UNIVERSITE ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR : Sciences et Technologies

Département : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Equations aux Dérivées Partielles

.

Mémoire de Master

Analyse mathématique de la génération du tsunami en eau peu profonde due à la déformation du fond marin

---

Présenté et soutenu publiquement le 22 Avril 2022

par

Abdourahmane MBAYE

.

Sous la direction de **Docteur Timack NGOM**

Avec la supervision du **Professeur Diaraf SECK**

Devant le Jury composé de :

Salomon SAMBOU	**Professeur Titulaire**	***Président***	**UASZ**
Mamadou GUEYE	**Maitre de Conférences Assimilé**	***Examinateur***	**UASZ**
Mamadou Eramane Bodian	**Maitre de Conférences Assimilé**	***Examinateur***	**UASZ**
Timack NGOM	**Maitre de Conférences Titulaire**	***Directeur***	**UASZ**
Diaraf SECK	**Professeur Titulaire**	***Superviseur***	**UCAD**

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'aviez de noble sentiments, qui méritent le plus de mes reconnaissances ceux qui mon apporté toujours soutien et bonheur dans la vie :

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leurs amours, leurs tendresses, leurs soutiens et leurs prières tout au long de mes études,

A toute la famille Tall, pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

A mes chers frères, Mamadou, Samba, Demba, Moussa et Aliou pour leurs appuis et leurs encouragements,

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infaillible,

Merci d'être toujours là pour moi.

Remerciements

Je remercie en priorité **ALLAH LE TOUT PUISSANT** de m'avoir donné le courage, et la force d'achever ce travail.

Je tiens à remercier l'Université Assane Seck, l'Ufr de Sciences et Technologies, le Département de Mathématiques ainsi que tous les professeurs qui nous ont initié et donné les bases de l'étude mathématique pour exceller dans ce domaine.

Je tiens a exprimer mes plus vifs remerciements à mes Directeurs Diaraf SECK et Timack NGOM. Les mots me manquent pour exprimer ma gratitude. Leurs compétences et leurs clairvoyances m'ont beaucoup appris. Je les remercie pour leurs encadrements et conseils avisés qu'ils ont su me prodiguer tout au long de ce travail et aussi pour leurs qualités humaines chaleureuses, et surtout pour la confiance qu'ils m'ont accordée.

J'adresse également mes sincères remerciements à Mamadou Gueye, Docteur à l'Université Assane Seck de Ziguinchor et à Mamadou Eramane Bodian, Docteur à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être examinateur de ce mémoire. Je voudrais aussi remercier Salomon Sambou, Professeur à l'Université Assane Seck de Ziguinchor, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse mes remerciements à mes ainés et jeunes frères dans cette discipline et une pensée particulière à Ibrahima Sané, Aliou B Diouf, Ibou Goudiaby et Guillaume Sadio qui m'ont toujours conseillé , soutenu et encouragé.

J'adresse également mes sincères remerciement à toute la famille Tall particulièrement à Abdourahmane Tall et Fatoumata Sow qui m'ont bien accueilli à Ziguinchor.

J'adresse également mes sincères remerciements à Moussa Diatta, Lala Diémé, Babacar Cissé, Emile Ndong, Mamadou Boye Diallo, Algassimou Diallo, Jean Mendy, Mame Fatou Ndiaye, Amadou Ndiaye, Bafodé Diawara, Bernard Manga, Malick Diba, Seydou Diba et Ibrahima Dramé.

Je remercie les amis, Alassane Sy, Ababacar Faye, Abdou Ndiaye, Matar Seye, Djiré Faye, Moussa Anne, Chérif Anne, Ablaye Sy et Seydou Anne, pour leurs soutiens tout au long de ces années.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille et, en particulier, à mes parents pour leurs soutiens et encouragements au cours de ces longues années d'études ; Malgré les milliers de kilomètres qui nous séparent, leur amour, leur tendresse et leur confiance me portent et me guident tous les jours. Merci, Maman, Papa, pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Résumé

Dans les calculs numériques des tsunamis dus aux séismes sous-marins, il est fréquemment supposé que le déplacement initial de la surface de l'eau est égal au déplacement permanent du fond marin et que le champ de vitesse initial est égal à zéro, et les équations de Saint-Venant sont souvent utilisées pour simuler la propagation des tsunamis. Dans cet exposé, nous donnons une justification mathématiquement rigoureuse de ce modèle de tsunami à partir du problème complet en comparant les solutions du problème complet et celle du modèle de tsunami. On montre aussi que dans certains cas on doit imposer un champ de vitesse initial non nul, ce qui se produit comme un effet non linéaire.

Table des matières

Notations

- un multi-indice α est un d-uplet d'entiers : $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d);\ \alpha_j \in \mathbb{N}$
- Sa longueur $|\alpha|$ est définie comme la somme des α_i et on définit enfin la multi-factorielle : $\alpha! = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j)! = \alpha_1! \times \cdots \times \alpha_n!$
- $\partial_j^{\alpha_j}$: est la dérivée partielle d'ordre α_j par rapport à la coordonnée x_j
- ∂^α : sont les dérivées partielles, d'ordre globale $|\alpha|$
- $D_j = -\imath \partial_j = -\imath \dfrac{\partial}{\partial j}$: est l'opérateur différentiel du premier ordre
- D^α : sont les opérateurs différentiels, d'ordre globale $|\alpha|$
- $\mathcal{D}(\Omega)$: est l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω dont le support est compact et inclus dans Ω
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: est l'espace des distributions sur Ω
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: espace de Schwartz
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: L'ensemble des distributions tempérées
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$: est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à valeur réelle
- $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$: est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à valeur réelle avec des dérivées continues jusqu'à l'ordre k
- $L^p(\mathbb{R}^d)(1 \leq p < \infty)$: est l'espace de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d)$ associé avec la norme $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \right)^{1/p}$ quand $p < \infty$
- $H^s(\mathbb{R}^d)$ $(s \in \mathbb{R})$: espace de Sobolev fractionnaire
- $H^m(\mathbb{R}^d)$ $(m \in \mathbb{N})$: espace de Sobolev
- Λ^{DN} : est l'opérateur de Dirichlet-Neumann
- Λ^{NN} : est l'opérateur de Neumann-Neumann
- Λ^{DD} : est l'opérateur de Dirichlet-Dirichlet
- Λ^{ND} : est l'opérateur de Neumann-Dirichlet
- $\mathcal{F}$: est la transformée de Fourier
- $\mathcal{F}^{-1}$: est l'inverse de la transformée de Fourier
- d : est la dimension de l'espace
- $x \in \mathbb{R}^d$: est la variable horizontale
- z : est la variable verticale notée (x_{d+1})
- $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$: quand $d = 2$ et $\nabla = \partial_x$ quand $d = 1$
- $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$: quand $d = 2$
- $\nabla_{x,z}$ noté à $(d+1)$-dimension sont les gradients respectifs par rapport à x et z
- I_δ : est la matrice de $(d+1) \times (d+1)$
- E_d : est la matrice d'unité $d \times d$
- $\Omega(t)$: est le domaine du fluide occupé par l'eau au temps t
- $\Gamma(t)$: est la surface libre
- $\Sigma(t)$: est le fond

- Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, le multiplicateur de Fourier $f(D) : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est défini par

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ f\widehat{(D)u(}\xi) = f(\xi)\widehat{u}(\xi)$$

- L'opérateur $\Lambda^{DN}(0,0,\delta)$ est défini par $\Lambda^{DN}(0,0,\delta) : H^1(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$
- On pose $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial_{ij} = \partial_i\partial_j$ et $\partial_{ijk} = \partial_i\partial_j\partial_k$
- L'opérateur pseudo-différentiel $P(D)$, $D = (D_1, \cdots, D_d)$ et $D_j = -i\partial_j$, avec le symbole $P(\xi)$ est défini par

$$P(D)u(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} P(\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

  On pose J=1+|D|, de sorte que $\|u\|_s = \|J^s u\|$ et J désigne l'opérateur de dérivation d'ordre 1.
- Pour les opérateurs A et B, on note $[A,B] = AB - BA$ le commutateur.
- Si X est un espace de Banach quelconque, et $T > 0$, l'espace $\mathcal{C}([-T,T];X)$ est l'ensemble des fonctions continues de $[-T,T]$ dans X, muni de la norme $\sup\limits_{-T\le t\le T} \|f\|_X$, avec $\|\cdot\|_X$ une norme sur X.

