

UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



ECOLE DOCTORALE SCIENCES TECHNOLOGIES ET INGENIERIE

UFR : SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIES

MENTION : MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

OPTION : EDP ET MODELISATION

**THESE**

présentée par

**Guillaume Itbadio Sadio**

En vue de l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR**

Sujet de thèse :

**Contribution sur des problèmes d'identification de configurations géométriques sous contraintes d'équations aux dérivées partielles**

Sous la direction des professeurs Marie Salomon Sambou et Diaraf Seck

Soutenu publiquement à l'UASZ le 21 mai 2022 devant le jury composé de :

Président :	Alassane Diédhiou	Professeur titulaire UASZ
Examineurs :	Diène Ngom	Maitre de Conférences UASZ
	Timack Ngom	Maitre Assistant UASZ
Rapporteurs :	Idrissa Ly	Professeur titulaire UCAD
	Ibrahima Faye	Professeur titulaire UADB
	Guy Degla	Maitre de Conférences
		Université d'Abomey Calavi, Bénin
Directeurs :	Marie Salomon Sambou	Professeur titulaire UASZ
	Diaraf Seck	Professeur titulaire UCAD

**”...Faites tout pour la gloire de Dieu”**

**I Corinthiens 10 :31**

**Ainsi de gloire en gloire tu m’emmènes dans les sentiers de la vie et  
de l’amour...**

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Résumé et Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Notations</b>	<b>8</b>
<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>1 Quelques outils de base</b>	<b>15</b>
1.1 Quelques résultats . . . . .	15
1.2 Principe du maximum . . . . .	21
1.2.1 Un rappel sur le principe du maximum dans le cas elliptique . . . . .	21
1.2.2 Principe du maximum pour l'équation de la chaleur . . . . .	26
1.2.3 Principe du maximum dans le cas des équations paraboliques quasi-linéaires	28
1.2.4 Principe du maximum dans le cas des équations paraboliques non linéaires	32
1.3 Points fixes . . . . .	34
1.3.1 Le théorème du point fixe de Brouwer . . . . .	34
1.3.2 Le théorème du point fixe de Schauder . . . . .	36
1.3.3 Le théorème du point fixe de Schaefer . . . . .	38
1.3.4 Le théorème du point fixe de Tychonov . . . . .	39
1.3.5 Le théorème du point fixe de Kakutani . . . . .	42
1.4 Méthode de Galerkin . . . . .	42
<b>2 EDP paraboliques et optimisation de forme</b>	<b>44</b>
2.1 Cas de l'équation de la chaleur . . . . .	44
2.1.1 Description du problème . . . . .	45
2.1.2 Formulation faible du problème . . . . .	45
2.1.3 Problème parabolique abstrait . . . . .	46
2.1.4 Problème spectral . . . . .	47
2.2 Application des points fixes . . . . .	51
2.2.1 Application du théorème du point fixe de Schauder . . . . .	53
2.2.2 Application du théorème du point fixe de Schaefer . . . . .	55
2.3 Optimisation de forme . . . . .	57
2.3.1 Étude d'existence de solution sous la propriété de cône uniforme . . . . .	62
2.3.2 Étude d'existence de solution sous la contrainte de la $\gamma$ -convergence avec la monotonie de la fonctionnelle . . . . .	65

2.3.3	Étude d'existence de solution sous la contrainte de la $\gamma$ -convergence avec l'argument de compacité . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Identification de formes géométriques</b>	<b>75</b>
3.1	Condition d'optimalité . . . . .	75
3.1.1	Condition d'optimalité par la méthode du champ des vecteurs . . . . .	76
3.1.2	Théorie du minimax et du lagrangien . . . . .	78
3.1.3	Dérivée de forme . . . . .	88
3.1.4	Dérivée topologique . . . . .	94
3.2	Principe de comparaison . . . . .	102
3.2.1	Propriétés de monotonies . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Analyse et simulation numérique</b>	<b>105</b>
4.1	Méthode numérique basée sur la déformation polynomiale . . . . .	105
4.1.1	Illustrations numériques en utilisant la translation . . . . .	107
4.1.2	Illustrations numériques . . . . .	108
4.1.3	Illustrations numériques par déformation parabolique . . . . .	110
4.1.4	Illustrations numériques . . . . .	110
4.2	Méthode numérique par une déformation géométrique . . . . .	112
4.2.1	Lagrangien augmenté . . . . .	116
4.2.2	Régularisation du gradient de forme . . . . .	116
4.2.3	Simulations et illustrations numériques . . . . .	117
4.2.4	Illustrations numériques . . . . .	119
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>

---

# REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à rendre grâce à Dieu, à Lui la louange, l'adoration et la gloire. Je suis conscient et reconnaissant de la formation que j'ai reçue au sein du Département de Mathématiques de l'UFR Sciences et Technologies de l'Université Assane Seck de Ziguinchor. Je remercie tous les professeurs qui m'ont initié et donné les bases des mathématiques pour exceller dans ce domaine.

J'exprime ma gratitude au président du jury le Professeur Alassane Diédhiou qui a accepté de présider ce jury et d'apporter sa contribution mathématique pour une meilleure présentation de ce travail.

Ma reconnaissance va à l'endroit du Pr Diène Ngom et du Dr Timack Ngom qui ont bien accepté d'examiner mon travail.

J'exprime aussi ma gratitude au Pr Guy Degla de l'Institut de Mathématiques et Sciences Physiques (IMSP) de l'Université d'Abomey Calavi du Bénin, au Professeur Ibrahima Faye de l'Université Alioune Diop de Bambey et au Professeur Idrissa Ly de l'Université Cheick Anta Diop de Dakar qui ont bien accepté de rapporter cette thèse et d'apporter leur expertise.

Je tiens à remercier mon Directeur de thèse le Professeur Diaraf Seck, qui a bien accepté de m'encadrer et de m'initier à la recherche mathématique particulièrement dans le domaine des équations aux dérivées partielles pour mon Master et ensuite dans le domaine de l'analyse géométrique pour la thèse. Je tiens tant à le remercier pour son approche et sa passion des mathématiques, sa disponibilité et ainsi pour ses qualités humaines, car il m'a vraiment enrichi, encouragé, et a su réveiller en moi une passion pour la recherche qui m'a permis de bien comprendre ce sujet et d'en arriver à bout. Je suis conscient de cette chance et je le remercie infiniment.

Je remercie aussi mon Co-directeurs le Professeur Marie Salomon Sambou, pour sa rigueur, son approche, ses compétences du point de vue mathématiques que humaine.

Une mention spéciale à l'École Doctorale Sciences Technologies et Ingénierie (ED-STI), au Directeur le Professeur Diouma Kobor et à toute son équipe.

Je tiens à remercier le Laboratoire de Mathématiques et Applications (LMA) en particulier son Directeur le Professeur Marie Salomon Sambou pour le cadre de travail et les échanges fructueux autour de tous les domaines des mathématiques lors des séminaires hebdomadaires. C'est un endroit de partage, d'échange et de recherche, ce qui contribue au perfectionnement de nos travaux de recherches et installe une culture mathématique solide pour exceller partout dans ce monde.

Une pensée toute particulière au Laboratoire de Mathématiques de la Décision et d'Analyse Numérique (LMDAN) de l'UCAD qui m'a toujours bien accueilli depuis mon mémoire de Master et qui m'a permis de faire des séjours de recherches. Ce qui ont été des expériences remarquables et enrichissantes. Aussi depuis l'avènement du Covid-19, les différents séminaires

organisés en ligne au niveau du laboratoire m'ont enrichi avec une culture générale mathématique dense.

Une mention spéciale et toute particulière au projet NLAGA qui me soutient dans le cadre de mes déplacements entre Dakar et Ziguinchor et de mes séjours à Dakar. À travers ce projet, je remercie tous les passionnés chercheurs que j'ai pu rencontrer lors de la première biennale des mathématiques organisée à Dakar en 2019 et de la deuxième biennale des mathématiques au Cap-Skiring en 2022.

J'exprime aussi ma gratitude aux Pr. Alassane Sy, Dr. Mouhamadou Samsidy Goudiaby, Dr. Timack Ngom, Dr. Mamadou Eramane Bodian, Dr. Mamadou Gueye, Pr Diene Ngom, Dr. Emmanuel Nicolas Cabral, Pr. Edouard Diouf, Dr. Daouda Niang Diatta et au Pr. Thomas Amousou Guedenon qui m'ont été d'une aide remarquable car m'ayant conseillé et encouragé, ils m'ont suivi tout au long de ma recherche.

Un grand merci aux Dr. Timack Ngom, Dr. Mamadou Eramane Bodian, Dr. Mamadou Gueye, Dr. Aliou Seck et Pr. Thomas Amousou Guedenon pour les lectures et les relectures de ma thèse.

Je tiens à remercier Dr. Timack Ngom de part son attention portée sur ma personne car il m'a accueilli dans son bureau avec un cadre de travail excellent où la majeure partie de cette thèse fut rédigée et au sein de son équipe de recherche sur les questions d'EDP et de part sa disponibilité, ses conseils, ses explications, ses encouragements. Sa vision des mathématiques m'a été d'une aide précieuse et d'un grand avantage pour arriver à bout de ce projet.

Ma joie est grande quand je pense à mon Professeur de français aux Cours Privés Mamadou Gassama de Ziguinchor entre 2008 et 2010, aujourd'hui Dr Ibrahima Ba de la Faculté des Lettres et Sciences humaines de l'UCAD qui a été d'une aide remarquable de part ses conseils et ses encouragements et son apport littéraire pour l'aspect littéraire de ce document.

J'adresse mes remerciements à mes aînés et jeunes frères dans cette discipline et une pensée particulière au Dr. Ibrahima Sané qui m'a toujours conseillé, soutenu et encouragé.

Mes remerciements vont à l'endroit de mes camarades de promotions et amis qui m'ont été d'un soutien indéfectible.

Cette thèse est le lieu de remercier les écoles par lesquelles je suis passé à savoir l'école élémentaire Saint Charles de Simbandi Balante, le séminaire Saint Louis de Ziguinchor, le CEM de Simbandi Balante et les Cours Privés Mamadou Gassama de Ziguinchor et tous ces enseignants et professeurs qui m'ont enseigné, corrigé et orienté et continuent aujourd'hui à m'encourager.

Une reconnaissance inestimable aux Cours Privés Mamadou Gassama de Ziguinchor, au Directeur Sadio Gassama et à toute son équipe pour le scientifique et mathématicien que je suis devenu.

Un grand merci au Groupe Performance Afrique, au directeur Ibrahima Diallo et en particulier à l'antenne de Ziguinchor.

Que dire de cette famille Sadio pour tout le soutien reçu et pour cette confiance et pour cette patience?

---

# RÉSUMÉ ET ABSTRACT

## Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution d'un problème d'analyse géométrique des formes sous la contrainte d'un problème aux limites parabolique non linéaire. L'objectif est d'identifier un domaine dont une partie du bord est connue, et dans lequel une EDP parabolique non linéaire est vérifiée. Pour ce faire, nous passons par la méthode d'optimisation de formes géométriques pour répondre à la question principale posée sur l'identification du domaine. Le problème d'identification de domaine provient de l'observation de données, il est aussi appelé problème inverse. Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) d'un phénomène. Nous allons étudier un problème inverse qui consiste à déterminer la partie inconnue du bord d'un domaine à partir des mesures sur la partie de la frontière connue. Nous allons nous focaliser sur le cas où les mesures de frontières sont une donnée de Cauchy de la solution de l'équation aux dérivées partielles non-linéaires parabolique ou elliptique. Et la partie inconnue de la frontière du domaine est inaccessible. De plus, soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  où  $\partial\Omega$  est une frontière régulière avec  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$  où  $\Gamma_0$  est la partie accessible, régulière (de classe  $C^2$ ). Notre objectif est de reconstruire  $\Gamma$  à partir de la donnée de Cauchy.

Nous introduisons les outils de base d'analyse fonctionnelle et des méthodes topologiques pour analyser la solvabilité du problème aux limites parabolique. Ensuite, nous montrons l'existence de solution du problème d'optimisation de formes géométriques sous la propriété de cône uniforme et l'existence de solution du problème d'optimisation de formes géométriques sous la contrainte de la  $\gamma$ -convergence avec l'argument de la monotonie de la fonctionnelle puis avec l'argument de la compacité de l'ensemble admissible. Nous faisons une identification de domaine en utilisant les conditions d'optimalité du premier ordre avec la méthode de perturbation de domaine par des champs de vecteurs, combinées aux principes de comparaison. Aussi nous développons le calcul de la dérivée de forme et de la dérivée topologique en utilisant la méthode du minimax et du lagrangien. Nous terminons cette thèse par une analyse et une simulation numérique dont le but est d'identifier numériquement un domaine. Cette étude suit trois méthodes, et reprend les idées déjà étudiées de manière théorique dans Ndiaye et al (Bull Math Anal Appl 4(1) :91–103, 2012) tout en proposant les algorithmes numériques.

La première consiste à faire une translation du bord inaccessible et la seconde utilise la déformation du bord inaccessible. La troisième suit une approche d'optimisation de formes géométriques en passant par la méthode du lagrangien augmenté pour faire des simulations numériques.

**Mot-clés** : Point fixe, existence, conditions optimalité, minimax, adjoint moyenné, lagrangien,

contenu de Minkowski, dérivée de forme et dérivée topologique, problème aux limites, problème inverse, problème à frontière libre et problème d'optimisation de formes géométriques, formulation variationnelle, multiplicateur de Lagrange, méthode spectrale, principe de comparaison, principe du maximum, méthode du lagrangien augmenté.



## Abstract

In this thesis, we are interested in solving a geometric shape analysis problem under the constraint of a nonlinear parabolic boundary problem. The objective is to identify a domain with a known boundary in which a nonlinear parabolic PDE is verified. To do this, we use the geometric shape optimisation method to answer the main question of domain identification. The domain identification problem arises from the observation of data and is also called the inverse problem. An inverse problem is a situation in which the values of some parameters (or unknowns) of a model have to be identified from observations (or measurements) of a phenomenon. We will study an inverse problem which consists in determining the unknown part of the boundary of a domain from measurements on the known part of the boundary. We will focus on the case where the boundary measurements are a Cauchy datum of the solution of the non-linear parabolic or elliptic partial differential equation. And the unknown part of the domain boundary is inaccessible. Moreover let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  with smooth boundary  $\partial\Omega$  with  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma, \Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$  where  $\Gamma_0$  is the accessible part, regular (for instance of class  $C^2$ ). Our goal is to reconstruct  $\Gamma$  from the Cauchy data. We introduce basic tools of functional analysis and topological methods to look at the solvability of the parabolic boundary problem. Then, we show the existence of solution of the geometric shape optimization problem under the uniform cone property and the existence of solution of the geometric shape optimization problem under the  $\gamma$ -convergence constraint with the monotonicity argument of the functional and then with the compactness argument of the admissible set. We perform domain identification using the first-order optimality conditions with the method of perturbation of domain by vector fields, combined with the principles of comparison. Also we develop the computation of the shape derivative and the topological derivative using the minimax and the lagrangian method. We conclude this thesis with a numerical analysis and simulation aimed at numerically identifying a domain. This study follows three methods, and takes up the ideas already studied theoretically in Ndiaye et al (Bull Math Anal Appl 4(1) :91-103, 2012) while proposing the numerical algorithms. The first one consists of a translation of the inaccessible boundary and the second one uses the deformation of the inaccessible boundary. The third one follows a geometric shape optimization approach using the augmented Lagrangian method to perform numerical simulations.

**Keywords :** Fixed point, existence, optimality conditions, minimax, average adjoint, lagrangian, Minkowski content, shape derivative and topological derivative, boundary problem, inverse problem, free boundary problem and optimization problem of geometric shapes, variational formulation, Lagrange multiplier, spectral method, comparison principle, maximum principle, Lagrangian augmented method.

---

# NOTATIONS

Outre des notations très classiques, nous utiliserons les conventions suivantes :

— Ensembles

$\mathbb{R}^N$  espace euclidien de dimension  $N$

$\Omega$  désigne toujours un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $\partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$

$\bar{\Omega}$  l'adhérence de  $\Omega$

$Q = ]0, T[ \times \Omega$  : le cylindre

$\Sigma = ]0, T[ \times \partial\Omega$

$\Sigma_P = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T))$  est la frontière parabolique du cylindre  $Q$

$\mathbb{Q} = (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$

$conv(A)$  : l'enveloppe convexe de  $A$

$Simp$  : le simplexe

Soit  $Y$  est un ensemble non vide,

$2^Y = \mathcal{P}(Y) = \{C : C \text{ est un sous-ensemble de } Y\}$  l'ensemble des parties de  $Y$

$2_*^Y = \{C \in 2^Y : C \text{ non vide}\}$  l'ensemble des parties de  $Y$  qui sont non vides

$2_f^Y = \{C \in 2^Y : C \text{ fermé}\}$  l'ensemble des parties de  $Y$  qui sont fermées

$2_b^Y = \{C \in 2^Y : C \text{ borné}\}$  l'ensemble des parties de  $Y$  qui sont bornées

$2_{*fb}^Y = 2_*^Y \cap 2_f^Y \cap 2_b^Y$  l'ensemble des parties de  $Y$  qui sont à la fois non vides, et fermées bornées

— Distances, normes et boules

$|\xi| = \left( \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right)^{1/2}$  la norme euclidienne du vecteur  $\xi \in \mathbb{R}^N$  de composantes  $\xi_1, \dots, \xi_n$

$d(\cdot, \cdot)$  la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^N$

$B(x, r)$  est la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$

$B_F(x, r)$  est la boule fermée de centr  $x$  et de rayon  $r$

$diam(A)$  le diamètre de  $A$

— Matrices

$\mathbb{S}^N$  est l'ensemble des matrices réelles symétriques  $N \times N$

$\mathbb{M}^{M \times N}$  une matrice réel d'ordre  $M \times N$   $diag(A)$  : la matrice diagonale.

$tr(A)$  : la trace de la matrice  $A$

$A^t$  : la matrice transposée de  $A$

$I$  : la matrice identité dans  $\mathbb{R}^N$

$det(A)$  : le déterminant de la matrice  $A$

— Espaces fonctionnels

$C^m(\Omega)$  (respectivement  $C^m(\bar{\Omega})$ ) l'espace des fonctions  $m$  fois continûment différentiables

sur  $\Omega$  (respectivement sur  $\bar{\Omega}$ )

Pour  $k \geq 1$ ,  $C_0^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  est l'espace des fonctions continues et  $k$  fois différentiables de  $\mathbb{R}^N$  à  $\mathbb{R}^N$  qui sont nulles à l'infini

Pour  $k \geq 1$ ,  $C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  est l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}^N$  à  $\mathbb{R}^N$  qui sont nulles à l'infini

$C^k(\bar{D}, \bar{D})$  : l'espace des fonctions continues et  $k$  fois différentiables de  $\bar{D}$  à valeurs dans  $\bar{D}$  ;

$C(0, \epsilon; C^k(\bar{D}; \mathbb{R}^N))$  : l'espace des fonctions continues de  $]0, \epsilon[$  à valeurs dans  $C^k(\bar{D}; \mathbb{R}^N)$

$\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$

$\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace des distributions sur  $\Omega$

$L^p(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions de puissance  $p^{\text{eme}}$  sommable ( $1 \leq p \leq \infty$ ). C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p \right)^{1/p}$$

$L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables  $f$  essentiellement bornées sur  $\Omega$ , c'est à dire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $|f(x)| \leq C$  presque partout dans  $\Omega$ . C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p dans } \Omega\}$$

$L_{loc}^1(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions localement sommables dans  $\Omega$

De manière générale, soit  $X$  un espace de Banach de norme  $\|\cdot\|_X$  ; pour tout entier  $m \geq 0$   $C^m(0, T, X)$ ,  $0 < T < +\infty$ , l'espace des fonctions  $m$  fois continûment différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ , c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{\mathcal{C}^m(0, T, X)} = \max_{0 \leq l \leq m} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^l}{dt^l} v(t) \right\|_X \right).$$

On désigne pour tout  $p \in \mathbb{R}$ , avec  $1 \leq p < +\infty$ , par  $L^p(0, T, X)$  l'espace des fonctions  $t \mapsto v(t)$  fortement mesurables sur  $]0, T[$  pour la mesure  $dt$  (c'est à dire les fonctions scalaires  $t \mapsto \|v(t)\|_X$  sont mesurables pour la mesure  $dt$ ) et telle que

$$\|v\|_{L^p(0, T, X)} = \left( \int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < +\infty.$$

$L^p(0, T, X)$  muni de cette norme est un espace de Banach.

Lorsque  $X$  est un espace de Hilbert muni de produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)_X$ , et  $L^2(0, T, X)$  est un espace Hilbert avec le produit scalaire défini comme il suit :

$$(u, v)_{L^2(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

#### — Calcul différentiel

$\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est la dérivée partielle de  $u$  par rapport à la variable  $x_i$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$  la dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport aux variables  $x_i$  et  $x_j$

$\frac{\partial u}{\partial t}$  la dérivée partielle de  $u$  par rapport à  $t$

$\frac{\partial u}{\partial \nu}$  la dérivée partielle de  $u$  par rapport à  $\nu$ , avec  $\nu$  étant la normale extérieure à  $\partial\Omega$

$\Delta$  le Laplacien avec  $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

$div$  l'opérateur divergence avec  $div u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

$\nabla$  le gradient avec  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^t$

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  un multi-indice, c'est à dire un vecteur de  $N$  composantes entières positives  $\alpha_i \geq 0$ . On note  $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$  et pour une fonction  $v$ ,  $\partial^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x)$

— Espace de Sobolev

Pour un entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par

$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$ . C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$$

L'espace de Sobolev  $H_0^m(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$

$H^{-m}(\Omega)$  l'espace dual de  $H_0^m(\Omega)$

Pour un entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est défini par

$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\}$ . C'est un espace de Banach

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p \right)^{1/p}$$

$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  est l'espace des fonctions lipschitziennes  $\phi$  de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  telles que  $\phi$  et  $\nabla \phi$  sont uniformément bornés dans  $\mathbb{R}^N$ . Cet espace muni de la norme

$$\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (|\phi(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\nabla \phi(x)|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N})$$

est un espace de Banach

— Mesures

$\mathcal{H}_s$  la mesure de Hausdorff de dimension  $s$

$m_L$  la mesure de Lebesgue

— Optimisation de forme

$(s, t)$  variables temporelles

$\chi_\Omega$  la fonction caractéristique de  $\Omega$

$L(s, \varphi, \psi)$  : le lagrangien

$d_y L(s, \varphi, \psi; \psi')$  : la dérivée du lagrangien par rapport à  $y$

$d_x L(s, \varphi, \psi; \varphi')$  : la dérivée du lagrangien par rapport à  $x$

$d_s L(s, \varphi, \psi)$  : la dérivée du lagrangien par rapport à  $s$

$J$  : fonctionnelle de forme

$dJ$  : dérivée de forme d'ordre un de la fonctionnelle de forme  $J$

$\mathcal{L}(\Omega, l, b)$  : le lagrangien augmenté

$\dot{u}$  : dérivée matérielle

$u'$  : dérivée de forme de  $u$

$p$  : solution du problème adjoint

$p'$  : dérivée de forme de  $p$

$T_s$  et  $T_s^{-1}$  : transformations

$DT_s$  : le jacobien de  $T_s$

$\gamma_s = |\det(DT_s)|$

$DV(s)$  et  $DT_s$  sont les matrices jacobiennes respectivement de  $V(s)$  et de  $T_s$

$A(s) = \gamma_s DT_s^{-1} (DT_s^{-1})^*$

$M(T_s) = \det(DT_s)^* DT_s^{-1}$  est le cofacteur de la matrice Jacobienne  $DT_s$

$$\omega(s) = \|M(DT_s) \cdot \nu\|_{\mathbb{R}^N}$$

$\nabla_\tau$  : le gradient tangentiel sur  $\partial\Omega$

$div_\tau$  : la divergence tangentielle sur  $\partial\Omega$

$\Delta_\tau$  : l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\partial\Omega$  avec  $\Delta_\tau u = div_\tau[\nabla_\tau u]$

---

# INTRODUCTION

Cette thèse traite d'un problème d'analyse géométrique des formes sous la contrainte d'un problème aux limites parabolique non linéaire. L'objectif est d'identifier un domaine dont une partie du bord est connue et dans lequel une EDP parabolique non linéaire est satisfaite. Pour ce faire, nous passons par la méthode d'optimisation de formes géométriques pour répondre à la question principale posée sur l'identification du domaine. Le problème d'identification de domaine provient de l'observation de données, il est aussi appelé problème inverse. Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) d'un phénomène. C'est également en quelque sorte le contraire d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, pour en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct. Le problème inverse consiste à remonter le schéma : connaissant les observations, le but est de retrouver les valeurs des paramètres.

La résolution du problème inverse passe donc le plus souvent par une étape initiale de modélisation du phénomène, dit problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent et sont en effet observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont dans plusieurs de cas des problèmes mal posés au sens d'Hadamard, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

Les problèmes inverses nous viennent de beaucoup de problèmes théoriques et d'autres des vrais problèmes de la vie tels qu'en spectroscopie, en imagerie médicale et des problèmes de pollutions etc. Les livres tels que [27] et [60] consacrent une introduction et des exemples à l'appui aux problèmes inverses.

Il existe plusieurs type de problèmes inverses c'est ainsi que dans cette thèse nous allons étudier un type de problème inverse qui consiste à déterminer la partie inconnue du bord d'un domaine à partir des mesures sur la partie de la frontière connue. Nous allons considérer le cas où les mesures de frontières sont une donnée de Cauchy de la solution de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire parabolique ou elliptique. Et la partie inconnue de la frontière du domaine est inaccessible. De plus, soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  où  $\partial\Omega$  est une frontière régulière avec  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$  où  $\Gamma_0$  est la partie accessible, régulière (de classe  $C^2$ ). Notre objectif est de reconstruire  $\Gamma$  à partir de la donnée de Cauchy. Pour ce faire, nous passons

par la méthode d'optimisation de formes géométriques pour répondre à la question principale posée sur l'identification du domaine.

L'optimisation de formes, aussi appelée optimisation structurale, est une branche de l'optimisation issue des questions de contrôle optimal. Elle a pour finalité la conception de la meilleure forme géométrique à donner à un objet au regard de certains critères et contraintes. Plusieurs documents comme [36], [59], [96] proposent des introductions à l'optimisation de formes.

Ce domaine a connu un essor considérable car étant réactivé et renouvelé par l'avènement des ordinateurs, l'explosion récente de la modélisation et du calcul scientifique qui sont arrivés avec de nouvelles questions et de nouvelles applications. Ainsi l'optimisation est redevenue un vaste domaine de recherche dont les applications concernent de nombreuses disciplines telles que la mécanique, l'économie, la gestion ou encore les sciences biologiques...

Un problème d'optimisation de forme est caractérisé par trois données :

- un modèle c'est à dire un système d'équations ou un problème aux limites qui permet d'évaluer ou d'analyser un phénomène physique, un comportement d'un objet,.....
- un critère que l'on cherche à minimiser ou à maximiser, et éventuellement plusieurs critères. Nous parlerons aussi de fonction objectif, de coût ou de fonctionnelle.
- un ensemble admissible de variables d'optimisation qui tient compte d'éventuelles contraintes que l'on impose aux variables.

Parmi les problèmes d'optimisation de forme on peut distinguer trois grandes catégories : l'optimisation de forme paramétrique, l'optimisation de forme géométrique et l'optimisation de forme topologique.

L'optimisation de forme paramétrique est l'optimisation où les formes sont paramétrées par un nombre réduit de variables (par exemple, une épaisseur, un diamètre, des dimensions), ce qui limite considérablement la variété des formes possibles (ou admissibles).

L'optimisation de forme géométrique est l'optimisation où, à partir d'une forme initiale, on varie la position des frontières de la forme sans toutefois changer la topologie de la forme.

L'optimisation de forme topologique est l'optimisation où l'on cherche, sans aucune restriction explicite ou implicite, la meilleure forme possible quitte à changer de topologie.

Dans ce document, nous allons nous consacrer essentiellement à l'optimisation de formes géométriques. Concrètement un problème d'optimisation de formes géométriques est caractérisé de manière suivante

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) \quad (1)$$

où  $\mathcal{U}_{ad}$  est un ensemble de parties de  $\mathbb{R}^N$ , dites domaines ou formes admissibles et  $J$  est une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{U}_{ad}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dite fonctionnelle de forme.

Il existe plusieurs questions mathématiques associées à (1) telles que l'existence de solution, la régularité, les propriétés qualitatives et géométriques, l'obtention de conditions d'optimalité et le calcul de solution.

Les problèmes d'optimisation de formes sont souvent mal posés, pour pouvoir prouver l'existence d'une solution, on est souvent amené, soit à restreindre l'ensemble des parties admissibles par des contraintes géométriques, soit au contraire à élargir l'ensemble des parties admissibles en autorisant des solutions relaxées.

Dans cette thèse, nous allons aborder deux grands points ; le premier point est de nature théorique et le second est de nature numérique.

Le travail est subdivisé en six parties principales (à part le résumé, la table des matières, le tableau des notations et la bibliographie) : il s'agit de l'introduction suivie de quatre (4) chapitres et puis de la conclusion et des perspectives.

Nous proposons tout d'abord, dans le premier chapitre une présentation des outils nécessaires que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Nous commençons par rappeler quelques résultats bien connus en analyse, ensuite nous parlerons du principe du maximum dans le cas

des équations elliptiques et des équations paraboliques linéaires et non linéaires puis nous aborderons les points fixes et nous terminerons ce chapitre par un rappel de la méthode de Galerkin.

Le deuxième chapitre est consacré aux questions d'existence de solutions des problèmes aux limites paraboliques et des problèmes d'optimisation de formes géométriques. En effet les preuves mathématiques d'existence de solutions pour des problèmes aux limites en passant par la théorie des EDP sont nombreuses et variées, c'est ainsi que dans le cadre de cette thèse, nous allons nous appuyer sur l'étude d'existence de solutions par la méthode spectrale en utilisant la formulation variationnelle et le problème abstrait pour des problèmes aux limites paraboliques linéaires et par la méthode des points fixes de Schauder et de Schaefer pour les problèmes aux limites paraboliques non linéaires. En outre, les preuves mathématiques d'existence de solutions pour des problèmes d'optimisation passent presque toujours par l'introduction de topologies adéquates combinées avec des arguments de compacité et de continuité. C'est ainsi que nous étudierons l'existence de solution sous la propriété de cône uniforme et l'existence de solution sous la contrainte de la  $\gamma$ -convergence avec des arguments de monotonie de la fonctionnelle puis de la compacité de l'ensemble admissible.

Le chapitre 3 fait l'objet d'identification de formes géométriques. Nous chercherons des conditions d'optimalité du premier ordre par l'approche de perturbation de domaine par des champs de vecteurs puis par la théorie du minimax et du lagrangien, nous développerons la notion de la dérivée par rapport au domaine en calculant la dérivée de forme et la dérivée topologique et nous ferons une reconstruction de domaine en passant par un problème inverse et en utilisant les principes de comparaison.

Nous terminons cette thèse par une analyse et une simulation numérique dont le but est d'identifier numériquement un domaine. Cette étude suit trois méthodes, et reprend les idées déjà étudiées de manière théorique dans Ndiaye et al (Bull Math Anal Appl 4(1) :91–103, 2012) tout en proposant les algorithmes numériques.

La première consiste à faire une translation du bord inaccessible et la seconde utilise la déformation du bord inaccessible. La troisième suit une approche d'optimisation de formes géométriques en passant par la méthode du lagrangien augmenté pour faire des simulations numériques. Dans cette partie, nous allons commencer par déterminer les conditions d'optimalité qui nous permettront d'utiliser la méthode du lagrangien augmenté pour proposer un algorithme qui aboutira à des simulations numériques.



---

---

# CHAPITRE 1

---

## QUELQUES OUTILS DE BASE

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter des outils de base que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Ces différents outils de base pour la plupart sont d'ordre analytique, en effet ils sont entre autres de la topologie, de la topologie algébrique, de l'analyse fonctionnelle, de la probabilité, de l'analyse multivoque ...

Ce chapitre est structuré de la manière suivante : dans la section 1.1, nous allons présenter quelques résultats utiles, ensuite dans la section 1.2, exposer le principe du maximum dans le cas des équations elliptiques et des équations paraboliques linéaires et non linéaires, puis nous parlerons des points fixes topologiques et enfin nous allons terminer ce chapitre dans la dernière section par la méthode de Galerkin.

### 1.1 Quelques résultats

Dans cette section nous allons présenter un certain nombre de résultats sans les démontrer. En effet, ces différents outils sont très importants et très utilisés en analyse. Nous pouvons les consulter dans [4], [10], [11], [46], [85], [87], [90] et [101].

**Définition 1.** On appelle  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel topologique (e.v.t.) un espace topologique  $E$  muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , telle que les opérations  $(x, y) \rightarrow x + y$  et  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  soient continues  $E \times E \rightarrow E$  et  $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$  et tel que  $\{0\}$  soit une partie fermée.

**Définition 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. On appelle voisinage de  $0$  une partie contenant un ouvert contenant  $0$ . On dit qu'une famille  $\mathcal{B}$  est une base de voisinage, ou base de voisinage en  $0$ , si c'est une famille de voisinages de  $0$  telle que pour tout ouvert  $O$  contenant  $0$  on peut trouver  $C \in \mathcal{B}$  avec  $C \subset O$ .

**Définition 3.** Un espace vectoriel topologique localement convexe (e.v.t.l.c) est un espace vectoriel topologique dans lequel  $0$  admet une base de voisinage convexes.

**Définition 4.** Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. On appelle une semi-norme sur  $E$  une application  $p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  vérifiant :

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ;
- $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ .

**Définition 5.** Soit  $E$  un espace vectoriel topologique, et  $\mathcal{P}$  une famille de semi-normes sur  $E$ ; on dit que  $\mathcal{P}$  est séparante si pour tout  $x \neq 0$ , il existe  $p \in \mathcal{P}$  tel que  $p(x) \neq 0$ .

**Définition 6.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique, il est dit séparé ou de Hausdorff si deux points distincts de  $X$  ont deux voisinages disjoints.

**Définition 7.** Soit  $X$  un espace vectoriel. Un ensemble  $E \subset X$  est convexe si

$$\lambda E + (1 - \lambda)E \subset E \text{ avec } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

**Définition 8.** Soit  $E$  un espace vectoriel. Une fonction  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est strictement convexe si et seulement si pour tout  $x, y \in \text{dom}f$  (le domaine de définition de la fonction  $f$ ) et tout  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

**Remarque 1.** Ceci exige au domaine de définition de  $f$  d'être convexe.

**Proposition 1.** Si  $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille quelconque de convexes, leur intersection  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$  est convexe.

*Démonstration.* Voir [87]. □

**Définition 9.** Soit  $A$  une partie de  $E$ . L'enveloppe convexe de  $A$ , noté  $\text{conv}(A)$ , est l'intersection de tous les convexes contenant  $A$ . C'est le plus petit ensemble convexe de  $E$  contenant  $A$ .

**Proposition 2.** L'enveloppe convexe de  $A$  est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (finies) d'éléments de  $A$  :

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i / N \geq 1, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}.$$

*Démonstration.* Voir [87]. □

**Définition 10.** On dit que les points  $\alpha_i, 1 \leq i \leq N$  de  $\mathbb{R}^N$  sont affinements indépendants si quels que soient les  $\lambda_i$  vérifiant  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$  si  $\sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha_i = 0$  alors nécessairement  $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$ .

**Définition 11.** Un simplexe de dimension  $N$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^N$  constitué des points  $x \in \mathbb{R}^N$  de la forme

$$x = \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i,$$

$0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^N \lambda_i = 1$ , où les points  $a_i, i = 0, \dots, N$  sont affinements indépendants.

**Proposition 3.** Soit  $E$  un espace topologique compact, si  $\varphi : E \rightarrow ]-\infty; +\infty]$  est semi-continue inférieure, alors  $\varphi$  atteint sa borne inférieure sur  $E$ .

*Démonstration.* Voir [11]. □

**Définition 12.** Soit  $X$  un ensemble. On appelle tribu ou  $\sigma$ -algèbre sur  $X$  une famille  $\mathcal{M}$  de parties de  $X$  possédant les propriétés suivantes :

- i)  $X \in \mathcal{M}$
- ii) Si  $A \in \mathcal{M}$  alors  $A^C \in \mathcal{M}$  (où  $A^C = X \setminus A$  est le complémentaire de  $A$  dans  $X$ )
- iii) Si  $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ , alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ .

Les éléments de  $\mathcal{M}$  sont appelés les parties mesurables de  $X$ . On dit que  $(X, \mathcal{M})$  est un espace mesurable.

**Définition 13.** Soit  $(X, \mathcal{M})$  un espace mesurable. On appelle mesure positive sur  $X$  une application  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  vérifiant :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Additivité dénombrable : si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit que  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  est un espace mesuré.

**Définition 14.** Soit  $E$  un ensemble muni d'une topologie. On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de  $E$ , cette tribu sera notée  $\mathcal{B}(E)$ .

**Définition 15.** Soit  $\mathcal{M}$  une  $\sigma$ -algèbre dans  $X$ . On appelle une partition de  $E$  une collection dénombrable  $\{E_i\}$  de  $\mathcal{M}$  tel que  $E_i \cap E_j = \emptyset$  quand  $i \neq j$  et que si  $E = \bigcup E_i$ .

**Définition 16.** Une mesure complexe  $\mu$  sur  $\mathcal{M}$  est une fonction complexe sur  $\mathcal{M}$  telle que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i), \text{ avec } E \in \mathcal{M}$$

pour toute partition  $\{E_i\}$  de  $E$ .

**Définition 17.** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite absolument continue sur  $I$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout entier  $n \geq 1$  et toute suite finie  $([a_k, b_k])_{1 \leq k \leq n}$  de sous-intervalles de  $I$  d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta \text{ implique } \sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(b_k)| < \epsilon.$$

**Définition 18.** Soit  $\mu$  une mesure positive sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{M}$  et soit  $\lambda$  une mesure arbitraire sur  $\mathcal{M}$ ;  $\lambda$  est positive ou complexe. On dit que  $\lambda$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  si  $\lambda(E) = 0$  pour tout  $E \in \mathcal{M}$  et pour lequel  $\mu(E) = 0$ .

**Définition 19.** Soit  $X$  un ensemble mesurable, on appelle mesure extérieure sur  $X$  toute application  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$
- ii)  $\mu(A) \leq \mu(C)$  si  $A \subset C$  dans  $X$
- iii)  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  si  $A_n$  est dans  $X$ .

**Définition 20.** Si  $\mu$  est une mesure extérieure sur  $E$ , un ensemble  $A \subset E$  est dit  $\mu$ -mesurable si pour tout  $C \subset E$ ,

$$\mu(C) = \mu(C \cap A) + \mu(C \setminus A).$$

**Définition 21** (mesure de Lebesgue). Il existe une unique mesure que l'on note  $m_L$  définie sur  $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$  qui soit positive, localement finie, invariante par translation, et telle que pour toute collection  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  avec  $i \in \{1, \dots, N\}$ , et que l'on ait

$$m_L([a_1, b_1[ \times \dots \times ]a_N, b_N[) = \prod_{i=1}^N |b_i - a_i|.$$

Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue.

**Définition 22.** (i) Une mesure  $\mu$  sur  $X$  est régulière si pour tout ensemble  $A \subseteq X$  il existe un ensemble  $E$   $\mu$ -mesurable tel que  $A \subseteq E$  et  $\mu(A) = \mu(E)$ .

(ii) Une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  est une mesure de Borel régulière si  $\mu$  est une mesure de Borel et pour tout  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  il existe un ensemble borélien  $E$  tel que  $A \subseteq E$  et  $\mu(A) = \mu(E)$ .

(iii) Une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  est une mesure de Radon si  $\mu$  est une mesure de Borel régulière et  $\mu(K) < \infty$  pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^N$ .

**Définition 23.** (i) Soit  $A \subset \mathbb{R}^N$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < \delta \leq \infty$ . Nous notons

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam} C_j}{2} \right)^s / A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam} C_j \leq \delta \right\},$$

où

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)};$$

avec la fonction gamma définie de la manière suivante  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ,  $0 < s < \infty$ .

(ii) Pour  $A$  et  $s$  définis comme ci dessus, on note

$$\mathcal{H}_s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

$\mathcal{H}_s$  est appelé la mesure de Hausdorff de dimension  $s$ .

**Théorème 1** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$ . On suppose que

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$  p.p sur  $\Omega$ ,

b) il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g$  p.p sur  $\Omega$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$ .

*Démonstration.* Voir [11]. □

**Théorème 2** (Variant du théorème de la convergence dominée). Supposons que  $g$  et  $g_n$  soient  $\mu$ -intégrales et que  $f$  et  $f_n$  soient  $\mu$ -mesurables. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$   $\mu$  p.p et  $|f_n| \leq g_n$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = g$   $\mu$  p.p et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\mu = \int g d\mu$ .

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

*Démonstration.* Nous pouvons par exemple consulter la preuve dans [47] ou dans [62]. □

**Théorème 3** (Lemme de Fatou). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$  telle que

1. Pour chaque  $n$ ,  $f_n(x) \geq 0$  p.p sur  $\Omega$

2.  $\sup_n \int_\Omega f_n dx < \infty$ .

Pour chaque  $x \in \Omega$  on pose  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_\Omega f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n(x) dx.$$

*Démonstration.* Nous pouvons trouver la preuve de ce lemme dans [11]. □

**Théorème 4.** Soit  $E$  un espace de Banach réflexif et soit  $(x_n)$  une suite bornée dans  $E$ . Alors il existe une suite extraite  $(x_{n_k})$  qui converge pour la topologie faible.

*Démonstration.* Voir [11]. □

**Théorème 5.** Soient  $(f_n)$  une suite de  $L^p(\Omega)$  et  $f \in L^p(\Omega)$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$ . Alors il existe une sous-suite  $f_{n_k}$  telle que on a

- (i)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$  p.p sur  $\Omega$
- (ii)  $|f_{n_k}(x)| \leq h$ ,  $\forall k$  et p.p avec  $h \in L^p(\Omega)$ .

*Démonstration.* Nous pouvons trouver la preuve dans [11]. □

**Théorème 6** (Inégalité de Poincaré). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné ou borné dans une direction. Soit  $u \in W_0^1(\Omega)$ . Alors il existe  $C(\Omega, p) = C$  tel que

$$\left( \int_{\Omega} \|u\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\Omega} \|\nabla u\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Démonstration.* Voir [4]. □

**Théorème 7.** (Rellich) Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , alors de toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$  on peut extraire une sous suite convergente dans  $L^2(\Omega)$ ; on dit que l'injection canonique de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte.

*Démonstration.* Voir [4]. □

**Définition 24.** Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  et  $\partial\Omega$  son bord, pour un champs de vecteur  $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  on a la formule de Stokes aussi appelée la formule de la divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \, d\sigma \tag{1.1}$$

où  $\nu$  est le vecteur normal unitaire sortant sur  $\partial\Omega$ .

**Définition 25.** Pour toute fonction  $u \in H^2(\Omega)$  et toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$  on a la formule de Green

$$- \int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma;$$

qui est une conséquence de la formule de Stokes.

Nous désignons la moyenne de  $f$  sur l'ensemble  $E$  par rapport à  $\mu$  par

$$\int_E f \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu$$

à condition que  $0 < \mu(E) < \infty$  et que l'intégrale soit définie.

**Théorème 8** (Théorème de différentiation de Lebesgue-Besicovitch). Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$  et  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N, \mu)$ . Alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f \, d\mu = f(x)$$

pour  $\mu$  p.p  $x \in \mathbb{R}^N$ .

*Démonstration.* Voir [47]. □

**Définition 26.** Une partie  $M \subset \mathbb{R}^N$  est une sous-variété de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^N$  si pour tout  $x$  de  $M$ , il existe des voisinages ouverts  $U$  et  $V$  de  $x$  et  $0$  dans  $\mathbb{R}^N$  respectivement, et un difféomorphisme

$$f : U \rightarrow V \text{ tel que } f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}). \quad (1.2)$$

Faisons à présent un rappel de l'analyse multivoque. En effet, l'analyse multivoque est l'étude des propriétés des applications multivaluées, autrement dit une application multivaluée est une application dont l'image est un sous ensemble de l'ensemble d'arrivée.

**Définition 27.** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides.  $f$  est une application multivoque de  $X$  dans  $Y$  si  $f$  est une fonction définie de  $X$  dans une partie non vide de l'ensemble des parties de  $Y$ . On note l'application multivoque  $f : X \rightarrow 2_*^Y$ .

**Définition 28.** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides et  $f : X \rightarrow 2_*^Y$  une application multivoque.

1. On appelle image d'une partie  $A$  de  $X$  par  $f$  le sous-ensemble  $f(A) = \{T \in 2_*^Y : T = f(x), x \in A\}$  de  $2_*^Y$ .
2. On appelle image réciproque d'une partie non vide  $D$  de  $2_*^Y$  par  $f$  l'ensemble  $f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \cap D \neq \emptyset\}$ .
3. Le graphe de  $f$  est le sous-ensemble de  $X \times Y$  défini par  $\text{gph} f = \{(x, y) \in X \times Y / y \in T(x)\}$ .

**Remarque 2.** Soient  $(E, d)$  et  $(E', d')$  deux espaces métriques,  $\mathcal{P}$  est une propriété d'un sous-ensemble de  $E \times E'$ , par exemple fermé, convexe, compact,... On dit qu'une application multivoque  $f$  de  $E$  vers  $E'$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  si et seulement si son graphe la vérifie. Une application multivoque est donc caractérisée par son graphe.

Par ailleurs, on dira que  $f$  est à valeurs convexes (resp. fermées, compactes,...) si pour tout élément  $x \in \text{dom} f$ ,  $f(x)$  est un sous-ensemble convexe (resp. fermé, compact,...) de l'ensemble  $E'$ .

**Définition 29.** Soit  $f : X \rightarrow 2^Y$  une application multivoque, où  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques.

- (1) L'application  $f$  est dite semi-continue supérieure si  $f^{-1}(A)$  est fermé pour tout  $A$  fermé de  $Y$ .
- (2) L'application  $f$  est dite semi-continue inférieure si  $f^{-1}(A)$  est ouvert pour tout  $A$  ouvert de  $Y$ .

**Proposition 4.** Sous les hypothèses de la définition précédente, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) l'application  $f$  est semi-continue supérieure
- (ii) pour tout  $x \in X$  et pour tout ensemble ouvert  $V$  dans  $Y$  avec  $f(x) \subseteq V$ , alors il existe un voisinage  $U(x)$  tel que  $f(U(x)) \subseteq V$ .

Aussi les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) l'application  $f$  est semi-continue inférieure
- (ii) pour tout  $x \in X$  et pour tout un voisinage  $V(y)$  de  $y \in f(x)$ , alors il existe un voisinage  $U(x)$  tel que  $f(u) \cap V(y) \neq \emptyset$  pour tout  $u \in U(x)$ .

*Démonstration.* Voir [101]. □

**Définition 30.** Une application multivoque est dite continue si elle est à la fois semi-continue supérieure et semi-continue inférieure.

De façon similaire, une application multivoque est dite continue en  $x$  si elle est à la fois semi-continue supérieure en  $x$  et semi-continue inférieure en  $x$ .

**Remarque 3.** Les applications semi-continues supérieures jouent un rôle important dans la théorie des points fixes pour les applications multivoques.

**Définition 31.** Dans un espace vectoriel normé  $(X, \|\cdot\|)$ , la distance d'un point  $x \in X$  à un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est donnée par

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\|; a \in A\}.$$

**Définition 32.** Soient  $A$  et  $C$  deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé  $X$ . Posons  $\rho$  la quantité définie par

$$\rho(A, C) = \sup_{a \in A} d(a, C).$$

Il est à remarquer qu'en général les quantités  $\rho(A, C)$  et  $\rho(C, A)$  sont différentes.

