UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

DOMAINE :	SCIENCES ET TECHNOLOGIES
MENTION :	MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
SPÉCIALITÉ :	MATHÉMATIQUES PURES
OPTION :	ANALYSE ET GÉOMÉTRIE COMPLEXE

Thème: Compactification de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann sur l'intersection de domaines uniformément q-convexes dans $\mathbb{C}^n$

Présenté par :
DAOUDA DIACK

Sous la direction de : **Dr Mamadou Eramane BODIAN et Dr Souhaibou SAMBOU**

Sous la supervision de : **Professeur Marie Salomon SAMBOU**

Soutenu publiquement le 07 Mai 2022 devant le jury composé de :

Marie Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire	Président du Jury	UASZ
Moussa FALL	Maître de Conférences assimilé	Examinateur	UASZ
Mansour SANE	Maître de Conférences Titulaire	Examinateur	UASZ
Mamadou Eramane BODIAN	Maître de conférences assimilé	Encadreur	UASZ
Souhaibou SAMBOU	Chercheur	Encadreur	UASZ

Table des matières

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à mes directeurs de mémoire Docteur Mamadou Eramane BODIAN et Docteur Souhaibou SAMBOU, pour leur disponibilité, leurs remarques scientifiques constructives et leurs grandes qualités humaines.
Je tiens à remercier très sincèrement Professeur Marie Salomon SAMBOU d'avoir accepté de superviser notre travail et de m'avoir initié à la recherche à travers ses projets.

Je tiens également à remercier Docteur Moussa FALL et Docteur Mansour SANÉ pour avoir accepté de participer au jury de la soutenance. Je veux aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques.

Mes remerciements vont également aux responsables de l'institut polytechnique de Ziguinchor (ZIP), lieu qui m'a abrité tout le long de la rédaction de mon travail et qui m'a permis d'effectuer mes recherches documentaires. Un grand merci à Alassane TAMBOURA, pour sa gentillesse et sa patience.

Je profite de cette occasion pour remercier mes camarades de Master de Mathématiques pures et appliquées ainsi que tous les étudiants du département de mathématique pour l'aide et l'amitié qu'ils m'ont apportées, ainsi que pour les échanges et discussions autour des mathématiques.

Je n'oublie pas tous les membres du groupe de recherche en analyse et géométrie complexe qui sont en master : Amadou SEYDI, Dieynaba SAMB.

Je voudrais remercier spécialement Alioune Badara DIENG responsable pédagogique de l'UFR sciences et technologies et Yaya DIALLO pour tous les moments d'échanges qui jalonnèrent mon quotidien et surtout pour les conseils qu'ils m'ont donnés pour réussir mes épreuves d'examens au cours de mon cursus universitaire ainsi que Lala DIEME pour son soutien.

J'adresse une pensée spéciale à mon tuteur Famara BADJI et sa famille qui m'ont accueilli chaleureusement à Ziguinchor.
Je remercie très chaleureusement Docteur Léna TENDENG, enseignante à l'université Cheikh Anta Diop de Dakar et sa famille, qui m'ont toujours encouragé à poursuivre mes études et de ne jamais baisser les bras.

Ma reconnaissance va aussi à l'endroit de mes ainés doctorants et docteurs qui m'ont aussi bien aidés pour rendre ce document meilleur tout comme mon ami et grand frère Mamadou Talibé DIALLO qui est le président du conseil régional de la jeunesse de Ziguinchor.

Je veux aussi remercier mon très cher ami Cheikh Ahmed Tidiane GUEYE pour divers services rendus et son soutien permanent durant la rédaction de ce mémoire.

C'est le moment de remercier les camarades étudiants avec qui j'ai partagé des moments d'échange à travers l'amicale de mathématique. Je veux nommer Algassimou DIALLO, Mamadou Boye DIALLO, Idrissa BIAYE, Malick DIBA, Mamadou Korka BA, Amadou NDIAYE, Mohamed NIAMBA, Ibrahima DIOP, Omar DIOP, Thierno DIALLO, Elhadj Baye CAMARA, Diara TOURE, Fatou DIENG, Babacar NDIOR, Ndeye Khady GNINGUE et Wassa TOURE.

C'est aussi le moment de remercier mes filleules Ndeye Mareme GUEYE, Mareme FAYE, Tacko Sire BA et Adji Awa LÔ.

Je ne saurais terminer sans remercier ma famille et mes amis, qui ont tous aidé à façonner mon chemin et qui m'ont aidé à arriver où j'en suis, pour m'avoir motivé et encouragé. Merci à mes parents (Hamady Abou DIACK et Bineta BA) qui ont fait tant de sacrifices pour moi, qui m'ont toujours poussé à donner le meilleur de moi même. Merci à tous mes frères et sœurs pour leur soutien permanent, tant financier que moral. Merci à tous mes amis, en particulier, Mamadou Nassir DIALLO, Yaya COULIBALY Houleymatou DIALLO, Abdoul Khadre BA, Awa BARRY et Alioune BA pour divers services qu'ils m'ont rendus ; je leur adresse à tous un joyeux salut amical.

Dédicace

Je dédie ce travail :
« A mes grands parents Samba Maama et Diéry Maama qui ne sont malheureusement plus de ce monde. »

Résumé

Dans ce travail, l'idée est d'établir la compacité de l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann sur un domaine D qui est une intersection de domaines uniformément q-convexes de $\mathbb{C}^n$ due à Salomon SAMBOU et de Shaban KHIDR. Pour y parvenir nous commencerons par donner quelques notions préliminaires de l'analyse complexe de plusieurs variables et l'analyse fonctionnelle en particulier et nous allons introduire quelques conditions suffisantes de compactification de l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann, puis nous montrerons que l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann est compact sur les domaines D_j avec $1 \leq j \leq n$ qui sont des domaines uniformément strictement q-convexes et uniformément Lipschitziens. Ensuite nous montrerons que l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann est compact sur un domaine D qui est une intersection de domaines uniformément q-convexes de $\mathbb{C}^n$. Et enfin, on parlera de quelques applications sur la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann :

► En utilisant l'algèbre C^*, on montre que le $\bar{\partial}$-Neumann est compact ;

► On montre aussi que la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann entraine que tout opérateur de Toeplitz est de Fredholm.

Introduction

Le problème du $\bar{\partial}$-Neumann est l'un des problèmes les plus importants dans la théorie de l'analyse complexe de plusieurs variables. Spécialement l'analyse dans les espaces L^2 pour ce problème est d'une importance capitale et est devenue indispensable pour le sujet depuis les travaux fondamentaux de Kohn en 1963. Une propriété importante de l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann (noté N_s) est qu'il peut être utilisé dans les espaces L^2 pour fournir une solution bornée de l'équation $\bar{\partial}u = f$ pour toute $(0, s)$-forme différentielle f $\bar{\partial}$-fermée. Cette solution est appelée solution canonique et est donnée par

$$u = \bar{\partial}^* N_s f.$$

La compactification de l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann est également un problème intéressant en analyse complexe de plusieurs variables. Auparavant, Kohn et Niremberg (voir [19]) ont montré que la compacité de N_s implique une régularité globale de N_s au sens de la préservation des espaces de Sobolev. À savoir, sur les domaines pseudoconvexes bornés, il est défini de l'espace des (p, q)-formes de classe C^∞ à valeurs dans lui même.
La question qu'on se pose est de savoir sous quelles conditions N_s est compact.
Pour cela nous commencerons par introduire quelques conditions suffisantes pour que l'opérateur N_s soit compact :
Comme première conditions, nous allons montrer que la compacité des solutions canoniques sur un domaine borné pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ entraine que l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann est compact. Le résultat est le suivant(cf [21]) :

Th*é*orème 0.1 Soit Ω un domaine borné pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$.
Pour $1 \leq q \leq n-1$, si

$$\bar{\partial}^*_{p,q} N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q-1}(\Omega) \text{ et } \bar{\partial}^*_{p,q+1} N_{p,q+1} : L^2_{p,q+1}(\Omega) \to L^2_{(p,q)}(\Omega)$$

sont compacts, alors $N_{p,q}$ est compact sur $L^2_{p,q}(\Omega)$.

Ensuite, en 1984 Catlin a présenté dans [4] une condition suffisante sur le bord d'un domaine borné pseudoconvexe à bord lisse pour que compact soit N_s. Cette condition est appelée la propriété P_s. Ce résultat est donné par :

Th*é*orème 0.2 Soit Ω un domaine borné pseudoconvexe à bord lisse de $\mathbb{C}^n$. Pour $1 \leq q \leq n$, si $b\Omega$ satisfait la propriété (P_q), alors N_q est compact.

En 2002, McNeal a donné une version améliorée de la condition de Catlin notée $(\tilde{P}_s)$ et a montré que $(\tilde{P}_s)$ est également une condition suffisante pour la compacité de N_s sur un domaine borné pseudoconvexe. Le résultat est donné par le théorème suivant :

Th*é*orème 0.3 Soit Ω un domaine borné, lisse et pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Pour $1 \leq q \leq n$, si $b\Omega$ satisfait la propriété $(\tilde{P}_q)$, alors N_q est compact.

En 2001, Vassiliadou a introduit (voir [28]) la notion de domaines uniformément strictement q-convexes puis elle a établi la compacité de N_s sur l'intersection transversale d'un domaine uniformément strictement q-convexe de classe C^2 avec un domaine strictement pseudoconvexe de classe C^2.
Khidr et Sambou ont obtenu un résultat de compacité de l'opérateur du $\bar{\partial}$-Neumann sur D qui est une intersection de domaines uniformément q-convexes de classe C^2 en partant d'une famille de sous domaines lisses D_j uniformément strictement q-convexes et uniformément Lipschitziens qui permet d'approximer notre domaine D. Un résultat fondamental sur D_j est donné comme suit :

Th*é*orème 0.4 Sur D_j l'opérateur $\bar\partial$-Neumann $N_s^{D_j}$ existe sur $L^2_{0,s}(D_j)$ et satisfait les propriétés suivantes :

1) $N_s^{D_j}$ est borné dans $L^2_{0,s}(D_j)$, $R(N_s^{D_j}) \subset D(\square_s^{D_j})$, et $N_s^{D_j}\square_s^{D_j} = \square_s^{D_j}N_s^{D_j} = Id$ sur $D(\square_s^{D_j})$.

2) Pour tout $f \in L^2_{0,s}(D_j)$, on a $f = \bar\partial\bar\partial^* N_s^{D_j} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_s^{D_j} f$.

3) $\bar\partial N_{s-1}^{D_j} = N_s^{D_j}\bar\partial$ sur $D(\bar\partial)$ et $\bar\partial^* N_{s+1}^{D_j} = N_s^{D_j}\bar\partial^*$ sur $D(\bar\partial^*)$.

4) Si f est dans $L^2_{0,s}(D_j) \cap \ker(\bar\partial)$, alors il existe une unique solution de l'équation $\bar\partial u = f$, $u \perp \ker(\bar\partial)$ et il existe une constante $C_s > 0$ telle que $\|u\|_{L^2_{0,s-1}(D_j)} \leq C_s\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}$.

5) Pour toute $f \in L^2_{0,s}(D_j)$, il existe une constante $C > 0$, indépendante de (f, j), telle que

$$\|\bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s+1}(D_j)} + \|\bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s-1}(D_j)} \leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}$$

et

$$\|\bar\partial^*\bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} + \|\bar\partial\bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} = \|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}.$$

6) On a $N_s^{D_j}(\mathcal{E}^{o,s}(\overline{D}_j)) \subseteq \mathcal{E}^{o,s}(\overline{D}_j)$, et il existe une constante K, indépendante de (f, j), telle que

$$\|N_s^{D_j} f\|_{W^{1/2}_{0,s-1}(D_j)} \leq K\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \quad \forall\, f \in \mathcal{E}^{0,s}(\overline{D}_j). \tag{1}$$

7) $N_s^{D_j}$ est compact sur $L^2_{0,s}(D_j)$.

Dans la suite on s'intéressera à la compacité du $\bar\partial$-Neumann sur une intersection de domaine uniformément q-convexe de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$. En fait, l'idée est de prouver que N_s satisfait un gain sous-elliptique d'un demi-dérivé dans l'espace L^2-Sobolev, de sorte que la compacité découle immédiatement du lemme de Rellich. Ceci sera réalisé en montrant d'abord que le domaine D peut être approximé de l'intérieur par une suite de sous-domaines lisses uniformément q-convexes D_j avec un bord uniformément Lipschitzien, en exploitant le problème du $\bar\partial$-Neumann sur de tels sous-domaines et en utilisant la limite faible on parvient à établir la compactification du $\bar\partial$-Neumann sur D. Le résultat est donné par le théorème suivant :

Th*é*orème 0.5 Soit D une intersection de domaines uniformément q-convexe de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$. Alors pour tout $s \geq q$, l'opérateur $\bar\partial$-Neumann N_s existe et est borné sur $L^2_{0,s}(D)$. On a les propriétés suivantes :

(1) $R(N_s) \subset D(\square_s)$ et $N_s\square_s = \square_s N_s = Id$ sur $D(\square_s)$.

(2) Pour tout $f \in L^2_{0,s}(D)$, on a $f = \bar\partial\bar\partial^* N_s f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_s f$.

(3) $\bar\partial N_{s-1} = N_s\bar\partial$ sur $D(\bar\partial)$ et $\bar\partial^* N_{s+1} = N_s\bar\partial^*$ sur $D(\bar\partial^*)$.

(4) Si f est dans $L^2_{0,s}(D)$ et $\bar{\partial} f = 0$, alors il existe une unique solution $u \in L^2_{0,s-1}(D)$ de l'équation $\overline{\partial} u = f$, avec $u \perp \ker(\bar{\partial})$ et il existe une constante $C_s > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2_{0,s-1}(D)} \leq C_s \|f\|_{L^2_{0,s}(D)}.$$

(5) N_s est compact sur $L^2_{0,s}(D)$.

(6) Les opérateurs solutions canoniques

$$\bar{\partial}^* N_s : L^2_{0,s}(D) \cap \ker(\bar{\partial}) \to L^2_{0,s-1}(D)$$

et

$$\bar{\partial}^* N_{s+1} : L^2_{0,s+1}(D) \cap \ker(\bar{\partial}) \to L^2_{0,s}(D)$$

sont compacts.

(7) L'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann N_s est continu sur les espaces de Sobolev $W^k_*(D)$ pour $k \geq 0$ et satisfait l'estimation suivante :

$$\|N_s f\|_{W^k_{0,s}(D)} \leq C_k \|f\|_{W^k_{0,s}(D)}$$

où C_k est une constante qui dépend seulement de k.

(8) Les opérateurs solutions canoniques sont continus sur les espaces de Sobolev indiqués.

(a) $N_s \bar{\partial}^* : W^2_{0,s+1}(D) \to W^2_{0,s}(D)$,

(b) $\bar{\partial}^* N_s : W^2_{0,s}(D) \to W^2_{0,s-1}(D)$,

(c) $\bar{\partial} N_s : W^2_{0,s}(D) \to W^2_{0,s+1}(D)$,

(d) $N_s \bar{\partial} : W^2_{0,s-1}(D) \to W^2_{0,s}(D)$,

(e) $\bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s : W^2_{0,s}(D) \to W^2_{0,s}(D)$,

(f) Les projections de Bergman $P_{s-1} := Id - \bar{\partial}^* N_s \bar{\partial}$ et $P_s := Id - \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s$ sont continues sur les espaces de Sobolev $W^2_{0,s-1}(D)$ et $W^2_{0,s}(D)$ respectivement, où Id est l'opérateur identité.

(9) Si f est dans $W^2_{0,s}(D)$, $\bar{\partial} f = 0$, alors ils existent $u \in W^2_{0,s-1}(D)$ et une constante $C_s \geq 0$ telles que $\bar{\partial} u = f$ et

$$\|u\|_{W^k_{0,s-1}(D)} \leq C_k \|f\|_{W^k_{0,s}(D)}.$$

(10) Si f est dans $\mathcal{E}^{0,s}(\overline{D}) \cap \ker(\bar{\partial})$, alors il existe $u \in \mathcal{E}^{0,s-1}(\overline{D})$ telle que $\bar{\partial} u = f$.

Nous étudierons dans la dernière partie de ce document quelques applications à savoir : Comme première application ; on établit la compacité de N_s grâce une algèbre C^*. Comme deuxième application ; la compacité de N_s entraine que tout opérateur de Toeplitz est de Fredholm et que le commutateur noté $[P_s, M_f]$ est compact oú P_s et M_s sont respectivement la projection de Bergman et l'opérateur multiplicatif par f.

Toutefois nous parlerons d'abord de quelques notions préliminaires qui nous serons utiles pour rendre plus compréhensible ce document.

1 Préliminaires

1.1 Quelques outils sur la géométrie différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty, \omega\}$.
Si $k \neq w$, on note C^k la classe des fonctions k-fois différentiables et dont la dérivée k-ième est continue et C^w celle des fonctions réelles analytiques.

Définition 1.1 (Carte)

Soit M un espace topologique. Une carte sur M est un couple (U, φ) où $U \subset M$ et $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

Définition 1.2 (Atlas)

Un atlas de classe C^k est une collection d'homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$, appelée carte différentielle où $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ constitue un recouvrement d'ouverts de M, $(V_\alpha)_\alpha$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous $\alpha \; et \; \beta \in I$, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors les fonctions de transition

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des difféomorphismes de classe C^k [1].
Les composantes $\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ sont appelées coordonnées locales sur U_α définies par la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Définition 1.3 (Variété différentiable)

Une variété différentiable X de dimension n et de classe C^k est un espace topologique séparé muni d'un atlas de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4 (Vecteur tangent)

Soit X une variété différentiable de classe C^k et de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert et $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, w\}$ tel que $0 \leq s \leq k$. Une fonction f est de classe C^s sur Ω si $fo\varphi_\alpha^{-1}$ est de classe C^s sur $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \Omega)$ pour tout $\alpha \in I$. L'ensemble des fonctions de classe C^s sur Ω est noté $C^s(\Omega, \mathbb{R})$.
Un vecteur v, tangent à X au point x_0, est par définition un opérateur différentiel qui agit sur les fonctions,
c'est-à-dire pour tout $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, on associe localement $v.f = \sum\limits_{1 \leq j \leq n} v_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$; où les v_j sont des réelles.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ autour de x_0 sur Ω,
on écrit simplement

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définition 1.5 (Espace tangent, Espace cotangent)

L'ensemble des vecteurs tangents est appelé espace tangent. Par conséquent, pour tout $x_0 \in \Omega$, le n-uplet $\{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\}_{1 \leq j \leq n}$ constitue une base de l'espace tangent à X au point x_0 ;

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $U \subset E$, $V \subset F$ deux ouverts, $f : U \to V$ une application. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^r si f est inversible et si f et f^{-1} sont différentiables de classe C^r.

noté $T_{x_0}X$. Son dual $T^*_{x_0}X$ est l'espace vectoriel cotangent à X au point x_0.
Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, sa différentielle au point x_0 est une forme linéaire sur $T_{x_0}X$, définie par :

$$df_{x_0}(v) = v.f = \sum_{1 \leq j \leq n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \; \forall v \in T_{x_0}X.$$

En particulier, si $v_j = dx_j(v)$, alors localement $df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$.
La famille $\{dx_1, ..., dx_n\}$ est la base duale de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Donc c'est une base de l'espace cotangent $T^*_{x_0}X$.

Définition 1.6 (Champ de vecteurs)
Soit X une variété différentiable de classe C^s. On appelle champ de vecteur de classe C^k $(s \geq k)$ sur un ouvert $\Omega \subset X$, toute application $s : \Omega \longrightarrow TX = \bigcup_{x \in X} T_xX$ de classe C^k telle que $s(x) \in T_xX$ pour tout $x \in X$.
On note $\Gamma^k(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^k sur X.

Définition 1.7 Soient M et N deux variétés différentiables de classes respectives C^p et C^s et de dimensions respectives m et n. Soit $k \leq \min(p, s)$.
On dit qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est de classe C^k lorsque pour toutes cartes locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sur M et (V_β, ψ_β) sur N, l'application $f_{\beta\alpha} : \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ qui envoie l'ouvert $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^m$ dans l'ouvert $\psi_\beta(V_\beta)$ de $\mathbb{R}^n$ est de classe C^k. On dit que f est un C^k-difféomorphisme lorsque f est inversible et si f et f^{-1} sont différentiables de classe C^k.

Définition 1.8 Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à bord lisse de classe C^k avec $1 \leq k \leq \infty$, en un point $p \in b\Omega$ s'il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{R}^d$ et une fonction de classe C^k $r : U \to \mathbb{R}$ tels que

$$\Omega \cap U = \{x \in U : r(x) < 0\}$$
$$b\Omega \cap U = \{x \in U : r(x) = 0\}$$

r est appelé fonction définissante locale de Ω en p.
Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à bord lisse de classe C^k s'il l'est en tout point p $\in b\Omega$.

1.2 Fibrés vectoriels

Définition 1.9 Soient M une variété différentiable de dimension n et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ un champ scalaire. Un fibré vectoriel de rang r au-dessus de M est une variété E de classe C^∞ munie d'une application $\pi : E \longrightarrow M$ de classe C^∞ appelée projection et d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r sur chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$. Cela veut dire qu'il existe un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ de M et des C^∞-difféomorphismes θ_α appelés trivialisations

$$\theta_\alpha : E_{|V_\alpha} \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{K}^r \quad \text{où} \quad E_{|V_\alpha} = \pi^{-1}(V_\alpha)$$

telle que pour tout $x \in V_\alpha$ l'application

$$E_x \xrightarrow{\theta_\alpha} \{x\} \times \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{K}^r$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Pour chaque $\alpha, \beta \in I$, l'application

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

peut se mettre sous la forme

$$\theta_{\alpha\beta}(x,\xi) = (x, g_{\alpha\beta}(x).\xi), (x,\xi) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

où la famille $(g_{\alpha\beta})$ est inversible à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(V_\alpha \cap V_\beta, \mathrm{Gl}(\mathrm{r}, \mathbb{K}))$ et satisfait à les conditions de cocycle

$$(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g_{\beta\alpha})$$

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{sur} \quad \mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{V}_\beta \cap \mathrm{V}_\gamma.$$

La collection $(g_{\alpha\beta})$ est appelée système de matrices de transition. Réciproquement, toute collection de matrices inversibles satisfaisant la condition de cocycle définit un fibré vectoriel E, obtenu en recollant les cartes $V_\alpha \times \mathbb{K}^r$ via les identifications $\theta_{\alpha\beta}$.

Exemple 1.1 Les fibrés tangent $TM = \bigcup_{a\in M} T_aM$ et cotangent $T^*M = \bigcup_{a\in M} T_a^*M$ d'une variété différentiable M de dimension n sont des fibrés vectoriels localement triviaux de rang n au-dessus de M.

Définition 1.10 Soit $\Omega \subset M$ un ouvert. Soient E un fibré vectoriel sur M et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty, \omega\}$. Une section de classe C^k de $E_{|\Omega}$ est une application $s : \Omega \longrightarrow E$ de classe C^k telle que $s(x) \in E_x$, pour tout $x \in \Omega$ (i.e $\pi \circ s = \mathrm{Id}_\Omega$).

Définition 1.11 (1-forme différentielle)

Une 1-forme différentielle sur U est une application

$$\begin{aligned} w: \ U &\longrightarrow T^*X = \bigcup_{a\in U} T_a^*X \\ a &\longmapsto w_a \end{aligned}$$

à valeurs dans l'espace cotangent à X en tout point a.
Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on a

$$w(a) = \sum_{i=1}^n w_i(a)(dx_i)_a$$

où les coefficients $w_i(a) \in \mathbb{R}$ dépendent de a.
Localement une 1-forme différentielle s'écrit $w = \sum_{i=1}^n w_i dx_i$ où les coefficients $(w_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des fonctions définies de U à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Une 1-forme différentielle est de classe C^k si les coefficients w_i le sont.