INTRODUCTION

Les tsunamis sont parmi les phénomènes les plus désastreux des ondes de surface de l'eau et qui se caractérisent par une très grande longueur d'onde. Ils sont principalement générés par une déformation soudaine du fond marin suite à un tremblement de terre sous-marin. Le mouvement des tsunamis peut être modélisé comme un écoulement irrotationnel d'un fluide idéal incompressible délimité au-dessus par une surface libre et délimité en-dessous par un fond mobile sous le champ gravitationnel. Le modèle est généralement appelé problème des ondes de surface de l'eau. En raison de sa complexité, plusieurs modèles simplifiés ont été proposés et utilisés pour simuler des tsunamis. L'un des modèles les plus courants de propagation des tsunamis est le modèle des eaux peu profondes sous l'hypothèse que le déplacement initial de la surface de l'eau est égale au déplacement permanent du fond marin et que le premier champ de vitesse est égal à zéro. A savoir, dans les calculs numériques des tsunamis dus aux tremblements de terre sous-marins, on utilise généralement les équations de Saint-Venant :

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \nabla \cdot ((h + \eta - b_1)\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta = 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions initiales particulières suivantes :

$$\eta|_{t=0} = b_1 - b_0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

où η est l'élévation de la surface de l'eau, $\mathbf{u}$ est la vitesse de l'eau dans les directions horizontales, g est la constante gravitationnelle, h est la profondeur moyenne de l'eau, b_0 est la bathymétrie du fond avant le séisme sous-marin et b_1 est la bathymétrie du fond après le séisme. Le but de ce travail est de donner une justification mathématiquement rigoureuse de ce modèle en eau peu profonde à partir du problème des ondes de surface de l'eau, en particulier la justification des conditions initiales (2).

Dans ce manuscrit, deux paramètres adimensionnels δ et ε jouent des rôles importants, où δ est le rapport de la profondeur moyenne de l'eau h à la longueur caractéristique λ et ε est le rapport de la durée t_0 du séisme sous-marin à la période du tsunami $\dfrac{\lambda}{\sqrt{gh}}$. On remarque que $\sqrt{gh}$ est la vitesse de propagation des ondes linéaires en eaux peu profondes et que la durée de la déformation du fond marin est très courte par rapport à la période du tsunami en général. Par conséquent, ε devrait être un petit paramètre. On sait que les équations de Saint-Venant (1) sont dérivées du problème des ondes de surface de l'eau lorsque la limite $\delta \to 0$. La dérivation remonte à Airy [1]. Puis, Friedrich [10] a systématiquement dérivé les équations en utilisant un développement de la solution par rapport à δ^2 (voir aussi Lamb [17] et Stoker[23][22]). Une justification mathématiquement rigoureuse de l'approximation des eaux peu profondes pour les ondes de surface de l'eau bidimensionnelles ($d = 1$) sur un fond plat a été donné par Ovsjannikov [20][21] sous la condition aux limites périodique par rapport à la variable spatiale horizontale, puis par Kano et Nishida [15] dans une classe de fonctions analytiques (voir aussi [15][14]. La justification dans les espaces de Sobolev était donnée par Li [19] pour les ondes de surface de l'eau bidimensionnelles sur un fond plat, puis les travaux de Alvarez- Samaniego et Lannes [2] et Iguchi [12] pour les ondes de surface de l'eau dans le cas général ($d = 1$ ou $d = 2$) avec un fond non plat (mais régulier).

Nous montrerons que, avec les conditions sur les données initiales et la bathymétrie du fond, la solution du problème complet peut être approchée par la résolution du modèle de tsunami (1) et (2) quand $\delta, \varepsilon \longrightarrow 0$ sous la restriction $\frac{\delta^2}{\varepsilon} \longrightarrow 0$. Cela signifie que si la vitesse de déformation du fond marin est rapide mais pas trop rapide, alors le modèle du tsunami serait une bonne approximation au problème des ondes de surface. De plus, nous montrons également que, quand $\delta, \varepsilon \longrightarrow 0$ et $\frac{\delta^2}{\varepsilon} \longrightarrow \sigma$ avec σ une constante positive, les conditions initiales (2) devraient être remplacées par

$$\eta|_{t=0} = b_1 - b_0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \nabla \left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0} b_t(\cdot, t)^2 dt \right), \tag{3}$$

où $b = b(x, t)$ est la bathymétrie du fond lors de la déformation du fond marin. L'une des parties les plus difficiles de l'analyse est la dérivation d'une borne uniforme de la solution par rapport aux petits paramètres δ et ε avec ses dérivées pour le problème des ondes de surface, et en particulier lorsque la déformation du fond marin a lieu sur l'intervalle de temps $0 \leq t \leq \varepsilon$. Enfin, nous adoptons et étendons les techniques utilisées à Iguchi [12].

Il convient ici de mentionner que l'équation de Korteweg-de-Vries est également connue comme modèle pour les ondes de surface de l'eau et que l'applicabilité de cette modélisation à la propagation des tsunamis a été étudiée, par exemple, par Craig [8], Segur [22], Lakshmanan [16], Constantin et Johnson [6], Constantin [5] et Stuhlmeier [24].

Ce mémoire est organisé comme suit :

- ▶ **Dans le chapitre 1**, on commence d'abord par présenter les éléments d'analyse vectorielle et nous définissons les distributions et leurs propriétés. Ensuite, nous donnons les espaces de L^p et les transformations de Fourier. Et enfin, nous terminons ce chapitre par les espaces de Sobolev.
- ▶ **Dans le chapitre 2**, dans un premier temps nous formulons le problème, nous réécrivons le problème sous une forme sans dimension, nous le transformons en un problème équivalent sur la surface libre, et donnons un des principaux résultats, qui affirme l'existence de la solution avec une bornitude uniformes dans les espaces de Sobolev. Dans un second temps, nous dérivons les équations en eaux peu profondes à partir du problème des ondes de surface de l'eau et enfin, nous faisons une analyse sur la condition de signe de Rayleigh-Taylor et donnons un autre résultat principal, qui justifie rigoureusement l'approximation en eaux peu profondes.
- ▶ **Dans le chapitre 3**, nous définissons et analysons les opérateurs de Dirichlet-Neumann, Neumann-Neumann, Dirichlet-Dirichlet et Neumann-Dirichlet pour les équations de Laplace. Dans l'analyse, nous transformons le problème de Laplace dans le domaine fluide $\Omega(t)$ en un problème elliptique posé sur un domaine fixe $\Omega_0 := \mathbb{R}^d \times [0, 1]$ en utilisant un difféomorphisme convenable $\Theta : \Omega_0 \to \Omega(t)$ et donnons quelques estimations de la solution. Ensuite, nous donnons les propriétés de base des opérateurs et dérivons des formes explicites de leurs dérivées de Fréchet par rapport à la variation de surface η et la bathymétrie du fond b. Enfin, nous dérivons des estimations uniformes par rapport à δ dans les espaces de Sobolev pour les opérateurs de Λ^{DN}, Λ^{DN} et opérateurs associés et des dérivées au sens de Fréchet par rapport à la fonction qui représente l'élévation de la surface.
- ▶ **Dans le chapitre 4**, nous linéarisons d'abord les équations, puis nous définissons une fonction d'éner-

gie pour le problème linéarisé. Ensuite, nous réduisons les équations non-linéaires complètes en un système d'équations quasi-linéaires. Enfin, en appliquant les estimations d'énergie aux équations quasi-linéaires, nous démontrons les principaux théorèmes.

.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Éléments d'analyse vectorielle

1.1.1 Convention de l'indice muet

Tout indice littéral répété deux fois dans un monôme implique que ce monôme doit être compris comme la somme des termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs de 1 à d dans ce monôme où d est la dimension de l'espace de travail.