**Définition 33.** Soit  $(Y, d)$  un espace métrique. On appelle distance de Hausdorff entre deux parties  $A$  et  $C$  de  $2_{*fb}^Y$  la quantité

$$d_H(A, C) = \max\{\rho(A, C), \rho(C, A)\}.$$

**Définition 34.** Soient  $(Y_1, d_1)$  et  $(Y_2, d_2)$  deux espaces métriques non vides et  $f : Y_1 \rightarrow 2_{*fb}^{Y_2}$ .  $f$  est dite lipschitzienne s'il existe une constante  $k \geq 0 : \forall x, y \in Y_1$

$$d_{2H}(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y).$$

**Définition 35.** Une famille  $\mathcal{A}$  d'ensembles non vides possède la propriété de l'intersection finie si toute sous-famille finie non vide de  $\mathcal{A}$  possède une intersection non vide.

## 1.2 Principe du maximum

En analyse, le principe du maximum est une propriété des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, de type elliptique ou parabolique qui dit qu'une fonction solution d'une telle équation sur un domaine atteint son maximum sur la frontière du domaine. Il est un outil très important et très utilisé en analyse pour montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation aux dérivées partielles. Le principe du maximum admet de nombreuses formulations, nous allons en donner quelques unes. Pour les besoins de notre document, nous allons nous intéresser essentiellement au principe du maximum pour les problèmes paraboliques même si un rappel s'impose pour les problèmes elliptiques. Pour d'amples informations sur cette théorie nous renvoyons à [11], [46], [51], [65], [68], [81], [82], [85] et [86].

### 1.2.1 Un rappel sur le principe du maximum dans le cas elliptique

Dans toute cette section, nous allons considérer  $L$  comme un opérateur de second ordre de la forme suivante

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

Dans toute la suite, nous allons considérer  $\Omega$  comme étant un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ . On suppose que les fonctions  $b_i$  et  $c$  sont continues sur  $\bar{\Omega}$ , et que la matrice  $(a_{ij})$  est strictement définie positive sur  $\bar{\Omega}$ . De plus on suppose que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

**Définition 36.** L'opérateur aux dérivées partielles  $L$  est uniformément elliptique s'il existe une constance  $\theta > 0$  telle que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \tag{1.3}$$

pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^N$ .

**Définition 37.** Si  $Lu \geq 0$  (resp.  $Lu \leq 0$ ), alors  $u$  est appelé une sur-solution (resp. sous-solution) de l'équation  $Lu = 0$ .

**Théorème 9.** (Principe du maximum faible) Supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné. Supposons de plus que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  et  $c = 0$  dans  $\Omega$ .

i - Si

$$Lu \leq 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.4)$$

alors

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

ii - Si

$$Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.5)$$

alors

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

*Démonstration.* 1. Nous allons d'abord supposer que nous avons l'inégalité stricte.

$$Lu < 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.6)$$

et qu'il existe par l'absurde un point  $x_0 \in \Omega$  avec

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u. \quad (1.7)$$

Maintenant en ce point maximum  $x_0$ , nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad (1.8)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leq 0. \quad (1.9)$$

2. Puisque la matrice  $A = (a_{ij})$  est symétrique et définie positive, donc il existe une matrice orthogonale  $O = (o_{ij})$  telle que

$$OAO^t = \text{diag}(d_1, \dots, d_N), \quad OO^t = I, \quad (1.10)$$

avec  $\text{diag}$  étant la matrice diagonale et  $d_k > 0 (k = 1, \dots, N)$ . Prenons  $y = x_0 + O(x - x_0)$ . Alors  $x - x_0 = O^t(y - x_0)$ , et

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial u}{\partial y_k} o_{ik}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} o_{ik} o_{jl} \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

Alors au point  $x_0$ ,

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^N \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} o_{ik} o_{jl} \quad (1.11)$$

$$= \sum_{k=1}^N d_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}; \quad (1.12)$$

Cette dernière inégalité nous viens de (1.10).

Puisque  $d_k > 0$  et en vertu de (1.9),  $\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}(x_0) \leq 0 (k = 1, \dots, N)$ .



3. Ainsi en  $x_0$ ,

$$Lu = -\sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,$$

à la lumière de (1.8) et de (1.12). Alors (1.6) et (1.7) sont incompatibles et nous avons une contradiction.

4. Dans le cas général qui vérifie (1.4), posons

$$u^\epsilon(x) = u(x) + \epsilon e^{\lambda x_1} \quad (x \in \Omega),$$

où  $\lambda > 0$  sera choisi ultérieurement et  $\epsilon > 0$ . Rappelons que la condition de l'uniforme ellipticité implique que  $a_{ii} \geq \theta$  ( $i = 1, \dots, N$ ,  $x \in \Omega$ ). Par conséquent

$$\begin{aligned} Lu^\epsilon &= Lu + \epsilon L(e^{\lambda x_1}) \\ &\leq \epsilon e^{\lambda x_1} (-\lambda^2 a_{11} + \lambda b_1) \\ &\leq \epsilon e^{\lambda x_1} (-\lambda^2 \theta + \lambda \|b\|_{L^\infty}) \\ &\leq 0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

pourvu que l'on choisisse  $\lambda > 0$  suffisamment grand. Alors selon les deux premières étapes ci-dessus, on a

$$\max_{\bar{\Omega}} u^\epsilon = \max_{\partial\Omega} u^\epsilon.$$

Soit  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , on trouve

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Ceci prouve  $i -$ .

5. Puisque  $-u$  est sous-solution quand  $u$  est sur-solution, alors l'assertion  $ii -$  s'en suit. □

**Corollaire 1.** Supposons que  $\Omega$  est borné et  $Lu \geq 0$  (respectivement  $Lu \leq 0$ ). De plus, soit  $c(x) < 0$ . Alors pour tout  $x$

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \quad (\text{respectivement } \min_{\bar{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-).$$

où  $u^+ = \max(0, u)$ ,  $u^- = \min(0, u)$ . En particulier si  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ , alors

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

*Démonstration.* Voir [46]. □

Le corollaire suivant est souvent utilisé en application. Il permet de montrer des résultats d'unicité et il est connu sous le nom du principe de comparaison.

**Corollaire 2.** (principe de comparaison) Supposons que  $\Omega$  est borné et  $c < 0$ . Si  $Lu = Lv$  dans  $\Omega$  et  $u = v$  dans  $\partial\Omega$ , alors  $u = v$  dans  $\Omega$ . Si  $Lu \leq Lv$  dans  $\Omega$  et  $u \geq v$  dans  $\partial\Omega$ , alors  $u \geq v$  dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Ce résultat découle immédiatement du corollaire (1). □

**Lemme 1.** (Hopf) Supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné. Supposons de plus que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  et que  $c = 0$  dans  $\Omega$ . Supposons que

$$Lu \leq 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.13)$$

et il existe un point  $x_0 \in \partial\Omega$  tel que

$$u(x_0) > u(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } \Omega. \quad (1.14)$$

Considérons finalement que  $\Omega$  satisfait la condition de la boule intérieure en  $x_0$ ; tel qu'il existe une boule ouvert  $B \subset \Omega$  avec  $x_0 \in \partial B$ .

(i) Alors, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \quad (1.15)$$

où  $\nu$  est la normale unité extérieure de  $B$  au point  $x_0$ .

(ii) Si  $c \geq 0$  dans  $\Omega$ , la même conclusion resurgit et vérifie

$$u(x_0) \geq 0.$$

*Démonstration.* 1. Supposons que  $c \geq 0$ , et  $u(x_0) \geq 0$ . Nous pouvons de plus supposer  $B = B(0, r)$  pour un rayon  $r > 0$ . Définissons

$$v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda|r|^2} \quad (x \in B(0, r))$$

pour  $\lambda > 0$  choisis assez grand. Alors en utilisant la condition de l'uniforme ellipticité, on calcule :

$$\begin{aligned} Lv &= - \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)v \\ &= e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda \delta_{ij}) - e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i=1}^N b_i 2\lambda x_i + c \left( e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda|r|^2} \right) \\ &= e^{-\lambda|x|^2} \left( -4\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda \text{tr}A + 2\text{tr}|b||x|^2 + c \right) \end{aligned}$$

pour  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_1, \dots, b_N)$ . Considérons dans la suite  $R$  la région ouverte annulaire  $R = B(0, r) - B(0, r/2)$ . Nous avons

$$Lv \leq e^{-\lambda|x|^2} \left( -\theta\lambda^2 r^2 + 2\lambda \text{tr}A + 2\text{tr}|b||x|^2 + c \right) \leq 0 \quad (1.16)$$

dans  $R$ , pourvu que  $\lambda > 0$  soit fixé assez grand.

2. Au vue de (1.14), il existe une constante  $\epsilon > 0$  petit tel que

$$u(x_0) \geq u(x) + \epsilon v \quad (x \in \partial B(0, r/2)). \quad (1.17)$$

On ajoute une remarque, puisque  $v = 0$  sur  $\partial B(0, r)$ , on a

$$u(x_0) \geq u(x) + \epsilon v \quad (x \in \partial B(0, r)). \quad (1.18)$$

3. De (1.16), on voit

$$L(u + \epsilon v - u_0) \leq -cu(x_0) \leq 0, \text{ dans } R, \quad (1.19)$$

et de (1.17), (1.18) on observe que

$$u + \epsilon v - u_0 \leq 0 \text{ sur } \partial R.$$

Vu le principe du maximum faible c'est à dire le théorème 9,  $u + \epsilon v - u_0 \leq 0$  sur  $R$ . Mais  $u + \epsilon v - u_0 = 0$  dans  $R$  et donc

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0.$$

Par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{\epsilon}{r} \nabla v(x_0) \cdot x_0 = 2\lambda \epsilon r e^{-\lambda r^2} > 0.$$

Ce qui achève la preuve. □

**Théorème 10.** (Principe du maximum fort) Supposons que  $\Omega$  soit borné et  $Lu \geq 0$ . Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1.  $c = 0$ ,
2.  $c \leq 0$  et  $\max u \geq 0$ ,
3.  $\max u = 0$ .

et que  $u$  est non constante. Alors  $u$  ne peut pas atteindre son maximum en un point de  $\Omega$ .

*Démonstration.* Supposons que  $u$  atteint son maximum  $M$  en un point de  $\Omega$  et que soit  $\Omega^- = \Omega \cap \{u < M\}$ . Si  $\Omega$  est non vide alors  $\partial\Omega^- \cap \Omega$  est non vide. Soit  $y$  un point dans  $\Omega^-$  qui est proche de  $\partial\Omega^-$  et soit  $B$  la plus grande boule contenue dans  $\Omega^-$  et centrée en  $y$ . Donc nous pouvons appliquer le lemme de Hopf à  $B$ . Nous pouvons conclure que  $\nabla u$  est différent de zéro au point  $x_0$ , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle  $u$  atteint son maximum en un point de  $\Omega$ . □

**Théorème 11.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $f \in L^2(\Omega)$ . Alors  $u \in H_0^1(\Omega)$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Si  $f \geq 0$  p.p dans  $\Omega$ , alors  $u \geq 0$  p.p dans  $\Omega$ .

Pour démontrer ce théorème nous aurons besoin du lemme suivant

**Lemme 2.** Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $v^+ = \max(v, 0)$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  et  $\nabla v^+ = \chi_{v>0} \nabla v$  dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Voir [4]. □

*Démonstration du théorème 11.* Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , la formulation variationnelle de (1.20) est donnée par

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v.$$

Posons  $v = u^- = \min(u, 0)$  un élément de  $H_0^1(\Omega)$  en vertu du lemme 2 car  $u = u^+ + u^-$ . De la dernière formulation variationnelle on a

$$\int_{\Omega} f u^- = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- dx = \int_{\Omega} \chi_{u<0} \nabla u \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx \geq 0. \quad (1.21)$$

Mais  $u^- \leq 0$  et  $f \geq 0$  dans  $\Omega$ . Par conséquent, tous les termes (1.21) sont nuls, et comme  $u^- \in H_0^1(\Omega)$ , on en déduit  $u^- = 0$  c'est à dire  $u \geq 0$  dans  $\Omega$ . □

### 1.2.2 Principe du maximum pour l'équation de la chaleur

Considérons le problème suivant : trouver une fonction  $u(t, x) : (0, T) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(t, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

où  $u_0(x)$  est une fonction donnée.

L'équation (1.22) est appelée équation de la chaleur car elle modélise la distribution de la température  $u$  dans le domaine  $\Omega$  à l'instant  $t$ .

Le résultat essentiel est le suivant.

**Théorème 12.** Soit  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et soit  $u$  la solution de (1.22). Alors on a

$$\min \left\{ 0, \inf_{\Omega} u_0 \right\} \leq u(t, x) \leq \max \left\{ 0, \sup_{\Omega} u_0 \right\} \quad \forall (t, x) \in Q.$$

*Démonstration.* Nous allons utiliser la méthode des troncatures de Stampacchia.

Soit  $K = \max(0, \sup_{\Omega} u_0) < \infty$ .

On fixe une fonction  $G \in C^1(\mathbb{R})$  telle que

- i)  $|G'(s)| \leq M, \quad s \in \mathbb{R}$
- ii)  $G$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ ,
- iii)  $G(s) = 0; \forall s \leq 0$ .

Posons  $H(s) = \int_0^s G(\sigma) d\sigma, \quad s \in \mathbb{R}$ .

Enfin on introduit la fonction  $\varphi(t) = \int_{\Omega} H(u(t, x) - K) dx$ .

Puisque  $G \in C(\mathbb{R})$ , alors de la définition de  $H, H \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$  et par suite  $\varphi \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ .

On a aussi  $\varphi(0) = 0$  et de la définition de  $G$  on obtient que  $\varphi \geq 0$  sur  $[0, +\infty[$ . De plus on a  $\varphi \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ . Et enfin

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{\Omega} G(u(t, x) - K) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = \int_{\Omega} G(u(t, x) - K) \Delta u(t, x) dx \\ &= - \int_{\Omega} G'(u(t, x) - K) |\nabla u(t, x)|^2 dx \leq 0; \end{aligned}$$

car  $G(u(t, x) - K) \in H_0^1(\Omega)$  pour  $t > 0$ .

Il en résulte que  $\varphi \leq 0$  sur  $]0, +\infty[$  et par conséquent  $\varphi \equiv 0$ . Donc pour chaque  $t > 0, u(t, x) \leq K$  p.p dans  $\Omega$ . □

**Corollaire 3.** Soit  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u$  solution de (1.22).

- (i) Si  $u_0 \geq 0$  p.p sur  $\Omega$ , alors  $u \geq 0$  sur  $Q$ .
- (ii) Si  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , alors  $u \in L^\infty(Q)$  et

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.23)$$

*Démonstration.* Voir [11]. □

**Corollaire 4.** Soit  $u_0 \in C(\bar{\Omega}) \cap L^2(\Omega)$  avec  $u_0 = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Alors la solution  $u$  de (1.22) appartient à  $C(\bar{Q})$ .

*Démonstration.* Voir [11]. □

**Théorème 13.** Soit  $u(t, x)$  une fonction vérifiant

1.  $u \in C((0, T) \times \bar{\Omega})$ ;
2.  $u$  est de classe  $C^1$  par rapport à  $t$  et de classe  $C^2$  par rapport à  $x$  sur  $Q = (0, T) \times \Omega$ ;
3.  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0$ .

Alors

$$\max_{(0, T) \times \bar{\Omega}} u = \max_{\Sigma_P} u \quad (1.24)$$

où  $\Sigma_P = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\Gamma \times (0, T))$  est la frontière parabolique du cylindre  $Q = (0, T) \times \Omega$ .

*Démonstration.* Posons  $v(t, x) = u(t, x) + \epsilon |x|^2$  avec  $\epsilon > 0$  de tel sorte que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \leq -2\epsilon c \text{ sur } Q = (0, T) \times \Omega. \quad (1.25)$$

Montrons que

$$\max_{(0, T) \times \bar{\Omega}} v = \max_{\Sigma_P} v.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que

$$\max_{(0, T) \times \bar{\Omega}} u = v(t_0, x_0) \text{ avec } (t_0, x_0) \in (0, T) \times \bar{\Omega} \text{ et } (t_0, x_0) \notin \Sigma_P.$$

Comme  $x_0 \in \Omega$  et  $0 < t_0 \leq T' < T$ , on a

$$\Delta v(t_0, x_0) \leq 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) \geq 0; \quad (1.27)$$

en effet on a  $\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) = 0$  si  $t_0 < T'$  et  $\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) \geq 0$  si  $t_0 = T'$ . Maintenant faisons tendre  $T'$  vers  $T$ . Combinons (1.26) et (1.27) on obtient

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \right)(t_0, x_0) \geq 0,$$

ce qui contredit la condition (1.25). Par conséquent

$$\max_{(0, T) \times \bar{\Omega}} v = \max_{\Sigma_P} v \leq \max_{\Sigma_P} u + \epsilon C$$

où  $C = \sup_{x \in \Omega} |x|^2$ . Comme  $u \leq v$  alors il vient

$$\max_{(0, T) \times \bar{\Omega}} u \leq \max_{\Sigma_P} u + \epsilon C \quad \forall \epsilon > 0;$$

d'où (1.24). □

**Proposition 5.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  et un temps final  $T > 0$ . Soit  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , et  $u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  l'unique solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(t, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.28)$$

Si  $f \geq 0$  p.p dans  $Q$  et  $u_0 \geq 0$  p.p dans  $\Omega$ , alors  $u \geq 0$  p.p dans  $Q$ .

*Démonstration.* Soit  $u^- = \min(u, 0)$  qui aussi appartient à  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , grâce au lemme 2 et qui vérifie pour tout  $0 < t < T$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u^-(t) \cdot \nabla u^-(t) dx = \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx. \quad (1.29)$$

Un raisonnement similaire à celui qui a permis de démontrer (1.29) montre que, si  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(t) u^-(t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} |u^-(t)|^2 \right) dx. \quad (1.30)$$

Nous admettons que l'égalité (1.30) reste vraie même si  $\frac{\partial u}{\partial t}$  n'appartient pas à  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Au demeurant, en prenant  $v = u^-$  dans la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} |u^-(t)|^2 \right) dx + \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\Omega} f u^- dx$$

ce qui donne en faisant une intégration en temps

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^-(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} f u^- dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^-(0)|^2 dx.$$

Comme  $u^-(0) = (u_0)^- = 0$  on en déduit

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^-(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx ds \leq 0,$$

c'est à dire  $u^- = 0$  dans  $Q$ . □

### 1.2.3 Principe du maximum dans le cas des équations paraboliques quasi-linéaires

Dans cette sous-section nous allons généraliser en travaillant avec l'opérateur parabolique. Nous énoncerons les principes du maximum faible et fort pour l'opérateur parabolique. Dans toute la suite, nous allons considérer  $\Omega$  étant un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\partial\Omega$  et poser

$$Q = (0, T) \times \Omega$$

et

$$\Sigma_P = ([0, T] \times \partial\Omega) \cup ((0, T) \times \bar{\Omega})$$

la frontière parabolique, et  $P$  désigne un opérateur aux dérivées partielles de la forme

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} + Lu;$$

avec

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu.$$

On suppose que les coefficients  $b_i$  et  $c$  sont continus sur  $\bar{Q}$ , et que la matrice  $a_{ij}$  est strictement définie positive sur  $\bar{Q}$ . De plus on suppose que  $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ . Le principe du maximum parabolique postule que sous certaines conditions du signe de  $c$  que le maximum de  $u$  ne peut être atteint que sur  $\Sigma_P$ .

**Définition 38.** L'opérateur aux dérivées partielles  $P$  est uniformément parabolique s'il existe un constance  $\theta > 0$  tel que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad (1.31)$$

pour tout  $(t,x) \in Q$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^N$ .

**Théorème 14** (Principe du maximum faible). *Supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné. Supposons de plus que  $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$  et  $c = 0$  dans  $Q$ .*

*i - Si*

$$Pu \leq 0 \text{ dans } Q, \quad (1.32)$$

*alors*

$$\max_{\bar{Q}} u = \max_{\Sigma_P} u.$$

*ii - Si*

$$Pu \geq 0 \text{ dans } Q, \quad (1.33)$$

*alors*

$$\min_{\bar{Q}} u = \min_{\Sigma_P} u.$$

*Démonstration.* 1. Nous allons d'abord supposer que nous avons l'inégalité stricte.

$$Pu < 0 \text{ dans } Q, \quad (1.34)$$

et alors il existe un point  $(t_0, x_0) \in Q$  avec

$$u(t_0, x_0) = \max_{\bar{Q}} u.$$

2. Soit  $0 < t_0 < T$ , alors  $(t_0, x_0)$  appartient à l'intérieur de  $Q$  et en conséquence

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en } (t_0, x_0), \quad (1.35)$$

puisque  $u$  atteint son maximum en ce point. Alors comme dans la preuve du théorème 1.3, on a  $Pu \geq 0$  en  $(t_0, x_0)$ , ce qui est une contradiction à (1.34).

3. Maintenant on suppose  $t_0 = T$ . Alors puisque  $u$  atteint son maximum dans  $Q$  en  $(t_0, x_0)$ , nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \text{ en } (t_0, x_0).$$

Puisque nous avons encore l'inégalité  $Lu \geq 0$  en  $(t_0, x_0)$ , nous pouvons une fois de plus déduire la contradiction

$$Pu \geq 0 \text{ en } (t_0, x_0).$$

4. Dans le cas général qui vérifie (1.32), posons

$$u^\epsilon(t, x) = u(t, x) - \epsilon t,$$

où  $\epsilon > 0$ . Donc

$$Pu^\epsilon = \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + Lu^\epsilon = \frac{\partial u}{\partial t} + Lu - \epsilon < 0 \text{ dans } Q, \quad (1.36)$$

et alors

$$\max_{\bar{Q}} u^\epsilon = \max_{\Sigma_P} u^\epsilon.$$

Soit  $\epsilon \rightarrow 0$ , on trouve

$$\max_{\bar{Q}} u = \max_{\Sigma_P} u.$$

Ceci prouve *i -*.

5. Puisque  $-u$  est sous-solution quand  $u$  est sur-solution, alors l'assertion *ii* – s'en suit.  $\square$

**Corollaire 5.** Nous supposons  $c \leq 0$ . Soit  $u \in C(\bar{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$  tel que  $Pu \geq 0$  (resp.  $Pu \leq 0$ ) dans  $Q$ . Alors

$$\max_{\bar{Q}} u = \max_{\Sigma_p} u^+ \quad (\text{resp. } \min_{\bar{Q}} u = \min_{\Sigma_p} u^-).$$

En particulier si  $Pu = 0$  dans  $Q$  alors

$$\max_{\bar{Q}} u = \max_{\Sigma_p} u.$$

*Démonstration.* Voir [46].  $\square$

L'objectif dans cette sous-section est le résultat suivant.

**Théorème 15.** Supposons que  $\Omega$  est borné et  $Pu \geq 0$  (respectivement  $Pu \leq 0$ ).

Soit  $M = \sup_D u$  ( $M = \inf_D u$ ). Supposons que  $u = M$  au point  $(t_0, x_0) \in D$  et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1.  $c = 0$  et  $M$  est arbitraire,
2.  $c \leq 0$  et  $M \geq 0$  ( $M \leq 0$ ),
3.  $M = 0$  et  $c$  est arbitraire.

Alors  $u = M$  sur  $(0, T) \times \bar{\Omega}$ .

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de ces trois lemmes suivants. Maintenant nous allons supposer  $Pu \geq 0$  sans expliciter à ce niveau car le cas  $Pu \leq 0$  s'ensuit manifestement par le fait de remplacer  $u$  par  $-u$ .

**Lemme 3.** Soit  $B \subset \mathbb{R}^{N+1}$  une boule avec  $B_F \subset D$  et supposons  $u < M$  dans  $B$  et  $u(t_0, x_0) = M$ , où  $(t_0, x_0) \in \partial B$ . Alors  $t_0$  est soit la plus petite ou la plus grande valeur des  $t$  que l'on peut trouver dans  $B_F$ .

*Démonstration.* Voir [86].  $\square$

**Lemme 4.** Supposons que  $u(t_0, x_0) < M$ , où  $x_0 \in \Omega$  et  $t_0 \in (0, T)$ . Alors  $u(t, x) < M$  pour tout  $x \in \Omega$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\{t_0\} \times \Omega$  contient les points aux quels  $u = M$ . Alors on peut prendre les points  $x_1, x_2 \in \Omega$  tel que  $u(t_0, x_1) = M, u(t_0, x_2) < M$  et le segment  $E$  formé par  $(t_0, x_1)$  et  $(t_0, x_2)$  est entièrement contenu dans  $\{t_0\} \times \Omega$ . En déplaçant le point  $x_1$ , on peut retrouver  $u < M$  sur  $E$ . Maintenant posons

$$\delta = \min(|x_1 - x_2|, d(E, \partial D)). \quad (1.37)$$

Pour  $x \in E$ , avec  $0 < |x - x_1| < \delta$ , posons

$$e(x) = d((t_0, x), Q \cap \{u < M\}). \quad (1.38)$$

On remarque que  $e(x) < |x - x_1|$ .

Du lemme 2, le point dans  $Q \cap \{u < M\}$  qui est proche de  $(t_0, x_0)$  est de la forme  $(t, x)$ , tel que soit  $u(t_0 + e(x), x) = M$  ou  $u(t_0 - e(x), x) = M$ .

Soit  $\mu$  le vecteur unitaire dans la direction de  $E$ . Pour un  $|\epsilon| > 0$  suffisamment petit,  $e(x + \epsilon\mu)$  est défini et par le théorème de Pythagore et

$$e(x + \epsilon\mu) \leq \sqrt{\epsilon^2 + e(x)^2}. \quad (1.39)$$



Par le même argument,

$$e(x) \leq \sqrt{\epsilon^2 + e(x + \epsilon\mu)^2}, \quad (1.40)$$

et donc

$$e(x + \epsilon\mu) \geq \sqrt{-\epsilon^2 + e(x)^2}. \quad (1.41)$$

De (1.40) et (1.41), il s'en suit que la dérivée de  $e(x + \epsilon\mu)$  à  $\epsilon = 0$  existe et est égale à 0. Alors  $e(x)$  est constant tout au long de  $E \cap \{0 < |x - x_1| < \delta\}$ . Par conséquent c'est une contradiction puisque  $e(x) \neq 0$ , mais  $e(x) \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow x_1$ .  $\square$

Le dernier lemme dont nous avons besoin est le suivant.

**Lemme 5.** Soit  $0 \leq t_0 < t \leq T$  et supposons que  $u < M$  dans  $(t_0, t) \times \Omega$ . Alors  $u < M$  dans  $\{t\} \times \Omega$ .

*Démonstration.* Supposons au contraire qu'il existe  $x_1 \in \Omega$  avec  $u(t_1, x_1) = M$ .

Définissons

$$v(t, x) = \exp(-|x - x_1|^2 - \alpha(t - t_1)) - 1, \quad (1.42)$$

où  $\alpha$  est choisi assez grand. Calculons

$$Lv(t, x) = \exp(-|x - x_1|^2 - \alpha(t - t_1)) \times (4a_{ij}(x_i - x_{1i})(x_j - x_{1j}) - 2(a_{ii} - b_i(x_i - x_{1i})) + \alpha) + cv.$$

Soit  $V$  un petit voisinage de  $(t_1, x_1)$ , nous obtenons  $Lv > 0$  dans  $V \cap \{t \leq t_1\}$  avec  $\alpha$  assez grand. Maintenant soit  $A_1$  un domaine borné par la parabole  $|x - x_1|^2 - \alpha(t - t_1) = 0$  et un sphère suffisamment petit centré en  $(t_1, x_1)$ . La frontière de  $A_1$  a deux parties, une sur la parabole où  $v = 0$ , et une autre sur la sphère et à l'intérieur de la parabole où  $u < M$ .

Choisissons  $\epsilon > 0$  petit, alors nous avons  $u + \epsilon v - M \leq 0$  partout dans  $A_1$ . Prenons la dérivée par rapport à  $t$  au point  $(t_1, x_1)$ , nous arrivons à

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \alpha \geq 0, \quad (1.43)$$

c'est à dire  $\frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$ . Mais puisque  $(t_1, x_1)$  est le maximum par rapport à  $x$ , nous constatons à ce point

$$Lu \leq -\frac{\partial u}{\partial t} + cu \leq -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.44)$$

et puisque  $Lu \geq 0$  était considéré, on conclue que  $-\frac{\partial u}{\partial t} \leq 0$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

*Démonstration du théorème du principe du maximum fort.* Maintenant nous pouvons commencer la preuve du théorème. Grâce au lemme 3, pour tout  $t > 0$ , nous avons soit  $u(t, x) < M$  ou  $u(t, x) = M$  pour tout  $x \in \Omega$ . L'ensemble  $Z$  de tout les  $t$  pour lequel  $u < M$  est un ouvert et donc union des intervalles dénombrables. Par le lemme 4 aucun de ces intervalles ne peut avoir un dernier grand point. La seule et unique possibilité est donc  $Z = (t_0, T[$  pour un  $t_0$  donné, ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

**Proposition 6.** Supposons que  $\Omega$  est de classe  $C^2$ . Soit  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  satisfaisant  $Pu \geq 0$  et notons  $M = \max u$ . En outre, nous supposerons qu'il existe  $(t_0, x_0) \in (0, T] \times \partial\Omega$  tel que  $u(t_0, x_0) = M$  et  $u < M$  dans  $Q$ ; et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1.  $c = 0$ ,
2.  $c \leq 0$  et  $M \geq 0$ ,
3.  $M = 0$ .

Alors  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(t_0, x_0) > 0$ , avec  $\nu$  le vecteur directionnel sortant à  $\partial\Omega$ .

*Démonstration.* Du lemme de Hopf, on peut affirmer que la proposition est vérifiée sur  $D$ . En utilisant le lemme 4, et du fait que  $Pu \geq 0$ . Alors il existe  $(t_0, x_0) \in (0, T] \times \partial\Omega$  tel que  $u(t_0, x_0) = M$  et  $u < M$  dans  $Q$  et  $\partial_\nu u(t_0, x_0) > 0$ , avec  $\nu$  le vecteur directionnel sortant à  $\partial\Omega$ .  $\square$

### 1.2.4 Principe du maximum dans le cas des équations paraboliques non linéaires

Dans cette section, nous allons consacrer notre attention aux équations paraboliques non linéaires qui ne sont pas nécessairement quasi-linéaires. Une telle équation peut s'écrire sous la forme suivante

$$Pu = P \left( t, x, u, \nabla u, \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} \right)_{ij}, -\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.45)$$

pour toute fonction non linéaire  $P$  définie dans  $\mathbb{Q}$ . Un point de  $\mathbb{Q}$  est représenté par  $(t, x, z, p, r, \tau)$ . Si  $P$  est différentiable par rapport aux variables  $r$  et  $\tau$ , alors nous pouvons retenir ces considérations suivantes.

**Définition 39.** L'opérateur aux dérivées partielles  $P$  est parabolique dans un sous-ensemble  $\mathbb{Q}_1$  de  $\mathbb{Q}$  si la matrice  $\begin{pmatrix} P_r \\ P_\tau \end{pmatrix}$  est définie positive, où les indices  $r$  et  $\tau$  représentent les dérivées partielles. En particulier  $P_\tau$  est différent de 0 dans  $\mathbb{Q}_1$ .

Si l'équation (1.45) peut être résolue pour  $u_t$ , telle que, si l'équation peut être écrite par

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \left( t, x, u, \nabla u, \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} \right)_{ij} \right), \quad (1.46)$$

et si respectivement  $\lambda$  et  $\Lambda$  sont le maximum et le minimum des valeurs propres de la matrice  $(F_r)$ .

**Définition 40.** On dit que  $P$  est uniformément parabolique sur  $\mathbb{Q}_1$  si le rapport  $\frac{\Lambda}{\lambda}$  est uniformément borné sur  $\mathbb{Q}_1$ .

Si  $P$  n'est pas différentiable par rapport à  $r$  ou  $\tau$ , nous pouvons étendre les définitions de la manière suivante.

**Définition 41.** On dit que  $P$  est parabolique dans  $\mathbb{Q}_1$  si

$$P(t, x, z, p, r + \eta, \tau + \sigma) > P(t, x, z, p, r, \tau) \quad (1.47)$$

pour tout  $\eta$  matrice définie positive, pour tout nombre positif  $\sigma$  et tout point  $(t, x, z, p, r, \tau) \in \mathbb{Q}_1$ .

**Définition 42.**  $P$  est uniformément parabolique sur  $\mathbb{Q}_1$  si l'équation (1.45) peut s'écrire sous la forme (1.46) et si on a des fonctions positives  $\lambda$  et  $\Lambda$  telles que

$$\lambda \operatorname{tr} \eta \leq F(t, x, z, p, r + \eta) - F(t, x, z, p, r) \leq \Lambda \operatorname{tr} \eta \quad (1.48)$$

pour tout  $(t, x, z, p, r)$  tel que  $(t, x, z, p, r, F(t, x, z, p, r)) \in \mathbb{Q}_1$  et pour toute matrice définie positive  $\eta$ , où  $\operatorname{tr} \eta$  est la trace de  $\eta$  et si le rapport  $\frac{\Lambda}{\lambda}$  est borné sur  $\mathbb{Q}_1$ .

**Remarque 4.** Notons que cette définition assure que  $F$  est Lipschitzienne par rapport à  $r$  et que  $F_r$  existe partout.

**Théorème 16.** Supposons qu'il existe une constante  $K \geq 0$  tel que

$$P(t, x, z_1, p, \tau - Kz_1) < P(t, x, z_2, p, r, \tau - Kz_2) \quad (1.49)$$

quand  $z_1 \geq z_2$  et  $P$  est parabolique au  $(t, x, z_1, p, \tau - Kz_1)$  ou  $(t, x, z_2, p, r, \tau - Kz_2)$ . Si  $u$  et  $v$  sont dans  $C^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  avec  $P$  parabolique à  $u$  ou à  $v$  et si  $Pu \geq Pv$  dans  $\Omega$  avec  $u \leq v$  sur  $\partial\Omega$  alors  $u \leq v$  dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Soient  $\bar{u} = \exp(-Kt)u$  et  $\bar{v} = \exp(-Kt)v$ . Si  $u > v$  partout dans  $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$ , alors  $\bar{u} - \bar{v}$  est un maximum positif pour un  $(t_0, x_0)$ . Prenons  $E = \exp(Kt_0)$  et supprimons l'argument  $(t_0, x_0)$ . Si  $P$  est parabolique en  $u$ , nous avons alors

$$\begin{aligned} Pu(t_0, x_0) &= P \left( t_0, x_0, E\bar{u}, E\nabla\bar{u}, E \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i \partial y_i} \right)_{i,j}, -E \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + K\bar{u} \right) \right) \\ &\leq P \left( t_0, x_0, E\bar{v}, E\nabla\bar{v}, E \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial y_i} \right)_{i,j}, -E \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + K\bar{v} \right) \right) \end{aligned}$$

puisque  $\nabla\bar{v} = \nabla\bar{u}$ ,  $\left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i \partial y_i} \right)_{i,j} \leq \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial y_i} \right)_{i,j}$  et  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \geq \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$  en  $(t_0, x_0)$ . Maintenant (1.49) implique que

$$P \left( t_0, x_0, E\bar{u}, E\nabla\bar{v}, E \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial y_i} \right)_{i,j}, -E \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + K\bar{v} \right) \right) \leq P \left( t_0, x_0, E\bar{v}, E\nabla\bar{v}, E \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial y_i} \right)_{i,j}, -E \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + K\bar{v} \right) \right),$$

et l'inégalité donne  $Pu(t_0, x_0) < Pv(t_0, x_0)$  ce qui contredit l'hypothèse d'inégalité entre  $Pu$  et  $Pv$ . Nous arriverons aussi à une contradiction similaire si nous supposons que  $P$  est parabolique en  $v$ . D'où la preuve du théorème.  $\square$

**Remarque 5.** Retenons que (1.49) est équivalent à l'inégalité  $P_z < KP_\tau$  quand  $P$  est différentiable. Dans beaucoup de cas cette inégalité est simplement et directement vérifiée.

L'unicité de la solution est une simple conséquence du théorème précédent.

**Corollaire 6.** Supposons que l'opérateur  $P$  satisfasse la condition (1.49) quand  $z_1 \geq z_2$  et  $P$  est parabolique au  $(t, x, z_1, p, \tau - Kz_1)$  ou  $(t, x, z_2, p, r, \tau - Kz_2)$ . Si  $u$  et  $v$  sont dans  $C^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  avec  $P$  parabolique à  $u$  ou à  $v$  et si  $Pu = Pv$  dans  $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$  avec  $u = v$  sur  $\partial\Omega$  alors  $u = v$  dans  $\Omega$ .

**Théorème 17.** Supposons que  $u$  et  $v$  sont dans  $C^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  avec  $P$  parabolique à  $u$  ou à  $v$  et si  $Pu > Pv$  dans  $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$  avec  $u < v$  sur  $\partial\Omega$  alors  $u < v$  dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Voir [68].  $\square$

**Théorème 18.** Supposons que  $u$  est dans  $C^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  avec  $P$  parabolique à  $u$ . Supposons de plus que l'équation  $P(t, x, z, 0, 0, \tau) = 0$  peut être résolue pour  $\tau$  avec

$$\tau = a(t, x, z) \tag{1.50}$$

pour une fonction  $a$  avec  $k$  et  $b_1$  des constantes positives telles que

$$-za(t, x, z) \leq k|z|^2 + b_1 \tag{1.51}$$

Si  $0 < t < T$  pour  $x \in \Omega$  et si  $Pu = 0$  dans  $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$ , alors

$$\sup_{\Omega} u \leq \exp((k+1)T) \left( \sup_{\partial\Omega} u^+ + b_1^{1/2} \right). \tag{1.52}$$

*Démonstration.* Posons  $A = \sup_{\partial\Omega} u + b_1^{1/2}$   $v = A \exp((k+1)t)$ . Alors

$$Pv = P(t, x, v, 0, 0, -(k+1)v).$$

Puisque  $(k+1)v - a(t, x, v)$ , il s'en suit que  $Pv < 0$ , et  $v > u$  sur  $\partial\Omega$  par construction donc  $\exp((k+1)T) \geq v > u$ .  $\square$

## 1.3 Points fixes

Dans cette partie, nous allons étudier les points fixes topologiques. Pour ce faire, nous allons utiliser des outils topologiques, de l'analyse fonctionnelle et des équations aux dérivées partielles. Dès l'arrivée du théorème du point fixe de Brouwer, une avalanche de généralisation de celui s'en est suivi tout au long du siècle dernier. En effet, le ton a été donné par Schauder en 1930. Alors nous pouvons citer les travaux de Schauder, Schaefer, Tichonov, Leray, Nash, Kakutani, Fan ... Dans cette thèse, nous étudierons entre autre le théorème du point fixe de Brouwer, le théorème du point fixe de Schauder, le théorème du point fixe de Schaefer, le théorème du point fixe de Tychonov et le théorème du point fixe de Kakutani. Pour plus d'informations sur la notion des points fixes nous renvoyons aux livres [10], [42], [46], [53], [62], [68], [101]. Donnons d'abord la définition d'un point fixe.

**Définition 43.** Soient  $X$  un ensemble non vide et  $f$  une fonction définie sur  $X$  ou sur un sous ensemble de  $X$ . Un élément  $\bar{x}$  de  $X$  est dit point fixe de  $f$  si  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

### 1.3.1 Le théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné en lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Faisons d'abord un rappel de quelques outils dont nous aurons besoin pour faire la démonstration du théorème du point fixe de Brouwer.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné avec  $\partial\Omega$  sa frontière régulière. On appelle le Lagrangien la fonction notée  $L$  et définie par  $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Notons  $L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_N, z, x_1, \dots, x_N)$  avec  $p \in \mathbb{R}^N, z \in \mathbb{R}$  et  $x \in \bar{\Omega}$ . Dans toute cette section, nous allons noter la dérivée du Lagrangien par rapport à  $p$  par  $\partial_p L = (L_{p_1}, \dots, L_{p_N})$ , celle par rapport à  $z$  par  $\partial_z L = L_z$  et celle par rapport à  $x$  par  $\partial_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_N})$ . Considérons aussi  $E$  la fonction d'énergie définie par

$$E(w) = \int_{\Omega} L \left( \frac{\partial w(x)}{\partial x}, w(x), x \right) \quad (1.53)$$

avec  $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction satisfaisant la condition au bord

$$w = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1.54)$$

**Définition 44.** On appelle équation d'Euler-Lagrange associée à la fonction d'énergie définie par (1.53) l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$-\sum_{i=0}^N \left( L_{p_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, u, x \right) \right)_{x_i} + L_z \left( \frac{\partial u}{\partial x}, u, x \right) = 0 \text{ dans } U \quad (1.55)$$

dont  $u$  est la solution.

Généralisons les considérations précédentes dans le cas des systèmes. Dans ce cas, le lagrangien est défini par

$$L : \mathbb{M}^{M \times N} \times \mathbb{R}^M \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Définition 45.** La fonction  $L$  est appelée un lagrangien nul si le système d'équations d'Euler-Lagrange

$$-\sum_{i=0}^N \left( L_{p_i^k} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, u, x \right) \right)_{x_i} + L_{z^k} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, u, x \right) = 0 \text{ dans } U \quad (k = 1, \dots, M) \quad (1.56)$$

est automatiquement résolu par une fonction régulière  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ .

L'importance du lagrangien nul est que la fonction énergie associée dépend seulement de la condition au bord.

**Théorème 19.** Soit  $L$  un lagrangien nul. Supposons que  $u$  et  $\tilde{u}$  sont deux fonctions dans  $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  telles que

$$u = \tilde{u} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1.57)$$

Alors

$$E(u) = E(\tilde{u}). \quad (1.58)$$

*Démonstration.* Voir [46]. □

**Théorème 20.** La fonction déterminant

$$L(P) = \det P \quad (P \in \mathbb{M}^{N \times N})$$

est un lagrangien nul.

*Démonstration.* Voir [46]. □

**Théorème 21** (Le théorème du point fixe de Brouwer). Supposons

$$u : B_F(0, 1) \rightarrow B_F(0, 1)$$

est continue, où  $B_F(0, 1)$  est la boule fermée unité dans  $\mathbb{R}^N$ . Alors  $u$  admet un point fixe, c'est à dire, il existe un point  $x \in B_F(0, 1)$  avec

$$u(x) = x.$$

*Démonstration.* 1. Prenons  $B = B(0, 1)$ . D'abord nous pouvons affirmer qu'il n'existe pas une fonction régulière

$$w : B \rightarrow \partial B \quad (1.59)$$

tel que

$$w(x) = x \text{ pour tout } x \in \partial B. \quad (1.60)$$

2. Raisonnons par l'absurde. Supposons au contraire qu'il existe une fonction  $w$ . Soit  $\tilde{w}$  la fonction identité telle que  $\tilde{w} = x$  pour tout  $x \in B$ .

Au regard de (1.60), nous avons  $w(x) = \tilde{w}$  sur  $\partial B$ . Puisque le déterminant est par définition le lagrangien nul, alors le théorème 19 implique que

$$\int_B \det \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = \int_B \det \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) dx = m_L(B) \neq 0. \quad (1.61)$$

D'autre part, (1.59) implique  $|w|^2 = 1$ ; et en appliquant la différentiabilité on trouve

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^t w = 0. \quad (1.62)$$

Puisque  $|w| = 1$ , (1.62) nous montre que 0 est une valeur propre de  $\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^t$  pour tout  $x \in B$ . Par conséquent  $\det \partial w = 0$ . Ce qui contredit (1.61) donc nous ne pouvons pas montrer qu'il existe une fonction régulière  $w$  qui satisfait (1.59) et (1.60).

3. Cette fois ci nous allons montrer qu'il n'existe aucune fonction continue vérifiant (1.59) et (1.60). De plus soit  $w$  une telle fonction, nous allons étendre  $w(x) = x$  avec  $x \in \mathbb{R}^N - B$ . On constate que  $w(x) \neq 0$  ( $x \in \mathbb{R}^N$ ). Soit  $\epsilon > 0$  petit tel que  $w_1 = v_\epsilon - w$  satisfaisant  $w(x) \neq 0$  ( $x \in \mathbb{R}^N$ ). De plus, puisque  $v_\epsilon$  est radial alors nous avons  $w_1(x) = x$  si  $x \in \mathbb{R}^N - B(0, 2)$ , pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit. Donc nous aurons

$$w_2(x) = \frac{2w_1}{|w_1|}$$

serait une application satisfaisante (1.59) et (1.60) (avec la boule  $B(0, 2)$  remplaçant  $B = B(0, 1)$ ), ce qui entre en contradiction avec la première partie de la preuve.

4. Finalement supposons  $u : B \rightarrow B$  une fonction continue mais n'admet pas de point fixe. Maintenant définissons l'application  $w : B \rightarrow \partial B$  par  $w(x)$  le point sur  $\partial B$  dont le rayon vient de  $u(x)$  et passant par  $x$ . Cette application est bien définie puisque  $u(x) \neq x$  pour tout  $x \in B$ . Aussi  $w$  est continue et satisfait (1.59) et (1.60). Ce qui contredit la troisième partie de la démonstration. □

### 1.3.2 Le théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimensions infinies. Il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach par Schauder. Et ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Énonçons d'abord la proposition suivante dont nous aurons besoin pour démontrer le théorème du point fixe de Schauder.

**Proposition 7.** Soit  $X$  un espace vectoriel de dimension fini. Soit  $K$  un compact convexe d'intérieur non vide de  $X$ , alors  $K$  est homéomorphe à la boule unité fermée de  $X$ .

*Démonstration.* Pour commencer, notons  $j$  la jauge

$$j(x) = \inf \left\{ \alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in K \right\}$$

qui est définie de  $X$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Posons  $j_\alpha = \{ \alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in K \}$ . Comme  $K$  un compact convexe d'intérieur non vide, soit alors  $0 \in \overset{\circ}{K}$ , il existe un réel  $r > 0$  tel que la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r$  soit incluse dans  $K$ . Donc  $\frac{\|x\|}{r}$  est un élément de  $j_\alpha$ , cet ensemble est donc non vide, minoré par 0, il admet une borne inférieure, ce qui assure la définition de  $j$ .

- i Soit  $\lambda > 0$ . Soit  $x \in X$  on a  $\frac{x}{\alpha} \in K$  si et seulement si  $\frac{\lambda x}{\lambda \alpha} \in j_\alpha$  donc  $j_\alpha(\lambda x) = \lambda j_\alpha(x)$ .

Or la borne inférieure étant un minorant  $\lambda j$  minore  $\lambda j_\alpha$ ; la borne inférieure étant le plus grand des minorants  $\lambda j(x) \leq j(\lambda x)$ .

Soit  $\lambda \neq 0$ , alors en remplaçant dans cette inégalité,  $x$  par  $\lambda x$  et  $\lambda$  par  $\frac{1}{\lambda}$ ; il vient  $j(\lambda x) \leq \lambda j(x)$ . Donc  $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ .

Cette égalité reste encore et trivialement vraie pour  $\lambda = 0$ , en effet  $J(0x) = ]0, +\infty[$  et  $j(0x) = 0 = 0j(x)$ .

Utilisons la relation

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{y}{\beta};$$

puisque  $K$  est convexe  $\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \in K$  qui implique que

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in K;$$

alors  $\alpha + \beta \in j_\alpha(x + y)$  et par suite  $j(x + y) \leq \alpha + \beta$ ;  $\beta$  étant quelconque  $j(x + y) - \alpha \leq \beta$  minore donc  $j_\alpha(y)$  la borne inférieure étant le plus grand des minorants  $j(x + y) - \alpha \leq j(y)$ . Donc  $\alpha$  étant quelconque  $j(x + y) - j(x) \leq j(y)$  minore  $j_\alpha(x)$  et  $j(x + y) - j(y) \leq j(x)$  d'où  $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$ .

ii Puisque  $0 \in \overset{\circ}{K}$ , il existe un réel  $r > 0$  tel que la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r$  soit incluse dans  $K$ . Pour  $x \neq 0$ , on a  $\|\frac{r}{2\|x\|}x\| < r$  donc  $\frac{r}{2\|x\|}x \in K$ ; donc  $j(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|$  (encore vraie pour  $x = 0$ ) : on pose alors  $M = \frac{2}{r}$ .

