.5.1** dans [34].

### II.3.2 Proposition II.1

Dans un régime fluvial (écoulement sous-critique), si la solution du système (II.14) est dans  $L^2(\Omega)$  alors les vecteurs

$$\begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ \beta_1 q + \gamma_1 h + \chi b \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} b \\ \beta_2 q - \varepsilon_1 \frac{\partial b}{\partial x} \end{pmatrix}$$

sont dans  $H(\text{div}, \Omega)$ .

**Définition 3** L'espace  $\mathcal{S}^0$  est l'espace des fonctions dans  $H^1(0, L)$  qui s'annulent en  $x = 0$ ,

$$\mathcal{S}^0 := \left\{ f \in H^1(0, L) ; f(0) = 0 \right\}.$$

**Définition 4** Soit  $(X, Y, Z)$  défini de  $\Omega^2 \times \Omega^3 \times \Omega^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Nous définissons l'espace  $W$  comme :

$$W := \left\{ (h, q, b) \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))^2 \times L^2(0, T; \mathcal{S}^0), X(h, q), Y(h, q, b), Z(q, b) \in H(\text{div}, \Omega) \right\}.$$

### II.3.3 Notions de distribution

Soit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  le dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , l'espace de distribution sur  $\Omega$ . On dénote par  $(\cdot, \cdot)$  le couplage de la dualité entre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Si  $f$  est une fonction localement intégrable, alors  $f$  peut être identifiée avec une distribution par

$$(f, \phi) = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En d'autres termes,  $(\cdot, \cdot)$  est une extension du produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}$  et

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i.$$

Pour tout  $u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on définit la dérivé d'ordre  $\alpha$  de  $u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , noté par  $\partial^\alpha u$ , comme suit :

$$(\partial^\alpha u, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha \phi) \quad \forall \phi \in \Omega.$$

### II.3.3.1 Théorème II.1 [7]

Soit  $\Theta$  un ouvert suffisamment régulier de  $\mathbb{R}^N$ .

La trace  $\gamma_n$  définit par

$$\begin{aligned} \gamma_n : \mathcal{D}(\overline{\Theta})^N &\longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Theta) \\ v &\longmapsto v.n|_{\partial\Theta} \end{aligned}$$

peut-être étendue par continuité à une trace linéaire et continue, toujours désignée par  $\gamma_n$ , de  $H(\mathbf{div}, \Theta)$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Theta)$ .

#### Preuve

Soient  $\phi \in \mathcal{D}(\overline{\Theta})$  et  $v \in \mathcal{D}(\overline{\Theta})^N$ . La formule de Green's suivant tient,

$$(v, \mathbf{grad}\phi) + (\mathbf{div} v, \phi) = \int_{\partial\Theta} \phi v.n ds.$$

Comme  $\mathcal{D}(\overline{\Theta})$  est dense dans  $H^1(\Theta)$ , cette équation est toujours valable pour  $\phi$  dans  $H^1(\Theta)$  et  $v$  dans  $\mathcal{D}(\overline{\Theta})^N$ .

Donc

$$\left| \int_{\partial\Theta} \phi v.n ds \right| \leq \|v\|_{H(\mathbf{div}, \Theta)} \|\phi\|_{1, \Theta}, \quad \forall \phi \in H^1(\Theta), \quad v \in \mathcal{D}(\overline{\Theta})^N.$$

Soit  $\mu$  un élément de  $H^{1/2}(\partial\Theta)$ . Alors il existe un élément  $\phi$  de  $H^1(\Theta)$  tel que  $\phi = \mu$  sur  $\partial\Theta$ . Par conséquent l'inégalité ci-dessus implique que

$$\left| \int_{\partial\Theta} \mu v.n ds \right| \leq \|v\|_{H(\mathbf{div}, \Theta)} \|\mu\|_{1/2, \partial\Theta}, \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\partial\Theta), \quad v \in \mathcal{D}(\overline{\Theta})^N.$$

Ainsi

$$\|v.n\|_{-1/2, \partial\Theta} \leq \|v\|_{H(\mathbf{div}, \Theta)}.$$

Par conséquent la topographie linéaire  $\gamma_n : v \rightarrow v.n|_{\partial\Theta}$  définie sur  $\mathcal{D}(\overline{\Theta})^N$  est continue pour la norme de  $H(\mathbf{div}, \Theta)$ .

Puisque  $\mathcal{D}(\overline{\Theta})^N$  est dense dans  $H(\mathbf{div}, \Theta)$ ,  $\gamma_n$  peut être étendue par continuité à une topographie encore appelée  $\gamma_n \in \mathcal{L}(H(\mathbf{div}, \Theta); H^{-1/2}(\partial\Theta))$  tel que

$$\|\gamma_n\|_{\mathcal{L}(H(\mathbf{div}, \Theta); H^{-1/2}(\partial\Theta))} \leq 1 \quad \square.$$

Par extension,  $\gamma_n v$  est appelé la composante normale de  $v$  sur  $\partial\Theta$  et est dénoté simplement par  $v.n$ .

### II.3.3.2 Proposition II.2

Si  $(h, q, b) \in W$ , alors la trace de  $(h, q, b)$  au bord de  $\Omega$  est définie dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

En effet, grâce au **Théorème II.1**,

$$X(h, q).n, \quad Y(h, q, b).n, \quad Z(q, b).n \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

où  $\partial\Omega$  est le bord de  $\Omega$  et  $n$ , la normale unitaire extérieur au bord de  $\Omega$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} h(0, \cdot), \quad h(T, \cdot), \quad b(0, \cdot), \quad b(T, \cdot) &\in H^{-\frac{1}{2}}(]0, L[), \quad q \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \\ (\gamma_1 h + \chi b)(\cdot, 0), \quad (\gamma_1 h + \chi b)(\cdot, L), \quad \frac{\partial b}{\partial x}(\cdot, 0), \quad \frac{\partial b}{\partial x}(\cdot, L) &\in H^{-\frac{1}{2}}(]0, T[), \\ b(\cdot, 0), \quad b(\cdot, L) &\in L^2(]0, T[). \end{aligned}$$

Donc,  $h, b, q \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

## II.4 Formulation faible et estimation à priori

### II.4.1 Formulation faible

La formulation faible est une autre manière d'énoncer un problème physique régi par des équations différentielles ou aux dérivées partielles. L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer de concepts et de propriétés de l'analyse fonctionnelle, en particulier ceux des espaces de Hilbert et de Sobolev.

Considérons maintenant la formulation faible suivante du système (II.11).

• **Pour la conservation de la masse :**

Soit  $\psi \in H^1(0, L)$ . On multiplie la première équation du système (II.11) par  $\gamma_1\psi$  et ensuite on intègre par rapport  $x$  :

$$\int_0^L \gamma_1\psi \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_0^L \gamma_1\psi \frac{\partial q}{\partial x} dx = 0.$$

En intégrant par partie le seconde terme, il résulte :

$$\int_0^L \gamma_1\psi \frac{\partial h}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial}{\partial x}(\gamma_1\psi) dx + \gamma_1\psi(L)(L)q(t, L) - \gamma_1\psi(0)q(t, 0) = 0.$$

D'après les conditions aux bords,  $q(t, 0) = 0$ .

Ainsi, on a la formulation faible de la conservation de la masse donnée par :

$$\int_0^L \gamma_1\psi \frac{\partial h}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\psi\gamma_1)}{\partial x} dx + \gamma_1\psi(L)q(t, L) = 0 \quad (\text{II.15})$$

• **Pour la conservation de la quantité de mouvement :**

Soit  $\phi \in \mathcal{S}^0$ . On multiplie la deuxième équation du système (II.11) et puis on intègre par rapport à  $x$  :

$$\int_0^L \phi \frac{\partial q}{\partial t} dx + \int_0^L \beta_1\phi \frac{\partial q}{\partial x} dx + \int_0^L \gamma_1\phi \frac{\partial h}{\partial x} dx + \int_0^L \chi\phi \frac{\partial b}{\partial x} dx = 0$$

En intégrant par partie les trois derniers termes, il résulte :

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi \frac{\partial q}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial}{\partial x}(\beta_1\phi) dx - \int_0^L h \frac{\partial}{\partial x}(\gamma_1\phi) dx - \int_0^L b \frac{\partial}{\partial x}(\chi\phi) dx + \beta_1\phi(L)q(t, L) \\ - \beta_1\phi(0)q(t, 0) + \gamma_1\phi(L)h(t, L) - \gamma_1\phi(0)h(t, 0) + \chi\phi(L)b(t, L) - \chi\phi(0)b(t, 0) \end{aligned}$$

Par définition de l'espace  $\mathcal{S}^0$ ,  $\phi(0) = 0$ . Par conséquent, la formulation faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est donnée par :

$$\int_0^L \phi \frac{\partial q}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\phi\beta_1)}{\partial x} dx - \int_0^L h \frac{\partial(\phi\gamma_1)}{\partial x} dx - \int_0^L b \frac{\partial(\phi\chi)}{\partial x} dx + \mathcal{BT}_2 = 0, \quad (\text{II.16})$$

où

$$\mathcal{BT}_2 = \beta_1\phi(L)q(t, L) + \phi(L)(\gamma_1h(t, L) + \chi b(t, L)).$$

• **Pour la conservation des sédiments :**

Soit  $\pi \in \mathcal{S}^0$ .

En multipliant la troisième équation du système (II.11) par  $\chi\pi$  et intégrant par rapport à  $x$ , il résulte

$$\int_0^L \chi\pi \frac{\partial b}{\partial t} dx + \int_0^L \beta_2 \chi\pi \frac{\partial q}{\partial x} dx = \int_0^L \varepsilon_1 \chi\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx$$

On divise l'équation par  $\beta_2$  et puis on intègre par partie les deux derniers termes :

$$\begin{aligned} \int_0^L \pi \chi_1 \frac{\partial b}{\partial t} dx - \int_0^L \frac{\partial(\pi\chi)}{\partial x} q dx + \chi\pi(L)q(t, L) - \chi\pi(0)q(t, 0) &= \int_0^L \varepsilon_1 \chi_1 \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} dx \\ &+ \varepsilon_1 \chi_1 \pi(L) \frac{\partial}{\partial x} b(t, L) - \varepsilon_1 \chi_1 \pi(0) \frac{\partial}{\partial x} b(t, 0), \end{aligned}$$

où

$$\chi_1 = \frac{\chi}{\beta_2}.$$

D'après les conditions aux bords, on a  $\frac{\partial}{\partial x} b(t, L) = 0$ . Par définition de l'espace  $\mathcal{S}^0$ ,  $\pi(0) = 0$ . Ainsi, la formulation faible de l'équation de conservation des sédiment est donnée par :

$$\int_0^L \pi \chi_1 \frac{\partial b}{\partial t} dx - \int_0^L \frac{\partial(\pi\chi)}{\partial x} q dx + \int_0^L \varepsilon_1 \chi_1 \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} dx + \mathcal{BT}_3 = 0, \quad (\text{II.17})$$

où

$$\mathcal{BT}_3 = \chi\pi(L)q(t, L).$$

La formulation faible des équations aux dérivées partielles qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre d'un espace de Hilbert est une formulation variationnelle. Cette formulation faible (formulation variationnelle) est donnée en vue de montrer l'existence de solutions faibles pour le système linéaire (II.11) grâce à la technique de Galerkin. Dans la suite, nous considérons la formulation faible (II.15) – (II.17) du système (II.11).