Remarque 1.1. On écrira $\langle x, x \rangle = x_i x_i$

1.1.2 Opérateurs différentiels

- **Divergence** : Soit le champ de vecteurs $w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et la matrice $d \times d$ donnée par $P = (P_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ Le produit scalaire de l'opérateur "nabla" ∇ par un vecteur définit la divergence du vecteur. La divergence d'un vecteur est un scalaire. On appelle divergence de w le réel noté $\operatorname{div}(w)$ et donné par

$$\nabla \cdot w = \operatorname{div}(w) = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \partial_i w_i = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}.$$

On appelle divergence de la matrice P le vecteur noté $\operatorname{div}(P)$ et donné par

$$\operatorname{div}(P)_i = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{et,}$$

$$divP = \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial P_{1j}}{\partial x_j}, \cdots, \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial P_{dj}}{\partial x_j} \right)^t \in \mathbb{R}^d \quad \text{est un vecteur.}$$

- **Opérateur nabla** : Soient $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et on appelle gradient de $\mathbf{u}$ la matrice donnée par

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} \quad \text{est la matrice Jacobienne de } \mathbf{u}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq d.$$

On a $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_d}\right) \in \mathbb{R}^d$ est le gradient de v (un vecteur).

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{u}_i \partial_j \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^d \text{ est un vecteur.}$$

- **Laplacien** : Le laplacien de $\mathbf{u}$ est noté $\Delta\mathbf{u}$ et est donné par

$$\Delta\mathbf{u} = div(\nabla\mathbf{u}) = \partial_j \partial_j \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}.$$

- **Rotationnel** : Le produit vectoriel de l'opérateur "nabla" ∇ par un vecteur définit le rotationnel du vecteur. Le rotationnel (également noté *rot*) d'un vecteur est un vecteur. Pour le vecteur $\mathbf{u}$, il s'écrit : en coordonnées cartésiennes

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = rot\mathbf{u} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}u_z - \frac{\partial}{\partial z}u_y\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}u_u - \frac{\partial}{\partial x}u_z\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}u_y - \frac{\partial}{\partial y}u_x\right)\vec{k}.$$

1.1.3 Quelques relations de base

Soient p et q deux fonctions scalaires et u et v deux fonctions vectorielles. On a

$$\nabla \cdot (pu) = (u \cdot \nabla)p + p(\nabla \cdot u),$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge u) = 0 \text{ soit } div(rotu) = 0,$$

$$\nabla \wedge (\nabla p) = 0 \text{ soit } rot(gradp) = 0.$$

1.2 Distributions

1.2.1 Définitions et propriétés générales

Definition 1.1. (**support d'une fonction**) Le support d'une fonction f défini d'un espace topologique X à valeur dans un corps $\mathbb{K}$ est le plus petit ensemble fermé de X en dehors duquel la fonction f est identiquement nulle. C'est donc la fermeture de l'ensemble des points x tels que $f(x) \neq 0$.

$$\text{supp} f := \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}.$$

Definition 1.2 (sous-ensemble compact). Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme s'il est fermé et borné par rapport à cette norme.

Exemple 1.1. Soit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

a comme support l'intervalle fermé $[-1, 1]$ qui est un ensemble compact.

Un ensemble compact A contient donc tous ses points frontières et de plus, puisqu'il est borné, il existe une constante M telle que :

$$A \subset \{x| \ \ \|x\|_2 \leq M\}.$$

où $\|x\|_2$ désigne la norme euclidienne du vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Le compact A est ainsi inclus dans un disque de rayon M, pourvu que M soit suffisamment grand.

Definition 1.3 (**Espace** $\mathcal{D}(\Omega)$)**.** On appelle $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω et dont le support est compact et inclus dans Ω.

Definition 1.4 (**Fonctions tests**)**.** Soit Ω un ouvert et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ de support compact inclus dans Ω.
On notera $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 1.2. La fonction $\theta(x) = e^{-\frac{1}{x}} 1_{\mathbb{R}+}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $\theta_n(x) = \theta(1 - \|x\|^2)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d$.

Definition 1.5 (**Distributions**)**.** On dit que T est une distribution (réelle) dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$

$$T : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante : pour tout K compact Ω, il existe un entier m et une constante C_K tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } supp(\varphi) \subset K, \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace (vectoriel) des distributions dans Ω.

Remarque 1.2. Lorsque l'entier m peut être choisi de manière indépendante de K, on dit que la distribution T est d'ordre fini, et la plus petite valeur de m possible est appelée l'ordre de T.

1.2.2 Dérivation au sens des distributions

Definition 1.6. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq d$, on note $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle.$$

Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right) \in \mathcal{D}'(\Omega)^d.$$

De même, si α est un multi-entier, on note $\partial^\alpha u$ la distribution

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

1.3 Espaces de L^p et transformation de Fourier

1.3.1 Espaces de L^p

Definition 1.7 (**Espace de** L^p)**.** Soit $p \in [1, +\infty[$. On note $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles, qui sont définies presque-partout $(p \cdot p)$ sur Ω, et qui vérifient

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

est un espace vectoriel normé complet (i.e un espace de Banach).

Pour $p = \infty$, on note l'espace L^∞ par

$$L^\infty(\Omega) = \{f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que : } |f(x)| \leqslant C \ p.p \text{ sur } \Omega\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \geqslant 0 : |f(x)| \leq C \quad p.p\}$$

Théorème 1.1 (**Inégalité de Hölder**). *Soient $f,\ g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables et $p,\ q > 1$ deux nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, on a :*

$$\left|\int_\Omega f(x) \times g(x) dx\right| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

$$\left|\int_\Omega f(x) \times g(x) dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Théorème 1.2 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**). *Si u et v sont des fonctions de $L^2(\Omega)$, alors*

$$\left|\int_\Omega uv dx\right| \leq \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{1/2}.$$

1.3.2 Transformation de Fourier

Dans cette sous-section, nous utilisons la transformation de Fourier dans le but de construire un espace fonctionnel dans lequel nous ferons des estimations uniformes de la solution du problème des ondes de surface. La transformation de Fourier d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $\mathcal{F}(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx, \quad \text{avec } \|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}.$$

Le rôle majeur que joue la transformation de Fourier dans l'étude des EDP est lié au fait que, lorsque ces objets sont bien définis,

$$\mathcal{F}(\partial_j u)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(u)(\xi)$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ transforme l'action d'un opérateur différentiel à coefficients constants en produit par un polynôme. Ce fait n'aurait aucun intérêt sans une formule d'inversion permettant de retrouver la fonction u connaissant $\mathcal{F}(u)$:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}(u)(\xi) d\xi.$$

Malheureusement, cette formule n'a de sens que lorsque $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et ce n'est en général pas le cas pour $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On commence donc par introduire une classe de fonctions (suffisamment grande) qui est stable par $\mathcal{F}$, et pour lesquelles les deux propriétés ci-dessus sont vraies.

1.3.3 Espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Definition 1.8. On dit que φ est dans la classe de Schwartz, $\mathcal{S}$, et on note $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et si pour tout n et tous multindices $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| \leq n$ et $|\beta| \leq n$, on ait

$$|x^\alpha|\partial^\beta \varphi(x) \to 0 \text{ quand } ||x|| \to +\infty.$$

On exprime aussi ces relations en disant que φ et toutes ses dérivées sont "à décroissance rapide"

$$\text{Alors } : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \ / \ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^d, \ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty \right\}.$$

Definition 1.9 (Distribution tempérée). On appelle distribution tempérée toute forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ continue.

L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathbb{R}^d$

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow T \ \text{ est forme linéaire sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \ \ \exists \ C > 0 \ \text{ tels que } \ |\langle T, \phi \rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|(\phi).$$

1.3.4 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

1.3.5 Définitions, propriétés

Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, donc $\mathcal{F}(u)$ est bien défini et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Definition 1.10. Pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on note $\hat{u}$, $\mathcal{F}(u)$ la fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Où $x \cdot \xi = x_1 \cdot \xi_1 + \cdots + x_d \cdot \xi_d$ et $dx = dx_1 \cdots dx_d$ L'application linéaire $u \mapsto \mathcal{F}(u)$ est appelée transformation de Fourier.