Par ailleurs  $K$  étant compact est donc borné : il existe  $R > 0$  tel que  $C \subset B(0, R)$ . Pour  $x \neq 0$  on a  $\|\frac{R}{\|x\|}x\| = R$  donc  $\frac{R}{\|x\|}x \notin K$  et  $\frac{\|x\|}{R} \leq j(x)$ . Posons  $m = \frac{1}{R}$  on a donc  $m\|x\| \leq j(x)$  (vraie aussi pour  $x = 0$ ).

On a alors pour tout  $x$  :  $m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|$ .

Pour  $x, y \in X$  on a  $j(x) \leq j(x - y) + j(y)$  donc  $j(x) - j(y) \leq j(x - y)$ . La situation étant symétrique :  $|j(x) - j(y)| \leq j(x - y) \leq M\|x - y\|$  c'est à dire  $j$  est  $M$ -lipschitzienne donc continue.

iii Soit  $x \in K$  alors  $j(x) \leq 1$  (car  $1 \in j_\alpha(x)$ ) donc  $K \subset \{x \in X; j(x) \leq 1\}$ .

Soit  $x \in X$  tel que  $j(x) \leq 1$  : on a  $j((1 - \frac{1}{n})x) \leq 1$  donc  $(1 - \frac{1}{n})x \in K$ . Comme  $K$  est fermé, en faisant tendre  $n$  vers  $\infty$  on obtient  $x \in K$ . Ainsi  $\{x \in X; j(x) \leq 1\} \subset K$ . Par conséquent  $K = \{x \in X; j(x) \leq 1\}$ .

iv Soit  $h$  la fonction de  $K$  dans  $B_F(0, 1)$  qui  $x$  associe  $j(x)\frac{x}{\|x\|}$  pour  $x \neq 0$  et 0 pour 0.

Montrons que  $h$  est bijective c'est à dire pour tout  $y$  il existe un unique  $x$  tel que  $h(x) = y$ . D'abord 0 est le seul antécédent de 0 (puisque pour  $x \neq 0$  on a  $j(x) \geq m\|x\| > 0$  donc  $h(x) \neq 0$ ). Pour tout  $y \neq 0$  cherchons  $x$  tel que  $h(x) = y$ ; on a alors  $\|y\| = j(x)$  et  $j(y) = \frac{j^2(x)}{\|x\|} = \frac{\|y\|^2}{\|x\|}$  donc  $\|x\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)}$ . Par suite la seule solution possible est  $x = \frac{\|x\|}{j(y)}y = \frac{\|y\|}{j(y)}y$ . Puisque

$\|y\| = j(x)$  et  $\|x\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)}$  alors  $h(x) = \|y\| \frac{j(y)}{\|y\|^2} \frac{\|y\|}{j(y)}y = y$ .

Comme  $\|h(x)\| = j(x)$ ,  $h$  induit une bijection de  $K = \{x \in X; j(x) \leq 1\}$  sur  $K_1 = \{y; \|y\| \leq 1\}$ .

Puisque  $j$  et la norme sont continues, alors il est clair que  $h$  est continue sur l'ouvert  $X \setminus \{0\}$ . La continuité en 0 résulte de  $\|h(x)\| = j(x) \leq M\|x\|$ .

De même la fonction réciproque de  $h$  notée  $h^{-1}(y) = \frac{\|y\|}{j(y)}y$  et  $h^{-1}(0) = 0$  est continue sur

l'ouvert  $X \setminus \{0\}$  ( $j$  ne s'annule qu'en 0) et aussi en 0 car  $\|h^{-1}(y)\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)} \leq \frac{1}{m}\|y\|$ .

Donc  $h$  réalise un homéomorphisme de  $K$  sur la boule unité fermée de  $X$ . □

Soit  $X$  un espace de Banach.

**Théorème 22** ( Le théorème du point fixe de Schauder). *Soient  $K \subset X$ , une partie compacte et convexe et  $T : K \rightarrow K$  est une application continue. Alors  $T$  admet un point fixe dans  $K$ .*

*Démonstration.* 1. Soit  $\epsilon > 0$  et choisissons une suite de points finis  $u_1, \dots, u_{N_\epsilon} \in K$ , et telle que l'ensemble des boules ouvertes  $\{B(u_i, \epsilon)\}_{i=1}^{N_\epsilon}$  soit un recouvrement de  $K$  : Alors

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B(u_i, \epsilon). \tag{1.63}$$

Ceci est vrai puisque  $K$  est compact.

Soit  $K_\epsilon$  l'enveloppe convexe des points  $\{u_1, \dots, u_{N_\epsilon}\}$  :

$$K_\epsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \lambda_i u_i / 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Alors  $K_\epsilon \subset K$  puisque  $K$  est convexe.

Maintenant on définit  $P_\epsilon : K \rightarrow K_\epsilon$  par

$$P_\epsilon(u) = \frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} d(u, K - B(u_i, \epsilon)) u_i}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} d(u, K - B(u_i, \epsilon))}, \quad u \in K.$$

Le dénominateur de  $P_\epsilon(u)$  est différent de 0 grâce à (2.1). Il est clair maintenant que  $P_\epsilon$  est continue et de plus pour  $u \in K$ , on a :

$$\|P_\epsilon(u) - u\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} d(u, K - B(u_i, \epsilon)) \|u_i - u\|}{\sum_{i=1}^{N_\epsilon} d(u, K - B(u_i, \epsilon))} \leq \epsilon. \quad (1.64)$$

2. Considérons l'opérateur  $T_\epsilon : K_\epsilon \rightarrow K_\epsilon$  défini par  $T_\epsilon(u) = P_\epsilon(T(u))$ ,  $u \in K_\epsilon$ .

En vertu de la proposition 7,  $K_\epsilon$  est homéomorphe à la boule unité fermée dans  $\mathbb{R}^{M_\epsilon}$  pour tout  $M_\epsilon \leq N_\epsilon$ .

Ainsi nous sommes sous les hypothèses d'application du théorème du point fixe de Brouwer et par conséquent il assure l'existence d'un point  $u_\epsilon \in K_\epsilon$  avec  $T_\epsilon(u_\epsilon) = u_\epsilon$ .

3. Aussi  $K$  est compact, il existe une sous-suite  $\epsilon_j \rightarrow 0$  et un point  $u \in K$ , tel que  $u_{\epsilon_j} \rightarrow u$  dans  $X$ . Alors on peut affirmer que  $u$  est un point fixe de  $T$ . En effet, en utilisant l'inégalité (2.2), on en déduit alors

$$\|u_{\epsilon_j} - T(u_{\epsilon_j})\| = \|T_{\epsilon_j}(u_{\epsilon_j}) - T(u_{\epsilon_j})\| = \|P_{\epsilon_j}[T_{\epsilon_j}(u_{\epsilon_j})] - T(u_{\epsilon_j})\| \leq \epsilon_j.$$

Finalement, puisque  $T$  est continue, on peut conclure que  $u = T(u)$ . □

### 1.3.3 Le théorème du point fixe de Schaefer

L'avantage du théorème de Schaefer sur le théorème de Schauder dans la pratique est qu'il est très difficile d'obtenir un ensemble convexe et compact. Cependant il est à remarquer que le théorème du point fixe de Schaefer est un cas particulier du théorème du point fixe de Schauder.

**Définition 46.** Une application non linéaire  $A : X \rightarrow X$  est compacte si pour toute suite  $(u_k)$  bornée, la suite  $A(u_k)$  est précompacte ; c'est à dire, il existe une sous-suite  $(u_{k_j})$  telle que  $(Au_{k_j})$  converge dans  $X$ .

**Définition 47.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite continue en  $a \in X$  si, pour tout voisinage  $V$  de  $f(a)$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$ .

**Théorème 23.** Soit  $A : X \rightarrow X$  une application continue et compacte. On suppose encore que l'ensemble

$$\{u \in X / u = \lambda A(u) \text{ pour un } \lambda \text{ tel que } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

est borné. Alors  $A$  admet un point fixe.

*Démonstration.* 1. Choisissons une constante  $M$  assez grande de sorte que

$$\|u\| < M \text{ si } u = \lambda A(u) \text{ pour un } \lambda \text{ tel que } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (1.65)$$

Définissons aussi

$$\tilde{A}(u) = \begin{cases} A(u) & \text{si } \|A(u)\| \leq M \\ \frac{MA(u)}{\|A(u)\|} & \text{si } \|A(u)\| \geq M. \end{cases} \quad (1.66)$$

On constate que  $\tilde{A}$  est défini de la manière suivante :

$\tilde{A} : B(0, M) \rightarrow B(0, M)$ . Soit  $K$  l'enveloppe convexe de  $\tilde{A}(B(0, M))$ . Alors puisque  $A$  et  $\tilde{A}$  sont des applications compactes,  $K$  est compact, convexe et inclus dans  $X$ . De plus  $\tilde{A} : K \rightarrow K$ .



2. Puisque nous sommes sous les conditions d'application du théorème du point fixe de Schauder, faisons appel à ce théorème puis déduisons l'existence d'un point  $u \in K$  avec

$$\tilde{A}(u) = u \tag{1.67}$$

Nous pouvons dire également que  $u$  est un point fixe de  $A$ . Sinon, en vertu de (1.66) et de (1.67) nous aurions

$$\|A(u)\| \geq M$$

et

$$u = \lambda A(u) \text{ pour } \lambda = \frac{M}{\|A(u)\|} < 1; \tag{1.68}$$

Donc  $\|u\| < M$ .

Cependant  $\|u\| = \|\tilde{A}(u)\| = M$ , ce qui contredit (1.65).

Donc  $A$  admet un point fixe. □

### 1.3.4 Le théorème du point fixe de Tychonov

Le théorème du point fixe de Tychonov est une généralisation du théorème de Brouwer et de celui de Schauder en dimension infinie dans le cas des espaces localement convexes.

**Définition 48.** Une famille  $\mathcal{A}$  d'ensemble non vides à la propriété de l'intersection finie si pour toute sous-famille non vide de  $\mathcal{A}$  admet une intersection non vide.

**Théorème 24.** Soit  $E$  un espace topologique compact et soit  $\mathcal{F}$  la famille des sous-ensembles fermés de  $E$ . Si  $\mathcal{F}$  a la propriété de l'intersection finie alors  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Voir [10]. □

Avant d'énoncer le lemme de Fan, nous allons faire appel au Lemme du Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM) que nous utiliserons dans la preuve du Lemme de Fan.

**Théorème 25.** (Lemme du KKM) Soient  $S = \text{Simp}\{x_0, \dots, x_N\}$   $N$ -simplexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $F_i, i = 0, \dots, N; N + 1$  sous-espaces fermés de  $\mathbb{R}^N$  tels que

$$a. \forall I \subset \{0, \dots, N\}; \text{Simp}\{x_i\}_{i \in I} \subset \bigcup_{i \in I} F_i.$$

Alors  $\bigcap_{i=0}^N F_i \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Voir [10]. □

**Lemme 6** (Lemme de Fan). Soit  $Y$  un espace vectoriel topologique séparé, soit  $X$  un sous-ensemble non vide de  $Y$  et  $f : X \rightarrow 2_{*f}^Y$  tels que

1.  $\forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X, \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n f(x_i),$
2.  $\exists \bar{x} \in X : f(\bar{x})$  est compacte.

Alors  $\bigcap_{x \in X} f(x) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que le lemme du KKM est un cas particulier du lemme de Fan : nous avons besoin de poser  $Y = \mathbb{R}^N, X = \{x_0, \dots, x_N\}$  et par  $F$  l'application  $x_i \mapsto F_i$  (Dans le cas du lemme du KKM, nous n'avons pas besoin de la deuxième condition du lemme de Fan puisque nous travaillons essentiellement dans  $S$ ). Remarquons aussi que la première condition du lemme de Fan implique que  $\forall x \in X, x \in F(x)$  et que  $X \subset \bigcup_{x \in X} F(x)$  (la condition 1

du lemme du KKM affirme de façon analogue que  $x_i \in F_i$  et  $S \subset \bigcup_{i=0}^N F_i$ ).

L'idée de base de cette preuve est d'utiliser la condition 2 du lemme de Fan avec un ensemble compact, d'utiliser le théorème 24 dans le cas fini et aussi d'utiliser le lemme du KKM. En nous appuyant sur la condition 2 du lemme de Fan et du théorème 24 nous pouvons arriver à démontrer le lemme. Pour ce faire, il suffit de montrer que, pour tout  $\{x_0, \dots, x_N\} \subset X$ , on a

$$\bigcap_{i=1}^N (F(\bar{x}) \cap F(x_i)) \neq \emptyset. \quad (1.69)$$

Maintenant, puisque les  $x_i$  ne sont en général indépendamment affines, nous ne pouvons pas appliquer directement le lemme du KKM pour prouver (1.69). Du coup nous avons besoin d'y aller indirectement. Nous allons alors poser  $\bar{x} = x_0$  et considérons d'un coté l'ensemble  $\{x_0, \dots, x_N\}$  et d'un autre coté le  $N$ -simplexe  $L = \text{Simp}\{e_0, \dots, e_N\}$  où  $e_0$  est l'origine et  $\{e_1, \dots, e_N\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . Considérons aussi l'application  $\phi : L \rightarrow Y$  par

$$\phi\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=0}^N \alpha_i x_i; \quad (1.70)$$

où  $\alpha_i \geq 0$  et  $\sum_{i=0}^N \alpha_i = 1$ .

L'application  $\phi$  n'est pas en général injective puisque les  $x_i$  ne sont pas nécessairement indépendamment affines et de plus la dimension de l'ensemble convexe  $\text{conv}\{x_0, \dots, x_N\}$  peut être inférieure à  $N$ ; mais la fonction  $\phi$  est continue car les  $x_i$  sont continues et les  $\alpha_i$  sont des scalaires. Maintenant posons  $G_i = \phi^{-1}(F(x_i))$  et montrons que  $\bigcap_{i=0}^N G_i \neq \emptyset$ ; De (1.69) découle pour  $i = 0, \dots, N$ , on a  $\phi(G_i) = \phi(\phi^{-1}(F(x_i))) \subset F(x_i)$  et on prouve le théorème.

Pour montrer que  $\bigcap_{i=0}^N G_i \neq \emptyset$ , nous avons seulement besoin de voir que  $G_i$  vérifie les hypothèses du lemme du KKM; de plus il est fermé puisqu'il est l'image inverse de l'ensemble fermé  $F(x_i)$  par la fonction continue  $\phi$ , et en outre soit  $I \subset \{0, \dots, N\}$  alors  $\text{Simp}\{e_i\}_{i \in I} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$  (condition a.); puisque  $z = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in \text{Simp}\{e_i\}$ , alors  $z \in \phi^{-1}(\phi(z)) = \phi^{-1}(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i)$  et de 1 il s'en suit  $\phi^{-1}(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) \subset \phi^{-1}(\bigcup_{i \in I} F(x_i)) = \bigcup_{i \in I} \phi^{-1}(F(x_i)) = \bigcup_{i \in I} G_i$ .  $\square$

**Lemme 7.** Soit  $X$  un espace vectoriel topologique séparé, soit  $E$  un ensemble compact et convexe dans  $X$  et soit  $A \subset X \times X$  tels que

1.  $A$  est fermé;
2.  $\forall x \in E, (x, x) \in A$ .
3.  $\forall y \in E, \{x \in E : (x, y) \notin A\}$  est convexe (peut être nul).

Alors il existe  $y_0 \in E$ , tel que  $X \times \{y_0\} \subset A$ .

*Démonstration.* Regardons d'abord la condition 3 du lemme 7 qui stipule que l'intersection du segment horizontal avec  $X \times X \setminus A$  est convexe ou le segment horizontal est contenu dans  $A$ . En effet, de ce résultat on peut dire qu'il existe au moins un segment horizontal contenu dans  $A$ . Posons pour  $x \in X, G(x) = \{y : (x, y) \in A\}$ . L'ensemble  $G(x)$  est l'intersection avec  $A$  du segment vertical passant par  $x$ . Si nous pouvons montrer que  $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset$  alors le lemme est prouvé : en effet  $y_0 \in \bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset$  satisfait cette idée puisque  $\forall x \in X : (x, y_0) \in A, X \times \{y_0\} \subset A$ . Pour montrer que  $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset$  nous allons utiliser le lemme de Fan. Ainsi nous allons vérifier si les hypothèses du lemme de Fan sont satisfaites. La condition 2 du lemme 7 montre que  $G(x)$  est non vide. D'ailleurs  $G(x)$  est fermé, même compact, puisque  $G(x) = A \cap (\{x\} \times X)$  et  $A$  est compact (Puisque c'est un fermé dans un compact  $X \times X$ , dans un espace séparé  $E \times E$ ).

Il reste à montrer que  $\forall \{x_1, \dots, x_N\} \subset X, \text{conv}\{x_1, \dots, x_N\} \subset \bigcup_{x=1}^N G(x)$ . Nous allons raisonner par

l'absurde. Supposons qu'il  $\exists \{x_1, \dots, x_N\} \subset X, \exists \bar{x} \text{ conv } \{x_1, \dots, x_N\} : \bar{x} \notin \bigcup_{x=1}^N G(x_i)$ . Alors  $\bar{x} \notin G(x_i), i = 1, \dots, N$ ; et ainsi, de la définition de  $G(x_i)$ , il s'en suit que  $(x_i, \bar{x}) \notin A, i = 1, \dots, N$ ; partant de cette dernière avec la condition 3 du lemme 7 nous avons  $(x_i, \bar{x})$  dans un ensemble convexe; cette ensemble convexe contient aussi  $(\bar{x}, \bar{x})$  (Puisque  $\bar{x} \in \text{conv } \{x_1, \dots, x_N\}$ ) : le point  $(\bar{x}, \bar{x})$  n'appartient donc pas à  $A$ ; ce qui contredit la condition 2 du lemme 7. Donc  $\forall \{x_1, \dots, x_N\} \subset X, \text{conv } \{x_1, \dots, x_N\} : \bar{x} \notin \bigcup_{x=1}^N G(x_i)$ . Puisque les hypothèses du lemme de Fan sont vérifiées alors en utilisant ce lemme on peut conclure que  $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset$ .  $\square$

Avec tous ces ingrédients, nous pouvons présenter le théorème du point fixe de Tychonov puis donner la preuve.

**Théorème 26** (Le théorème du point fixe de Tychonov). *Soit  $X$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé,  $K$  un compact convexe de  $X$  et  $T$  une application continue de  $K$  dans  $K$ . Alors  $T$  admet un point fixe.*

*Démonstration.* Soient  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de semi-normes séparantes continue qui définit une topologie localement convexe sur  $E$  et posons pour  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$E_\lambda = \{y \in K : p_\lambda(y - T(y)) = 0\}.$$

Pour prouver ce théorème, il suffit de montrer que  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \neq \emptyset$ .

En effet, soit  $\bar{y} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \neq \emptyset$  alors  $\forall \lambda \in \Lambda, p_\lambda(\bar{y} - T(\bar{y})) = 0$  et donc puisque la famille  $p_\lambda$  est séparante,  $\bar{y} - T(\bar{y}) = 0$  :  $\bar{y}$  est donc un point fixe de  $T$ . De la continuité de la semi-norme  $p_\lambda$ , il s'en suit que  $E_\lambda$  est un sous-ensemble fermé dans un compact  $K$ , et par conséquent pour prouver que  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \neq \emptyset$  nous avons besoin d'abord de montrer que  $E_\lambda$  possède la propriété de l'intersection finie. Soient alors  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \Lambda$  et montrons que  $\bigcap_{i=1}^n E_{\lambda_i} \neq \emptyset$  c'est à dire

$$\bigcap_{i=1}^n \{y \in K : p_{\lambda_i}(y - T(y)) = 0\} \neq \emptyset, \text{ ou en d'autre terme que } \{y \in K : \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(y - T(y)) = 0\} \neq \emptyset.$$

Posons maintenant

$$A = \left\{ (x, y) \in K \times K : \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(x - T(y)) \geq \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(y - T(y)) \right\}$$

et vérifions si  $A$  satisfait les hypothèses du lemme 7, duquel nous allons prouver le résultat puisque  $\forall x \in K, \exists y_0 : (x, y_0) \in A$  c'est à dire  $\sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(x - T(y_0)) \geq \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(y_0 - T(y_0))$  pour tout  $x \in K$ ,

alors posons  $x = T(y_0) \sum_{i=1}^n (T(y_0) - T(y_0)) = 0 \geq \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(y_0 - T(y_0))$ . Donc  $y_0 \in \bigcap_{i=1}^n E_{\lambda_i}$ .

Il est évident de voir que  $(x, x) \in A$  et grâce à la continuité de  $T$  et celle  $p_\lambda$ ,  $A$  est fermée (d'où les conditions 1 et 2 du lemme 7 sont vérifiées). Pour la troisième condition du lemme, fixons  $y \in K$  et montrons que l'ensemble  $\{x \in K : (x, y) \notin A\} = \left\{ x \in K : \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(x - T(y)) < \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(y - T(y)) \right\}$  est convexe c'est à dire

$$\sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(x_k - T(y)) < \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(y - T(y)), k = 1, 2; \tag{1.71}$$

implique que

$$\sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 - T(y)) < \sum_{i=1}^n p_{\lambda_i}(y - T(y))$$

pour tout  $\theta \in [0, 1]$ . Il s'en suit immédiatement

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N p_{\lambda_i}(\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - T(y)) &= \sum_{i=1}^N p_{\lambda_i}(\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - \theta T(y) - (1-\theta)T(y)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \theta p_{\lambda_i}(x_1 - T(y)) + \sum_{i=1}^N (1-\theta) p_{\lambda_i}(x_2 - T(y)); \end{aligned}$$

en utilisant (1.71)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N p_{\lambda_i}(\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - T(y)) &< \sum_{i=1}^N \theta p_{\lambda_i}(y - T(y)) + \sum_{i=1}^N (1-\theta) p_{\lambda_i}(y - T(y)) \\ &= \sum_{i=1}^N p_{\lambda_i}(y - T(y)) \end{aligned}$$

Donc l'ensemble  $\{x \in K : (x, y) \notin A\}$  est convexe. Par suite en appliquant le lemme 7, on obtient que  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \neq \emptyset$ . Finalement  $T$  admet un point fixe.  $\square$

### 1.3.5 Le théorème du point fixe de Kakutani

En analyse mathématique, le théorème du point fixe de Kakutani est un théorème de point fixe qui généralise celui de Brouwer à des applications multivoques. Il fournit une condition suffisante pour qu'une telle application, définie sur un compact, convexe d'un espace euclidien, possède un point fixe, c'est-à-dire dans ce contexte : un point qui appartient à son image par cette application. Ce théorème a été démontré par Shizuo Kakutani en 1941 pour  $X = \mathbb{R}^N$ , la généralisation est due à Ky Fan et Glicksberg en 1952 et popularisée par John Forbes Nash, qui l'a utilisé dans sa description de l'équilibre de Nash.

**Théorème 27** (Le théorème du point fixe de Kakutani). *Supposons que*

- (i) *L'application multivoque  $T : K \rightarrow 2^K$  est semi-continue supérieure ;*
- (ii)  *$K$  est un ensemble compact, convexe et non vide dans  $\mathbb{R}^N$  ;*
- (iii) *L'ensemble  $T(x)$  est un fermé, convexe et non vide pour tout  $x \in K$ .*

*Alors  $T$  admet un point fixe.*

*Démonstration.* Voir [10].  $\square$

**Théorème 28** (La forme généralisée du théorème du point fixe de Kakutani). *Supposons que*

- (i) *L'application multivoque  $T : K \rightarrow 2^K$  est semi-continue supérieure ;*
- (ii)  *$K$  est un ensemble compact, convexe et non vide dans un espace  $X$  localement convexe ;*
- (iii) *L'ensemble  $T(x)$  est un fermé, convexe et non vide pour tout  $x \in K$ .*

*Alors  $T$  admet un point fixe.*

*Démonstration.* voir [101].  $\square$

## 1.4 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin peut être considérée comme le précurseur de la méthode des éléments finis. De plus, elle continue à jouer un rôle théorique important dans la résolution des EDP. On commence par supposer que  $V$  est un espace de Hilbert séparable puisque tout sous-espace fermé  $V$  de  $H^1(\Omega)$  est séparable. D'autre part, rappelons qu'une suite  $(w_j)$  d'éléments d'un espace de Hilbert  $V$  est une base hilbertienne de  $V$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour tout entier  $m \geq 1$ , les éléments  $w_1, w_2, \dots, w_m$  sont linéairement indépendants;
- (ii) l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires finies des  $w_j$  est dense dans  $V$ .

Il est évident que tout espace de Hilbert ayant une base hilbertienne est séparable. Réciproquement on a

**Lemme 8.** Pour tout espace de Hilbert  $V$  séparable, il existe une base hilbertienne.

*Démonstration.* Voir [85]. □

étant donné une base hilbertienne de  $V$ , la méthode de Galerkin consiste à chercher  $u_m$  l'élément de  $V_m$  solution de

$$\forall v \in V_m, a(u_m, v) = L(v), \quad (1.72)$$

où  $V_m$  est le sous-espace de  $V$  engendré par les  $m$  premiers éléments  $w_1, w_2, \dots, w_m$  de la base hilbertienne;  $a(.,.)$  une forme bilinéaire continue sur  $V \times V$  et  $V$ -elliptique c'est à dire  $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ ; et  $L$  une forme linéaire continue sur  $V$ .

Soit  $u \in V$  tel que  $\forall v \in V, a(u, v) = L(v)$  admet une unique solution.

**Théorème 29.** Pour tout entier  $m \geq 1$ , le problème (1.72) admet une solution  $u_m$  et une seule dans  $V_m$  et on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\| = 0. \quad (1.73)$$

*Démonstration.* Voir [85]. □

Lorsqu'en outre, la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est symétrique, la solution  $u_m$  de (1.72) est caractérisée comme étant la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle  $J$  sur les sous-espaces de  $V_m$ . La suite  $J((u_m))_{m \geq 1}$  est décroissante, puisque  $V_m$  est un sous-espace de  $V_{m+1}$  et cette suite converge  $J(u)$ , puisque  $u_m$  converge vers  $u$  dans  $V$ .

---

---

## CHAPITRE 2

---

# EDP PARABOLIQUES ET OPTIMISATION DE FORME

Ce chapitre présente différentes méthodes de résolution des EDP paraboliques et différentes approches d'existence de solution en optimisation de forme.

Du point de vue des EDP paraboliques, l'objectif est de donner une formulation mathématique précise des problèmes paraboliques du type de l'équation de la chaleur et d'introduire les notions essentielles dont on a besoin pour faire une théorie qui nous permettra de montrer l'existence et si possible l'unicité de la solution du problème aux limites que nous allons considérer. Il existe plusieurs approches de résolution des EDP, nous pouvons citer la méthode variationnelle, la méthode de Galerkin, la méthode des semi-groupes, la méthode spectrale, la méthode des points fixes. Ces différentes théories sont bien exposées dans [4], [10], [11], [46], [53], [68], [80], [85]. Dans le cadre de ce travail, nous allons nous intéresser essentiellement à deux méthodes : la méthode spectrale et la méthode du point fixe.

Dans la partie de l'optimisation de forme, le but est d'étudier quelques techniques d'existence de solution d'un problème d'optimisation de forme sous contrainte d'un problème aux limites paraboliques non linéaire. En effet, les preuves mathématiques d'existence de solutions pour des problèmes d'optimisation passent presque toujours par l'introduction de topologies adéquates combinées avec des arguments de compacité et de continuité voir [24] et [59]. C'est ainsi que nous étudierons l'existence de solution sous la propriété de cône uniforme et l'existence de solution sous la contrainte de la  $\gamma$ -convergence avec des arguments de monotonie de la fonctionnelle puis de la compacité de l'ensemble admissible.

Dans la section 2.1, nous allons présenter la méthode spectrale en passant par la formulation variationnelle et le problème abstrait ensuite dans la section 2.2 nous allons étudier une approche des points fixes topologiques et enfin dans la section 2.3 étudier les différentes approches d'existence de solution en optimisation de forme.

### 2.1 Etude des EDP paraboliques linéaires : Cas de l'équation de la chaleur

Nous allons nous intéresser aux équations linéaires de type chaleur, pour lesquelles nous montrerons l'existence et l'unicité de la solution par la méthode spectrale. La méthode spectrale consiste à transformer un problème en celui d'un calcul des valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur, ce que l'on appelle déterminer le spectre de l'opérateur en question. Et la raison pour laquelle ceci est une chose intéressante est que, si l'opérateur est un opérateur

linéaire, la fonction, dont on cherche à calculer les valeurs, peut être exprimée comme une combinaison linéaire des fonctions, sur lesquelles l'opérateur agit de façon facilement calculable. Le cas le plus simple est celui de ses fonctions propres, sur lesquelles il agit par multiplication par un nombre (la valeur propre correspondante). Cette méthode sur laquelle nous allons nous appuyer ici est élaborée par Jacques-Louis Lions.

### 2.1.1 Description du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\partial\Omega$  que l'on suppose  $C^1$  par morceaux, on se donne un réel  $T > 0$  et on cherche une fonction  $u(t, x)$  sur  $Q = ]0, T[ \times \Omega$  solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au &= f \text{ dans } Q = ]0, T[ \times \Omega \\ u(t, x) &= 0 \text{ sur } \Sigma = ]0, T[ \times \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $A$  est l'opérateur elliptique défini par

$$Au = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad (2.2)$$

tel qu'il existe  $\alpha > 0$  avec

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En particulier si

$$a_{ij} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

avec  $\delta$  désignant le symbole de Kronecker, alors  $A = -\Delta$ . C'est ainsi dans le but de simplifier la présentation que dans toute la suite on va se restreindre au cas du Laplacien. Donc on se propose de chercher une fonction  $u(t, x)$  sur  $Q$  solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \text{ dans } Q \\ u(t, x) &= 0 \text{ sur } \Sigma, \\ u(0, x) &= u_0 \text{ dans } \Omega; \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  est la source de chaleur et  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , la distribution de la chaleur à l'instant initial. La condition de Dirichlet du problème aux limites (2.3) signifie qu'au cours du temps la température reste nulle sur la frontière, c'est la condition aux limites. Aussi il est possible d'imposer d'autres conditions aux limites comme celles de Neumann, de Robin...

### 2.1.2 Formulation faible du problème

Pour une justification mathématique de toute les écritures, elle sera faite dans la suite. Tout ce processus est appelé formulation faible.

Soit  $u(t, x)$  vérifiant le problème aux limites (2.3) et supposons qu'elle est suffisamment régulière pour donner une formulation mathématique précise du problème aux limites (2.3).

Multiplions la première équation du système (2.3) par une fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$  et intégrons sur  $\Omega$ ; on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(t, x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) v(x) dx.$$

Comme  $\Omega$  et  $v(x)$  ne dépendent pas de  $t$ , nous pouvons avoir cette écriture

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} v(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t,x) v(x) dx.$$

En utilisant la formule de Green, il vient :  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t,x) v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(t,x) v(x) dx$$

On sépare les variables  $x$  et  $t$ , alors dans toute la suite on note  $u(t) = u(t, \cdot)$  ou en d'autre terme  $x$  est la variable de  $u(t)$ , c'est à dire  $(u(t))(x) = u(t,x)$ .

On rappelle alors le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ ; pour tout  $\varphi$  et  $\psi \in H^1(\Omega)$ ,

$$(\varphi, \psi)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi(x) \psi(x) dx$$

et

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} dx. \quad (2.4)$$

Alors après ces transformations à justifier de façon rigoureuse plus tard, on peut proposer le problème suivant : trouver une fonction  $u : t \in [0, T] \mapsto u(t) \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette formulation fait appel de manière essentielle aux espaces  $H_0^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$  ainsi que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  définie par (2.4).

Le choix des espaces et le sens à donner aux solutions du nouveau problème (2.5) sont des points fondamentaux dans la reformulation du problème de départ.

Le problème (2.5) reste imprécis quant à la régularité en temps de  $f$  et de  $u$ , au sens donné à la dérivée en temps. En particulier, il faudra absolument que  $u(t)$  soit continue en  $t = 0$  pour donner un sens à la donnée initiale  $u_0$ . Cette formulation reste aussi imprécise par rapport à la dépendance de  $t$ . C'est ainsi dans le souci de bien poser le problème que nous faisons appel au problème parabolique abstrait.

### 2.1.3 Problème parabolique abstrait

Plaçons le problème (2.5) dans un cadre plus général. Pour cela introduisons :

- Deux espaces de Hilbert  $V$  et  $H$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :
  - $V$  est inclus dans  $H$  par injection continue ;
  - $V$  est dense dans  $H$  ;
- Une forme bilinéaire  $(u, v) \mapsto a(u, v)$  continue sur  $V \times V$ .

Ces conditions vont nous permettre de diagonaliser l'opérateur laplacien et nous ramener à la résolution d'une famille de simples équations différentielles ordinaires du premier ordre.

On note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire dans  $H$ ,  $|\cdot|$  la norme correspondante et  $\|\cdot\|$  la norme dans  $V$ .

En effet si  $u : t \mapsto u(t)$  est une fonction de  $L^2(0, T, X)$  et si  $v$  est un élément de  $X$ , la fonction  $t \mapsto (u(t), v)_X \in L^2(0, T)$ .



À partir de ces considérations, on suppose que  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T, H)$  et on se propose de chercher une fonction  $u \in L^2(0, T, V) \cap C^0(0, T, H)$  telle que :

$$\begin{cases} \forall v \in V, \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \text{ au sens des distributions} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Le problème a bien un sens. D'abord puisque  $u$  est une fonction de  $L^2(0, T, V)$ , les fonctions  $t \mapsto (u(t), v)$  et  $t \mapsto a(u(t), v)$  appartiennent à  $L^2(0, T)$ ,  $\forall v \in V$ . De même, puisque  $f$  est une fonction de  $L^2(0, T, H)$ , la fonction  $t \mapsto (f(t), v) \in L^2(0, T)$ ,  $\forall v \in V$ . Donc le problème (2.6) a un sens dans  $\mathcal{D}'(]0, T[)$ . D'autre part, la condition initiale a un sens, car la fonction  $u$  est continue de  $]0, T[$  dans  $H$ .

Puisque le problème a un sens, pour plus de précision sur le cadre structural pour l'existence et l'unicité de la solution, nous augmentons les hypothèses suivantes :

- L'injection canonique de  $V$  dans  $H$  est compacte,
- La forme bilinéaire  $a(., .)$  est symétrique,
- La forme bilinéaire  $a(., .)$  est coercitive ( c'est à dire il existe deux constantes  $\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ , tel que  $\forall v \in V, a(v, v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha \|v\|^2$ )

De ce fait, nous serons en mesure de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.6) grâce à la méthode spectrale.

### 2.1.4 Problème spectral

On considère le problème spectral général : trouver les valeurs  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour lesquelles il existe une solution  $u \in V, u \neq 0$ , de l'équation

$$\forall v \in V, a(u, v) = \lambda(u, v) \quad (2.7)$$

Grâce aux hypothèses citées dans la sous-section précédente, on peut utiliser le théorème suivant.

**Théorème 30** ([85]). *On suppose que l'injection canonique de  $V$  dans  $H$  est compacte et la forme bilinéaire  $a(., .)$  est symétrique et  $V$ -elliptique c'est à dire  $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ . Alors les valeurs propres du problème (2.7) forment une suite croissante tendant vers  $+\infty$ ;*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots, \quad (2.8)$$

et il existe une base hilbertienne orthonormale de  $H$  formée de vecteurs propres de  $w_m$  tels que

$$\forall v \in V, a(w_m, v) = \lambda_m(w_m, v), m = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

De plus la suite  $(\lambda_m^{-1/2} w_m)$  forme une base hilbertienne orthonormale de l'espace  $V$  pour le produit scalaire  $a(., .)$ .

**Remarque 6.** Dans le théorème 30, il est possible d'affaiblir l'hypothèse de  $V$ -ellipticité en supposant que la forme bilinéaire  $a(., .)$  est coercitive au sens suivant : il existe deux constantes  $\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ , tel que

$$\forall v \in V, a(v, v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha \|v\|^2. \quad (2.10)$$

Ainsi la forme bilinéaire  $(u, v) \mapsto a(u, v) + \lambda(u, v)$  est symétrique et  $V$ -elliptique. Donc nous sommes sous les conditions d'applications du théorème 30.

**Théorème 31.** (J.L.LIONS) *Supposons que la forme bilinéaire  $a(., .)$  est symétrique et coercitive, alors le problème (2.6) admet une seule solution  $u$ .*

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin de la proposition suivante qui donne l'unicité de la solution.

**Proposition 8.** Sous les hypothèses du théorème 31, si  $u$  est solution du problème (2.6), alors elle est donnée par le développement en série ci dessous :

$$u(t) = \sum_{i \geq 1} \left( (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right) w_i. \quad (2.11)$$

*Preuve de la Proposition 8.* Puisque  $u \in C^0(0, T; H)$  et  $(w_i)$  est une base hilbertienne orthonormale dans  $H$ , alors  $u$  se décompose, pour tout  $t \in [0, T]$  de la manière suivante :

$$u(t) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i(t) w_i$$

avec  $\alpha_i(t) = (u(t), w_i)$ . Et comme presque pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $u(t) \in H$ ,

$$a(u(t), w_i) = \lambda_i (u(t), w_i) = \lambda_i \alpha_i(t).$$

En remplaçant dans (2.6)  $v$  par  $w_i$  on obtient l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \alpha_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = (f(t), w_i) \\ \alpha_i(0) = (u_0, w_i) \end{cases} \quad (2.12)$$

dont la solution est donnée par

$$\alpha_i(t) = (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds.$$

En remplaçant cette expression dans la sommation ci-dessus on a le résultat annoncé. Ce qui achève la preuve de la Proposition 8.  $\square$

*Démonstration du Théorème 31.* L'unicité est obtenue grâce à la Proposition 8. Pour valider tout le processus, il reste à montrer l'existence de la solution. Pour cela il suffit de montrer que la série (2.11) converge pour tout  $u_0 \in H$  et tout  $f \in L^2(0, T; H)$  puisque sa somme  $u(t)$  est la solution du problème (2.6).

La preuve de l'existence se fait en plusieurs étapes.

1. Supposons que la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est coercitive avec la condition  $\lambda = 0$ , alors la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est  $V$ -elliptique. Introduisons le sous-espace  $V_m \subset V$  engendré par le système  $(w_i, 1 \leq i \leq m)$  pour construire une solution approchée du problème. Remarquons que  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$  est dense dans  $V$ . On considère ensuite le problème approché : chercher  $t \in [0, T] \mapsto u_m(t) \in V_m$  solution de :  $\forall v \in V_m$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (u_m(t), v) + a(u_m(t), v) = (f(t), v) \\ u_m(0) = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i. \end{cases} \quad (2.13)$$

En posant que

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) w_i, \\ \alpha_i(t) &= (u_m(t), w_i). \end{aligned}$$

On remarque d'après la preuve de la Proposition 8 que la solution du problème (2.13) est donnée par

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \left( (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right) w_i. \quad (2.14)$$

C'est précisément la somme partielle d'ordre  $m$  de la série donnée dans (2.11).

2. Montrons que  $(u_m)$  est une suite de Cauchy dans les espaces  $C^0(0, T, H)$  et  $L^2(0, T, V)$ . Soient  $m$  et  $p$  deux entiers tels que  $p > m \geq 1$ ; puisque  $(w_i)$  est une base hilbertienne de  $H$ , alors

$$\begin{aligned} |u_p - u_m|^2 &= \sum_{i=m+1}^p \alpha_i(t)^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^p \left( (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , on obtient alors

$$|u_p - u_m|^2 \leq 2 \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} + 2 \sum_{i=m+1}^p \left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy sur le second terme conduit à

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 &\leq \left( \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds \right) \left( \int_0^t e^{-2\lambda_i(t-s)} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |u_p - u_m|^2 \leq 2 \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 + \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=m+1}^p \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds.$$

Finalement puisque

$$\begin{aligned} |u_0|^2 &= \sum_{i \geq 1} (u_0, w_i)^2, \\ \|f\|_{L^2(0, T, H)}^2 &= \sum_{i \geq 1} \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds, \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2, \\ &\sum_{i=m+1}^p \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds \end{aligned}$$

convergent vers 0 lorsque  $m \xrightarrow{p > m} +\infty$ . Et alors on a :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |u_p - u_m| = 0.$$

Donc  $(u_m)$  est une suite de Cauchy dans  $C^0(0, T, H)$ .

Par ailleurs à l'aide de (2.7) et (2.13) on a,

$$\begin{aligned} a(u_p(t) - u_m(t), u_p(t) - u_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^p \lambda_i (u_p(t) - u_m(t), w_i)^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left( (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant la V-ellipticité de  $a(\cdot, \cdot)$  et l'inégalité  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , on obtient :

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|^2 \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left( (u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} + \left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \right).$$

Puisque

$$\lambda_i \int_0^T e^{-2\lambda_i t} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda_i T}) < \frac{1}{2}$$

et

$$\lambda_i \int_0^T \left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 dt \leq \frac{T}{2} \int_0^T (f(s), w_i)^2 ds;$$

En effet,

$$\left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \leq \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds \int_0^t e^{-2\lambda_i(t-s)} ds$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-2\lambda_i(t-s)} ds &= e^{-2\lambda_i t} \frac{1}{2\lambda_i} \left[ e^{-2\lambda_i s} \right]_0^t \\ &= \frac{e^{-2\lambda_i t}}{2\lambda_i} \left[ e^{-2\lambda_i t} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2\lambda_i} \left[ 1 - e^{-2\lambda_i t} \right] \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_i}; \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \leq \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda_i \int_0^T \left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 dt &\leq \int_0^T \left( \frac{1}{2} \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds \right) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T (f(s), w_i)^2 ds \int_0^T dt = \frac{T}{2} \int_0^T (f(s), w_i)^2 ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\lambda_i \int_0^T \left( \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 dt \leq \frac{T}{2} \int_0^T (f(s), w_i)^2 ds.$$

Alors

$$\int_0^T \|u_p(t) - u_m(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=m+1}^p \left( (u_0, w_i)^2 + T \int_0^T (f(s), w_i)^2 ds \right)$$

comme précédemment on arrive à

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|u_p(t) - u_m(t)\| = 0.$$

Par conséquent  $(u_m)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(0, T, V)$ .

3. Puisque les espaces  $C^0(0, T; H)$  et  $L^2(0, T, V)$  sont complets et que la suite  $(u_m)$  converge dans chacun de ces espaces. Comme les injections canoniques de  $L^2(0, T, V)$  dans  $L^2(0, T; H)$  et de  $C^0(0, T, H)$  dans  $L^2(0, T, V)$  sont continues, la limite de  $(u_m)$  est la même dans les

deux espaces. Par conséquent  $u_m \rightarrow u$  dans  $C^0(0, T, H) \cap L^2(0, T; V)$ . Il reste à vérifier que  $u$  satisfait (2.6). Soit  $\psi \in \mathcal{D}(]0, T[, \mathbb{R})$ . De (2.13) on a pour tout  $m : \forall v \in V_m$ ,

$$-\int_0^T (u_m(t), v) \frac{d}{dt} \psi(t) dt + \int_0^T a(u_m(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt.$$

En passant à la limite on obtient,  $\forall v \in V_m$ ,

$$-\int_0^T (u(t), v) \frac{d}{dt} \psi(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt;$$

comme  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$  est dense dans  $V$ . Alors le résultat est vrai pour tout  $v \in V$ . Donc  $u$  vérifie le système (2.6) au sens des distributions dans  $]0, T[$ . Enfin on observe d'un coté  $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(0) = u(0)$ , et de l'autre

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i = u_0$$

Ainsi  $u(0) = u_0$  d'où la deuxième équation du système (2.6). □

## 2.2 Application des points fixes

Nous allons nous intéresser aux équations non linéaires de type chaleur, pour lesquelles nous montrerons l'existence de la solution par la méthode du point fixe.

Nous ferons une application du point fixe de Schauder dans la sous-section 2.2.1, enfin nous allons terminer cette section par une application du point fixe de Schaefer dans la sous-section 2.2.2.

Soit le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \omega(|\nabla u|^2 - D\Delta u) = F(u) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$  de classe  $C^1$  par morceaux. Pour simplifier prenons  $D = 1$  et  $\omega = 1$ .

Pour étudier ce système (2.15), posons d'abord le changement de variable suivant  $u = \psi(\phi)$ , avec  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à déterminer, et  $\phi$  dépend de  $u$ . Cette transformation est connue sous le nom de transformation de Hopf. Un simple calcul donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

$$\Delta u = \psi''(\phi) |\nabla \phi|^2 + \psi'(\phi) \Delta \phi.$$

Puisque

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (|\nabla u|^2 - \Delta u) = F(u)$$

$$\Leftrightarrow \psi'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \psi'^2(\phi) |\nabla \phi|^2 - \psi''(\phi) |\nabla \phi|^2 - \psi'(\phi) \Delta \phi = F(u)$$

$$\Rightarrow \psi'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \psi'^2(\phi) |\nabla \phi|^2 - \psi''(\phi) |\nabla \phi|^2 - \psi'(\phi) \Delta \phi = F(u).$$

Par suite

$$\psi'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} + |\nabla \phi|^2 (\psi'^2(\phi) - \psi''(\phi)) - \psi'(\phi) \Delta \phi = F(u).$$

Supposons que

$$\psi'^2(\phi) - \psi''(\phi) = 0$$

et posons  $\psi' = y$ , on obtient ainsi

$$\begin{aligned} y^2 - y' &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{dy(\sigma)}{y^2(\sigma)} &= -d\sigma. \end{aligned}$$

Notre objectif est de trouver une solution.

En appliquant l'intégrale, on a

$$\frac{1}{y(\sigma)} = -\sigma + c,$$

où  $c$  est une constante. Pour une solution on choisit  $c = 0$  et en intégrant à nouveau alors

$$y(\sigma) = -\frac{1}{\sigma} = \psi'(\phi),$$

d'où

$$\psi(\phi) = -\ln(\phi).$$

Ainsi

$$\phi = e^{-u}.$$

Alors sur  $\Omega$

$$\phi(0, x) = e^{-u_0(x)},$$

sur  $\Sigma$

$$\phi(t, x) = 1.$$

On obtient ainsi le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = G(\phi) & \text{dans } Q \\ \phi(t, x) = 1 & \text{sur } \Sigma \\ \phi(0, x) = e^{-u_0} & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $G(\phi) = F(-\ln \phi)$  et  $e^{-u_0} \in H_0^1(\Omega)$ .

Faisons le relèvement suivant  $\phi = \phi_1 - 1$ . Ce qui fait que le problème aux limites ci dessus devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \Delta \phi_1 = G(\phi_1) & \text{dans } Q \\ \phi_1(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \phi_1(0, x) = e^{-u_0} + 1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Pour simplifier les écritures nous allons remplacer  $\phi_1$  par  $\phi$ . Alors on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = G(\phi) & \text{dans } Q \\ \phi(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \phi(0, x) = e^{-u_0} + 1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.2.1 Application du théorème du point fixe de Schauder

Considérons le problème aux limites de la chaleur pour une fonction  $u$  satisfaisant le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) & \text{dans } Q \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.19)$$

où  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ .

**Théorème 32.** *Soient  $\Omega$  un ouvert régulier et  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  lipschitzienne, alors il existe une fonction  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  solution du problème aux limites (2.19).*

*Démonstration.* Nous allons appliquer le théorème de Schauder dans l'espace

$$C(0, T; L^2(\Omega))$$

avec la norme

$$\|v\|_{C(0, T; L^2(\Omega))} = \max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En effet,

$$C(0, T; L^2(\Omega))$$

muni de la norme précédente est un espace de Banach.

1. Soit  $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = f(\phi) & \text{dans } Q \\ w(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ w(0, x) = w_0(x) & \text{dans } \Omega; \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .

Puisque  $f$  est lipschitzienne, cette hypothèse implique en particulier que  $f$  vérifie la condition de croissance linéaire c'est à dire :

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|) \text{ pour tout } z \in \mathbb{R} \text{ et toute constante } C. \quad (2.21)$$

On a alors pour tout  $\epsilon \geq 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx \leq \epsilon \|w\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon} \|f(w)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx \leq \epsilon C \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon} \|f(w)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Choisissons  $\epsilon$  suffisamment petit, nous déduisons que,  $\exists C_0 \geq 0$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx \leq C_0 \|f(w)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci implique que

$$\|w\|_{C(0, T; L^2(\Omega))} \leq C' \left( \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 \right) \quad (2.22)$$

où  $C' = \sqrt{K}$ ,  $K = \max \left\{ 1, TC_0 |\Omega| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \right\}$ .

Maintenant dans toute la suite, nous allons considérer que  $P(\phi)(t) := w$ . Grâce aux inégalités (2.22) et (2.21) on obtient

$$\forall t \in [0, T], \|P(\phi)(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C' (\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} + 1). \quad (2.23)$$

2.  $P : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  est une application continue.

En effet, soit

$$\phi_k(t) \rightarrow \phi(t) \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad (2.24)$$

alors en vertu de la relation (2.23) et de la relation (2.20), il advient

$$\|w_k(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2}|\Omega|\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2}K(\|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} + 1), \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

De la dernière estimation, nous pouvons affirmer pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $(w_k(t))_k$  est une suite bornée. Alors

$$\exists w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \exists k_j : w_{k_j} \rightarrow w.$$

Et en utilisant le théorème de Rellich, il existe une sous suite aussi notée par  $(w_{k_j})_{j=1, \dots, \infty}$  telle que

$$w_{k_j} \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (2.26)$$

Par l'argument de la compacité relative nous avons :

$$w_{k_j} \rightarrow w \text{ dans } H_0^1(\Omega). \quad (2.27)$$

Maintenant soit la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur dont la sous-suite  $w_{k_j}$  est solution pour  $v \in H_0^1(\Omega)$ ;

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_{k_j}(t, x)v(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial w_{k_j}(t, x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(\phi_{k_j})v(x)dx.$$

Alors en utilisant la condition (2.21) et en passant aux limites grâce à (2.24) et (2.27), pour  $v \in H_0^1(\Omega)$  on aboutit à

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x)v(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(\phi)v(x)dx.$$

Donc  $P(\phi) = w$ .

Par conséquent (2.24) implique  $P(\phi_{k_j}(t)) \rightarrow P(\phi(t))$  dans  $C(0, T; H_0^1(\Omega))$ , finalement on peut dire que  $P$  est une application continue.

3. Rappelons que  $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  vérifie le problème aux limites (2.20) et aussi nous avons l'estimation du problème aux limites. Alors on a

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 \right).$$

$H_0^1(\Omega)$  est un sous espace compact de  $L^2(\Omega)$ .

Maximisons le membre de gauche par rapport à  $t$  dans l'inégalité précédente, nous avons

$$\|w\|_{C(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left( \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 \right).$$

Donc  $C(0, T; H_0^1(\Omega))$  est un espace compact dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$ .

4. Appliquons le théorème du point fixe de Schauder à l'espace  $X = C(0, T; L^2(\Omega))$  et  $K = C(0, T; H_0^1(\Omega))$ , on peut conclure que  $P$  admet un point fixe ceci revient à dire que le système d'équation (2.19) admet une solution.

□



### 2.2.2 Application du théorème du point fixe de Schaefer

Dans cette sous-section, nous avons besoin du résultat de régularité et d'approximation de la méthode de Galerkin développée par exemple dans [46] qui est le théorème suivant

**Théorème 33.** Soient  $g \in H_0^1(\Omega)$  et  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Supposons de plus que  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  avec  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , est la solution faible du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } Q \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(0, x) = g & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.28)$$

Alors  $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,  $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  et nous avons l'estimation suivante

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left( \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|g\|_{H_0^1(\Omega)} \right), \quad (2.29)$$

la constante  $C$  dépend de  $\Omega$  et de  $T$ .

*Démonstration.* [46]. □

**Théorème 34.** Soient  $\Omega$  un ouvert régulier et  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et est lipschitzienne, alors il existe une fonction  $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  solution du problème aux limites (2.19).

*Démonstration.* Nous allons appliquer le théorème de Schaefer dans l'espace

$$L^2(0, T; H^2(\Omega))$$

avec la norme

$$\|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \quad (2.30)$$

1. Considérons d'abord le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = f(\phi) & \text{dans } Q \\ w(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ w(0, x) = w_0(x) & \text{dans } \Omega; \end{cases} \quad (2.31)$$

avec  $\phi \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ .

Grâce au théorème 33, on a  $w \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  et en outre nous avons l'estimation suivante

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \|w'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left( \|f(\phi)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right),$$

et par suite

$$\|w\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \leq C \left( \|f(\phi)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

Puisque  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ .  $f : \mathbb{R} \rightarrow C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $s \mapsto f(s)$ .

Pour  $s = u(t, x)$  on a  $f(u(t, x))$  alors

$$\int_{\Omega} |f(u(t, x))|^2 dx = |\Omega| \left( \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)| \right)^2$$

et

$$\|f(u(t, x))\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = \left( \int_0^T \|f(u(t, x))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \leq |\Omega|^{1/2} T^{1/2} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Nous avons

$$\|w\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \left[ \int_0^T \left( \int_{\Omega} |f(\phi(t,x))|^2 dx \right)^{1/2} + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right].$$

$$\|w\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C \left[ |\Omega|^{1/2} T^{1/2} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right].$$

Donc on peut conclure que :  $\exists C_0 > 0$  tel que

$$\|w\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C_0 \left( 1 + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right). \quad (2.32)$$

Maintenant dans toute la suite, nous allons considérer que  $P(\phi)(t) := w$ . Grâce à l'inégalité (2.32) on obtient

$$\forall t \in [0, T], \|P(\phi)\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C_0 \left( 1 + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right). \quad (2.33)$$

2.  $P : L^2(0, T; H^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; H^2(\Omega))$  est une application continue.

Remarquons d'abord que  $w_k \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ .

En effet, soit

$$\phi_k(t) \rightarrow \phi(t) \text{ dans } L^2(0, T; H^2(\Omega)), \quad (2.34)$$

alors en vertu de la relation (2.33) et de la relation (2.31), il advient

$$\|w_k\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C_0 \left( 1 + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right), \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.35)$$

Pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,  $(w_k(t))_k$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ . Alors

$$\exists w \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \exists k_j : w_{k_j} \rightharpoonup w.$$

Et en utilisant le théorème de Rellich, il existe une sous suite aussi notée par  $(w_{k_j})_{j=1, \dots, \infty}$  telle que

$$w_{k_j} \rightarrow w \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.36)$$

Maintenant soit la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur dont la sous-suite  $w_{k_j}$  est solution pour  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ;

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_{k_j}(t,x)v(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial w_{k_j}(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(\phi_{k_j})v(x)dx$$

Alors en passant aux limites grâce à (2.34) et (2.36), pour  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  on aboutit à

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t,x)v(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(\phi)v(x)dx.$$

$$\int_{\Omega} w(T,x)v(x)dx - \int_{\Omega} w(0,x)v(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_0^T \int_{\Omega} f(\phi)v(x)dx.$$

Donc  $P(\phi) = w$ .

Par conséquent (2.34) implique  $P(\phi_k(t)) \rightarrow P(\phi(t))$  dans  $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ , finalement on peut dire que  $P$  est une application continue.

3.  $P : L^2(0, T; H^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; H^2(\Omega))$  est une application compacte.  
En effet, soit

$$\phi_k \text{ une suite borné dans } L^2(0, T; H^2(\Omega)), \quad (2.37)$$

alors en vertu de la relation (2.33) et de la relation (2.31), il advient

$$\|w_k\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \leq C_0 \left(1 + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right), \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

Pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,  $(w_k(t))_k$  est une suite bornée dans  $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ . Alors

$$\exists w \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \exists k_j : w_{k_j} \rightharpoonup w.$$

Ceci implique que la norme de  $w$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^2(\Omega))$  car

$$\|w\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \leq \liminf \|w_{k_j}\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}.$$

Donc  $P$  est une application compacte.

4. Finalement, nous voulons montrer que l'ensemble

$$\{w \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ tel que pour un } \lambda, w = \lambda P(w), \text{ avec } 0 < \lambda \leq 1\}$$

est borné dans  $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ . Soit  $w \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$  tel que pour un  $\lambda$ ,  $w = \lambda P(w)$ , avec  $0 < \lambda \leq 1$ . Alors  $\frac{w}{\lambda} = P(w)$ . En d'autres termes,  $w \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ , et  $w$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \lambda f(\phi) & \text{dans } Q \\ w(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ w(0, x) = \lambda w_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.39)$$

Donc nous retrouvons l'estimation suivante

$$\|w\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \leq C_0 \left(1 + \lambda \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \leq C_0 \left(1 + \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Alors la norme de  $w$  est bornée. Ce qui revient à dire que l'ensemble

$$\{w \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ tel que pour un } \lambda, w = \lambda P(w), \text{ avec } 0 < \lambda \leq 1\}$$

est borné.

5. Appliquons le théorème du point fixe de Schaefer à l'espace  $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ , on peut conclure que  $P$  admet un point fixe  $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ , ceci revient à dire que le système d'équation (2.19) admet une solution. □

## 2.3 Optimisation de forme

Cette section est l'un des objectifs de cette thèse et il traite d'optimisation de forme. Nous allons nous intéresser aux questions d'existence de formes optimales des problèmes d'optimisation de formes géométriques. Dans cette section, notre objectif est d'étudier ce problème d'optimisation de forme

$$\inf\{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{U}_{ad}\} \quad (2.40)$$

où  $J$  est une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{U}_{ad}$  l'ensemble admissible par

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + G_0(u_{\Omega}) \right) dx dt$$

où  $u_{\Omega}$  est la solution du problème aux limites de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) & \text{dans } Q, \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega; \end{cases} \quad (2.41)$$

avec  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ . La fonction  $G_0$  est définie par

$$G_0(s) = G_0(x, s) = \int_0^s g_0(x, t) dt,$$

$$g_0 =: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g_0(\cdot, 0) = 0.$$

Le plan de cette section est le suivant : dans la sous section 2.3.1 nous allons étudier l'existence de solution sous la propriété du cône uniforme, puis dans la sous section 2.3.2, l'existence de solution sous la contrainte de la  $\gamma$ -convergence avec la monotonie de la fonctionnelle. Enfin dans la sous-section 2.3.3, nous allons étudier l'existence de solution sous la contrainte de la  $\gamma$ -convergence avec l'argument de compacité.

Rappelons d'abord avant de suivre ce plan, quelques outils d'optimisation de formes géométriques. On fixe une boule  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ , et tous les ouverts  $\Omega$  avec lesquels nous travaillons sont contenus dans  $D$ .

**Définition 49.** On dit qu'une fonction  $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de type Carathéodory si pour tout  $s \in \mathbb{R}$  la fonction  $h(\cdot, s)$  est mesurable sur  $\Omega$   $p.p$  en  $x \in \Omega$  et la fonction  $h(x, \cdot)$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 50.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $\mathcal{B}_*(E)$  l'ensemble des parties non vides fermées et bornées de  $E$ . On appelle  $d_H$  la distance de Hausdorff l'application

$$\begin{aligned} d_H : \mathcal{B}_*(E) \times \mathcal{B}_*(E) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (A, B) &\mapsto d_H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\} \end{aligned}$$

où  $\rho(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$  ;  $\rho(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A)$  et  $d(\cdot, \cdot)$  étant la distance euclidienne.

De manière équivalente cette distance peut s'écrire par

$$d_H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 / A \subset B_{\epsilon} \text{ et } B \subset A_{\epsilon}\}$$

où  $A_{\epsilon} = \{x \in E / d(x, A) < \epsilon\}$  et  $B_{\epsilon} = \{x \in E / d(x, B) < \epsilon\}$ .

Soit  $F$  un compact fixe. Soient  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset F$  des ouverts alors  $d_H(\Omega_1, \Omega_2) = d_H(F \setminus \Omega_1, F \setminus \Omega_2)$ .

**Définition 51.** Soient  $\Omega_n \subset F$ , une suite d'ouverts et  $\Omega \subset F$  un ouvert. On dit que  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  au sens de Hausdorff et on note  $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$  si  $d_H(\Omega_n, \Omega) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Définition 52.** On dit que  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  au sens  $L^p$ ,  $p \in [1, +\infty[$  et on note  $\Omega_n \xrightarrow{L^p} \Omega$  où  $\Omega_n, \Omega$  sont des ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^N$  si  $\chi_n$  converge vers  $\chi_{\Omega}$  dans  $L^p$ .

**Définition 53.** Soient  $\Omega_n, \Omega$  des ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^N$ . On dira que  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  au sens  $p.p$  si  $\chi_{\Omega_n}$  converge vers  $\chi_{\Omega}$   $p.p$ .

**Définition 54.** Soit  $y$  un point de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\xi$  un vecteur unitaire et  $\epsilon$  un réel strictement positif, on appelle cône époiné de sommet  $y$ , de direction  $\xi$  et de dimension  $\epsilon$ , le cône noté  $C(y, \xi, \epsilon)$  et défini par

$$C(y, \xi, \epsilon) = \left\{ z \in \mathbb{R}^N, (z - y, \xi) \geq \cos(\epsilon)|z - y| \text{ et } 0 < |z - y| < \epsilon \right\}.$$

**Définition 55.** On dit qu'un ouvert  $\Omega$  à la propriété du  $\epsilon$ -cône si  $\forall x \in \partial\Omega, \exists \xi_x$  un vecteur unitaire tel que  $\forall y \in \bar{\Omega} \cap B(x, \epsilon)$ , on a  $C(y, \xi_x, \epsilon) \subset \Omega$ .

**Définition 56.** On dit qu'un ouvert  $\Omega$  est étoilé par rapport à un point  $x_0 \in \Omega$  si  $y \in \Omega$  implique que  $[x_0, y] \subset \Omega$ .

Il est dit étoilé par rapport à une boule ouverte  $B \subset \Omega$  s'il est étoilé par rapport à chaque point de  $B$ . Dans ce cas

$$\forall y \in \bar{\Omega}, \forall z \in B, \{\lambda y + (1 - \lambda)z, 0 \leq \lambda < 1\} \subset \Omega.$$

**Proposition 9.** Un ouvert convexe borné a la propriété du  $\epsilon$ -cône. Plus généralement, c'est le cas pour un ouvert étoilé borné par rapport à une boule.

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Théorème 35.** Un ouvert  $\Omega$  de frontière borné a la propriété du  $\epsilon$ -cône si et seulement s'il est à bord lipschitzien avec une constante de Lipschitz uniforme.

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Lemme 9.** Soit  $\Omega$  un domaine lipschitzien avec  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , si  $u = 0$  p.p sur  $\Omega^c$  alors  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Démonstration.* Voir [59]. □

Le Lemme suivant est classique et fondamental pour montrer l'existence de la solution. De plus, ce théorème assure la compacité et joue un rôle important en méthode direct de calcul de variation. Pour plus d'informations sur ce résultat topologique nous renvoyons le lecteur désireux à consulter [59].

**Lemme 10.** Soit  $\Omega_n$  une suite d'ouverts de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant la propriété du  $\epsilon$ -cône avec  $\bar{\Omega}_n \subset K \subset D$  où  $K$  est un compact et  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Alors il existe un ouvert  $\Omega$  vérifiant la propriété du  $\frac{\epsilon}{2}$ -cône et une suite extraite  $\Omega_{n_k}$  telle que

$$\begin{aligned} \Omega_{n_k} &\xrightarrow{H} \Omega ; \quad \chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{L^1, p, p} \chi_{\Omega} \\ \bar{\Omega}_{n_k} &\xrightarrow{H} \bar{\Omega} ; \quad \partial\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \partial\Omega. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Voir [59]. □

Soit  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  fixé.

**Définition 57.** Pour tout compact  $K$  de  $D$  on pose

$$cap(K) = cap_D(K) = \inf \left\{ \int_D |\nabla \varphi|^2 dx : \varphi \in \mathcal{D}(D), \varphi \geq 1 \text{ sur } K \right\}. \quad (2.42)$$

Pour  $\omega$  ouvert de  $D$  et  $K$  un compact, on pose

$$cap(\omega) = \sup_{K \subset \omega} cap(K). \quad (2.43)$$

Pour  $A$  un sous ensemble de  $D$ . On pose

$$cap(A) = \inf_{A \subset \omega} cap(\omega) \text{ où } \omega \text{ est un ouvert de } D. \quad (2.44)$$

**Remarque 7.** 1. La capacité sert à mesurer la finesse des ensembles et est la bonne notion pour les espaces de Sobolev.

2. On peut définir une capacité pour tout espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  ou  $W^{m,p}(\Omega)$ , avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ .

**Définition 58.** On dit qu'une propriété a lieu quasi-partout (q.p) si elle a lieu sauf sur un ensemble de capacité nulle.

**Remarque 8.** De la même manière que les ensembles de mesure nulle donnent naissance à la notion de presque partout, les ensembles de capacité nulle engendrent la notion de quasi-partout.

**Définition 59.** Une fonction  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est dite quasi-continue s'il existe une suite décroissante d'ouverts  $w_n$  de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{cap}(w_n) = 0$  et la restriction de  $g$  au complémentaire  $w_n^c$  de  $w_n$  est continue.

**Définition 60.** Un sous ensemble  $\Omega$  de  $D$  (ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ) est dit quasi-ouvert s'il existe une suite décroissante d'ouvert  $w_n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{cap}(w_n) = 0$  et  $\Omega \cup w_n$  soit un ouvert de  $D$ .

**Remarque 9.** Les ouverts sont évidemment tous des quasi-ouverts mais la réciproque est fausse.

**Théorème 36.** Toute fonction  $u \in H_0^1(D)$  admet un représentant quasi-continu  $\tilde{u}$  qui est unique (modulo l'égalité quasi-continue).

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Lemme 11.** Soit  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  quasi-continue. Alors

$$(u \geq 0 \text{ p.p}) \Rightarrow (u \geq 0 \text{ q.p}).$$

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Définition 61.** Soit  $D$  un ouvert fixe de  $\mathbb{R}^N$ , pour tout  $A \subset D$ , on pose  $H_0^1(A) = \{u \in H_0^1(D); \tilde{u} = 0 \text{ q.p dans } D \setminus A\}$ .

$H_0^1(A)$  est un sous espace fermé de  $H_0^1(D)$ , séparable comme  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Proposition 10.** Pour tout  $A \subset D$ , il existe  $\Omega \subset D$  quasi-ouvert unique tel que  $H_0^1(A) = H_0^1(\Omega)$ . De plus,  $H_0^1(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Proposition 11.** Soit  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  quasi-continue et  $\alpha > 0$ . Alors  $\{f > \alpha\}$  est quasi-ouvert. En particulier, si  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  alors  $\{\tilde{u} > \alpha\}$  est un quasi-ouvert.

*Démonstration.* Voir [59]. □

Soient  $X$  un espace topologique et  $V(x)$  l'ensemble de tous les voisinages ouverts de  $x \in X$ . Soit  $F_h$  une suite de fonctions définies de  $X$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$

**Définition 62.** La  $\Gamma$ -limite inférieure et la  $\Gamma$ -limite supérieure de la suite  $F_h$  sont des fonctions définies de  $X$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$  par

$$(\Gamma - \liminf F_h)(x) = \sup_{U \in V(x)} \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y),$$

$$(\Gamma - \limsup F_h)(x) = \sup_{U \in V(x)} \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y).$$

S'il existe une fonction  $F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  telle que  $\Gamma - \liminf F_h = \Gamma - \limsup F_h = F$ , alors on a  $F = \Gamma - \lim_{h \rightarrow \infty} F_h$  et on dit que la suite  $(F_h)$   $\Gamma$ -converge vers  $F$  dans  $X$  ou  $F$  est la  $\Gamma$ -limite de  $(F_h)$  dans  $X$ .

**Remarque 10** ([31]). Il est clair que  $\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h \leq \Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h$ , donc  $(F_h)$   $\Gamma$ -converge vers  $F$  si et seulement si

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h \leq F \leq \Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h,$$

c'est à dire si et seulement si

$$\sup_{U \in \mathcal{V}(x)} \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y) \leq F(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{V}(x)} \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y)$$

pour tout  $x \in X$ .

**Remarque 11.** Soit  $B(x)$  est une base pour le système de voisinage de  $x \in X$ , alors

$$(\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h)(x) = \sup_{U \in B(x)} \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y),$$

$$(\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h)(x) = \sup_{U \in B(x)} \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y).$$

Ceci montre le caractère local de la  $\Gamma$ -limite : Si deux suites  $F_h$  et  $G_h$  coïncident dans un sous-ensemble ouvert  $U$  de  $X$ , alors la  $\Gamma$ -limite inférieure ainsi que la  $\Gamma$ -limite supérieure coïncident dans  $U$ .

L'exemple suivant où la  $\Gamma$ -limite peut être calculée en utilisant la remarque précédente, montre qu'en général, la  $\Gamma$ -convergence et la converge simple sont indépendantes.

**Exemple 1.** Dans cet exemple, nous prenons  $X = \mathbb{R}$ . Soit  $F_h(x) = hxe^{-2h^2x^2}$ , alors  $(F_h)$   $\Gamma$ -converge dans  $\mathbb{R}$  vers la fonction

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-1/2} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

tandis que  $(F_h)$  converge simplement vers 0.

Fort de ces précédentes remarques, certains reformulent la définition de la  $\Gamma$ -convergence par la définition suivante

**Définition 63** ([19]). Soit  $G_n$  une suite de fonctionnelles définies sur  $Y$  un espace métrique à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . On dit que  $G_n$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $G$  si  $\forall y \in Y$  on a :

1.  $\forall y_n \in Y$  converge vers  $y$ ,  $G(y) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} G_n(y_n)$
2.  $\exists y_n \in Y$ ,  $y_n$  converge vers  $y$ ,  $G(y) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} G_n(y_n)$ .

**Définition 64.** ( $\gamma$ -convergence) Soit  $G_n$  donné par  $G_n = G(u_n, \cdot)$  où  $(u_n)_n$  est une suite dans  $U$  un espace des contrôles (espace métrique ou topologique) avec  $u_n$  converge vers  $u$  dans  $U$  ( $u \in U$ ). Si  $G(u_n, \cdot)$   $\Gamma$ -converge vers  $G(u, \cdot)$  dans  $Y$ , cette convergence sur  $U$  est appelée la  $\gamma$ -convergence.

**Définition 65** ([19]). Soit  $J$  une fonctionnelle de forme. On dit que  $J$  est  $\gamma$ -semi-continue inférieurement si pour toute suite  $A_n$  qui  $\gamma$ -converge vers  $A$ , on a

$$J(A) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(A_n). \tag{2.45}$$

**Définition 66.** On dit que  $J$  est  $\gamma$ -semi-continue inférieurement faible si la condition (2.45) est vérifiée pour toute suite  $A_n$   $\gamma$ -converge faiblement vers  $A$ .

Soit  $\mathcal{A}(D)$  l'ensemble des domaines admissibles qui sont des quasi-ouverts inclus dans  $D \subset \mathbb{R}^N$ . En effet,  $\mathcal{A}(D)$  est noté par  $\mathcal{A}(D) = \{\Omega \subset D / \Omega \text{ est quasi-ouvert}\}$ .

**Lemme 12.** Supposons  $w_{\Omega_n}$  converge faiblement dans  $H_0^1(D)$  vers  $w$ . Soit  $v_n \in H_0^1(\Omega_n)$  converge faiblement dans  $H_0^1(D)$  vers  $v$ . Alors  $v \in H_0^1(\Omega_w)$ ; avec  $\Omega_w$  désigne le quasi ouvert  $\Omega_w = \{x \in D; \tilde{w}(x) \neq 0\}$ .

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Lemme 13.** Soit  $\Omega_n$  une suite de *quasi-ouverts* inclus dans  $D$  tel que  $w_{\Omega_n}$  converge faiblement dans  $H_0^1(D)$  vers  $w \in H_0^1(\Omega)$ , où  $\Omega$  est *quasi-ouvert* inclus dans  $D$ . Alors il existe une suite d'entiers  $(n_k)_{k \geq 0}$  et une suite quasi-ouverts  $(C_k)_{k \geq 0}$  tel qui  $\gamma$ -convergent vers  $\Omega$  avec  $\Omega_{n_k} \subset C_k \subset D$ .

*Démonstration.* Voir [19] ou [59]. □

**Lemme 14.** Soit  $A_n$  une suite de quasi-ouvert de  $D$  telle que  $(w_{A_n})$  converge faiblement dans  $H_0^1(D)$  vers une fonction  $w$ , et soit  $(u_n)$  une suite dans  $H_0^1(D)$  telle que  $u_n = 0$  q.p sur  $D \setminus A_n$ . Supposons que  $(u_n)$  converge faiblement dans  $H_0^1(D)$  vers une fonction  $u$ . Alors  $u = 0$  q.p sur  $\{w = 0\}$ .

*Démonstration.* Voir [24]. □

**Définition 67.** (Convergence au sens de Mosco) Soit  $A_n$  une suite de convexes fermés d'un espace vectoriel normé  $E$ . On dit que  $A_n$  converge au sens de Mosco vers  $A$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(M1) Pour tout  $x \in A$ , il existe une suite  $x_n$ ,  $x_n \in A_n$  telle que  $x_n$  converge fortement vers  $x$ .

(M2) Pour toute sous-suite  $y_{n_k}$  d'éléments de  $A_{n_k}$  convergeant faiblement vers  $y$ , on a alors  $y \in A$ .

**Définition 68.**  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$  si et seulement si  $H_0^1(\Omega_n)$  converge vers  $H_0^1(\Omega)$  au sens de Mosco.

**Corollaire 7.** Soit  $\Omega_n$  une suite quelconque d'ouverts de  $D$ . Alors il existe une sous suite  $u_{\Omega_{n_k}}$  et  $u^* \in H_0^1(\Omega)$  telles que  $u_{\Omega_{n_k}}$  converge faiblement vers  $u^*$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . De plus, s'il existe un ouvert  $\Omega \subset D$  tel que  $u^* = u_\Omega$ , alors la convergence est forte dans  $H_0^1(\Omega)$ .

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Proposition 12.** La mesure de Lebesgue est semi-continue inférieurement faible sur  $\mathcal{A}(D)$ .

*Démonstration.* Voir [19]. □

### 2.3.1 Étude d'existence de solution sous la propriété de cône uniforme

Soit  $\mathcal{O}_\epsilon$  l'ensemble admissible des domaines ouverts vérifiant la propriété du  $\epsilon$ -cône. En d'autres termes, soit  $D$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $K$  un compact inclu dans  $D$ .

$$\mathcal{O}_\epsilon = \{\omega \subset K \subset D / \text{ouvert et } \omega \text{ satisfaisant la propriété du } \epsilon\text{-cône}\}.$$

Nous allons étudier le problème d'optimisation de forme

$$\min \{J(\omega), \omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$$

où  $J$  est une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{O}_\epsilon$  par

$$J(\omega) = \int_0^T \int_\omega \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\omega|^2 + G_0(u_\omega) \right) dx dt$$



où  $u_\omega$  est la solution du problème aux limites de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\omega}{\partial t} - \Delta u_\omega = f(u_\omega) & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ u_\omega = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_\omega = u_0 & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

avec  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $f(u_\omega) = -g_0(x, u_\omega)$ .  $g_0$  est une fonction de Carathéodory et croissante sur  $\mathbb{R}$ . Nous supposons de plus qu'une fonction de Carathéodory  $h$  est croissante en  $t \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$  on ait

$$|g_0(x, t+s) - g_0(x, s)| \leq h(x, t)$$

presque partout dans  $\Omega$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on ait  $h(\cdot, s) \in L_{loc}^1(\Omega)$ .

On définit l'ensemble fonctionnel noté  $U_0$  par

$$U_0 = \{v \in H^1(\Omega); G_0(\cdot, v(\cdot)) \in L^1(\Omega)\}.$$

**Théorème 37.** *Il existe  $\Omega \in \mathcal{O}_\epsilon$  solution de  $J(\Omega)$  telle que  $J(\Omega) = \inf\{J(\omega); \omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$  sous contraintes du problème aux limites de la chaleur suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\omega}{\partial t} - \Delta u_\omega = f(u_\omega) & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ u_\omega = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_\omega = u_0 & \text{dans } \omega. \end{cases} \quad (2.46)$$

*Démonstration.* Considérons la fonction  $\tilde{u}$  l'extension de  $u$  définie par

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in D \setminus \omega, \end{cases}$$

et

$$\nabla \tilde{u} = \begin{cases} \nabla u & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{si } x \in D \setminus \omega. \end{cases}$$

Posons  $\alpha = \inf\{J(\omega), \omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ , remarquons comme  $g_0$  est croissante et  $g_0(x, \cdot) = 0$ , on a  $G_0(x, s)$  étant l'intégrale de la fonction  $g_0$ , est positive. La dérivée seconde de  $G_0(x, s)$  est égale à la dérivée de la fonction  $g_0$  qui est positive. Donc  $G_0(x, s)$  est convexe, par conséquent  $U_0$  est convexe et  $U_0 \neq \emptyset$  car  $\mathcal{D}(\omega) \subset U_0$ .

Par la caractérisation de la borne inférieure, on a  $\inf\{J(\omega), \omega \in \mathcal{O}_\epsilon\} > -\infty$ , donc il existe une suite minimisante  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_\epsilon$  telle que  $J(\Omega_n)$  converge vers  $\alpha$ . Puisque  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_\epsilon$  donc bornée, il existe un compact  $K$  tel que  $\tilde{\Omega}_n \subset K \subset D$ . En utilisant le Lemme 10, il existe  $\Omega$  vérifiant la propriété du  $\epsilon$ -cône et une suite extraite  $\Omega_{n_k}$  tels que  $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$  et  $\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{p.p} \chi_\Omega$ .

Supposons que  $u_{\Omega_n} = u_n$  et montrons que la suite  $\tilde{u}_n$  est bornée dans  $C(0, T; H_0^1(D))$ .

Nous allons passer par la méthode de l'absurde c'est à dire nous allons supposer que  $\tilde{u}_n$  n'est pas bornée. Alors  $\forall s > 0, \exists \tilde{u}_n^s \in C(0, T; H_0^1(D))$  telle que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{u}_n^s\|_{H_0^1(D)} > s \Rightarrow \max_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2} \|\tilde{u}_n^s\|_{H_0^1(D)} > s$$

alors

$$\max_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2} \|\tilde{u}_n^s\|_{H_0^1(D)} + \int_0^T \int_D G_0(\tilde{u}_n^s) dx dt > s$$

et par suite

$$\int_0^T \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla \tilde{u}_n^s|^2 + G_0(\tilde{u}_n^s) \right) dx dt > s$$

or par équivalence

$$\int_0^T \int_D \left( \frac{1}{2} |\nabla \tilde{u}_n^s|^2 + G_0(\tilde{u}_n^s) \right) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega_n} \chi_D \left( \frac{1}{2} |\nabla \tilde{u}_n^s|^2 + G_0(\tilde{u}_n^s) \right) dx dt$$

ce qui revient à dire que  $J(\Omega_n)$  converge vers  $+\infty$ . Donc  $\inf\{J(\omega), \omega \in \mathcal{O}_\epsilon\} = +\infty$  ce qui est une contradiction.

Puisque  $H_0^1(D)$  est réflexif, alors il existe une sous-suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $u^*(t, \cdot)$  telle que  $u_{n_k}(t, \cdot)$  converge faiblement vers  $u^*(t, \cdot)$  dans  $H_0^1(D)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Montrons que  $u^*(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Comme  $u_{n_k}(t, \cdot)$  converge faiblement vers  $u^*(t, \cdot)$  dans  $H_0^1(D)$ , par le théorème de Dirichlet, il existe une sous-suite que nous allons encore noter  $u_{n_k}(t, \cdot)$  telle que  $u_{n_k}(t, \cdot)$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^p(D)$  et donc  $u_{n_k}(t, \cdot)$  converge  $p.p$  vers  $u^*(t, \cdot)$ .

Nous savons que  $\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{p.p} \chi_\Omega$  et  $u_{n_k} \xrightarrow{p.p} u^*$ . Donc  $\chi_{\Omega_{n_k}} u_{n_k} \xrightarrow{p.p} \chi_\Omega u^*$ .

Si  $x \in D$  alors  $x \in \Omega$  ou  $x \in \Omega^c$ . Dans  $\Omega$ ,  $(\chi_{\Omega_n} - \chi_\Omega)u^* = 0$   $p.p$  et dans  $\Omega^c$   $u^* = 0$   $p.p$ , donc dans tous les deux cas  $(\chi_{\Omega_n} - \chi_\Omega)u^* = 0$  et par suite dans  $\Omega^c$ ,  $u^* = 0$   $p.p$ . Alors par lemme 9  $u^* \in H_0^1(\Omega)$ .

Puisque  $\tilde{u}_n$  est bornée dans  $C(0, T; H_0^1(D))$  alors il existe une constante  $M$  tel que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$$

et en passant à la limite, on a :

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_\Omega\|_{H_0^1(\Omega)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u^*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M.$$

Donc  $u_\Omega = u^*$ ; et aussi

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u^*|^2 \leq \liminf \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u_{n_k}|^2.$$

Par le lemme de Fatou on a :

$$\int_D \chi_\Omega G_0(u^*(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\Omega_{n_k}} G_0(u_{n_k}(x)) dx \leq 1 + \alpha,$$

donc  $u^* \in U_0$ . On a

$$\int_0^T \left( \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u^*|^2 dx + \int_D \chi_\Omega G_0(u^*) dx \right) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega_{n_k}} \frac{1}{2} |\nabla u_{n_k}|^2 dx + \int_D \chi_{\Omega_{n_k}} G_0(u_{n_k}) dx \right) dt.$$

Nous avons  $J(\Omega) \leq \alpha$  alors  $J(\Omega) = \alpha$ .

À présent, montrons que  $u^*$  est solution de (2.46).

Soit  $u_{\Omega_n}$  solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\Omega_n}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega_n} = f(u_{\Omega_n}) & \text{dans } \mathcal{Q}_n = ]0, T[ \times \Omega_n, \\ u_{\Omega_n} = 0 & \text{sur } \Sigma_n = ]0, T[ \times \partial\Omega_n \\ u_{\Omega_n}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega_n. \end{cases} \quad (2.47)$$

La formulation variationnelle  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(D)$

$$\int_D \chi_{\Omega_n} \frac{\partial u_{\Omega_n}}{\partial t}(t, x) \varphi(x) dx + \int_D \chi_{\Omega_n} \nabla u_{\Omega_n}(t, x) \nabla \varphi(x) dx = \int_D \chi_{\Omega_n} f(u_{\Omega_n}) \varphi(x) dx.$$

Cette dernière égalité est égale à la suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_n} u_{\Omega_n}(t, x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega_n} \nabla u_{\Omega_n}(t, x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega_n} f(u_{\Omega_n}) \varphi(x) dx.$$

Et maintenant intégrons par rapport au temps, nous avons

$$\int_0^t d\left(\int_{\Omega_n} u_{\Omega_n}(s, x)\varphi(x)dx\right) + \int_0^t \int_{\Omega_n} \nabla u_{\Omega_n}(s, x)\nabla\varphi(x)dx ds = \int_0^t \int_{\Omega_n} f(u_{\Omega_n})\varphi(x)dx ds.$$

Finalement, nous obtenons

$$\int_{\Omega_n} u_{\Omega_n}(t, x)\varphi(x)dx - \int_{\Omega_n} u_{\Omega_n}(0, x)\varphi(x)dx + \int_0^t \int_{\Omega_n} \nabla u_{\Omega_n}(s, x)\nabla\varphi(x)dx ds - \int_0^t \int_{\Omega_n} f(u_{\Omega_n}(s, x))\varphi(x)dx ds = 0.$$

Puisque nous avons

$$u_{n_k} \rightarrow u^* \text{ dans } H_0^1(\Omega), u^* \in H_0^1(\Omega).$$

Nous avons  $u_{\Omega_n}(0, x) = u_0(x)$  dans  $\Omega_n$ , en allant à la limite,  $u^*(0, x) = u_0^*(x)$  dans  $\Omega$ . De plus avec l'hypothèse sur  $f$ , on a

$$\int_{\Omega} u^*(t, x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u^*(t, x)\nabla\varphi(x)dx - \int_{\Omega} f(u^*)\varphi(x)dx = 0$$

Ceci implique le système suivant dans le sens faible

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* = f(u^*) & \text{dans } \mathcal{Q} \\ u^* = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u^*(0, x) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.48)$$

Donc  $u^* = u_{\Omega}$  est solution de (2.46).

Puisque  $J$  est strictement convexe pour  $\Omega$  fixé, elle atteint son minimum en un seul point. Finalement on a  $J(\Omega) = \min \{J(\omega), \omega \in \mathcal{O}_\varepsilon\}$ .  $\square$

### 2.3.2 Étude d'existence de solution sous la contrainte de la $\gamma$ -convergence avec la monotonie de la fonctionnelle

Cette méthode est due à Buttazzo et Dal Maso pour plus de précision consulter [24]. Elle consiste à démontrer l'existence de minimum sous les hypothèses de la monotonie de la fonctionnelle pour l'inclusion et de la semi-continuité inférieure pour la topologie de la  $\gamma$ -convergence. Soit  $\mathcal{A}(D)$  l'ensemble des domaines admissibles qui sont des quasi-ouverts inclus dans  $D \subset \mathbb{R}^N$  avec  $D$  un ouvert borné. En effet, il est défini par  $\mathcal{A}(D) = \{\Omega \subset D/\Omega \text{ est quasi-ouvert}\}$ .

Dans cette sous-section, nous allons étudier un problème de type

$$\min \{H(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}(D), m_L(\Omega) = c\} \quad (2.49)$$

avec  $H : \mathcal{A}(D) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle de forme définie par

$$H(\Omega) = \int_0^T \int_D g(x, u_{\Omega})dx dt; \quad (2.50)$$

sous contrainte d'un problème aux limites paraboliques dont  $u_{\Omega}$  est solution et définie par

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega} = f(u_{\Omega}) & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ u_{\Omega}(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u_{\Omega}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

avec  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . La fonction  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  pour p.p  $x \in \Omega$ ; telle que  $g(x, \cdot)$  est semi-continue inférieurement sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $x$  pp dans  $D$  et vérifie de plus  $g(x, s) \geq -a(x) - bs^2$  avec  $a \in L^1(\Omega)$  et  $b$  une constante dans  $\mathbb{R}$ .

Pour étudier ce problème, nous avons besoin d'outils supplémentaires.

**Proposition 13.** Soient  $D \in \mathbb{R}^N$  un ouvert borné et  $\Omega \in \mathcal{A}(D)$  de mesure finie. Pour  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f$  décroissante et  $f$  est lipschitzienne en particulier  $f$  vérifie la condition de croissance linéaire c'est à dire :

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|) \text{ pour tout } z \in \mathbb{R} \text{ et toute constante } C,$$

s'il existe une solution  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ u(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.51)$$

alors elle est unique.

*Démonstration.* Par le théorème du point fixe de Schauder, le problème aux limites (2.51) admet un point fixe. Soit  $u$  solution du problème aux limites (2.51) alors  $u$  vérifie la formulation variationnelle suivante  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (u(T, x) - u(0, x))v dx + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} f(u(t, x))v dx dt = 0.$$

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions du problème aux limites (2.51) avec  $u_1 \geq u_2$  sur  $[0, T] \times \Omega$  alors on a

$$\forall v_1 \in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} (u_1(T, x) - u_1(0, x))v_1 dx + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_1(t, x) \nabla v_1 dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} f(u_1(t, x))v_1 dx dt = 0$$

$$\text{et } \forall v_2 \in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} (u_2(T, x) - u_2(0, x))v_2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_2(t, x) \nabla v_2 dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} f(u_2(t, x))v_2 dx dt = 0.$$

Posons  $v_1 = u_1 - u_2$ ,  $v_2 = u_2 - u_1$ , et  $u_1(0, x) = u_2(0, x) = u_0$  et additionnons les deux équations. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_1(T, x)u_1 + u_2(T, x)u_2 - u_1(T, x)u_2 - u_2(T, x)u_1) + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\ = \int_0^T \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2). \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (u_1(T, x) - u_2(T, x))(u_1 - u_2) + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 = \int_0^T \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2).$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 = \int_0^T \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_1))(u_1 - u_2) - \int_{\Omega} (u_1(T, x) - u_2(T, x))(u_1 - u_2) dx \leq 0.$$

puisque l'intégrale du membre de droite est négative à cause de la décroissance de  $f$ . Par conséquent,  $u_1 = u_2$  par l'inégalité de Poincaré.  $\square$

On peut maintenant introduire l'opérateur résolvant

$$R_{\Omega} : C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)).$$

Soit le problème aux limites linéarisé suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(\phi) & \text{dans } Q, \\ u \in H_0^1(\Omega) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0 & \text{dans } \Omega; \end{cases} \quad (2.52)$$

avec  $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .

On constate que l'opérateur résolvant  $R_\Omega : C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est linéaire et continu. De plus nous pouvons avoir l'estimation suivant

$$\|R_\Omega(f)\|_{C(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left( \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 \right)$$

où  $C = \sqrt{K}$ ,  $K = \max \left\{ 1, TC_0|\Omega| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \right\}$ .

**Définition 69.** Soit  $\Omega_n$  une suite de quasi-ouverts et  $\Omega$  un quasi-ouvert tous inclus dans  $D$ . On dit que  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$  si  $R_{\Omega_n}(f)$  converge vers  $R_\Omega(f)$  fortement  $L^2(0, T; H_0^1(D)) \cap C(0, T; L^2(D))$  pour tout  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Proposition 14.** Avec les notations de la définition ci-dessus et si le problème aux limites (2.52) admet une solution. Alors

(i) Il existe une constante  $C = C(D)$  telle que

$$\|u_\Omega\|_{C(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left( \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 \right)$$

où  $C = \sqrt{K}$ ,  $K = \max \left\{ 1, TC_0|\Omega| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \right\}$ .

(ii) Si  $R_{\Omega_n}$  converge vers  $R_\Omega$  dans  $L^2(D)$ , la convergence a lieu fortement dans  $H_0^1(D)$ .

(iii) Si la  $\gamma$ -limite existe elle est unique (modulo l'égalité quasi-partout).

(iv)  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$  si  $R_{\Omega_n}(1)$  converge vers  $R_\Omega(1)$  dans  $L^2(D)$ .

*Démonstration.* Voir [59]. □

Pour tout  $\Omega \in \mathcal{A}(D)$ , notons  $u_\Omega(t, x) = R_\Omega(1)$  la solution problème aux limites (2.51). En effet, il est intéressant de noter que le fait que la situation soit "bonne" ou non dépend des ouverts  $\Omega_n$  et  $\Omega$  et pas vraiment de la donnée  $f$ . Le résultat obtenu par V. Sverak dans [99] montre, en effet, qu'on peut en fait se restreindre au cas particulier  $f = 1$  ce pour toute suite d'ouverts. Ceci est aussi valable pour les quasi-ouverts puisque tout ouvert est un quasi-ouvert.

**Définition 70.** On dit que une suite  $\Omega_n$  de quasi-ouverts  $\gamma$ -converge faiblement vers un quasi-ouvert  $\Omega$  si  $(u_{\Omega_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement dans  $H_0^1(D)$  vers  $u$  et telle que  $\Omega = \{x \in D; u(t, x) > 0 \text{ pour presque tout } t \in [0, T]\}$ .

Cette convergence est séquentiellement compacte dans la famille des quasi-ouverts et la mesure de Lebesgue  $m_L$  est semi-continue inférieurement (sci). La conséquence fondamentale de cette convergence est la propriété suivante :

— Si  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge faiblement vers  $\Omega$ ; alors pour toute sous suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{n_k} \in H_0^1(\Omega_{n_k})$  et  $u_{n_k}$  converge faiblement dans  $H_0^1(D)$  vers une fonction  $u$ , alors  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

**Remarque 12.** - Il est facile de voir que la  $\gamma$ -convergence entraîne la  $\gamma$ -convergence faible (cf [15]). On peut s'en convaincre en utilisant l'unicité de la proposition 10 après avoir remarqué que, si  $u_{\Omega_n}(t, x)$  converge vers  $u = u_\Omega$  alors  $H_0^1(\Omega) = H_0^1([u(t, x) > 0])$ . En effet, on a bien sûr  $[u > 0] \subset \Omega$  q.p. Si maintenant  $v \in H_0^1(\Omega)$  d'après la proposition 10, il est limite de  $R_\Omega(g_p)$  avec  $g_p \in L^\infty(D)$  où donc  $|R_\Omega(g_p)| \leq \|g\|_\infty u$ , c'est-à-dire que  $R_\Omega(g_p) \in H_0^1([u(t, x) > 0])$ . Cette propriété se conserve à la limite pour  $v$ .

- En general le  $u(t, x)$  de la definition ne coincide pas avec  $u_\Omega(t, x)$  Ceci n'est vrai en fait que si  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$ .
- On peut prouver (cf [24]) que si  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge faiblement vers  $\Omega$  alors  $H_0^1(\Omega)$  contient toutes les limites faibles de suites de  $H_0^1(\Omega_n)$  C'est-à-dire que la Propriété (M2) de la convergence au sens de Mosco est réalisée.
- La  $\gamma$ -convergence faible est sequentiellement compacte. En effet, si  $\Omega_n$  est une suite de quasi-ouverts dans  $\mathcal{A}(D)$  on a immediatement que  $u_{\Omega_n}$  est bornee dans  $H_0^1(D)$ . On peut donc en extraire une sous-suite convergente vers une fonction  $u$  et posant alors  $\Omega = \{x \in D; u(t, x) > 0 \text{ pour presque tout } t \in [0, T]\}$ , on obtient que la suite  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge faiblement vers  $\Omega$ .

**Proposition 15.** Si  $A_n$   $\gamma$ -converge vers  $A$ , alors  $A_n$   $\gamma$ -converge faiblement également vers  $A$ .

*Démonstration.* Voir [19]. □

**Proposition 16.** Soit  $J : \mathcal{A}(D) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle qui est décroissante par rapport à l'inclusion c'est à dire si  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  alors  $J(\Omega_1) \geq J(\Omega_2)$ . Alors  $J$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) pour la topologie  $\gamma$ -convergence si et seulement si elle est semi-continue inférieurement (s.c.i) pour la topologie  $\gamma$ -convergence faible.

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Théorème 38** (Buttazzo-Dal Maso). Soit  $J : \mathcal{A}(D) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle satisfaisant

i-  $J$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) pour la topologie  $\gamma$ -convergence.

ii-  $J$  est décroissante par rapport à l'inclusion c'est à dire si  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  alors  $J(\Omega_2) \geq J(\Omega_1)$ .

Alors pour tout  $c \in ]0, +\infty[$ ,

$$\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{A}(D), m_L(\Omega) = c\} \tag{2.53}$$

admet une solution.

*Démonstration.* Voir [15] ou [24]. □

**Théorème 39.** Soit  $H : \mathcal{A}(D) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle définie par

$$H(\Omega) = \int_0^T \int_D g(x, u_\Omega) dx dt; \tag{2.54}$$

avec  $u_\Omega$  solution du problème aux dérivées partielles défini par

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\Omega}{\partial t} - \Delta u_\Omega = f(u_\Omega) & \text{dans } Q \\ u_\Omega \in H_0^1(\Omega) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u_\Omega(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega; \end{cases} \tag{2.55}$$

où  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et  $f$  décroissante. La fonction  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  pour p.p  $x \in \Omega$ ; telle que  $g(x, \cdot)$  est semi-continu inférieure sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $x$  pp dans  $D$  et vérifie de plus  $g(x, s) \geq -a(x) - bs^2$  avec  $a \in L^1(\Omega)$  et  $b$  une constante dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $u_{\Omega_1}$  solution de (2.55) et  $u_{\Omega_2}$  solution de (2.55) avec  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ ; où  $\Gamma_0$  est de classe  $C^2$  et  $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ ;  $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . Supposons de plus que  $f \circ u_{\Omega_1} \leq f \circ u_{\Omega_2}$  sur  $Q_2 = ]0, T[ \times \Omega_2$ . On suppose que  $u_0 \in H_0^1(\Omega_1)$ , et  $u_0 \geq 0$  p.p sur  $\Omega_1$  et non identiquement nulle.