## II.4.2 Estimation de l'énergie à priori

Nous introduisons la fonction suivante comme l'énergie à stabiliser,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\gamma_1 h^2 + q^2 + \chi_1 b^2) dx.$$

La décroissance de l'énergie permet de garantir une stabilité autour de l'équilibre. En effet, cette fonction telle que définie est une fonction de  $h$ ,  $q$  et  $b$ . Sa décroissance vers 0 permet d'assurer la convergence des perturbations  $h$ ,  $q$  et  $b$  vers zéro.

### II.4.2.1 La loi de contrôle

Notre loi de contrôle s'inscrit dans l'esprit des travaux de Séné et al. dans [4]. La différence est : eux, ils visent seulement à contrôler les équations en eau peu profonde, tandis que, nous contrôlons le modèle couplé. Dans le cadre de notre mémoire, le contrôle s'opère seulement sur un point ( $x = L$ ). Nous imposons en aval la décharge d'eau suivante comme loi de contrôle :

$$q(t, L) = \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)), \quad (\text{II.18})$$

où  $\mu(\cdot)$ , le paramètre de contrôle, est une fonction positive tel que  $\mu(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ .

Cette loi de contrôle est un rétroactif linéaire au bord (en aval). Il permet à la hauteur, le débit de l'eau et la bathymétrie d'atteindre un état d'équilibre lorsque le temps est suffisamment grand.

### II.4.2.2 L'estimation d'énergie

Pour obtenir une estimation de l'énergie, on remplace  $(\psi, \phi, \pi)$  par  $(h, q, b)$  dans le système (II.15)- (II.17)

Ainsi, l'équation (II.15) devient :

$$\int_0^L \gamma_1 h \frac{\partial h}{\partial t} - \int_0^L q \frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} dx + \gamma_1 h(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0,$$

or, le premier terme peut-être réécrit comme suit

$$\int_0^L \gamma_1 h \frac{\partial h}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \gamma_1 \frac{\partial h^2}{\partial t} dx$$

Donc, on a :

$$\int_0^L \gamma_1 h \frac{\partial h}{\partial t} - \int_0^L q \frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} dx + \gamma_1 h(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0.$$

*De même, l'équation (II.16) devient :*

$$\begin{aligned} & \int_0^L q \frac{\partial q}{\partial t} dx - \int_0^L \frac{\partial(q\beta_1)}{\partial x} q dx - \int_0^L \frac{\partial(q\gamma_1)}{\partial x} h dx - \int_0^L \frac{\partial(q\chi)}{\partial x} b dx + \beta_1 q^2(t, L) \\ & + q(t, L) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0. \end{aligned}$$

Le premier terme peut-être réécrit comme suit

$$\int_0^L q \frac{\partial q}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial q^2}{\partial t} dx.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial q^2}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\beta_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L h \frac{\partial(\gamma_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L b \frac{\partial(\chi q)}{\partial x} dx + \beta_1 q^2(t, L) \\ & + q(t, L) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0. \end{aligned}$$

*Il en est de même pour l'équation (II.17),*

$$\int_0^L b \chi_1 \frac{\partial b}{\partial t} dx - \int_0^L \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} q dx + \int_0^L \varepsilon_1 \chi_1 \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + dx + \chi b(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \int_0^L \chi_1 \frac{\partial b^2}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} dx + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx + \chi b(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0.$$

Par conséquent, le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_0^L \gamma_1 \frac{\partial h^2}{\partial t} - \int_0^L q \frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} dx + \gamma_1 h(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0, \\ \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial q^2}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\beta_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L h \frac{\partial(\gamma_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L b \frac{\partial(\chi q)}{\partial x} dx \\ + \beta_1 q^2(t, L) + q(t, L) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0, \\ \frac{1}{2} \int_0^L \chi_1 \frac{\partial b^2}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} dx + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx + \chi b(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

### II.4.2.3 La variation de l'énergie

A travers la formulation faible (II.19), on détermine la variation de l'énergie E du système (II.11). En additionnant les trois équations, il résulte :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L \gamma_1 \frac{\partial h^2}{\partial t} - \int_0^L q \frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} dx + \gamma_1 h(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial q^2}{\partial t} dx \\ & - \int_0^L q \frac{\partial(\beta_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L h \frac{\partial(\gamma_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L b \frac{\partial(\chi q)}{\partial x} dx + \beta_1 q^2(t, L) + q(t, L) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \chi_1 \frac{\partial b^2}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} dx + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx + \chi b(t, L) \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) = 0. \end{aligned}$$

En ordonnant ces termes, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L \gamma_1 \frac{\partial h^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial q^2}{\partial t} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \chi_1 \frac{\partial b^2}{\partial t} dx - \int_0^L q \frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\beta_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L q \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} dx \\ & + \mu(t) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) (\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L)) - \int_0^L h \frac{\partial(\gamma_1 q)}{\partial x} dx - \int_0^L b \frac{\partial(\chi q)}{\partial x} dx + \beta_1 q^2(t, L) \\ & + \gamma_1 q(t, L) h(t, L) + \chi q(t, L) b(t, L) + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx = 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, le premier terme devient

$$\begin{aligned} \int_0^L h \frac{\partial(\gamma_1 q)}{\partial x} dx &= \left[ \gamma_1 q(t, x) h(t, x) \right]_0^L - \int_0^L q \frac{\partial(\gamma_1 h)}{\partial x} dx, \\ &= \gamma_1 q(t, L) h(t, L) - \gamma_1 q(t, 0) h(t, 0) - \int_0^L q \frac{\partial(\gamma_1 h)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

D'après les conditions limites,  $q(t, 0) = 0$ . Donc

$$\int_0^L h \frac{\partial(\gamma_1 q)}{\partial x} dx = \gamma_1 q(t, L) h(t, L) - \int_0^L q \frac{\partial(\gamma_1 h)}{\partial x} dx.$$

De même,

$$\int_0^L b \frac{\partial(\chi q)}{\partial x} dx = \chi q(t, L) h(t, L) - \int_0^L q \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} dx.$$

En somme, l'équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \gamma_1 \frac{\partial h^2}{\partial t} + \frac{\partial q^2}{\partial t} + \chi_1 \frac{\partial b^2}{\partial t} dx &= \int_0^L q \left[ \frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_1 q)}{\partial x} + \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} \right] dx - \beta_1 q^2(t, L) - \gamma_1 q(t, L) h(t, L) \\ &- \chi q(t, L) b(t, L) + \gamma_1 q(t, L) h(t, L) - \int_0^L q \frac{\partial(\gamma_1 h)}{\partial x} dx + \chi q(t, L) h(t, L) - \int_0^L q \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} dx \\ &- \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L))^2 - \int_0^L q \frac{\partial \gamma_1 h}{\partial x} dx - \int_0^L q \frac{\partial \chi b}{\partial x} dx + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx = 0. \end{aligned}$$

En réduisant certains termes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \gamma_1 \frac{\partial h^2}{\partial t} + \frac{\partial q^2}{\partial t} + \chi_1 \frac{\partial b^2}{\partial t} dx &= \int_0^L q \left[ \frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_1 q)}{\partial x} + \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} \right] dx - \beta_1 q^2(t, L) \\ &- \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L))^2 - \int_0^L q \frac{\partial \gamma_1 h}{\partial x} dx - \int_0^L q \frac{\partial \chi b}{\partial x} dx + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx = 0, \end{aligned}$$

or

$$\beta_1 q^2(t, L) = 2 * \frac{\beta_1}{2} q^2(t, L) \quad \text{et} \quad \frac{\beta_1}{2} q^2(t, L) = \int_0^L q \frac{\beta_1 \partial q}{\partial x} dx.$$

Alors

$$\beta_1 q^2(t, L) = \frac{\beta_1}{2} q^2(t, L) + \int_0^L q \frac{\beta_1 \partial q}{\partial x} dx.$$

On déduit de la deuxième équation du système (II.11) que

$$\frac{\partial(h\gamma_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_1 q)}{\partial x} + \frac{\partial(\chi b)}{\partial x} = -\partial_t q.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \gamma_1 h^2 + q^2 + \chi_1 b^2 dx &= - \int_0^L q \frac{\partial q}{\partial t} dx - \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L))^2 - \int_0^L q \frac{\partial \gamma_1 h}{\partial x} dx \\ &- \int_0^L q \frac{\partial \chi b}{\partial x} dx - \int_0^L q \frac{\partial \beta_1 q}{\partial x} dx - \frac{\beta_1}{2} q^2(t, L) - \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Le terme à gauche est la dérivé de la fonction d'énergie. Donc, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= - \int_0^L q \left[ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_1 h}{\partial x} + \frac{\partial \beta_1 q}{\partial x} + \frac{\partial \chi b}{\partial x} \right] dx - \frac{\beta_1}{2} q^2(t, L) - \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L))^2 \\ &- \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

D'après l'équation de conservation de la quantité de mouvement (l'équation 2 du système (II.11)),

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_1 h}{\partial x} + \frac{\partial \beta_1 q}{\partial x} + \frac{\partial \chi b}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, la variation d'énergie satisfait :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{\beta_1}{2}q^2(t, L) - \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L))^2 - \varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (\text{II.20})$$

Posons

$$a = -\frac{\beta_1}{2}, \quad b = -\frac{1}{\mu(t)} \quad \text{et} \quad c = -\varepsilon_1 \int_0^L \chi_1 \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Alors la variation d'énergie peut s'écrire :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \mathcal{Q}(q_L) = dq_L^2(t) + c \quad \text{avec} \quad d = a + b \quad (\text{II.21})$$

Le polynôme  $\mathcal{Q}$  est un polynôme du seconde degré par rapport à  $q_L$ .

Le terme à gauche de l'équation (II.21) est négative. Par conséquent, l'énergie décroissante<sup>1</sup>.

## II.5 Résultat principal

Dans cette section, nous présentons le résultat principal de ce travail.

### II.5.1 Théorème

Soit  $(h^0, q^0, b^0) \in L^2(0, L)^2 \times \mathcal{S}^0$ . Le système (II.11)-(II.12)-(II.13) avec la loi de contrôle (II.18) a une unique solution  $(h, q, b)$  en  $W$ . En outre, pour tout  $x$  dans  $(0, L)$ ,  $(h(t, x), q(t, x), b(t, x))$  converge vers zéro quand  $t$  tend à  $\infty$ .

### II.5.2 Preuve

La démonstration du Théorème se fera en deux étapes.

#### • Etape 1 : Existence et Unicité de la solution

La preuve du **Théorème** est faite en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Soit  $\{v_i \in H^1(0, L), i \in \mathbb{N}\}$ , une base Hilbertienne de  $L^2(0, L)$ , et  $\{w_i \in \mathcal{S}^0, i \in \mathbb{N}\}$  une base Hilbertienne de  $\mathcal{S}^0$ . Dénotons par  $\mathcal{S}_v^n$  et  $\mathcal{S}_w^n$  les espaces de dimension finie définis comme

$$\mathcal{S}_v^n = \text{vect}\{v_i, 1 \leq i \leq n\}, \quad \mathcal{S}_w^n = \text{vect}\{w_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Soit  $(h_0^n(x), q_0^n(x), b_0^n(x)) \subset \mathcal{S}_v^n \times (\mathcal{S}_w^n)^2$  une suite qui converge vers les conditions initiales  $(h_0, q_0, b_0)$  dans  $L^2(\mathfrak{J})^2 \times \mathcal{S}^0$ .