Exemple 1.2 (1-forme différentielle)

1. dx est une 1-forme différentielle de coefficient 1.
2. $w(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}dx - \dfrac{y}{x^2+y^2}dy$ est une 1-forme différentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

Définition 1.12 Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}$ et M une variété différentiable de classe C^r de dimension n, avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Une p-forme différentielle de classe C^r sur M est une section de classe C^r du fibré vectoriel des p-formes extérieures $\Lambda^p T^*M$.
Ainsi, une p-forme différentielle ω associe à tout x dans M, une forme p-linéaire alternée ω_x sur l'espace tangent T_xM à M.
On note $\mathcal{E}_r^p(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles de classe C^r sur M.

On peut effectuer plusieurs opérations avec les p-formes différentielles, par exemple :

• **Produit extérieur**
Soient u une p-forme différentielle et v une q-forme différentielle définies localement par :

$$v(x) = \sum_{|J|=q}' v_J(x) dx_J \text{ et } u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x) dx_I.$$

Alors le produit extérieur de u avec v est la forme de degré $(p+q)$ définie localement par :

$$u \wedge v(x) = \sum_{|I|=p, |J|=q}' u_I(x) v_J(x) dx_I \wedge dx_J \text{ avec } 0 \leq p+q \leq n$$

$$I = (i_1, ...i_p) \text{ avec } 1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$$

$$J = (j_1, ...j_q) \text{ avec } 1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$$

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge ..... \wedge dx_{i_p} \text{ et } dx_J = dx_{j_1} \wedge ..... \wedge dx_{j_q}.$$

• **Dérivée extérieure**
La dérivée extérieure des p-formes différentielles est un opérateur différentiel

$$d : \mathcal{E}_r^p(M) \longrightarrow \mathcal{E}_{r-1}^{p+1}(M)$$

défini localement par la formule

$$du = \sum_{|I|=p}' \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I,$$

pour

$$u(x) = \sum_{|I|=p}' u_I(x) dx_I$$

et vérifie les propriétés suivantes :

i) $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$ (Règle de Leibnitz)

ii) $d^2 u = 0$ (idem-potence).
Une forme u est dite fermée si $du = 0$ et elle est dite exacte s'il existe une forme v, telle que $deg(v) = deg(u) - 1$ vérifiant $u = dv$; où $deg(u)$ est le degré de u.
• **Pull-back**
Soit $F : X \to Y$ une application C^∞ entre deux variétés orientées de dimension respective n_1, n_2. Si $v(y) = \sum_{|I|=p}' v_I(y) dy_I$ est une p-forme différentielle sur Y, le pull-back (tiré-en-arrière) $F^* v$ est la p-forme différentielle sur X obtenue en remplaçant y par $F(x)$ dans l'écriture de v, c'est-à-dire

$$F^* v(x) = \sum_{|I|=p}' v_I(F(x)) dF_{i_1} \wedge ... \wedge dF_{i_p}.$$

Remarque 1.1

i) Si $G : Y \to Z$ est une autre application et si w est une forme différentielle sur Z alors $F^*(G^* w)$ est obtenu en remplaçant z par $G(y)$ et y par $F(x)$ et on a

$$F^*(G^* w) = (F \circ G)^* w.$$

ii) $d(F^*v) = F^*(dv)$.

iii) Si v est fermée (respectivement exacte), alors F^*v est fermé (respectivement exact).

Définition 1.13 (Variété complexe)

Une variété complexe X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'une collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ où les U_α sont des ouverts de X tels que $X = \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ et
$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes pour lesquels on a :
si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha o \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes.
$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sont appelées cartes locales.

$$z \in U_\alpha,\ \varphi_\alpha(z) = (z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha) \in \mathbb{C}^n.$$

$(z_1^\alpha, z_2^\alpha, ..., z_n^\alpha)$ sont appelés coordonnées locales autour de z.
La collection $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ est appelée atlas complexe.

1.3 Structure complexe

Soit X une variété analytique complexe de dimension (complexe) n. Considérons X comme une variété différentiable de dimension $2n$. Pour tout $z \in X$, on a l'espace cotangent T_z^*X de X en z et la structure complexe J_z de T_z^*X et définie localement par

$$J_z(dx_j) = dy_j \text{ et } J_z(dy_j) = -dx_j.$$

Remarque 1.2 *J_z est l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de T_z^*X vérifiant*

$$J_z \circ J_z = -Id_{T_z^*X}.$$

Soit $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ le complexifié de T_z^*X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme

$$u + iv \text{ où } u, v \in T_z^*X$$

et $i = \sqrt{-1}$. J_z se prolonge en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_z^*X^{\mathbb{C}}$ noté encore J_z tel que $J_z^2 = -Id_{T_z^*X^{\mathbb{C}}}$ et

$$J_z(u + iv) = J_z(u) + iJ_z(v)$$

pour tous $u, v \in T_z^*X$.
On a

$$T_z^*X^{\mathbb{C}} = T_{z1,0}^*X \oplus T_{z0,1}^*X$$

où

$$T_{z1,0}^*X = \{v \in T_z^*X^{\mathbb{C}} / J_z v = iv\}$$

$$T_{z0,1}^*X = \{v \in T_z^*X^{\mathbb{C}} / J_z v = -iv\}$$

$$T_{1,0}^*X = \bigcup_{z\in X} T_{z1,0}^*X \text{ et } T_{0,1}^*X = \bigcup_{z\in X} T_{z0,1}^*X$$

sont respectivement des fibrés cotangents holomorphes et antiholomorphes.
Pour $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p, q \leq n$, notons par $\Lambda^p T^*_{z1,0}X$ et $\Lambda^q T^*_{z0,1}X$ respectivement les espaces vectoriels des p-formes alternées sur $T^*_{z1,0}X$ et des q-formes alternées sur $T^*_{z0,1}X$.
Dans un système de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$,

$$\Lambda^p T^*_{z1,0}X = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n}$$

$$\Lambda^q T^*_{z0,1}X = vect\{d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}_{1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n}$$

où $(dz_1, ..., dz_n)$ et $(d\bar{z}_1, ..., d\bar{z}_n)$ sont des bases locales de $T^*_{z1,0}X$ et $T^*_{z0,1}X$
donc

$$\Lambda^p T^*_{1,0}X := \bigcup_{z \in X} \Lambda^p T^*_{z1,0}X \text{ et } \Lambda^q T^*_{0,1}X := \bigcup_{z \in X} \Lambda^q T^*_{z0,1}X$$

sont respectivement les fibrés des p-formes extérieures sur le fibré $T^*_{1,0}X$ et des q-formes extérieures sur le fibré $T^*_{0,1}X$.
On pose

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = \Lambda^p T^*_{z1,0}X \oplus \Lambda^q T^*_{z0,1}X$$

donc

$$\Lambda^{(p,q)} T^*_z X^{\mathbb{C}} = vect\{dz_{i_1} \wedge .... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ..... \wedge d\bar{z}_{j_q}\}$$

avec $1 \leq i_1 < .... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$.

Définition 1.14

Le fibré $\Lambda^{(p,q)} T^* X^{\mathbb{C}} := \Lambda^p T^*_{1,0}X \otimes \Lambda^q T^*_{0,1}X$ est appelé fibré des (p, q)-formes extérieures sur le fibré cotangent complexifié

$$T^* X^{\mathbb{C}} := \bigcup_{z \in X} T^*_z X^{\mathbb{C}}.$$

Définition 1.15 (Formes différentielles)

Soit $\Omega \subset X$ un ouvert. On appelle forme différentielle de bidegré (p, q) (ou (p, q)-forme différentielle) et de classe C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ sur Ω, toute section sur Ω de classe C^k du fibré $\Lambda^{(p,q)} T^* X^{\mathbb{C}}$.
On note $\mathcal{E}^{p,q}_k(X)$ l'espace des (p, q)-formes différentielles de classe C^k sur X et $\mathcal{E}^{p,q}(X)$ l'espace des (p, q)-formes différentielles de classe C^∞ sur X.
Dans un ouvert $\Omega \subset X$ de coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$, une (p, q)-forme différentielle u de classe C^k s'écrit

$$u(z) = \sum_{|I|=p, |J|=q}^{\prime} u_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les u_{IJ} sont des fonctions de classe C^k, $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ sont des multi-indices d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n$,

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p},$$

$$d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge .... \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

et $\sum^{\prime}$ indique que la somme se fait suivant les indices croissants.
On note par $D^k_{p,q}(X)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^{p,q}_k(X)$ formé par des (p, q)-formes à support compact dans X (on l'appelle aussi l'espace des formes tests) et par $C^\infty_0(X)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^{p,q}_k(X)$ formé par des fonctions de classe C^∞ à support compact sur X. Toute fonction $f \in C^\infty_0(X)$ est appelée fonction test.

Définition 1.16 *Produit scalaire hermitien*
Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Une forme hermitienne définie positive sur X est la donnée en tout point $z_0 \in X$ d'une application
$h : T_{z_0}X \times T_{z_0}X \to \mathbb{C},$ définie par :
pour deux vecteurs

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial z_k} \qquad \textit{appartenant à } T_{z_0}X;$$

$$h(u,v)(z_0) = \sum_{j,k=1}^{n} h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0) u_j \overline{v}_k = \sum_{j,k=1}^{n} h_{j,k}(z_0) u_j \overline{v}_k$$

où

$$h_{j,k}(z_0) = h\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(z_0)$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $h(\lambda u, v) = \lambda h(u,v), \ \forall \lambda \in \mathbb{C},$

ii) $h(u,v) = \overline{h(v,u)}, \ \forall u, \ v \in T_{z_0}X,$

iii) $h(u,u) \geq 0, \ \forall u \in T_{z_0}X,$

iV) $h(u,u) > 0 \ \forall \ u \neq 0,$

V) $h(u+v,w) = h(u,w) + h(v,w), \ \forall u, \ v \textit{ et } w \in T_{z_0}X.$

On note $her(T_{z_0}X)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur $T_{z_0}X$

1.4 Harmonicité & Pseudoconvexité

1.4.1 Harmonicité

Définition 1.17 *(Fonction harmonique)*
Une fonction u de classe C^2 définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$ est dite harmonique si

$$\Delta u = 0 \text{ où } \Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \text{ désigne l'opérateur de Laplace.}$$

Définition 1.18 *(Fonction sous-harmonique)*
Une fonction u définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

i) u est semi-continue supérieurement (s.c.s.), c'est-à-dire $\{z \in D\ ;\ u(z) < s\}$ est ouvert pour tout $s \in \mathbb{R}$.

ii) Pour tout compact $K \subset D$ et toute fonction h continue sur K, harmonique sur $\mathring{K}$, telle que $h \geq u$ sur bK, alors $h \geq u$ sur K.

Définition 1.19 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et φ une fonction de classe C^2 sur Ω. On appelle forme Lévi de φ en $z \in \Omega$ la Hessien complexe noté $L_z\varphi$ de φ, c'est-à-dire

$$w \mapsto L_z\varphi(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) w_j \overline{w}_k.$$

Définition 1.20 Une fonction φ de classe C^2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite plurisousharmonique si

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) t_j \bar{t}_k \geq 0,$$

$\forall\, z \in \Omega,\ t \in \mathbb{C}^n$.
Une fonction φ de classe C^2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite strictement plurisousharmonique si

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) t_j \bar{t}_k > 0,$$

$\forall\, t \neq 0$.

1.4.2 Pseudoconvexité

Définition 1.21 Une fonction φ continue définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, à valeurs réelles est une fonction d'exhaustion pour D si, pour tout c $\in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$D_c = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \varphi(z) < c \right\}$$

est relativement compact dans D.

Remarque 1.3 Une fonction d'exhaustion φ vérifie $\varphi(z) \longrightarrow \infty$ quand z s'approche du bord de D.

Si Ω n'est pas borné, on définit la pseudoconvexité comme suit :

Définition 1.22 *[5]* Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit pseudoconvexe si Ω admet une fonction d'exhaustion φ plurisousharmonique continue.

Définition 1.23 *[5]* Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et φ une fonction définissante de classe C^2 de Ω. On dit que Ω est pseudoconvexe au point $p \in b\Omega$, si la forme de Lévi

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) t_j \bar{t}_k \geq 0$$

$\forall t \in \mathbb{C}^n$ *vérifiant*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}(p) t_j = 0. \tag{2}$$

Le domaine Ω est strictement pseudoconvexe si la forme de Lévi est strictement positive pour tout $t \neq 0$ et $\forall t \in \mathbb{C}^n$, la relation (2) est vérifiée.
Ω est dit domaine pseudoconvexe s'il est pseudoconvexe en tout point du bord $b\Omega$.
Ω est dit domaine strictement pseudoconvexe s'il l'est en tout tout point de son bord.

Remarque 1.4 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine pseudoconvexe et φ une fonction d'exhaustion lisse et plurisousharmonique sur Ω. Alors

$$\Omega = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \Omega_c$$

où $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$ sont des domaines relativement compacts.

Définition 1.24 *[28]* Un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ est dit uniformément strictement q-convexe de classe C^2 s'il existe un voisinage U de $\overline{D}$ et une fonction définissante ρ de classe $C^2 sur D$ définie sur U telle que pour tout $z \in U$ la somme de q valeurs propres quelconques de la forme de Levi $L_\rho(z; .)$ est définie positive.

1.5 Opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$

Définition 1.25 (Les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$)

Soient X une variété complexe et $\Omega \subset X$ un ouvert. Si f est une fonction de classe C^1 sur un voisinage d'un point $a \in \Omega$, on a localement

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)dy_j,$$

on pose

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}) \ et \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}).$$

Puisque z_j peut s'écrire comme suit :

$$z_j = x_j + iy_j, \quad alors \ on \ a$$

$$dz_j = dx_j + idy_j \ et \ d\bar{z}_j = dx_j - idy_j,$$

où x_j et y_j sont des réels.
Cette transformation permet d'écrire df_a sous la forme suivante :

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j.$$

Posons

$$\partial f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a)dz_j \ et \ \bar{\partial} f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a)d\bar{z}_j,$$

donc

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

La décomposition

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

se généralise sur toutes les formes différentielles.
En effet, si

$$w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} w_{I,J}(z)dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

est une (p, q)-forme différentielle de classe C^1

$$dw(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} dw_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} (\partial w_{I,J}(z) + \bar{\partial} w_{I,J}(z)) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

On posera

$$\partial w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \partial w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \ et \ \bar{\partial} w(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q}^{\prime} \bar{\partial} w_{I,J}(z) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Ce qui nous permet de définir les opérateurs suivants :

$$\partial : \mathcal{E}_k^{p,q}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}_{k-1}^{p+1,q}(\Omega)$$

$$\bar{\partial} : \mathcal{E}_k^{p,q}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}_{k-1}^{p,q+1}(\Omega).$$

Propri*été*s 1.1

1) $d = \partial + \bar{\partial}$ *et* $d^2 = 0.$

2) $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0.$

Définition 1.26 Soient X une variété analytique complexe et Ω un ouvert de X.
Une (p, q)-forme différentielle w de classe C^k définie sur Ω est dite $\bar{\partial}$-fermée si $\bar{\partial}w = 0$.
On note

$$Z^k_{p,q}(\Omega) = \{w \in \mathcal{E}^{p,q}_k(\Omega)/\bar{\partial}w = 0\}.$$

C'est un sous groupe de $\mathcal{E}^{p,q}_k(\Omega)$.
Une (p, q)-forme différentielle w de classe C^k définie sur un ouvert Ω est dite $\bar{\partial}$-exacte s'il existe une $(p, q-1)$-forme différentielle u de classe C^k telle que $\bar{\partial}u = w$.

$$B^k_{p,q}(\Omega) = \{\bar{\partial}u \in C^k_{p,q}(\Omega)/u \in \mathcal{E}^{p,q-1}_k(\Omega)\}.$$

C'est aussi un sous groupe de $\mathcal{E}^{p,q}_k(\Omega)$.
Puisque $\bar{\partial}^2 = 0$, alors $B^k_{p,q}(\Omega) \subset Z^k_{p,q}(\Omega)$.
L'espace vectoriel

$$H^k_{p,q}(\Omega) = \frac{Z^k_{p,q}(\Omega)}{B^k_{p,q}(\Omega)}$$

est appelé le (p, q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe C^kdéfinies sur Ω.

1.6 Outils d'analyse fonctionnelle

Dans cette partie, on va rappeler quelques notions d'analyse fonctionnelle.

Définition 1.27 Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$- espace vectoriel est une application affine de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive noté $< .; . >$.

Définition 1.28 Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien.

Définition 1.29 Soit E un K-espace vectoriel. On appelle norme sur E, l'application notée $\| \, . \, \|$ et définie de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

1) $\forall\ x \in E :\ \ \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2) $\forall\ x\ \in E$ *et* $\forall\ \lambda\ \in K :\ \ \| \lambda x \| = |\lambda|\ \| x \|.$
3) $\forall\ (x; y)\ \in E^2 :\ \ \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

1.6.1 Présentation des espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$

On considère Ω comme un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$. Les fonctions f seront considérées de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.30 Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle espace L^p l'espace définie comme suit :

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f \text{ mesurable } : \int_\Omega |f|^p dx < \infty \Big\}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) := \Big\{ f \mid {}^{f \text{ est mesurable et il existe une constante } C}_{\text{telle que } |f(x)| \leq C \text{ sur } \Omega} \Big\}$$

. Pour $1 \leq p < \infty$, on appelle norme L^p et on note $\|.\|_{L^p(\Omega)}$, la norme définie par :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := (\int_\Omega |f|^p dx)^{1/p} .$$

Si $p = \infty$, on définie

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega}\{|f(x)|\}.$$

1.6.2 Notion de distribution

Définition 1.31 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$D(\Omega) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(\varphi) \subset \Omega,\ \text{et supp}(\varphi) \text{ compact }\}$$

où $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}}$.
Une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(\Omega)$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ quand j tend vers $+\infty$ si :

i) $\forall\ j$, le support de φ_j et celui de φ sont contenus dans un compact $K \subset \Omega$,

ii) $(D^\alpha\varphi_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha\varphi(x)$ sur $K \subset \Omega$, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} .....\partial {x_n}^{\alpha_n}}$ est la dérivée d'ordre $|\alpha| =: \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, on désigne par D_K l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ à support dans K.

Définition 1.32 Une forme linéaire T sur $D(\Omega)$ est dite séquentiellement continue sur $D(\Omega)$ si l'application $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(\Omega)$, si φ_j converge vers φ dans $D(\Omega)$, la suite des nombres complexes $T(\varphi_j)$ converge vers $T(\varphi)$.

Définition 1.33 Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $D(\Omega)$ séquentiellement continue. On note $D^{'}(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Remarque 1.5 Si $T \in D^{'}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors l'application $\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$ est une distribution appelée dérivée d'ordre α de T. On la note par $D^\alpha T$.

Exemple 1.3

1) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\delta_a\ : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = \langle\delta_a, \varphi\rangle$ est une distribution appelée mesure de Dirac.

2) Soit f une fonction localement intégrable[2] sur $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors l'application T_f : $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $T_f(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ est une distribution sur Ω.

1.6.3 Espace de Sobolev

Étant donné que nous avons déjà défini les espaces L^p et une distribution, ainsi on peut définir des espaces de Sobolev sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ comme suit :

2. Une fonction à valeurs complexes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact de Ω est intégrable au sens de Lebesgue.

Définition 1.34 On appelle espace de Sobolev noté $W^{m,p}(\Omega)$, l'espace donné par

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq m\}$$

où $D^\alpha u$ est la dérivée d'ordre α de u au sens des distributions, $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On définit une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}\ si\ 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}\ si\ p = \infty.$$

Remarque 1.6

1 Si $m_0 < m$, alors on a une injection continue de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m_0,p}(\Omega)$.

2 $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$

Définition 1.35 Un espace vectoriel normé (E, $\|\ .\ \|$) est dit complet si toute suite de Cauchy (pour cette norme) d'éléments de E est convergente dans E . Un tel espace est appelé espace de Banach.
Si $(E, \|\ .\ \|)$ est complet et que la norme est issue d'un produit scalaire, alors (E, $\|\ .\ \|$) est un espace d'Hilbert.

Exemple 1.4

Tout espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f|^p dx)^{1/p}$$

est un espace de Banach.
L'espace $L^2(\Omega)$, munit de la norme

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int |f|^2 dx\right)^{1/2}$$

qui provient du produit scalaire $(f, g) \mapsto < f, g >= \int_\Omega f.g dx$ est un espace d'Hilbert.

Maintenant nous allons définir un espace réflexif de Banach.
En effet, soient E un espace vectoriel normé et $E^\star$ son espace dual avec la norme :

$$\|f\|_{E^\star} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|.$$

Le bidual est le dual de $E^\star$ avec la norme :

$$\|\xi\|_{E^{\star\star}} = \sup_{\substack{f\in E^\star \\ \|f\|\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle| \quad (\xi \in E^{\star\star}).$$

Ainsi, on a l'injection canonique $J_0 : E \to E^{\star\star}$ définie comme suit :
pour tout $x \in E$, l'application

$$f \mapsto \langle f, x\rangle$$

est linéaire continue sur $E^\star$; donc c'est un élément de $E^{\star\star}$ qui est notée par J_0x. On a

$$\langle J_0x, f\rangle_{E^{\star\star},E^\star} = \langle f, x\rangle_{E^\star,E} \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E^\star.$$

Remarque 1.7 J_0 est linéaire et que c'est une isométrie. Ainsi,

$$\|J_0 x\|_{E^{\star\star}} = \|x\|_E.$$

Définition 1.36 *[3]* Soit E un espace de Banach, $J_0 : E \to E^{\star\star}$ l'injection canonique. E est dit réflexif si J_0 est surjective, c'est-à-dire

$$J(E) = E^{\star\star}.$$

Définition 1.37 Soit E un espace de Banach. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \to x$, si

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \text{pour tout } f \in E^{\star}.$$

Proposition 1.1 Soit X un espace vectoriel normé. X est réflexif si et seulement si toute suite bornée de X admet une sous suite faiblement convergente.

Exemple 1.5 Tout espace d'Hilbert est reflexif, de même que les espaces L^p, avec $1 < p < \infty$.

1.6.4 Théorie des opérateurs

Comme nous essayons d'établir la compacité un opérateur particulier, il est primordiale d'énoncer quelques définitions, et propriétés des opérateurs (voir [20], [25] et [26]).

Définition 1.38 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur est une application linéaire T définie sur un sous espace vectoriel $D(T) \subset H_1$ à valeurs dans H_2. $D(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur.

Définition 1.39 Soient X et Y deux espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues et $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.
On dit que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si l'image par T de la boule unité fermé B_X de X est relativement compacte dans l'espace Y, ($\overline{T(B_X)}$ est compact).

Remarque 1.8

1. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans X, la suite image (Tx_n) admet des sous-suites convergentes dans Y.
2. Si T_1 , $T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ sont compacts, alors $a_1T + a_2T$ est compact pour tous scalaires a_1, a_2. Ainsi, les opérateurs compacts de X dans Y forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$. Cet espace des opérateurs compacts sera noté $\mathcal{K}(X, Y)$.

Définition 1.40 Soient E et F deux espaces de Hilbert et T : $E \to F$. L'unique application linéaire $T^* : F \to E$ telle que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on ait :

$$< Tx, y >=< x, T^*y >$$

est appelée adjoint de T.

Remarque 1.9 Par définition de la norme de l'opérateur et en utilisant un corollaire d'Hahn-Banach, on a

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{y\in F, \|y\|\leq 1} \|T^*y\| = \sup_{\substack{x\in E, \|x\|\leq 1\\ y\in F, \|y\|\leq 1}} |\langle x, T^*y\rangle| \\ &= \sup_{\substack{x\in E, \|x\|\leq 1\\ y\in F, \|y\|\leq 1}} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\|\end{aligned}$$

Ainsi $\|T^*\| = \|T\|$.

Proposition 1.2 Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \longmapsto T^*$ est une isométrie de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F,E)$, elle est linéaire si les espaces sont réels et sesquilinéaire si les espaces sont complexes. De plus, $\forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$(T^*)^* = T \text{ et } \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Enfin $(TS)^* = S^*T^* \quad \forall S \in \mathcal{L}(F,E)$.