Alors pour tout  $c \in ]0, +\infty[$ ,

$$\min \{H(\Omega); \Omega \in \mathcal{A}(D), m_L(\Omega) = c\} \tag{2.56}$$

admet une solution.

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de voir si la fonctionnelle (2.54) vérifie les hypothèses du théorème de Buttazzo-Dal Maso.

1. Montrons d'abord la condition  $i$ - du théorème de Buttazzo-Dal Maso.

Posons  $u_{\Omega_n} = u_n$  et  $\alpha = \inf\{H(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}(D)\}$ . Nous avons  $\inf\{H(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}(D)\} > -\infty$ , alors il existe une sous suite minimisante  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(D)$  telle que  $H(\Omega_n) \rightarrow \alpha$ .

Soit  $u_n$  solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = f(u_n) & \text{dans } Q_n = ]0, T[ \times \Omega_n, \\ u_n(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega_n) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u_n = u_0 & \text{dans } \Omega_n. \end{cases} \quad (2.57)$$

Considérons la fonction  $\tilde{u}_n$  l'extension de  $u$  défini par

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} u_n & \text{si } x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si } x \in D \setminus \Omega_n, \end{cases}$$

La formulation variationnelle  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(D)$

$$\int_D \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(t, x) \varphi(x) dx + \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx = \int_D f(\tilde{u}_n) \varphi(x) dx.$$

Cette dernière égalité est égale à la suivante

$$\frac{d}{dt} \int_D \tilde{u}_n(t, x) \varphi(x) dx + \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx = \int_D f(\tilde{u}_n) \varphi(x) dx.$$

Et maintenant intégrons par rapport au temps, nous avons

$$\int_0^T d \left( \int_D \tilde{u}_n(t, x) \varphi(x) dx \right) + \int_0^T \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx ds = \int_0^T \int_D f(\tilde{u}_n) \varphi(x) dx ds.$$

Finalement, nous obtenons

$$\int_D \tilde{u}_n(t, x) \varphi(x) dx - \int_D \tilde{u}_n(0, x) \varphi(x) dx + \int_0^T \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx ds - \int_0^T \int_D f(\tilde{u}_n(t, x)) \varphi(x) dx ds = 0.$$

Montrons que la suite  $\tilde{u}_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(D)) \cap C(0, T; L^2(D))$ .

Nous avons  $u_n$  est bornée dans  $C(0, T; H_0^1(\Omega_n))$  mais il se trouve que  $H_0^1(\Omega_n)$  est un sous espace fermé de  $H_0^1(D)$ , séparable comme  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Donc  $\tilde{u}_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(D)) \cap C(0, T; L^2(D))$ .

Puisque  $H_0^1(D)$  est réflexif, alors il existe une sous-suite  $(\tilde{u}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $u^*(t, \cdot)$  telle que  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge faiblement vers  $u^*(t, \cdot)$  dans  $H_0^1(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

Montrons que  $u^*(t, \cdot) \in H_0^1(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

Comme  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge faiblement vers  $u^*(t, \cdot)$  dans  $H_0^1(D)$ , par le théorème de Dirichlet, il existe une sous-suite que nous allons encore noter  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  telle que  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^2(D)$  et donc  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge  $p.p$  vers  $u^*(t, \cdot)$ .

Nous savons que  $u_{n_k} \xrightarrow{p.p} u^*$ . Donc  $u^* u_{n_k} \xrightarrow{p.p} u^* u^*$ .

Comme  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^2(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  on a  $\tilde{u}_{n_k}(0, x) = u_0(x)$  dans  $D$ , en allant à la limite,  $u^*(0, x) = u_0^*(x)$  dans  $D$ . De plus,  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $H_0^1(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Ce qui montre aussi  $\Omega_{n_k} \gamma$ -converge vers  $\Omega$ . Ce qui implique nous avons la  $\gamma$ -convergence faible avec  $\Omega = \{x \in D; u^*(t, x) > 0 \text{ pour presque tout } t \in [0, T]\}$ . Nous avons

$$\int_D u^*(T, x) \varphi(x) dx - \int_D u^*(0, x) \varphi(x) dx + \int_0^T \int_D \nabla u^*(t, x) \nabla \varphi(x) dx dt - \int_0^T \int_D f(u^*) \varphi(x) dx = 0.$$

Ce qui équivaut à écrire au sens faible

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* = f(u^*) & \text{dans } ]0, T[ \times D \\ u^*(t, \cdot) \in H_0^1(D) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u^*(0, x) = u_0 & \text{dans } D, \end{cases} \quad (2.58)$$

Donc  $u^* = u_\Omega$  est solution de (2.55).

Si  $x \in D$  alors  $x \in \Omega$  ou  $x \in \Omega^c$ . Dans  $\Omega$ ,  $(\tilde{u}_{n_k} - u^*)u^* = 0$  p.p et dans  $\Omega^c$   $u^* = 0$  p.p, donc dans tous les deux cas  $(\tilde{u}_{n_k} - u^*)u^* = 0$  et par suite dans  $\Omega^c$ ,  $u^* = 0$  p.p.

On déduit finalement le système au sens faible suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* = f(u^*) & \text{dans } Q, \\ u^*(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0 & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

En utilisant l'hypothèse  $g(x, \cdot)$  est semi-continue inférieure on a  $g(x, u^*(t, x)) \leq \liminf g(x, \tilde{u}_{n_k}(t, x))$  alors en passant à l'intégral on a

$$\int_D g(x, u^*(t, x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_D g(x, \tilde{u}_{n_k}(t, x)) dx,$$

par suite

$$\int_0^T \int_D g(x, u^*(t, x)) dx dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_D g(x, \tilde{u}_{n_k}(t, x)) dx dt.$$

Donc  $H(\Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} H(\Omega_{n_k})$ . Alors la fonctionnelle  $H$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) pour la topologie de la  $\gamma$ -convergence.

2. Montrons maintenant la condition *ii* – du théorème de Buttazzo-Dal Maso.

Soient  $\Omega_1, \Omega_2$  deux sous ensembles de  $\mathbb{R}^N$  tels que  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  et  $\emptyset \neq \Gamma_0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega_1} - f(u_{\Omega_1}) = 0 & \text{dans } Q_1 = ]0, T[ \times \Omega_1, \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 = ]0, T[ \times \Gamma_0 \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \Sigma_1 = ]0, T[ \times \Gamma_1 \\ u_{\Omega_1}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (2.59)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega_2} - f(u_{\Omega_2}) = 0 & \text{dans } Q_2 = ]0, T[ \times \Omega_2, \\ u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 = ]0, T[ \times \Gamma_0 \\ u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 = ]0, T[ \times \Gamma_2 \\ u_{\Omega_2}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega_2; \end{cases} \quad (2.60)$$

ont des solutions faibles; où  $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  et  $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Supposons de plus que  $f \circ u_{\Omega_1} \leq f \circ u_{\Omega_2}$  sur  $Q_2$ .

On considère  $u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}$  et on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}) - \Delta(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}) = f(u_{\Omega_1}) - f(u_{\Omega_2}) & \text{dans } Q_2 = ]0, T[ \times \Omega_2, \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = u_{\Omega_1} & \text{sur } \Sigma_2 \\ (u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (2.61)$$

Par le principe du maximum proposition 5,  $u_{\Omega_1} \geq 0$  dans  $\Omega_1$ . Alors en utilisant le même principe du maximum,  $(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(x) \geq 0$  pour tout  $x \in Q_2$  et aussi  $\max_{\Sigma_1} u_{\Omega_1} \geq u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} \geq 0$ ,

pour tout  $x \in Q_2$ .

Soit  $x_0 \in \Gamma_0$  et  $x = x_0 - \nu h \in \Omega_2$  où  $\nu$  est la normale extérieure sur  $\Gamma_0$  et  $h > 0$ . Par la



proposition 5 on a  $u_{\Omega_1}(t, x_0) - u_{\Omega_2}(t, x_0) = 0$  avec  $u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} \geq 0$  dans  $Q_2$ . Du fait que  $g(x, s)$  est décroissante par rapport à  $s$  alors  $g(x, u_{\Omega_2}) \geq g(x, u_{\Omega_1})$ . Par suite la fonctionnelle  $H(\Omega)$  est décroissante par rapport à l'inclusion c'est à dire puisque  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  alors  $H(\Omega_2) \geq H(\Omega_1)$ .

En s'appuyant sur le théorème de Buttazzo-Dal Maso, on peut conclure que le problème  $\min \{H(\Omega); \Omega \in \mathcal{A}(D), m_L(\Omega) = c\}$  admet une solution.  $\square$

**Exemple 2.** Soit  $k$  un entier,  $k \geq 1$ . L'application  $\Omega \rightarrow \lambda_k(\Omega)$  qui, à un quasi-ouvert  $\Omega$  associe la  $k$ -ième valeur propre du problème de Dirichlet (comptées avec leur ordre de multiplicité) vérifie aussi les hypothèses du théorème 39, pour s'en convaincre, nous invitons le lecteur désireux à consulter [24] et [59].

**Exemple 3.** L'application  $F(A) : \mathcal{A}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par  $F(A) = \text{cap}_L(\Omega \setminus A)$  avec  $\text{cap}_L(\Omega \setminus A)$  la capacité de  $A$  dans  $\Omega$  relative à  $L$  l'opérateur elliptique, vérifie aussi les hypothèses du théorème 39, pour s'en convaincre, nous invitons le lecteur désireux à consulter [24] et [59].

### 2.3.3 Étude d'existence de solution sous la contrainte de la $\gamma$ -convergence avec l'argument de compacité

Ici nous allons affaiblir les hypothèses mais toutefois la fonctionnelle  $J$  reste  $\gamma$ -semi-continue inférieurement pour la topologie de la  $\gamma$ -convergence et on étudie la compacité de  $\mathcal{A}(D)$  pour cette convergence. L'idée est de faire une pénalisation de la fonctionnelle  $J$ . Ce qui nous donne  $F(\Omega) = J(\Omega) + \lambda [m_L(\Omega) - c]^+$ ; où  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  est un facteur de pénalisation et

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + G_0(u_{\Omega}) \right) dx dt.$$

Dans cette sous-section, nous allons étudier un problème de type

$$\min \{F(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}, m_L(\Omega) = c\} \tag{2.62}$$

avec  $F : \mathcal{A}(D) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle de forme sous contrainte d'un problème aux limites paraboliques dont  $u_{\Omega}$  est solution et est défini par

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega} = f(u_{\Omega}) & \text{dans } Q, \\ u_{\Omega}(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u_{\Omega}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

La fonction  $G_0$  est définie par

$$G_0(s) = \int_0^s g_0(x, t) dt, \\ g_0 =: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g_0(\cdot, 0) = 0,$$

$g_0$  est une fonction de Carathéodory et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Nous supposons de plus qu'une fonction de Carathéodory  $h$  est croissante en  $t \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$  on ait

$$|g_0(x, t + s) - g_0(x, s)| \leq h(x, t)$$

presque partout dans  $\Omega$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on ait  $h(\cdot, s) \in L_{loc}^1(\Omega)$ .

**Proposition 17.** On suppose que  $\mathcal{O}$  est muni d'une topologie  $\tau$  pour laquelle

1.  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  est séquentiellement semi-continue inférieurement c'est à dire  $\Omega_n \xrightarrow{\tau} \Omega$  implique que  $F(\Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(\Omega_{n_k})$ .
2. Toute suite  $F$ -bornée est séquentiellement compacte c'est à dire  $\sup_n |F(\Omega_n)| < \infty$  implique qu'il existe  $(\Omega_{n_k})_{k \geq 1}$ ,  $\Omega \in \mathcal{O}$  telle que  $\Omega_{n_k} \xrightarrow{\tau} \Omega$ .

Alors si  $F$  est minorée, il existe  $\Omega^* \in \mathcal{O}$  tel que

$$F(\Omega^*) = \min \{F(\Omega), \Omega \in \mathcal{O}\}.$$

*Démonstration.* Voir [59]. □

**Proposition 18.**  $F : \mathcal{A}(D) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  est semi-continue inférieure faible pour la  $\gamma$ -convergence faible.

*Démonstration.* Posons  $u_{\Omega_n} = u_n$  et  $\alpha = \inf \{F(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}(D)\}$ . Nous avons  $\inf \{F(\Omega), \Omega \in \mathcal{A}(D)\} > -\infty$ , alors il existe une sous suite minimisante  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(D)$  telle que  $F(\Omega_n) \rightarrow \alpha$ .

Soit  $u_n$  solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = f(u_n) & \text{dans } \mathcal{Q}_n = ]0, T[ \times \Omega_n, \\ u_n(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega_n) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u_n = u_0 & \text{dans } \Omega_n. \end{cases} \quad (2.63)$$

Considérons la fonction  $\tilde{u}_n$  l'extension de  $u$  définie par

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} u_n & \text{si } x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si } x \in D \setminus \Omega_n, \end{cases}$$

La formulation variationnelle  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(D)$

$$\int_D \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(t, x) \varphi(x) dx + \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx = \int_D f(\tilde{u}_n) \varphi(x) dx.$$

Cette dernière égalité est égale à la suivante

$$\frac{d}{dt} \int_D \tilde{u}_n(t, x) \varphi(x) dx + \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx = \int_D f(\tilde{u}_n) \varphi(x) dx.$$

Et maintenant intégrons par rapport au temps, nous avons

$$\int_0^T d \left( \int_D \tilde{u}_n(t, x) \varphi(x) dx \right) + \int_0^T \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx ds = \int_0^T \int_D f(\tilde{u}_n) \varphi(x) dx ds.$$

Finalement, nous obtenons

$$\int_D \tilde{u}_n(t, x) \varphi(x) dx - \int_D \tilde{u}_n(0, x) \varphi(x) dx + \int_0^T \int_D \nabla \tilde{u}_n(t, x) \nabla \varphi(x) dx ds - \int_0^T \int_D f(\tilde{u}_n(t, x)) \varphi(x) dx ds = 0.$$

Montrons que la suite  $\tilde{u}_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(D)) \cap C(0, T; L^2(D))$ .

Nous avons  $u_n$  est bornée dans  $C(0, T; H_0^1(\Omega_n))$  mais il se trouve que  $H_0^1(\Omega_n)$  est un sous espace fermé de  $H_0^1(D)$ , séparable comme  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Donc  $\tilde{u}_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(D)) \cap C(0, T; L^2(D))$ .

Puisque  $H_0^1(D)$  est réflexif, alors ils existe une sous-suite  $(\tilde{u}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $u^*(t, \cdot)$  telle que  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge faiblement vers  $u^*(t, \cdot)$  dans  $H_0^1(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

Montrons que  $u^*(t, \cdot) \in H_0^1(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

Comme  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge faiblement vers  $u^*(t, \cdot)$  dans  $H_0^1(D)$ , par le théorème de Dirichlet, il existe une sous-suite que nous allons encore noter  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  telle que  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^2(D)$  et donc  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge  $p.p$  vers  $u^*(t, \cdot)$ .

Nous savons que  $u_{n_k} \xrightarrow{p.p} u^*$ . Donc  $u^* u_{n_k} \xrightarrow{p.p} u^* u^*$ .

Comme  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $L^2(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  on a  $\tilde{u}_{n_k}(0, x) = u_0(x)$  dans  $D$ , en allant à la limite,  $u^*(0, x) = u_0^*(x)$  dans  $D$ . De plus,  $\tilde{u}_{n_k}(t, \cdot)$  converge fortement vers  $u^*$  dans  $H_0^1(D)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Ce qui montre aussi  $\Omega_{n_k}$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega$ .

Ce qui implique nous avons la  $\gamma$ -convergence faible avec

$\Omega = \{x \in D; u(t, x) > 0 \text{ pour presque tout } t \in [0, T]\}$ . Nous avons

$$\int_D u^*(T, x)\varphi(x)dx - \int_D u^*(x)\varphi(x)dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla u^*(t, x)\nabla\varphi(x)dxdt - \int_0^T \int_\Omega f(u^*)\varphi(x)dx = 0.$$

Ce qui équivaut à écrire au sens faible

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* = f(u^*) & \text{dans } ]0, T[ \times D \\ u^*(t, \cdot) \in H_0^1(D) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u^*(\cdot, x) = u_0 & \text{dans } D, \end{cases} \quad (2.64)$$

Donc  $u^*$  est solution de(2.55).

Si  $x \in D$  alors  $x \in \Omega$  ou  $x \in \Omega^c$ . Dans  $\Omega$ ,  $(\tilde{u}_{n_k} - u^*)u^* = 0$   $p.p$  et dans  $\Omega^c$   $u^* = 0$   $p.p$ , donc dans tout les deux cas  $(\tilde{u}_{n_k} - u^*)u^* = 0$  et par suite dans  $\Omega^c$ ,  $u^* = 0$   $p.p$ .

On déduit finalement le système au sens faible suivant pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* = f(u^*) & \text{dans } Q, \\ u^*(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega) \text{ pour presque tout } t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0 & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

Puisque  $\tilde{u}_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H_0^1(D)) \cap C(0, T; L^2(D))$  alors il existe une constante  $M$  tel que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{u}_{n_k}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$$

et en passant à la limite, on a :

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u^*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M.$$

Donc

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u^*|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u_{n_k}|^2.$$

Par le lemme de Fatou on a :

$$\int_D \chi_\Omega G_0(u^*(x))dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\Omega_{n_k}} G_0(\tilde{u}_{n_k}(x))dx.$$

Puisque la mesure de Lebesgue  $m_L$  est semi-continue inférieurement faible alors on a  $m_L(\Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} m_L(\Omega_{n_k})$  On a

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u^*|^2 dx + \int_D \chi_\Omega G_0(u^*) dx \right) dt + \lambda [m_L(\Omega) - c]^+ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega_{n_k}} \frac{1}{2} |\nabla \tilde{u}_{n_k}|^2 dx dt \\ &+ \int_0^T \int_D \chi_{\Omega_{n_k}} G_0(\tilde{u}_{n_k}) dx dt \\ &+ \liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda [m_L(\Omega_{n_k}) - c]^+. \end{aligned}$$

Nous avons  $F(\Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(\Omega_{n_k})$ . □

**Remarque 13.** Remarquons que la fonctionnelle  $F$  est bornée. En effet,  $J(\Omega)$  est positive alors  $J(\Omega) \leq J(D)$  et  $\Omega \subset D$ , alors  $m_L(\Omega) \leq m_L(D)$ . Donc  $F(\Omega) = J(\Omega) + \lambda[m_L(\Omega) - c]^+ \leq J(D) + \lambda[m_L(D) - c]^+$ . Or nous avons  $m_L(D) \leq +\infty$ . Ceci implique que  $F(\Omega) \leq +\infty$ .

**Théorème 40.** Soit  $F : \mathcal{A}(D) \rightarrow (-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle de forme qui est  $\gamma$ -semi-continue inférieure faible. Alors le problème

$$\min \{F(\Omega); \Omega \in \mathcal{A}(D)\} \tag{2.65}$$

admet une solution.

*Démonstration.* Puisque la fonctionnelle de forme  $F$  est  $\gamma$ -semi-continue inférieurement pour la  $\gamma$ -convergence et bornée alors grâce à la proposition 17, le problème (2.65) admet une solution.  $\square$

---

---

## CHAPITRE 3

---

# IDENTIFICATION DE FORMES GÉOMÉTRIQUES

Ce chapitre est l'objectif principal de cette thèse, il traite d'identification de formes géométriques. Le plan de ce chapitre est le suivant, chercher les conditions d'optimalité d'abord par la méthode du champ des vecteurs ensuite par la théorie du minimax et du lagrangien et enfin clôturer ce chapitre par une identification de domaine dans la dernière section en passant par le problème inverse et le principe de comparaison.

### 3.1 Condition d'optimalité

Les conditions d'optimalité nous permettent d'obtenir des informations intéressantes sur le minimum (qui n'est pas connu à l'avance) et aident à le déterminer. On peut écrire des conditions d'optimalité du premier ordre et du deuxième ordre pour une fonctionnelle de forme. Ainsi en dimension finie, une des méthodes de recherche du minimum d'une fonctionnelle  $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  revient à résoudre l'équation non linéaire en général  $\nabla J(x) = 0$  dans  $\mathbb{R}^N$ , puis à faire le tri parmi les solutions pour trouver celles correspondantes au minimum. Quand la variable est une forme, cette équation conduit en général à un problème à frontière libre dit surdéterminé au sens où, en plus de l'équation d'état, qui est à elle seule un problème bien posé, la condition d'optimalité fournit une équation supplémentaire que doit vérifier la solution du problème sur le bord du domaine. En effet, les conditions d'optimalité permettent de caractériser les formes optimales et de calculer des gradients pour mettre en oeuvre une méthode numérique d'optimisation. Il s'agit donc d'une notion fondamentale aussi bien du point de vue théorique que pratique.

Nous allons étudier les conditions d'optimalité du problème d'optimisation de forme suivant

$$\min \{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$$

où  $J$  est une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{O}_\epsilon$  avec

$\mathcal{O}_\epsilon = \{\Omega \subset K \subset D / \text{ouvert et } \Omega \text{ satisfaisant la propriété du } \epsilon\text{-c\^one}\}$  par

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) dx dt$$

où  $u_\Omega$  est la solution du problème aux limites de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\Omega}{\partial t} - \Delta u_\Omega = f(u_\Omega) & \text{dans } Q = ]0, T[ \times \Omega, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Sigma = ]0, T[ \times \partial\Omega \\ u_\Omega(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

La fonction  $G_0$  est définie par

$$G_0(s) = G_0(x, s) = \int_0^s g_0(x, t) dt,$$

$$g_0 =: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g_0(\cdot, 0) = 0$$

avec  $f(u_\Omega) = -g_0(x, u_\Omega)$ .  $g_0$  est une fonction de Carathéodory et croissante sur  $\mathbb{R}$  par rapport à sa deuxième variable.

Nous supposons de plus qu'une fonction de Carathéodory  $h$  est croissante en  $t \in \mathbb{R}$  telle que pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$  et presque partout dans  $\Omega$

$$|g_0(x, t+s) - g_0(x, s)| \leq h(x, t),$$

et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $h(\cdot, s) \in L^1_{loc}(\Omega)$ .

### 3.1.1 Condition d'optimalité par la méthode du champ des vecteurs

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^N$ . Introduisons la famille des perturbations  $\{\Omega_s\}$  de  $\Omega$ , avec  $0 < s < \epsilon$ .  $\Omega$  et  $\Omega_s$  ont les mêmes propriétés topologiques et possèdent la même régularité c'est à dire  $\Omega$  et  $\Omega_s$  sont simplement des domaines de classe  $C^k$ , où  $k \geq 1$ . Donc on peut construire une famille de transformations  $T_s : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  pour  $0 \leq s < \epsilon$  et  $T_s$  une application de  $\Omega$  dans  $\Omega_s$ . Supposons que cette famille de transformations vérifie les conditions suivantes :

- $T_s$  et  $T_s^{-1}$  appartiennent à  $C^k(\bar{D}, \bar{D})$  pour  $0 \leq s < \epsilon$ .
- les applications  $s \mapsto T_s$  et  $s \mapsto T_s^{-1}$  appartiennent à  $C^1([0, \epsilon])$  pour tout  $x \in \bar{D}$ .

Définissons  $\Omega_s$  par  $\Omega_s = T_s(\Omega)$ . Soit  $V$  un champ de vecteur régulier tel qu'il soit défini au point  $x(s)$  par la solution du système différentiel ordinaire

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} x(s, X) = V(s, x(T_s, X)), \\ x(0, X) = X. \end{cases}$$

avec

$$V \in C\left(0, \epsilon; C^k(\bar{D}; \mathbb{R}^N)\right). \quad (3.2)$$

Posons  $x = T_s(y)$ ,  $DT_s$  est le jacobien de  $T_s$  et  $\gamma(s) = |\det(DT_s)|$ .  $\Omega_s = T_s(\Omega)$ .

**Définition 71.** On dit que la fonction  $u_\Omega$  a une dérivée matérielle  $\dot{u}$  et une dérivée de forme  $u'$  en 0 dans la direction  $V$  si les limites suivantes

$$\dot{u} = \lim_{t \searrow 0} \frac{u(\Omega_t) \circ T_t - u(\Omega)}{t}, \quad u' = \lim_{t \searrow 0} \frac{u(\Omega_t) - u(\Omega)}{t}$$

existent respectivement où  $(u(\Omega_t) \circ T_t)(x) = u(\Omega_t)(T_t(x))$ .

Ces expressions sont reliées par la relation suivante

$$u' = \dot{u} - (\nabla u \cdot V) \quad (3.3)$$

pourvu que  $\nabla u \cdot V$  existe dans des espaces fonctionnels adéquats. En général, si  $\dot{u}$  et  $\nabla u \cdot V$  existent dans l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ , alors  $u'$  existe dans ce même espace.

**Proposition 19.** Soit  $\Omega$  la solution du problème d'optimisation de forme  $\min \{J(\omega); \omega \in \mathcal{O}_\varepsilon, |\omega| = V_0, V_0 \text{ est constant}\}$ , alors la dérivée de forme est donnée par

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_\Omega -\frac{\partial u_\Omega}{\partial t} u'_\Omega dy dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \right)^2 V(t, y) \nu d\sigma dt; \quad (3.4)$$

avec  $u'$  la dérivée de forme de  $u$  en 0 dans la direction  $V$ .

*Démonstration.* Nous allons utiliser la dérivation par rapport au domaine dans la direction du vecteur  $V$ , on a la fonctionnelle

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) dx dt$$

alors la fonctionnelle dépendant du domaine perturbé est donnée par

$$J(\Omega_s) = \int_0^T \int_{\Omega_s} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega_s}(t, x)|^2 + G_0(u_{\Omega_s}(t, x)) \right) dx dt.$$

En faisant un changement de variable  $x = T_s(y)$  alors on a

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega(t, T_s(y))|^2 + G_0(u_\Omega(t, T_s(y))) \right) \gamma(s) dy dt.$$

En utilisant la formule de Hadamard

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_\Omega \left\{ \nabla u \nabla u' + g(x, u) u' + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) \cdot V(t, y) \right] \right\} dy dt$$

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) \gamma(0) + \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s) \right\} dy dt;$$

On a  $\gamma(0) = 1$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega_s}(t, x)|^2 + G_0(u_{\Omega_s}(t, x)) \right) &= \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega + g_0 u'_\Omega + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) \frac{\partial}{\partial s} T_s^i \\ &= \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega + g_0 u'_\Omega + \nabla_y \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) V(s_0, y); \end{aligned}$$

aussi on a

$$\frac{\partial}{\partial s} \gamma(s) = \operatorname{div}(V(s_0, y))$$

alors on obtient

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_\Omega \left\{ \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega + g_0 u'_\Omega + \nabla_y \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) V(s_0, y) + \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) \operatorname{div} V(s_0, y) \right\} dy dt.$$

Or en utilisant

$$\operatorname{div}(fV) = \nabla f \cdot V + f \operatorname{div} V. \quad (3.5)$$

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_\Omega \left\{ \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega + g_0 u'_\Omega + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right) \cdot V(s_0, y) \right] \right\} dy dt.$$

En utilisant la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega = \int_\Omega -\Delta u_\Omega u'_\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} u'_\Omega d\sigma.$$

Puisque  $\Omega$  est lipschitzien et en utilisant la formule de la divergence (1.1) on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + G_0(u_{\Omega}) \right) \cdot V(s_0, y) \right] = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + G_0(u_{\Omega}) \right) V(s_0, y) \cdot \nu d\sigma.$$

Aussi au bord  $u_{\Omega} = 0$  implique  $G_0(0) = 0$  et de plus au bord  $u'_{\Omega} = -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} V \nu$ . Alors on a

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_{\Omega} (-\Delta u_{\Omega} + g_0) u'_{\Omega} dy dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \left( -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right) V(s_0, y) \nu d\sigma + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 V(s_0, y) d\sigma.$$

Or dans (3.1)  $-\Delta u_{\Omega} = -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} + f(u_{\Omega})$  alors

$$\begin{aligned} dJ(\Omega, V) &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} + f(u_{\Omega}) + g_0 \right) u'_{\Omega} dy dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 V(s_0, y) \nu d\sigma \\ &\quad + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 V(s_0, y) \nu d\sigma. \end{aligned}$$

Alors on a

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_{\Omega} -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} u'_{\Omega} dy dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 V(s_0, y) \nu d\sigma + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 V(s_0, y) \nu d\sigma.$$

Soient  $x_0 \in \partial\Omega$  et  $x = x_0 - \nu\beta \in \Omega$  avec  $\beta > 0$ . Par le principe du maximum  $u_{\Omega} \geq 0$  dans  $Q$ . Donc  $u_{\Omega}(t, x_0) = 0$  avec  $u_{\Omega}(t, x) > 0$  dans  $Q$ , et puisque  $u_{\Omega}$  est continue alors par le principe du maximum on a

$$\frac{u_{\Omega}(x_0 - \nu\beta) - u_{\Omega}(x_0)}{\beta} \geq 0$$

et en allant à la limite, nous avons

$$\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \geq 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Supposons que  $u_{\Omega} = 0$  sur  $\Sigma$  et considérons que  $\partial\Omega$  est régulier de classe  $C^2$ , alors on a  $\nabla u_{\Omega} = \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \nu$ . On obtient

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_{\Omega} -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} u'_{\Omega} dy dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 V(s_0, y) \nu d\sigma + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 V(s_0, y) \nu d\sigma.$$

Et finalement

$$dJ(\Omega, V) = \int_0^T \int_{\Omega} -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} u'_{\Omega} dy dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 V(s_0, y) \nu d\sigma.$$

□

### 3.1.2 Théorie du minimax et du lagrangien

Dans cette sous-section, on veut donner un sens à la différentielle de  $J(\Omega)$ . On parlera essentiellement de la dérivée par rapport au domaine ou de la semi-différentielle. Nous nous appuyerons sur les travaux récents de M. Delfour. L'approche standard pour minimiser la fonctionnelle sous contraintes décrites par des équations différentielles partielles (EDP) en optimisation de forme, consiste à considérer la formulation minimax qui associe le lagrangien. Elle a été réalisée, premièrement, par M. Delfour et J-P Zolesio [35], [34], développée par Sturm [97], [98] et encore améliorée par Delfour et Sturm [41] et dans un article récent de Delfour [38]. Nous utiliserons le cas des applications multivoques (il est aussi possible de faire



le cas particulier dans le cas des applications univoques) pour lesquelles les solutions d'équations d'états et d'équations de l'adjoint moyenné ne sont pas uniques, pour plus d'amples précisions et d'informations nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux de Delfour et Sturm dans [41] et au récent papier de Delfour [38]. Dans ce travail, nous allons dans un premier temps rappeler la théorie du minimax et du lagrangien ensuite nous allons proposer une application de la théorie du minimax et du lagrangien en calculant la dérivée de forme et la dérivée topologique.

Rappelons d'abord que les théorèmes sur la différentiabilité paramétrique d'un minimax avec ou sans point selle ont une longue histoire. En effet, d'importantes contributions ont été apportées sur cette notion. Ainsi parmi ces contributions, nous pouvons citer l'apport considérable de Correa et Seeger [29] qui ont publié en 1985 un théorème direct sur la différentiabilité du point selle  $h(z)$  d'une fonctionnelle  $L(z, x, y)$  où  $z \in Z$ ,  $Z$  un espace localement convexe, et  $(x, y) \in X \times Y$ ,  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques de Hausdorff. En effet, soient  $U_0$  et  $V_0$  deux sous ensembles non vides des espaces de Hausdorff  $U$  et  $V$  respectivement. Soit  $X$  un espace vectoriel topologique réel localement convexe de Hausdorff. Définissons les fonctions minimax

$$h_1(x) = \sup_{v \in V_0} \inf_{u \in U_0} L(x, u, v) \quad (3.6)$$

$$h_2(x) = \inf_{u \in U_0} \sup_{v \in V_0} L(x, u, v) \quad (3.7)$$

où  $L$  est une fonction à valeur réelle étendue sur  $X \times U \times V$ , et les ensembles de solutions

$$V(x) = \left\{ v \in V_0 / h_1(x) = \inf_{u \in U_0} L(x, u, v) \right\} \quad (3.8)$$

$$U(x) = \left\{ u \in U_0 / h_2(x) = \sup_{v \in V_0} L(x, u, v) \right\}. \quad (3.9)$$

Le résultat principal de Correa-Seeger dans [29] est l'existence et une caractérisation des dérivées directionnelles des fonctions  $h_1$  et  $h_2$ . Pour un point donné  $x_0 \in X$  et une direction  $d \in X$ , nous introduisons la notation suivante pour la dérivée directionnelle et les dérivées directionnelles de Dini de  $L(\cdot, u, v)$

$$d_x L(x_0, u, v : d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{L(x_0 + td, u, v) - L(x_0, u, v)}{t}$$

$$\bar{d}_x L(x_0, u, v : d) = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{L(x_0 + td, u, v) - L(x_0, u, v)}{t}$$

$$\underline{d}_x L(x_0, u, v : d) = \underline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{L(x_0 + td, u, v) - L(x_0, u, v)}{t}.$$

**Définition 72.** Soient  $Z$  et  $T$  des espaces de Hausdorff. La multifonction  $A : T \rightrightarrows Z$  est séquentiellement semi-continue en  $t_0 \in T$  si pour toute suite  $\{t_k\}$  convergeant vers  $t_0$  il existe  $z_0 \in A(t_0)$  et une suite  $\{z_k\}$  s'accumulant en  $z$  tel que  $z_k \in A(t_k)$  pour tout  $k$  suffisamment grand.

**Théorème 41** (Correa-Seeger [29]). *Supposons que les multifonctions  $t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow U(x_0 + td)$  et  $t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow V(x_0 + td)$  sont séquentiellement semi-continues en 0 et que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(P<sub>1</sub>) *Il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $(u, v) \in (U_0, V_0)$ , la fonction  $t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow L(x_0 + td, u, v)$  est finie et continue sur  $[0, \delta]$ .*

(P<sub>2</sub>) *Pour tout  $u_0 \in U(x_0)$ , la fonction  $(t, v) \in \mathbb{R}^+ \times V_0 \rightarrow \underline{d}_x L(x_0 + td, u, v : d)$  est finie et semi-continue supérieure en  $\{0\} \times V(x_0)$ . Pour tout  $v_0 \in V(x_0)$ , la fonction  $(t, u) \in \mathbb{R}^+ \times U_0 \rightarrow \bar{d}_x L(x_0 + td, u, v : d)$  est finie et semi-continue inférieure en  $\{0\} \times U(x_0)$ .*

(P<sub>3</sub>) Il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $h_1(x_0 + td) = h_2(x_0 + td)$  pour tout  $t \in [0, \delta[$ . Cette valeur est notée par  $h(x_0 + td)$ .

Alors, la dérivée directionnelle  $d_h(x_0; d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(x_0 + td) - h(x_0)}{t}$  existe et est caractérisée par

$$d_h(x_0; d) = \sup_{v \in V(x_0)} \inf_{u \in U(x_0)} d_x L(x_0, u, v; d) = \inf_{u \in U(x_0)} \sup_{v \in V(x_0)} L(x_0, u, v; d). \quad (3.10)$$

Démonstration. Voir [29]. □

**Définition 73.** Soit  $D \subset \mathbb{R}^N$  avec  $D \neq \emptyset$ , considérons l'ensemble  $\mathcal{P} = \{\Omega : \Omega \subset D\}$  sous ensemble de  $D$ . Considérons aussi la fonctionnelle de forme  $J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{P}$ . La semi-dérivée de forme Eulérienne de  $J$  dans  $\Omega$  dans la direction  $V$  est définie par

$$dJ(\Omega; V) = \lim_{t \searrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}. \quad (3.11)$$

Rappelons la définition du lagrangien

**Définition 74.** Soit  $Y$  un espace vectoriel,  $X$  un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel. On appelle le lagrangien une fonction de la forme

$$\begin{aligned} [0, \tau] \times X \times Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto G(t, x, y), \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

et l'application  $y \mapsto G(t, x, y)$  est affine.

On associe au paramètre  $t$  la paramétrisation du minimax

$$t \mapsto g(t) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(t, x, y) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.12)$$

et

$$dg(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \quad (3.13)$$

Quand les limites existent, nous pouvons utiliser les notations suivantes :

$$d_t G(0, x, y) = \lim_{t \searrow 0} \frac{G(t, x, y) - G(0, x, y)}{t} \quad (3.14)$$

$$\varphi \in X, \quad d_x G(t, x, y; \varphi) = \lim_{\theta \searrow 0} \frac{G(t, x + \theta\varphi, y) - G(t, x, y)}{\theta} \quad (3.15)$$

$$\psi \in Y, \quad d_y G(t, x, y; \psi) = \lim_{\theta \searrow 0} \frac{G(t, x, y + \theta\psi) - G(t, x, y)}{\theta}. \quad (3.16)$$

Les notations  $t \searrow 0$  et  $\theta \searrow 0$  signifient que  $t$  et  $\theta$  tendent vers 0 à droite.

Puisque  $G(t, x, y)$  est affine en  $y$ , pour tout  $(t, x, y) \in [0, \tau] \times X \times Y$ ,

$$\forall y, \psi \in Y, \quad d_y G(t, x, y; \psi) = G(t, x, \psi) - G(t, x, 0) = d_y G(t, x, 0; \psi). \quad (3.17)$$

L'équation variationnelle est l'équation d'état à  $t \geq 0$  : est de trouver

$$x^t \in X \text{ tel que pour tout } \psi \in Y, \quad d_y G(t, x^t, 0; \psi) = 0, \quad (3.18)$$

et l'ensemble des solutions (états) à  $t \geq 0$  est donné par

$$E(t) = \{x^t \in X : \forall \varphi \in Y, \quad d_y G(t, x^t, 0; \varphi) = 0\}. \quad (3.19)$$

L'équation d'état adjoint standard à  $t \geq 0$  : est de trouver

$$p^t \in Y \text{ tel que pour tout } \varphi \in X, d_x G(t, x^t, p^t; \varphi) = 0, \quad (3.20)$$

et  $Y(t, x^t)$  est l'ensemble des solutions d'états adjoints à  $t \geq 0$  que nous expliciterons plus tard. Enfin, l'ensemble des minimiseurs pour le minimax est donné par

$$X(t) = \left\{ x^t \in X : g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(t, x, y) = \sup_{y \in Y} G(t, x^t, y) \right\}.$$

On a le lemme suivant :

**Lemme 15** (Contraintes sur l'infimum et le minimax). On a les assertions suivantes :

(i)

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(t, x, y) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0).$$

(ii) Le minimax  $g(t) = +\infty$  si et seulement si  $E(t) = \emptyset$ . Et dans ce cas on a :  $X(t) = X$ .

(iii) Si  $E(t) \neq \emptyset$ , alors

$$X(t) = \left\{ x^t \in E(t) : G(t, x^t, 0) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0) \right\} \subset E(t) \quad (3.21)$$

et  $g(t) < +\infty$ .

*Démonstration.* (i) Puisque  $y \mapsto G(t, x, y)$  affine, alors pour tout  $(t, x, y)$

$$G(t, x, y) = G(t, x, 0) + d_y G(t, x, 0; y)$$

on a alors

$$\sup_{y \in Y} G(t, x, y) = G(t, x, 0) + \sup_{y \in Y} d_y G(t, x, 0; y) = \begin{cases} G(t, x, 0), & \text{si } x \in E(t) \\ +\infty & \text{si } x \in X \setminus E(t). \end{cases}$$

Ceci implique que

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(t, x, y) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0).$$

(ii) Si  $g(t) = +\infty$  alors pour tout  $x \in X$ ,  $\sup_{y \in Y} G(t, x, y) = +\infty$  et

$$+\infty = G(t, x, 0) + \sup_{y \in Y} d_y G(t, x, 0; y) \Rightarrow \sup_{y \in Y} d_y G(t, x, 0; y) = +\infty.$$

Ceci implique  $\exists y \in Y$  tel que  $d_y G(t, x, 0; y) > 0$  et alors on a  $\forall x \in X, x \notin E(t)$  et  $E(t) = E(t) \cap X = \emptyset$ . Inversement, de la condition (i) et par la définition de l'infimum, on a :

$$E(t) = \emptyset \Rightarrow g(t) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0) = +\infty.$$

(iii) Si  $E(t) \neq \emptyset$  et  $x^t \in X(t)$  et  $x^t \in E(t)$ , de par la condition (i),

$$G(t, x^t, 0) \leq \sup_{y \in Y} G(t, x^t, y) = g(t) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0) \leq +\infty.$$

Si  $x^t \notin E(t)$ ,  $\sup_{y \in Y} d_y G(t, x^t, 0; y) = +\infty$  et

$$g(t) = \sup_{y \in Y} d_y G(t, x^t, y) = G(t, x, 0) + \sup_{y \in Y} d_y G(t, x, 0; y) = +\infty$$

ce qui contredit le fait que  $g(t)$  soit fini. Donc  $X(t) \subset E(t)$  et

$$G(t, x^t, 0) \leq \sup_{y \in Y} G(t, x^t, y) = g(t) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0) \leq G(t, x^t, 0)$$

implique que

$$x^t \in E(t), \quad g(t) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0).$$

Inversement, s'il existe  $x^t \in E(t)$  tel que

$$G(t, x^t, 0) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0)$$

donc, pour tout  $y \in Y$ ,  $d_y G(t, x^t, 0; y) = 0$ ,  $G(t, x^t, y) = G(t, x^t, 0)$  et de la condition (i)

$$\sup_{y \in Y} G(t, x^t, y) = G(t, x^t, 0) = \inf_{x \in E(t)} G(t, x, 0) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(t, x, y)$$

et  $x^t \in X(t)$ . □

### Hypothèse $H_0$

Soit  $X$  un espace vectoriel.

(i) Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $x^0 \in X(0)$ ,  $x^t \in X(t)$ , et  $y \in Y$ , la fonction

$$[0, \tau] \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.22}$$

$$s \mapsto G(t, x^0 + s(x^t - x^0), y) \tag{3.23}$$

est absolument continue. Ceci implique que, presque pour tout  $s$ , la dérivée existe et est égale à  $d_x G(t, x^0 + s(x^t - x^0), y; x^t - x^0)$  et qu'elle est l'intégrale de sa dérivée. En particulier

$$G(t, x^t, y) = G(t, x^0, y) + \int_0^1 d_x G(t, x^0 + s(x^t - x^0), y; x^t - x^0) ds \tag{3.24}$$

(ii) Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $x^0 \in X(0)$ ,  $x^t \in X(t)$ , et  $y \in Y$ ,  $\varphi \in X$ , et pour presque tout  $s \in (0, 1)$ ,  $d_x G(t, x^0 + s(x^t - x^0), y; \varphi)$  existe et la fonction  $s \mapsto d_x G(t, x^0 + s(x^t - x^0), y; \varphi) \in L^1(0, 1)$ .

**Définition 75.** Soient  $x^0 \in X(0)$  et  $x^t \in X(t)$ , l'équation d'état adjoint moyenné est de trouver

$$y^t \in Y, \quad \forall \varphi \in X, \quad \int_0^1 d_x G(t, x^0 + s(x^t - x^0), y^t; \varphi) ds = 0 \tag{3.25}$$

et l'ensemble des solutions est donné par  $Y(t, x^0, x^t)$ .

Clairement,  $Y(0, x^0, x^0)$  se réduit à l'ensemble de l'équation standard adjoint  $Y(0, x^0)$  à  $t = 0$ . Le résultat suivant est une extension du théorème de Correa-Seeger [29], dans ce cas les ensembles  $X(t) = \{x^t\}$  et  $Y(t, x^0, x^t) = \{y^t\}$  sont non nuls et des singletons.

**Théorème 42** (K. Sturm [97], [98]). *Soit  $Y$  un espace vectoriel,  $X$  un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel. Considérons le lagrangien*

$$\begin{aligned} [0, \tau] \times X \times Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto G(t, x, y), \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

et l'application  $y \mapsto G(t, x, y)$  est affine. Supposons que  $H_0$  et les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $g(t)$  est finie,  $X(t) = \{x^t\}$  et  $Y(t, x^0, x^t) = \{y^t\}$  sont des singletons;

(H<sub>2</sub>)  $d_t G(t, x^0, y)$  existe pour tout  $t \in [0, \tau]$  et tout  $y \in Y$ ;

(H<sub>3</sub>) La limite suivante existe

$$\lim_{s \searrow 0, t \searrow 0} d_t G(s, x^0, y^t) = d_t G(0, x^0, y^0). \quad (3.26)$$

Alors  $dg(0)$  existe et

$$dg(0) = d_t G(0, x^0, y^0).$$

*Démonstration.* De la condition (H<sub>2</sub>),  $d_t G(t, x^0, y)$ , existe pour tout  $t \in [0, \tau]$  et tout  $y \in Y$ ; Donc, il existe  $\theta_t \in (0, 1)$  tel que

$$\begin{aligned} G(t, x^0, y^t) - G(t, x^0, y^0) &= G(0, x^0, y^t) + t d_t G(\theta_t t, x^0, y^t) - G(t, x^0, y^0) \\ &= d_y G(t, x^0, 0; y^t - y^0) + t d_t G(\theta_t t, x^0, y^t); \end{aligned}$$

Or  $d_y G(t, x^0, 0; y^t - y^0) = 0$  donc

$$G(t, x^0, y^t) - G(t, x^0, y^0) = t d_t G(\theta_t t, x^0, y^t)$$

implique que

$$\frac{G(t, x^0, y^t) - G(t, x^0, y^0)}{t} = d_t G(\theta_t t, x^0, y^t).$$

De l'hypothèse (H<sub>3</sub>)

$$\lim_{s \searrow 0, t \searrow 0} d_t G(s, x^0, y^t) = d_t G(0, x^0, y^0) \quad (3.27)$$

Donc finalement

$$dg(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{G(t, x^0, y^t) - G(0, x^0, y^0)}{t} = d_t G(0, x^0, y^0). \quad (3.28)$$

□

Le théorème suivant est une extension du théorème précédent de Sturm avec seulement une condition de différentiabilité locale à  $t = 0$ . Ici l'originalité est l'apparition d'un terme supplémentaire  $R(0, x^0, y^0)$ .