Considérons la formulation discrète faible du problème (II.11). Pour tout  $(\psi, \phi, \pi) \in \mathcal{S}_v^n \times (\mathcal{S}_w^n)^2$ ,

---

1. Une différence parmi les méthodes de contrôles provient de la façon dont l'énergie est définie et la façon dont sa variation en temps est exploitée pour obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \gamma_1 \psi \partial_t h^n - \int_0^L \gamma_1 q^n \partial_x \psi dx + \gamma_1 \psi(L) \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L)) = 0 \quad (\text{II.21.a}) \\ \int_0^L \phi \partial_t q^n dx - \int_0^L q^n \partial_x (\beta_1 \phi) dx - \int_0^L h^n \partial_x (\gamma_1 \phi) dx - \int_0^L b^n \partial_x (\chi \phi) dx \\ + \beta_1 \phi(L) q^n(t, L) + \gamma_1 \phi(L) h^n(t, L) + \chi \phi(L) b^n(t, L) = 0 \quad (\text{II.21.b}) \\ \int_0^L \chi_1 \pi \partial_t b^n dx - \int_0^L q^n \partial_x (\chi \pi) dx + \int_0^L \varepsilon_1 \chi \partial_x b^n \partial_x \pi dx \\ + \chi \pi(L) \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L)) = 0. \quad (\text{II.21.c}) \end{array} \right. \quad (\text{II.22})$$

On cherche les solutions "approchées" du problème (II.22) données sous la forme suivante :

$$h^n(t, x) = \sum_{i=1}^n l_i^n(t) v_i(x), \quad q^n(t, x) = \sum_{i=1}^n p_i^n(t) w_i(x), \quad \text{et} \quad b^n(t, x) = \sum_{i=1}^n k_i^n(t) w_i(x). \quad (\text{II.23})$$

Remplaçons (II.23) dans le système (II.22) :

• Pour la première équation on a :

$$\frac{d}{dt} l^n(t) \langle v_i, \psi \rangle_{1 \leq i \leq n} - p^n(t) \langle w_i, \partial_x \psi \rangle_{1 \leq i \leq n} = -\psi(L) \sum_{i=1}^n p_i^n(t) w_i(L),$$

$$\text{où} \quad \langle v_i, \psi \rangle_{1 \leq i \leq n} = \sum_{i=1}^n \int_0^L v_i(x) \psi(x) dx$$

Posons :

$$A_n = \langle v_i, \psi \rangle_{1 \leq i \leq n}, \quad B_n = \langle w_i, \partial_x \psi \rangle_{1 \leq i \leq n}, \quad f_{1,n}(t) = \psi(L) \sum_{i=1}^n p_i^n(t) w_i(x)$$

Les vecteurs  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  sont linéairement indépendants (ie,  $\det(v_i, \psi) \neq 0$ ).

D'où, l'équation devient

$$\frac{d}{dt} l^n(t) - A_n^{-1} B_n (p^n(t)) = -A_n^{-1} f_{1,n}(t) \quad (\text{II.24})$$

• Pour la deuxième équation, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} p^n(t) \langle w_i, \phi \rangle_{1 \leq i \leq n} - p^n(t) \langle w_i, \partial_x \phi \rangle_{1 \leq i \leq n} - l^n(t) \langle v_i, \partial_x \phi \rangle_{1 \leq i \leq n} - k^n(t) \langle w_i, \partial_x \phi \rangle_{1 \leq i \leq n} \\ & = -\beta_1 \phi(L) \sum_{i=1}^n p_i^n(t) w_i(x) - \gamma_1 \phi(L) \sum_{i=1}^n l_i^n(t) v_i(x) \sum_{i=1}^n l_i^n(t) v_i(x) - \chi \phi(L) \sum_{i=1}^n k_i^n(t) w_i(x). \end{aligned}$$

Posons :

$$C_n = \langle w_i, \phi \rangle_{1 \leq i \leq n}, \quad D_n = \langle w_i, \partial_x \phi \rangle_{1 \leq i \leq n}, \quad F_n = \langle v_i, \partial_x \phi \rangle_{1 \leq i \leq n}$$

$$f_{2,n}(t) = -\beta_1 \phi(L) \sum_{i=1}^n p_i^n(t) w_i(x) - \gamma_1 \phi(L) \sum_{i=1}^n l_i^n(t) v_i(x) \sum_{i=1}^n l_i^n(t) v_i(x) - \chi \phi(L) \sum_{i=1}^n k_i^n(t) w_i(x).$$

D'où l'équation devient :

$$\frac{d}{dt}p^n(t) - C_n^{-1}D_n(p^n(t)) - C_n^{-1}F_n(l^n(t)) - C_n^{-1}D_n(k^n(t)) = -C_n^{-1}f_{2,n}(t). \quad (\text{II.25})$$

• Pour la troisième équation, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}k^n(t)\langle w, \pi \rangle_{1 \leq i \leq n} - \beta_2 p^n(t)\langle w, \partial_x \pi \rangle_{1 \leq i \leq n} + \varepsilon \beta_2 \chi k^n(t)\langle \partial_x w, \partial_x \pi \rangle_{1 \leq i \leq n} \\ &= -\chi \pi(L)\mu(t) \left( \gamma_1 \sum_{i=1}^n l_i^n(t)v_i(x) + \chi \sum_{i=1}^n k_i^n(t)w_i(x) \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} G_n &= \langle w, \pi \rangle_{1 \leq i \leq n}, \quad H_n = \langle w, \partial_x \pi \rangle_{1 \leq i \leq n}, \quad J_n = \langle \partial_x w, \partial_x \pi \rangle_{1 \leq i \leq n} \\ f_{3,n}(t) &= -\chi \pi(L)\mu(t) \left( \gamma_1 \sum_{i=1}^n l_i^n(t)v_i(x) + \chi \sum_{i=1}^n k_i^n(t)w_i(x) \right). \end{aligned}$$

D'où, l'équation devient :

$$\frac{d}{dt}k^n(t) - \beta_2 G_n^{-1}H_n(p^n(t)) + \varepsilon \beta_2 \chi G_n^{-1}J_n(k^n(t)) = -G_n^{-1}f_{3,n}(t). \quad (\text{II.26})$$

Ainsi, le système (II.22) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}l^n(t) - A_n^{-1}B_n(p^n(t)) = -A_n^{-1}f_{1,n}(t) \\ \frac{d}{dt}p^n(t) - C_n^{-1}D_n(p^n(t)) - C_n^{-1}F_n(l^n(t)) - C_n^{-1}D_n(k^n(t)) = -C_n^{-1}f_{2,n}(t) \\ \frac{d}{dt}k^n(t) - \beta_2 G_n^{-1}H_n(p^n(t)) + \varepsilon \beta_2 \chi G_n^{-1}J_n(k^n(t)) = -G_n^{-1}f_{3,n}(t). \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

On obtient un système d'équations différentielles non linéaires du premier ordre à coefficients constants. Donc le système admet une solution locale sur l'intervalle  $[0, t_n]$ , avec  $t_n$  indépendant de  $n$ , ( $t_n = T$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ).

On cherche à présent à justifier l'existence de la solution du système (II.11) en s'appuyant sur l'estimation a priori. Pour cela, on considère la formulation discrète faible (II.15)–(II.17) du système (II.11) dans l'espace  $\mathcal{S}_v^n \times (\mathcal{S}_w^n)^2$ .

En utilisant l'estimation de l'énergie a priori de la section précédente, on a :  
pour tout  $t > 0$ ,

$$\frac{dE^n(t)}{dt} = -\varepsilon_1 \chi_1 \int_0^L \left( \frac{\partial b^n}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{\beta_1}{2} (q^n(t, L))^2 + \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L))^2.$$

Intégrons par rapport à  $t$  de 0 à  $T$ ,

$$\int_0^T \frac{dE^n(t)}{dt} dt = -\varepsilon_1 \chi_1 \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\partial b^n}{\partial x} \right)^2 dx dt - \frac{\beta_1}{2} \int_0^T (q^n(t, L))^2 dt + \int_0^T \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L))^2 dt.$$

Il en suit

$$E^n(T) - E^n(0) = -\varepsilon_1 \chi_1 \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\partial b^n}{\partial x} \right)^2 dx dt - \frac{\beta_1}{2} \int_0^T (q^n(t, L))^2 dt - \int_0^T \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L))^2 dt.$$

D'où

$$E^n(T) + \varepsilon_1 \chi_1 \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\partial b^n}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta_1}{2} \int_0^T (q^n(t, L))^2 + \int_0^T \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L))^2 = E^n(0), \quad (\text{II.28})$$

$$\text{où } E^n(t) = \| \sqrt{\gamma_1} h^n(t, \cdot) \|_{2, \mathfrak{J}}^2 + \| q^n(t, \cdot) \|_{2, \mathfrak{J}}^2 + \| \sqrt{\chi_1} b^n(t, \cdot) \|_{2, \mathfrak{J}}^2.$$

La notation  $\| \cdot \|_{2, \mathfrak{J}}$  indique la norme de  $L^2$  sur l'intervalle  $\mathfrak{J}$ .

Ainsi, on déduit de (II.28) que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| \sqrt{\gamma_1} h^n(t, \cdot) \|_{2, \mathfrak{J}}^2 + \| q^n(t, \cdot) \|_{2, \mathfrak{J}}^2 + \| \sqrt{\chi_1} b^n(t, \cdot) \|_{2, \mathfrak{J}}^2 \leq E^n(0). \quad (\text{II.29})$$

Par conséquent, les suites  $h^n$ ,  $q^n$  et  $b^n$  sont bornées respectivement dans  $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ ,  $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$  et  $L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ . Puisque ces espaces sont de Banach alors on peut extraire une sous suite de  $(h^n, q^n, b^n)$  qui converge faiblement vers  $(h, q, b)$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(0, L))^2 \times L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$  pour la topologie faible-\*

D'après la Proposition II.1, les vecteurs

$$\begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ \beta_1 q + \gamma_1 h + \chi b \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} b \\ \beta_2 q - \varepsilon_1 \frac{\partial b}{\partial x} \end{pmatrix}$$

sont bornée dans  $H(\text{div}, \Omega)$ . Donc, on déduit de la **Proposition II.2** que les suites des conditions limites,  $h_L^n(t)$ ,  $q_L^n(t)$  et  $b_L^n(t)$  appartiennent à  $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$ . En raison de la continuité de l'opérateur de la trace dans  $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$ ,  $b_L^n(t)$  est bornée dans  $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$ . Ainsi, du fait que l'espace  $L^2$  est faiblement compact, il existe une sous suite de  $b_L^n$  convergeant faiblement vers  $b_L$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$ . D'autre part, on déduit de (II.28) que

$$\| \sqrt{\beta_1} q^n(\cdot, L) \|_{2, (0, T)}^2 + \| \gamma_1 \sqrt{\mu(\cdot)} h^n(\cdot, L) \|_{2, (0, T)}^2 + \| \chi_1 \sqrt{\mu(\cdot)} b^n(\cdot, L) \|_{2, (0, T)}^2 \leq E^n(0)$$

Ainsi, la suite des conditions limites,  $(h^n(\cdot, L), q^n(\cdot, L), b^n(\cdot, L))$ , est bornée dans  $L^2(0, T)^3$ . Par conséquent, on peut extraire une sous-suite qui converge vers  $(h_L, q_L, b_L)$  faiblement dans  $L^2(0, T)^3$ .

### Passage à la limite :

Puisque la convergence faible  $L^2$  n'implique pas la convergence presque partout, on ne peut pas passer directement à la limite dans (II.22).