Preuve
Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in E$, $y \in F$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, (T_1+\lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1+\lambda T_2)(x), y\rangle \\ &= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda \langle T_2(x), y\rangle \\ &= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \left\langle x, \bar{\lambda} T_2^*(y)\right\rangle \\ &= \left\langle x, \left(T_1^* + \bar{\lambda} T_2^*\right)(y)\right\rangle\end{aligned}$$

Ainsi $T \longmapsto T^*$ est sesquilinéaire. Elle est isométrique d'après la définition de l'adjoint. Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle .$$

On a

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme de l'opérateur est une norme d'algèbre et donc en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\|\,\|T^*\| = \|T\|^2$. D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\ &= \|T\|^2\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par définition de l'adjoint,

$$\begin{aligned}\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\ &= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\ &= \langle S^*T^*(x), y\rangle\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous x et y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

□

Définition 1.41 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est fermé si son graphe noté $\Gamma(T)$ et défini par

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset H_1 \times H_2$$

est fermé.

Définition 1.42 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T : H_1 \to H_2$ est à domaine dense si $\overline{D(T)} = H_1$.

Définition 1.43 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur $T : D(T) \subset H_1 \to H_2$ à domaine dense est auto-adjoint si $T^* = T$.

Définition 1.44 Soient X et Y deux espaces vectoriels normés de normes respectives $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dit borné si,

$$\exists\, M \geq 0 : \quad \forall x \in X; \quad \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Remarque 1.10 Si $X = Y = H$ est un espace de Hilbert, un opérateur T est borné dans H si $D(T) = H$ et $T : H \to H$ est continue.

Définition 1.45 On dit qu'un opérateur $(T, D(T))$ est fermable s'il possède une extension fermée notée $\bar{T}$.

Proposition 1.3 Soit T un opérateur fermable à domaine dense sur H, alors

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Ker}(\bar{T})^{\perp} = \overline{\mathrm{R}\,(T^*)} & et & \mathrm{Ker}\,(T^*) = \mathrm{R}(T)^{\perp} \\ \mathrm{Ker}(\bar{T}) = \mathrm{R}\,(T^*)^{\perp} & et & \mathrm{Ker}\,(T^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{R}(T)}. \end{array}$$

Preuve
Montrons d'abord $\mathrm{Ker}(\bar{T}) = \mathrm{R}\,(T^*)^{\perp}$.
On a

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{R}\,(T^*)^{\perp} \Rightarrow (\langle y, T^*x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)) &\Rightarrow \Big(y \in D(\bar{T}) \text{ et } \langle Ty, x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)\Big) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\bar{T}) \\ &\mathrm{R}\,(T^*)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(\bar{T}) \\ y \in \ker\Big(\bar{T}\Big) \Rightarrow (\langle Ty, x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)) &\Rightarrow \Big(y \in ker(\bar{T}) \text{ et } \langle y, T^*x\rangle = 0, \forall x \in D\,(T^*)\Big) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{R}(T^*)^{\perp} \\ &\Rightarrow \mathrm{Ker}(\bar{T}) \subset \mathrm{R}\,(T^*)^{\perp}. \end{aligned}$$

Ainsi par ces deux inclusions, on a l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\bar{T}) = \mathrm{R}\,(T^*)^{\perp}.$$

Montrons maintenant $R(T)^{\perp} = \ker(T^*)$

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{R}(T)^{\perp} \Rightarrow (\langle y, Tx\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \Rightarrow &\quad (y \in D\,(T^*) \text{ et } \langle T^*y, x\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}\,(T^*) \\ &\Rightarrow \mathrm{R}(T)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(T^*) \\ y \in \ker(T^*) \Rightarrow (\langle T^*y, x\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \Rightarrow &\quad (y \in D\,(T^*) \text{ et } \langle y, Tx\rangle = 0, \forall x \in D(T)) \\ &\Rightarrow y \in \mathrm{R}\,(T)^{\perp} \\ &\Rightarrow \ker(T^*) \subset \mathrm{R}\,(T)^{\perp}. \end{aligned}$$

Par suite on a :

$$R(T)^{\perp} = \ker(T^*).$$

Les deux autres relations s'obtiennent en prenant l'orthogonale et en remarquant que $\mathrm{Ker}(\bar{T})$ est fermé. $\square$

Lemme 1.1 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire, fermé et dense.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $R(T)$ est fermé.

(b) Il existe une constante C telle que :

$$\|f\|_1 \leq C\|Tf\|_2 \quad \forall f \in D(T) \cap \overline{R(T^*)}.$$

(c) $R(T^*)$ est fermée.

(d) Il existe une constante C telle que :

$$\|g\|_2 \leq C\|T^*g\|_1 \quad \forall g \in D(T^*) \cap \overline{R(T)}.$$

Preuve
Supposons que $R(T)$ est fermée. De l'égalité (4.1.1) de [5], on a :

$$T : D(T) \cap \overline{R(T^*)} \to R(T)$$

est bijectif et d'inverse

$$T^{-1} : R(T) \to D(T) \cap \overline{R(T^*)}$$

est bien défini et est aussi un opérateur fermé. Ainsi d'après le théorème du graphe fermé, T^{-1} est continu et cela prouve (b). En supposant (b) vraie on obtient $\overline{R(T)} \subset R(T)$. Ce qui montre que $(b) \Longleftrightarrow (a)$.
De façon analogue on montre (c) et (d) sont équivalentes.
Montrons que (b) implique (d). On a

$$| < g, Tf >_2 | = | < T^*g, f >_1 | \leq C\|T^*g\|_1 \, \|Tf\|_2,$$

pour $g \in D(T^*) \cap \overline{R(T)}$ *et* $f \in D(T) \cap \overline{R(T^*)}$. Donc

$$| < g, h >_2 | \leq C\|T^*g\|_1 \, \|h\|_2, \text{ pour } g \in D(T^*) \cap R(\bar{T}) \text{ et } h \in R(T),$$

qui implique (d). Par analogie on montre que $(d) \Rightarrow (b)$. □

Exemple 1.6 . Les opérateurs linéaires suivants sont tous bornés :
1. L'opérateur identité : $Id_X : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto Id_X(x) = x$;

$$\forall x \in X : \|Id_X(x)\| = \|x\|.$$

2. L'homothétie vectorielle de rapport k : $H_k : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto H_k(x) = k \bullet x$;

$$\forall x \in X : \|H_k(x)\| = \|k \bullet x\| = |k|\|x\|.$$

Th*é*orème 1.1 Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes
1. A est borné ;
2. A est continu sur tout l'espace X ;
3. A est continu en 0.

Preuve
L'implication ($1 \Longrightarrow 2$), découle du fait qu'un opérateur borné est une application Lipschitzienne donc continue. $2 \Longrightarrow 3$ car l'opérateur A est continu sur tout l'espace X en particulier en 0. Il suffit de démonter l'implication ($3 \Longrightarrow 1$). Supposons donc que l'application linéaire A est continue au point 0 de X. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in X \text{ et } \quad \|x\|_X < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|A(x) - A(0_X)\|_Y = \|A(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Soit maintenant $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \neq 0$. Alors,

$$\left\| \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left\| A\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \varepsilon.$$

En d'autres termes,

$$\forall x \in X \text{ et } \quad \|x\|_X \neq 0 \Longrightarrow \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in X \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \leq \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \|x\|_X.$$

Donc A est borné, d'où l'équivalence des trois propriétés. □

Le théorème suivant est tiré de [5].

Théorème 1.2 *(Lemme de Rellich)*
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à bord Lipschitzien. Si $s > t \geq 0$, alors l'inclusion

$$W^s(\Omega) \hookrightarrow W^t(\Omega)$$

est compact.

Dans la suite on va s'intéresser à l'espace $L^2(\Omega)$. En particulier aux espaces de Sobolev qui sont dans $L^2(\Omega)$.

1.7 Le $\overline{\partial}$-Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine. Dans cette partie, on va introduire l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann (cf [5]). Ainsi, le $\overline{\partial}$ défini pour les (p,q)-formes différentielles s'étend dans l'espace des (p,q)-formes différentielles dont les coefficients sont dans L^2.

Si

$$f = \sum_{|I|=p,|J|=q}' f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

et

$$g = \sum_{|I|=p,|J|=q}' g_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

sont deux (p,q)-formes différentielles dans $L^2_{(p,q)}(\Omega)$, nous définissons le produit scalaire et la norme comme suit :

$$< f, g >= \sum_{|I|=p,|J|=q}' < f_{I,J}, g_{I,J} >, \quad |f|^2 =< f, f >= \sum_{|I|=p,|J|=q}' |f_{I,J}|^2$$

$$||f||^2 = \int_\Omega < f, f > dx = \sum_{|I|=p,|J|=q}' \int_\Omega |f_{I,J}|^2 dx.$$

Puisque $L^2_{p,q}(\Omega)$ est muni d'un produit scalaire, on définit l'adjoint du $\bar{\partial}$ par

$$\bar{\partial} : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q+1}(\Omega)$$

$$D(\bar{\partial}) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) : \bar{\partial} f \in L^2_{p,q+1}(\Omega)\}$$

$$\bar{\partial}^* : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q-1}(\Omega).$$

$$D(\bar{\partial}^*) = \{f \in L^2_{p,q}(\Omega) : \bar{\partial}^* f \in L^2_{p,q-1}(\Omega)\}.$$

Ainsi, le laplacien est défini comme suit :

$$\Box : L^2_{p,q}(\Omega) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega)$$

et

$$\Box = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial},$$

avec

$$D(\Box) = \Big\{f \in L^2_{p,q}(\Omega) : \ \bar{\partial}_q f \in D(\bar{\partial}^*_{q+1}) \text{ et } \bar{\partial}^*_q f \in D(\bar{\partial}_{q-1})\Big\}.$$

On définit aussi le Laplacien avec poids par :

$$\Box_\phi : L^2_{p,q}(\Omega, \phi) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega, \phi)$$

et

$$\Box_\phi = \bar{\partial}\bar{\partial}^*_\phi + \bar{\partial}^*_\phi\bar{\partial}.$$

Proposition 1.4

Le laplacien $\Box$ est un opérateur fermé, dense et auto-adjoint.

Preuve

Montrons que $\Box$ est fermé.

Soit (x_n) une suite d'éléments de $D(\Box)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ avec $x \in D(\Box)$; montrons alors $\Box x_n \longrightarrow \Box x$.

Soit $y \in D(\Box)$; on a :

$$< \Box x_n, y > = < (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})(x_n), y > = < \bar{\partial}\bar{\partial}^*(x_n), y > + < \bar{\partial}^*\bar{\partial}(x_n), y >$$

Comme $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$ sont fermés alors

$$\bar{\partial} x_n \to \bar{\partial} x \quad \text{ et } \quad \bar{\partial}^* x_n \to \bar{\partial}^* x.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} < \Box x_n, y > = < \bar{\partial}\bar{\partial}^* x + \bar{\partial}^*\bar{\partial} x, y > = < (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) x, y > .$$

Ainsi, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} < \Box x_n, y > = < \Box x, y > \quad \forall y \in D(\Box).$$

Donc $\Box$ est un opérateur fermé.
Montrons que $\Box$ est dense.
On a $\overline{D^{p,q}(\Omega)} = L^2_{p,q}(\Omega)$ et $D^{p,q}(\Omega) \subset D(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega)$

$$\overline{D^{p,q}(\Omega)} \subset \overline{D(\Box)} \subset L^2_{p,q}(\Omega)$$

$$L^2_{p,q}(\Omega) \subset \overline{D(\Box)} \subset L^2_{p,q}(\Omega),$$

où $D^{p,q}(\Omega)$ est l'espace des (p,q)-formes différentielles à support compact.
Donc $\overline{D(\Box)} = L^2_{p,q}(\Omega)$. Par suite $D(\Box)$ est dense.
Montrons que le laplacien est auto-adjoint. En effet on a :

$$\begin{aligned} < (\Box)^* x, y > &= < x, \Box y > \\ &= < x, \bar\partial\bar\partial^* y + \bar\partial^*\bar\partial y > \\ &= < x, \bar\partial\bar\partial^* y > + < x, \bar\partial^*\bar\partial y > \\ &= < \bar\partial\bar\partial^* x, y > + < \bar\partial^*\bar\partial x, y > \\ &= < (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) x, y > \\ &= < \Box x, y > . \end{aligned}$$

Donc $\Box$ est auto-adjoint. $\Box$

Le problème du $\overline{\partial}$-Neumann respectivement le problème du $\overline{\partial}$-Neumann avec poids consiste à chercher un opérateur inverse du laplacien noté $N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega)$ respectivement l'inverse du laplacien à poids $N_{\phi\ p,q} : L^2_{p,q}(\Omega,\phi) \longrightarrow L^2_{p,q}(\Omega,\phi)$ vérifiant les propriétés du théorème qui suit(cf [5]) :

Théorème 1.3 L'opérateur $N_{p,q}$ vérifie les propriétés suivantes :

1 $R(N_{p,q}) \subset D(\Box)$.

2 $N_{p,q}\Box = \Box N_{p,q} = I$ où I désigne l'application identité.

3 Pour tout $f \in L^2_{p,q}(\Omega)$,
$$f = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f.$$

4 $\bar\partial N_{p,q} = N_{p,q+1}\bar\partial$, $\forall 1 \leq q \leq n-1$ sur $D(\bar\partial)$.

5 $\bar\partial^* N_{p,q} = N_{p,q-1}\bar\partial^*$, $\forall 2 \leq q \leq n$ sur $D(\bar\partial^*)$.

Preuve
On a
$$\Box : D(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega) \to L^2_{p,q}(\Omega).$$

Par définition, l'opérateur $N_{p,q}$ est l'inverse de $\Box$, avec

$$N_{p,q} : L^2_{p,q}(\Omega) \to D(\Box) \subset L^2_{p,q}(\Omega).$$

Par conséquent on a (1) et (2).
C'est-à-dire $R(N_{p,q}) \subset D(\Box)$ et $N_{p,q}\Box = \Box N_{p,q} = I$.
Montrons la relation (3).
Étant donné que $L^2_{p,q}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, $\Box$ est un opérateur fermé et aussi $\ker(\Box) = 0$, alors la décomposition de Hodge nous permet d'avoir la relation suivante :

$$L^2_{p,q}(\Omega) = R(\Box) = \bar\partial\bar\partial^*(D(\Box)) \oplus \bar\partial^*\bar\partial(D(\Box)).$$

Donc $\forall f \in L^2_{p,q}(\Omega)$ on a
$$f = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f.$$

Montrons la relation (4).
Soit $f \in D(\bar\partial)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f &=& \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \\ \bar\partial f &=& \bar\partial\bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \ car\ \bar\partial\bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f = 0 \\ N_{p,q+1}\bar\partial f &=& N_{p,q+1}\bar\partial\bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \\ N_{p,q+1}\bar\partial f &=& N_{p,q+1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\bar\partial N_{p,q} f \end{array}$$

or $N_{p,q+1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) = I$ d'après la relation (2).
Donc
$$N_{p,q+1}\bar\partial f = \bar\partial N_{p,q} f \quad \forall f \in D(\bar\partial).$$

Ainsi on a établi
$$N_{p,q+1}\bar\partial = \bar\partial N_{p,q}.$$

Pour obtenir la relation (5), on utilise le même procédé. C'est-à-dire :
soit $f \in D(\bar\partial^*)$, on a

$$\begin{array}{rcl} f &=& \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f \\ \bar\partial^* f &=& \bar\partial^*\bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \ car\ \bar\partial^*\bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} f = 0 \\ N_{p,q-1}\bar\partial^* f &=& N_{p,q-1}\bar\partial^*\bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} f \\ N_{p,q-1}\bar\partial^* f &=& N_{p,q-1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\bar\partial^* N_{p,q} f \end{array}$$

or $N_{p,q-1}(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) = I$ d'après la relation (2).
Donc
$$N_{p,q-1}\bar\partial^* f = \bar\partial^* N_{p,q} f \quad \forall f \in D(\bar\partial^*).$$

Ainsi on a établi
$$N_{p,q-1}\bar\partial^* = \bar\partial^* N_{p,q}.$$

□

Remarque 1.11 Si l'opérateur $N_{p,q}$ existe avec les propriétés du Théorème (1.3), alors pour tout $u \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap ker(\bar\partial)$, il existe $v \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ telle que $\bar\partial v = u$ sur Ω. En effet

$$u = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} u + \bar\partial^*\bar\partial N_{p,q} u = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} u + \bar\partial^* N_{p,q+1}\bar\partial u = \bar\partial\bar\partial^* N_{p,q} u$$

car $N_{p,q+1}\bar\partial u = 0$. Ainsi $v = \bar\partial^* N_{p,q} u$ est appelée la solution canonique de l'équation $\bar\partial v = u$. L'opérateur $N_{\phi\ p,q}$ a des propriétés analogues à celles de l'opérateur $N_{p,q}$ énumérées au théorème (1.3) et on obtient une solution canonique $v = \bar\partial^* N_{\phi\ p,q} u$ de l'équation $\bar\partial\ v = u$ $\forall u \in L^2_{\phi,p,q}(\Omega) \cap ker(\bar\partial)$.

Pour les $(0,q)$ formes différentielles, on notera dans la suiteN_q au lieu de $N_{0,q}$.

Comme on vient de définir l'opérateur $\bar\partial$-Neumann, on va maintenant s'intéresser à sa compacité sur une intersection de domaines. En particulier sur l'intersection de domaines uniformément et strictement q-convexes. Pour cela nous allons donner quelques conditions suffisantes qui nous permettrons de se prononcer sur la compacité l'opérateur $\bar\partial$-Neumann.

2 Quelques conditions suffisantes pour établir la compacité de N_s

Dans cette partie nous allons étudier quelques conditions suffisantes pour établir la compacité du $\bar{\partial}$-Neumann.

2.1 Conditions sur les solutions canoniques

Ici il s'agit d'utiliser les solutions canoniques pour pouvoir se prononcer sur la compacité de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann. C'est pourquoi nous allons énoncer un lemme qui nous sera utile pour la preuve du Théorème (0.1).

Lemme 2.1 Soient Ω un domaine borné pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$ et

$$\delta := \sup_{z,z' \in \Omega} |z - z'|$$

le diamètre Ω.
Pour toute $f \in L^2_{p,q}(\Omega) \cap \ker(\bar{\partial})$ avec $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$, on a les estimations suivantes :

$$\|N_{p,q} f\| \leq \frac{e\delta^2}{q} \|f\|$$

$$\|\bar{\partial} N_{p,q} f\| \leq \sqrt{\frac{e\delta^2}{q}} \|f\|$$

$$\|\bar{\partial}^* N_{p,q} f\| \leq \sqrt{\frac{e\delta^2}{q}} \|f\|.$$

Preuve
En utilisant le Théorème 4.3.4 de [5], pour tout $f \in L^2_{p,q}(\Omega)$, $q > 0$ avec $\overline{\partial} f = 0$, il existe $u \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ tel que $\overline{\partial} u = f$ et u satisfait l'estimation suivante :

$$q \int_\Omega |u|^2 dV \leq e\delta^2 \int_\Omega |f|^2 dV.$$

Donc $R(\bar{\partial})$ est fermé pour tout $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$ et $R(\bar{\partial}) = ker(\bar{\partial})$. D'après le Lemme (1.1), $R(\bar{\partial}^*)$ est également fermé et nous avons la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2_{p,q}(\Omega) = ker(\bar{\partial}) \oplus R(\bar{\partial}^*) = R(\bar{\partial}) \oplus R(\bar{\partial}^*).$$

Pour tout $f \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*)$, on a :

$$f = f_1 \oplus f_2 \quad \text{où} \quad f_1 \in R(\bar{\partial}) \quad et \quad f_2 \in R(\bar{\partial}^*).$$

Si $f_1, f_2 \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*)$, alors

$$\bar{\partial} f = \bar{\partial} f_2 \quad , \quad \bar{\partial}^* f = \bar{\partial}^* f_1.$$

Toujours d'après le Lemme (1.1), on a les estimations suivantes :
1) $\|f\|_1 \leq C\|\bar{\partial} f\|_2$ pour tout $f \in D(\bar{\partial}) \cap \overline{R(\bar{\partial}^*)}$. 2) $\|f\|_2 \leq C\|\bar{\partial}^* f\|_1$ pour tout $f \in D(\bar{\partial}^*) \cap \overline{R(\bar{\partial})}$.
D'après le Théorème 4.3.4 de [5] et les estimations ci-dessus, on a :

$$\|f_1\|^2 \leq C_q \|\bar{\partial}^* f_1\|^2 \text{ et } \|f_2\|^2 \leq C_{q+1} \|\bar{\partial} f_2\|^2$$

où $\quad C_q = e\dfrac{\delta^2}{q} \quad$ est une constante.
Puisque
$$\bar{\partial} f = \bar{\partial} f_2 \quad , \quad \bar{\partial}^* f = \bar{\partial}^* f_1$$
alors
$$\|f_1\|^2 \leq C_q \|\bar{\partial}^* f\|^2 \quad et \quad \|f_2\|^2 \leq C_{q+1} \|\bar{\partial} f\|^2.$$
Par conséquent on a :
$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \leq C_q \|\bar{\partial}^* f\|^2 + C_{q+1} \|\bar{\partial} f\|^2.$$
Or $C_q = e\dfrac{\delta^2}{q}$, donc $C_q > C_{q+1}$. Ainsi, on a
$$\|f\|^2 \leq C_q (\|\bar{\partial}^* f\|^2 + \|\bar{\partial} f\|^2) \quad \forall f \in D(\bar{\partial}^*) \cap D(\bar{\partial}).$$
Pour tout $f \in D(\Box_{p,q})$, on a
$$\|f\|^2 \leq C_q (< \bar{\partial} f, \bar{\partial} f > + < \bar{\partial}^* f, \bar{\partial}^* f >) = C_q (< \bar{\partial}^* \bar{\partial} f, f > + < \bar{\partial} \bar{\partial}^* f, f >) = C_q < \Box_{p,q} f, f > .$$
De plus l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous permet d'écrire :
$$C_q | < \Box_{p,q} f, f > | \leq C_q \|\Box_{p,q} f\| \|f\|.$$
Ainsi, on a :
$$\begin{aligned} & \|f\|^2 \leq C_q \|\Box_{p,q} f\| \|f\| \\ & \Longrightarrow \|f\| \leq C_q \|\Box_{p,q} f\| \\ \Longrightarrow \|N_{p,q} f\| \leq C_q \|N_{p,q} \Box_{p,q} f\| & = C_q \|f\| \quad \forall f \in D(\Box_{p,q}). \end{aligned}$$
Donc on a la relation suivante :
$$\|N_{p,q} f\| \leq C_q \|f\|.$$
On a aussi :
$$\begin{aligned} \|\bar{\partial} N_{p,q} f\|^2 + \|\bar{\partial}^* N_{p,q} f\|^2 &= < \bar{\partial} N_{p,q} f, \bar{\partial} N_{p,q} f > + < \bar{\partial}^* N_{p,q} f, \bar{\partial}^* N_{p,q} f > \\ &= < \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_{p,q} f, N_{p,q} f > + < \bar{\partial} \bar{\partial}^* N_{p,q} f, N_{p,q} f > \\ &= < \Box_{p,q} N_{p,q} f, N_{p,q} f > \\ &= < f, N_{p,q} f > \\ &\leq \|f\| \|N_{p,q} f\| \end{aligned}$$
Or $\quad \|N_{p,q} f\| \leq C_q \|f\|, \quad$ donc
$$\|\bar{\partial} N_{p,q} f\|^2 + \|\bar{\partial}^* N_{p,q} f\|^2 \leq C_q \|f\|^2. \tag{3}$$
D'après (3) on a :
$$\|\bar{\partial} N_{p,q} f\|^2 \leq C_q \|f\|^2 \quad et \quad \|\bar{\partial}^* N_{p,q} f\|^2 \leq C_q \|f\|^2.$$
Ainsi, on obtient les deux résultats suivants :
$$\|\bar{\partial} N_{p,q} f\| \leq C_q \|f\| \text{ et } \|\bar{\partial}^* N_{p,q} f\| \leq C_q \|f\| \quad \forall f \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*).$$
$\Box$

Remarque 2.1 Puisque f est quelconque dans $L^2_{p,q}(\Omega)$, alors $\bar\partial^* N_{p,q}$ et $\bar\partial N_{p,q}$ sont bornés dans $L^2_{p,q}(\Omega)$.