**Théorème 43** (Sturm [97], Sturm-Delfour [41]). *Soit  $Y$  un espace vectoriel,  $X$  un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel. Considérons le lagrangien*

$$\begin{aligned} [0, \tau] \times X \times Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto G(t, x, y), \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

et l'application  $y \mapsto G(t, x, y)$  est affine. Supposons que  $H_0$  et les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $g(t)$  est finie,  $X(t) = \{x^t\}$  et  $Y(t, x^0, x^t) = \{y^t\}$  sont des singletons;

(H'<sub>2</sub>)  $d_t G(t, x^0, y)$  existe;

(H'<sub>3</sub>) La limite suivante existe

$$R(0, x^0, y^0) = \lim_{t \searrow 0} d_y G \left( t, x^0, 0; \frac{y^t - y^0}{t} \right). \quad (3.29)$$

Alors  $dg(0)$  existe et

$$dg(0) = d_t G(0, x^0, y^0) + R(0, x^0, y^0).$$

*Démonstration.* Rappelons que

$$g(t) = G(t, x^t, y^t) = G(t, x^0, y^t).$$

$$\begin{aligned} g(t) - g(0) &= G(t, x^0, y^t) - G(0, x^0, y^0) \\ &= G(t, x^0, y^0) + d_y G(t, x^0, 0; y^t - y^0) - G(0, x^0, y^0), \end{aligned}$$

implique

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} = d_y G\left(t, x^0, 0; \frac{y^t - y^0}{t}\right) + \frac{G(t, x^0, y^0) - G(0, x^0, y^0)}{t}$$

alors de l'hypothèse  $(H'_2)$   $d_t G(t, x^0, y)$  existe et de l'hypothèse  $(H'_3)$  la limite suivante existe

$$\lim_{t \searrow 0} d_y G\left(t, x^0, 0; \frac{y^t - y^0}{t}\right).$$

Donc

$$dg(0) = \lim_{t \searrow 0} d_y G\left(t, x^0, 0; \frac{y^t - y^0}{t}\right) + d_t G(0, x^0, y^0).$$

□

**Remarque 14.** La condition  $(H'_3)$  est optimal car sous l'hypothèse  $(H_1)$

$$dg(0) \text{ existe} \iff \lim_{t \searrow 0} d_y G\left(t, x^0, 0; \frac{y^t - y^0}{t}\right) \text{ existe.}$$

Les hypothèses  $(H'_2)$  et  $(H'_3)$  sont faibles et sont plus générales que  $(H_2)$  et  $(H_3)$  : en effet  $(H'_2)$  assume seulement que  $d_t G(t, x^0, y)$  existe alors  $(H_2)$  assume que  $d_t G(t, x^0, y)$ , existe pour tout  $t \in [0, \tau]$  et tout  $y \in Y$ ;

en outre l'hypothèse  $(H_3)$  assume que

$$\lim_{s \searrow 0, t \searrow 0} d_t G(t, x^0, y^t) = d_t G(0, x^0, y^0)$$

ce qui implique que

$$R(0, x^0, y^0) = \lim_{t \searrow 0} d_y G\left(t, x^0, 0; \frac{y^t - y^0}{t}\right) = 0.$$

Donc la condition  $(H'_3)$  avec  $R(0, x^0, y^0) = 0$  est faible et en plus est plus générale que  $(H_3)$  quand la limite n'est pas 0.

L'utilisation de l'adjoint moyenné a révélé l'utilisation possible d'un terme supplémentaire et a fourni une expression plus simple de la première hypothèse  $(H_3)$ . Il s'avère que le terme supplémentaire peut également être obtenu en utilisant l'adjoint standard à  $t = 0$ , simplifiant considérablement la vérification de cette condition.

**Théorème 44** (Delfour [38]). *Soit  $Y$  un espace vectoriel,  $X$  un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel. Considérons le lagrangien*

$$\begin{aligned} [0, \tau] \times X \times Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto G(t, x, y), \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

et l'application  $y \mapsto G(t, x, y)$  est affine. Supposons que  $H_0$  et les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$(H_1)$  Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $g(t)$  est finie,  $X(t) = \{x^t\}$  et  $Y(t, x^0) = \{p^0\}$  sont des singletons;

$(H_2'')$   $d_t G(0, x^0, y^0)$  existe ;

$(H_3'')$  La limite suivante existe

$$R(x^0, p^0) = \lim_{t \searrow 0} \int_0^1 d_x G \left( t, x^0 + \theta(x^t - x^0), p^0; \frac{y^t - y^0}{t} \right) d\theta. \quad (3.30)$$

Alors  $dg(0)$  existe et

$$dg(0) = d_t G(0, x^0, p^0) + R(x^0, p^0).$$

*Démonstration.* Rappelons que  $g(t) = G(t, x^t, y)$  et  $g(0) = G(0, x^0, y)$  pour tout  $y \in Y$ , alors pour l'état adjoint moyenné  $p^0$  à  $t = 0$

$$g(t) - g(0) = G(t, x^t, p^0) - G(t, x^0, p^0) + (G(t, x^0, p^0) - G(0, x^0, p^0)).$$

Divisons cette dernière égalité par  $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(0)}{t} &= \frac{G(t, x^t, p^0) - G(t, x^0, p^0)}{t} + \frac{G(t, x^0, p^0) - G(0, x^0, p^0)}{t} \\ &= \int_0^1 d_x G \left( t, x^0 + \theta(x^t - x^0), p^0; \frac{y^t - y^0}{t} \right) d\theta + \frac{G(t, x^0, p^0) - G(0, x^0, p^0)}{t}. \end{aligned}$$

De plus, au regard de la condition  $(H_2'')$ , la limite  $dg(0)$  existe si et seulement si la limite du premier terme existe. Donc

$$dg(0) = \lim_{t \searrow 0} \int_0^1 d_x G \left( t, x^0 + \theta(x^t - x^0), p^0; \frac{y^t - y^0}{t} \right) d\theta + d_t G(0, x^0, p^0)$$

et l'existence de la première limite remplace la condition  $(H_3')$ . □

**Remarque 15.** (i) L'hypothèse  $(H_3'')$  semble moins exigeante que  $(H_3')$  puisqu'elle requiert seulement l'existence de l'adjoint standard  $p^0$  à  $t = 0$  tandis que les hypothèses  $(H_3)$  et  $(H_3')$  nécessitent l'existence de l'adjoint moyenné  $y^t$  et l'étude du rapport différentiel  $\frac{y^t - y^0}{t}$  pour un petit  $t \geq 0$  et qui tend vers 0.

(ii) (Principe de séparation) Le théorème 44 sépare aussi le système état/état adjoint  $(x^0, p^0)$  à  $t = 0$  de l'étude du rapport différentiel  $\frac{x^t - x^0}{t}$  de l'état. Par exemple, le couple  $(x^0, p^0)$  est indépendant du fait que nous calculons une semi-différentielle par rapport à la forme ou à la topologie.

Nous donnons des théorèmes généraux pour l'existence et les expressions de  $dg(0)$  dans le cas multivoque où seule une dérivée de  $g$  est attendue. Cette généralisation permet de calculer la dérivée de forme ou la dérivée topologique d'une fonction objectif sous contrainte d'un problème aux limites non linéaires. Ainsi le corollaire 8 peut être appliqué aux problèmes aux limites non linéaires.

**Théorème 45** (Delfour [38]). *Soit  $Y$  un espace vectoriel,  $X$  un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel. Considérons le lagrangien*

$$\begin{aligned} [0, \tau] \times Y \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto G(t, x, y), \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

et l'application  $y \mapsto G(t, x, y)$  est affine. Supposons que  $(H_0)$  et les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (H<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $X(t) \neq \emptyset$ ,  $g(t)$  est finie, et pour tout  $x^t \in X(t)$  et  $x^0 \in X(0)$ ,  $Y(t, x^0, x^t) \neq \emptyset$ ;  
 (H<sub>2</sub>) Pour tout  $x^0 \in X(0)$  et  $y \in Y(0, x)$ ,  $d_t G(t, x, y)$  existe ;  
 (H<sub>3</sub>) Pour tout  $x^0 \in X(0)$ , il existe une fonction  $p \mapsto R(x, p) : Y(0, x) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour toute suite  $t_n \rightarrow 0$ ,  $0 < t_n < \tau$ ,

- (i) il existe  $x^0 \in X(0)$  tel que pour tout  $p \in Y(0, x^0)$ , il existe une sous suite  $\{t_{n_k}\}$  de  $\{t_n\}$  et  $x^{t_{n_k}} \in X(t_{n_k})$  tel que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 d_x G \left( t_{n_k}, x^0 + \theta(x^{t_{n_k}} - x^0), p^0; \frac{x^{t_{n_k}} - x^0}{t_{n_k}} \right) \geq R(x^0, p^0); \quad (3.31)$$

- (ii) il existe  $x^0 \in X(0)$  tel que pour tout  $p \in Y(0, x^0)$ , il existe une sous suite  $\{t_{n_k}\}$  de  $\{t_n\}$  et  $x^{t_{n_k}} \in X(t_{n_k})$  tel que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 d_x G \left( t_{n_k}, x^0 + \theta(x^{t_{n_k}} - x^0), p^0; \frac{x^{t_{n_k}} - x^0}{t_{n_k}} \right) \leq R(x^0, p^0); \quad (3.32)$$

Alors  $dg(0)$  existe et il existe  $x^0 \in X(0)$  et  $y^0 \in Y(0, x^0)$  tel que

$$\begin{aligned} dg(0) &= d_t G(0, x^0, y^0) + R(x^0, y^0) = \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, y) + R(x^0, y) \\ &= \inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0, x)} d_t G(0, x, y) + R(x, y). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Puisque  $g(t)$  est finie,  $E(t) \neq \emptyset$ . De plus,  $X(t) \neq \emptyset$ ,  $X(t)$  est l'ensemble des minimiseurs de  $G(t, x, 0)$  sur  $E(t)$ . Le rapport différentiel peut être écrit de la manière suivante :  $x^0 \in X(0)$ ,  $p \in Y(0, x^0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(0)}{t} &= \frac{G(t, x^t, p) - G(0, x^0, p)}{t} \\ &= \frac{G(t, x^t, p) - G(t, x, p)}{t} + \frac{G(t, x, p) - G(0, x^0, p)}{t} \\ &= \int_0^1 d_x G \left( t, x + \theta(x^t - x), p^0; \frac{x^t - x}{t} \right) d\theta + \frac{G(t, x, p) - G(0, x^0, p)}{t}. \end{aligned}$$

Maintenant, introduisons

$$\underline{dg}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{t \searrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}, \quad \bar{dg}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{t \searrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}.$$

À ce niveau, notre objectif est de montrer que ces limites existent et sont égales.

- (a) il existe suite  $t_n \rightarrow 0$ ,  $0 < t_n < \tau$ , tel que

$$\frac{g(t_n) - g(0)}{t_n} \rightarrow \underline{dg}(0).$$

En utilisant l'hypothèse (H<sub>3</sub>) (i), il existe  $x^0 \in X(0)$  tel que pour tout  $p \in Y(0, x^0)$ , il existe une sous suite  $\{t_{n_k}\}$  de  $\{t_n\}$  et  $x^{t_{n_k}} \in X(t_{n_k})$  tel que

$$\begin{aligned} \underline{dg}(0) &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 d_x G \left( t_{n_k}, x^0 + \theta(x^{t_{n_k}} - x^0), p^0; \frac{x^{t_{n_k}} - x^0}{t_{n_k}} \right) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{G(t_{n_k}, x, p) - G(0, x^0, p)}{t_{n_k}} \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 d_x G \left( t_{n_k}, x^0 + \theta(x^{t_{n_k}} - x^0), p^0; \frac{x^{t_{n_k}} - x^0}{t_{n_k}} \right) + d_t G(0, x^0, p) \\ &\geq R(x^0, p^0) + d_t G(0, x^0, p). \end{aligned}$$



En effet, il existe  $x^0 \in X(0)$  tel que pour tout  $p \in Y(0, x^0)$ ,

$$\underline{d}g(0) = R(x^0, p^0) + d_t G(0, x^0, p).$$

Considérons le suprémum par rapport à  $p \in Y(0, x^0)$ , alors il existe  $x^0 \in X(0)$  tel que

$$\underline{d}g(0) \geq \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0)$$

et on obtient notre première estimation

$$\underline{d}g(0) \geq \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0) \geq \inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0). \quad (3.33)$$

(b) il existe suite  $t_n \rightarrow 0$ ,  $0 < t_n < \tau$ , tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(t_n) - g(0)}{t_n} = \bar{d}g(0).$$

En utilisant l'hypothèse  $(H_3)$  (i), il existe  $x^0 \in X(0)$  tel que pour tout  $p \in Y(0, x^0)$ , il existe une sous suite  $\{t_{n_k}\}$  de  $\{t_n\}$  et  $x^{t_{n_k}} \in X(t_{n_k})$  tel que

$$\begin{aligned} \bar{d}g(0) &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 d_x G \left( t_{n_k}, x^0 + \theta(x^{t_{n_k}} - x^0), p^0; \frac{x^{t_{n_k}} - x^0}{t_{n_k}} \right) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{G(t_{n_k}, x, p) - G(0, x^0, p)}{t_{n_k}} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 d_x G \left( t_{n_k}, x^0 + \theta(x^{t_{n_k}} - x^0), p^0; \frac{x^{t_{n_k}} - x^0}{t_{n_k}} \right) + d_t G(0, x^0, p) \\ &\leq R(x^0, p^0) + d_t G(0, x^0, p). \end{aligned}$$

En effet, pour tout  $x^0 \in X(0)$ , il existe  $p \in Y(0, x^0)$ , tel que

$$\bar{d}g(0) = R(x^0, p^0) + d_t G(0, x^0, p)$$

Considérons l'infimum par rapport à  $x^0 \in X(0)$  alors

$$\bar{d}g(0) \leq \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0). \quad (3.34)$$

et on obtient notre deuxième estimation

$$\underline{d}g(0) \leq \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0) \leq \inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0). \quad (3.35)$$

(c) En combinant les inégalités (3.33) et (3.35), il existe  $\hat{x}^0 \in X(0)$  tel que

$$\begin{aligned} \underline{d}g(0) &\geq \sup_{y \in Y(0, \hat{x}^0)} d_t G(0, \hat{x}^0, p) + R(0, \hat{x}^0, p^0) \\ &\geq \inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0) \geq \bar{d}g(0) \geq \underline{d}g(0). \end{aligned}$$

Alors,  $d_g(0)$  existe et il existe  $\hat{x}^0 \in X(0)$  tel que

$$d_g(0) = \sup_{y \in Y(0, \hat{x}^0)} d_t G(0, \hat{x}^0, p) + R(0, \hat{x}^0, p^0) = \inf_{x \in X(0)} \sup_{y \in Y(0, x^0)} d_t G(0, x^0, p) + R(x^0, p^0). \quad (3.36)$$

Mais on peut avoir plus. De (a), nous avons montré que

$$\exists \hat{x}^0 \in X(0), \forall y \in Y(0, x^0), \underline{d}g(0) \geq d_t G(0, x^0, y) + R(x^0, y^0). \quad (3.37)$$

De (b), nous avons montré que

$$\forall x^0 \in X(0), \exists y \in Y(0, x^0), \bar{d}g(0) \leq d_t G(0, x^0, y) + R(x^0, y^0).$$

En particulier, pour  $\hat{x}^0 \in X(0)$ , il existe  $\forall \hat{y} \in Y(0, \hat{x}^0)$

$$\bar{d}g(0) \leq d_t G(0, \hat{x}^0, \hat{y}) + R(\hat{x}^0, \hat{y}^0).$$

Prenons  $y = \hat{y}^0$  dans (3.37),  $\underline{d}g(0) \geq d_t G(0, \hat{x}^0, \hat{y}) + R(\hat{x}^0, \hat{y}^0)$  et  $\underline{d}g(0) \geq d_t G(0, \hat{x}^0, \hat{y}) + R(\hat{x}^0, \hat{y}^0) \geq \bar{d}g(0)$  implique que  $dg(0) = d_t G(0, \hat{x}^0, \hat{y}) + R(\hat{x}^0, \hat{y}^0)$  et ce qui achève la conclusion.  $\square$

Le corollaire suivant est celui que l'on utilisera pour le calcul de la dérivée de forme et de la dérivée topologique.

**Corollaire 8** (Delfour [38]). Considérons le Lagrangien

$$\begin{aligned} [0, \tau] \times Y \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto G(t, x, y), \tau > 0, \end{aligned}$$

où  $Y$  et  $X$  sont des espaces vectoriels, la fonction  $y \mapsto G(t, x, y)$  est affine. Supposons que  $(H_0)$  et les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$(H_1)$  pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $X(t) \neq \emptyset$ ,  $g(t)$  est finie, et pour tout  $x \in X(0)$ ,  $Y(0, x) \neq \emptyset$ ;

$(H'_2)$  pour tout  $x \in X(0)$  et  $p \in Y(0, x)$ ,  $d_t G(0, x, p)$  existe;

$(H'_3)$  il existe  $x \in X(0)$  et  $p \in Y(0, x)$  telle que la limite suivante existe

$$R(x^0, p^0) \stackrel{def}{=} \lim_{t \searrow 0} \int_0^1 d_x G \left( t, x^0 + \theta(x^t - x^0), p^0; \frac{x^t - x^0}{t} \right); \quad (3.38)$$

Alors,  $dg(0)$  existe et il existe  $x \in X(0)$  et  $p \in Y(0, x)$  tel que

$$dg(0) = d_t G(0, x^0, p^0) + R(x^0, p^0).$$

*Démonstration.* Voir [38].  $\square$

### 3.1.3 Dérivée de forme

Pour  $V \in C^0([0, \tau]; C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ ,  $\tau > 0$  et le difféomorphisme  $T_s(V)(\Omega) = T_s(\Omega) = \Omega_s$ .

$$\frac{d}{ds} T_s(V) = V(s, T_s(X)), T_0(X) = X, \frac{dT_s}{ds} = V(s) \circ T_s, T_0 = I, \quad (3.39)$$

où  $V(s)(X) = V(s, X)$  et  $I$  est la matrice identité dans  $\mathbb{R}^N$ . De plus,  $\gamma_s = \det DT_s$ ,  $DT_s$  est la matrice jacobienne et

$$\frac{d}{ds} DT_s = DV(s) \circ T_s DT_s, DT_0 = I, \frac{d}{ds} \gamma_s = \text{div} V(s) \circ T_s \gamma_s, J_0 = 1, \quad (3.40)$$

où  $DV(s)$  et  $DT_s$  sont les matrices jacobiennes respectivement de  $V(s)$  et de  $T_s$ . Nous utiliserons les notations suivantes

$$V_s = V(s) \circ T_s, V(s)(X) = V(s, T_s(X)), l(s)(X) = T_s(X) - X.$$

Utilisons ces propriétés suivantes qui nous viennent de [36] que nous allons regrouper dans le lemme suivant;

**Lemme 16.** Supposons que  $V \in C^0([0, \tau]; C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ , alors  $l \in C^0([0, \tau]; C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ . Pour  $\tau > 0$  assez grand,  $\gamma_s = \det DT_s = |\det DT_s| = |\gamma_s|$ ,  $0 < s < \tau$ ,  $A(s) = \gamma_s DT_s^{-1} (DT_s^{-1})^*$ , \* avec la transposée, et il existe des constantes  $0 < \alpha < \beta$  tels que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \alpha |\xi|^2 \leq A(s) \xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2 \text{ et } \alpha < \gamma_s < \beta. \quad (3.41)$$

- (i) Si  $s$  tend vers 0, alors  $V_s \rightarrow V(0)$  dans  $C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $DT_s \rightarrow I$  dans  $C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $\gamma_s \rightarrow 1$  dans  $C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $\frac{DT_s - I}{s}$  est borné dans  $C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $\frac{\gamma_s - 1}{s}$  est borné dans  $C_0^0(\mathbb{R}^N)$ .
- (ii) Si  $s$  tend vers 0,  $A(s) \rightarrow I$  dans  $C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $\frac{A(s) - I}{s}$  est borné dans  $C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ,  $A'(s) = \text{div} V_s I - DV_s - DV_s^* \rightarrow A'(0) = \text{div} V(0) - DV(0) - DV(0)^*$  dans  $C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ , où  $DV_s$  est la matrice jacobienne de  $V_s$  et  $DV_s^*$  est la transposée de  $DV_s$ .
- (iii) Soit  $h \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , si  $s$  tend vers 0,  $h \circ T_s \rightarrow h$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\frac{h \circ T_s - h}{s}$  est borné dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\nabla h \cdot V_s \rightarrow \nabla h \cdot V(0)$ .

*Démonstration.* Voir [36]. □

**Lemme 17.** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Pour toute fonction  $u$  définie p.p sur  $\Omega$ , on définit  $(Bu)(x) = g(u(x))$ . On suppose que si  $u \in L^p(\Omega)$ , on a  $Bu \in L^q(\Omega)$ . Il existe alors  $a \geq 0, b \geq 0$  tels que

$$\forall s \in \mathbb{R}, |g(s)| \leq a + b|s|^{p/q}.$$

En particulier  $B$  est continu de  $L^p(\Omega)$  dans  $L^q(\Omega)$ .

*Démonstration.* Voir [62]. □

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière lipschitzienne  $\partial\Omega$ , solution du problème d'optimisation de forme  $\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ , et l'état  $u_\Omega \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est solution du problème de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\Omega}{\partial t} - \Delta u_\Omega = f(u_\Omega) & \text{dans } Q, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_\Omega(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

avec  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \cap L^\infty(\mathbb{R}))$  telle que  $f'$  continue sur  $\mathbb{R}$  et bornée.

L'équation variationnelle d'état est

$$\int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial}{\partial t} u_\Omega \psi + \nabla u_\Omega \cdot \nabla \psi - f(u_\Omega) \psi \right) = 0$$

où  $x \cdot y$  est le produit scalaire de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On associe à  $u_\Omega$  la fonctionnelle

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right).$$

La fonction  $G_0$  est définie par

$$G_0(r) = G_0(x, r) = \int_0^r g_0(x, z) dz,$$

$$g_0 = : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g_0(., 0) = 0.$$

$g_0$  est une fonction de Carathéodory et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Nous supposons de plus qu'une fonction de Carathéodory  $h$  est croissante en  $r \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $r, z \in \mathbb{R}$  on ait

$$|g_0(x, r+z) - g_0(x, z)| \leq h(x, r)$$

presque partout dans  $\Omega$  et pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , on ait  $h(., z) \in L^1_{loc}(\Omega)$  et  $g_0 \circ u \in L^1(\Omega)$ .

Donc le lagrangien est donné par

$$L(s, \varphi, \psi) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + G_0(\varphi) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - f(\varphi) \psi \right).$$

**Proposition 20.** Soit  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme  $\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ , alors la dérivée de forme est donnée par

$$\begin{aligned} d_s L(0, u^0, p^0) = & \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^0|^2 \operatorname{div} V(0) + G_0(u^0) \operatorname{div} V(0) + \frac{\partial}{\partial s} u^0 p^0 \operatorname{div} V(0) \\ & + A'(0) \nabla u^0 \nabla p^0 - f(u^0) \operatorname{div} V(0) p^0 dx dt; \end{aligned}$$

où  $u^0$  est la solution de l'équation d'état à  $s = 0$  et  $p^0 \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est la solution l'équation d'état adjoint à  $s = 0$  suivante

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( \nabla u^0 \nabla \varphi + \varphi g_0(u^0) + \frac{\partial}{\partial t} p^0 \varphi + \nabla p^0 \cdot \nabla \varphi - p^0 \varphi f'(u^0) = 0 \right).$$

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière lipschitzienne  $\partial\Omega$ , solution du problème d'optimisation de forme  $\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ , et l'état  $u_\Omega \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est solution de problème de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\Omega}{\partial t} - \Delta u_\Omega = f(u_\Omega) & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_\Omega(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

L'équation variationnelle d'état est

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial t} u \psi + \nabla u \cdot \nabla \psi - f(u) \psi \right) = 0$$

où  $x.y$  est le produit scalaire de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On associe a  $u_\Omega$  la fonctionnelle

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + G_0(u_\Omega) \right).$$

L'état  $u_s \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est solution de l'équation variationnelle d'état

$$\int_0^T \int_{\Omega_s} \frac{\partial}{\partial t} u_s \psi + \nabla u_s \cdot \nabla \psi - f(u_s) \psi = 0$$

et la fonctionnelle associée est

$$J(\Omega_s) = \int_0^T \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} |\nabla u_s|^2 + G_0(u_s).$$

Introduisons la composition  $u^s = u_s \circ T_s$  pour travailler dans un espace fixe. Et l'équation variationnelle d'état devient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u^s \psi \gamma_s + A(s) \nabla u^s \cdot \nabla \psi - f(u^s) \psi \gamma_s = 0,$$

avec  $A(s) = \gamma_s D T_s^{-1} (D T_s^{-1})^*$ . Et la fonctionnelle dépendant du temps devient

$$J(\Omega_s) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^s|^2 \gamma_s + G_0(u^s) \gamma_s.$$

Le lagrangien dépendant de  $s$  est

$$L(s, \varphi, \psi) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \gamma_s + G_0(\varphi) \gamma_s + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \psi \gamma_s + A(s) \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - f(\varphi) \psi \gamma_s \right). \quad (3.42)$$

Alors nous avons

$$d_y L(s, \varphi, \psi; \psi') = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \varphi \psi' \gamma_s + A(s) \nabla \varphi \cdot \nabla \psi' - f(\varphi) \psi' \gamma_s,$$

$$d_x L(s, \varphi, \psi; \varphi') = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \varphi' \gamma_s + \varphi' g_0(\varphi) \gamma_s + \frac{\partial}{\partial t} \varphi' \psi \gamma_s + A(s) \nabla \varphi' \cdot \nabla \psi - \varphi' f'(\varphi) \gamma_s \psi,$$

$$d_s L(s, \varphi, \psi) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \operatorname{div} V_s \gamma_s + G_0(\varphi) \operatorname{div} V_s \gamma_s + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \psi \operatorname{div} V_s \gamma_s + A'(s) \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - f(\varphi) \psi \operatorname{div} V_s \gamma_s dx dt.$$

L'équation d'état à  $s \geq 0$  et l'équation d'état adjoint à  $s = 0$  sont

$$u^s \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u^s \gamma_s \psi + A(s) \nabla u^s \cdot \nabla \psi - f(u^s) \gamma_s \psi = 0, \quad (3.43)$$

$$p^0 \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^0 \nabla \varphi + \varphi g_0(u^0) + \frac{\partial}{\partial t} p^0 \varphi + \nabla p^0 \cdot \nabla \varphi - p^0 \varphi f'(u^0) = 0. \quad (3.44)$$

La paire  $(u^0, p^0) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est la solution du système (3.43) et (3.44).

Puisque nous travaillons avec des applications multivoques, alors  $u^0$  et  $p^0$  sont respectivement les solutions de (3.43) pour  $s = 0$  et de (3.44) et ce couple  $(u^0, p^0)$  n'est pas uniques. De plus, pour tout  $s \in [0, \tau]$ ,  $X(s) \neq \emptyset$ ,  $g(s)$  est finie, et pour tout  $x \in X(0)$ ,  $Y(0, x) \neq \emptyset$ ; Donc la condition  $(H_1)$  du corollaire 8 est vérifiée.

Vérifions la condition  $(H_2')$  du corollaire 8 nous allons utiliser (3.42) avec  $\varphi = u^0$  et  $\psi = p^0$  :

$$\begin{aligned} d_s L(s, u^0, p^0) &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^0|^2 \operatorname{div} V_s \gamma_s + G_0(u^0) \operatorname{div} V_s \gamma_s + \frac{\partial}{\partial t} u^0 p^0 \operatorname{div} V_s \gamma_s \\ &\quad + A'(s) \nabla u^0 \nabla p^0 - f(u^0) p^0 \operatorname{div} V_s \gamma_s dx dt. \end{aligned}$$

Utilisons le lemme 16, nous pouvons tendre  $s$  vers zéro dans l'expression précédente et

$$\begin{aligned} d_s L(0, u^0, p^0) &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^0|^2 \operatorname{div} V(0) + G_0(u^0) \operatorname{div} V(0) + \frac{\partial}{\partial t} u^0 p^0 \operatorname{div} V(0) \\ &\quad + A'(0) \nabla u^0 \nabla p^0 - f(u^0) p^0 \operatorname{div} V(0) dx dt. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Donc, la condition  $(H'_2)$  du corollaire 8 est satisfaite.

Pour vérifier la condition  $(H'_3)$  du corollaire 8, nous avons besoin de la dérivée de  $L(s, \varphi, \psi)$  par rapport à  $x$

$$d_x L(s, \varphi, \psi; \varphi') = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \varphi' \gamma_s + \varphi' g_0(\varphi) \gamma_s + \frac{\partial}{\partial t} \varphi' \psi \gamma_s + A(s) \nabla \varphi' \cdot \nabla \psi - \varphi' f'(\varphi) \gamma_s \psi. \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_0^1 d_x L \left( s, u^0 + \theta(u^s - u^0), p^0, \frac{u^s - u^0}{s} \right) d\theta \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s + \int_0^1 \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \gamma_s \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s + \int_0^T \int_{\Omega} A(s) \nabla p^0 \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^T \int_{\Omega} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \gamma_s. \end{aligned}$$

Maintenant l'objectif est d'étudier

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta$$

et

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta.$$

Et pour ce faire, nous allons utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Vérifions si  $g_0$  et  $f'$  satisfassent les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Comme par hypothèse  $g_0$  est continue et  $u^s \rightarrow u^0$  nous avons  $g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \rightarrow g_0(u^0)$  quand  $s \rightarrow 0$ .

Puisse que  $g_0$  est une fonction de Caratheodory, nous pouvons appliquer le lemme 17 avec  $p = 2$  et  $q = 1$  on a

$$|g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0))| \leq a + b(u^0 + \theta(u^s - u^0))^2.$$

Au voisinage de 0 et en particulier pour  $s$  suffisamment petit on a

$$|g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0))| \leq a + bu_0^2 + 1.$$

Et de plus  $a + bu_0^2 + 1$  est intégrable sur  $[0, 1]$  par rapport à  $\theta$ . Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, ce qui donne

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = \int_0^1 \lim_{s \searrow 0} g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = g_0(u^0).$$

Comme  $f'$  est continue et bornée par hypothèse et de plus  $u^s \rightarrow u^0$  nous avons  $f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \rightarrow f'(u^0)$  quand  $s \rightarrow 0$ . Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, ce qui donne

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = \int_0^1 \lim_{s \searrow 0} f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = f'(u^0).$$

Donc

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s + \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) g_0(u^0) \gamma_s + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} A(s) \nabla p^0 \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) - \int_0^T \int_{\Omega} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) f'(u^0). \end{aligned}$$

En posant  $\varphi = \frac{u^s - u^0}{s}$  dans l'équation d'état adjoint pour  $p^0$ ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) + \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) g_0(u^0) + \frac{\partial}{\partial t} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) + \nabla p^0 \cdot \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) - p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) f'(u^0) = 0.$$

Nous pouvons réécrire l'expression de  $R(s)$  de la manière suivante

$$R(s) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{A(s) - I}{s} \nabla p^0 \nabla (u^s - u^0) + \frac{\gamma_s - 1}{s} \frac{\partial}{\partial t} p^0 (u^s - u^0) + \frac{\gamma_s - 1}{s} \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \nabla (u^s - u^0) + \frac{\gamma_s - 1}{s} (u^s - u^0) g_0(u^0) - \frac{\gamma_s - 1}{s} (u^s - u^0) f'(u^0) + \frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{u^s - u^0}{s} \right|^2 dx dt.$$

De ce qui précède, nous pouvons obtenir l'estimation suivante

$$|R(s)| \leq \int_0^T \left\| \frac{A(s) - I}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \|\nabla p^0\| \|\nabla (u^s - u^0)\| + \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} p^0 \right\| \|(u^s - u^0)\| + \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \left\| \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \right\| \|\nabla (u^s - u^0)\| + \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \|(u^s - u^0)\| \|g_0(u^0)\| + \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \|(u^s - u^0)\| \|f'(u^0)\| + \frac{s}{2} \left\| \frac{u^s - u^0}{s} \right\|^2.$$

$$|R(s)| \leq \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{A(s) - I}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \|\nabla p^0\| \|\nabla (u^s - u^0)\| + \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} p^0 \right\| \|(u^s - u^0)\| + \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \left\| \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \right\| \|\nabla (u^s - u^0)\| + \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \|(u^s - u^0)\| \|g_0(u^0)\| + \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C[0, \tau]} \|(u^s - u^0)\| \|f'(u^0)\| + \frac{s}{2} \left\| \frac{u^s - u^0}{s} \right\|^2.$$

Par le lemme 16, les termes  $\frac{A(s) - I}{s}$  et  $\frac{\gamma_s - 1}{s}$  sont uniformément bornés. Pour conclure que la limite de  $R(s)$  existe et est zéro, il reste à montrer que  $u^s$  converge fortement vers  $u^0$  dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et que la norme de  $\frac{(u^s - u^0)}{s}$  dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$  est bornée.

De l'équation d'état (3.43) de  $u^s$  et  $u^0$ , pour tout  $\psi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (u^s - u^0) \cdot \nabla \psi &= \int_0^T \int_{\Omega} [\gamma_s f(u^s) - f(u^0)] \psi - \int_0^T \int_{\Omega} [A(s) - I] \nabla u^s \nabla \psi - \int_0^T \int_{\Omega} [\gamma_s \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0] \psi \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (\gamma_s - 1) f(u^s) \psi + \int_0^T \int_{\Omega} [f(u^s) - f(u^0)] \psi - \int_0^T \int_{\Omega} [A(s) - I] \nabla u^s \nabla \psi \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} (\gamma_s - 1) \frac{\partial}{\partial t} u^s \psi - \int_0^T \int_{\Omega} [\frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0] \psi. \end{aligned}$$

Posons  $\psi = u^s - u^0$ , on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla (u^s - u^0)\|^2 &\leq \int_0^T \|(\gamma_s - 1)\|_{C[0, \tau]} \|f(u^s)\| \|u^s - u^0\| + \int_0^T \|f(u^s) - f(u^0)\| \|u^s - u^0\| \\ &\quad + \int_0^T \|A(s) - I\|_{C[0, \tau]} \|\nabla u^s\| \|\nabla (u^s - u^0)\| + \int_0^T \|(\gamma_s - 1)\|_{C[0, \tau]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^s \right\| \|u^s - u^0\| \\ &\quad + \int_0^T \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right\| \|u^s - u^0\|. \end{aligned}$$

Puisque  $\Omega$  est un domaine ouvert borné et lipschitzien, par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante  $K = K(\Omega)$  telle que

$$\|u^s - u^0\| \leq K \|\nabla(u^s - u^0)\|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla(u^s - u^0)\| &\leq \int_0^T \|(\gamma_s - 1)\|_{C[0,\tau]} \|f(u^s)\| K + \int_0^T \|f(u^s) - f(u^0)\| K + \int_0^T \|A(s) - I\|_{C[0,\tau]} \|\nabla u^s\| \\ &\quad + \int_0^T \|(\gamma_s - 1)\|_{C[0,\tau]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^s \right\| K + \int_0^T \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right\| K. \end{aligned}$$

Maximisons pour tout  $0 \leq s \leq T$ , alors nous arrivons à

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq s \leq \tau} \|\nabla(u^s - u^0)\| &\leq \max_{0 \leq s \leq \tau} \|(\gamma_s - 1)\|_{C(0,\tau)} \|f(u^s)\| K + \max_{0 \leq s \leq \tau} \|f(u^s) - f(u^0)\| K + \max_{0 \leq s \leq \tau} \|A(s) - I\|_{C(0,\tau)} \|\nabla u^s\| \\ &\quad + \max_{0 \leq s \leq T} \|(\gamma_s - 1)\|_{C[0,\tau]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^s \right\| K + \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right\| K. \end{aligned}$$

Mais la partie de droite de la précédente inégalité converge vers zéro quand  $s$  tend vers zéro. Donc,  $u^s \rightarrow u^0$  dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Finalement, revenons à cette inégalité et divisons par  $s > 0$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq s \leq \tau} \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \right\| &\leq \max_{0 \leq s \leq \tau} \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C(0,\tau)} \|f(u^s)\| K + \max_{0 \leq s \leq \tau} \left\| \frac{f(u^s) - f(u^0)}{s} \right\| K + \max_{0 \leq s \leq \tau} \left\| \frac{A(s) - I}{s} \right\|_{C(0,\tau)} \|\nabla u^s\| \\ &\quad + \max_{0 \leq s \leq \tau} \left\| \frac{\gamma_s - 1}{s} \right\|_{C(0,\tau)} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^s \right\| K + \max_{0 \leq s \leq \tau} \left\| \frac{1}{s} \left( \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right) \right\| K. \end{aligned}$$

Puisque la partie de droite de la précédente inégalité est bornée, alors  $\nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right)$  est borné. Ceci signifie que  $\frac{(u^s - u^0)}{s}$  est borné dans  $C(0, T; H_0^1(\Omega))$  et donc,  $\frac{(u^s - u^0)}{s}$  est borné dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$ . Comme le résultat du terme  $R(s)$  est zéro et l'expression de la dérivée de forme est donnée par (3.45).  $\square$

### 3.1.4 Dérivée topologique

La dérivée topologique mesure la sensibilité d'une fonctionnelle de forme par rapport à la perturbation infinitésimale d'un domaine. Rigoureusement la dérivée topologique est introduite par Sokolowski et Zochowski en 1999 voir [95].

Notons  $|\cdot|$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^N$ . Soient  $E$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^N$  et  $r \geq 0$ , la distance  $d_E$  et la  $r$ -dilatation  $E_r$  de  $E$  sont définies de la manière suivante

$$d_E = \inf_{e \in E} |x - e|, \quad E_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : d_E(x) \leq r \right\}. \quad (3.47)$$

Soit  $m_L$  la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^N$ . Considérons  $X(\mathbb{R}^N)$  l'ensemble des sous ensembles  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  qui sont mesurables au sens de Lebesgue avec l'ensemble de leurs fonctions caractéristiques de  $\chi_\Omega$  :

$$X(\mathbb{R}^N) = \left\{ \chi_\Omega : \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ mesurable au sens de Lebesgue} \right\} \subset L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

**Définition 76.** Le cône tangent de Bouligand d'un ensemble  $A$  en un point  $a \in \bar{A}$  est

$$T_a A = \left\{ v \in \mathbb{R}^N : \exists \{x_n\} \subset A \text{ et } \{t_n \searrow 0\} \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - a}{t_n} = v \right\}.$$



**Remarque 16.**  $T_a A$  est un cône fermé et que  $T_a A = T_a \bar{A}$ .

Par conséquent, pour une fonction définie sur  $X(\mathbb{R}^N)$ , on ne peut s'attendre qu'à une semi-différentielle, c'est-à-dire une dérivée directionnelle unilatérale qui n'est pas nécessairement linéaire par rapport aux directions qui sont demi ou semi-tangentes dans le cône. En fait, nous verrons plus loin que le cône tangent adjacent à  $X(\mathbb{R}^N)$  contient des semi-tangentes qui sont des mesures bornées associées à des sous-ensembles fermés  $E$  de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^N$ .

La semi-tangente que nous allons considérer sera directement reliée au contenu de Minkowski de dimension  $d$ ,

$$M^d(E) = \lim_{r \searrow 0} \frac{m_L(E_r)}{\alpha_{N-d} r^{N-d}}, \quad \alpha_{N-d} \text{ est le volume de la boule unité dans } \mathbb{R}^{N-d}, \quad (3.48)$$

pour la perturbation de la topologie générale obtenue par dilatation d'une sous-variété régulière de  $E$  de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Le cas où  $E = \{e\}$  correspond à  $d = 0$ , quand  $d = 1$  il correspond à une courbe et  $d = 2$  à une surface.

Nous souhaitons que le contenu de Minkowski  $M^d(E)$  ci-dessus soit égal à la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^d$  de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^N$  pour un sous-ensemble  $E$  compact et  $d$ -rectifiable de  $\mathbb{R}^N$ .

**Définition 77.** Soit  $d$ ,  $0 \leq d \leq N$ , les sur et sous contenus de Minkowski de dimension  $d$  de l'ensemble  $E$  sont définis à travers la  $r$ -dilatation de l'ensemble  $E$  comme suit

$$M^{*d}(E) = \limsup_{r \searrow 0} \frac{m_L(E_r)}{\alpha_{N-d} r^{N-d}}, \quad M_{*d}(E) = \liminf_{r \searrow 0} \frac{m_L(E_r)}{\alpha_{N-d} r^{N-d}}, \quad (3.49)$$

où  $m_L$  est la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\alpha_{N-d}$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^{N-d}$ . Puisque la dilatation  $E_r$  ne fait pas la différence entre  $E$  et son fermé, alors on peut supposer que  $E$  est un fermé de  $\mathbb{R}^N$ . Si les deux limites existent et sont égales, alors on peut dire que  $E$  admet un contenu de Minkowski de dimension  $d$  et leur valeur commune est notée par  $M^d(E)$ .

Intuitivement,  $M^d(E)$  est une mesure de dimension  $d$  d'une aire ou d'un volume d'un objet  $E$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Il joue un rôle similaire à la mesure de Hausdorff de dimension  $d$  ou à la mesure de Radon, mais généralement ce n'est pas une mesure.

**Définition 78** (H.Federer). Soit  $E$  un sous-ensemble d'un espace métrique  $X$ .  $E \subset X$  est  $d$ -rectifiable s'il est l'image d'un sous-ensemble compact  $K$  de  $\mathbb{R}^d$  par une fonction lipschitzienne continue  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ .

**Théorème 46.** Si  $E \subset \mathbb{R}^N$  est compact et  $d$ -rectifiable alors  $M^d(E) = \mathcal{H}_d(E)$ .

*Démonstration.* Voir [50]. □

Ici nous allons nous intéresser aux sous ensembles  $E$  de  $\mathbb{R}^N$  tel que le contenu de Minkowski (3.48) existe et pour laquelle  $M^d$  serait une mesure telle que la limite suivante

$$\phi \mapsto \int_E \phi \, dM^d = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\alpha_{N-d} r^{N-d}} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{E_r} \phi \, dm_L : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.50)$$

ait un sens. De plus, dans l'application d'un objet de dimension  $d$  avec  $0 \leq d \leq N$ , le choix approprié de la variable  $t$  est le volume  $t = \alpha_{N-d} r^{N-d}$  de la boule de rayon  $r$  de  $\mathbb{R}^{N-d}$  tel que  $r = (t/\alpha_{N-d})^{1/(N-d)}$  et

$$\phi \mapsto \int_E \phi \, dM^d = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_{E_{(t/\alpha_{N-d})^{1/(N-d)}}} \phi \, dm_L : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.51)$$

Considérons un ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  mesurable au sens de Lebesgue et un sous ensemble fermé  $d$ -rectifiable  $E$  de  $\Omega$  tel que  $m_L(E) = 0$ , alors on peut introduire beaucoup de perturbations telles :

$$\Omega_t = \Omega \setminus E_r, \quad \Omega_t = \Omega \cup E_r \text{ et } \Omega_t = \Omega \Delta E_r, \quad t = \alpha_{N-d} r^{N-d}, \quad (3.52)$$

où ici  $\Delta$  représente la différence symétrique. Dans ce cas, une trajectoire continue  $t \mapsto \chi_{\Omega_t}$  est obtenue dans  $X(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\chi_{\Omega_t} \rightarrow \chi_{\Omega} \text{ dans } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3.53)$$

Considérons  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne et un sous ensemble compact et  $d$ -rectifiable  $E \subset \Omega$ ,  $0 \leq d \leq 2$ . On introduit une fonction caractéristique  $\chi_{\Omega}$  associée au domaine non perturbé, à savoir  $\chi_{\Omega} = 1_{\Omega}$  telle que  $m_L = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\Omega}$ . Ensuite, nous définissons une fonction caractéristique associée au domaine topologiquement perturbé de la forme  $\chi_{\Omega_t}$ . Dans le cas d'une perforation, par exemple  $\chi_{\Omega_t} = 1_{\Omega} - 1_{E_r}$  et dans le cas d'une inclusion, par exemple  $\chi_{\Omega_t} = 1_{\Omega} - (1 - \gamma)1_{E_r}$ , avec  $\gamma \in (0, +\infty)$  est une constante possédant les propriétés physiques ou chimiques d'un paramètre, d'un matériau, d'un objet physique ou d'un objet mathématique et que la perturbation topologique obtenue est  $\Omega_t = \Omega \setminus E_r$ . C'est ainsi que dans toute la suite, nous allons considérer la perturbation topologique suivante  $\Omega_t = \Omega \setminus E_r$ . Nous renvoyons aux livres [76], [77] et [78] pour plus de précision sur la notion de la perturbation topologique. Dans le calcul de la dérivée topologique nous tenons à préciser que nous ne perturbons pas totalement le domaine  $\Omega$  mais nous transformons la source ou le membre de droite, ce qui fait apparaître  $\gamma \in (0, +\infty)$  une constante possédant les propriétés physiques ou chimiques du domaine considéré et que la perturbation topologique obtenue est  $\Omega_t = \Omega \setminus E_r$ . Rappelons que

$$g(t) = \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} L(t, \varphi, \psi),$$

$$dg(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}.$$

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière lipschitzienne  $\partial\Omega$ , solution du problème d'optimisation de forme  $\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}_e\}$ , et l'état  $u_{\Omega} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est solution du problème de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega} = f(u_{\Omega}) & \text{dans } \mathcal{Q}, \\ u_{\Omega} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u_{\Omega}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

avec  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \cap L^{\infty}(\mathbb{R}))$  telle que  $f'$  continue sur  $\mathbb{R}$  et bornée.

L'équation variationnelle d'état est

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u_{\Omega} \psi + \nabla u_{\Omega} \cdot \nabla \psi - f(u_{\Omega}) \psi = 0$$

où  $x \cdot y$  est le produit scalaire de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On associe à  $u_{\Omega}$  la fonctionnelle

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + G_0(u_{\Omega}).$$

La fonction  $G_0$  est définie par

$$G_0(r) = G_0(x, r) = \int_0^r g_0(x, z) dz,$$

$$g_0 =: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g_0(\cdot, 0) = 0.$$

$g_0$  est une fonction de Carathéodory et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Nous supposons de plus qu'une fonction de Carathéodory  $h$  est croissante en  $r \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $r, z \in \mathbb{R}$  on ait

$$|g_0(x, r+z) - g_0(x, z)| \leq h(x, r)$$

presque partout dans  $\Omega$  et pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , on ait  $h(\cdot, z) \in L^1_{loc}(\Omega)$  et  $g_0 \circ u \in L^1(\Omega)$ .

Donc le lagrangien est donné par

$$L(s, \varphi, \psi) = \int_0^T \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + G_0(\varphi) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - f(\varphi) \psi.$$

**Proposition 21.** Soit  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme  $\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ , alors la dérivée topologique est donnée par

$$dJ(\Omega, \delta_E) = d_s L(0, u^0, p^0) = (1 - \gamma) \int_0^T \int_E p^0 d\mathcal{H}_d;$$

où  $p^0 \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est la solution de l'équation d'état adjoint à  $s = 0$  suivante

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^0 \nabla \varphi + \varphi g_0(u^0) + \frac{\partial}{\partial t} p^0 \varphi + \nabla p^0 \cdot \nabla \varphi - p^0 \varphi f'(u^0) = 0;$$

avec  $u^0$  est la solution de l'équation d'état à  $s = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière lipschitzienne  $\partial\Omega$ , l'état  $u = u(E) \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est solution de l'équation variationnelle d'état

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u \psi + \nabla u \cdot \nabla \psi - f(u) \psi = 0$$

où  $x \cdot y$  est le produit scalaire de  $x$  et  $y$  in  $\mathbb{R}^3$ . On associe la fonctionnelle

$$J(\Omega) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G_0(u).$$

La fonction  $G_0$  est définie par

$$G_0(r) = G_0(r, z) = \int_0^r g_0(x, z) dz,$$

$$g_0 =: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g_0(\cdot, 0) = 0.$$

Considérons l'équation variationnelle d'état perturbée

$$\int_0^T \int_{\Omega_s} \frac{\partial}{\partial t} u^s \psi + \nabla u^s \cdot \nabla \psi - f(u^s) \psi = 0$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_s} \nabla u^s \cdot \nabla \psi = \int_0^T \int_{\Omega_s} \left( f(u^s) - \frac{\partial}{\partial t} u^s \right) \psi$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega \setminus E_r} \nabla u^s \cdot \nabla \psi &= \int_0^T \int_{\Omega \setminus E_r} \left( f(u^s) - \frac{\partial}{\partial s} u^s \right) \psi \\ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^s \cdot \nabla \psi &= \int_0^T \int_{\Omega} \left[ f(u^s) - \frac{\partial}{\partial t} u^s - (1-\gamma) \chi_{E_r} \right] \psi. \end{aligned}$$

Donc l'équation variationnelle d'état perturbée prend cette forme finale

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u^s \psi + \nabla u^s \cdot \nabla \psi - f(u^s) \psi + (1-\gamma) \psi \chi_{E_r} = 0 \quad (3.54)$$

et la fonctionnelle associée est

$$J(s) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^s|^2 + G_0(u^s).$$

Le lagrangien est donné par

$$L(s, \varphi, \psi) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + G_0(\varphi) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi - f(\varphi) \psi + (1-\gamma) \psi \chi_{E_r}; \quad (3.55)$$

avec  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ . Le calcul de la dérivée topologique prend la forme suivante

$$g(s) = \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} L(s, \varphi, \psi), \quad dg(0) = \lim_{s \searrow 0} \frac{g(s) - g(0)}{s} = \lim_{s \searrow 0} \frac{J(s) - J(0)}{s}.$$

Dans toute la suite, nous choisissons  $E$  comme étant une surface et  $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \frac{L(s, \varphi, \psi) - L(0, \varphi, \psi)}{s} &= \frac{1}{s} \left( \int_0^T \int_{\Omega} (1-\gamma) \psi \chi_{E_r} \right) \\ &= (1-\gamma) \frac{1}{s} \left( \int_0^T \int_{\Omega} \chi_{E_r} \psi \right); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{L(s, \varphi, \psi) - L(0, \varphi, \psi)}{s} \longrightarrow (1-\gamma) \int_0^T \int_E \psi d\mathcal{H}_d.$$

Pour un ensemble  $E \subset \Omega$  compact et 2-rectifiable et  $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$d_s L(0, \varphi, \psi) = (1-\gamma) \int_0^T \int_E \psi d\mathcal{H}_d. \quad (3.56)$$

Maintenant, notre objectif est de voir si les conditions du théorème 44 sont satisfaites.