Definition 1.11 (Formule d'inversion de Fourier). Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^d$, on a l'identité

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi$$

On rassemble dans la proposition qui suit quelques propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

1.3.6 propriétés

Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

i. La fonction $\mathcal{F}(u)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\partial_j \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(-ix_j u(x))$

ii. Pour tout $j \in \{1, \cdots, d\}$, on a $\mathcal{F}(\partial_j u)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(u)(\xi)$

iii. Pour $a \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_{x\to\xi}(u(x-a)) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(u)(\xi)$

iv. Pour $a \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_{x\to\xi}(e^{ia\cdot x} u(x)) = \mathcal{F}(u)(\xi - a)$.

Definition 1.12. On dit que la suite f_n d'éléments de $\mathcal{S}$ converge dans $\mathcal{S}$ vers 0 si et seulement si pour tous $\alpha,\, \beta \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha f_n^{(\beta)}(x)| = 0.$$

Le résultat important sur les fonctions de $\mathcal{S}$ est le suivant :

Théorème 1.3. *La transformée de Fourier est un opérateur linéaire et continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. En d'autres termes, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et si la suite f_n tend vers 0 dans $\mathcal{S}$ alors $\hat{f}_n$ tend également vers 0 dans $\mathcal{S}$.*

Théorème 1.4. *La transformée de Fourier est une application linéaire et bijective et bi-continue, c'est-à-dire continue ainsi que sa réciproque, de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. Son inverse est $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ ($\overline{\mathcal{F}}$ est la transformée de Fourier conjuguée).*

1.3.7 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Proposition 1.1. La transformée de Fourier sur L^1 et celle sur L^2 coïncident sur $L^1 \cap L^2$.

En d'autres termes si f est une fonction de carré intégrable et si elle est de plus, intégrable elle-même alors sa transformée de Fourier vaut bien

$$\mathcal{F}_{[f]} : \xi \mapsto \int f(x) e^{-i\pi\xi x} dx.$$

Proposition 1.2.

1. L'espace $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel dense de l'espace L^2.
2. $\mathcal{F}_{[f]} : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases}$ est une isométrie.

   L'isométrie signifie que pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{S}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

La proposition précédente permet de prolonger sur L^2 l'opérateur transformée de Fourier qui reste linéaire et continu. On obtient :

Théorème 1.5 (PARSEVAL-PLANCHEREL). *La transformée de Fourier $\mathcal{F}_{[\cdot]}$ est une isométrie sur L^2 : si f et g sont deux fonctions de L^2 alors $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ le sont aussi et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

De plus, pour tout $f \in L^2$, on a $\overline{\mathcal{F}}_{[\mathcal{F}_{[f]}]} = \mathcal{F}_{[\overline{\mathcal{F}}[f]]} = f$ presque partout. La transformée de Fourier inverse est donc donnée par $\mathcal{F}^{-1}[\cdot] = \overline{\mathcal{F}}[\cdot]$.

Definition 1.13 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$). Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors la transformée de Fourier de T, notée $\widehat{T}$ est définie par

$$\forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \langle \widehat{T}, \phi \rangle = \langle T, \widehat{\phi} \rangle.$$

1.4 Espaces de Sobolev

1.4.1 Espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

Dans cette section, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, sans propriété particulière de régularité.

Definition 1.14. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que $u \in H^1(\Omega)$ si $u \in L^2(\Omega)$ et si, pour tout $i \in 1, \cdots, d$, la distribution $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ appartient aussi à $L^2(\Omega)$ (ou, de façon équivalente, si la distribution ∇u appartient à $L^2(\Omega)^d$).

On considère sur cet espace le produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega uvdx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

et la norme induite

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2}^2\right)^{1/2} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

L'existence des intégrales dans le produit scalaire est assurée par le fait que u,v, ∇u et ∇v sont dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.6. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

On définit plus généralement les familles d'espaces suivants :

- Les espaces $H^m(\Omega)$, définis pour $m \in \mathbb{N}$ par

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \forall \;\; \alpha \;\; \text{multi-entier tel que } |\alpha| \leq m, \;\; \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

  Munis du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx.$$

  et de la norme

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{\alpha \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\right)^{1/2},$$

  ce sont des espaces de Hilbert.

- Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$, définis pour $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : \forall \;\; \alpha \;\; \text{multi-entier tel que } |\alpha| \leq m, \;\; \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\right\}$$

  Munis de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{\alpha \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}, \text{ pour } p < +\infty.$$

  Ou

$$\|u\|_{W^{m,+\infty}} = \max_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty},$$

ce sont des espaces de Banach. Dans le cas $p = 2$, les normes $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$ et $\|\cdot\|_{H^m}$ sont équivalentes.

Remarque 1.3. Quand $\Omega = \mathbb{R}^d$, on peut définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier. Ainsi, sur $\Omega = \mathbb{R}^d$, on dit que $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, où $\hat{u}(\xi) = \displaystyle\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)dx$ est la transformée de Fourier de u. Remarquer que cette définition a bien un sens pour m non entier.

Lemme 1.1. Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq m$ nous avons

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = \left[\xi \mapsto \imath^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right].$$

Lemme 1.2. Il existe des constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$c_1(1+\|x\|^2)^m \leq \sum_{|\alpha|\leq m}(x^\alpha)^2 \leq c_2(1+\|x\|^2)^m.$$

Lemme 1.3. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous avons $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si l'application

$$\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u}$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \leq m$. Ici $|\xi|$ est la norme euclidienne de ξ dans $\mathbb{R}^d$.

Pour la démonstration de ces trois lemmes ci-dessus voir (https ://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf)

Definition 1.15 (Espace de H^s). Soit $s > 0$ nous définissons l'espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ par

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Notons ainsi que pour $s \geqslant 0$, $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Ceci n'est plus vrai pour $s < 0$. Nous y mettons le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi.$$

Cela a bien un sens car on intègre le produit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de deux distributions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ égales respectivement à $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}$ et $(1+|\xi|^2)^{s/2}\overline{\widehat{v}}$. On vérifie facilement que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s}$ est un produit scalaire sur $H^s(\mathbb{R}^d)$. On désigne par $\|\cdot\|_{H^s}$ la norme associée, c'est-à-dire

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2}, \text{ avec } \ u \in H^s(\mathbb{R}^d)$$

$$\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_0, \quad \|u\| = \|u\|_0,$$

où $\widehat{u}$ est la transformée de Fourier de u.

Proposition 1.3. [**Interpolation**] Soit $s_0 \leq s \leq s_1$ trois réels. Pour $u \in H^{s_0}(\mathbb{R}^d) \cup H^{s_1}(\mathbb{R}^d)$ on a $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|u\|_s \leq \|u\|_{s_0}^{(1-\theta)}\|u\|_{s_1}^\theta,$$

où $\theta \in [0,1]$ est défini par $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

Proposition 1.4.

1. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$
2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$

Pour la preuve de cette proposition se référer à (https ://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf).

1.4.2 Trace d'une fonction

Considérons d'abord le demi-espace

$$\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R},\ x_d > 0\}$$

pour laquelle nous avons

$$\partial\Omega = \{(x', 0),\ x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}$$

qui sera identifié à $\mathbb{R}^{d-1}$.

Definition 1.16. Nous définissons la trace d'une fonction par

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$$
$$(\gamma_0 v)(x_1, \cdots, x_{d-1}) = v((x_1, \cdots, x_{d-1}, 0).$$

Definition 1.17. Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$, de frontière bornée. On note

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{v \in L^2(\partial\Omega) : \exists V \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = \gamma_0 V\}$$

l'image de $H^1(\Omega)$ par l'application trace γ_0. Muni de la norme

$$\|v\| = \inf\{\|V\|_{H^1} \text{ où } V \in H^1(\Omega) \text{ est tel que } v = \gamma_0 V\},$$

c'est un espace de Banach.

Théorème 1.7 (**Trace**). *Soit* $s > \frac{1}{2}$ *alors* γ_0 *accepte une unique extension en opérateur linéaire borné*

$$\gamma_0 : H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Pour la preuve voir (https ://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf).