Soit

$$H_T^1(0, T) = \left\{ g \in H^1(0, T); \quad g(T) = 0 \right\}.$$

On pose :

$$\psi(t, x) = g(t)v(x); \quad g \in H_T^1(0, T), \quad v \in \mathcal{S}_v. \quad (\text{II.30})$$

Ainsi l'équation (2.21.a) devient :

$$\int_0^L v(x) \partial_t h^n g(t) - \int_0^L q^n \partial_x g(t) v(x) dx + g(t) v(L) \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L)) = 0.$$

Le premier terme peut-être réécrit comme produit scalaire dans  $L^2$ ,

$$(\partial_t h^n, v)_{\mathfrak{J}} g(t) - (q^n, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) + v(L) g(t) \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L)) = 0.$$

On intègre par rapport à  $t$  sur  $0$  à  $T$ ,

$$\int_0^T (\partial_t h^n, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt - \int_0^T (q^n, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L)) dt = 0.$$

En intégrant par partie le premier terme de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (h^n, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g(t) dt + \left[ (h^n, v)_{\mathfrak{J}} g(t) \right]_0^T - \int_0^T (q^n, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt \\ & + v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h_L^n(t) + \chi b^n(t, L)) dt = 0, \end{aligned}$$

or  $g(T) = 0$ , donc

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (h^n, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g(t) dt - (h_0^n, v)_{\mathfrak{J}} g(0) - \int_0^T (q^n, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt \\ & + v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h_L^n(t) + \chi b^n(t, L)) dt = 0. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand  $n$  tend vers l'infini, on a :

$$- \int_0^T (h, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g(t) dt - (h^0, v)_{\mathfrak{J}} g(0) - \int_0^T (q, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h_L(t) + \chi b(t, L)) dt = 0. \quad (\text{II.31})$$

Soit

$$V_T = \left\{ g, v, (g, v) \in H^1(0, T) \times H^1(0, L), g(T) = 0 \right\}.$$

Par densité, l'équation **(II.31)** reste vraie pour tout  $(g, v) \in V_T$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (h, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g(t) dt - (h^0, v)_{\mathfrak{J}} g(0) - \int_0^T (q, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt \\ & + v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h_L(t) + \chi b(t, L)) dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Par conséquent, si on prend  $(g, v) \in \mathcal{D}(0, T) \times \mathcal{D}(0, L)$ , alors  $g(0) = v(L) = 0$  car les fonctions tests sont nulles au voisinage du bord.

Ainsi on obtient :

$$\int_0^T (\partial_t h, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \int_0^T (\partial_x q, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt = 0.$$

L'équation devient :

$$\int_0^T (\partial_t h + \partial_x q, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt = 0.$$

D'après le **Proposition I.1**,

$$\int_0^L (\partial_t h + \partial_x q) v(x) dx = 0 \quad p.p.$$

D'où, on a la première équation de **(II.11)**,

$$\partial_t h + \partial_x q = 0 \quad p.p. \quad (\text{II.33})$$

Puis, on multiplie à nouveau l'équation (II.33) par  $\psi \in V_T$ ,

$$\partial_t h v(x) g(t) + \partial_x q v(x) g(t) = 0.$$

En intégrant par rapport à  $x$  de 0 à  $L$ , l'équation devient :

$$\int_0^L \partial_t h v(x) g(t) + \int_0^L \partial_x q v(x) g(t) = 0.$$

On intègre par partie par rapport à  $t$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^T (h, v)_{\mathfrak{H}} \partial_t g \, dt + \left[ g(t) (h(t, x), v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0, L), H^{\frac{1}{2}}(0, L)} \right]_0^T - \int_0^T (q, \partial_x v)_{\mathfrak{H}} g(t) \, dt \\ & + \left[ (q(t, x), \partial_x v(x)) g(t) \right]_0^T = 0. \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on a :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (h, v)_{\mathfrak{H}} \partial_t g \, dt - g(0) (h(0, \cdot), v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0, L), H^{\frac{1}{2}}(0, L)} - \int_0^T (q, \partial_x v)_{\mathfrak{H}} g(t) \, dt \\ & + v(0) (q(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} + v(L) (q(\cdot, L), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Par identification, on déduit des équations (II.31) et (II.33) que :

$$h(0, \cdot) = h^0, \quad q(\cdot, 0) = 0, \quad q(\cdot, L) = \mu(\cdot) (\gamma_1 h_L(\cdot) + \chi b(\cdot, L)).$$

Ainsi, la condition initiale de la hauteur est donnée par

$$h(0, \cdot) = h^0,$$

et les conditions limites du débit d'eau sont données par

$$q(\cdot, 0) = 0, \quad q(\cdot, L) = \mu(\cdot) (\gamma_1 h_L(\cdot) + \chi b(\cdot, L)).$$

Ce dernier correspond au contrôle rétroactif.

**De même, nous montrons que la limite faible de  $(h^n, q^n, b^n)$  vérifie l'équation variationnelle de la continuité des sédiments, (2.18.c).**

Posons

$$\pi(t, x) = g(t) v(x), \quad g \in H_T^1(0, T), \quad v \in \mathcal{S}_v.$$

L'équation (2.21.c) devient

$$\begin{aligned} & \int_0^L v(x) g(t) \frac{\partial b^n}{\partial t} dx - \int_0^L \frac{\partial (\beta_2 v(x) g(t))}{\partial x} q^n dx + \int_0^L \varepsilon_1 \frac{\partial v(x) g(t)}{\partial x} \frac{\partial b^n}{\partial x} dx \\ & + \beta_2 v(L) g(t) \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L)) = 0. \end{aligned}$$

En intégrant suivant  $t$  de 0 à  $T$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\partial_t b^n, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt - \int_0^T (q^n, \beta_2 \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \varepsilon_1 \int_0^T (\partial_x b^n, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt \\ & + \beta_2 v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h^n(t, L) + \chi b^n(t, L)) dt = 0. \end{aligned}$$

On intègre par partie le premier terme,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (b^n, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g dt - (b_0^n, v)_{\mathfrak{J}} g(0) - \int_0^T (q^n, \partial_x (\beta_2 v))_{\mathfrak{J}} g dt + \varepsilon_1 \int_0^T (\partial_x b^n, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g dt \\ & + \beta_2 v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h_L^n(t) + \chi b^n(t, L)) dt = 0. \end{aligned}$$

Quand  $n$  tend à  $\infty$ , on a :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (b, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g dt - (b^0, v)_{\mathfrak{J}} g(0) - \int_0^T (q, \partial_x (\beta_2 v))_{\mathfrak{J}} g dt + \varepsilon_1 \int_0^T (\partial_x b, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g dt \\ & + \beta_2 v(L) \int_0^T g(t) \mu(t) (\gamma_1 h_L(t) + \chi b(t, L)) dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Par conséquent, si  $(g, v) \in \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L)$  alors,  $g(0) = v(L) = 0$ , car les fonctions de  $\mathcal{D}(0, L)$  sont nulles au voisinage du bord de  $(0, L)$ .

Donc

$$\int_0^T (\partial_t b, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \beta_2 (\partial_x q, v)_{\mathfrak{J}} g(t) - \varepsilon_1 (\partial_x^2 b, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt = 0.$$

D'après la **Proposition I.1**,

$$(\partial_t b, v)_{\mathfrak{J}} + \beta_2 (\partial_x q, v)_{\mathfrak{J}} - \varepsilon_1 (\partial_x^2 b, v)_{\mathfrak{J}} = 0 \quad p.p.$$

D'où, on a la troisième équation de **(II.11)**

$$\partial_t b + \beta_2 \partial_x q = \varepsilon_1 \partial_x^2 b. \quad (\text{II.36})$$

En multipliant l'équation **(II.36)** par  $\pi \in V_T$ , on obtient

$$v(x)g(t)\partial_t b + v(x)g(t)\beta_2\partial_x q = \varepsilon_1 v(x)g(t)\partial_x^2 b.$$

On intègre par rapport à  $x$  de 0 à  $L$ , et puis par partie par rapport  $t$ , de 0 à  $T$  :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (b, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g(t) dt + \left[ g(t)b(t, x), v \right]_0^T - \int_0^T (q, \partial_x (\beta_2 v))_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \left[ v(x)(q(t, x), g(t)) \right]_0^T \\ & = -\varepsilon_1 \int_0^T (\partial_x b, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \left[ v(x)(\partial_x b(t, x), g(t)) \right]_0^T. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (b, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g(t) dt - g(0) b(0, \cdot, v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} - \int_0^T (q, \partial_x(\beta_2 v))_{\mathfrak{J}} g(t) dt \\
& - \beta_2 v(0) (q(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} + \beta_2 v(L) (q(\cdot, L), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \quad (\text{II.37}) \\
& = -\varepsilon_1 \int_0^T (\partial_x b, \partial_x v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt - v(0) (\partial_x b(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \\
& + v(L) (\partial_x b(\cdot, L), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)}.
\end{aligned}$$

Par analogie, on déduit de (II.35) et (II.37) que :

$$b(0, \cdot) = b^0, \quad \partial_x b(\cdot, L) = 0, \quad q(\cdot, 0) = 0, \quad q(\cdot, L) = \mu(\cdot) (\gamma_1 h_L(\cdot) + \chi b(\cdot, L)).$$

Ainsi, la condition initiale et la condition limite de la bathymétrie sont données respectivement par :

$$b(0, \cdot) = b^0, \quad \partial_x b(\cdot, L) = 0.$$

**Il en est de même pour la loi des moments, (2.21.b) :**

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \phi \partial_t q^n dx - \int_0^L q^n \partial_t (\beta_1 \phi) dx - \int_0^L h^n \partial_x (\gamma_1 \phi) dx - \int_0^L b^n \partial_x (\chi \phi) dx \\
& + \beta_1 \phi(L) q^n(t, L) + \gamma_1 \phi(L) h^n(t, L) + \chi \phi(L) b^n(t, L) = 0.
\end{aligned}$$

Posons  $\phi = g(t)v(x)$ ,  $g \in H_T^1(0, T)$ ;  $v(x) \in \mathcal{S}_v$ .

On intègre l'équation par rapport à  $t$  sur  $(0, T)$ , et puis on intègre le premier terme par partie.

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (\partial_t q^n, v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \left[ g(t) (q(t, x), v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \right]_0^T + \int_0^T (q^n \partial_x (\beta_1 v))_{\mathfrak{J}} g(t) - \int_0^T (h^n, \partial_x (\gamma_1 v))_{\mathfrak{J}} g(t) \\
& - \int_0^T (b^n, \partial_x (\chi v))_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \beta_1 v(L) \int_0^T g(t) q_L^n(t) dt + v(L) \int_0^T g(t) (\gamma_1 h_L^n(t) + \chi b^n(t, L)) = 0.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, quand  $n \rightarrow \infty$ , il résulte :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (q, v)_{\mathfrak{J}} \partial_t g(t) dt - (q^0, v)_{\mathfrak{J}} g(0) - \int_0^T (q, \partial_x (\beta_1 v))_{\mathfrak{J}} g(t) dt - \int_0^T (h, \partial_x (\gamma_1 v))_{\mathfrak{J}} g(t) dt \\
& - \int_0^T (b, \partial_x (\chi v))_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \beta_1 v(L) \int_0^T g(t) q_L(t) dt + v(L) \int_0^T g(t) (\gamma_1 h_L(t) + \chi b(t, L)) dt = 0. \quad (\text{II.38})
\end{aligned}$$

Prenons  $(g, v) \in \mathcal{D}(0, T) \times \mathcal{D}(0, L)$ .