La paire  $(u^0, p^0) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  est la solution du système (3.43) et (3.44).

Puisque nous travaillons avec des applications multivoques, alors  $u^0$  et  $p^0$  sont respectivement les solutions de (3.43) et de (3.44) et ces solutions ne sont pas uniques. De plus, pour tout  $s \in [0, \tau]$ ,  $X(s) \neq \emptyset$ ,  $g(s)$  est fini, et pour tout  $x \in X(0)$ ,  $Y(0, x) \neq \emptyset$ ; Donc la condition  $(H_1)$  du corollaire 8 est vérifiée.

L'expression de  $d_s L(0, u^0, p^0)$  est donnée par (3.56). Donc la condition  $(H_2')$  du corollaire 8 est vérifiée.

Il nous reste que la condition  $(H_3')$ , et pour ce faire nous avons besoin de la dérivée par rapport à  $x$  du lagrangien laquelle est  $d_x L(s, \bar{\varphi}, \bar{\psi}; \varphi')$ . On a

$$d_x L(s, \bar{\varphi}, \bar{\psi}; \varphi') = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \bar{\varphi} \nabla \varphi' + \varphi' g_0(\bar{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi' \bar{\psi} + \nabla \varphi' \cdot \nabla \bar{\psi} - \varphi' f'(\bar{\varphi}) \bar{\psi}.$$

À ce niveau, le travail consiste à montrer que la limite de  $R(s)$  tend vers zéro quand  $s$  tend vers zéro

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_0^1 d_x L \left( s, u^0 + \theta(u^s - u^0), p^0, \frac{u^s - u^0}{s} \right) d\theta \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s + \int_0^1 \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \gamma_s \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s + \int_0^T \int_{\Omega} A(s) \nabla p^0 \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^T \int_{\Omega} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \gamma_s. \end{aligned}$$

Maintenant l'objectif est d'étudier

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta$$

et

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta.$$

Et pour ce faire, nous allons utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Vérifions si  $g_0$  et  $f'$  satisfassent les hypothèses du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Comme par hypothèse  $g_0$  est continue et  $u^s \rightarrow u^0$  nous avons  $g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \rightarrow g_0(u^0)$  quand  $s \rightarrow 0$ .

Puisse que  $g_0$  est une fonction de Caratheodory, nous pouvons appliquer le lemme 17 avec  $p = 2$  et  $q = 1$  on a

$$|g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0))| \leq a + b(u^0 + \theta(u^s - u^0))^2.$$

Au voisinage de 0 et en particulier pour  $s$  suffisamment petit on a

$$|g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0))| \leq a + bu_0^2 + 1.$$

Et de plus  $a + bu_0^2 + 1$  est intégrable sur  $[0, 1]$  par rapport à  $\theta$ . Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, ce qui donne

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = \int_0^1 \lim_{s \searrow 0} g_0(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = g_0(u^0).$$

Comme  $f'$  est continue et bornée par hypothèse et de plus  $u^s \rightarrow u^0$  nous avons  $f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) \rightarrow f'(u^0)$  quand  $s \rightarrow 0$ . Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, ce qui donne

$$\lim_{s \searrow 0} \int_0^1 f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = \int_0^1 \lim_{s \searrow 0} f'(u^0 + \theta(u^s - u^0)) d\theta = f'(u^0).$$

Donc

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s + \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) g_0(u^0) \gamma_s + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \gamma_s \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} A(s) \nabla p^0 \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) - \int_0^T \int_{\Omega} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) f'(u^0). \end{aligned}$$

En posant  $\varphi = \frac{u^s - u^0}{s}$  dans l'équation d'état adjoint pour  $p^0$ ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla u^0 \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) + \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) g_0(u^0) + \frac{\partial}{\partial t} p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) + \nabla p^0 \cdot \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) - p^0 \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) f'(u^0) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) - \nabla u^0 \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \\ R(s) &= \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} \right) - \nabla u^0 \right] \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \\ R(s) &= \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \nabla \left( \frac{u^s + u^0}{2} - u^0 \right) \right] \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \\ R(s) &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{2} \right) \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \\ R(s) &= \frac{1}{2} \int_0^T \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\|^2. \end{aligned}$$

Alors  $R(s)$  tend vers zéro si  $\nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right)$  tend vers zéro.

Faisons une différence entre l'équation variationnelle (3.54) en  $s > 0$  et en  $s = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \cdot \nabla \psi &= \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} [f(u^s) - f(u^0)] \psi - (1 - \gamma) \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} \psi \chi_{E_r} - \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \psi \\ &= \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} [f(u^s) - f(u^0)] \psi - (1 - \gamma) \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} \psi \chi_{E_r} - \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \psi. \\ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \cdot \nabla \psi &= \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} [f(u^s) - f(u^0)] \psi - (1 - \gamma) \frac{1}{s} \int_0^T \int_{E_r} \psi \chi_{\Omega} - \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \psi. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Posons  $\psi = u^s - u^0$ , l'égalité devient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s} \right) \cdot \nabla (u^s - u^0) &= \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} [f(u^s) - f(u^0)] (u^s - u^0) - (1 - \gamma) \frac{1}{s} \int_0^T \int_{E_r} \chi_{\Omega} (u^s - u^0) \\ &\quad - \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] (u^s - u^0) \\ \int_0^T \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\|^2 &\leq \int_0^T \left\| \frac{f(u^s) - f(u^0)}{s^{1/2}} \right\| \left\| \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right\| + (1 - \gamma) \left( \frac{1}{s} \int_0^T \int_{E_r} dx \right)^{1/2} \left\| \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right\| \\ &\quad + \int_0^T \left\| \frac{1}{s^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \right\| \left\| \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right\| \end{aligned}$$

Puisque  $\Omega$  est un domaine ouvert borné et lipschitzien, par l'inégalité de Poincaré il existe une constante  $K = K(\Omega)$  telle que

$$\left\| \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\| \leq K \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\|.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\|^2 &\leq \int_0^T \left\| \frac{f(u^s) - f(u^0)}{s^{1/2}} \right\| \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\| K + (1 - \gamma) \mathcal{H}_2^{1/2}(E) \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\| K \\ &\quad + \int_0^T \left\| \frac{1}{s^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \right\| \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\| K. \end{aligned}$$

$$\int_0^T \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\| \leq \int_0^T \left\| \frac{f(u^s) - f(u^0)}{s^{1/2}} \right\| K + (1 - \gamma) \mathcal{H}_2^{1/2}(E) K + \int_0^T \left\| \frac{1}{s^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \right\| K.$$

Et par suite

$$\max_{0 \leq s \leq T} \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\| \leq \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{f(u^s) - f(u^0)}{s^{1/2}} \right\| K + (1 - \gamma) \mathcal{H}_2^{1/2}(E) K + \max_{0 \leq s \leq T} \left\| \frac{1}{s^{1/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \right\| K.$$

Finalement nous voyons que le gradient de la norme est borné. Ceci signifie que  $\left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right)$  est borné dans  $C(0, T; H_0^1(\Omega))$  et donc,  $\left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right)$  est borné dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$ .

Donc il existe  $w \in H_0^1(\Omega)$  et une suite  $\{s_n\}$  qui tend vers zéro telles que

$$\frac{u^{s_n} - u^0}{s_n^{1/2}} \rightarrow w \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ implique que } \frac{u^{s_n} - u^0}{s_n^{1/2}} \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Omega).$$

De plus, nous pouvons montrer que  $w = 0$ . De (3.57), pour  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^{s_n} - u^0}{s^{1/2}} \right) \cdot \nabla \psi = s^{1/2} \left[ \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} [f(u^s) - f(u^0)] \psi + (1 - \gamma) \frac{1}{s} \int_0^T \int_{E_r} \psi \chi_{\Omega} - \frac{1}{s} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u^s - \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right] \psi \right]$$

Puisque  $s \rightarrow 0$ , alors  $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$  on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \psi = 0;$$

et par suite

$$\forall \psi \in H_0^1(\Omega), \max_{0 \leq s \leq T} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \psi = 0 \text{ implique que } w = 0.$$

Donc la limite existe quand  $s \rightarrow 0$

$$R(s) = \frac{1}{2} \int_0^T \left\| \nabla \left( \frac{u^s - u^0}{s^{1/2}} \right) \right\|^2 \rightarrow 0.$$

Donc toutes les hypothèses du corollaire 8 sont vérifiées. Revenons à notre dérivée du lagrangien par rapport au temps, puisque  $p^0 \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

$$dJ(\Omega, \delta_E) = d_s L(0, u^0, p^0) = (1 - \gamma) \int_0^T \int_E p^0 d\mathcal{H}_d, \quad (3.58)$$

où  $u^0$  et  $p^0$  sont solutions du système (3.43) et (3.44).  $\square$

### 3.2 Principe de comparaison

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  où  $\partial\Omega$  est une frontière régulière avec  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$  où  $\Gamma_0$  est la partie accessible, régulière (de classe  $C^2$ ). Notre objectif est de reconstruire  $\Gamma$  à partir de la donnée de Cauchy.

**Lemme 18.** Soit  $f$  une fonction positive. Soient  $\Omega_1, \Omega_2$  deux sous ensembles de  $\mathbb{R}^N$  tels que  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  et  $\emptyset \neq \Gamma_0 \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . On suppose que  $u_0 \in H_0^1(\Omega_1)$ , et  $u_0 \geq 0$  p.p sur  $\Omega_1$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega_1} - f(u_{\Omega_1}) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_1 = ]0, T[ \times \Omega_1, \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 = ]0, T[ \times \Gamma_0 \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \Sigma_1 = ]0, T[ \times \Gamma_1 \\ u_{\Omega_1}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega_1. \end{array} \right. \quad (3.59)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial t} - \Delta u_{\Omega_2} - f(u_{\Omega_2}) = 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_2 = ]0, T[ \times \Omega_2, \\ u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 = ]0, T[ \times \Gamma_0 \\ u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 = ]0, T[ \times \Gamma_2 \\ u_{\Omega_2}(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega_2; \end{array} \right. \quad (3.60)$$

ont des solutions faibles ; où  $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  ;  
 $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Supposons de plus que  $f \circ u_{\Omega_1} \leq f \circ u_{\Omega_2}$  sur  $\mathcal{Q}_2$ .

Alors nous obtenons

$$-\frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial \nu} \geq -\frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial \nu} \text{ sur } \Sigma_0.$$

*Démonstration.* On considère  $u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}$  et on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}) - \Delta(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}) = f(u_{\Omega_1}) - f(u_{\Omega_2}) & \text{dans } \mathcal{Q}_2 = ]0, T[ \times \Omega_2, \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = u_{\Omega_1} & \text{sur } \Sigma_2 \\ (u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega_2. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Par le principe du maximum proposition 5,  $u_{\Omega_1} \geq 0$  dans  $\Omega_1$ . Alors en utilisant le même principe du maximum,  $(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{Q}_2$  et aussi  $\max_{\Sigma_1} u_{\Omega_1} > u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} > 0$ , pour tout  $x \in \mathcal{Q}_2$ .

Soient  $x_0 \in \Gamma_0$  et  $x = x_0 - \nu h \in \Omega_2$  où  $\nu$  est la normale extérieure sur  $\Gamma_0$  et  $h > 0$ . Par la proposition 5 on a  $u_{\Omega_1}(t, x_0) - u_{\Omega_2}(t, x_0) = 0$  avec  $u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} \geq 0$  dans  $\mathcal{Q}_2$ , nous avons

$$\frac{(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(t, x_0 - \nu h) - (u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(t, x_0)}{h} \geq 0$$

en allant à la limite

$$-\frac{\partial}{\partial \nu}(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(x_0) \geq 0 \text{ sur } \Sigma_0$$

implique que

$$-\frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial \nu}(x_0) \geq -\frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial \nu}(x_0) \text{ sur } \Sigma_0.$$

□



### 3.2.1 Propriétés de monotonies

Dans cette sous section, nous nous intéressons d'abord à l'étude de la monotonie de la relation qui à  $\Omega$  associe  $\lambda_\Omega$  où  $\lambda_\Omega$  est un multiplicateur de Lagrange qui apparait en cherchant une condition d'optimalité vérifiée par le domaine réalisant le minimum de la fonctionnelle  $J$ .

**Proposition 22.** Soit  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme  $\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon, |w| = V_0, V_0 \text{ est constant}\}$ , alors il existe un multiplicateur de Lagrange  $\lambda(\Omega)$  tel que

$$\lambda(\Omega) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \right)^2$$

sur  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Dans ce cas la partie dépendant du temps de la dérivée de forme (3.4) est considérée nulle c'est à dire  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Alors

$$dJ(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_\Gamma \left( \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \right)^2 V(s_0, y) \nu d\sigma.$$

Puisque le volume est constant alors

$$dvol(\Omega, V) = \int_\Omega div(V(0)\nu),$$

avec  $vol(\Omega, V)$  le volume de  $\Omega$ , de plus  $\Omega$  est lipschitzien alors en appliquant la formule de la divergence on trouve

$$dvol(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} V(0)\nu.$$

Donc il existe un multiplicateur de Lagrange  $\lambda(\Omega)$  tel que

$$-\frac{1}{2} \int_\Gamma \left( \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \right)^2 V(s_0, y) \nu d\sigma = \lambda(\Omega) \int_\Gamma V(s_0, y) \nu d\sigma$$

et par suite

$$\lambda(\Omega) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \right)^2 \text{ sur } \Gamma.$$

□

Maintenant nous allons utiliser les propriétés de monotonies pour caractériser le multiplicateur de Lagrange.

Les résultats dans cette caractérisation sont basés sur le principe du maximum. On considère alors que  $u_i \in H^2(\Omega_i) \cap H_0^1(\Omega_i)$ .

**Lemme 19.** Soient  $\Omega_1, \Omega_2$  deux sous ensembles de  $\mathbb{R}^N$ , avec  $N \geq 1$  tels que  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  et  $\emptyset \neq \Gamma_0 \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . Soit  $f$  une fonction positive. On suppose que

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega_1} - f(u_{\Omega_1}) = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.62)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega_2} - f(u_{\Omega_2}) = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_{\Omega_2} = 0 & \text{dans } \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.63)$$

où  $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ ;

$\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

On suppose de plus  $f \circ u_{\Omega_1} \geq f \circ u_{\Omega_2}$  sur  $\Omega_2$ .

Alors on obtient cette inégalité pour tout  $s \in \Gamma_0$ ,

$$-\frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial \nu}(s) \geq -\frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial \nu}(s).$$

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle du cas parabolique. □

**Lemme 20.** Soit  $f$  une fonction positive. Si  $(\Omega_1, u_{\Omega_1})$  et  $(\Omega_2, u_{\Omega_2})$  sont deux solutions du problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u_{\Omega} - f(u_{\Omega}) = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ u_{\Omega} = 0 & \text{sur} & \Gamma_0 \\ u_{\Omega} = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \\ \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} = \lambda(\Omega) & \text{sur} & \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (3.64)$$

tels que

i -  $\lambda(\Omega)$  est le multiplicateur de Lagrange.

ii -  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ .

iii -  $(\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1) \setminus \Gamma_0 \neq \emptyset$ .

On suppose de plus  $f \circ u_{\Omega_1} \geq f \circ u_{\Omega_2}$  sur  $\Omega_2$ .

Alors on a l'inégalité suivante

$$\lambda(\Omega_1) \leq \lambda(\Omega_2).$$

*Démonstration.* On considère  $u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}$  et on a

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}) - (f(u_{\Omega_1}) - f(u_{\Omega_2})) = 0 & \text{dans} & \Omega_2, \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur} & \Gamma_0 \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = u_{\Omega_1} & \text{dans} & \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Par le principe du maximum corollaire 11,  $u_{\Omega_1} \geq 0$  dans  $\Omega_1$ . Alors en utilisant le même principe du maximum,  $(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2})(x) \geq 0$  pour presque tout  $x \in \Omega_2$  et aussi  $\max_{\Gamma_2} u_{\Omega_1} > u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} > 0$ , pour presque tout  $x \in \Omega_2$ .

Soit  $x_0 \in \Gamma_0$  et  $x = x_0 - \nu h \in \Omega$  où  $\nu$  est la normale extérieure sur  $\Gamma_0$  et  $h > 0$ . Nous avons

$$-\frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial \nu}(x_0) \geq -\frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial \nu}(x_0)$$

c'est à dire

$$\lambda(\Omega_1) \leq \lambda(\Omega_2).$$

□

---

---

## CHAPITRE 4

---

# ANALYSE ET SIMULATION NUMÉRIQUE

Nous allons considérer le cas où les mesures sont données au bord de la donnée de Cauchy de la solution de l'équation aux dérivées partielles elliptiques et la partie inconnue de la frontière du domaine est inaccessible. De plus, soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  où  $\partial\Omega$  est une frontière régulière avec  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset$  où  $\Gamma_0$  est la partie accessible, régulière (de classe  $C^2$ ). Notre objectif est de reconstruire numériquement  $\Gamma = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$  à partir de la donnée de Cauchy. Considérons  $u_\Omega$  solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega + q(x)u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = k_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $q(x) \geq 0$  et non identiquement nulle et  $k_0 \geq 0$ . Supposons qu'il existe une fonction  $h$  définie sur  $\Gamma_0$  à valeurs réelles telles que  $\frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = h$ , avec  $\nu$  le vecteur normal unitaire sortant sur  $\Gamma_0$ . Ce problème avait été résolu de manière théorique dans [73] et va faire maintenant l'objet d'une étude numérique. Pour y arriver, nous allons dans un premier temps étudier une méthode numérique du problème (4.1) sur base du papier [73]. En effet, cette méthode numérique suit deux approches : la première utilise la translation du bord inaccessible et la seconde passe par la déformation du bord inaccessible. Ensuite nous allons étudier une méthode numérique sur la base de l'optimisation de forme géométrique. Dans cette partie, nous allons déterminer les conditions d'optimalité qui vont nous permettre d'utiliser le lagrangien augmenté et afin de proposer une algorithmne numérique, ce qui aboutira à des illustrations numériques.

### 4.1 Méthode numérique basée sur la déformation polynomiale

Pour mettre en oeuvre cette méthode numérique, nous allons nous appuyer essentiellement sur le papier [73]. Nous allons utiliser les résultats d'existence, de monotonie, d'unicité et de convergence et l'algorithme qui sont déjà établis dans [73]. Dans cette section, nous souhaitons rappeler l'unicité du domaine  $\Omega$  sous certaines hypothèses voir [73]. Le plus souvent, c'est un challenge d'obtenir des résultats d'unicité dans un problème inverse.

Définissons une nouvelle classe d'ensembles géométriques dans le sens de Beurling. Rappelons d'abord l'ensemble suivant

$$\mathcal{O}_\epsilon = \{\Omega \subset K \subset D / \text{ouvert et } \Omega \text{ satisfaisant la propriété du } \epsilon\text{-cône}\}.$$

Supposons l'ensemble des domaines

$$B_h = \left\{ \Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon, \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} \geq h \text{ sur } \Gamma_0 \right\}$$

avec  $u_\Omega$  solution du problème aux limites (4.1). L'ensemble  $B_h$  est non vide par construction voir [73].

**Lemme 21.** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  appartenant à  $B_h$ , alors  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in B_h$ .

*Démonstration.* Voir [73]. □

**Théorème 47.** Soient  $\Omega$  un domaine borné et  $\Gamma_0, \Gamma$  et  $h$  définis comme précédemment. Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega + q(x)u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = k_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \\ \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = h(x) & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Supposons de plus qu'il existe deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tels que  $\Omega_2 \subset \Omega_1$  et qui vérifient (4.2). Alors nous avons  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

*Démonstration.* Dans le souci d'être clair, nous reprenons la preuve. Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tels que

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega_1} + q(x)u_{\Omega_1} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_{\Omega_1} = k_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_{\Omega_1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_0 \\ \frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial \nu} = h(x) & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega_2} + q(x)u_{\Omega_2} = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_{\Omega_2} = k_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_0 \\ \frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial \nu} = h(x) & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Comme  $\Omega_1, \Omega_2 \in B_h$  alors  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in B_h$ . Puisque  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ , on a  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_2$ , par le lemme 21 nous avons  $\frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial \nu} \geq h$  sur  $\Gamma_0$ . Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}) + q(x)(u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2}) = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} = u_{\Omega_1} & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

On a  $u_{\Omega_1} \geq 0$  et  $\max_{\Gamma_2} u_{\Omega_1} > u_{\Omega_1} - u_{\Omega_2} > 0$ . Puisque  $\Gamma_0$  vérifie la condition de la sphère intérieure, par le lemme de Hopf nous obtenons

$$\frac{\partial u_{\Omega_1}}{\partial \nu} < \frac{\partial u_{\Omega_2}}{\partial \nu} \text{ sur } \Gamma_0 \text{ c'est-à-dire } h(x) < h(x) \forall x \in \Gamma_0$$

ce qui est faux, donc  $\Omega_1 = \Omega_2$ . □

Précisons qu'en plus de sa stabilité par intersection, cette classe de formes va jouer un rôle important dans la reconnaissance du processus du domaine. Grâce au principe de maximum qui implique le résultat de monotonie de la séquence de domaines générée, nous pouvons proposer une initialisation pour l'approximation du domaine optimal à partir des données de Cauchy  $(h, \Gamma_0)$ .

### 4.1.1 Illustrations numériques en utilisant la translation

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega + q(x)u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = 1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

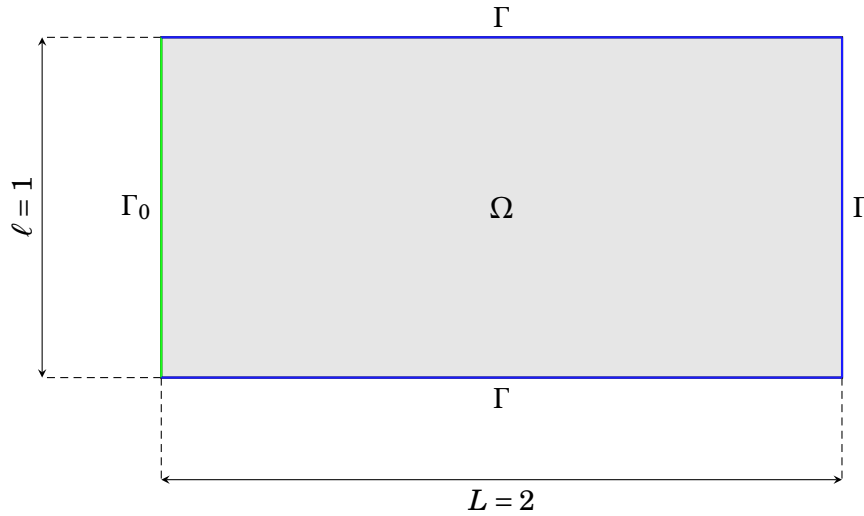


FIGURE 4.1 – Caractéristique du domaine initial où  $\Gamma_0$  est le bord accessible et  $\Gamma = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$  le bord inaccessible

---

**Algorithm 1** : Algorithme proposé par la translation

---

1. Initialisation

- i. Choisir  $\Omega^0$  (La forme initiale est munie d'un maillage triangulaire  $\mathcal{T}^n$ ) et la précision  $\epsilon_{stop}$  ;
- ii. Définir la fonction  $q > 0$  et les valeurs de  $h$  sur le bord accessible  $\Gamma_0$  ;

2. Boucle principale : pour  $n = 0, \dots$

- i. Calculer la solution  $u^n$  du système de Laplace (4.2) sur le maillage  $\mathcal{T}^n$  de  $\Omega$  ;
- ii. Calculer l'estimation

$$\left| - \int_{\Gamma_0} h \, d\sigma - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} \frac{\partial u_\Omega^n}{\partial \nu} \, d\sigma + \int_{\Omega} q(x) \times u_\Omega^n \, dx \right| \quad (4.7)$$

où  $\nu$  est la normale extérieure ;

- iii. Si la condition d'arrêt ( estimation (4.7) plus petit que  $\epsilon_{stop}$ ) est vérifiée et  $n = 0$ , alors on translate le bord inaccessible du domaine situé à droite suivant la normale extérieure de ce bord ;
- iv. Sinon, on le translate suivant le sens opposé à sa normale extérieure  $\Omega^n$  ;

3. Critère de fin. Arrêter si (4.7) est plus petit que  $\epsilon_{stop}$ . Revenir sur  $\Omega^n$ .

---

**Remarque 17.** En fait la quantité (4.7) n'est jamais que la valeur moyenne absolue de  $\frac{\partial u_\Omega^n}{\partial \nu} - h$  sur  $\Gamma_0$ . Elle est obtenue par intégration de l'EDP elliptique d'état ci-dessus, grâce à la formule

de Green et en remplaçant  $\frac{\partial u_{\Omega}^n}{\partial \nu}$  sur  $\Gamma_0$  par la valeur mesurée  $h$ . Et elle remplace l'estimation ponctuelle de  $|\frac{\partial u_{\Omega}^n}{\partial \nu} - h|$  sur  $\Gamma_0$ .  
 Les estimations (4.7) et la suivante (4.8) sont des résidus de l'équation d'état.

### 4.1.2 Illustrations numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques simulations numériques. Les simulations numériques présentées sont obtenues pour différentes valeurs de la fonction  $q$ . La mesure  $h$  est définie par  $h = y^2 + cste$  où  $cste \in \mathbb{R}$ .

Les simulations sont réalisées à l'aide du logiciel FreeFem++. <sup>1</sup> Dans la suite, on désignera  $l_{app}$  la longueur approchée du domaine rectangulaire. Cette dernière représente la distance entre le bord translaté et le bord accessible  $\Gamma_0$ .

**Pour  $q = 1$**

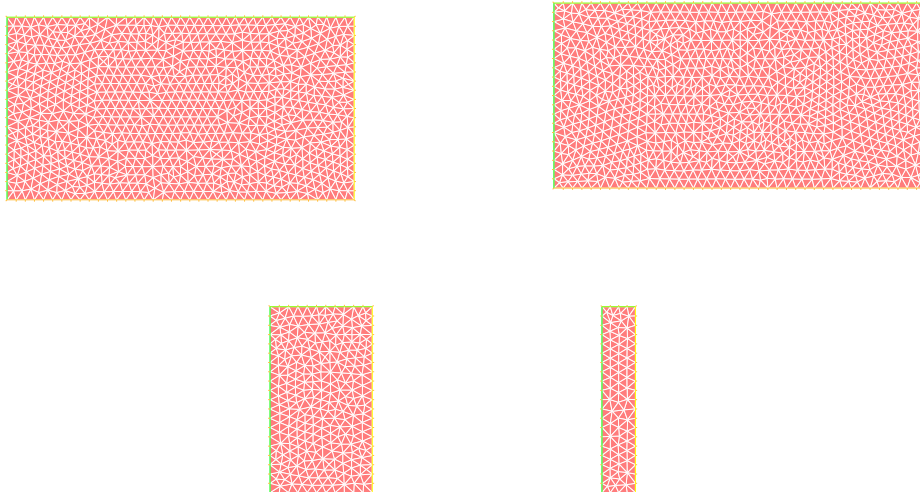


FIGURE 4.2 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines optimaux  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 9, 2, 144, 181$  resp. pour  $cste = 5,3 ; 5,6 ; 5,8 ; 8$

<i>cste</i>	5,3	5,6	5,8	8
$l_{app}$	1,9	2,01	0,55	0,18

**Pour  $q = \frac{1}{1+x^2+y^2}$**

<i>cste</i>	5,3	5,6	5,8	8
$l_{app}$	1,64	2,01	0,55	0,18

1. The software FreeFem++, developed at UPMC by F. Hecht and O. Pironneau, is a high-level integrated developing environment for solving (system of) partial differential equations in two and three dimensions of space.

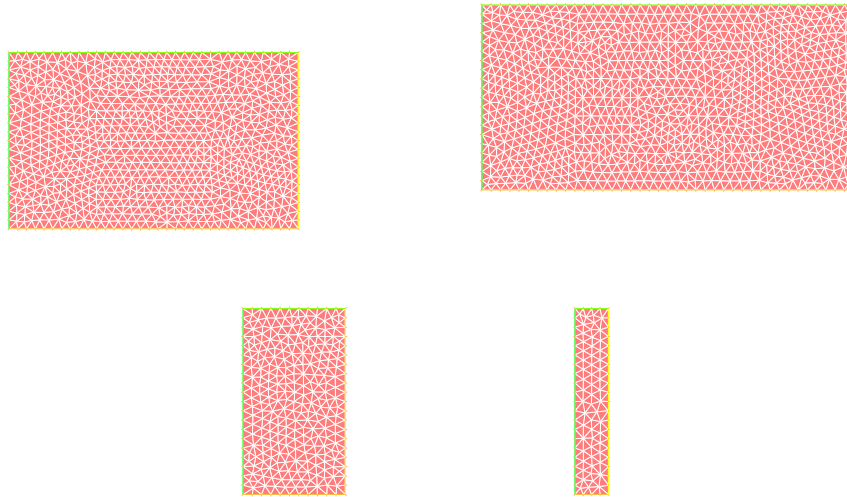


FIGURE 4.3 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines optimaux  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 35, 2, 144, 181$  resp. pour  $cste = 5,3 ; 5,6 ; 5,8 ; 8$

**Pour**  $q = \exp(x + y)$

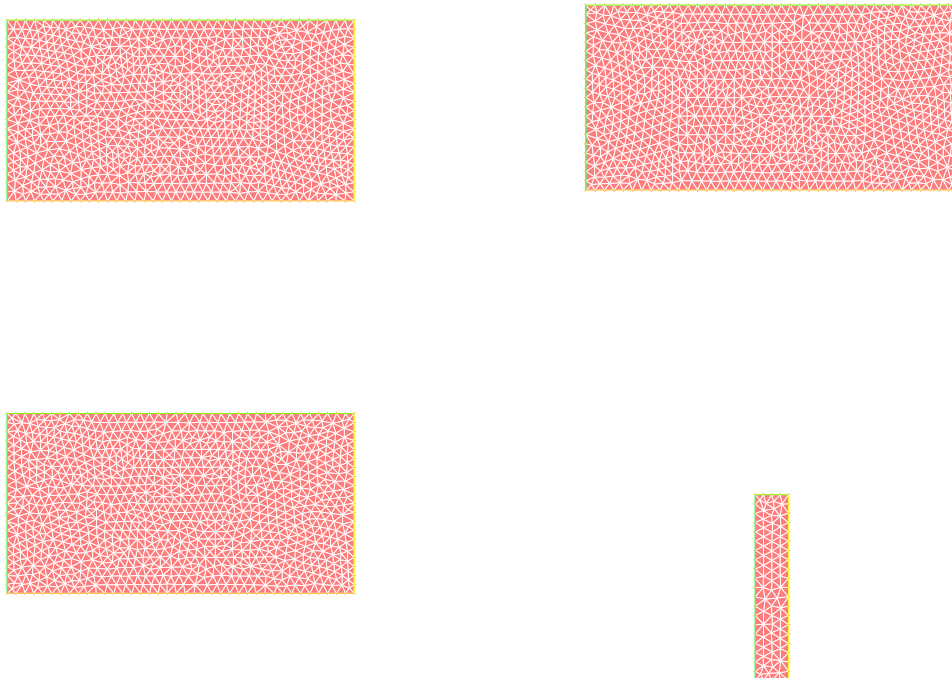


FIGURE 4.4 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines optimaux  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 7, 2, 3, 181$  resp. pour  $cste = 5,3 ; 5,7 ; 5,8 ; 8$

$cste$	5,3	5,7	5,8	8
$l_{app}$	1,92	2,01	1,93	0,18

### 4.1.3 Illustrations numériques par déformation parabolique

Dans cette sous section, nous introduisons une déformation parabolique dans la partie inaccessible de la frontière du domaine. La déformation est contrôlée par une transformation qui est de l'ordre de  $ay^2 + by + c$ , avec  $a, b$  et  $c$  des réels. Elle sera précisée dans l'algorithme.

---

**Algorithm 2** : Algorithme proposé par déformation parabolique

---

1. Initialisation

- i. Choisir  $\Omega^0$  (La forme initiale est munie d'un maillage triangulaire  $\mathcal{T}^n$ ) et la précision  $\epsilon_{stop}$  ;
- ii. Définir la fonction  $q > 0$  et les valeurs de  $h$  sur le bord accessible  $\Gamma_0$  ;

2. Boucle principale : pour  $n = 0, \dots$

- i. Calculer la solution  $u^n$  du système de Laplace (4.2) sur le maillage  $\mathcal{T}^n$  de  $\Omega$  ;
- ii. Calculer l'estimation

$$\left| - \int_{\Gamma_0} h \, d\sigma - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} \frac{\partial u_\Omega^n}{\partial \nu} \, d\sigma + \int_{\Omega} q(x) \times u_\Omega^n \, dx \right| \quad (4.8)$$

où  $\nu$  est la normale extérieure ;

- iii. Si la condition d'arrêt ( estimation (4.8) plus petit que  $\epsilon_{stop}$ ) est vérifiée et  $n = 0$ , alors on déforme le bord inaccessible du domaine situé à droite en augmentant son volume comme suit :  $\beta = \beta + 0,01$  ;  
 $\Omega^n = \Omega^n \cup \mathcal{D}_\beta$  où  $\mathcal{D}_\beta$  est défini par

$$\mathcal{D}_\beta = \{y \in [0, \ell] / f_\beta(y) = \beta(\ell - y) \times y\}$$

où  $f_\beta$  est une fonction de déplacement  $\ell$  est la largeur du rectangle défini dans (4.1) ;

- iv. Sinon, on déforme le bord en diminuant le volume de  $\Omega^n$  comme suit :  
 $\beta = \beta - 0,01$  ;  
 $\Omega^n = \Omega^n \cup \mathcal{D}_\beta$  ;

3. Critère de fin. Arrêter si (4.8) est plus petit que  $\epsilon_{stop}$ . Revenir sur  $\Omega^n$ .

---

### 4.1.4 Illustrations numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques simulations numériques. Les simulations numériques présentées sont obtenues pour différentes valeurs de la fonction  $q$ . La mesure  $h$  est définie par  $h = y^2 + cste$  où  $cste$  est un réel.

Dans la suite, on désignera  $\ell_{app}$  la longueur approchée du domaine rectangulaire. Cette dernière représente la distance entre le sommet de la parabole (bord déformé) et le bord accessible  $\Gamma_0$ .

**Pour  $q = 1$**

$cste$	5,2	5,6	5,8	8
$\ell_{app}$	1,7025	2,1175	0,5625	0,15



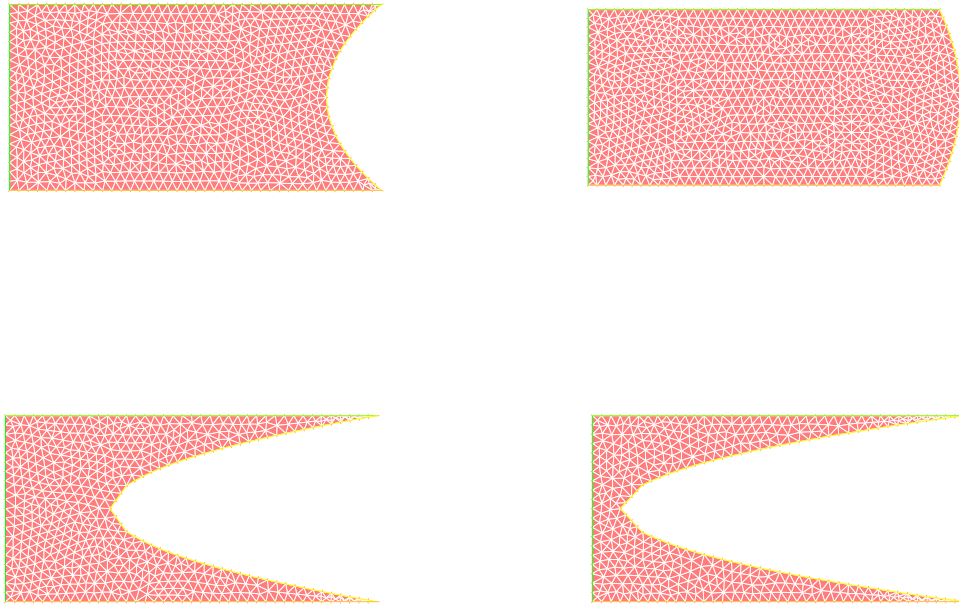


FIGURE 4.5 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines optimaux  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 168, 4, 624, 789$  resp. pour  $cste = 5, 2 ; 5, 6 ; 5, 8 ; 8$

**Pour**  $q = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

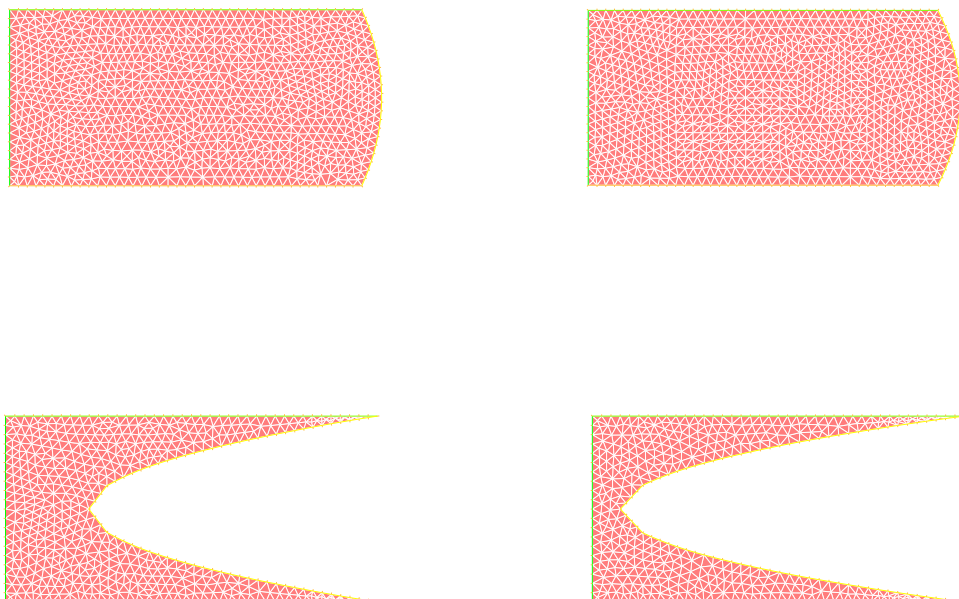


FIGURE 4.6 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines optimaux  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 4, 2, 670, 789$  resp. pour  $cste = 5, 4 ; 5, 6 ; 5, 8 ; 7$

$cste$	5,3	5,6	5,8	8
$\ell_{app}$	2,1125	2,1275	0,4475	0,15

Pour  $q = \exp(x + y)$

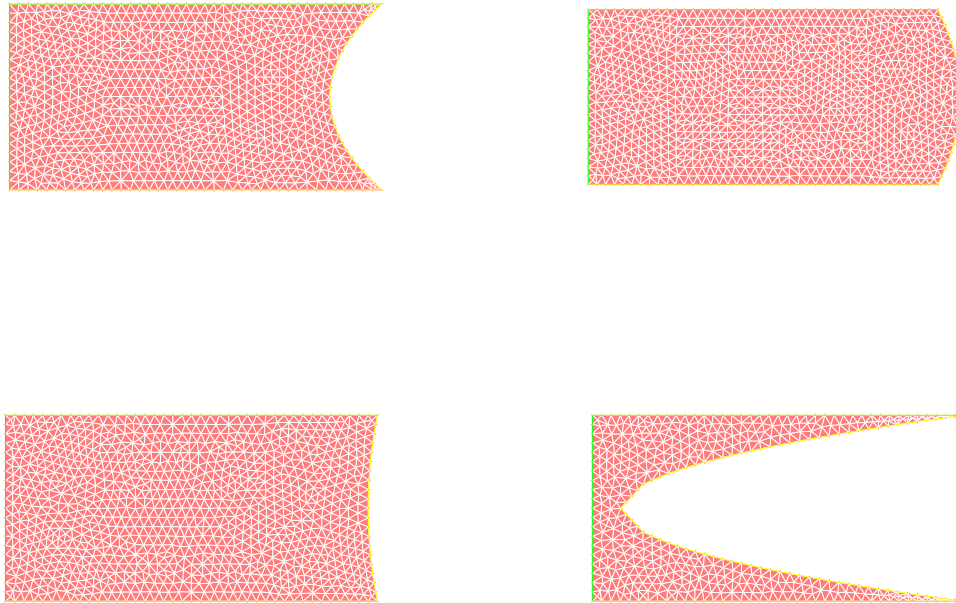


FIGURE 4.7 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines optimaux  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 161, 2, 69, 788$  resp. pour  $cste = 5,4 ; 5,8 ; 5,87 ; 7$

$cste$	5,4	5,8	5,87	7
$\ell_{app}$	1,72	2,1275	1,95	0,1525

## 4.2 Méthode numérique par une déformation géométrique générale avec un problème d'optimisation de forme

L'idée est de résoudre numériquement (4.1) en exécutant une itération du premier ordre du gradient basée sur des outils d'optimisation de forme. L'approche utilise une méthode bien connue en optimisation de forme voir [33], [73] et [93] qui ont déjà établi des outils qui permettent de résoudre un tel problème à frontière libre. L'idée principale consiste à reformuler le problème (4.1) en un problème d'optimisation de forme

$$\min \{J(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}_\epsilon; |\Omega| = V_0\} \quad (4.9)$$

avec

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\Omega}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x) u_{\Omega}^2 dx$$

où  $u_\Omega$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega + q(x)u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = k_0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = h & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Pour faire cette étude, il existe différentes approches pour écrire un problème aux limites en un problème d'optimisation de forme. Et l'une d'entre elle consiste à choisir une des conditions aux bords du problème à frontière libre pour obtenir un problème bien posé. Alors l'étude numérique du problème de minimisation exploite des informations du gradient quand nous utilisons la méthode du premier ordre et exploite la matrice hessienne quand nous utilisons la méthode du second ordre. Ceci requiert respectivement le calcul de la dérivée de forme  $J$  et le calcul de la dérivée seconde de  $J$ . Bien évidemment, il existe plusieurs méthodes de calcul de la dérivée de forme de  $J$  grâce à différentes techniques soit par la méthode du champ des vecteurs voir [36], [59], [73] et [96] ou par la méthode du minimax et du lagrangien voir [40], [41], [97] et [98]. Dans ce chapitre, nous utiliserons la méthode du champ des vecteurs pour calculer la dérivée de forme de  $J$ .

Rappelons tout d'abord que  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  est l'espace des fonctions lipschitziennes  $\phi$  de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  telles que  $\phi$  et  $\nabla\phi$  sont uniformément bornés dans  $\mathbb{R}^N$ . Cet espace muni de la norme

$$\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (|\phi(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\nabla\phi(x)|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N})$$

est un espace de Banach. On désigne par  $|\cdot|_{\mathbb{R}^N}$  une norme euclidienne et par  $|\cdot|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}$  la norme matricielle sur  $\mathbb{R}^N$ . On définit alors un espace de difféomorphisme (ou bijections dérivables d'inverses dérivables) sur  $\mathbb{R}^N$  par

$$\mathcal{T}_d = \left\{ T \text{ tel que } (T - I) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), (T^{-1} - I) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \right\}. \quad (4.11)$$

On remarque que les difféomorphisme de  $\mathcal{T}_d$  sont des perturbations de l'identité  $I$ . On peut alors obtenir  $\Omega$  par déformation de  $\Omega_0$  c'est à dire  $\Omega = T(\Omega_0)$ . Puisque les fonctions de  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  sont continues, les applications  $T$  de  $\mathcal{T}_d$  sont aussi des homéomorphismes (ou bijections continues d'inverses continus), ce qui entraîne qu'elles préservent la topologie des domaines auxquels elles s'appliquent. De ce fait, toutes les formes ont la même topologie que  $\Omega_0$ .

Comme on compare  $T_s$  à l'identité  $I$ , alors qu'il existe un  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  tel que  $I + \theta$  est un difféomorphisme représentant l'identité perturbée  $T_s$ , on peut choisir

$$T_s = I + s\theta,$$

pour  $s$  assez petit. Avec cette notation, l'ensemble  $\Omega = (I + \theta)(\Omega_0)$  est défini par  $\Omega = \{x + \theta(x), x \in \Omega_0\}$ . On peut donc voir  $\theta(x)$  comme un champ de vecteur qui transporte ou déplace le domaine de référence  $\Omega_0$ . On pourra alors définir une notion de différentiabilité en  $\Omega_0$  en utilisant la dérivation par rapport à  $\theta$ .

Pour ce faire nous allons nous appuyer sur la méthode de Hadamard, reprise par Murat et Simon [72] et expliquée par Henrot-Pierre [59], Allaire [3] et Delfour-Zolésio [33]. Nous considérons une perturbation du domaine  $\Omega$  dans le sens suivant  $\Omega_\theta = (I + \theta)(\Omega)$ , où  $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un champ de vecteur.

**Définition 79.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Soit une fonction  $f$ , définie sur un voisinage de  $u \in X$  à valeurs dans  $Y$ . On dit que  $f$  est différentiable au sens de Fréchet en  $u$  s'il existe une application linéaire continue  $L$  de  $X$  dans  $Y$  telle que

$$f(u + w) = f(u) + L(w) + o(w), \text{ avec } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\|o(w)\|_Y}{\|w\|_X} = 0. \quad (4.12)$$

On appelle  $L = f'(u)$  la différentielle (ou dérivée ou gradient) de  $f$  en  $u$ .

**Définition 80.** La dérivée de forme de  $J(\Omega)$  est définie comme la dérivée au sens de Fréchet dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  en 0 de l'application  $\theta \mapsto J(\Omega_\theta)$  c'est à dire

$$J(\Omega_\theta)(\Omega) = J(\Omega) + dJ(\Omega)(\theta) + o(\theta), \quad (4.13)$$

avec  $o(\theta) \rightarrow 0$  quand  $\theta \rightarrow 0$ ; où  $dJ(\Omega)$  est une forme linéaire et continue sur  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ .

**Proposition 23.** Soit  $\Omega$  solution du problème d'optimisation de forme (4.9) (avec le volume fixé  $|\Omega| = V_0$ ). Nous supposons également que la partie  $\Gamma_0$  de la frontière  $\partial\Omega$  est fixée. Alors la fonctionnelle de forme  $J(\Omega)$  est différentiable et il existe un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_\Omega \in \mathbb{R}$  tel que

$$\left(\frac{\partial u_\Omega}{\partial \nu}\right)^2 = -2\lambda_\Omega \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 := \Gamma \quad (4.14)$$

avec  $u_\Omega$  solution du système (4.10).