1.4.3 Théorème de plongement

L'objet des théorèmes de plongement de Sobolev est de montrer que si $s > \frac{1}{2}d + k$ alors les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ possèdent des représentants de classe C^k. Avant de démontrer le théorème, pour alléger, nous allons donner deux lemmes.

Lemme 1.4. Soit (u_j) une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \overset{H^s(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} u$$

avec $s > 0$. Alors nous avons aussi la convergence

$$u_j \overset{L^2(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow} u.$$

Lemme 1.5. Soient des fonctions $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$u_j \overset{(C_0^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)}{\longrightarrow} v.$$

Alors nous avons la convergence

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_j \varphi \to \int_{\mathbb{R}^d} v\varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.8 (**Théorème de Sobolev** avec $k = 0$)**.** *Soit $s > \frac{1}{2}d$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors u possède un représentant dans $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ (les fonctions continues et qui s'annulent à l'infini). Nous écrivons cela $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^0(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 1.9 (**Théorème de plongement de Sobolev**)**.** *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s > \frac{1}{2}d + k$. Alors*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^k(\mathbb{R}^d).$$

Remarque 1.4. L'espace $C_0^k(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^k qui s'annulent à l'infini.

Pour la preuve de ce théorème et des deux lemmes ci-dessus se référer à (https ://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf) pour plus de détaille.

Théorème 1.10 (**Lemme de Gronwall : inégalité différentielle**)**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $y : I \mapsto \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.*
Si y vérifie l'inégalité différentielle suivante :

$$y'(t) \leq x(t)y(t), \quad \forall \ \ t \in I,$$

alors on a

$$y(t) \leq y(s) \exp\left(\int_s^t x(\tau)d\tau\right), \quad \forall \ \ t, s \in I, \ \ tq \ t \geqslant s,$$

et

$$y(t) \geqslant y(s) \exp\left(\int_s^t x(\tau)d\tau\right), \quad \forall \ \ t, s \in I, \ \ tq \ t \leq s.$$

Un des outils fondamentaux dans la théorie des équations différentielles est le résultat suivant, qui stipule essentiellement que le résultat du théorème précédente persiste si l'inégalité différentielle est satisfaite sous forme intégrale à condition toutefois que la fonction x soit positive. Bien que son nom usuel soit Lemme de Gronwall, il mérite d'être présenté comme un théorème.

Théorème 1.11 (**Lemme de Gronwall : forme intégrale**)**.** *Soit I un intervalle non vide, $t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ une fonction positive et $C \in \mathbb{R}$ une constante. Si $y : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie, pour un certain $s \in I$, la propriété suivante :*

$$y(t) \leq C + \int_s^t x(\tau)y(\tau)d\tau, \quad \forall \ \ t \in I, \ \ t \geqslant s,$$

alors nous avons l'inégalité

$$y(t) \leq C \exp\left(\int_s^t x(\tau)d\tau\right), \quad \forall \ \ t \in I, \ \ t \geqslant s.$$

A propos de ce mémoire : Nous avons essayé de comprendre et de détailler quelques calculs dans l'article intitulé : A mathematical analysis of tsunami generation in shallow water due to seabed deformation. Nous rappelons que ce papier est écrit par Ighuchi.

Chapitre 2

Le problème des ondes de surface et modèle de tsunami

2.1 Le problème des ondes de surface

2.1.1 Équations générales

Dans cette section, nous rappellerons les bases de la mécanique des fluides. Ainsi nous partirons des équations les plus générales puis nous reprendrons les hypothèses qui nous permettent de simplifier ces équations.

Nous commencerons par écrire l'équation exprimant la loi de conservation de la matière :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{2.1}$$

qui est l'équation de continuité, t représente le temps, ρ la densité du fluide et $\mathbf{u}$ le champ de vitesse.

Ensuite, nous écrivons l'équation décrivant le mouvement d'un fluide visqueux :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right] = -\nabla p - \rho g + \mu \Delta \mathbf{u} + (\varsigma + \frac{\mu}{3})\nabla(div(\mathbf{u})), \tag{2.2}$$

où μ et ς sont les coefficients de viscosité (μ viscosité dynamique en cisaillement et en compression du fluide), g représente la force de gravité et p la pression.

- $\mu \Delta \mathbf{u}$ et $(\varsigma + \frac{\mu}{3})\nabla(div(\mathbf{u}))$: désignent les termes de diffusion visqueuse,
- $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$: est le terme de convection de quantité de mouvement ;
- ∇p : désigne les forces de pression ;
- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$: désigne l'accélération eulérienne du fluide.

Si l'on considère le fluide comme incompressible, ρ est alors constant et ces équations deviennent :

$$div(\mathbf{u}) = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g + \nu \Delta \mathbf{u} \tag{2.4}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique. Cette équation (2.4) est appelée équation de Navier-Stokes.

2.1.2 Écoulements potentiels

Hypothèse et équations

Nous supposons maintenant que le fluide est soumis à un mouvement irrotationnel, qu'il est non visqueux, en plus de l'hypothèse d'incompressibilité. Sous ces conditions le champ de vitesse $\mathbf{u}$ du fluide est un gradient car son rotationnel est nul, c'est-à-dire qu'elle dérive d'un potentiel scalaire $\Phi = \Phi(X, t) : \mathbb{R}^{d+1} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbf{u} = \nabla_{x,z}\Phi, \tag{2.5}$$

où $\nabla_{x,z}$ désigne le gradient pris par rapport à x et à z.
En introduisant ce potentiel dans l'équation (2.3), on constate que celui-ci est régi par l'équation de Laplace :

$$\Delta_X \Phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega(t), \tag{2.6}$$

où Δ_X est le Laplacien pris par rapport à X où $X = (x, z)$, c'est-à-dire,

$$\Delta_X = \Delta + \partial_z^2 \text{ et } \Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \partial_1^2 + \cdots + \partial_d^2.$$

Sous les mêmes hypothèses, les équations du mouvement se réécrivent :

$$\frac{\partial(\nabla_{x,z}\Phi)}{\partial t} + (\nabla_{x,z}\Phi \cdot \nabla)\nabla_{x,z}\Phi = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g. \tag{2.7}$$

Elles peuvent être intégrées en espace :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla_{x,z}\Phi)^2 = -\frac{p - p_0}{\rho} - g(z - h) \quad \text{dans} \quad \Omega(t). \tag{2.8}$$

Cette équation est appelée équation de Bernoulli.

2.1.3 Conditions aux limites

Pour clore ce système d'équations, nous devons donner les conditions aux bords satisfaites par la vitesse au fond et à la surface ; elles sont obtenues en traduisant l'hypothèse physique qu'aucune particule de fluide ne traverse la surface ni ne pénètre le fond. Le domaine considéré comprend la surface libre et une condition sur le fond (Figure1). Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ la variable spatiale horizontale et z la variable spatiale verticale. Nous notons les variables spatiales par $X = (x, z) = (x_1, \cdots, x_d, z)$. Nous allons prendre en compte une onde d'eau dans un espace de $(d + 1)$-dimensions et supposons que le domaine occupé par l'eau au temps t est $\Omega(t)$, la surface de l'eau par $\Gamma(t)$ et le fond par $\Sigma(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= \{X = (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1}; b(x, t) < z < h + \eta(x, t)\}, \\
\Gamma(t) &= \{X = (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1}; z = h + \eta(x, t)\} \\
\Sigma(t) &= \{X = (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1}; z = b(x, t)\}, \text{ où}
\end{aligned}$$

- ► h est la profondeur moyenne de l'eau,
- ► b est la bathymétrie du fond définie par $b : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R} \quad (T > 0)$.

► η est l'élévation de la surface définie par $\eta : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R} \quad (T > 0)$.

Dans ce manuscrit, b est une fonction donnée, tandis que η est l'inconnue. En fait, notre principal intérêt est le comportement de cette fonction η, à savoir la surface de l'eau.