Par conséquent, on retrouve la deuxième équation de (II.11)

$$\partial_t q + \beta_1 \partial_x q + \gamma_1 \partial_x h + \chi \partial_x b = 0. \quad (\text{II.39})$$

On multiplie l'équation (II.39) par  $\phi \in V_T$ , et on intègre suivant  $x$  et suivant  $t$ ,

$$\int_0^T (\partial_t q, v)_{\mathfrak{J}} g(t) + \int_0^T (\partial_x q, \beta_1 v)_{\mathfrak{J}} g(t) dt + \int_0^T (\partial_x h, \gamma_1 v)_{\mathfrak{J}} g dt + \int_0^T (\partial_x b, \chi v)_{\mathfrak{J}} g dt = 0.$$

Faisons une intégration par partie.

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (q, v)_{\mathfrak{H}} \partial_t g(t) dt + \left[ g(t)(q(t, x), v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \right]_0^T - \int_0^T (q, \partial_x(\beta_1 v))_{\mathfrak{H}} g(t) dt \\
& + \left[ g(t)(q(t, x), \beta_1 v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \right]_0^T - \int_0^T (b, \partial_x(\chi v))_{\mathfrak{H}} g(t) - \int_0^T (h, \partial_x(\gamma_1 v))_{\mathfrak{H}} g(t) dt \\
& + \left[ g(t)(h(t, x), \gamma_1 v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \right]_0^T dt + \left[ g(t)(b(t, x), \chi v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \right]_0^T = 0.
\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, l'équation devient

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (q, v)_{\mathfrak{H}} \partial_t g(t) dt - g(0)(q(0, \cdot), v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} + v(L)(q(\cdot, L), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \\
& - \int_0^T (q, \partial_x(\beta_1 v))_{\mathfrak{H}} g(t) dt - v(0)(q(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} - \int_0^T (h, \partial_x(\gamma_1 v))_{\mathfrak{H}} g(t) dt \\
& + \gamma_1 v(L)(h(\cdot, L), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} - \gamma_1 v(0)(h(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} - \int_0^T (b, \partial_x(\chi v))_{\mathfrak{H}} g(t) dt \\
& + \chi v(L)(b(\cdot, L), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} - \chi v(0)(b(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (q, v)_{\mathfrak{H}} \partial_t g(t) - g(0)(q(0, \cdot), v)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} - \int_0^T (q, \partial_x(\beta_1 v))_{\mathfrak{H}} g(t) dt \\
& + v(L)(q(\cdot, L), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} - v(0)(q(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} \\
& - \int_0^T (h, \partial_x(\gamma_1 v))_{\mathfrak{H}} g(t) dt - \int_0^T (b, \partial_x(\chi v))_{\mathfrak{H}} g(t) - v(0)(q(\cdot, 0), g)_{H^{-\frac{1}{2}}(0,L), H^{\frac{1}{2}}(0,L)} = 0. \quad (\text{II.40})
\end{aligned}$$

Par analogie, on déduit de (II.38) et (II.40) que :

$$q(0, \cdot) = q^0, \quad h(\cdot, L) = h_L(\cdot), \quad q(\cdot, L) = q_L(\cdot) \quad \text{et} \quad q(\cdot, 0) = 0.$$

D'où, la condition limite de la hauteur d'eau est donnée par :

$$h(\cdot, L) = h_L(\cdot).$$

• **Etape 2 : Convergence de l'énergie vers 0** Il reste à prouver que l'énergie  $E$  est décroissante vers 0. A cet effet, on déduit de (II.28) que

$$E^n(t) + \epsilon \chi_1 \int_0^t \int_0^L \left( \frac{\partial b^n}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta_1}{2} \int_0^t (q^n(s, L))^2 + \int_0^t \mu(s) (\gamma_1 h^n(s, L) + \chi b^n(s, L))^2 = E^n(0). \quad (\text{II.41})$$

Quand  $n$  tend vers l'infini, (II.41) devient :

$$E(t) = E(0) - \epsilon \chi_1 \int_0^t \int_0^L \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \int_0^t \left( \frac{\beta_1}{2} q_L^2 + \mu(s) (\gamma_1 h(s, L) + \chi b(s, L))^2 \right). \quad (\text{II.42})$$

Soit  $0 < t_1 < t_2 < \infty$ . Estimons  $E(t_2) - E(t_1)$  :

$$E(t_1) = E(0) - \epsilon\chi_1 \int_0^{t_1} \int_0^L \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \int_0^{t_1} \left( \frac{\beta_1}{2} q_L^2 + \mu(s)(\gamma_1 h(s, L) + \chi b(s, L))^2 \right),$$

et

$$E(t_2) = E(0) - \epsilon\chi_1 \int_0^{t_2} \int_0^L \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \int_0^{t_2} \left( \frac{\beta_1}{2} q_L^2 + \mu(s)(\gamma_1 h(s, L) + \chi b(s, L))^2 \right).$$

En moyennant  $E(t_2)$  et  $E(t_1)$ , il résulte :

$$E(t_2) - E(t_1) = -\epsilon\chi_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\beta_1}{2} q_L^2 + \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L))^2 \right).$$

Par conséquent,  $E(t_2) - E(t_1) = 0$  si et seulement si

$$\epsilon\chi_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\beta_1}{2} q_L^2 + \mu(t)(\gamma_1 h(t, L) + \chi b(t, L))^2 \right) = 0. \quad (\text{II.43})$$

Ceci implique que

$$\int_0^L \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 dx = 0.$$

D'où

$$\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad p.p.$$

Alors,  $b$  est constant par rapport à  $x$  dans  $(t_1, t_2) \times (0, L)$ .

D'après les conditions aux limites,  $b(., 0) = 0$ . Par conséquent,  $b$  est nul dans  $(t_1, t_2) \times (0, L)$ .

En utilisant l'équation (II.36),

$$\partial_t b + \beta_2 \partial_x q = \varepsilon_1 \partial_x^2 b,$$

on déduit que  $q$  est nul dans  $(t_1, t_2) \times (0, L)$  du fait que  $b$  est nul et que  $q(., 0) = 0$  d'après les conditions limites.

On déduit de la première équation de (II.11),

$$\partial_t h + \partial_x q = 0,$$

que  $h$  est constant dans  $(t_1, t_2) \times (0, L)$  car  $q = 0$ . Puisque  $h(., L)$  est nul dans  $(t_1, t_2) \times (0, L)$  d'après (II.43), alors  $h$  est nul dans  $(t_1, t_2) \times (0, L)$ .

Donc, on peut conclure que pour un certain temps  $T$ ,  $(h, q, b)(T) = 0$ , auquel cas nous avons la contrôlabilité exacte, où  $E$  est strictement décroissant. Nous prouvons enfin qu'au cas où il n'y aurait pas de contrôlabilité exacte,  $(h, q, b)$  tend nécessairement à zéro. Ce résultat repose principalement sur le fait que nous en déduisons de (II.42) que

$$\| b(t, .) \|_{H^1(0, L)} \quad \text{et} \quad (h(t, L), q(t, L), b(t, L)) \quad \text{tendent vers } 0 \quad \text{quand } t \longrightarrow \infty. \quad (\text{II.44})$$

**- Montrons que pour tout  $x \in (0, L)$ ,  $(h, q, b)$  tend vers 0 quand  $t$  tend à  $\infty$ .**

Considérons les deux premières équations du système (II.11),

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_1 h}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_1 q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial q}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \chi \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \end{cases} .$$

On introduit la formulation vectorielle de ce système en posant :

$$\xi = (\gamma_1 h, q)^{tr}; \quad G(\xi) = \begin{pmatrix} q \\ \beta_1 q + \gamma_1 h \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi \frac{\partial b}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Le système peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial G(\xi)}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = F(\xi).$$

Notons par  $A$  la matrice jacobienne du flux  $G$  par rapport aux variables conservatives. La matrice  $A$  est donnée par :

$$A = \frac{\partial G}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + A \frac{\partial \xi}{\partial x} = F. \quad (\text{II.45})$$

Déterminons les valeurs propres associées à la matrice  $A$ .

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \beta_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta_1 \lambda - \gamma_1^2.$$

D'où

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1 - \delta^*}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_1 + \delta^*}{2},$$

où

$$\delta^* = \sqrt{\beta_1^2 + 4\gamma_1^2}.$$

Les valeurs propres associées au système sont réelles et distinctes, alors le système est hyperbolique. Donc  $A$  peut s'écrire sous la forme,

$$A = P \Delta P^{-1} = P \Delta P^{tr},$$

$$\text{où } \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ b & \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1}{\gamma_1} & \frac{\lambda_2}{\gamma_1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'équation (2.38) devient

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + P \Delta P^{tr} \frac{\partial \xi}{\partial x} = F.$$

En multipliant par  $P^{tr}$ , elle devient

$$P^{tr} \frac{\partial \xi}{\partial t} + P^{tr} P \Delta P^{tr} \frac{\partial \xi}{\partial x} = P^{tr} F.$$

$$\frac{\partial P^{tr} \xi}{\partial t} + \Delta \frac{\partial P^{tr} \xi}{\partial x} = P^{tr} F.$$

En posant  $\tilde{\xi} = P^{tr}\xi$  et  $\tilde{F} = P^{tr}F$ , l'équation devient :

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} + \Delta \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} = \tilde{F}, \quad (\text{II.46})$$

où

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_1}{\gamma_1} \\ 1 & \frac{\lambda_2}{\gamma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 h + \frac{\lambda_1}{\gamma_1} q \\ \gamma_1 h + \frac{\lambda_2}{\gamma_1} q \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_1}{\gamma_1} \\ 1 & \frac{\lambda_2}{\gamma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi \frac{\partial b}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{\chi}{\gamma_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \partial_x b \\ \lambda_2 \partial_x b \end{pmatrix}.$$

L'équation (II.46) est une série d'équations d'advection linéaires et indépendantes, de la forme suivante

$$\partial_t \tilde{\xi}_i + \lambda_i \partial_x \tilde{\xi}_i = \tilde{F}_i. \quad (\text{II.47})$$

Ainsi, on a deux équations de transport pour  $\tilde{\xi}_1$  et  $\tilde{\xi}_2$  à vitesse  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  respectivement. Soit  $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in ]0, \infty[ \times (0, L)$ . On définit les caractéristiques comme suit :

$$\left\{ (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \quad x + \lambda_i(\tilde{t} - t) = \tilde{x} \right\}.$$

La solution est constante le long des lignes caractéristiques. Donc, on obtient à partir de (II.47) l'égalité suivante

$$\tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) = \tilde{\xi}_i\left(\frac{L - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right) - \int_{\tilde{t}}^{\frac{L - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}} \tilde{F}_i(t, \tilde{x} + \lambda_i(t - \tilde{t})) dt.$$

En remplaçant  $\tilde{F}_i$  par son expression, l'équation devient

$$\tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) = \tilde{\xi}_i\left(\frac{L - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right) + \frac{\lambda_i \chi}{\gamma_1} \int_{\tilde{t}}^{\frac{L - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}} \frac{\partial b}{\partial x}(t, \tilde{x} + \lambda_i(t - \tilde{t})) dt.$$

On a

$$t = \frac{x - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t} \quad \implies dt = \frac{dx}{\lambda_i}.$$

Quand  $t$  tend vers  $\frac{L - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}$  (respectivement vers  $\tilde{t}$ ), alors  $x$  tend vers  $L$  (respectivement vers  $\tilde{x}$ ). Par conséquent,

$$\tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) = \tilde{\xi}_i\left(\frac{L - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right) + \frac{\chi}{\gamma_1} \int_{\tilde{x}}^L \frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{s - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, s\right) ds. \quad (\text{II.48})$$

– **Montrons maintenant que  $\tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x})$  tend vers 0 pour tout  $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in (0, T) \times (0, L)$ .** De (II.48), en utilisant l'inégalité,  $\frac{1}{2}(c + d)^2 \leq c^2 + d^2$  pour tout  $c, d$  dans  $\mathbb{R}$ , il résulte :

$$\frac{1}{2} \tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x})^2 \leq \tilde{\xi}_i\left(\frac{L - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 + \frac{\chi^2}{\gamma_1^2} \left(\frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{s - \tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, s\right)\right)^2.$$

Intégrons sur  $(a, T)$  par rapport à  $\tilde{t}$  l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^T \tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x})^2 d\tilde{t} &\leq \int_a^T \tilde{\xi}_i\left(\frac{L-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 d\tilde{t} + \frac{\chi^2}{\gamma_1^2} \int_a^T \left( \int_{\tilde{x}}^L \frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, s\right) ds \right)^2 d\tilde{t} \\ &\leq \int_a^T \tilde{\xi}_i\left(\frac{L-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 d\tilde{t} + \frac{\chi^2}{\gamma_1^2} \int_a^T \left( \int_0^L \frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, s\right) ds \right)^2 d\tilde{t}. \end{aligned}$$

avec  $a \geq \max\left(\frac{L}{|\lambda_1|}, \frac{L}{|\lambda_2|}\right)$ .