A présent on peut faire la preuve du Théorème (0.1).
Preuve (Théorème (0.1))
Comme $\bar\partial_{p,q}N_{p,q} = N_{p,q+1}\bar\partial_{p,q}$ et $\bar\partial^*_{p,q}N_{p,q} = N_{p,q-1}\bar\partial^*_{p,q}$, alors

$$\begin{aligned} N_{p,q} &= N_{p,q}(\bar\partial_{p,q-1}\bar\partial^*_{p,q} + \bar\partial^*_{p,q+1}\bar\partial_{p,q})N_{p,q} \\ &= (\bar\partial_{p,q-1}N_{p,q-1})(\bar\partial^*_{p,q}N_{p,q}) + (\bar\partial^*_{p,q+1}N_{p,q+1})(\bar\partial_{p,q}N_{p,q}). \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur $\bar\partial_{p,q-1}N_{p,q-1}$ est borné et l'opérateur $\bar\partial^*_{p,q}N_{p,q}$ est compact par hypothèse, alors la composée $(\bar\partial_{p,q-1}N_{p,q-1})(\bar\partial^*_{p,q}N_{p,q})$ est compact. Par analogie l'opérateur $(\bar\partial^*_{p,q+1}N_{p,q+1})(\bar\partial_{p,q}N_{p,q})$ est compact. Et comme la somme de deux opérateurs compacts est compact, on a la compacité de $N_{p,q}$.

$\square$

On a aussi le résultat suivant qui est une condition suffisante pour que l'opérateur N_q soit compact. Le résultat est donné par la proposition suivante (cf [24]) :

Proposition 2.1 Soit Ω un domaine borné pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, avec $1 \le q \le n$.
N_q est compact sur $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ si et seulement si, $\forall\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que l'on a l'estimateur compact suivant :

$$||u||^2 \le \varepsilon\Big(||\bar\partial u||^2 + ||\bar\partial^* u||^2\Big) + C_\varepsilon ||u||^2_{-1}$$

Pour tout $u \in D(\bar\partial) \cap D(\bar\partial^*)$

Preuve
Soit $j_q : \mathrm{D}(\bar\partial) \cap \mathrm{D}(\bar\partial^*) \hookrightarrow L^2_{(0,q)}(\Omega)$ l'injection canonique où $\mathrm{D}(\bar\partial) \cap \mathrm{D}(\bar\partial^*)$ est muni de la norme du graphe. D'après le Théorème 2.9(voir [24]), on a $N_q = j_q \circ j_q^*$ comme opérateur sur $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ et $N_q = j_q^*$ de $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ à $\mathrm{D}(\bar\partial) \cap \mathrm{D}(\bar\partial^*)$. D'après la Proposition 4.2 de [24], les affirmations suivantes sont équivalentes :
N_q est un opérateur compact de $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ dans lui même,
N_q est un opérateur compact de $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ dans $\mathrm{D}(\bar\partial) \cap \mathrm{D}(\bar\partial^*)$,
l'application qui va de $\mathrm{D}(\bar\partial) \cap \mathrm{D}(\bar\partial^*)$ à Ł$^2_{(0,q)}(\Omega)$ est compact.
Autrement dit $j_q \circ j_q^*$ compact $\Leftrightarrow$ j_q^* compact $\Leftrightarrow$ j_q compact. Mais un opérateur A est compact si et seulement si A^* est compact et un opérateur de la forme AA^* est compact si et seulement si A et A^* sont compacts. Retenons aussi que le fait de dire que $\bar\partial^* N_q$ et $\bar\partial^* N_{q+1}$ sont compacts dans $L^2(\Omega) \cap \ker(\bar\partial)$ est équivalent de dire que $\bar\partial^* N_q$ et $\bar\partial^* N_{q+1}$ sont compacts sur tout espace $L^2(\Omega)$, puisque les deux s'annulent sur le complément orthogonal de $\ker(\bar\partial)$. De plus, on a la formule suivante

$$\begin{aligned} N_q &= N_q\left(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial\right)N_q \\ &= \left(N_q\bar\partial\right)\bar\partial^* N_q + \bar\partial^* N_{q+1}\left(N_{q+1}\bar\partial\right) \\ &= \left(\bar\partial^* N_q\right)^* \bar\partial^* N_q + \bar\partial^* N_{q+1}\left(\bar\partial^* N_{q+1}\right)^*, \end{aligned} \tag{4}$$

les parenthèses sont destinées à indiquer que nous considérons $N_q\bar\partial$ et $N_{q+1}\bar\partial$ comme des opérateurs bornés sur $L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ et $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ respectivement (alternativement, on peut observer qu'il suffit d'établir (4) pour les formes lisses à support compacte, puisque l'espace de telles formes différentielles est dense dans $L^2_{(0,q)}(\Omega)$. Les deux opérateurs à droite de (4)

sont bornés, donc N_q est compact si et seulement si ces deux opérateurs sont compacts. Mais encore une fois, un opérateur de la forme A^*A est compact si et seulement si A est compact.
Montrons maintenant le fait de dire que l'application qui va de $\mathrm{D}(\bar\partial)\cap\mathrm{D}(\bar\partial^*)$ à $L^2_{(0,q)}(\Omega)$ est compact, est équivalente à dire pour tout $\varepsilon>0$, $\exists\, C_\varepsilon$ telle que on a l'estimation compact suivant

$$||u||^2 \leq \varepsilon\Big(||\bar\partial u||^2+||\bar\partial^* u||^2\Big)+C_\varepsilon ||u||^2_{-1},$$

pour tout $u\in D(\bar\partial)\cap D(\bar\partial^*)$.
D'après la propriété (i) du Lemme 4.3 de [24] on a

$$\|Tx\|_Y \leq \epsilon\|x\|_X + C_\epsilon\|Sx\|_Z.$$

où $T: X\to Y$ est un opérateur linéaire et $S: X\to Z$ un opérateur linéaire, injectif et continu. Donc en posant $X=D(\bar\partial)\cap D(\bar\partial^*)$, $Y=L^2_{(0,q)}(\Omega)$ $T=j_q$,

$$S: D(\bar\partial)\cap D(\bar\partial^*)\subset L^2_{(0,q)}(\Omega)\to W^{-1}_{(0,q)}(\Omega),$$

avec $Z=W^{-1}_{(0,q)}(\Omega)$. D'après le Lemme de Rellich (voir Théorème (1.2)), S est compact. $\square$

2.2 Condition suffisante de CATLIN noté P_q

La propriété P_q de CATLIN est une condition suffisante pour établir la compacité de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann.

Définition 2.1 *[24]* Soit $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ un domaine borné, on dit que $b\Omega$ satisfait la propriété P_q si $\forall\ M>0$, $\exists$ un voisinage $U=U_M$ de $b\Omega$ et une fonction lisse $\lambda=\lambda_M$ de classe C^2 sur U tel que :
(i) $0\leq\lambda(z)\leq 1\ \forall z\in U$ *et*
(ii) $\forall z\in U,$ la somme des q valeurs propres de la forme hermitienne

$$\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)\right)_{j,k},$$

est supérieure ou égale à M. C'est-à-dire pour toute $(0,q)$-forme différentielle u et $z\in U$,

$$\sum_{|K|=q-1}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)u_{j,K}(z)\overline{u}_{k,K}(z)\geq M|u(z)|^2.$$

Définition 2.2 Soient Ω un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ et K un compact dans Ω. On dit que K satisfait la propriété (P) si $\forall\ M>0$, $\exists$ une fonction plurisousharmonique (psh) $\lambda=\lambda_M\in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $0\leq\lambda\leq 1$ et $\forall\ z\ \in K$ on a :

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(p)t_j\overline{t}_k\geq M|t|^2.$$

Maintenant, après avoir défini la propriété P_q, on peut démontrer le Théorème (0.2). La preuve suivante est tirée de [4].
Preuve (Théorème (0.2))
On utilisera la méthode de l'estimation de Carleman pour l'opérateur $\overline{\partial}$, telle qu'introduit

par Hörmander dans [14]. On rappelle que pour une fonction donnée Φ sur Ω et une $(0,q)$-forme différentielle $f = \sum_{|I|=q} f_I d\bar{z}_I$, on définit

$$\|f\|_\Phi^2 = \int_\Omega |f|^2 e^{-\Phi} dV,$$

où $|f|^2$ est donnée par

$$|f|^2 = \sum_{|I|} |f_I|^2.$$

Dans la suite de cette preuve, la norme sans fonction poids est noté $\| \ \|$. On note par $L^2_{(0,q)}(\Omega,\Phi)$ l'espace des $(0,q)$-formes différentielles f telles que $\|f\|_\Phi^2 < \infty$.
Pour toutes fonctions poids Φ_1 , Φ_2 et Φ_3, l'opérateur $\overline{\partial}$ nous permet de définir les opérateurs T et S qui sont fermés et denses comme suit :

$$L^2_{(0,0)}(\Omega,\Phi_1) \xrightarrow{T} L^2_{(0,1)}(\Omega,\Phi_2) \xrightarrow{S} L^2_{(0,2)}(\Omega,\Phi_3),$$

avec $Tf = \overline{\partial} f$ et $Sf = \bar{\partial} f$ où f est une $(0,0)$-forme différentielle ou une $(0,1)$-forme différentielle respectivement. D'après [14], l'adjoint T^* est défini par

$$T^* f = e^{-\Phi_1} \bar{\partial}^*(e^{-\Phi_2} f), \ f \in D(T^*).$$

Maintenant on suppose que Φ et Ψ sont des fonctions dans $C^2(\overline{\Omega})$, telles que :

$$\Phi_1 = \Phi - 2\Psi, \ \Phi_2 = \Phi - \Psi \ et \ \Phi_3 = \Phi.$$

Toujours dans [14] on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j e^{-\Phi} dV + \int_{b\Omega} \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j e^{-\Phi} dS + \sum_{i,j=1} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}_j} \right\|_{\Phi_3}^2 \\
&\leq \|Sf\|_{\Phi_3}^2 + 2\|T^* f\|_{\Phi_1}^2 + 2\int_\Omega |\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial z_j} f_j|^2 e^{-\Phi} dV, \ \forall f \in D(T^*) \cap D(S),
\end{aligned} \tag{5}$$

où r est la fonction définissante de Ω. En fait ce qui diffère l'estimation obtenue dans [14] avec (5) est que l'intégrale sur le bord n'existe pas. Ce terme intervient ici car la fonction Ψ est dans $C^2(\overline{\Omega})$ et ne s'annule pas au bord comme dans [14]. Aussi en examinant la preuve de l'estimation (5), on peut toujours vérifier que le terme $2\int_\Omega |\partial\Psi|^2 |f|^2 e^{-\Phi} dV$ trouvé dans [14] peut être remplacer par le dernier terme de l'estimation (5).
L'idée de cette preuve est de choisir des fonctions Φ et Ψ pour que tout d'abord $\Phi_2 = \Phi - \Psi \equiv 0$. De cette façon l'opérateur

$$T^* f = e^{\Phi_1} \bar{\partial}^*(e^{\Phi_2} f) = e^{\Phi_1} \bar{\partial}^* f$$

est simplement un multiple de $\bar{\partial}^* f$ par une fonction lisse. Donc il est possible d'estimer $2\|T^* f\|_{\Phi_1}^2$ en termes de $\|\bar{\partial}^* f\|^2$. Ensuite on doit choisir Φ et Ψ telles que le dernier terme de (5) soit dominé par le premier terme de (5). Donc on pose $\Phi = \Psi = \frac{1}{6} e^\lambda$, $\lambda \in C^\infty(\Omega)$

on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 e^{\lambda}}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial e^{\lambda}}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \Big) f_i \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(e^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \right) f_i \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{e^{\lambda} \partial \lambda}{\partial z_i} f_i \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \Big) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j \\
&= \frac{1}{6} e^{\lambda} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial z_i} f_i \Big) \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \Big) + \frac{1}{6} e^{\lambda} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j.
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial z_i} f_i \Big) \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial \overline{z}_j} \overline{f}_j \Big) = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2$$

car $\lambda \in C^{\infty}(\Omega)$ et est plurisousharmonique. Par suite

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j = \frac{1}{6} e^{\lambda} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j + \frac{1}{6} e^{\lambda} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial z_j} f_j \right|^2 &= \left| \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial e^{\lambda}}{\partial z_j} f_j \right|^2 \\
&= \frac{1}{36} \left| e^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2 \\
&= \frac{1}{36} e^{2\lambda} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2
\end{aligned}$$

Si on substitue ces deux expressions obtenues ci-dessus dans (5), on obtient l'estimation suivante :

$$\frac{1}{6} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j e^{\lambda - \Phi} dV + \frac{1}{6} \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2 (e^{\lambda} - \frac{2}{6} e^{2\lambda}) e^{-\Phi} dV \leq \|Sf\|^2_{\Phi_3} + \|T^* f\|^2_{\Phi_1}, \tag{6}$$

car

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j \geq 0.$$

Si $0 \leq \lambda \leq 1$, alors $e^{\lambda} - \dfrac{2}{6} e^{2\lambda} \geq 0$. Donc

$$\frac{1}{6} \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} f_j \right|^2 \Big(e^{\lambda} - \frac{2}{6} e^{2\lambda} \Big) e^{-\Phi} dV \geq 0.$$

En outre si $0 \leq \lambda \leq 1$, $e^{\lambda-\Phi} \geq \dfrac{3}{4}$ et $e^{-\Phi} \leq 1$, alors

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j dV &\leq \int_\Omega |\bar\partial f|^2 e^{-\Phi} dV + 2\int_\Omega |\bar\partial^* f|^2 e^{-\Phi} dV \\ &\leq 2\|\bar\partial f\|^2 + 2\|\bar\partial^* f\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que si pour toute fonction $\lambda \in C^2(\overline{\Omega})$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, alors

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} f_i \overline{f}_j dV \leq 16\|\bar\partial f\|^2 + 16\|\bar\partial^* f\|^2. \tag{7}$$

On observe que si $\lambda(z) = \left|\dfrac{z}{D}\right|^2$ avec $D := \sup\{|z|; z \in \overline{\Omega}\}$, alors en s'appuyant de (7) on a

$$\|f\|^2 \leq 16D^2 Q(f,f). \tag{8}$$

Partant des hypothèses de la définition de la propriété P_q, pour tout $M > 0$, il existe une fonction $\lambda \in C^2(\overline{\Omega})$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$ telle que pour tout $z \in b\Omega$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} t_i \overline{t}_j > M|t|^2. \tag{9}$$

Par continuité des dérivées secondes de λ, il existe un nombre positif δ (qui dépend de M) tel que (9) est valable pour tout $z \in S_\delta = \Big\{z; -\delta \leq r(z) \leq 0\Big\}$. L'inégalité (7) implique que :

$$M\int_{S_\delta} |f|^2 dV \leq 16Q(f,f). \tag{10}$$

On choisit $\gamma_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$(l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω) telle que $\gamma_\delta(z) = 1$ chaque fois que $r(z) \leq -\delta$.
Pour qu'une constante a soit déterminée, on a l'inégalité

$$\|\gamma_\delta f\|^2 \leq a\|\gamma_\delta f\|_1^2 + a^{-1}\|\gamma_\delta f\|_{-1}^2.$$

Par l'inégalité de Garding, il existe une constante C_1 qui dépend seulement du diamètre de Ω telle que

$$\|\gamma_\delta f\|_1^2 \leq C_1 Q(\gamma_\delta f, \gamma_\delta f).$$

Ici, nous avons omis le terme usuel de la forme $C\|\gamma_\delta f\|^2$ car, d'après l'inégalité (8), on a

$$\|\gamma_\delta f\|^2 \leq 16D^2 Q(\gamma_\delta f, \gamma_\delta f).$$

Ainsi $\|\gamma_\delta f\|^2$ peut être estimée

$$\|\gamma_\delta f\|_1^2 \leq C_1 Q(\gamma_\delta f, \gamma_\delta f) \leq 2C_1\Bigg(\|\gamma_\delta \bar\partial f\|^2 + \|\gamma_\delta \bar\partial^* f\|^2\Bigg) + 2C_1\Bigg(\|[\gamma_\delta, \bar\partial]f\|^2 + \|[\gamma_\delta, \bar\partial^*]f\|^2\Bigg).$$

Puisque la somme des termes du commutateur est bornée par $C_2\|f\|^2$ pour une certaine constante C_2 qui dépend de δ, on obtient l'inégalité

$$\|\gamma_\delta f\|^2 \leq 2aC_1 Q(f,f) + 2aC_1C_2\|f\|^2 + a^{-1}\|\gamma_\delta f\|_{-1}^2. \tag{11}$$

Maintenant on choisit a telle que $2aC_1 < 4/M$ et $2aC_1C_2 < \dfrac{1}{2}$. En combinant (10) et (11), on obtient

$$M\|f\|^2 \leq M\int_{S_\delta} |f|^2 dV + M\|\gamma_\delta f\|^2$$

$$\leq \quad 20Q(f,f) + (M/2)\|f\|^2 + a^{-1}M\|\gamma_\delta f\|_{-1}^2,$$

ce qui donne :

$$\|f\|^2 \leq (40/M)Q(f,f) + (2/a)\|\gamma_\delta f\|_{-1}^2.$$

Maintenant on choisit M telle que $40/M < \varepsilon$ et soit $\xi_\epsilon = (2/a)^{1/2}\gamma_\delta$, on obtient alors l'estimation de compacité suivante

$$\|f\|^2 \leq \varepsilon Q(f,f) + \|\xi_\varepsilon f\|_{-1}^2.$$

Ainsi, d'après la Proposition (2.1), l'opérateur N_q est compact. $\square$

2.3 Condition suffisante de McNeal noté $\tilde{P}_q$

Tout comme la propriété P_q de CATLIN, la propriété $\tilde{P}_q$ de MC NEAL est une condition suffisante pour établir la compacité de l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann. Tous les résultats et définitions sont tirés dans [21].

Définition 2.3 Soit Ω un domaine borné.
On dit que $b\Omega$ satisfait la propriété $(\tilde{P}_q)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall \quad M > 0$, il existe un voisinage $U = U_M$ de $b\Omega$ et une fonction lisse $\phi = \phi_M$ de classe C^∞ sur U tel que pour toute $(0,q)$-forme différentielle u et $z \in U$ on a *:*

(i)

$$\sum_{|K|=q-1}^{\prime} \|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial z_j}(z)u_{j,K}(z)\|^2 \leq C \sum_{|K|=q-1}^{\prime} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\phi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)u_{j,K}(z)\overline{u}_{k,K}(z),$$

(ii)

$$\sum_{|K|=q-1}^{\prime} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\phi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)u_{j,K}(z)\overline{u}_{k,K}(z) \geqslant M|u(z)|^2.$$

Définition 2.4 *[21]* Soit $\mathbb{X} = (X, \| \, \|_X)$ un espace de Banach réflexif. Si $| \, |_X$ est une autre norme définie sur X. On dira que $| \, |_X$ est strictement plus faible que $\| \, \|_X$ si l'opérateur identité qui va de $(X, \| \, \|_X)$ dans $(X, | \, |_X)$ est compact.

Le lemme suivant nous sera utile pour la preuve du Théorème (0.3).

Lemme 2.2 Soit $\mathbb{X} = (X, \| \, \|_X)$, $\mathbb{Y} = (Y, \| \, \|_Y)$ deux espaces de Banach réflexifs. Supposons que $\mathbb{X} = (X, | \, |_X)$ est un espace de Banach réflexif où $| \, |_X$ est une norme sur X qui est strictement plus faible que $\| \, \|_X$.
Un opérateur linéaire continu $T : X \to Y$ est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_ε telle que

$$\|Tu\|_Y \leq \varepsilon\|u\|_X + C_\varepsilon|u|_X. \tag{12}$$

Preuve
L'inégalité (12) implique la compacité de l'opérateur T. Pour l'implication inverse, supposons que l'estimation (12) est fausse. Alors il existe une suite (u_n) dans X telle que

$$\|Tu_n\|_Y > \varepsilon_0\|u_n\|_X + n|u_n|_X, \quad u_n \in X, \tag{13}$$

pour un certain $\varepsilon_0 > 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\|u_n\|_X = 1$. D'une part la relation (13) implique

$$|u_n|_X < \frac{1}{n}(\|T\| - \varepsilon_0) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Puisque $\mathbb{X}$ est réflexif et (u_n) est une suite bornée dans $\mathbb{X}$, il existe une sous-suite (u_{n_k}) qui convergente faiblement vers u_0. Alors, pour toute application linéaire bornée L sur $\mathbb{X}$ $Lu_{n_k} \to Lu_0$. Puisque $u_n \to 0$ en $|\;|_X$, on en conclu que $u_0 = 0$.
D'autre part, T est compact, il existe donc une sous-suite (u_{n_1}) telle que

$$Tu_{n_1} \to Tu_0 = 0.$$

Ceci contredit (13).

$\square$

Donc le résultat ci-dessus nous permet de faire la preuve du Théorème (0.3).
Preuve (Théorème (0.3))
On va montrer que $\bar{\partial}^* N_q$ et $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ sont compacts pour en déduire que N_q est compact.
D'abord notons que si $\beta \in L^2_{p,q}(\Omega)$ et $<\beta, \alpha>= 0$ pour toute $\alpha \in L^2_{p,q}(\Omega)$ telle que $\bar{\partial}\alpha = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\|\bar{\partial}^* N_q \beta\|^2 &= <\bar{\partial}\bar{\partial}^* N_q\beta, N_q\beta> \\
&= <\bar{\partial} N_{q-1}\bar{\partial}^* N_q\beta, \beta> \qquad \text{car } N_q \text{ est auto-adjoint .} \\
&= 0 \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \bar{\partial} N_{q-1}\bar{\partial}^* N_q\beta.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Lemme (2.2), $\bar{\partial}^* N_q$ et $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ sont compacts sur $\ker(\bar{\partial})^{\perp}$.
Donc il reste à montrer que $\bar{\partial}^* N_q|_{\ker(\bar{\partial})}$ et $\bar{\partial}^* N_{q+1}|_{\ker(\bar{\partial})}$ sont compacts.