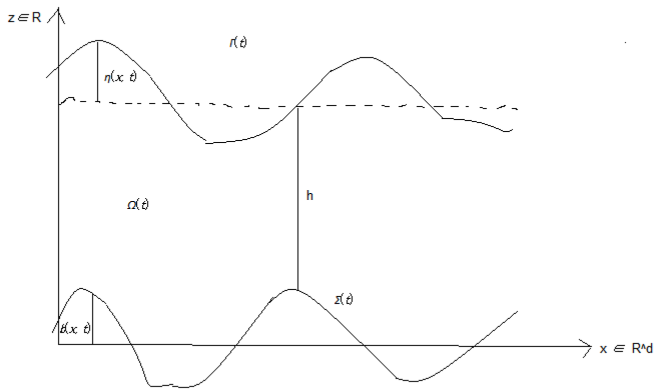

figure1: domaine du fluide

Un moyen simple d'assurer que le domaine fluide est simplement connexe est de supposer la condition suivante :

$$\exists h_{min} > 0, \ \forall (t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad h + \eta - b \geqslant h_{min}.$$

Nous ferons cette hypothèse dans toute la suite du manuscrit.

Condition sur la surface libre

Les conditions aux limites à la surface de l'eau sont données par

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \nabla \Phi \cdot \nabla \eta - \partial_z \Phi = 0 \\ \Phi_t + \dfrac{1}{2} |\nabla_X \Phi|^2 + g\eta = 0 \text{ sur } \ \Gamma(t), \end{cases} \tag{2.9}$$

où $\nabla = (\partial_1, \cdots, \partial_d)^T$ et $\nabla_X = (\partial_1, \cdots, \partial_d, \partial_z)^T$ sont les gradients respectifs par rapport à $x = (x_1, \cdots, x_d)$ et à $X = (x, z)$, et g est la constante gravitationnelle. La première équation est la condition cinématique et la seconde est la restriction de la loi de Bernoulli sur la surface de l'eau.

Condition sur le fond : la condition cinématique sur le fond est donnée par

$$\partial_t b + \nabla \Phi \cdot \nabla b - \partial_z \Phi = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma(t). \tag{2.10}$$

Condition initiale : les conditions initiales sont données par

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \Phi(x, 0) = \Phi_0(x) \text{ à } t = 0. \tag{2.11}$$

Le système (2.6), (2.9) et (2.10) est appelé les équations de base pour le problème des ondes de surface. Nos inconnues sont maintenant la surface η et le potentiel des vitesses Φ. Cependant, Φ est défini dans le domaine fluide $\Omega(t)$ qui dépend de la surface η et qui varie au cours du temps. Cela complique l'analyse mathématique. Un moyen de fixer le domaine est d'utiliser la reformulation suivante.

2.1.4 Reformulation des équations

Nous transformons de manière équivalente le **problème de Cauchy** (2.6), (2.9), (2.10) et (2.11) à un problème à la surface. Pour cela, nous introduisons une nouvelle fonction inconnue définit par

$$\phi(x,t) = \Phi(x, h+\eta(x,t), t) = \Phi|_\Gamma \tag{2.12}$$

qui est la trace du potentiel des vitesses sur la surface libre. Les vitesses verticales et horizontales sur la frontière libre, à savoir

$$Z = \partial_z \Phi\big|_{z=h+\eta} \quad \text{et} \quad v = (\nabla\Phi)\big|_{z=h+\eta}$$

sont définies par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \left(\partial_t \Phi + (\partial_z \Phi)\partial_t \eta\right)|_\Gamma \\ \nabla\phi = \left(\nabla\Phi + \partial_z\Phi\nabla\eta\right)|_\Gamma \\ \partial_z\Phi\big|_{z=h+\eta} = \dfrac{\nabla\eta\cdot\nabla\Phi + \partial_t\eta}{h+|\nabla\eta|^2}. \end{cases} \tag{2.13}$$

La connaissance de la position de la surface, donnée par η, et de la trace du potentiel à la surface donnée par (2.12) déterminent les valeurs du potentiel des vitesses dans tout le fluide. En effet, en utilisant les équations (2.6), (2.10) et (2.12) et en voyant le potentiel Φ comme l'unique solution du problème de Laplace donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta\Phi + \partial_z^2\Phi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Phi = \phi \text{ sur } \Gamma, \\ -\partial_z\Phi + \nabla b\cdot\nabla\Phi = \partial_t b \ \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \tag{2.14}$$

Nous décomposons le potentiel Φ en un composant « au fond fixe » et un composant « au fond mobile » de la façon suivante :

$$\Phi = \Phi^{ff} + \Phi^{fm}.$$

Nous obtenons les deux problèmes de Laplace suivant :

$$\begin{cases} \Delta\Phi^{ff} + \partial_z^2\Phi^{ff} = 0 \ \text{ dans } \Omega(t) \\ \Phi^{ff} = \phi \ \text{ sur } \Gamma \\ \nabla\Phi^{ff}\cdot\nabla b - \partial_z\Phi^{ff} = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma(t). \end{cases} \tag{2.15}$$

et

$$\begin{cases} \Delta\Phi^{fm} + \partial_z^2\Phi^{fm} = 0 \ \text{ dans } \Omega(t) \\ \Phi^{fm} = 0 \ \text{ sur } \Gamma \\ \nabla\Phi^{fm}\cdot\nabla b - \partial_z\Phi^{fm} = \partial_t b \ \text{ sur } \ \Sigma(t). \end{cases} \tag{2.16}$$

Notons ici que $\mathbf{n}$ est le vecteur normal qui pointe vers le haut

$$\mathbf{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}} \times (-\nabla\eta, 1)^T \text{ à la surface} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla b|^2}} \times (\nabla b, -1)^T \ \text{ au fond.} \end{cases}$$

Nos inconnues sont maintenant la trace du potentiel des vitesses ϕ qui est définie sur $\mathbb{R}^d$ et l'élévation de la surface η. Il s'agit alors de trouver deux équations d'évolution sur ϕ et η. Pour décrire cette évolution, nous introduisons les opérateurs linéaires $\Lambda^{DN} = \Lambda^{DN}(\eta, b)$ et $\Lambda^{NN} = \Lambda^{NN}(\eta, b)$ agissant sur ϕ et β respectivement et dépendant de (η, b) et appelé le Dirichlet-Neumann et le Neumann-Neumann associés aux problèmes de Laplace (2.15) et (2.16). Se référer à la définition 3.1 du chapitre 3 pour plus de détails sur la construction des opérateurs de Dirichlet-Neumann et Neumann-Neumann (2.17) et (2.18). Nous introduisons les opérateurs suivants : l'opérateur de Dirichlet-Neumann

$$\Lambda^{DN}(\eta, b) : \quad \phi \mapsto \partial\mathbf{n}\Phi^{ff}|_{\Gamma}, \tag{2.17}$$

où Φ^{ff} satisfait le système (2.15), et l'opérateur de Neumann-Neumann

$$\Lambda^{NN}(\eta, b) : \quad \partial_t b \mapsto \partial\mathbf{n}\Phi^{fm}|_{\Gamma}, \tag{2.18}$$

où Φ^{fm} satisfait le système (2.16), avec $\partial\mathbf{n}\Phi = (\partial_z\Phi - \nabla\Phi \cdot \nabla\eta)\,|_{\Gamma}$. D'après (2.17) et (2.18) on a la relation suivante :

$$\Lambda^{DN}(\eta, b)\phi + \Lambda^{NN}(\eta, b)\beta = (\partial_z\Phi - \nabla\Phi \cdot \nabla\eta)\,|_{\Gamma}.$$

Nous pouvons alors reformuler la première équation de (2.9) en

$$\partial_t\eta = \Lambda^{DN}(\eta, b)\phi + \Lambda^{NN}(\eta, b)\beta. \tag{2.19}$$

Pour obtenir une deuxième équation d'évolution, on utilise les équations de (2.13) que l'on injecte dans la deuxième équation de (2.9). Nous obtenons alors le système d'équations suivant, appelé équations des ondes de surface de l'eau,

$$\begin{cases} \partial_t\eta - \Lambda^{DN}(\eta, b)\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta, b)\beta_\tau = 0 \\ \partial_t\phi + \eta + \dfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \dfrac{1}{2}\left(1 + |\nabla\eta|^2\right)^{-1}\left(\nabla\eta \cdot \nabla\phi + \Lambda^{DN}(\eta, b)\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta, b)\beta_\tau\right)^2 = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Malgré les hypothèses simplificatrices faites sur la nature du fluide, les équations des ondes de surface (2.20) ont une structure particulièrement riche et admettent des solutions aux comportements radicalement différents. Face à cette complexité, une approche intéressante, aussi bien du point de vue de l'analyse mathématique que de celui de la simulation numérique, consiste à rechercher des modèles plus simples permettant de décrire le mouvement des ondes de surface. Pour ce faire, on utilise le principe d'adimensionnalison suivant.