D'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**,

$$\left( \int_0^L \frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, s\right) ds \right)^2 \leq \int_0^L \frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, s\right)^2 \int_0^L ds.$$

D'où

$$\frac{1}{2} \int_a^T \tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x})^2 d\tilde{t} \leq \int_a^T \tilde{\xi}_i\left(\frac{L-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 d\tilde{t} + \frac{L\chi^2}{\gamma_1^2} \int_a^T \int_0^L \frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, s\right)^2 ds d\tilde{t}.$$

Faisons un changement de variables pour le deuxième terme à droite :

$$\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t} = t \quad \implies dt = d\tilde{t}.$$

Quand  $\tilde{t}$  tend vers  $T$  respectivement vers  $a$ , alors  $t$  tend vers  $\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + T$  respectivement vers  $\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + a$ .  
Il vient,

$$\frac{1}{2} \int_a^T \tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x})^2 d\tilde{t} \leq \int_a^T \tilde{\xi}_i\left(\frac{L-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 d\tilde{t} + \frac{L\chi^2}{\gamma_1^2} \int_0^L \int_{\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + a}^{\frac{s-\tilde{x}}{\lambda_i} + T} \frac{\partial b}{\partial x}(t, s)^2 dt ds.$$

$$\frac{1}{2} \int_a^T \tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x})^2 d\tilde{t} \leq \int_a^T \tilde{\xi}_i\left(\frac{L-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 d\tilde{t} + \frac{L\chi^2}{\gamma_1^2} \int_0^L \int_0^{a+T} \frac{\partial b}{\partial x}(t, s)^2 dt ds. \quad (\text{II.49})$$

Quand  $T$  tend vers l'infini, on déduit de (II.49) que

$$\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \tilde{\xi}_i(\tilde{t}, \tilde{x})^2 d\tilde{t} \leq \int_a^{+\infty} \tilde{\xi}_i\left(\frac{L-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 d\tilde{t} + \frac{L\chi^2}{\gamma_1^2} \int_0^{+\infty} \int_0^L \frac{\partial b}{\partial x}(t, s)^2 ds dt. \quad (\text{II.50})$$

D'après (II.44),  $\|b(t, \cdot)\|_{H^1(0, L)}$  et  $(h(t, L), q(t, L))$  tendent vers 0 quand  $t$  tend à  $+\infty$ .

D'où

$$\int_a^{+\infty} \tilde{\xi}_i\left(\frac{L-\tilde{x}}{\lambda_i} + \tilde{t}, L\right)^2 d\tilde{t} \quad \text{et} \quad \int_0^L \frac{\partial b}{\partial x}(t, s)^2 ds dt \quad \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,  $\xi_i(\tilde{t}, \tilde{x})$  convergent vers zéro quand  $t$  tend à  $+\infty$ .

On conclut que pour tout  $\tilde{x} \in (0, L)$ ,  $(h(\tilde{t}, \tilde{x}), q(\tilde{t}, \tilde{x}))$  tend vers 0, quand  $\tilde{t}$  tend vers  $\infty$ .

D'où le résultat !

# CHAPITRE III

---

## RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

---

### III.1 Introduction

La recherche des méthodes numériques les plus adaptées à la simulation des problèmes d'écoulement de l'eau à surface libre est l'un des sujets les plus actifs en mathématiques appliquées, mécanique des fluides et hydraulique. En utilisant la simulation et l'analyse numérique de quelques modèles simplifiés appropriés, les scientifiques obtiennent de nombreuses informations significatives pour les phénomènes complexes associés aux écoulements à surface libre. Il existe plusieurs stratégies de résolution numérique des équations aux dérivées partielles, dont les trois plus utilisées sont :

- *la méthode des éléments finis* : l'équation originale est intégrée sur un volume de contrôle, puis la solution numérique est recherchée sous la forme d'une décomposition dans une base de fonctions choisies pour leurs propriétés ;
- *la méthode des différences finies* : les termes différentiels sont évalués à l'aide de différences finies (développement de Taylor) ;
- *la méthode des volumes finis* : la plupart des équations de la mécanique traduisent la variation d'une grandeur sous l'effet de flux entrant ou sortant. Il peut être plus avantageux d'écrire l'équation aux dérivées partielles sous une forme intégrée (sur un volume de contrôle) et de discrétiser l'équation résultante. Le principal avantage par rapport à la méthode aux différences finies est de pouvoir traiter des solutions qui peuvent devenir discontinues.

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode des volumes finis pour résoudre numériquement le problème étudié.

Rappelons-nous que le système de Saint-Venant-Exner linéarisé en une dimension d'espace (cf chapitre 2) s'écrit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial q}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \chi \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial q}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}, \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

où

$$\beta_1 = 2 \frac{\bar{Q}}{\bar{H}}, \quad \beta_2 = \frac{A_g}{1-p}, \quad \gamma_1 = g\bar{H} - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{H}^2}, \quad \chi = g\bar{H}, \quad \chi_1 = \frac{\chi}{\beta_2}.$$

Considérons les conditions limites suivantes

$$q(t, 0) = 0, \quad q(t, L) = q_L(t), \quad b(t, 0) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial x}(t, L) = 0. \quad (\text{III.2})$$

## III.2 Hyperbolicité du modèle couplé

La forme conservative du système (III.1) est donnée par :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = S(W) \partial_{x^2} W, \quad (\text{III.3})$$

où

$$W = \begin{pmatrix} h \\ q \\ b \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} q \\ \beta_1 q + \gamma_1 h + \chi b \\ \beta_2 q \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi b \end{pmatrix}$$

$W$  est le vecteur des variables primitives et  $F(W)$  est le flux. L'équation (III.3) peut également être réécrit par,

$$\partial_t W + A \partial_x W = B \partial_{x^2} W \quad (\text{III.4})$$

où

$$A(W) = D_W F(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \chi \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = D_W S(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi \end{pmatrix} ..$$

$A$  est la matrice jacobienne du flux  $F$  par rapport aux variables conservatives. Le polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$  de la matrice  $A(W)$  est donné :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 - \lambda & \chi \\ 0 & \beta_2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\beta_1 - \lambda) + \chi\beta_2\lambda + \lambda\gamma_1.$$

$$P_A(\lambda) = \lambda[-\lambda^2 + \beta_1\lambda + \chi\beta_2 + \gamma_1].$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \quad \text{ou} \quad -\lambda^2 + \beta_1\lambda + \chi\beta_2 + \gamma_1 = 0.$$

D'où les valeurs propres associées à la matrice jacobienne sont

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_1 - \delta^*}{2}, \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{\beta_1 + \delta^*}{2}$$

avec  $\delta^* = \sqrt{\beta_1^2 + 4\chi\gamma_1\beta_2}$ .

Les solutions correspondent aux vitesses d'onde du modèle. Elles sont réelles et distinctes, donc le modèle est hyperbolique.

On définit les matrices suivantes

$$\Lambda^+ = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^+ & & \\ & (\lambda_2)^+ & \\ & & (\lambda_3)^+ \end{bmatrix}, \quad \Lambda^- = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^- & & \\ & (\lambda_2)^- & \\ & & (\lambda_3)^- \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

où  $\Lambda^+$  a seulement les valeurs propres positives sur la diagonale, avec les négatives remplacées par zéro, et inversement pour  $\Lambda^-$ . Ainsi, nous définissons

$$A^+ = P\Lambda^+P^{-1} \quad \text{et} \quad A^- = P\Lambda^-P^{-1} \quad (\text{III.6})$$

et notons que

$$A^+ + A^- = P(\Lambda^+ + \Lambda^-)P^{-1} = P\Lambda P^{-1} = A. \quad (\text{III.7})$$

### III.3 La méthode des volumes finis avec le modèle linéaire

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes de contrôle, puis à effectuer des bilans de masse et de quantité de mouvement sur ces petits volumes. L'intérêt de la méthode des volumes finis réside dans le fait qu'elle assure la conservation de la masse, propriété importante à respecter par tous les calculs des écoulements de fluides, et permet de réduire un ordre de dérivées des équations aux dérivées partielles. Pour ces raisons, on se propose d'utiliser la méthode des volumes finis.

Parmi les modèles de volumes finis existants, qui sont basés sur la résolution des équations de Saint-Venant, nous utiliserons la technique du solveur de l'approximation Riemann de Roe (RARS : Roe's Approximate Riemann Solver).

#### III.3.1 Maillage

La solution numérique de n'importe quelle équation aux dérivées partielles nécessite la discrétisation du domaine de telle sorte que l'écoulement physique soit prédit à une précision souhaitée.

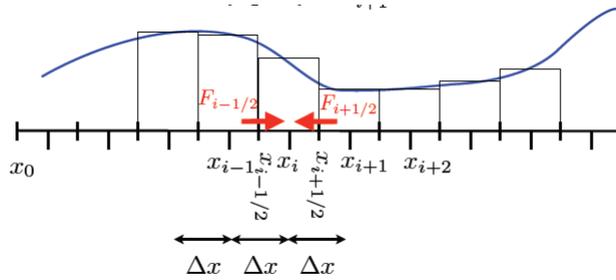


FIGURE III.1 – Discrétisation de l'espace [27].

En une dimension d'espace et pour un maillage régulier, l'espace est constitué de segment  $\mathcal{C}_i := [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  centré autour du point  $x_i := i\Delta x$  où  $\Delta x$  est le pas d'espace ou la taille de la cellule et l'indice en 1/2 correspondre aux interfaces des cellules. De plus, la suite des instants  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par la relation  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  où  $\Delta t$  désigne le pas de temps entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$  avec  $t^0$  donné. La solution  $W(t^n, x)$  du système (3.1) est approchée par la solution moyenne discrète  $W_i^n$ ,

$$W_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i} W(t^n, x) dx. \quad (\text{III.8})$$

De plus, le flux numérique défini aux interfaces entre deux cellules  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_{i+1}$  est donné par,

$$F_{i+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(t, x_{i+1/2})) dt. \quad (\text{III.9})$$

Avec cette notation, le schéma aux volumes finis s'écrit sous forme explicite,

$$W_i^{n+1} - W_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) = \Delta t^n S_i^n. \quad (\text{III.10})$$

L'approximation du flux numérique  $F_{i+1/2}^n$  est obtenue à partir de la donnée de  $W_i^n$  et  $W_{i+1}^n$ ,

$$F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(W_i^n, W_{i+1}^n). \quad (\text{III.11})$$

### III.3.2 Le modèle RARS

Le RARS a été initialement proposé pour la résolution de l'équation d'Euler (Roe<sup>1</sup> P.L., 1981). Bien que le RARS puisse correctement simuler les écoulements discontinus et les chocs, des oscillations indésirables peuvent cependant se produire si les termes sources sont importants.