Soit $\varepsilon > 0$ et on choisit M tel que $M \geq \dfrac{24}{\varepsilon}$. Pour ϕ_M donnée dans la définition (2.3), on pose $\lambda = \phi_M$, $g = e^{-\phi_M}$ et $\nu = \dfrac{1}{2}$ dans la Proposition 3.2 de [21] (relation (3.10)), combiné avec la propriété (i) de la définition (2.3), on a :

$$\|\bar{\partial} u\|^2_{2\phi} + 3\|\bar{\partial}^*_\phi u\|^2_{2\phi} \geq \frac{1}{2}\int_\Omega i\partial\bar{\partial}\phi(u,u)e^{-2\phi}, \tag{14}$$

pour toute $u \in D^{p,q}(\Omega) \cap D(\bar{\partial}^*_\phi)$. Soit $S_\delta = \{z \in \Omega : -\delta < r(z) < 0\}$, avec $\delta > 0$ et choisi assez petit tel que

$$i\partial\bar{\partial}\phi(z)(u,u) \geq \frac{M}{2}\|u\|^2, \quad z \in S_\delta. \tag{15}$$

De (14) et (15), on a

$$\frac{M}{12}\int_{S_\delta}\sum_{I,J}|u_{I,J}|^2 e^{-2\phi} \leq \|\bar{\partial} u\|^2_{2\phi} + \|\bar{\partial}^*_\phi u\|^2_{2\phi}. \tag{16}$$

De la régularité elliptique intérieure du Laplacien ; nous avons aussi l'estimation suivante :

$$\int_{\Omega\setminus S_\delta}\sum_{I,J}|D(e^{-\phi}u_{IJ})|^2 \leq C(\phi,\delta)(\|\bar{\partial} u\|^2_{2\phi} + \|\bar{\partial}^*_\phi u\|^2_{2\phi}), \tag{17}$$

où D est une dérivée du premier ordre et $C(\phi,\delta) = C$ est indépendant de u. Soit α une forme différentielle $\bar{\partial}$-fermée. Sur l'ensemble $\{e^{\frac{-\phi}{2}}\bar{\partial}^*_\phi u \,:\, u \in D^{p,q}(\Omega)\}$, on définit l'application linéaire

$$e^{\frac{-\phi}{2}}\bar{\partial}^*_\phi u \longmapsto <u,\alpha>_\phi .$$

On note d'abord que la généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
|<u,\alpha>_\phi| &\leq |<u,\alpha>^{S_\delta}_\phi| + |<u,\alpha>^{\Omega\setminus S_\delta}_\phi| \\
&\leq |<u,\alpha>^{S_\delta}_\phi| + \|e^{-\varphi}u\|^{\Omega\setminus S_\delta}\|\alpha\|_{(-1)}.
\end{aligned}$$

Avec $\varphi = \phi$ sur $\Omega \setminus S_\delta$. Donc si $\bar{\partial} u = 0$, alors (16) et (17) impliquent

$$| < u, \alpha >_\phi | \leq \|e^{\frac{-\phi}{2}} \bar{\partial}^*_\phi u\|_\phi \left(\frac{12}{M} \|\alpha\| + C\|\alpha\|_{(-1)} \right).$$

Si $u \perp_\phi \ker(\bar{\partial})$, alors $< u, \alpha >_\phi = 0$, donc l'inégalité ci-dessus est toujours vraie dans ce cas. Sinon, puisque $\mathsf{D}^{p,q}(\Omega)$ est dense dans $D(\bar{\partial}^*)$, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $v \in L^2_{p,q-1}(\Omega)$ tel que

$$< e^{\frac{-\phi}{2}} \bar{\partial}^*_\phi u, v >_\phi = < u, \alpha >_\phi$$

$$\int_\Omega |v|^2 e^{-\phi} dV \leq \left(\frac{24}{M} \|\alpha\|^2 + C\|\alpha\|^2_{(-1)} \right).$$

Donc si $s = e^{\frac{-\phi}{2}} v$, alors s est solution de l'équation $\bar{\partial} s = \alpha$ et satisfait :

$$\|s\|^2 \leq \left(\frac{24}{M} \|\alpha\|^2 + C\|\alpha\|^2_{(-1)} \right). \tag{18}$$

La solution canonique vérifie aussi l'estimation suivante

$$\int_\Omega |\bar{\partial}^* N_q \alpha|^2 e^{-\phi} dV \leq \frac{24}{M} \|\alpha\|^2 + C\|\alpha\|^2_{(-1)}. \tag{19}$$

En posant $\varepsilon = \dfrac{24}{M}$ et $T = \bar{\partial}^* N_q$ dans (12), on a l'estimation (19). D'après le Lemme (2.2) $\bar{\partial}^* N_q$ est compact. De la même méthode, on montre que $\bar{\partial}^* N_{q+1}$ est également compact. D'après le Théorème (0.1), N_q est compact. □

Remarque 2.2 Soit Ω un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Pour $1 \leq q \leq n-1$ si $b\Omega$ satisfait la propriété (P_q) ou la propriété $(\tilde{P}_q)$, alors il satisfait la propriété (P_{q+1}) ou la propriété $(\tilde{P}_{q+1})$.

3 $\bar{\partial}$ sur les D_j et N_s sur D

3.1 $\bar{\partial}$ sur les sous domaines approximatifs

Soit D une intersection de domaines uniformément strictement q-convexes de $\mathbb{C}^n$. Dans cette section, l'objectif consiste à construire une suite de sous-domaines lisses D_j uniformément Lipschitziens, uniformément strictement q-convexes qui approximent D de l'intérieur, puis de résoudre le problème du $\bar{\partial}$ sur de tels sous-domaines approximatifs.

Définition 3.1 Un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ est dit une intersection uniformément q-convexe de classe $C^2 (q \geq 1)$, s'ils existent un voisinage borné U de $\overline{D}$ et un nombre fini de fonctions réelles de classe C^2 $\rho_1(z), ..., \rho_N(z)$ où $n \geq N+2$, définies sur U telles que :

$$D = \{z \in U | \rho_1(z) < 0, ..., \rho_N(z) < 0\}$$

et pour $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_l \leq N$, les conditions suivantes sont verifiées :
les 1-formes différentielles $d\rho_{i_1}, ..., d\rho_{i_l}$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes sur l'ensemble

$$\bigcap_{j=1}^{l} \{\rho_{i_j}(z) \leq 0\}.$$

Pour tout
$$z \in \bigcap_{j=1}^{l} \{\rho_{i_j}(z) \leq 0\},$$
si nous fixons $I = (i_1, ..., i_l)$, la somme de q valeurs propres quelconques de la forme de Levi $L_{\rho_i}(z; .)$, $i \in I$, restreint au sous espace complexe maximale de l'espace tangent T_I^z à z est définie positive.

Dans cette partie, on a besoin de définir une fonction maximale régularisée comme dans [2]. Pour chaque $\beta > 0$, soit χ_β une fonction réelle positive de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

- $\chi_\beta(x) = \chi_\beta(-x)$,
- $|x| \leq \chi_\beta(x) \leq |x| + \beta, \quad \chi_\beta(x) = |x|$ si $|x| \geq \dfrac{\beta}{2}$,
- $|\chi_\beta^{'}(x)| \leq 1, \quad \chi_\beta^{'}(x) > 0$ si $x > 0$, $\chi_\beta^{'}(x) < 0$ si $x < 0$, et $\chi_\beta^{''}(x) \geq 0$.

On définit la fonction
$$\max_\beta(t, s) = \frac{t+s}{2} + \chi_\beta(\frac{t-s}{2}) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$
Cette fonction vérifie les propriétés données dans le lemme suivant (cf [12]).

Lemme 3.1 Pour deux fonctions ϕ et ψ quelconques dans $C^k(\mathbb{C}^n)$, $k \geq 2$, on a les assertions suivantes :

(A) $\max(\phi, \psi) \leq \max_\beta(\phi, \psi) \leq \max(\phi, \psi) + \beta,$

(B) $\max_\beta(\phi, \psi) = \max(\phi, \psi)$ *si* $|\phi - \psi| > \beta,$

(C) $d\max_\beta(\phi(z), \psi(z)) = \lambda(z)d\phi(z) + (1 - \lambda(z))d\psi(z)$ *pour tout* $\lambda(z) \in [0, 1],\ z \in \mathbb{C}^n.$

Preuve

(A) On sait que
$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Par hypothèse, on a
$$\max_\beta(t, s) = \frac{t+s}{2} + \chi_\beta(\frac{t-s}{2}) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$
Comme ϕ et ψ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors par le deuxième ($\bullet$) énuméré ci-dessus on a :
$$|\frac{\phi - \psi}{2}| \leq \chi_\beta(\frac{\phi - \psi}{2}) \leq |\frac{\phi - \psi}{2}| + \beta$$
$$|\frac{\phi - \psi}{2}| + \frac{\phi + \psi}{2} \leq \frac{\phi + \psi}{2} + \chi_\beta(\frac{\phi - \psi}{2}) \leq \frac{\phi + \psi}{2} + |\frac{\phi - \psi}{2}| + \beta.$$
donc
$$\max(\phi, \psi) \leq \max_\beta(\phi, \psi) \leq \max(\phi, \psi) + \beta.$$

(B) D'après le deuxième ($\bullet$), on a $\chi_\beta(x) = |x|$ si $|x| \geq \dfrac{\beta}{2}$.

Pour $|\phi-\psi|>\beta$, on a $\dfrac{|\phi-\psi|}{2}>\dfrac{\beta}{2}\ \Rightarrow \chi_\beta(\dfrac{|\phi-\psi|}{2})=\dfrac{|\phi-\psi|}{2}$.
Par suite, on obtient

$$\frac{\phi+\psi}{2}+\chi_\beta(\frac{|\phi-\psi|}{2})=\frac{\phi+\psi}{2}+\frac{|\phi-\psi|}{2}.$$

Donc

$$\max_\beta(\phi,\psi)=\max(\phi,\psi).$$

(C) Pour (C), on va démontrer en suivant trois cas :
premier cas $:\phi-\psi>0$
on a :

$$\begin{aligned}
d\max_\beta\Big(\phi(z),\psi(z)\Big) &= d\Big(\frac{\phi(z)+\psi(z)}{2}\Big)+d\chi_\beta\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\\
&= \frac{1}{2}d\phi(z)+\frac{1}{2}d\psi(z)+\frac{1}{2}\Big(d\phi(z)-d\psi(z)\Big)\chi_\beta^{'}\Bigg(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Bigg)\\
&= d\phi(z)\Bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\Bigg)+d\psi(z)\Bigg(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\Bigg)\\
&= d\phi(z)\Bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2})\Bigg)+d\psi(z)\Bigg(1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}))\Bigg),
\end{aligned}$$

on pose $\lambda(z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\dfrac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)$.
Or $\chi_\beta(x)$ possède les propriétés suivants : $|\chi_\beta^{'}(x)|\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$ et $\chi_\beta^{'}(x)>0$ si $x>0$.
Et comme $\phi-\psi>0$, par conséquent $\dfrac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\dfrac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\leq\dfrac{1}{2}$, donc $\lambda(z)\leq 1$. Par suite $\lambda(z)\in[0,1]$.
Ainsi,

$$d\max_\beta\Big(\phi(z),\psi(z)\Big)=\lambda(z)d\phi(z)+\Big(1-\lambda(z)\Big)d\psi(z)\ \textit{pourtout}\ \lambda(z)\in[0,1],\ z\in\mathbb{C}^n.$$

Deuxième cas $:\phi-\psi<0$
on a

$$d\max_\beta\Big(\phi(z),\psi(z)\Big)=d\Big(\frac{\phi(z)+\psi(z)}{2}\Big)+d\chi_\beta\Big(\frac{\psi(z)-\phi(z)}{2}\Big).$$

D'après le premier ($\bullet$) on a

$$\chi_\beta\Big(\frac{\psi(z)-\phi(z)}{2}\Big)=\chi_\beta\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big).$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}
d\max_\beta\Big(\phi(z),\psi(z)\Big) &= d\Big(\frac{\phi(z)+\psi(z)}{2}\Big)+d\chi_\beta\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\\
&= \frac{1}{2}d\phi(z)+\frac{1}{2}d\psi(z)+\frac{1}{2}\Big(d\phi(z)-d\psi(z)\Big)\chi_\beta^{'}\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\\
&= d\phi(z)\Bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\Bigg)+d\psi(z)\Bigg(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big)\Bigg)\\
&= d\phi(z)\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2})\Big)+d\psi(z)\Big(1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}))\Big).
\end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big) \geq \frac{-1}{2}$$

$$1 \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}\Big(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}\Big) \geq 0$$

donc

$$\lambda(z) = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_\beta^{'}(\frac{\phi(z)-\psi(z)}{2}))\ \in [0,1].$$

<u>Troisième cas : $\phi(z)-\psi(z)=0$</u>

$$d\max_\beta\Big(\phi(z),\psi(z)\Big) = d\phi(z) = d\psi(z)$$

et

$$\lambda(z)d\phi(z)+(1-\lambda(z))d\psi(z) = \lambda(z)d\phi(z)+(1-\lambda(z))d\phi(z) = d\phi(z).$$

En résumé on a :

$$d\max_\beta\Big(\phi(z),\psi(z)\Big) = \lambda(z)d\phi(z)+(1-\lambda(z))d\psi(z)\ pourtout\ \lambda(z)\in[0,1],\ z\in\mathbb{C}^n.$$

□

Lemme 3.2 Soit λ une fonction lisse de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$. Pour tout $z\in\mathbb{C}^n$, $1\leq q\leq n$ et soit u une $(0,q)$-forme différentielle définit en z. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\geq M|u|^2,\ M>0,$ où le prime indique que la sommation est prise en compte sur des multi-indices strictement croissants.

(b) La somme de tout q plus petits valeurs propres de la matrice $(\frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_j})$ est supérieure ou égale à M.

(c) $\sum_{s=1}^{q}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(e^s)_j\overline{(e^s)}_k\geq M,$ où $e^1,e^2,...,e^q$ sont des vecteurs orthonormaux dans $\mathbb{C}^n$.

Preuve
$(a)\Leftrightarrow(b)$
L'équivalence entre (a) et (b) s'obtient lorsque la forme hermitienne $\Big(\frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\Big)_{j,k}$ est diagonalisée. Notons par $\lambda_1\leq\lambda_2\leq...\leq\lambda_n$ les valeurs propres de la forme hermitienne. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK} &= \sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|u_{jK}|^2\\ &= \sum_{J=(j_1,...,j_q)}^{'}(\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+...+\lambda_{j_q})|u_J|^2.\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte comme suit :
Pour $J=(j_1,...,j_q)$ fixé, $|u_J|^2$ se produit précisément q fois dans la deuxième somme, une

fois comme $|u_{J_1K_1}|^2$, une fois comme $|u_{J_2K_2}|^2$, etc. À chaque occurrence, il est multiplié par λ_{j_l}.
Nous montrons maintenant que (b) et (c) sont équivalentes. Supposons (c).
Soit $\underline{e^j}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j. Alors pour tout q-uplet $(j_1, ..., j_q)$, $\underline{e^{j_1}}, ..., \underline{e^{j_q}}$ sont orthonormés, de sorte que (c) donne

$$\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + ... + \lambda_{j_q} = \sum_{s=1}^{q} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} (e^s)_j \overline{(e^s)}_k \geq M.$$

Maintenant supposons (b). Fixons $\underline{t_1}, ..., \underline{t_q} \in \mathbb{C}^n$. Cet ensemble de vecteurs peut être complétée en une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ par $\underline{t_{q+1}}, ..., \underline{t_n}$. Notons par (b_{jk}) la matrice de la forme hermitienne $\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \omega_j \overline{\omega}_k$ dans la base $\underline{t_1}, ..., \underline{t_n}$. Alors la somme à gauche côté de (c) est égal à $b_{11} + ... + b_{qq}$. Par le théorème de majoration de Schur (voir [15]. Théorème 4.3.26), cette somme n'est pas inférieure à la somme des q plus petites valeurs propres, donc par (b), elle est supérieure ou égale à M. Ceci complète la preuve du Lemme (3.2).
□

Les deux résultats ci-dessus (Lemme (3.1) et Lemme (3.2)) vont nous permettre de démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.3 Soit D une intersection de sous domaines uniformément strictement q-convexes de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$. Alors il existe une famille de sous domaines D_j de D telle que :

(i) $D_j \subset\subset D$ et $D_j \nearrow D$.

(ii) Chaque D_j a une fonction définissante θ_j telle qu'ils existent deux constantes C_1 *et* C_2 positives et indépendantes de j vérifiant $C_1 \leq |\nabla \theta_j| \leq C_2$ *sur* bD_j.

(iii) Pour tout multi-indices $1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n$, $z \in \overline{D}_j$, il existe une constante $C_0 > 0$ tel que les valeurs propres de la forme de Levi de θ_j en z noté $\{\alpha_k^{\theta_j}(z)\}_{k=1}^n$, satisfait

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{\theta_j}(z) \geq C_0 > 0.$$

Preuve Soit $D = \{z \in U \mid \rho_1(z) < 0, ..., \rho_N(z) < 0\} \subset\subset U$ une intersection de sous domaines uniformément q-convexes de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ comme indiqué dans la définition (3.1). Soit (ε_j) une suite strictement décroissante d'entiers positifs tels que $\varepsilon_j \longrightarrow 0$. On définit

$$\tilde{D}_{\varepsilon_j} = \{z \in U | \ \tilde{\rho}(z) := \max(\rho_1(z), ..., \rho_N(z)) < -\varepsilon_j\}.$$

Comme (ε_j) est une suite strictement décroissante d'entiers positifs, alors $-\varepsilon_j < -\varepsilon_{j+1}$. Donc pour $z \in \tilde{D}_{\varepsilon_j}$, on a z qui est aussi un élément de $\tilde{D}_{\varepsilon_{j+1}}$. Par conséquent $\tilde{D}_{\varepsilon_j} \nearrow D$. La fonction $max(\rho_1(z), ..., \rho_N(z))$ n'est pas lisse précisément au point où $\rho_1(z) = ... = \rho_N(z)$, le maximum est atteint simultanément en toute fonction $\rho_i(z)$ avec $1 \leq i \leq n$.
Soit $0 < \beta_j < \frac{\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j}{2(N-1)}$ et $t_j = \frac{\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j}{2} \in]\varepsilon_j, \varepsilon_{j-1}[$ deux suites de nombres réels. Pour chaque β_j, on choisit χ_{β_j}, avec les propriétés de la fonction χ et on définit

$$D_j = \{z \in U \mid \theta_j(z) < 0\},$$

où $\varphi_1 = \rho_1$ et $\varphi_2 = \max_{\beta_j}(\rho_1, \rho_2)$,...,$\varphi_N = \max_{\beta_j}(\rho_{N-1}, \rho_N)$ et $\theta_j(z) := \varphi_N(z) + t_j$.
Il découle de l'assertion (A) du Lemme (3.1) que

$$\tilde{\rho}(z) + t_j < \theta_j(z) < \tilde{\rho}(z) + t_j + (N-1)\beta_j \quad \text{sur } \tilde{D}_{\varepsilon_{j-1}}.$$

Supposons $\theta_j(z) \geq -t_j$, alors $\theta_j(z) \geq \dfrac{\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j}{2}$. Or si $j \to +\infty$ alors $\dfrac{\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j}{2} \to 0$. Donc $\theta_j(z) \geq 0$, ce qui est absurde car $\theta_j(z) < 0$. Par conséquent $\theta_j(z) < -t_j$.
Puisque
$$\tilde{\rho}(z) < \theta_j(z) < -t_j < -\varepsilon_j$$
pour tout $z \in D_j$, alors $D_j \subset \tilde{D}_{\varepsilon_j}$. De plus, si $z \in \tilde{D}_{\varepsilon_{j-1}}$, l'assertion (A) du Lemme (3.1) implique à nouveau que
$$\theta_j(z) < \tilde{\rho}(z) + t_j + (N-1)\beta_j < -\varepsilon_{j-1} + \frac{\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j}{2} + t_j = -\varepsilon_j$$
c'est-à-dire $\theta_j(z) < 0$, par conséquent $\tilde{D}_{\varepsilon_{j-1}} \subset D_j$. Donc on conclut que
$$\tilde{D}_{\varepsilon_{j-1}} \subset\subset D_j \subset\subset \tilde{D}_{\varepsilon_j}.$$
Puisque $\tilde{D}_{\varepsilon_j} \nearrow D$, on voit que D peut être approché de l'intérieur par une famille de sous-domaines D_j relativement compacts de sorte que $\cup D_j = D$. Cela prouve l'énoncé (i).
Prouvons maintenant (ii). Puisque sur la partie lisse du bord bD nous avons $\theta_j = \rho_i + t_j$ pour $i = 1, ..., N$, alors $|\nabla\theta_j| = |\nabla\rho_i| \leq c_2$ sur $\overline{D}$, c'est-à-dire que $|\nabla\theta_j|$ est uniformément borné pour $z \in \overline{D}$. Par l'hypothèse d'intersection transversale, on peut trouver un petit voisinage conique W pour tout $z \in \overline{D}$ et un vecteur unitaire T tel que $< \nabla\rho_i, T >_W \geq c_3 > 0$ pour tout $z \in W$ et donc $< \nabla\theta_j, T >_W \geq c_3 > 0$ pour tout $z \in W$, cela assure l'existence de la constante $c_1 > 0$ telle que $\nabla\theta_j \geq c_1$ pour tout z proche de bD_j.
Afin de prouver (iii) nous avons besoin du Lemme (3.2).
On suppose sans perte de généralité que $N = 2$. Soit u une $(0, q)$-forme différentielle. La forme de Lévi de $\theta_j = \max_{\beta_j}(\rho_1, \rho_2) + t_j$ en tout point $z \in \mathbb{C}^n$ est donnée par le calcul suivant :
$$\begin{aligned}
\sideset{}{'}\sum_{|K|=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\theta_j(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} &= \sideset{}{'}\sum_{K=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\Big(\max_{\beta_j}\Big(\rho_1(z),\rho_2(z)\Big)+t_j\Big)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} \\
&= \frac{1}{2}\sideset{}{'}\sum_{K=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\Big(\rho_1(z)+\rho_2(z)+2t_j\Big)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} \\
&+ \sideset{}{'}\sum_{K=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\chi_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} \\
&= \frac{1}{2}\sideset{}{'}\sum_{K=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho_1(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} + \frac{1}{2}\sideset{}{'}\sum_{K=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho_2(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} \\
&+ \sideset{}{'}\sum_{|K|=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_k}\Big(\rho_1(z)-\rho_2(z)\Big)\chi'_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big) u_{iK}\overline{u}_{kK} \\
&= \frac{1}{2}\sideset{}{'}\sum_{K=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho_1(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} + \frac{1}{2}\sideset{}{'}\sum_{K=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho_2(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_k} u_{iK}\overline{u}_{kK} \\
&+ \frac{1}{2}\sideset{}{'}\sum_{|K|=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\overline{z}_k}\Big(\rho_1(z)-\rho_2(z)\Big)\chi'_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big) u_{iK}\overline{u}_{kK} \\
&+ \frac{1}{4}\sideset{}{'}\sum_{|K|=q-1}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\overline{z}_k}\Big(\rho_1(z)-\rho_2(z)\Big)\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(\rho_1(z)-\rho_2(z)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\ \chi^{"}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)u_{iK}\overline{u}_{kK}\\
&=\ \frac{1}{2}\Bigg(1+\chi^{'}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)\Bigg)\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_1(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\\
&+\ \frac{1}{2}\Bigg(1-\chi^{'}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)\Bigg)\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_2(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\\
&+\ \frac{1}{4}\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i,k=1}^{n}\overline{\frac{\partial}{\partial z_k}\Big(\rho_1(z)-\rho_2(z)\Big)}\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(\rho_1(z)-\rho_2(z)\Big)\\
&\times\ \chi^{"}_{\beta}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)u_{iK}\overline{u}_{kK}\\
&=\ \frac{1}{2}\Bigg(1+\chi^{'}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)\Bigg)\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_1(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\\
&+\ \frac{1}{2}\Bigg(1-\chi^{'}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)\Bigg)\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_2(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\\
&+\ \frac{1}{4}X^{"}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)\\
&\times\ \Bigg|\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho_1(z)}{\partial z_i}u_{iK}-\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\rho_2(z)}{\partial z_k}u_{kK}\Bigg|^2\\
&\geq\ \frac{1}{2}\Bigg(1+\chi^{'}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)\Bigg)\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_1(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\\
&+\ \frac{1}{2}\Bigg(1-\chi^{'}_{\beta_j}\Big(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\Big)\Bigg)\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_2(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

On note par $\{\alpha_k^{\theta_j}\}_{k=1}^n$, $\{\alpha_k^{\rho_1}\}_{k=1}^n$ et $\{\alpha_k^{\rho_2}\}_{k=1}^n$, les valeurs propres ordonnées de la forme de Lévi de θ_j, ρ_1 et ρ_2 respectivement. Puisque chaque ρ_i est uniformément strictement q-convexe sur $\overline{D}_i$, $i=1,2$; alors ils existent deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour tout multi-indices $1\leq j_1<...<j_q\leq n$,

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{k=1}^{q}\alpha_{jk}^{\rho_1}(z)>C_1>0, \quad \text{si} \quad z\in\overline{D}_1,\\[2ex]
\displaystyle\sum_{k=1}^{q}\alpha_{jk}^{\rho_2}(z)>C_2>0, \quad \text{si} \quad z\in\overline{D}_2.
\end{cases}
\qquad (21)
$$

Partant de (21) et de l'équivalence de (a) et (b) dans le Lemme (3.2), on a donc :

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_1(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\geq C_1|u|^2\\[2ex]
\displaystyle\sum_{|K|=q-1}^{'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho_2(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK}\geq C_2|u|^2.
\end{cases}
\qquad (22)
$$

Soit $z\in\overline{D}\cap\{z;\ |\rho_1(z)-\rho_2(z)|<\beta\}$. On a $|\chi^{'}_{\beta_j}(\dfrac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2})|<1$. L'insertion de cette dernière estimation avec (22) dans (20) donne

$$\begin{aligned}\sum_{|K|=q-1}^{\prime}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\theta_j(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}u_{jK}\overline{u}_{kK} &\geq \frac{1}{2}\left(1+\chi_{\beta_j}^{\prime}\left(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\right)\right)C_1|u|^2\\ &+ \frac{1}{2}\left(1-\chi_{\beta_j}^{\prime}\left(\frac{\rho_1(z)-\rho_2(z)}{2}\right)\right)C_2|u|^2\\ &\geq \min(C_1,C_2)|u|^2\geq C_0|u|^2,\end{aligned}$$

où $0<C_0<\min(C_1,C_2)$.
D'après le lemme (3.2) et pour tout multi-indices $1\leq j_1<...<j_q\leq n$, on a :

$$\sum_{k=1}^{q}\alpha_{jk}^{\theta_j}(z)>C_0>0,\ \ z\in\overline{D}\cap\{z;\ |\rho_1(z)-\rho_2(z)|<\beta\}.$$

Ainsi, puisque N est fini, on peut étendre ce calcul à N fonctions $(\rho_1(z),\cdots,\rho_N(z))$, car pour tout $z\in\overline{D}\cap\{z;\ |\rho_1(z)-\rho_2(z)|\geq\beta\}$, on a $\theta_j=\rho_i+t_j$, $i=1,2$. $\square$

Le résultat suivant est tiré de [28].