2.1.5 Adimensionnalisation

Introduisons tout d'abord les quantités suivantes :

- h et λ les dimensions caractéristiques pour l'axe z et x respectivement,
- $c = \sqrt{gh}$ la vitesse des ondes caractéristiques.

On définit alors le paramètre δ par $\delta = \dfrac{h}{\lambda}$.

Pour adimensionner les équations (2.6), (2.9), (2.10) et (2.11) on utilise des quantités caractéristiques : soient

$T = \dfrac{\lambda}{c}$ pour le temps, $\mathbf{u} = \dfrac{\lambda}{T} = c$ pour la vitesse horizontale. On introduit alors les quantités adimensionnées de variables dépendantes et indépendantes suivantes :

$$\widetilde{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \widetilde{z} = \frac{z}{h}, \quad \widetilde{t} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda}t, \quad \widetilde{\Phi} = \frac{\Phi}{\lambda\sqrt{gh}}, \quad \widetilde{\eta} = \frac{\eta}{h}, \quad \widetilde{b} = \frac{b}{h}. \tag{2.21}$$

- Pour l'équation $\Delta\Phi + \partial_z^2\Phi = 0$. On a $\dfrac{1}{\lambda^2} \times \lambda \times \sqrt{gh} \times \left(\dfrac{\partial^2}{\partial\widetilde{x}^2}\right)\widetilde{\Phi} + \dfrac{\lambda \times \sqrt{gh}}{h^2} \times \dfrac{\partial^2}{\partial\widetilde{z}^2}\widetilde{\Phi} = 0$

$$\sqrt{gh}\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{x}^2}\right)\widetilde{\Phi} + \frac{\lambda}{h^2}\times\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{z}^2}\widetilde{\Phi}\right) = 0,$$

  On divise l'équation ci-dessus par $\sqrt{gh}$, on a

$$\frac{1}{\lambda}\times\left(\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{x}^2}\right)\widetilde{\Phi} + \frac{\lambda}{h^2}\times\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{z}^2}\widetilde{\Phi} = 0.$$

  Puis en multipliant par $\dfrac{h^2}{\lambda}$ on a

$$\delta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{x}^2}\right)\widetilde{\Phi} + \frac{\partial^2}{\partial\widetilde{z}^2}\widetilde{\Phi} = 0.$$ En laissant tomber le tilde on a $\delta^2\Delta\Phi + \partial_z^2\Phi = 0.$

- Pour l'équation $\partial_t\eta + \nabla\Phi\cdot\nabla\eta - \partial_z\Phi = 0$ on a

$$\frac{h\sqrt{gh}}{\lambda}\cdot\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\eta} + \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda}\times\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\eta} - \frac{\lambda\sqrt{gh}}{h}\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi} = 0.$$

  En divisant l'équation par $\sqrt{gh}$ on a

$$\frac{h}{\lambda}\left(\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\eta} + \frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\eta}\right) - \frac{\lambda}{h}\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi} = 0.$$

  Puis en multipliant l'équation par $\dfrac{h}{\lambda}$ on a

$$\delta^2\left(\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\eta} + \frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}\cdot\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi} = 0.$$

  En omettant le tilde on a le résultat

$$\delta^2\left(\partial_t\eta + \nabla\Phi\cdot\nabla\eta\right) - \partial_z\Phi = 0.$$

- Pour l'équation $\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\Phi} + \dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{\partial}{\partial\widetilde{x}} + \dfrac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\right)\widetilde{\Phi}\right|^2 + g\widetilde{\eta} = 0$. On a

$$\frac{\sqrt{gh}}{\lambda}\lambda\sqrt{gh}\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\Phi} + \frac{\lambda^2 gh}{2}\left|\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}\right|^2 + \frac{\lambda^2 gh}{2h^2}|\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi}|^2 + gh\widetilde{\eta} = 0.$$

  En divisant par gh on a

$$\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\Phi} + \widetilde{\eta} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}\right|^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi}\right)^2 = 0.$$

  En multipliant par $\dfrac{h^2}{\lambda^2}$ on a

$$\delta^2\left(\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\Phi} + \widetilde{\eta} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}\right|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi}\right)^2 = 0.$$

  En omettant le tilde on a le résultat

$$\delta^2\left(\partial_t\Phi + \eta + \frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^2\right) + \frac{1}{2}(\partial_z\Phi)^2 = 0.$$

► Pour l'équation $\partial_t b + \nabla\Phi \cdot \nabla b - \partial_z \Phi = 0$. On a

$$\partial_{\widetilde{t}} b + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \widetilde{\Phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} b - \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \widetilde{\Phi} = 0.$$

$$\frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \partial_{\widetilde{t}} \widetilde{b} + \frac{\sqrt{gh}h}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \widetilde{\Phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \widetilde{b} - \frac{\sqrt{gh}\lambda}{h} \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \widetilde{\Phi} = 0$$

$$\sqrt{gh} \left(\frac{h}{\lambda} \left(\partial_{\widetilde{t}} \widetilde{b} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \widetilde{\Phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \widetilde{b} \right) - \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \widetilde{\Phi} \right) = 0.$$

En divisant par $\sqrt{gh}$ et puis en le multipliant par $\frac{h}{\lambda}$ on a $\delta^2 \left(\partial_{\widetilde{t}} \widetilde{b} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \widetilde{\Phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \widetilde{b} \right) - \frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} \widetilde{\Phi} = 0$. En omettant le tilde on a

$$\delta^2 \left(\partial_t b + \nabla\Phi \cdot \nabla b \right) - \partial_{d+1} \Phi = 0.$$

Après adimensionnement des équations (2.6), (2.9), (2.10) et (2.11) on obtient les équations suivantes :

$$\delta^2 \Delta\Phi + \partial_z^2 \Phi = 0 \text{ dans } \Omega(t) \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} \delta^2 \left(\partial_t \eta + \nabla\Phi \cdot \nabla\eta \right) - \partial_z \Phi = 0 \\ \delta^2 \left(\partial_t \Phi + \eta + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\partial_z \Phi \right)^2 = 0 \ \text{ sur } \Gamma(t) \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\delta^2 \left(\partial_t b + \nabla\Phi \cdot \nabla b \right) - \partial_z \Phi = 0 \text{ sur } \Sigma(t). \tag{2.24}$$

$\eta(x, 0) = \eta_0^\delta(x)$, $\Phi(x, 0) = \Phi_0^\delta(x)$ où

$$\Omega(t) = \left\{ X = (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1};\ b(x, t) < z < 1 + \eta(x, t) \right\},$$
$$\Gamma(t) = \left\{ X = (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1};\ z = 1 + \eta(x, t) \right\}$$
$$\Sigma(t) = \left\{ X = (x, z) \in \mathbb{R}^{d+1};\ z = b(x, t) \right\}.$$

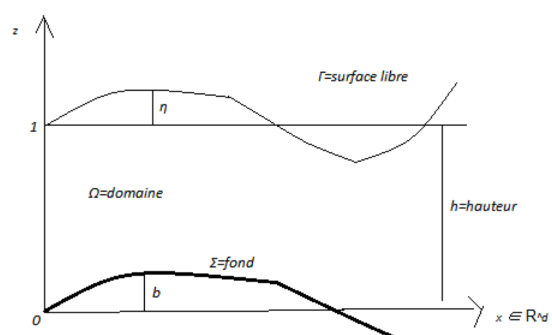

figure 1: Domaine du fluide adimensionné

$$\exists H_{min} > 0,\ \forall X \in \mathbb{R}^d,\ \ 1 + \eta - b \geqslant H_{min},\ \text{avec } H_{min} = \frac{h_{min}}{h} = c_0.$$