Le solveur Roe approximatif de Riemann, est un solveur Riemann<sup>2</sup> approximatif basé sur le schéma de Godounov et consiste à trouver une estimation pour le flux numérique intercellulaire ou flux de Godounov  $F_{1+\frac{1}{2}}$  à l'interface entre deux cellules de calcul  $W_i$  et  $W_{i+1}$ . Pour un problème linéaire à coefficient linéaire constant, le flux numérique de la méthode de Godounov est donné par :

$$F_{i+1/2}^n = AW_{i+1} + \sum_{k=1}^m (\lambda_p)^+ R_{i+1/2}^p \quad (\text{III.12})$$

où  $R_{i+1/2}^p$  est une valeur propre de la matrice avec la valeur propre  $\lambda_p$ .

De même, le flux  $F_{i-1/2}^n$  est donné par

$$F_{i-1/2}^n = AW_i + \sum_{k=1}^m (\lambda_p)^- R_{i-1/2}^p. \quad (\text{III.13})$$

### III.3.3 Le schéma de Roe

Pour un problème linéaire, il existe une autre méthode de réécrire le flux  $F_{i+1/2}^n$  apparaissant dans (III.12), (III.13) qui le relie directement à la moyenne naïve instable de  $AW_{i+1}^n$  et  $AW_i^n$  donnée dans (III.11). La moyenne des expressions de (III.12) et (III.13) donne

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[ (AW_{i+1}^n + AW_i^n) - \sum_{p=1}^m [(\lambda_p)^+ - (\lambda_p)^-] \mathcal{R}_{i-1/2}^p \right]. \quad (\text{III.14})$$

Noter que  $\lambda^+ - \lambda^- = |\lambda|$ . On définit la matrice  $|A|$  par

$$|A| = R|\Lambda|R^{-1}, \quad \text{où } |\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_p|). \quad (\text{III.15})$$

Alors (III.14) devient

$$\begin{aligned} F_{i-1/2}^n &= \frac{1}{2} (AW_{i+1}^n + AW_i^n) - \frac{1}{2} |A| (W_{i+1}^n - W_i^n) \\ &= \frac{1}{2} [f(W_{i+1}^n) + f(W_i^n)] - \frac{1}{2} |A| (W_{i+1}^n - W_i^n). \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Pour le problème linéaire à coefficient constant, c'est simplement une autre façon de réécrire le flux Godounov, mais cette forme est souvent vue dans les extensions de problèmes non linéaires basés sur des solveurs approximatifs de Riemann. Cette forme de flux est souvent appelée méthode de Roe.

1. Philip L. Roe est professeur de génie aérospatial à l'Université du Michigan à Ann Arbor. Il est connu pour son travail dans le domaine de la dynamique computationnelle des fluides et de la magnétohydrodynamique. Roe a apporté une contribution fondamentale au développement de systèmes à haute résolution pour les lois de conservation hyperboliques. Il a développé le solveur approximatif de Riemann appelé Roe solver pour les flux compressibles avec des chocs.

2. Un solveur Riemann est une méthode numérique utilisée pour résoudre un problème Riemann. Ils sont fortement utilisés dans la dynamique computationnelle des fluides et la magnétohydrodynamique computationnelle.

L'utilisation du flux (III.16) dans (III.10) donne la mise à jour de la formule suivante de la méthode de Roe pour un système linéaire ou la méthode fractionnaire à été appliquée (voir [7]) :

$$W_i^* = W_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} A(W_{i+1}^n - W_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{p=1}^m (|\lambda_p| \mathcal{R}_{i+1/2}^p - |\lambda_p| \mathcal{R}_{i-1/2}^p), \quad (\text{III.17})$$

$$\text{où } \mathcal{R}_{i+1/2}^p = \alpha_{i+1/2}^p r^p, \quad \alpha_{i+1/2}^p = P^{-1}(W_{i+1}^n - W_i^n)^p,$$

où  $\lambda_p$  est le  $p$  ième valeur propre  $A$ .

Et  $r^p$  est le  $p$  ième vecteur de  $P$ , la matrice des vecteurs propres de  $A$ .

Ainsi,

$$W_i^* = W_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} A(W_{i+1}^n - W_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{p=1}^m (|\lambda_p| P^{-1}(W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n)^p r^p). \quad (\text{III.18})$$

$$W_i^{n+1} = W_i^* + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B W_i^*. \quad (\text{III.19})$$

**Remarque 2** *La résolution numérique du modèle linéaire peut conduire à des instabilités qui peut-être dû à l'une des valeurs propres nulle qui n'a pas été prise en compte correctement. Ainsi, nous considérons les résultats numériques du modèle non linéaire obtenue dans l'article de Diagne et al. [4], objet de notre mémoire, où les résultats sont basés sur les références [39] et [7].*

## III.4 Les données expérimentales pour le modèle non linéaire

Nous présentons quelques expériences de simulation pour illustrer le contrôle rétroactif (2.18) en utilisant une méthode précise de volume fini avec un schéma de Roe.

Nous considérons un canal expérimental de longueur  $L = 100m$  et de largeur unitaire section rectangulaire constante. Nous avons maillé le domaine avec 400 nœuds. Pour l'état stable uniforme, nous considérons les données  $1m$ ,  $1m^3 \cdot s^{-1}$  et  $0,4m$ , respectivement, pour la hauteur de la colonne d'eau, le débit d'eau et la bathymétrie. Le paramètre de réglage  $A_g$  est réglé à 0.03 et la porosité  $p$  à 0.4 tandis que  $\varepsilon_1 = 0.1$ . Le paramètre contrôle  $\mu$  est réglé à 0,85. La topographie initiale du fond est définie par

$$B(0, x) = 0.4 \left( 1 + \exp \left( - \frac{(x - 50)^2}{10} \right) \right),$$

avec une bosse gaussienne. Le niveau d'eau initial et le débit d'eau sont donnés respectivement par :

$$H(0, x) = 2 - B(0, x) \quad \text{et} \quad Q(0, x) = 0.$$

## III.5 Résultats numériques

Dans les exemples de test suivants, nous nous sommes concentrés pour voir l'évolution énergétique du système (II.11) sous la loi de contrôle (II.18). L'impact du paramètre de contrôle

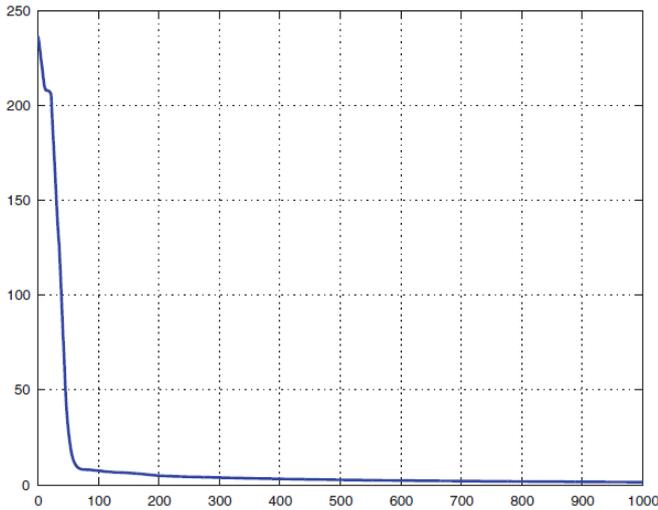


FIGURE III.2 – L'évolution de l'énergie

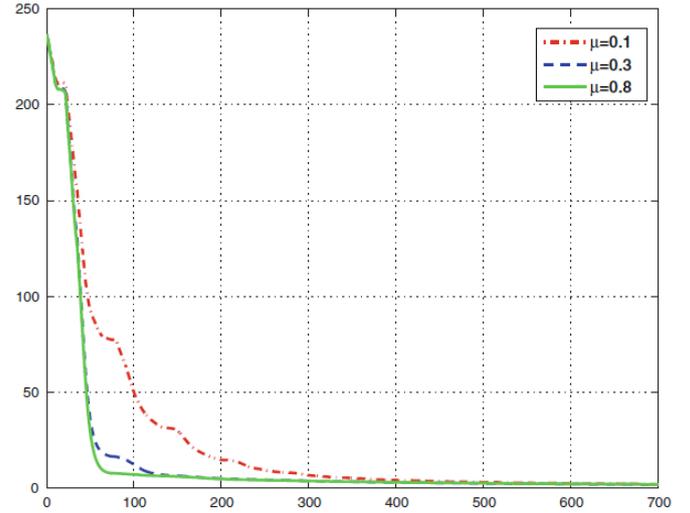


FIGURE III.3 – L'évolution de l'énergie en fonction de  $\mu$ .

$\mu$  sur le comportement de l'énergie sera également vérifié.

Dans la Fig. III.2, nous pouvons voir clairement que l'énergie  $E(t)$  diminue dans le temps comme prévu. Après un temps  $t = 500s$ , on remarque que la diminution ralentit. En fait, cela est dû au mouvement lent de la bathymétrie lorsque la hauteur de la colonne d'eau et sa vitesse deviennent proches de leurs états stables. A partir de  $t = 900 s$ , on remarque que le système converge vers le point de consigne souhaité  $(\bar{H}, \bar{Q}, \bar{B})$ .

Les énergies calculées pour plusieurs valeurs de  $\mu$  sont données par la Fig. III.3. Il convient de mentionner que ces expériences numériques confirment l'efficacité et la précision de la loi de contrôle conçue pour stabiliser le modèle STF autour d'un point de consigne désiré.

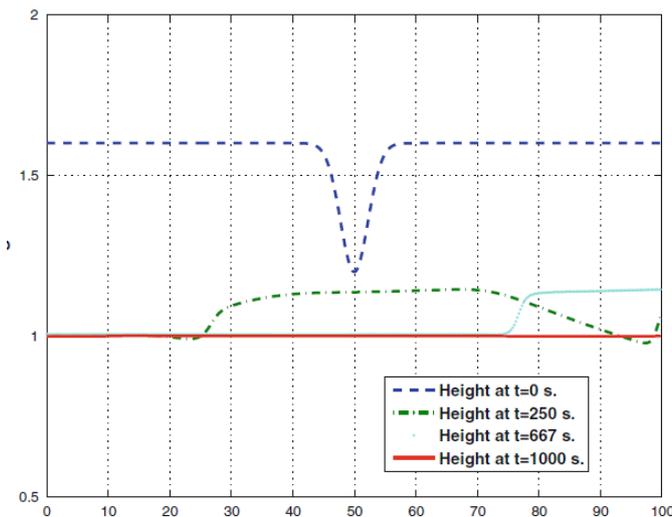


FIGURE III.4 – L'évolution du niveau d'eau.