Proposition 3.1 Soit $G=\{z\in W;\ |\rho(z)<0\}\subset\subset\mathbb{C}^n$ un domaine borné avec ρ une fonction définissante à valeurs réelles de classe C^2 sur un voisinage W de $\overline{G}$ telle que $d\rho=1$ sur bG et ρ est uniformément strictement q-convexe dans un voisinage V de bG contenu dans W. Alors pour tout $f\in D(\bar\partial)\cap D(\bar\partial^*)\cap L^2_{o,q}(G)$, on a

$$\int_G|f|^2dV\leq 12e^{(\frac{e}{6})}\delta^2\left(\|\bar\partial f\|^2_{L^2_{o,q+1}(G)}+\|\bar\partial^* f\|^2_{L^2_{o,q-1}(G)}\right),$$

$$\int_{\partial G}c|f|^2dS\leq 2e^{(\frac{e}{6})}\left(\|\bar\partial f\|^2_{L^2_{0,q+1}(G)}+\|\bar\partial^* f\|^2_{L^2_{0,q-1}(G)}\right),$$

où dV est l'élément de volume dans $\mathbb{C}^n$, dS est l'élément de surface de bG, δ est le diamètre de G, e est une constante positive déterminée par $\min\sum_{k=1}^{q}\alpha_{jk}^{\rho}(z)$, et le minimum est pris sur tout $z\in bG$ et tout $1\leq j_1<...<j_q\leq n$.

Preuve
Pour tout domaine G borné de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ et ρ une fonction définissante de classe C^2 telle que $d\rho=1$ sur bG, d'après la Proposition (2.1.2) de [13] et pour toutes fonctions réelles $\phi\in C^2(\overline{G})$, $f\in C^2_{(0,q)}(G)\cap D(\bar\partial^*_\phi)\cap D(\bar\partial)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{bG}\sum_{K}^{\prime}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}f_{jK}\overline{f_{kK}}e^{-\phi}dS &+ \int_G\sum_{K}^{\prime}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}f_{jK}\overline{f_{kK}}e^{-\phi}dV\\ &+ \int_G\sum_{J}^{\prime}\sum_{j=1}^{n}|\frac{\partial f_J}{\partial\overline{z}_j}|^2e^{-\phi}dV=\|\bar\partial f\|^2_{L^2_{0,q+1}(G,\phi)}+\|\bar\partial^*_\phi f\|^2_{L^2_{0,q-1}(G,\phi)},\end{aligned}$$

où $\|\|^2_{L^2_{o,q}(G,\phi)}$ est la norme L^2 à poids ϕ sur G.
Si on choisit $(w_j)_{j=1}^n$; une base orthonormée de $(1,0)$-formes différentielles qui diagonalise point par point la matrice $(\dfrac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\overline{z}_k})$, on a :

$$\sum_{K}^{\prime}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(z)}{\partial z_\mu\partial\overline{z}_\nu}f_{\mu K}\overline{f_{\nu K}}=\sum_{J}^{\prime}\left(\sum_{j\in J}\lambda_j^{\rho}(z)\right)|g_J|^2 \tag{23}$$

où

$$f = \sum_{|J|=q}^{'} f_J d\overline{z}_J = \sum_{J}^{'} g_J \overline{w}_J \ , \ \sum_{J}^{'} |f_J|^2 = |f|^2 = \sum_{J}^{'} |g_J|^2$$

Puisque ρ est uniformément strictement q-convexe dans V, il existe une constante positive C telle que pour tout $z \in V^{'}$, avec $V^{'} \subset\subset V$ et pour tout multi-indices J, tel que $|J| = q$ et $J \subset \{1, ..., n\}$, on a

$$\sum_{j \in J} \lambda_j^{\rho}(z) > C$$

pour tout $z \in bD$, la relation (23) devient

$$\sum_{K}^{'} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} f_{\mu K} \overline{f_{\nu K}} \geq \sum_{J}^{'} \left(\sum_{j \in J} \lambda_j^{\rho}(z) \right) |g_J|^2 \geq C|f(z)|^2.$$

Alors, la première égalité de cette preuve peut être réécrite de la manière suivante :

$$\int_{\partial G} c|f|^2 e^{-\phi} dV + \int_G \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} f_{\mu K} \bar{f_{\nu K}} e^{-\phi} dV \leq \left(\|\bar{\partial} f\|^2_{L^2_{o,q+1}(G,\phi)} + \|\bar{\partial_\phi}^* f\|^2_{L^2_{o,q-1}(G,\phi)} \right). \tag{24}$$

On sait que $\bar{\partial_\phi}^* f = \sum_{K}^{'} \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_j^{\phi} f_{jK} \right) d\overline{z_k}$,

où K est un multi-indice d'ordre $q-1$, $\delta_j^{\phi} w = \dfrac{\partial w}{\partial z_j} - w \dfrac{\partial \phi}{\partial z_j}$ pour tout $j = 1, ..., n$. Donc on a

$$\|\bar{\partial}_\phi^* f\|_\phi^2 = \sum_{K}^{'} \int_G |\sum_{j=1}^{n} \delta_j^{\phi} f_{jK}|^2 e^{-\phi} dV.$$

L'expression ci-dessus peut être estimée par :

$$\|\bar{\partial_\phi}^* f\|_\phi^2 \leq (1 + \frac{1}{\varepsilon}) \sum_{K}^{'} \int_G \sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial f_{jK}}{\partial z_j}|^2 e^{-\phi} dV + (1+\varepsilon) \sum_{K}^{'} \int_G |\sum_{j=1}^{n} f_{jK} \frac{\partial \phi}{\partial z_j}|^2 e^{-\phi} dV$$

où ε est un nombre strictement positif quelconque.

On supposera dans la suite que $0 \in D$ et on choisira $\phi = \dfrac{1}{6}(e^{\frac{|z|^2}{\delta^2}}) = \chi(\lambda)$ où $\chi(t) = (\dfrac{1}{6}) e^t$, $\lambda(z) = |\dfrac{z}{\delta}|^2$. Ainsi, on a χ est une fonction convexe, croissante et vérifie pour tout $0 \leq t \leq 1$, $\chi^{"}(t) \geq 2(\chi^{'}(t))^2$. L'inégalité de Hörmander peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned}
\chi^{'}(\lambda) \int_G \sum_{K}^{'} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_{jK} \bar{f_{kK}} e^{-\phi} dV \quad &+ \quad \int_G \chi^{"}(\lambda) \sum_{K}^{'} |\sum_{j=1}^{n} f_{jK} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j}|^2 e^{-\phi} dV \\
&+ \quad \int_{\partial G} \sum_{K}^{'} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f_{jK} \bar{f_{kK}} e^{-\phi} dS \\
&\leq \quad (\|\overline{\partial_\phi} f\|_\phi^2 + (1 + \frac{1}{\varepsilon}) \|\bar{\partial}_\phi^* f\|_\phi^2 + \\
&+ \quad (1+\varepsilon) \sum_{K}^{'} \int_G \left(\chi^{'}(\lambda) \right)^2 |\sum_{j=1}^{n} f_{jK} \frac{\partial \phi}{\partial z_j}|^2 e^{-\phi} dV).
\end{aligned}$$

En prenant en compte que $e^{-\phi} < 1$, $e^{\lambda - \phi} \geq e^{-e/6}$, $\chi^{"}(t) \geq 2(\chi^{'}(t))^2$ et en choisissant $\varepsilon = 1$, nous pouvons réécrire l'inégalité de Hörmander telle que pour tout $f \in C^2_{(0,q)}(G) \cap D(\bar{\partial}^*)$, nous avons :

$$\frac{q}{6\delta^2} \|f\|_0^2 + \int_{\partial G} c|f|^2 dS \leq 2e^{e/6} (\|\bar{\partial} f\|_0^2 + \|\bar{\partial}^* f\|_0^2). \tag{25}$$

De l'inégalité (25) on conclut

$$\|f\|_G^2 \leq 12e^{e/6}\delta^2\Bigg(\|\bar{\partial}f\|_G^2 + \|\bar{\partial}^* f\|_G^2\Bigg)$$

$$\int_{\partial G} c|f|^2 dS \leq 2e^{e/6}\Bigg(\|\bar{\partial}f\|_G^2 + \|\bar{\partial}^* f\|_G^2\Bigg).$$

□

Comme conséquence de ce résultat on a :

Corollaire 3.1 Soient G un domaine défini comme dans la Proposition (3.1) et f une $(0,s)$-forme différentielle $\bar{\partial}$-fermée à coefficient dans $L^2(G)$, avec $s \geq q$. Alors il existe une forme différentielle $u \in L^2_{o,s-1}(G)$ telle que $\bar{\partial}u = f$ et

$$\|u\|^2_{L^2_{0,s-1}(G)} \leq C\|f\|^2_{L^2_{0,s}(G)},$$

où $C = 12\delta^2 e^{\frac{e}{6}}$.

Preuve
Soient $g \in L^2_{0,s}(G)$ tel que $\bar{\partial}g = 0$ et

$$E := \{\bar{\partial}^* g |\ g \in L^2_{0,s}(G)\} \subset L^2_{0,s-1}(G).$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} L_f : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \bar{\partial}^* g &\longmapsto L_f(\bar{\partial}^* g) =< f, g > . \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$| < f, g > |^2 \leq \|f\|^2\ \|g\|^2. \tag{26}$$

D'après la Proposition (3.1) on a :

$$\begin{aligned} \|g\|^2_{L^2_{0,s}(G)} &\leq 12e^{e/6}\delta^2\Bigg(\|\bar{\partial}g\|^2_{L^2_{0,s+1}(G)} + \|\bar{\partial}^* g\|^2_{L^2_{0,s-1}(G)}\Bigg) \\ &\leq 12e^{e/6}\delta^2\|\bar{\partial}^* g\|^2_{L^2_{0,s-1}(G)}\ \textit{car g est } \bar{\partial}\text{-fermée} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'inégalité (26), on obtient

$$| < f, g > |^2 \leq 12e^{e/6}\delta^2\|f\|^2\ \|\bar{\partial}^* g\|^2_{L^2_{0,s-1}(G)}.$$

Par conséquent L_f est bornée dans E.
Ainsi, d'après le théorème Hahn-Banach, L_f est prolongeable en une application $\tilde{L_f}$ qui est bornée et définie dans $L^2_{0,s-1}(G)$.
De plus, d'après le Théorème de représentation de Riesz, il existe $u \in L^2_{0,s-1}(G)$ tel que

$$< f, g >=< u, \bar{\partial}^* g > \quad \text{donc}\ \ \bar{\partial}u = f.$$

Par suite on a :

$$\tilde{L_f}(\bar{\partial}^* g) =< f, g >=< \bar{\partial}u, g >=< u, \bar{\partial}^* g > .$$

$$|\tilde{L_f}(\bar{\partial}^* g)|^2 = |<u, \bar{\partial}^* g>|^2 = |<f,g>|^2 \leq 12 e^{e/6}\delta^2 \|f\|^2_{L^2_{0,s}(G)} \ \|\bar{\partial}^* g\|^2_{L^2_{0,s-1}(G)}. \tag{27}$$

En remplaçant $\bar{\partial}^* g$ par u dans (27), on obtient

$$|\tilde{L_f}(u)|^2 = |<u,u>|^2 = |<f,g>|^2 \leq 12 e^{e/6}\delta^2 \|f\|^2_{L^2_{0,s}(G)} \ \|u\|^2_{L^2_{0,s-1}(G)}.$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\|u\|^2_{L^2_{0,s-1}(G)} \leq C\|f\|^2_{L^2_{0,s}(G)} \text{ avec } C = 12\delta^2 e^{e/6}.$$

□

Passons maintenant à la résolution du problème du $\overline{\partial}$-Neumann sur les sous-domaines D_j. On normalise d'abord les fonctions définissantes θ_j de D_j en posant $\eta_j = \dfrac{\theta_j}{|\nabla \theta_j|}$ qui est définie près de bD_j et on choisit une extension η_j qui est négatif et de classe C^2 à l'intérieur de D_j. Cela signifie que chaque η_j est encore une fonction définissante de D_j et on a $|\nabla \eta_j| = 1$ sur bD_j. D'après [28], pour tout $z \in bD_j$ et $t \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial z_i \partial \overline{z}_i} t_i \bar{t}_k = \frac{1}{|\nabla \theta_j|} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial z_i \partial \overline{z}_k} t_i \bar{t}_k + 2Re\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta_j}{\partial z_i} t_i \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial |\nabla \theta_j|}{\partial \overline{z}_i} \bar{t}_k \right) \right).$$

Si on se restreint à $z \in bD_j$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta_j}{\partial z_i} t_i = 0$ et on a

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial z_i \partial \overline{z}_i} t_i \bar{t}_k = \frac{1}{|\nabla \theta_j|} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial z_i \partial \overline{z}_k} t_i \bar{t}_k.$$

Donc la forme de Levi de η_j sur D_j est supérieure ou égale aux $n-q$ valeurs propres positives. Ainsi les valeurs propres correspondantes $\{\mu_k^{n_j}\}_{k=1}^{n-1}$ satisfont $\mu_q^{n_j} \geq \dfrac{C_o}{C_2}$, où C_o et C_2 sont les mêmes constantes du Lemme (3.3). En appliquant l'inégalité de base de Hörmander sur chaque (D_j, η_j), on a le lemme suivant :

Lemme 3.4 Sur D_j, pour tout $f \in D(\bar{\partial}^*) \cap D(\bar{\partial}) \cap L^2_{0,s}(\overline{D}_j)$, $s \geq q$, on a :

$$\int_{D_j} |f|^2 dV_j \leq 12 e^{(e/6)} \delta_j^2 \left(\|\bar{\partial} f\|^2_{L^2_{o,s+1}(G)} + \|\bar{\partial}^* f\|^2_{L^2_{o,s-1}(D_j)} \right), \tag{28}$$

et

$$\int_{\partial D_j} |f|^2 dS_j \leq C \left(\|\bar{\partial} f\|^2_{L^2_{o,s+1}(D_j)} + \|\bar{\partial}^* f\|^2_{L^2_{o,s-1}(D_j)} \right), \tag{29}$$

où δ_j est le diamètre de D_j et C une constante positive indépendante de (f, D_j).

Preuve
La preuve est identique à celle de la Proposition (3.1) où on remplace le domaine G par D_j. □

Notons qu'on peut pas obtenir immédiatement ces estimations sur tout le domaine D. Car lorsque $f \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*)$, est restreint à D_j, cette restriction n'a pas besoin d'être dans le domaine de $\bar{\partial}^*$ sur D_j (le composant normal n'a pas besoin d'être nul sur le bord de

D_j). Pour contourner cette difficulté, nous allons exploité l'opérateur $\overline{\partial}$-Neumann sur des sous-domaines. En effet, à partir de (28) on obtient

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2_{o,s}(D_j)} &= \int_{D_j} |f|^2 dV_j \\
&\leq 12e^{(e/6)}\delta_j^2\Big(\|\bar\partial f\|^2_{L^2_{o,s+1}(D_j)} + \|\bar\partial^* f\|^2_{L^2_{o,s-1}(D_j)}\Big) \\
&\leq 12e^{(e/6)}\delta_j^2\Big(< \bar\partial f, \bar\partial f > + < \bar\partial^* f, \bar\partial^* f > \Big) \\
&\leq 12e^{(e/6)}\delta_j^2\Big(< \bar\partial^*\bar\partial f, f > + < \bar\partial\bar\partial^* f, f > \Big) \\
&\leq 12e^{(e/6)}\delta_j^2\Big(< \bar\partial^*\bar\partial f + \bar\partial\bar\partial^* f, f > \Big) \\
&\leq 12e^{(e/6)}\delta_j^2\Big(< \Box_s^{D_j} f, f > \Big) \\
&\leq 12e^{(e/6)}\delta_j^2\|\Box_s^{D_j} f\|_{L^2_{o,s+1}(D_j)}\|f\|_{L^2_{o,s+1}(D_j)}.
\end{aligned}$$

Donc on vient d'établir

$$\|f\|^2_{L^2_{o,s}(D_j)} \leq 12e^{(e/6)}\delta_j^2\|\Box_s^{D_j} f\|_{L^2_{o,s}(G)}\|f\|_{L^2_{o,s+1}(D_j)}.$$

Ainsi on a :

$$\|f\|_{L^2_{o,s}(D_j)} \leq C\|\Box^s_{D_j} f\|_{L^2_{o,s}(D_j)}, \quad f \in D(\Box_s^{D_j}), \tag{30}$$

avec $C = 12e^{(e/6)}\delta_j^2$.

Remarque 3.1 Cette estimation et le Théorème du graphe fermé (voir [2] Théorème 1.1.1) impliquent que $\Box_s^{D_j}$ est d'image fermé. Puisque $\Box_s^{D_j}$ est auto-adjoint, la décomposition de Hodge nous permet d'écrire :

$$L^2_{0,s}(D_j) = R(\Box_s^{D_j}) \oplus \ker(\Box_s^{D_j}) = \bar\partial\bar\partial^* D(\Box_s^{D_j}) \oplus \bar\partial^*\bar\partial D(\Box_s^{D_j}) \oplus \ker(\Box_s^{D_j}).$$

En appliquant le Corollaire (3.1) sur chaque (D_j, f), on a :

$$\ker(\Box_s^{D_j}) = \{0\},$$

pour tout $s \geq q$; la décomposition de Hodge devient :

$$L^2_{0,s}(D_j) = \bar\partial\bar\partial^* D(\Box_s^{D_j}) \oplus \bar\partial^*\bar\partial D(\Box_s^{D_j}).$$

L'estimation (30) implique aussi que le $\Box_s^{D_j}$ est bijective. Et par le Théorème de l'application inverse, il existe un unique inverse borné et noté $N_s^{D_j} : D(\Box_s^{D_j}) \to (\Box_s^{D_j})$ avec les propriétés du Théorème (0.4).

Th$\acute{e}$orème 3.1 Soit D_1 un domaine uniformément strictement q-convexe borné de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$, défini par $D_1 = \Big\{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \rho_1(z) < 0\Big\}$, $d\rho_1 \neq 0$ sur bD_1, où $\rho_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément strictement q-convexe dans un voisinage U_1 de $\overline{D_1}$. Soit D_2 un domaine uniformément strictement q-convexe borné de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$, défini par
$D_2 = \Big\{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \rho_2(z) < 0\Big\}$, $d\rho_2 \neq 0$ sur bD_2, où $\rho_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément strictement q-convexe dans un voisinage U_2 de $\overline{D_2}$. On suppose bD_1 et bD_2 s'intersectent transversalement. Soit $D = D_1 \cap D_2$, $q \in \mathbb{N}$ et $1 \leq q \leq n$. Alors pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel que $q \leq s \leq n$, l'opérateur $\bar\partial$-Neumann $N_s : L^2_{0,s}(D) \to L^2_{0,s}(D)$ existe et satisfait l'estimation suivante

$$\|N_s f\|_{W^{1/2}_{0,s}(D)} \leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D)},$$

pour tout $f \in L^2_{0,s}(\Omega)$, où C est une constante positive qui dépend seulement de n, s, D_1 et D_2.

Preuve
Rappelons que $(D_j)_{j\geq 1}$ est une suite de sous-domaines lisses, uniformément Lipschitziens et uniformément strictement q-convexe de D. L'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann N_s existe dans $L^2_{0,s}(D_j)$, avec $s \geq q$ et $N_s\Big(\mathcal{E}^{0,s}(D_j)\Big) \subset \mathcal{E}^{0,s}(D_j)$. Puisque $\Box_s^{D_j}$ agit sur les formes différentielles lisses comme un multiple du Laplacien réel, on peut approximer les coefficients de $N_s f$ par les fonctions harmoniques. Donc on peut résoudre le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \Delta w_j = 0 & \text{sur } D_j \\ w_j = u_j & \text{sur } bD_j \end{cases}$$

où $u_j =: N_s f$. D'après le Lemme 4.1 de [28], on a

$$\|w_j\|^2_{W^{1/2}_{0,s}} \leq C\bigg(\int_{D_i} \Big|\eta_j \,\Big\| \nabla w_j|^2 \,dV_j + \Big\| \, w_j\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} \bigg) \tag{31}$$

où C est une constante indépendante de j.
Soit $P_0 \in D_0 \subset D_1$. Soit $v_j(P) = w_j(P) - w_j(P_0)$. Alors $v_j(P_0) = 0$, donc v_j est harmonique dans D_j et $\nabla v_j = \nabla w_j$. Donc d'après le Lemme 4.2 de [28], on a

$$\begin{aligned} \int_{D_j} |\eta_j\|\nabla w_j|^2 \,dV_j = \int_{D_j} |\eta_j|\,|\nabla v_j|^2 \,dV_j \leq C \int_{bD_j} |v_j|^2 \,dS_j \leq \\ \leq C \left(\int_{bD_j} |w_j|^2 \,dS_j + \left| w_j^2(P_0) \right| \int_{bD_j} dS_j \right). \end{aligned} \tag{32}$$

On sait que la valeur d'une fonction harmonique u en un seul point intérieur de son domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est dominée par un multiple de la norme $L^2(D)$ de u. Plus précisément on a

$$|u(x)|^2 \leq \frac{c(n)}{R^n} \int_{B_R(x)} |u(y)|^2 dV_y$$

où $B_R(x)$ est la boule centrée en x de rayon R contenue dans D.
On choisit $R_0 > 0$ tel que $B_{R_0}(P_0) \subset\subset D_0 \subset\subset D_j$. Alors

$$|w_j\,(P_0)|^2 \leq \frac{c(n)}{R_0^{2n}} \int_{D_j} |w_j|^2 \,dV_j \leq C \int_{D_j} |w_j|^2 \,dV_j. \tag{33}$$

Maintenant en combinant (31), (32) et (33) ; on a

$$\int_{D_j} |\eta_j\|\nabla w_j|^2 \,dV_j \leq C \left(\int_{bD_j} |u_j|^2 \,dS_j + \|u_j\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} + \|u_j - w_j\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} \right). \tag{34}$$

Puisque $f \in \mathcal{E}^{0,s}(\overline{D_j})$, $s \geq q$, $N_s f \in \mathcal{E}^{0,s}(\overline{D_j}) \cap D(\Box_s^{D_j})$. Ainsi en appliquant le Lemme (3.4) sur $(D_j,\ \eta_j,\ N_s f)$, on obtient

$$\int_{bD_j} |u_j|^2 \,dS_j + \int_{D_j} |u_j|^2 \,dV_j \leq C < \Box_s N_s f,\ N_s f > \leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}. \tag{35}$$

Notre objectif maintenant est d'obtenir la demi-estimation pour $N_s f - w_j$. Puisque

$$\|N_s f\|_{W^{1/2}_{0,s}(D_j)} \leq \|N_s f - w_j\|_{W^{1/2}_{0,s}(D_j)} + \|w_j\|_{W^{1/2}_{0,s}(D_j)}.$$

Or

$$\begin{cases} \Delta(u_j - w_j) = 4\Box_s N_s f & \text{sur } D_j \\ u_j - w_j = 0 & \text{sur } bD_j. \end{cases}$$

D'après le Lemme 4.3 de [28], on a

$$\|N_s f - w_j\|_{W^{1/2}_{0,s}(D_j)} \leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}. \tag{36}$$

Donc en combinant (35) et (36), on obtient finalement pour tout $f \in \mathcal{E}^{0,s}(\overline{D_j})$,

$$\|N_s f\|_{W^{1/2}_{0,s}(D_j)} \leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}.$$

$\square$ Tous les résultats obtenus dans cette partie vont nous permettre de prouver le Théorème (0.4).