*Démonstration.* Nous allons utiliser la dérivation par rapport au domaine dans la direction du vecteur  $\theta$ , on a la fonctionnelle

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_\Omega|^2 + q(x)u_\Omega^2) dx dt$$

alors la fonctionnelle dépendant du domaine perturbé est donnée par

$$J(\Omega_s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (|\nabla u_{\Omega_s}|^2 + q(x)u_{\Omega_s}^2) dx.$$

En faisant un changement de variable  $x = T_s(y)$  alors on a

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + q(x)u_\Omega^2 \right) \gamma(s) dy.$$

En utilisant la formule de Hadamard

$$dJ(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) \gamma(s) dy \right\} dy$$

$$dJ(\Omega) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) \gamma(0) + \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s) \right\} dy;$$

On a  $\gamma(0) = 1$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) &= \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega + q(x)u_\Omega u'_\Omega + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) \frac{\partial}{\partial s} T_s^i \\ &= \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega + q(x)u_\Omega u'_\Omega + \nabla_y \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) \theta; \end{aligned}$$

aussi on a

$$\frac{\partial}{\partial s} \gamma(s) = \text{div} \theta$$

alors on obtient

$$dJ(\Omega) = \int_{\Omega} \left\{ \nabla u_\Omega \nabla u'_\Omega + q(x)u_\Omega u'_\Omega + \nabla_y \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) \theta + \left( \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 + \frac{1}{2} q(x)u_\Omega^2 \right) \text{div} \theta \right\} dy.$$

Or en utilisant

$$\text{div}(f\theta) = \nabla f \cdot \theta + f \text{div} \theta. \quad (4.15)$$

$$dJ(\Omega) = \int_{\Omega} \left\{ \nabla u_{\Omega} \nabla u'_{\Omega} + q(x) u_{\Omega} u'_{\Omega} + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + \frac{1}{2} q(x) u_{\Omega}^2 \right) \cdot \theta \right] \right\} dy.$$

En utilisant la formule de Green, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\Omega} \nabla u'_{\Omega} = \int_{\Omega} -\Delta u_{\Omega} u'_{\Omega} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} u'_{\Omega} d\sigma.$$

Puisque  $\Omega$  est lipschitzien et en utilisant la formule de la divergence (1.1) on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + \frac{1}{2} q(x) u_{\Omega}^2 \right) \cdot \theta \right] = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 + \frac{1}{2} q(x) u_{\Omega}^2 \right) \theta \cdot \nu d\sigma.$$

Aussi au bord  $u_{\Omega} = 0$  implique  $u_{\Omega}^2 = 0$  et de plus au bord  $u'_{\Omega} = -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \theta \nu$ . Alors on a

$$dJ(\Omega) = \int_{\Omega} (-\Delta u_{\Omega} + q(x) u_{\Omega}) u'_{\Omega} dy dt + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} u'_{\Omega} \theta \nu d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 \theta d\sigma.$$

Or dans (4.10)  $-\Delta u_{\Omega} + q(x) u_{\Omega} = 0$ , alors

$$dJ(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \left( -\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right) \theta \nu d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 \theta \nu d\sigma.$$

$$dJ(\Omega) = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 \theta \nu d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 \theta \nu d\sigma.$$

Soient  $x_0 \in \Gamma$  et  $x = x_0 - \nu \beta \in \Omega$  avec  $\beta > 0$ . Soit  $u_{\Omega} \geq 0$  et puisque  $u_{\Omega}$  est continue alors par le principe du maximum on a

$$\frac{u_{\Omega}(x_0 - \nu \beta) - u_{\Omega}(x_0)}{\beta} \geq 0$$

et par suite  $\frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \geq 0$ , or au bord  $\Gamma$  on a  $\nabla u_{\Omega} = \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \nu$ . On obtient

$$dJ(\Omega) = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 \theta \nu d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 \theta \nu d\sigma.$$

Donc

$$dJ(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 \theta \nu d\sigma.$$

Grâce à la contrainte du volume conservé, nous pouvons conclure et nous avons alors :

$$\exists \lambda_{\Omega} \in \mathbb{R} : \left( \frac{\partial u_{\Omega}}{\partial \nu} \right)^2 = -2\lambda_{\Omega} \text{ on } \Gamma.$$

□

En général, la dérivée de forme prend une forme générale qui s'écrit de la manière suivante

$$dJ(\Omega, \theta) = \int_{\Gamma} \phi \theta \cdot \nu d\sigma = (\phi, \theta \cdot \nu)_{L^2(\Gamma)}, \quad (4.16)$$

où la fonction  $\phi$  dépend de l'état  $u_{\Omega}$  et de l'adjoint  $p$ ,  $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est le gradient de forme de  $J$  par rapport au produit scalaire de  $L^2(\Gamma)$ . Cette méthode est connue sous le nom du théorème des structures pour mieux comprendre cette notion, nous renvoyons au livre [59]. En particulier,  $dJ(\Omega, \theta)$  ne dépend que des valeurs de la composante normale  $\theta \cdot \nu$  sur la frontière libre  $\Gamma$ ; cela reflète le fait intuitif que les déformations tangentielles de  $\Omega$  ne modifient pas les valeurs de  $J(\Omega, \theta)$  au premier ordre. Pour plus de détails, la structure (4.16) permet de déduire des directions de descente pour  $J(\Omega, \theta)$ . En effet, si  $\theta$  coïncide avec  $-\phi \nu$  sur  $\Gamma$ , il résulte facilement de (4.13) que, pour  $t > 0$  assez petit :

$$J(\Omega_{t\theta}, \theta) = J(\Omega, \theta) - t \int_{\Gamma} \phi^2 ds + o(t) < J(\Omega, \theta). \quad (4.17)$$

### 4.2.1 Lagrangien augmenté

Le lagrangien augmenté nous permet d'écrire un problème d'optimisation avec contrainte en un problème d'optimisation sans contraintes. Cette méthode fait intervenir un critère de pénalisation et un multiplicateur de Lagrange ce qui permet d'obtenir un meilleur conditionnement et une convergence rapide et précise. Pour plus d'informations sur cette notion nous renvoyons le lecteur à consulter [33] et [75]. C'est ainsi que nous allons considérer le problème suivant

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{O}_\epsilon} \mathcal{L}(\Omega, l^n, b^n) \quad (4.18)$$

où

$$\mathcal{L}(\Omega, l, b) = J(\Omega) - lH(\Omega) + \frac{b}{2}H(\Omega)^2. \quad (4.19)$$

Dans la définition du lagrangien augmenté  $\mathcal{L}$ , le paramètre  $b$  est un facteur de pénalité (positif) pour la violation de la contrainte  $H(\Omega) = 0$ .  $H(\Omega)$  est définie par  $H(\Omega) = Vol(\Omega) - Vol_{cible}$  où  $Vol(\Omega) = \int_{\Omega} dx$  et  $Vol_{cible}$  est la valeur du volume cible.  $l$  est une estimation du multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte dans (4.9).

L'algorithme du lagrangien augmenté entrelace la recherche du minimiseur  $\Omega_n$  de  $\Omega \mapsto \mathcal{L}(\Omega, l^n, b^n)$  pour des valeurs fixées de  $l^n$  et  $b^n$  et la mise à jour de ces coefficients selon la règle :

$$l^{n+1} = l^n - b^n H(\Omega^n)$$

et

$$b^{n+1} = \begin{cases} \alpha b^n & \text{si } b < b_{cible} \\ b^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $\alpha > 1$ .

### 4.2.2 Régularisation du gradient de forme

Rappelons que notre objectif est d'étudier le problème d'optimisation de forme suivant

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}_\epsilon} J(\Omega). \quad (4.20)$$

Comme dans la section précédente, le choix naturel pour une direction de descente est

$$\theta = -\phi\nu, \quad (4.21)$$

$\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est le gradient de forme de  $J$  par rapport au produit scalaire de  $L^2(\Gamma)$ . Il est identifié à partir de la fonctionnelle de forme (4.16). Cependant, ce choix est généralement faux pour deux raisons :

1. Dans un premier temps, (4.21) n'a de sens que sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ , alors que la valeur numérique du paramètre nécessite à ce champ de vitesse  $\theta$  qui soit défini sur l'ensemble  $\Omega$ .
2. Ensuite, le gradient de forme  $\phi$  de  $J$  dans  $L^2(\Gamma)$  peut être dans les voisinages de  $\Gamma$  en raison du changement de conditions qui se produisent. Cela peut provoquer des artéfacts numériques en ce qui concerne la taille du maillage du processus.

Il est donc souvent souhaitable de régulariser le champ de vitesse  $\theta$  sur  $\Gamma$  avant de réaliser le maillage.

L'idée de base consiste à identifier un gradient de forme pour  $J(\Omega)$  à partir de sa dérivée de forme  $dJ(\Omega)$  voir (4.16) au moyen d'un produit interne  $(\cdot, \cdot)_W$  différent de  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma)}$ , agissant sur

un espace de Hilbert  $W$  de champs de vecteurs plus réguliers, définis en général sur  $\Omega$ . Plus précisément, nous recherchons  $\theta \in W$  telle pour toute fonction test  $\psi \in W$ , on ait :

$$(\theta, \psi)_W = dJ(\Omega)(\psi) = \int_{\Gamma} \phi \psi \cdot \nu d\sigma. \quad (4.22)$$

Ce qui assure que :

$$dJ(\Omega)(-\theta) = -(\theta, \theta)_W < 0,$$

ce qui combiné à (4.17), assure que  $\theta$  est une direction de descente pour  $J(\Omega)$ . Dans le cas de cette thèse, pour plus de précision, nous allons considérer l'espace

$$W = \left\{ w \in H^1(\Omega)^N, w|_{\Gamma_0} = 0, \nabla_{\Gamma} w \in L^2(\Gamma)^N \right\},$$

où  $\nabla_{\Gamma} f = \nabla f - (\nabla f \cdot \nu)\nu$  est le gradient tangentielle d'une fonction régulière  $f$ ;  $W$  muni d'un produit scalaire

$$\forall \theta, \psi \in W, (\theta, \psi)_W = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \theta \cdot \nabla_{\Gamma} \psi d\sigma. \quad (4.23)$$

Le second terme de (4.23) correspond à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\Gamma$ . Il sert à renforcer la finesse de la direction de descente  $\theta$  sur  $\Gamma$ . À partir de ces considérations, calculer le gradient de forme de  $\theta$  raffiné revient à résoudre (4.22) avec une méthode des éléments finis standard sur un maillage de  $\Omega$ .

**Remarque 18.** Une idée naturelle peut consister à choisir

$$W = \left\{ w \in H^1(\Omega)^N, w|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$$

muni du produit interne associé :

$$(\theta, \psi)_W = \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega} \theta \psi dx. \quad (4.24)$$

Dans ce contexte, résoudre (4.22) équivaut à résoudre le problème elliptique de régularisation suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \theta + \theta = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = -\phi \nu & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.25)$$

### 4.2.3 Simulations et illustrations numériques

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega} + q(x)u_{\Omega} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{\Omega} = 1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u_{\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.26)$$

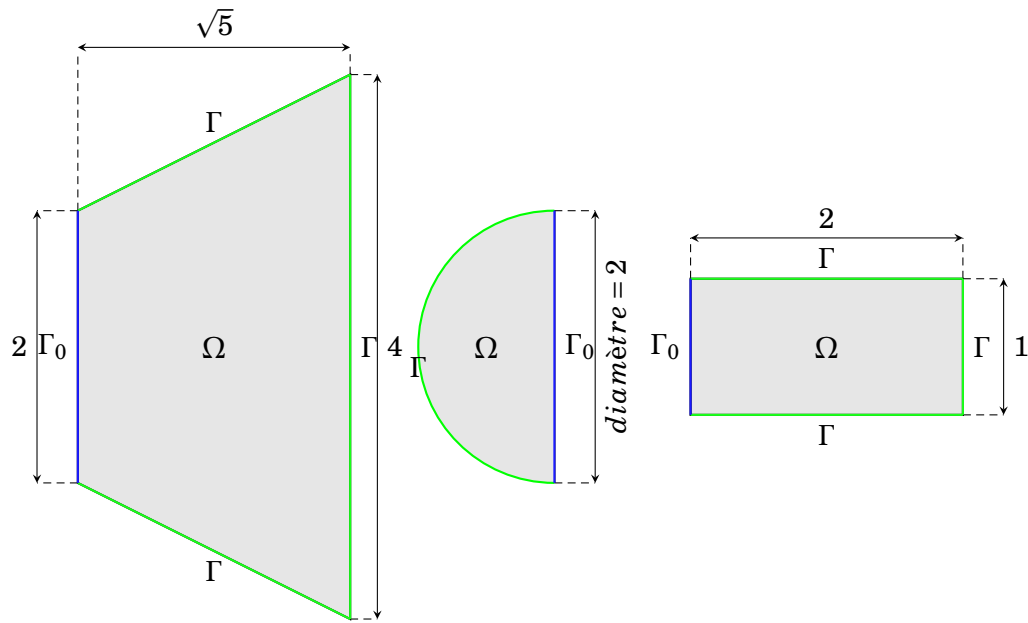


FIGURE 4.8 – Domaines initiaux



---

**Algorithm 3** : Algorithme proposé par une déformation géométrique générale avec un problème d'optimisation de forme

---

1. Initialisation

- i. Choisir  $\Omega^0 \in \mathcal{O}_{ad}$  (La forme initiale est munie d'un maillage triangulaire  $\mathcal{T}^n$ ) et la précision  $\epsilon_{stop}$
- ii. Donner les valeurs initiales pour les coefficients  $l^0, b^0 > 0$  de la valeur incrémentée (algorithme lagrangien.)

2. Boucle principale : pour  $n = 0, \dots$

- (i) Calculer la solution  $u^n$  du système de Laplace (4.26) sur le maillage  $\mathcal{T}^n$  de  $\Omega$ ;
- (ii) Calculer dans  $L^2(\Gamma^n)$  le gradient de forme  $\phi^n : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\Omega, l^n, b^n)$ .
- (iii) Dériver une direction de descente  $\theta^n$  pour  $\Omega \rightarrow \mathcal{L}(\Omega, l^n, b^n)$  par la résolution (4.14) et (4.16) sur le maillage  $\mathcal{T}^n$ .
- (iv) Calculer l'estimation suivante :

$$\left| - \int_{\Gamma_0} h \, d\sigma - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0} \frac{\partial u_\Omega^n}{\partial \nu} \, d\sigma + \int_{\Omega} q(x) \times u_\Omega^n \, dx \right| \quad (4.27)$$

où  $\nu$  est la normale extérieure;

- (v) Trouver une direction de descente  $\tau^n$  telle que

$$\mathcal{L}((\mathbf{Id} + \tau^n \theta^n)(\Omega^n), l^n, b^n) < \mathcal{L}(\Omega^n, l^n, b^n) \quad (4.28)$$

(moyennant une petite tolérance si nécessaire)

- (vi) Déplacer les sommets de  $\mathcal{T}^n$  selon  $\tau^n$  et  $\theta^n$  :

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \tau^n \theta^n(X_i^n) \quad (4.29)$$

- Si le maillage résultant est invalide, retournez à l'étape (vi) et utilisez une valeur plus petite pour  $\tau^n$ ,
- Sinon, les positions (4.29) définissent les sommets du nouveau maillage  $\mathcal{T}^{n+1}$ .
- (vii) Si la qualité de  $\mathcal{T}^{n+1}$  est trop faible, utiliser un remaillage local  $\mathcal{T}^n$  en d'autres termes,
  - Les bords "trop longs" sont divisés,
  - les extrémités des bords "trop courts" sont fusionnées,
  - la connectivité des triangles mal formés (par exemple, des triangles presque plats) est permutée
  - les sommets sont déplacés tant que la qualité globale du maillage est améliorée.
- (viii) Mettez à jour les paramètres du lagrangien augmenté en fonction de (4.28).

- 3. Critère de fin. Arrêter si (4.27) est plus petit que  $\epsilon_{stop}$ ; Revenir sur  $\Omega^n$ .
- 

#### 4.2.4 Illustrations numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques simulations numériques. Les simulations numériques présentées sont obtenues pour  $q = 1$  dans (4.2). La mesure  $h$  est définie par  $h = y^2 + cste$  où  $cste \in \mathbb{R}$ . Le critère d'arrêt  $\epsilon_{stop} = 6.10^{-2}$ . La valeur initiale du coefficient de

pénalité  $b^0$  dans le lagrangien augmenté est égale à  $10^{-2}$ . La valeur initiale du coefficient du multiplicateur de Lagrange  $l^0$  dans la définition du Lagrangien augmenté est égale à 10.

- Pour un rectangle

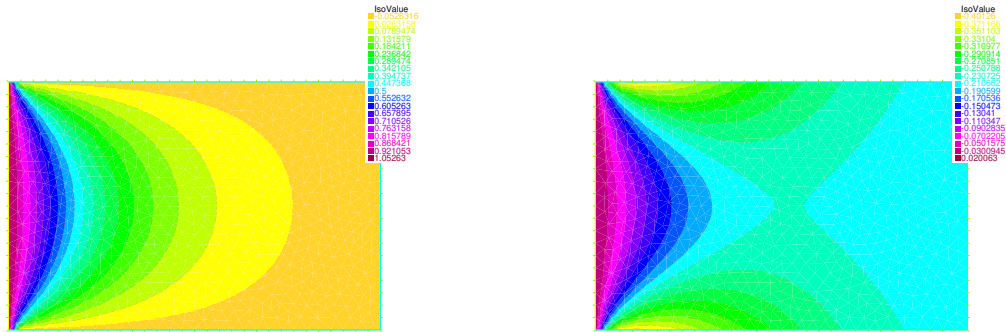


FIGURE 4.9 – *Solution directe à gauche , solution adjointe à droite*

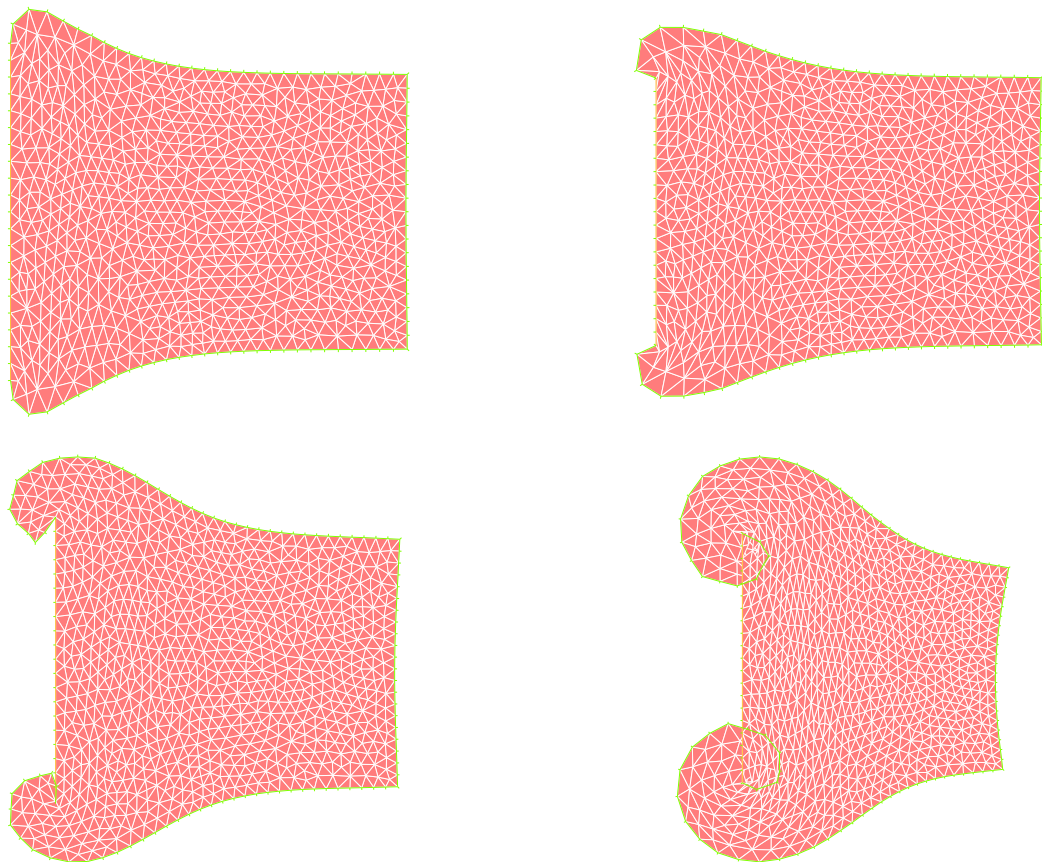


FIGURE 4.10 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 21, 30, 72, 309$  pour  $cste = 7$ .

- Pour une forme quelconque

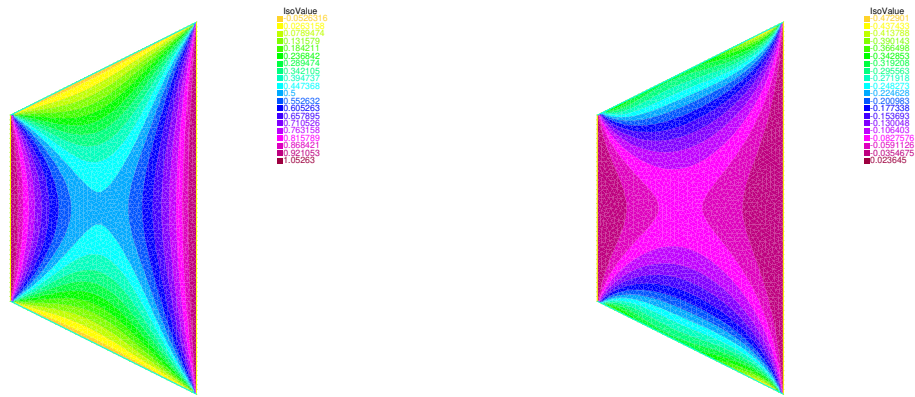


FIGURE 4.11 – *Solution directe à gauche , solution adjointe à droite*

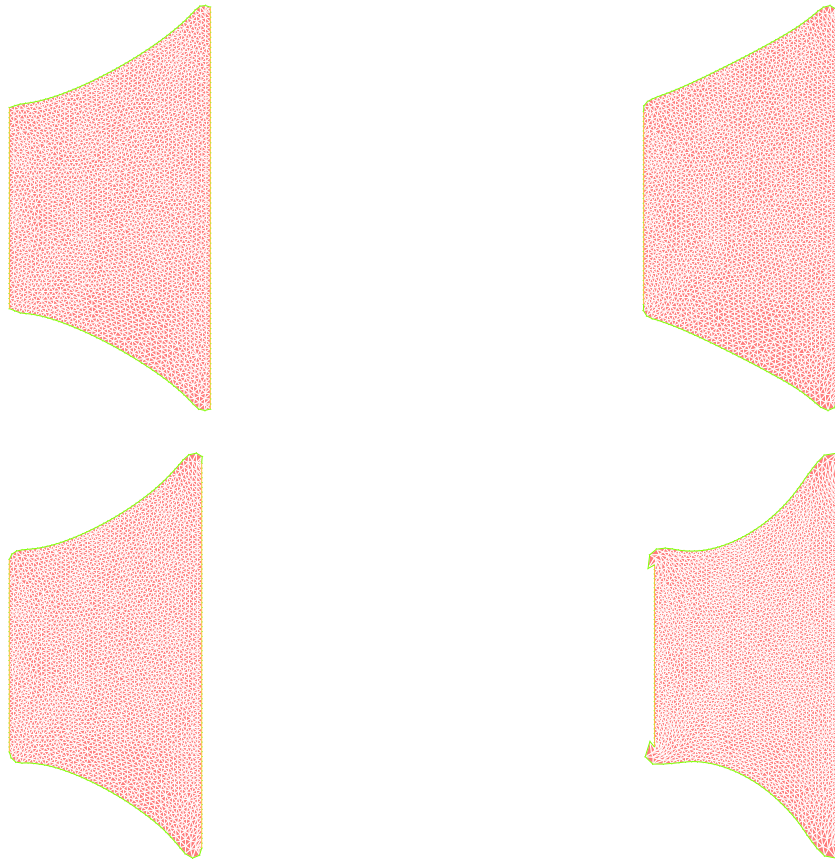


FIGURE 4.12 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 24, 42, 66, 168$  pour  $cste = 1,2$ .

- Pour un diamètre

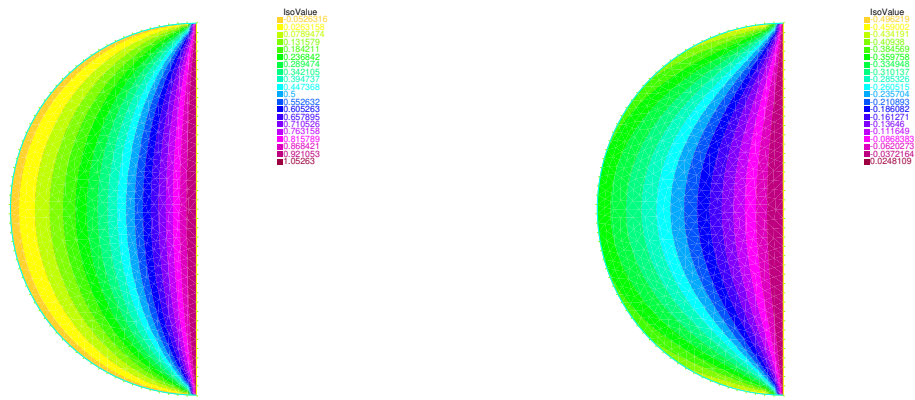


FIGURE 4.13 – *Solution directe à gauche , solution adjointe à droite*

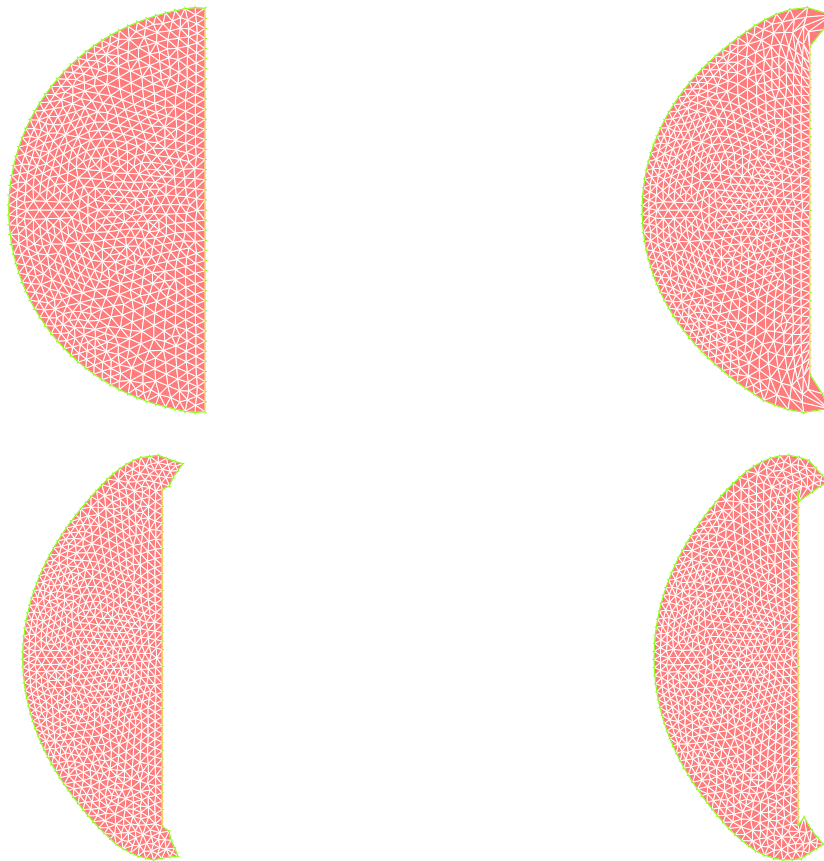


FIGURE 4.14 – De gauche à droite, de haut en bas, formes successives des domaines  $\Omega^n$  aux itérations  $n = 0, 39, 72, 84$  pour  $cste = 1,5$ .

---

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

## Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié un problème d'analyse géométrique des formes sous la contrainte d'un problème aux limites parabolique non linéaire. Nous nous sommes proposé d'identifier un domaine en passant par l'étude d'un problème inverse en utilisant les outils d'optimisation de formes géométriques dans un premier temps de manière théorique et ensuite de manière numérique. Ainsi nous avons pu apporter une première contribution dans notre article : " G. I Sadio, D. Seck, Shape reconstruction in a non-linear problem. In *Nonlinear analysis, geometry and applications. Proceedings of the first biennial international research symposium, NLAGA-BIRS, Dakar, Senegal, June 24–28, 2019, pages 379–397. Cham : Birkhäuser, 2020* " et une seconde contribution dans " G. I Sadio, A. Seck and D. Seck, Numerical and theoretical analysis for optimal shape inverse problems. In *Nonlinear analysis, geometry and applications. Proceedings of the second biennial international research symposium, NLAGA-BIRS, Cap-Skiring, Senegal, January 25-30, 2022, to appear. Cham : Birkhäuser, 2022.*"

Dans cette thèse, nous avons commencé par rappeler les outils nécessaires que nous avons utilisés dans les trois derniers chapitres.

Dans le chapitre 2, nous nous sommes attelé sur des questions d'existence de solutions. Nous avons commencé par étudier un problème parabolique linéaire par la méthode spectrale en utilisant la formulation variationnelle et le problème abstrait ; ainsi nous avons pu montrer l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, nous avons étudié l'existence de solution d'un problème aux limites paraboliques non linéaire par la méthode des points fixes de Schauder et de Schaefer. Enfin dans ce chapitre nous avons tourné notre attention à l'étude de solution du point de vue de l'optimisation de formes géométriques. Ainsi nous avons montré l'existence de solution sous la propriété de cône uniforme et l'existence de solution sous la contrainte de la  $\gamma$ -convergence avec des arguments de monotonie de la fonctionnelle puis de la compacité de l'ensemble admissible.

Le chapitre 3 s'est porté sur l'identification de domaine. Pour ce faire nous avons cherché à établir des conditions d'optimalité du premier ordre par l'approche de perturbation de domaine par des champs de vecteurs, puis de la théorie du minimax et du lagrangien et nous avons présenté la dérivation par rapport au domaine en calculant la dérivée de forme et la dérivée topologique. Ce chapitre s'est achevé par une reconstruction de domaine en utilisant un problème inverse et les principes de comparaison.

Le chapitre 4 a fait l'objet d'analyse et de simulation numérique. Dans ce chapitre nous avons dans un premier temps suivi l'approche de [73], ce qui nous a conduit à trois approches numériques afin de pouvoir faire des simulations numériques. La première consiste à faire une

translation du bord inaccessible et la seconde utilise la déformation du bord inaccessible. La troisième suit une approche d'optimisation de formes géométriques en passant par la méthode du lagrangien augmenté pour faire des simulations numériques. Tout d'abord dans cette dernière partie, nous avons commencé par déterminer les conditions d'optimalité qui nous ont permis d'utiliser la méthode du lagrangien augmenté et de proposer un algorithme qui s'est conclu par des simulations numériques.

## Perspectives

À la lumière de nos contributions, quelques perspectives apparaissent, conduisant à de futures recherches :

- En effet, nous pouvons chercher à établir l'existence de solution du problème de minimisation d'optimisation de formes géométriques étudié dans cette thèse sous la contrainte de la  $\gamma$ -convergence en passant par la relaxation. Puisque le problème d'optimisation de formes géométriques n'admet pas de solution dans le cadre des domaines de  $\mathbb{R}^N$  sans des hypothèses restrictives supplémentaires qui sont en fait des contraintes. Il sera utile de chercher une solution dans une classe plus large d'objets sur laquelle on cherche à minimiser une fonctionnelle : c'est l'idée de la relaxation. En mathématiques, une technique de relaxation est une méthode d'optimisation qui consiste à remplacer une contrainte stricte en contrainte moins stricte, voire à la supprimer. Les techniques de relaxation sont expliquées et utilisées en optimisation pour montrer l'existence de solution. Pour plus de détails sur cette théorie, nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple à [59], [24].
- Dans les problèmes d'optimisation de formes, une question supplémentaire se révèle indispensable à la compréhension mathématique du problème, à savoir s'il existe un domaine qui est solution du problème considéré, quelle est la régularité des formes optimales obtenues? Cette question est en générale difficile. La difficulté réside sur le fait qu'on ne peut pas affirmer automatiquement si le domaine est un ensemble ouvert ou pas par rapport à une topologie donnée.
- Puisque nous avons fait une reconstruction de domaine d'une partie du bord en cherchant les conditions d'optimalité par la méthode des champs de vecteur et en utilisant le problème inverse alors nous pouvons penser à faire une identification de domaine en cherchant les conditions d'optimalité par la méthode du minimax et du lagrangien tout en utilisant le même problème inverse considéré dans cette thèse.
- Comme la thèse a porté sur des problèmes d'analyse géométrique des formes optimales sous la contrainte d'un problème aux limites paraboliques non linéaires, il serait intéressant de regarder le cas où on ajoute aux équations considérées un terme stochastique par exemple un bruit blanc.
- Une autre idée assez intéressante serait de supposer que l'on ne peut pas déterminer le domaine de façon déterministe et on essaye de déterminer le domaine de manière probabiliste. Par exemple, on étudie le cas dans lequel certaines des contraintes dépendent des variables aléatoires.
- Il serait aussi important d'étudier certains aspects de cette thèse avec des problèmes hyperboliques linéaires et non linéaires, Navier-Stokes, ...
- Du point de vue numérique, un des challenges serait d'étudier le même problème d'abord avec l'approche du lagrangien puis du minimax et enfin d'étudier le même problème avec des outils d'optimisation de forme topologique.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Abdelwahed, N. Chorfi, and R. Malek. Reconstruction of Tesla micro-valve using topological sensitivity analysis. *Adv. Nonlinear Anal.*, 9 :567–590, 2020.
- [2] Mohamed Abdelwahed, Azhar Al Salem, Nejmeddine Chorfi, and Maatoug Hassine. Topological sensitivity analysis of a time-dependent nonlinear problem. *Boundary Value Problems*, 2019(1) :1–12, 2019.
- [3] Grégoire Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146. New York, NY : Springer, 2002.
- [4] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Palaiseau : Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [5] H. W. Alt and L. A. Caffarelli. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.*, 325 :105–144, 1981.
- [6] Hans Wilhelm Alt, Luis A. Caffarelli, and Avner Friedman. Variational problems with two phases and their free boundary. *Trans. Am. Math. Soc.*, 282 :431–461, 1984.
- [7] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Courier Corporation, 2000.
- [8] Jean-Pierre Aubin and Hélène Frankowska. *Set-valued analysis. Reprint of the 1990 original*. Boston, MA : Birkhäuser, reprint of the 1990 original edition, 2009.
- [9] Jerico B Bacani. *Methods of shape optimization in free boundary problems*. na, 2013.
- [10] Claudio Baiocchi and António Capelo. Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problems. Transl. from the Italian by Lakshmi Jayakar. A Wiley-Interscience Publication. Chichester etc. : John Wiley and Sons. ix, 452 p. £29.50 (1984)., 1984.
- [11] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*. Paris etc. : Masson. XIV, 233 p. FF 125.00 (1983)., 1983.
- [12] Tanguy Briançon, Mohammed Hayouni, and Michel Pierre. Lipschitz continuity of state functions in some optimal shaping. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 23(1) :13–32, 2005.
- [13] Tanguy Briançon and Jimmy Lamboley. Regularity of the optimal shape for the first eigenvalue of the Laplacian with volume and inclusion constraints. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 26(4) :1149–1163, 2009.
- [14] Tanguy Briançon. Regularity of optimal shapes for the Dirichlet's energy with volume constraint. *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 10 :99–122, 2004.
- [15] D. Bucur, Giuseppe Buttazzo, and A. Henrot. Existence results for some optimal partition problems. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 8, 01 1998.

- [16] Dorin Bucur. How to prove existence in shape optimization. *Control Cybern.*, 34(1) :103–116, 2005.
- [17] Dorin Bucur. Do optimal shapes exist? *Milan Journal of Mathematics*, 75(1) :379–398, 2007.
- [18] Dorin Bucur. Minimization of the  $k$ -th eigenvalue of the Dirichlet Laplacian. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206(3) :1073–1083, 2012.
- [19] Dorin Bucur and Giuseppe Buttazzo. *Variational methods in shape optimization problems*, volume 65. Basel : Birkhäuser, 2005.
- [20] Dorin Bucur and Alessandro Giacomini. Minimization of the  $k$ -th eigenvalue of the Robin-Laplacian. *J. Funct. Anal.*, 277(3) :643–687, 2019.
- [21] G. Buttazzo, G. Dal Maso, A. Garroni, and A. Malusa. On the relaxed formulation of some shape optimization problems. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 7(1) :1–24, 1997.
- [22] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso. Shape optimization for Dirichlet problems : Relaxed solutions and optimality conditions. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 23(2) :531–535, 1990.
- [23] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso. Shape optimization for Dirichlet problems : Relaxed formulation and optimality conditions. *Appl. Math. Optim.*, 23(1) :17–49, 1991.
- [24] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso. An existence result for a class of shape optimization problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 122(2) :183–195, 1993.
- [25] Jean C ea. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la d eriv ee directionnelle de la fonction co ut. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20(3) :371–402, 1986.
- [26] Denise Chenaiss. On the existence of a solution in a domain identification problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 52, 1975.
- [27] Mourad Choulli. *Une introduction aux probl emes inverses elliptiques et paraboliques.*, volume 65. Berlin : Springer, 2009.
- [28] Philippe G Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.
- [29] Rafael Correa and Alberto Seeger. Directional derivative of a minimax function. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 9(1) :13 – 22, 1985.
- [30] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Volume II : Partial differential equations. Transl. and rev. from the German Original. Reprint of the 1st Engl. ed. 1962*. New York etc. : John Wiley & Sons/Interscience Publishers, reprint of the 1st engl. ed. 1962 edition, 1989.
- [31] Gianni Dal Maso. *An introduction to  $\Gamma$ -convergence.*, volume 8. Basel : Birkh user, 1993.
- [32] Gianni Dal Maso and Umberto Mosco. Wiener’s criterion and  $\Gamma$ -convergence. *Appl. Math. Optim.*, 15 :15–63, 1987.
- [33] Charles Dapogny, Pascal Frey, Florian Omnes, and Yannick Privat. Geometrical shape optimization in fluid mechanics using freefem++. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58(6) :2761–2788, 2018.
- [34] M-C Delfour and J-P Zolesio. Analyse des probl emes de forme par la d erivation des minimax. In *Annales de l’IHP Analyse non lin aire*, volume 6, pages 211–227, 1989.
- [35] M. C. Delfour and J.-P. Zol esio. Shape sensitivity analysis via min max differentiability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 26(4) :834–862, 1988.
- [36] Michel Delfour and J.-P. Zol esio. *Shapes and Geometries : Metrics, Analysis, Differential Calculus et Optimization*. 01 2011.



- [37] Michel C Delfour. Differentials and semidifferentials for metric spaces of shapes and geometries. In *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, pages 230–239. Springer, 2015.
- [38] Michel C. Delfour. Control, shape, and topological derivatives via minimax differentiability of Lagrangians. In *Numerical methods for optimal control problems. Proceedings of the workshop, Rome, Italy, June 19–23, 2017*, pages 137–164. Cham : Springer, 2018.
- [39] Michel C Delfour. Topological derivative : a semidifferential via the minkowski content. *J. Convex Anal.*, 25(3) :957–982, 2018.
- [40] Michel C Delfour and Kevin Sturm. Minimax differentiability via the averaged adjoint for control/shape sensitivity. *IFAC-PapersOnLine*, 49(8) :142–149, 2016.
- [41] Michel C Delfour and Kevin Sturm. Parametric semidifferentiability of minimax of lagrangians : averaged adjoint approach. *Journal of Convex Analysis*, 24(4) :1117–1142, 2017.
- [42] James Dugundji and Andrzej Granas. *Fixed point theory*. New York, NY : Springer, 2003.
- [43] Ivar Ekeland and Roger Temam. *Convex analysis and variational problems*. SIAM, 1999.
- [44] Karsten Eppler. Second derivatives and sufficient optimality conditions for shape functionals. *Control and Cybernetics*, 29(2) :485–511, 2000.
- [45] Karsten Eppler and Helmut Harbrecht. Tracking neumann data for stationary free boundary problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(5) :2901–2916, 2010.
- [46] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations. 2nd ed.*, volume 19. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2nd ed. edition, 2010.
- [47] Gariepy R.F. Evans L.C. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC, 1992.
- [48] I. Faye, A. Sy, and D. Seck. On topological optimization and pollution in porous media. In *Mathematical modeling, simulation, visualization and e-learning. Proceedings of an international workshop held at Rockefeller Foundation’s Bellagio Conference Center, Milan, Italy, November 20–26, 2006.*, pages 209–237. Berlin : Springer, 2008.
- [49] Herbert Federer. Curvature measures. *Trans. Am. Math. Soc.*, 93 :418–491, 1959.
- [50] Herbert Federer. *Geometric measure theory. Repr. of the 1969 ed.* Berlin : Springer-Verlag, repr. of the 1969 ed. edition, 1996.
- [51] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, Inc. XIV, 347 p. (1964)., 1964.
- [52] Emna Ghezaiel, Maatoug Hassine, Mohamed Abdelwahed, and Nejmeddine Chorfi. Shape optimization of turbine blade cooling system using topological sensitivity analysis method. *Boundary Value Problems*, 2019(1) :167, 2019.
- [53] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 ed.* Berlin : Springer, reprint of the 1998 ed. edition, 2001.
- [54] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen. *Introduction to shape optimization. Theory, approximation, and computation*, volume 7. Philadelphia, PA : SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [55] JT Haslinger, Karl Kunisch, and Gunther Peichl. Shape optimization and fictitious domain approach for solving free boundary problems of bernoulli type. *Computational Optimization and Applications*, 26(3) :231–251, 2003.
- [56] Mohammed Hayouni. Lipschitz continuity of the state function in a shape optimization problem. *J. Convex Anal.*, 6(1) :71–90, 1999.

- [57] Frédéric Hecht. New development in freefem++. *Journal of numerical mathematics*, 20(3-4) :251–266, 2012.
- [58] Antoine Henrot, editor. *Shape optimization and spectral theory*. Berlin : De Gruyter, 2017.
- [59] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Shape variation and optimization. A geometrical analysis.*, volume 28. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2018.
- [60] Victor Isakov. *Inverse problems for partial differential equations. 2nd ed.*, volume 127. New York, NY : Springer, 2nd ed. edition, 2006.
- [61] E. Magenes J. L. Lions. *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications - Volume 1*. Travaux et Recherches Mathématiques. Dunod, 1968.
- [62] Otared Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.*, volume 13. Paris : Springer-Verlag, 1993.
- [63] N.V. Krylov. *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*. Reidel Publishing Company, 1987.
- [64] N.V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces*. Graduate Studies in Mathematics 096. AMS, 2008.
- [65] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Translated from the Russian by S. Smith.*, volume 23. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1968.
- [66] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble (PUG), 1997.
- [67] Nicolas Landais. A regularity result in a shape optimization problem with perimeter. *J. Convex Anal.*, 14(4) :785–807, 2007.
- [68] G M Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Equations*. WORLD SCIENTIFIC, 1996.
- [69] J.-L. Lions. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires (Etudes mathematiques)*. 2002.
- [70] Idrissa Ly and Diaraf Seck. Optimisation de forme et problème à frontière libre : cas du  $p$ -laplacien. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*, 12(1) :103–126, 2003.
- [71] Bijan Mohammadi and Olivier Pironneau. *Applied shape optimization for fluids. 2nd ed.* Oxford : Oxford University Press, 2nd ed. edition, 2009.
- [72] François Murat and Jacques Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. *Rapport du LA*, 189 :76015, 1976.
- [73] Lamine Ndiaye, Idrissa Ly, and Diaraf Seck. A shape reconstruction problem with the Laplace operator. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 4(1) :91–103, 2012.
- [74] Lamine Ndiaye, Alassane Sy, and Diaraf Seck. Pollution in porous media : non permanent cases. *J. Comput. Model.*, 2(1) :33–51, 2012.
- [75] Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [76] Antonio André Novotny and Jan Sokołowski. *Topological derivatives in shape optimization*. Berlin : Springer, 2013.
- [77] Antonio André Novotny and Jan Sokołowski. *An Introduction to the Topological Derivative Method*. Springer, 2020.
- [78] Antonio André Novotny, Jan Sokołowski, and Antoni Żochowski. *Applications of the topological derivative method*. Springer, 2019.

- [79] Won-Kwang Park. Shape reconstruction of thin electromagnetic inclusions via boundary measurements : level-set method combined with the topological derivative. *Math. Probl. Eng.*, 2013 :7, 2013. Id/No 125909.
- [80] Amnon Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences)*. 1992.
- [81] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger. Maximum principles in differential equations. Corr. reprint. New York etc. : Springer-Verlag, X, 261 p. DM 79.00 (1984)., 1984.
- [82] Patrizia Pucci and James Serrin. *The maximum principle.*, volume 73. Basel : Birkhäuser, 2007.
- [83] Julius Fergy T. Rabago and Hideyuki Azegami. A second-order shape optimization algorithm for solving the exterior Bernoulli free boundary problem using a new boundary cost functional. *Comput. Optim. Appl.*, 77(1) :251–305, 2020.
- [84] Julius Fergy T Rabago and Jerico B Bacani. Shape optimization approach for solving the bernoulli problem by tracking the neumann data : a lagrangian formulation. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 17(6) :2683, 2018.
- [85] Pierre-Arnaud Raviart and J. M. Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Paris etc. : Masson. 224 p. (1983)., 1983.
- [86] Michael Renardy and Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations. 2nd ed.*, volume 13. New York, NY : Springer, 2nd ed. edition, 2004.
- [87] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton mathematical series 28. Princeton University Press, 1970.
- [88] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 3d ed edition, 1976.
- [89] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. MGH, 3 edition, 1986.
- [90] Walter Rudin. *Functional analysis. 2nd ed.* New York, NY : McGraw-Hill, 2nd ed. edition, 1991.
- [91] G. I Sadio, A. Seck, and D. Seck. Numerical and theoretical analysis for optimal shape inverse problems. In *Nonlinear analysis, geometry and applications. Proceedings of the second biennial international research symposium, NLAGA-BIRS, Cap-Skiring, Senegal, January 25-30, 2022, to appear*. Cham : Birkhäuser, 2022.
- [92] G. I Sadio and D. Seck. Shape reconstruction in a non-linear problem. In *Nonlinear analysis, geometry and applications. Proceedings of the first biennial international research symposium, NLAGA-BIRS, Dakar, Senegal, June 24–28, 2019*, pages 379–397. Cham : Birkhäuser, 2020.
- [93] Aliou Seck. Optimisation de forme géométrique et topologique pour les équations de navier stokes en 2d. *PhD, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal* 2021.
- [94] Jacques Simon. Second variations for domain optimization problems. *Control theory of distributed parameter systems and applications*, 91 :361–378, 1989.
- [95] Jan Sokolowski and Antoni Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM journal on control and optimization*, 37(4) :1251–1272, 1999.
- [96] Jan Sokołowski and Jean-Paul Zolesio. *Introduction to shape optimization : shape sensitivity analysis.*, volume 16. Berlin etc. : Springer-Verlag, 1992.
- [97] Kevin Sturm. *On shape optimization with non-linear partial differential equations*. PhD thesis, 10 2014.

- 
- [98] Kevin. Sturm. Minimax lagrangian approach to the differentiability of nonlinear pde constrained shape functions without saddle point assumption. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 53(4) :2017–2039, 2015.
- [99] V Sverak. On optimal shape design. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 315(5) :545–549, 1992.
- [100] Bozhidar Velichkov. *Existence and regularity results for some shape optimization problems*. Pisa : Edizioni della Normale; Pisa : Scuola Normale Superiore (Diss. 2013), 2015.
- [101] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I : Fixed-Point Theorems*. 1986.