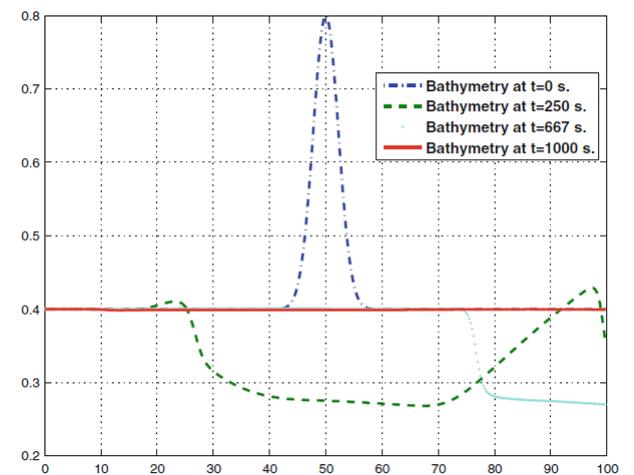


FIGURE III.5 – L'évolution de la bathymétrie

La hauteur de la colonne d'eau, la vitesse ainsi que la bathymétrie sont respectivement indiquées dans les figures III.4, III.5 et III.6. Les solutions sont en adéquation avec le résultat de la figure III.2.

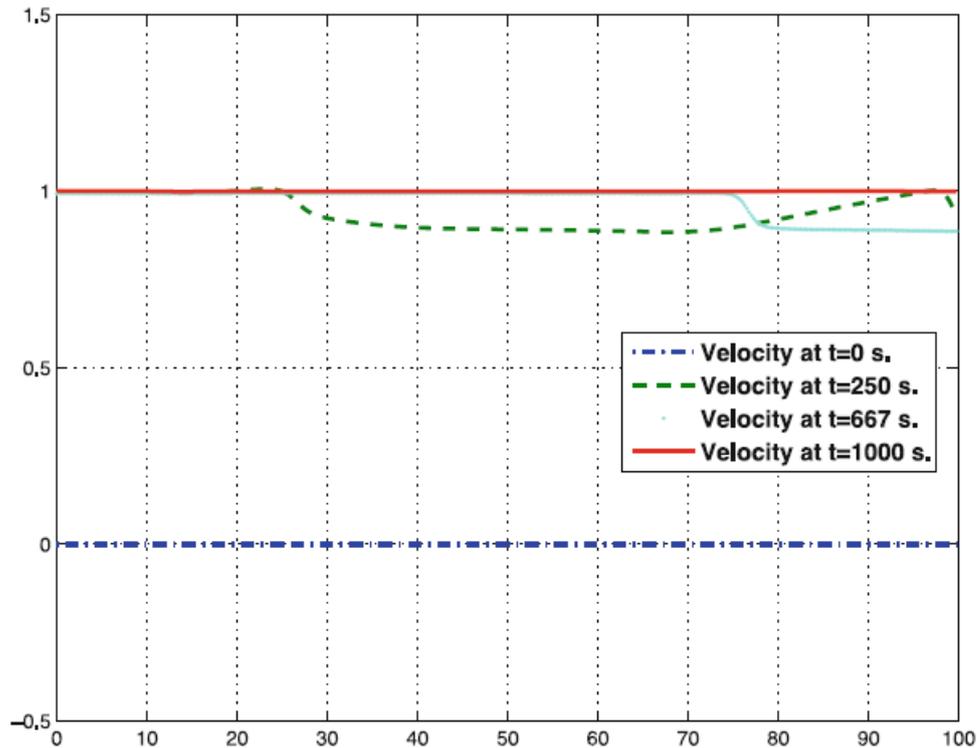


FIGURE III.6 – La vitesse d’écoulement.

Comme prévu, nous voyons clairement que la hauteur de la colonne d’eau et la vitesse se rapprochent de leur point de consigne  $\bar{H}$  et  $\bar{V}$  au fur et à mesure que  $t$  se rapproche de  $1000s$ . Mais, on peut remarquer aussi que la stabilisation de la bathymétrie est plus lente. Cependant, les figures à  $t = 1000s$  montrent que le système converge vers le point de consigne souhaité  $(\bar{H}, \bar{V}, \bar{B})$ .

La convergence vers le point de consigne souhaité pourrait être accélérée lors de la modulation du paramètre de contrôle  $\mu$ . En effet, il est observé que nous pouvons accélérer la diminution de  $E$  en augmentant le paramètre de contrôle  $\mu$ . Ceci est illustré par la Fig. III.3.

Dans cet manuscrit, on s'intéresse au problème de contrôle des écoulements dans un canal ouvert à bathymétrie variable. Notre modèle est obtenu en couplant le système hyperbolique de Saint-Venant avec l'équation de transport solides. Le rejet de sédiments est obtenu en fusionnant la formule de Schokltsch et la citation de Kubatko et Al. Nous avons conçu un contrôle rétroactif en aval en utilisant une version linéaire du modèle couplé pour réguler le niveau de la colonne d'eau, le débit d'eau et le niveau de la bathymétrie. La mesure du contrôle ne s'applique qu'au rejet d'eau en aval. De plus, le calcul du contrôle ne nécessite que des mesures du niveau d'eau et de la bathymétrie en aval.

Dans le Théorème principal, nous donnons le résultat de l'existence de la solution et de stabilisation du système. En particulier, nous avons une convergence ponctuelle de la solution obtenue. Nous présentons également quelques résultats numériques qui mettent en évidence l'efficacité de la loi de contrôle conçue pour stabiliser le modèle autour d'un point de consigne qui est l'état d'équilibre. Force est de constater ces résultats numériques donnés par les figures 2, 3, 4, 5 et 6 sont directement tirés dans notre article de référence [4].

Ce travail pourrait être étendu au véritable modèle STF non linéaire avec une définition différente du flux sédimentaire en utilisant d'autres approches citées dans l'introduction et dans la section [I.3.3](#).

- [1] P.-Y. Lagrée. *Equations de Saint Venant et application aux mouvements de fonds érodables. "Ecoulements en milieux naturels" Cours MSF12, M1 UPMC*. Institut Jean Le Rond D'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France. (2018).
- [2] Philippe UNG. *Simulation numérique du transport sédimentaire : aspects déterministes et stochastiques*. Université D'ORLEANS. (2016).
- [3] K. BLANCKAERT ; A. SCHLEISS. *Hydrologie fluviale et Aménagement des cours d'eau*. knom. (2018).
- [4] A. DIAGNE ; A. SENE. *Control of shallow water and sediment continuity coupled system*. (2012). left.
- [5] Xavier Litrico et Vincent Fromion.  *$H_\infty$  Control of an Irrigation Canal Pool With a Mixed Control Politics*. Janvier 2006.
- [6] J. A. Cunge, F. M. Holly, and A. Verway. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman. (1980).
- [7] Vivette Girault ; Piere-Arnaud Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI Laboratoire associé 189 . (1986).
- [8] Pierre-Olivier Malaterre, David C. Rogers, Jan Schuurmans. *Classification of Canal Control Algorithms*. (1998).
- [9] A. Zeriah. *Les espaces de Lebesgue  $L^2$* . Décembre (2011)
- [10] Slah SAHMIM. *Un schéma aux volumes finis avec matrice signe pour les systèmes non homogènes*. Université Paris-Nord - Paris 13. (2005).
- [11] Abdou Sene, Bocar Amadou Wane, Daniel Y. Le Roux. *Control of irrigation channels with variable bathymetry and time dependent stabilization rate*. Université Laval, G1K 7P4 Québec, Québec, Canada. October (2007).
- [12] S. Cordier, M.H. Le, T. Morales de Luna. *Bedload transport in shallow water models : Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help..* Université d'Orléans , France. (2011).
- [13] Le Dret, H. *La méthode de Galerkin. Équations Aux Dérivées Partielles Elliptiques Non Linéaires..* (2003).
- [14] Emmanuel Audusse. *hyperbolic models and numerical analysis for shallow water flows*. Université Pierre et Marie Curie - Parie VI. (2004).
- [15] Serre D. *Systèmes hyperboliques de lois de conservation, Parties I et II*. Diderot, Paris. (1996).
- [16] Mariama Ndiaye — Georges Bastin. *Commande frontière adaptative d'un bief de canal avec prélèvements inconnus*. Université catholique de Louvain Bâtiment Euler. 2004.
- [17] CEN Li-Hui, XI Yu-Geng. *Stability of Boundary Feedback Control Based on Weighted Lyapunov Function in Networks of Open*. 2009.
- [18] H Graf, Mustafa S. Altinakar. *Ecoulement permanent uniforme et non uniforme*. Janvier 1993.

- 
- [19] P. O. Malaterre. *PILOTE : Linear Quadratic Optimal Controller for Irrigation Canals*. (1995).
- [20] Li Tatsien. *Exact controllability for quasilinear hyperbolic systems and its application to unsteady flows in a network of open canals*. Fudan University, China. (2004).
- [21] Guenter LEUGERING et J. P. Georg SCHMIDT. *On the Modelling and Stabilization of Flows in Network of Open Canals*. (2003).
- [22] MEYER-PETER, E. and MULLER, R., Professors, Zurich. *Formulas for Bed-Load Transport*. Government of India. Central Board of Irrigation. Kennedy Hous Simla S. W. Mai 1948.
- [23] T. E. Baldock' et P. Holmes. *Seepage Effets on Sediment Transport by Waves and Currents*. (1998).
- [24] Leo C. Van Rijn. *Sediment Transport, part I : Bed Load Transport*. (1984).
- [25] Justin Hudson, et Peter K. Sweby. *Formulations for Numerically Approximating Hyperbolic Systems Governing Sediment Transport*. 10 Septembre 2002.
- [26] Wang SSY, Wu W. *Computational simulation of river sedimentation and morphology : a review of the state of the art*. (2005).
- [27] P.-Y. Lagrée. *Résolution numérique des équations de Saint-Venant, mise en oeuvre en volumes finis par un solveur de Riemann bien balancé*. Institut Jean Le Rond D'Alembert. Janvier 2020.
- [28] P. D. Lax, R.D. Richtmyer. *Survey of the stability of linear finite difference equations*. DOI 10.1002/cpa.3160090206. (<https://math.berkeley.edu/wilken/228B.S07/LaxRichtmyer.pdf>).
- [29] Castro-Diaz MJ, Nieto EDF, Ferreiro AM. *Sediment transport model in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods*. (2008).
- [30] Kubatko EJ, Westerink JJ, Dawson C. *An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous Galerkin method for bed evolution*. (2006).
- [31] David P. Callaghan, Frédéric Saint-Cast, Peter Nielsen, Tom E. Baldock *Numerical solutions of the sediment conservation law; a review and improved formulation for coastal morphological modelling* 19 Avril 2006
- [32] Ethan J. Kubatko, Joannes J. Westerink, Clint Dawson *An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous Galerkin method for bed evolution* 5 juillet 2005
- [33] Mohamed Gad-el-Hak. *Flow Control : The Future*. Journal of Aircraft, vol. 38, no 3, 1er mai 2001, p. 402–418 (ISSN 0021-8669, DOI 10.2514/2.2796, lire en ligne [archive], consulté le 3 avril 2017)
- [34] GOUDIABY M.S. *Contrôle de réseaux de canaux à ciel ouvert*. 11 Avril 2012.
- [35] BOUDJELAL S.<sup>1</sup>, FOURAR A.<sup>2</sup>, HADAD D.<sup>3</sup>, MERROUCHI F.<sup>4</sup> *Modélisation en 2D des écoulements brusquement instationnaires dans un canal prismatique à surface libre*. ISSN 1112-3680, n22, June 2015
- [36] SHI Yu-e *Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré* <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00130539v2> Novembre 2006
- [37] Jean-Michel Coron, Jérôme Le Rousseau *Saint-Venant et canaux* <http://www.breves-de-maths.fr/saint-venant-et-les-canaux/>
- [38] By Pierre-Olivier Malaterre<sup>1</sup> ; David C. Rogers<sup>2</sup> ;z Member, ASCE, and Jan Schuurmans<sup>3</sup> *Classification of Canal Control Algorithms* Janvier/Février 1998
-