Preuve (Théorème (0.4))

1. D'après le Théorème (1.3) on a : $R(N_s^{D_j}) \subset D(\square_s^{D_j})$, et $N_s^{D_j}\square_s^{D_j} = \square_s^{D_j}N_s^{D_j} = Id$ sur $D(\square_s^{D_j})$.
   De l'estimation (30) on a :
   $$\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \leq C\|\square_s^{D_j} f\|_{L^2_{0,s}(D_j)},\ f \in D(\square_s^{D_j}).$$
   Soit $g \in D(N_s^{D_j})$. Alors $N_s^{D_j} g \in D(\square_s^{D_j})$. On a
   $$\|N_s^{D_j} g\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \leq C\|\square_s^{D_j} N_s^{D_j} g\|_{L^2_{0,s}(D_j)}. \tag{37}$$
   L'inégalité (37) devient
   $$\|N_s^{D_j} g\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \leq C\|g\|_{L^2_{0,s}(D_j)},\ \forall g \in D(N_s^{D_j}).$$
   Puisque g est quelconque dans $D(N_s^{D_j})$, donc $N_s^{D_j}$ est borné dans $L^2_{0,s}(D_j)$.
2. D'après la propriété (3) du Théorème (1.3) et pour tout $f \in L^2_{0,s}(D_j)$, on a :
   $$f = \bar\partial\bar\partial^* N_s^{D_j} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_s^{D_j} f.$$
3. Les propriétés (4) et (5) du Théorème (1.3) impliquent
   $\bar\partial N_{s-1}^{D_j} = N_s^{D_j}\bar\partial$ sur $D(\bar\partial)$ et $\bar\partial^* N_{s+1}^{D_j} = N_s^{D_j}\bar\partial^*$ sur $D(\bar\partial^*)$.
4. Soit $f \in L^2_{0,s}(D_j) \cap \ker(\bar\partial)$, existe t-il une solution u telle que $\bar\partial u = f$,
   $$\begin{array}{rcl} f &=& \bar\partial\bar\partial^* N_s^{D_j} f \oplus \bar\partial^*\bar\partial N_s^{D_j} f \\ &=& \bar\partial\bar\partial^* N_s^{D_j} f \oplus \bar\partial^* N_{s+1}^{D_j}\bar\partial f \\ &=& \bar\partial\bar\partial^* N_s^{D_j} f \ \text{ car } \ \bar\partial f = 0. \end{array}$$
   Posons
   $$u = \bar\partial^* N_s^{D_j} f.$$
   Donc
   $$\bar\partial u = f.$$
   Soit $v \in \ker(\bar\partial)$ avec $v \neq 0$, on a :
   $$\begin{array}{rcl} < u, v > &=& < \bar\partial^* N_s^{D_j} f, v > \\ &=& < N_s^{D_j} f, \bar\partial v >= 0 \ \text{ car } \ v \in \ker(\bar\partial). \end{array}$$
   Ainsi $u \in (\ker(\bar\partial))^\perp$.
   De plus comme $L^2_{0,s}(D_j) \cap \ker(\bar\partial) \subset L^2_{0,s}(D_j)$ et $\bar\partial u = f$, d'après le Corollaire (3.1), il existe $C_s > 0$ telle que
   $$\|u\|_{L^2_{0,s-1}(D_j)} \leq C_s\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}.$$

5. Soit $f \in L^2_{0,s}(D_j)$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s+1}(D_j)} + \|\bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s-1}(D_j)} &= < \bar\partial N_s^{D_j} f, \bar\partial N_s^{D_j} f > + < \bar\partial^* N_s^{D_j} f, \bar\partial^* N_s^{D_j} f > \\
&= < \bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f, N_s^{D_j} f > + < \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, N_s^{D_j} f > \\
&= < (\bar\partial \bar\partial^* + \bar\partial^* \bar\partial) N_s^{D_j} f, N_s^{D_j} f > \\
&= < \Box_s^{D_j} N_s^{D_j} f, N_s^{D_j} f > \\
&= < f, N_s^{D_j} f > \\
&\leq \|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \, \|N_s^{D_j} f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}.
\end{aligned}$$

Comme $N_s^{D_j}$ est borné, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|\bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s+1}(D_j)} + \|\bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s-1}(D_j)} &\leq \|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \, (C\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}) \\
&\leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \, \|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s+1}(D_j)} + \|\bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s-1}(D_j)} \leq C\|f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)}.$$

On sait que $f = \bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f + \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f$. Donc on a :

$$\begin{aligned}
\|\bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} &= \|f - \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} \\
&= < f - \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, f - \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f > \\
&= < f, f > - < f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f > - < \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, f > \\
&+ < \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f > \\
&= \|f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} - 2Re(< f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f >) + \|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} \\
&= \|f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} - 2Re(< \bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f + \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f >) \\
&+ \|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} \\
&= \|f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} - 2Re(< \bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f > + < \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f \\
&+ \|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} \\
&= \|f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} - 2Re(< \bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f >) \\
&- 2Re(< \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f >) + \|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)}.
\end{aligned}$$

De plus on a :

$$< \bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f > = < \bar\partial N_s^{D_j} f, \bar\partial^2 \bar\partial^* N_s^{D_j} f > = 0$$

et

$$2Re(< \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f, \bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f >) = 2\|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)}.$$

Par conséquent

$$\|\bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} = \|f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} - 2\|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} + \|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)}.$$

Ce qui nous permet d'affirmer que

$$\|f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} = \|\bar\partial^* \bar\partial N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)} + \|\bar\partial \bar\partial^* N_s^{D_j} f\|^2_{L^2_{0,s}(D_j)}.$$

6. D'après le Théorème (3.1.14) de [6], on a $N_s^{D_j}(\mathcal{E}^{0,s}(\overline{D}_j)) \subseteq \mathcal{E}^{0,s}(\overline{D}_j)$.
7. D'après la propriété (1), on a $N_s^{D_j}$ est borné. Par suite, d'après le lemme Rellich $N_s^{D_j}$ est compact sur $L^2_{0,s}(D_j)$.

$\square$

Comme conséquence de ce théorème on a le résultat suivant.

Corollaire 3.2 Sur D_j, pour tout $k \geq 0$, $s \geq q$, l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann $N_s^{D_j} : W^k_{0,s}(D_j) \to W^k_{0,s}(D_j)$ et la projection de Bergman $P^{D_j}_{0,s-1} : W^k_{0,s-1}(D_j) \to W^k_{0,s-1}(D_j)$ sont tous les deux continus et satisfont aux estimations suivantes :

$$\begin{cases} \|N_s^{D_j} f\|_{W^k_{0,s}(D_j)} \leq C_k \|f\|_{W^k_{0,s}(D_j)}; \\ \\ \|P^{D_j}_{0,s-1} f\|_{W^k_{0,s-1}(D_j)} \leq C_k \|f\|_{W^k_{0,s-1}(D_j)} \end{cases} \tag{38}$$

où la constante $C_k > 0$ ne dépend que de k. De plus les opérateurs de solution canonique $\bar{\partial}^* N_s^{D_j}$, $N_s^{D_j}\bar{\partial}^*$, $\bar{\partial} N_s^{D_j}$, $N_s^{D_j}\bar{\partial}$, $\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s^{D_j}$, et $\bar{\partial}\bar{\partial}^* N_s^{D_j}$ sont réguliers sur les espaces de Sobolev correspondants $W^k_*(D_j)$.

3.2 L'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur D

Soit D une intersection de domaines uniformément strictement q-convexes. L'objectif de cette partie est de montrer que le $\bar{\partial}$-Neumann est compact sur D. Pour cela nous commençons par le théorème suivant tiré de [5].

Théorème 3.2 Soit D un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $f \in L^2_{p,q}(D)$, avec $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$ et $\bar{\partial} f = 0$. Alors il existe $u \in L^2_{p,q-1}(D)$ telle que $\bar{\partial} u = f$ et

$$q \int_D |u|^2 dV \leq e\delta^2 \int_D |f|^2 dV, \tag{39}$$

où $\delta = \sup\limits_{z,z' \in D} |z - z'|$ est le diamètre de D.

Preuve
Nous démontrons d'abord le théorème pour D à bord de classe C^2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $0 \in D$. Nous choisirons $\phi = t|z|^2$ avec $t > 0$. D'après la Proposition (4.3.3) de [5], on a pour tout $g \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*_\phi)$,

$$tq \int_D |g|^2 e^{-t|z|^2} dV \leq \|\bar{\partial} g\|^2_\phi + \|\bar{\partial}^*_\phi g\|^2_\phi. \tag{40}$$

Puisque $\bar{\partial}^2 = 0$, on a

$$\overline{R(\bar{\partial})} \subset \ker(\bar{\partial}) \quad et \quad \overline{R(\bar{\partial}^*_\phi)} \subset \ker(\bar{\partial}^*_\phi). \tag{41}$$

Il s'ensuit de (40) que pour tout $g \in D(\bar{\partial}^*_\phi) \cap \ker(\bar{\partial})$,

$$tq \int_D |g|^2 e^{-t|z|^2} dV \leq \|\bar{\partial}^*_\phi g\|^2_\phi. \tag{42}$$

car $\bar{\partial} g = 0$.
D'après le Lemme (4.1.1) de [5], $R(\bar{\partial})$ est fermé dans $L^2_{p,q}(D,\phi)$. Pour montrer que

$$R(\bar{\partial}) = \ker(\bar{\partial}), \tag{43}$$

Il suffit de montrer que pour tout $f \in L^2_{p,q}(D)$ avec $\bar{\partial} f = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$| < f, g >_\phi | \leq C \|\bar{\partial}^*_\phi g\|_\phi, \quad pour\ tout\ g \in D(\bar{\partial}^*_\phi). \tag{44}$$

En effet, d'après le Lemme (4.1.1) de [5], $R(\bar{\partial}^*_\phi)$ est fermée. De la relation (4.1.1) de [5], on a

$$L^2_{p,q}(D,\phi) = \ker(\bar{\partial}) \oplus \ker(\bar{\partial})^\perp = \ker(\bar{\partial}) \oplus R(\bar{\partial}^*_\phi).$$

Pour tout $g_1 \in D(\bar{\partial}_\phi^*) \cap \ker(\bar{\partial})$, la relation (42) nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} | < f, g_1 >_\phi | &\leq \|f\|_\phi \, \|g_1\|_\phi \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{tq}} \|f\|_\phi \, \|\bar{\partial}_\phi^* g_1\|_\phi . \end{aligned}$$

Si $g_2 \in D(\bar{\partial}_\phi^*) \cap \ker(\bar{\partial})^\perp$, on a

$$< f, g_2 >_\phi = 0, \; car \bar{\partial} f = 0.$$

Pour tout $g \in D(\bar{\partial}_\phi^*)$, on écrit $g = g_1 + g_2$ où $g_1 \in \ker(\bar{\partial})$ et $g_2 \in \ker(\bar{\partial})^\perp = R(\bar{\partial}_\phi^*) \subset \ker(\bar{\partial}_\phi^*)$. Donc $g_2 \in D(\bar{\partial}_\phi^*)$ et $\bar{\partial}_\phi^* g_2 = 0$. Donc $\bar{\partial}_\phi^* g = \bar{\partial}_\phi^* g_1$. Par conséquent, nous avons pour tout $f \in D(\bar{\partial}_\phi^*)$,

$$\begin{aligned} | < f, g >_\phi | &= | < f, g_1 >_\phi | \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{tq}} \|f\|_\phi \, \|\bar{\partial}_\phi^* g_1\|_\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{tq}} \|f\|_\phi \, \|\bar{\partial}_\phi^* g\|_\phi . \end{aligned}$$

Cela prouve la relation (44). Donc

$$R(\bar{\partial}) = \ker(\bar{\partial}).$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz appliqué à la fonctionnelle antilinéaire $\bar{\partial}_\phi^* g \to < f, g >_\phi$, il existe $u \in L^2_{p,q-1}(D, \phi)$ telle que pour tout $g \in D(\bar{\partial}_\phi^*)$,

$$< f, g >_\phi = < u, \bar{\partial}_\phi^* g >_\phi ,$$

et

$$\|u\|_\phi \leq \frac{1}{\sqrt{tq}} \|f\|_\phi .$$

Ceci implique $\bar{\partial} u = f$ au sens des distributions et u satisfait

$$\begin{aligned} q \int_D |u|^2 dV &\leq q e^{t\delta^2} \int_D |u|^2 e^{-t|z|} dV \\ &\leq \frac{1}{t} e^{t\delta^2} \int_D |f|^2 e^{-t|z|} dV \\ &\leq \frac{1}{t} e^{t\delta^2} \int_D |f|^2 dV . \end{aligned}$$

Puisque la fonction $\frac{1}{t} e^{t\delta^2}$ atteint son minimum lorsque $t = \delta^{-2}$, on a

$$q \int_D |u|^2 dV \leq e\delta^2 \int_D |f|^2 dV .$$

Ceci prouve le théorème lorsque le bord bD est de classe C^2. Pour un domaine pseudoconvexe en général, d'après la définition (3.4.9) de [5], on peut approcher D par une suite de domaines pseudoconvexes D_ν à bord de classe C^∞. On écrit

$$D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu ,$$

où chaque D_ν est un domaine pseudoconvexe borné à bord de classe C^∞ et $\forall \nu \geq 1$, on a $D_\nu \subset D_{\nu+1} \subset D$. Soit δ_ν le diamètre de D_ν.
Sur chaque D_ν , il existe $u_\nu \in L^2_{p,q-1}(D_\nu)$ telle que $\bar{\partial} u_\nu = f$ sur D_ν et

$$q \int_{D_\nu} |u_\nu|^2 dV \leq e\delta_\nu^2 \int_{D_\nu} |f|^2 dV \leq e\delta^2 \int_D |f|^2 dV .$$

Donc la suite u_ν est bornée. Alors il existe une sous-suite de u_ν, notée par v_ν telle que $v_\nu \to u$ faiblement dans $L^2_{p,q-1}(D)$. De plus u satisfait l'estimation

$$q \int_D |u|^2 dV \leq \liminf e\delta_\nu^2 \int_{D_\nu} |f|^2 \leq e\delta^2 \int_D |f|^2 dV,$$

et $\bar{\partial} u = f$ au sens des distributions. □

Soit D une intersection de domaines uniformément q-convexes dans $\mathbb{C}^n$. Soit $g \in L^2_{0,s}(D)$ avec $\bar{\partial} g = 0$. Rappelons que $D = \bigcup_j D_j$, où les $D_j \nearrow D$ sont les domaines construits dans la section précédente. D'après la relation (28) et la preuve du Théorème (3.2), on peut trouver $u_j \in L_{0,s-1}(D_j)$ telle que $\bar{\partial} u_j = g$ sur D_j et

$$\int_{D_j} |u_j|^2 dv \leq 12\delta_j^2 e^{e/6} \int_{D_j} |g|^2 dv \leq 12\delta^2 e^{e/6} \int_D |g|^2 dv < \infty.$$

Il existe $u \in L_{0,s-1}(D)$ telle que u_j converge faiblement vers u avec $\bar{\partial} u = g$ dans D et

$$\int_D |u|^2 dv \leq 12\delta^2 e^{e/6} \int_D |g|^2 dv < \infty.$$

On peut maintenant démontrer le Théorème (0.5).

Preuve (Théorème (0.5))

D'après le Théorème (1.1),

$$\bar{\partial} : L^2_{0.s-1}(D) \to L^2_{0.s}(D)$$

et

$$\bar{\partial}^* : L^2_{0.s}(D) \to L^2_{0.s-1}(D)$$

ont des images fermées pour tout $s \geq q$. D'après le Théorème (1.1.2) de [13] et du fait que $\ker(\bar{\partial}_s) \cap \ker(\bar{\partial}^*_{s-1}) = \{0\}$, on a

$$\|f\|^2_{L^2_{0.s}(D)} \leq C(\|\bar{\partial} f\|^2_{L^2_{0.s+1}(D)} + \|\bar{\partial}^* f\|^2_{L^2_{0.s-1}(D)}) \tag{45}$$

pour tout $f \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*) \cap L^2_{0.s}(D)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2_{0.s}(D)} &\leq C\Big(\|\bar{\partial} f\|^2_{L^2_{0.s+1}(D)} + \|\bar{\partial}^* f\|^2_{L^2_{0.s-1}(D)}\Big) \\
&\leq C\Big(<\bar{\partial} f, \bar{\partial} f> + <\bar{\partial}^* f, \bar{\partial}^* f>\Big) \\
&\leq C\Big(<f, \bar{\partial}^* \bar{\partial} f> + <f, \bar{\partial}\bar{\partial}^* f>\Big) \\
&\leq C\Big(<f, (\bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*) f>\Big) \\
&\leq C\Big(<f, \Box_s f>\Big) \\
&\leq C\|\Box_s f\|_{L^2_{0.s}(D)} \|f\|_{L^2_{0.s}(D)}.
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\|f\|_{L^2_{0,s}(D)} \leq C\|\Box_s f\|_{L^2_{0.s}(D)}, \quad f \in D(\Box_s). \tag{46}$$

Puisque pour tout $f \in D(N_s)$, $N_s f \in D(\Box_s)$, alors la relation (46) nous permet de montrer que l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann noté N_s est borné dans $L^2_{0,s}(D)$.C'est-à-dire

$$\|N_s f\|_{L^2_{0,s}(D)} \leq C\|f\|_{L^2_{0.s}(D)}, \quad f \in D(N_s).$$

La preuve des quatre premiers énoncés du Théorème principal de cette partie est identique à la preuve des quatre premiers propriétés du Théorème (0.4), il suffit de remplacer le domaine D_j par D.
Montrons maintenant que N_s est compact dans $L^2_{0,s}(D)$. Pour cela, on a besoin de prouver que

$$\|N_s f\|_{W^{1/2}_{0,s}(D)} \leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D)}, \qquad \forall f \in L^2_{0,s}(D). \tag{47}$$

Nous allons d'abord montrer que l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann N_s et ses opérateurs associés sont des limites faibles de celles définies sur D_j. Soient $\widetilde{N_s^{D_j}}$, $\widetilde{\bar{\partial} N_s^{D_j}} f$, $\widetilde{\bar{\partial}^* N_s^{D_j}} f$, $\widetilde{\bar{\partial}\bar{\partial}^* N_s^{D_j}} f$ et $\widetilde{\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s^{D_j}} f$ les extensions de $N_s^{D_j} f$, $\bar{\partial} N_s^{D_j} f$, $\bar{\partial}^* N_s^{D_j} f$, $\bar{\partial}\bar{\partial}^* N_s^{D_j} f$ et $\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s^{D_j} f$ respectivement qui sont nulles sur $D \setminus D_j$. Par les propriétés 1) et 5) ; du théorème (0.4) on a :
les extensions sont uniformément bornées pour la norme $L^2(D)$ alors ils existent des sous-suites encore notées comme ci-dessus telles que :

$$\widetilde{N_s^{D_j}} f \to h \in L^2_{0,s}(D), \qquad \bar{\partial} h \in L^2_{0,s+1}(D), \tag{48}$$

$$\widetilde{\bar{\partial} N_s^{D_j}} f \to h_1 \in L^2_{0,s+1}(D), \tag{49}$$

$$\widetilde{\bar{\partial}^* N_s^{D_j}} f \to h_2 \in L^2_{0,s-1}(D), \tag{50}$$

$$\widetilde{\bar{\partial}\bar{\partial}^* N_s^{D_j}} f \to h_3 \in L^2_{0,s}(D), \tag{51}$$

$$\widetilde{\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s^{D_j}} f \to h_4 \in L^2_{0,s}(D) \tag{52}$$

faiblement pour la norme $L^2(D)$.
Montrons maintenant que $h \in D(\Box_s)$, c'est-à-dire que $h \in D(\bar{\partial}) \cap D(\bar{\partial}^*)$, $\bar{\partial}^* h \in D(\bar{\partial})$ et $\bar{\partial} h \in D(\bar{\partial}^*)$. Partant de la relation (48), on obtient que $h \in D(\bar{\partial})$. Pour voir que $h \in D(\bar{\partial}^*)$, considérons $\beta \in D(\bar{\partial}) \cap L^2_{0,s-1}(D)$.
On a :

$$\begin{aligned} |< h, \bar{\partial}\beta >_D| &= \lim_{j\longrightarrow\infty} |< \widetilde{N_s^{D_j}} f, \bar{\partial}\beta >_{D_j}| = \lim_{j\longrightarrow\infty} |< \bar{\partial}^* \widetilde{N_s^{D_j}} f, \beta >_{D_j}| \\ &\leq \lim_{j\longrightarrow\infty} \|\bar{\partial}^* \widetilde{N_s^{D_j}} f\|_{L^2_{0,s-1}(D_j)} \|\beta\|_{L^2_{0,s-1}(D_j)} \\ &\leq C \lim_{j\longrightarrow\infty} \|f\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \|\beta\|_{L^2_{0,s-1}(D_j)} \\ &\leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D)} \|\beta\|_{L^2_{0,s-1}(D)}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $h \in D(\bar{\partial}^*)$. Par la convergence faible établie en (51), on a $\bar{\partial}\bar{\partial}^* h$ est la limite faible d'une sous-suite de $\widetilde{\bar{\partial}\bar{\partial}^* N_s^{D_j}} f$ et pour les même raisons $\bar{\partial}^* h \in D(\bar{\partial})$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\bar{\partial} h \in D(\bar{\partial}^*)$. En effet par la convergence faible établit en (52), on a $\bar{\partial}^*\bar{\partial} h$ est la limite faible d'une sous-suite de $\widetilde{\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s^{D_j}} f$. De plus, pour tout $\alpha \in D(\bar{\partial}) \cap L^2_{0,s}(D)$, on a :

$$\begin{aligned} |< \bar{\partial} h, \bar{\partial}\alpha >_D| &= \lim_{j\longrightarrow\infty} |< \widetilde{\bar{\partial} N_s^{D_j}} f, \bar{\partial}\alpha >_{D_j}| \\ &= \lim_{j\longrightarrow\infty} |< \widetilde{\bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s^{D_j}} f, \alpha >_{D_j}| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \lim_{j \longrightarrow \infty} \|\widetilde{\bar{\partial}^{*}\bar{\partial} N_s^{D_j}} f\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \|\alpha\|_{L^2_{0,s}(D_j)} \\
&\leq C\|f\|_{L^2_{0,s}(D)} \|\alpha\|_{L^2_{0,s}(D)}.
\end{aligned}
$$

D'où $\bar{\partial} h \in D(\bar{\partial}^*)$. Donc on peut conclure que $h \in D(\Box_s)$ et $\Box_s h = f$. En composant par N_s, on obtient $h = N_s f$.
Puisque D_j est à bord Lipschitzien, alors il existe un opérateur d'extension

$$S_j : W^m_{0.s}(D_j) \to W^m_{0.s}(\mathbb{C}^n) \qquad \forall\, m \geq 0,$$

tel que, pour tout $g \in W^{1/2}_{0.s}(D_j)$,

$$S_j g = g \quad \text{dans} \;\; D_j$$

$$\|S_j g\|_{W^{1/2}_{0.s}(\mathbb{C}^n)} \leq C\|g\|_{W^{1/2}_{0.s}(D_j)}.$$

La constante peut être choisie indépendamment de j car de tels opérateurs d'extension existent pour tout domaine à bord Lipschitzien. (voir [8], Théorème 1.4.3.1).
Puisque $N_s^{D_j}(\mathcal{E}^{0,s}(\overline{D_j})) \subseteq \mathcal{E}^{0,s}(\overline{D_j})$, en appliquant S_j sur $N_s^{D_j} f$ et en utilisant la relation (1) on a :

$$\|S_j \widetilde{N_s^{D_j}} f\|_{W^{1/2}_{0.s}(D)} \leq \|S_j \widetilde{N_s^{D_j}} f\|_{W^{1/2}_{0.s}(\mathbb{C}^n)} \leq C\|N_s^{D_j} f\|_{W^{1/2}_{0.s}(D_j)} \leq C^{'}\|f\|_{L^2_{0.s}(D)} \tag{53}$$

où les constantes C et $C^{'}$ sont indépendantes de j.
Ceci implique qu'il existe une sous-suite de $S_j \widetilde{N_s^{D_j}} f$ encore notée $S_j \widetilde{N_s^{D_j}} f$ qui converge faiblement vers un élément $g \in W^{1/2}_{0.s}(D)$. Puisque $S_j \widetilde{N_s^{D_j}} f$ converge faiblement vers $N_s f \in L^2_{0.s}(D)$, on en déduit que $N_s f \in W^{1/2}_{0.s}(D)$. Donc

$$\lim_{j \to \infty} \|S_j \widetilde{N_s^{D_j}} f\|_{W^{1/2}_{0.s}(D)} = \|N_s f\|_{W^{1/2}_{0.s}(D)}.$$

De plus, en utilisant encore la relation (53), on a l'estimation suivante :

$$\lim_{j \to \infty} \|S_j \widetilde{N_s^{D_j}} f\|_{W^{1/2}_{0.s}(D)} \leq C^{'}\|f\|_{L^2_{0.s}(D)}.$$

Ainsi, on établit la relation suivante

$$\|N_s f\|_{W^{1/2}_{0.s}(D)} \leq C^{'}\|f\|_{L^2_{0.s}(D)}.$$

Par conséquent, d'après le Lemme de Rellich N_s est compact dans $L^2_{0.s}(D)$. (l'application $W^{1/2}(D) \longrightarrow L^2(D)$ est compact).
On a $\bar{\partial}^* N_s$ est un opérateur fermé, définie de $L^2_{0.s}(D)$ à valeurs dans $L^2_{0.s-1}(D)$, ainsi par le théorème du graphe fermé l'opérateur $\bar{\partial}^* N_s$ est borné. Pour tout $f \in L^2_{0.s}(D)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\|\bar{\partial}^* N_s f\|^2_{L^2_{0.s}(D)} &= <\bar{\partial}^* N_s f, \bar{\partial}^* N_s f>_D \\
&= <N_s f, \bar{\partial}\bar{\partial}^* N_s f>_D \\
&= <N_s f, f - \bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s f>_D \\
&= <N_s f, f>_D - <N_s f, \bar{\partial}^*\bar{\partial} N_s f>_D \\
&= <N_s f, f>_D - <\bar{\partial} N_s f, \bar{\partial} N_s f>_D \\
&= <N_s f, f>_D - \|\bar{\partial} N_s f\|^2_{L^2_{0.s+1}(D)} \\
&\leq\; <N_s f, f>_D .
\end{aligned}
$$

Puisque l'opérateur N_s est compact et que

$$\|\bar{\partial}^* N_s f\|^2_{L^2_{0.s}(D)} \leq < N_s f, f >_D \leq \|N_s f\|_{L^2_{0.s}(D)} \|f\|_{L^2_{0.s}(D)}$$

alors $\bar{\partial}^* N_s$ est compact. En appliquant la formule de Range (voir [23])

$$N_s = (\bar{\partial}^* N_s)^* (\bar{\partial}^* N_s) + (\bar{\partial}^* N_{s+1})(\bar{\partial}^* N_{s+1})^*.$$

Donc on a aussi $\bar{\partial}^* N_{s+1}$ qui est compact.
L'estimation de l'assertion (7) s'obtient en appliquant l'approche de la limite faible à la première inégalité de (38). En effet

$$\lim_{j \to \infty} \|N_s^{D_j} f\|_{W^k_{0,s}(D_j)} \leq C_k \lim_{j \to \infty} \|f\|_{W^k_{0,s}(D_j)}.$$

Puisque $D_j \nearrow D$, alors

$$\|N_s f\|_{W^k_{0,s}(D)} \leq C_k \|f\|_{W^k_{0,s}(D)}.$$

On sait que l'opérateur N_s est continu sur l'espace de Sobolev et qu'il permute avec les opérateurs $\bar{\partial}^*$ et $\bar{\partial}$, par conséquent les opérateurs $\bar{\partial}^* N_s$, $N_s \bar{\partial}^*$, $\bar{\partial} N_s$, $N_s \bar{\partial}$, et $\bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s$ sont continus sur les espaces de Sobolev respectifs. Les projections de Bergman $P_{s-1} := Id - \bar{\partial}^* N_s \bar{\partial}$ et $P_s := Id - \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s$ sont continus comme combinaison d'opérateurs continus sur les espaces de Sobolev.
Soit $f \in W^k_{0,s}(D)$, tel que $\bar{\partial} f = 0$, on a

$$\begin{aligned} f &= \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s f + \bar{\partial} \bar{\partial}^* N_s f \\ &= \bar{\partial}^* N_{s+1} \bar{\partial} f + \bar{\partial} N_{s-1} \bar{\partial}^* f \\ &= \bar{\partial} N_{s-1} \bar{\partial}^* f. \end{aligned}$$

Posons $u = N_{s-1} \bar{\partial}^* f$. Donc $\bar{\partial} u = f$.
De plus on a :

$$\|u\|_{W^k_{0,s-1}(D)} = \|N_{s-1} \bar{\partial}^* f\|_{W^k_{0,s-1}(D)}.$$

D'après l'assertion 7, on a :

$$\|N_{s-1} \bar{\partial}^* f\|_{W^k_{0,s-1}(D)} \leq C'_k \|\bar{\partial}^* f\|_{W^k_{0,s-1}(D)}.$$

On sait que aussi $\bar{\partial}^*$ est un opérateur continu. Ce qui nous permet d'avoir

$$\|N_{s-1} \bar{\partial}^* f\|_{W^k_{0,s-1}(D)} \leq C_k \|f\|_{W^k_{0,s}(D)}.$$

D'où la relation suivante

$$\|u\|_{W^k_{0,s-1}(D)} \leq C_k \|f\|_{W^k_{0,s}(D)}.$$

D'après l'assertion 3 du Théorème 2.1 de [16], pour tout $f \in \mathcal{E}^{0,s} \cap \ker(\bar{\partial})$, on a

$$\begin{aligned} f &= \bar{\partial} \bar{\partial}^* N_s f + \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s f \\ &= \bar{\partial} \bar{\partial}^* N_s f + \bar{\partial}^* N_{s+1} \bar{\partial} f \\ &= \bar{\partial} \bar{\partial}^* N_s f \qquad \text{car } f \text{ est } \bar{\partial} - \text{ fermée }. \end{aligned}$$

Donc en posant $u = \bar{\partial}^* N_s f$, on a u qui est solution de l'équation $\bar{\partial} u = f$. $\square$

4 Applications

4.1 Algèbre C*

Définition 4.1 Une algèbre sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, muni d'une multiplication associative $(a, b) \in A \times A \to ab \in A$, telle que les applications $x \in A \to ax$ et $x \in A \to xa$ soient des endomorphismes de l'espace vectoriel A pour tout $a \in A$.

Définition 4.2 Une algèbre de Banach unitaire est un espace de Banach A, muni d'une multiplication pour l'algèbre possédant une unité 1_A et vérifiant

$$\forall a, b \in A, \| ab \| \leq \| a \| \| b \|; \quad \| 1_A \| = 1. \tag{54}$$

Exemple 4.1 L'algèbre des endomorphismes $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ est une algèbre de Banach si $X \neq \{0\}$ est un espace de Banach.

Définition 4.3 *(algèbre* C**)*
Une algèbre C* unitaire est une algèbre de Banach unitaire complexe A, munie d'une application continue $a \in \mathrm{A} \to a^* \in \mathrm{A}$, et vérifie

1) $(ab)^* = b^* a^* \quad \forall a, b \in A$;
2) $(a^*)^* = a \quad \forall a, b \in A$;
3 $(a + b)^* = a^* + b^*$ et $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \quad \forall a, b \in A;\ \lambda \in \mathbb{C}$;
4)
$$\forall a \in \mathrm{A}, \quad \|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Il en résulte que $\|a^*\| = \|a\|$.

Exemple 4.2 L'espace $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ des endomorphismes d'un espace de Hilbert complexe H, où on prend pour opération étoile l'application $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^*$ qui associe à chaque $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ l'opérateur adjoint est une algèbre C*.

Définition 4.4 Soit A une algèbre C^*. On dit que $a \in \mathrm{A}$ est :

1) hermitien si $a^* = a$. De plus si $b \in \mathrm{A}$, alors l'élément $a = b^* b$ est hermitien.
2) normal si $a^* a = aa^*$.
3) unitaire si $a^* a = aa^* = 1_{\mathrm{A}}$. L'algèbre $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ contient des élément qui vérifient ces propriétés.

Les définitions et le lemme suivants sont tirés de [1].

Définition 4.5 Une algèbre de Von Neumann est une algèbre C^* d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, fermés pour la topologie faible et contenant l'opérateur identité.

Donc en posant H $= L^2_{0,s}(D)$ (D définie dans le Théorème (0.5)), alors $\mathcal{L}(\text{H})$ est une algèbre de Von Neumann.
Si $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach, alors on note par X_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a.
Soit H un espace d'Hilbert, on note par $B(H)$ l'algèbre C^* de tous les opérateurs linéaires bornés sur H. Par conséquent on a :

$$\Big(B(H)\Big)_a = \Big\{x \in B(H) \ / \ \|x\| \leq a\Big\}.$$

Donc si $T \in B(H)$ est normal, alors $TT^* = T^*T$.

Définition 4.6 Soit E un espace métrique. E est dit précompact si l'une des trois propriétés équivalentes est vérifiée,

1) Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ε ;
2) Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de parties de diamètre inférieur à ε ;
3) Toute suite dans E possède une sous-suite de Cauchy.

Le Lemme suivant est tiré de [1]

Lemme 4.1 Soit H un espace de Hilbert. Soient T un opérateur définie sur H et a un nombre positif. Si l'ensemble $T(B(H))_aT$ est précompact, alors T est compact.

Grace à ce lemme et les propriétés d'une algèbre C^*, on montre que l'opérateur N_s est compact.
En effet, posons $H = L^2_{0,s}(D)$. Dés lors on a $N_s \in B(H)$ car N_s est borné sur $L^2_{0,s}(D)$. De plus il est normal car c'est aussi un opérateur auto-adjoint.
Montons que $N_s\Big(B(H)\Big)_a N_s$ ($a \in \mathbb{R}^+_*$) est précompact. Soit $\Big(N_sT_nN_s\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $N_s\Big(B(H)\Big)_a N_s$, donc $T_n \in \Big(B(H)\Big)_a$, c'est-à dire $T_n \in B(H)$ et $\|T_n\| \leq a$. Et puisque N_s et T_n sont des éléments de $B(H)$ qui est une C^*-algèbre, alors $N_sT_nN_s$ est une suite d'éléments de $B(H)$, donc elle est bornée. D'après Bolzano-Weierstrass elle admet une sous-suite $N_sT_{\varphi(n)}N_s$ qui converge dans $B(H)$. Ainsi la sous-suite $N_sT_{\varphi(n)}N_s$ est de Cauchy avec $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ et strictement croissante. Par conséquent $N_s\Big(B(H)\Big)_a N_s$ est précompact. D'après le Lemme (4.1), l'opérateur N_s est compact dans $L^2_{0,s}(D)$.
En résumé en passant par une algèbre C^* bien construite, on parvient à compactifier l' opérateur de N_s.

4.2 Théorie de Fredholm appliquée à l'opérateur de Toeplitz

Étant donné qu'on a déjà introduit les outils nécessaires sur la théorie des opérateurs pour la suite de notre travail, on va montrer que la compacité de N_s entraine que tout opérateur de Toeplitz est de Fredholm et que le commutateur noté $[P_s, M_f]$ est compact où P_s et M_f sont respectivement la projection de Bergman et l'opérateur multiplicatif par f.

Définition 4.7 Soient X et Y deux espaces de Banach.
Un opérateur linéaire borné $T : X \to Y$ est appelé opérateur de Fredholm s'il a un noyau et un conoyau de dimension finie et si son image est fermé.
L'indice d'un opérateur de Fredholm est défini par :

$$Ind(T) = dim(kerT) + dim(cokerT).$$

Proposition 4.1 Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné, alors T est de Fredholm si et seulement si, il existe $D : Y \to X$ un opérateur linéaire borné tel que $(TD - I)$ et $(DT - I)$ soient des opérateurs compacts.

Soit U un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. On rappelle que $L^2(U, \mathbb{C}^m)$ l'espace des fonctions définies sur U à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ de carré intégrable. On note par $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^m)$ le sous-espace fermé des fonctions holomorphe sur $L^2(U, \mathbb{C}^m)$. Nous pouvons voir $L^2(U, \mathbb{C}^m)$ comme le produit tensoriel $L^2(U) \otimes \mathbb{C}^m$. De même $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^m) = \mathcal{H}(U) \otimes \mathbb{C}^m$. Nous utiliserons $L^2_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$ pour dire l'espace des $(0, s)$-formes différentielles à coefficient dans $L^2(U, \mathbb{C}^m)$, et $\mathcal{H}_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$ le sous-espace des formes différentielles $\overline{\partial}$-fermé dans $L^2_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$.

Définition 4.8 *(Projection de Bergman).*
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné. On appelle projection de Bergman sur Ω la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur le sous-espace fermé des fonctions holomorphes de $L^2(\Omega)$.

Définition 4.9 Soit U un domaine borné de $\mathbb{C}^m$. Soit f une fonction à valeur matricielle $m \times m$ sur $\overline{U}$ qui est lisse sur U, alors on note par

$$M_f : L^2_{0,s}(U, \mathbb{C}^m) \to L^2_{0,s}(U, \mathbb{C}^m),$$

l'opérateur multiplicatif par f. L'opérateur de Toeplitz avec symbole f noté T^s_f est la composition définie comme suit :

$$T^s_f := P_s \circ M_f \mid_{\mathcal{H}_{0,s}(U,\mathbb{C}^m)} : \mathcal{H}_{0,s}(U, \mathbb{C}^m) \to \mathcal{H}_{0,s}(U, \mathbb{C}^m),$$

où P_s est la projection de Bergman.
Donc $T^s_f(h) = P_s(hf)$ pour tout $h \in \mathcal{H}_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$.

Proposition 4.2 Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ une intersection de domaines uniformément strictement q-convexes de classe C^2. Soient $h \in \mathcal{H}_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$ avec $s \geq q$ et f une fonction matricielle $m \times m$ continue sur $\overline{D}$, lisse sur D, telle que $\det f \neq 0$ sur D. Alors l'opérateur de Toeplitz associé

$$T^s_f : \mathcal{H}_{0,s}(D, \mathbb{C}^m) \to \mathcal{H}_{0,s}(D, \mathbb{C}^m)$$

est de Fredholm.

Pour démontrer la Proposition (4.2) nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2 Sous les hypothèses de la Proposition (4.2), le crochet de Lie $[P_s, M_f]$ est compact sur $\mathcal{H}_{0,s}(D, \mathbb{C}^m)$.

Preuve
Soit $h \in \mathcal{H}_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$, on a :

$$\begin{aligned}
[P_s, M_f]\, h &= P_s M_f(h) - M_f P_s(h) \\
&= (Id - \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s)(f \wedge h) - f \wedge (Id - \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s)(h) \\
&= f \wedge h - \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s f \wedge h - f \wedge (h - \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s h) \\
&= f \wedge h - \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s f \wedge h - f \wedge h + f \wedge \bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s h \\
&= -\bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s f \wedge h + f \wedge \bar{\partial}^* N_{s+1} \bar{\partial} h \\
&= -\bar{\partial}^* \bar{\partial} N_s f \wedge h \quad car \quad \bar{\partial} h = 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$[P_s, M_f]\, h = -\bar{\partial}^* N_{s+1} \bar{\partial} f \wedge h.$$

Puisque $\bar{\partial} f$ est borné sur (D) et que $\bar{\partial}^* N_{s+1}$ est compact, alors d'après le Théorème 2.4 de [5], on a la composée qui est compact. Par suite $[P_s, M_f]$ est compact sur $\mathcal{H}_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$.

$\square$

Preuve : (Proposition (4.2))
Calculons $T^s_f T^s_g - T^s_{fg}$.
Soit $h \in H_{0,s}(U, \mathbb{C}^m)$, on a

$$\begin{aligned}
(T^s_f T^s_g - T^s_{fg})(h) &= T^s_f T^s_g(h) - T^s_{fg}(h) \\
&= T^s_f(P_s M_g(h)) - P_s M_{fg}(h) \\
&= T^s_f(P_s(gh)) - P_s(fgh) \\
&= T^s_f(gh - \bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(gh)) - fgh + \bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(fgh) \\
&= T^s_f(gh) - T^s_f(\bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(gh)) - fgh + \bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(fgh) \\
&= P_s(fgh) - T^s_f(\bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(gh)) - fgh + \bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(fgh) \\
&= fgh - \bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(fgh) - T^s_f(\bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(gh)) - fgh + \bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(fgh) \\
&= -T^s_f(\bar{\partial}^*\bar{\partial}N_s(gh)) \\
&= T^s_f([P_s, M_g]\, h) \quad \text{d'après le Lemme (4.2).}
\end{aligned}$$

Comme
$$(T^s_f T^s_g - T^s_{fg})(h) = T^s_f([P_s, M_g]\, h) \quad \forall h \in H_{0,s}(U, \mathbb{C}^m).$$
D'après le Lemme (4.2), on a

$$T^s_f T^s_g = T^s_{fg} \text{ modulo l'opérateur compact } T^s_f([P_s, M_g]),$$

et aussi que T^s_f est compact si f est nulle sur bD. Il s'en suit que si f est inversible sur bD, alors T^s_f est inversible modulo un opérateur compact et d'inverse modulo l'opérateur compact T^s_g où g est une fonction lisse à valeurs matricielles telle que $fg = I$ sur bD, avec I la matrice unitaire .
Ainsi, d'après la proposition (4.1), T^s_f est un opérateur de Fredholm. $\square$

5 Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur un article de Marie Salomon SAMBOU et de Shaban KHIDR intitulé " Compactification de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann sur une intersection de domaines uniformément q-convexes dans $\mathbb{C}^n$ ". Après avoir défini les outils nécessaires et rappeler quelques propriétés, nous avons parler de quelques conditions suffisantes pour établir la compacité de l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann à savoir celles des solutions canoniques, la propriété P_q de Catlin et la propriété $\tilde{P}_q$ de McNeal. Celles de Catlin et McNeal sont des propriétés qui s'accentuent sur le bord du domaine concerné. Puis nous avons étudié la compacité de N_s en approximant le domaine D qui est une intersection de domaines uniformément q-convexes dans $\mathbb{C}^n$ par une suite de sous domaines lisses (D_j) uniformément lipschitziens, uniformément strictement q-convexes dans $\mathbb{C}^n$. C'est-à-dire le fait que N_s soit compact sur D_j entraine que N_s est compact sur D en utilisant la limite faible. Ainsi, après avoir obtenu la compacité de N_s, nous avons parler de quelques applications de la compacité de N_s qui sont :

- En utilisant une algèbre C^*, on montre que N_s est compact.

- Application de la compacité de N_s dans la théorie de Fredholm sur l'opérateur de Toeplitz.

Références

[1] M. Anoussis, E.G . Katsoulis, Compact operators and the geometric structure of C^*-algebra. Proceedings of the american mathematical Society. Volume. 124, number 7 July 1996.

[2] M. Y. Barkatou, S. Khidr, Global solution with C^k-estimates for $\bar{\partial}$-equation on q-convex intersections. Math. Nachr. 284, (2011) $2024 - 2031$.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Theorie et application. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paolo 1987.

[4] D.Catlin, Global regularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. In Complex analysis of several variables (Madison, 1982). Pure Math. 41, Amer. Math. Soc. Providence 1984, $39-49$.

[5] S. C. Chen, M. C. Shaw : Partial differential equation in several complex variables, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, International Press, Boston, MA 2001.

[6] G. B. Folland, J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann Complex. Annals of mathematics Studies, No. 75. Princeton University Press, Princeton, N.J ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972. .

[7] H. Grauert. O. Riemensehneider, K älersche Mannifaltigkeiten mit hyper q-Konvexen Rand. Problems in Analysis, A symposium in honor of Salomon Bochner, Princeton University Press, 1970.

[8] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Monogr. Stud. Math. 24, Pitmann, Boston, 1985.

[9] T. Hefer, I. Lieb, On the compactness of the Neumann operator. Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math 6 (2000) $415 - 432$.

[10] G.M.Henkin, A.Iordan, Compactness of the Neumann operator for hyperconvex domains with non smooth B-regular boundary. Math.Ann. 307 (1997) $151 - 168$.

[11] G.M.Henkin, A.Iordan, and J.J.Kohn, Estimations sous-elliptiques pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann dans un domaine strictement pseudoconvexe à frontière lisse par morceaux. C. R. Acad.Sci.Paris 323 (1996) $17 - 22$.

[12] G.M.Henkin, J. Leiterer, Andreoutti-Grauert, Theory by Integral Formulas. Progress in Math., 74 Birkh äuser-Verlag, Boston 1988.

[13] L. Hörmander, L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. Acta Math. 113, (1965) $89 - 152$.

[14] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, N.J, (1966).

[15] R.A Horn and C.R Johnson,Matrix analysis. Cambridge University Press, Cambridge 1985. 85.

[16] S. Khidr, O Abdelkader, Globl regularity and L^p-estimates for the $\bar{\partial}$ on annulus between two strictly pseudoconvex domains in a stein manifold. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) $883 - 888$.

[17] S. Khidr, O Abdelkader, The $\bar{\partial}$- problem on an annulus between two strictly q-convex domains with smooth boundaries. Complex Annal. Oper. Theory 8 (2014) $1151 - 1172$.

[18] S. Khidr, S Sambou, Compactness of the $\bar{\partial}$- Neumann operator on uniformly q-convex intersections domains in $\mathbb{C}^n$, Math Meth Applied Sci. 2021; 1-11. https ://doi.org/10.1002/mma.7303.

[19] J.J.Kohn, L.Nirenberg, Non-coercive boundary value problems. Comm. Pure App. Math 18 (1965) $443 - 492$.

[20] B.Mauray, Théorie spectrale Décembre 2004. http ://www.math.jussieu.fr/ maurey/ts012/poly/index.html.

[21] J. McNeal, A sufficient condition for compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann operator. J.Funct.Anal. 195 (2002) $190 - 205$.

[22] J.Michel, M.C.Shaw, Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann operator on piecewise smooth strictly pseudoconvex domains. Duke Math J. 93 (1998) $115 - 128$.

[23] R. M. Range, The $\bar{\partial}$-Neumann operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Math. Ann. 266 (1984) $449 - 456$.

[24] E. J. Straube, Lectures on the L^2-Sobolev Theory of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. ESI Lectures in Mathematics and physics, Vol. 7, European Mathemetical Society (EMS), Zürich, 2010.

[25] V. Trénoguine, Analyse Fonctionnelle. Éditions Mir. Moscou, 1985.

[26] V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Sobolev Problèmes et exercices d'analyse Fonctionnelle. Éditions Mir, 1987.

[27] H. Upmeier, Toeplitz Operators and Index Theory in Several Complex Variables. Operator Theory Advances and Application Vol. 81, 1996.

[28] S. K. Vassiliadou, The $\bar{\partial}$-Neumann problem on certain piecewise smooth domains in $\mathbb{C}^n$, Complex Var, 46 (2001) $123 - 141$.

[29] Y. Zhang, A suffucient condition for the compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann operator on high level forms. airXiv : $1710.09614v4$ $[math.CV]$ 4 Aug 2020.