Supposons que le fond marin se déforme seulement sur l'intervalle de temps $[0, t_0]$ dans la variable dimensionnelle t, de sorte que la fonction $b = b(x, t)$, qui représente la bathymétrie du fond, peut être écrite sous la forme $b(x, t) = \beta(x, \frac{t}{t_0})$, en posant $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$

$$\beta(x, \tau) = \begin{cases} b_0(x) \text{ pour } \ \tau \leqslant 0 \\ b_1(x) \ \text{ pour } \tau \geqslant 1, \end{cases} \tag{2.25}$$

dans la variable adimensionnelle, où ε est un paramètre adimensionnel défini par

$$\varepsilon = \frac{t_0\sqrt{gh}}{\lambda}. \tag{2.26}$$

Dans cette variable de temps adimensionnelle, nous remarquons que le fond ne se déforme que sur l'intervalle de temps court $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ et que $b_t = \varepsilon^{-1}\beta_\tau$. Puisque nous sommes intéressés à l'étude du comportement asymptotique de la solution lorsque $\delta, \varepsilon \to 0$, on suppose toujours que $0 < \delta, \varepsilon \leq 1$, dans ce qui suit.

En utilisant les équations (2.22), (2.24) et (2.12) nous obtenons le problème de Laplace adimensionné suivant :

$$\begin{cases} \delta^2\Delta\Phi + \partial_z^2\Phi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Phi = \phi \text{ sur } \Gamma, \\ -\partial_z\Phi + \delta^2\nabla b\cdot\nabla\Phi = \beta \ \text{ sur } \Sigma \end{cases} \tag{2.27}$$

Nous obtenons les deux problèmes de Laplace suivant

$$\begin{cases} \delta^2\Delta\Phi^{ff} + \partial_z^2\Phi^{ff} = 0 \ \text{ dans } \Omega(t) \\ \Phi^{ff} = \phi \ \text{ sur } \Gamma \\ \delta^2\nabla\Phi^{ff}\cdot\nabla b - \partial_z\Phi^{ff} = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma(t). \end{cases} \tag{2.28}$$

et

$$\begin{cases} \delta^2\Delta\Phi^{fm} + \partial_z^2\Phi^{fm} = 0 \ \text{ dans } \Omega(t) \\ \Phi^{fm} = 0 \ \text{ sur } \Gamma \\ \delta^2\nabla\Phi^{fm}\cdot\nabla b - \partial_z\Phi^{fm} = \beta \ \text{ sur } \ \Sigma(t). \end{cases} \tag{2.29}$$

On peut également définir un opérateur de Dirichlet-Neumann adimensionné

$$\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta): \quad \phi \mapsto \partial\mathbf{n}\Phi^{ff}|_\Gamma, \tag{2.30}$$

où Φ^{ff} satisfait le système (2.28), et l'opérateur de Neumann-Neumann adimensionné

$$\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta): \quad \partial_t b \mapsto \partial\mathbf{n}\Phi^{fm}|_\Gamma, \tag{2.31}$$

où Φ^{fm} satisfait le système (2.29). Notons que $\partial\mathbf{n}$ est ici la dérivée conormale pointant vers le haut

$$\partial\mathbf{n}\Phi = \delta^{-2}(\partial_z\Phi)(\cdot, 1+\eta(\cdot)) - \nabla\eta\cdot\nabla(\Phi)(\cdot, 1+\eta(\cdot)).$$

$$\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta = \delta^{-2}(\partial_z\Phi)(\cdot, 1+\eta(\cdot)) - \nabla\eta\cdot\nabla(\Phi)(\cdot, 1+\eta(\cdot)).$$
$$\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta = \delta^{-2}\big(\partial_z\Phi - \nabla\eta\cdot\nabla\Phi\big)\big|_\Gamma.$$

Par contre, il résulte de (2.22), (2.24) et (2.12) que Φ satisfait le problème de Laplace (2.27) avec β remplacé par $b_t = \varepsilon^{-1}\beta_\tau$, donc nous avons

$$\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta_\tau = \big(\delta^{-2}(\partial_z\Phi) - \nabla\Phi\cdot\nabla\eta\big)|_{\Gamma(t)} \tag{2.32}$$

Il résulte de la première équation en (2.23) et (2.32) que

$$\partial_t\eta - \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta_\tau = 0.$$

Par adimensionnalisation de la relation (2.13) on a

$$\frac{\lambda\sqrt{gh}}{h}\frac{\partial}{\partial \widetilde{z}}\widetilde{\Phi}|_{\widetilde{z}=1+\widetilde{\eta}} = \frac{\frac{h\sqrt{gh}}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\widetilde{\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\widetilde{\Phi}+\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\eta}\right)}{1+\delta^2|\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\widetilde{\eta}|^2}$$

en divisant par $\sqrt{gh}$ et en multipliant par $\dfrac{h}{\lambda}$ on a la relation suivante

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{z}}\widetilde{\Phi}|_{\widetilde{z}=1+\widetilde{\eta}} = \delta^2\left(1+\delta^2\left|\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\widetilde{\eta}\right|^2\right)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\widetilde{\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\widetilde{\Phi}+\partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\eta}\right).$$

En omettant le tilde on a

$$\partial_z\Phi|_{z=1+\eta} = \delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\Phi+\partial_t\eta).$$

Le système (2.13) devient :

$$\begin{cases}\partial_z\Phi|_\Gamma = \delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau)\\ \nabla\Phi = \nabla\phi-\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau)\nabla\eta\\ \partial_t\Phi = \partial_t\phi-\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\partial_t\eta.\end{cases} \tag{2.33}$$

Injectons (2.33) dans la deuxième équation de (2.23)

$$\begin{aligned}&\delta^2\Bigg(\partial_t\phi-\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\Bigg((\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\\ &\times(\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\Bigg)\Bigg)\\ &+\delta^2(\frac{1}{2}|\nabla\phi-\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\nabla\eta|^2)\\ &+\delta^2\eta+\frac{\delta^2}{2}((\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau))^2=0.\end{aligned}$$

En développant on obtient

$$\begin{aligned}&\delta^2\partial_t\phi-\delta^4(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\Bigg((\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\\ &\times(\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\Bigg)\\ &+\frac{\delta^2}{2}|\nabla\phi|^2-\delta^4((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\\ &+\frac{\delta^6}{2}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)\nabla\eta)^2+\delta^2\eta\\ &+\frac{\delta^4}{2}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)^2=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\delta^4((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)^2\\ &+\frac{\delta^4}{2}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)^2+\delta^2\partial_t\phi+\delta^2\eta+\frac{\delta^2}{2}|\nabla\eta|^2=0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\partial_t\phi+\eta+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2-\frac{\delta^2}{2}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)\phi+\varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta_\tau)^2=0.$$

Les équations des ondes de surface s'adimensionnent alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta_\tau = 0 \\ \partial_t \phi + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \frac{\delta^2}{2}\left(1+\delta^2|\nabla\eta|^2\right)^{-1}\left(\nabla\eta\cdot\nabla\phi + \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta_\tau\right)^2 = 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\eta = \eta_0^\delta, \ \phi = \phi_0^\delta \text{ à } t = 0. \tag{2.35}$$

Où la donnée initiale ϕ_0^δ est déterminée par $\phi_0^\delta = \Phi_0^\delta(\cdot, 1 + \eta_0^\delta(\cdot))$. Le système (2.34) et (2.35) est appelé le **problème de Cauchy**. C'est avec ce système que nous travaillerons dorénavant dans ce mémoire.

D'un point de vue mathématique, ces équations (2.34) sont complètement non linéaires et liées à un problème de surface libre, ce qui rend leur étude délicate. Lannes ([18]) montre le premier résultat d'existence locale. Sa preuve repose sur un schéma de Nash-Moser. Puis, Iguchi ([12]) montre que l'on peut quasi-linéariser et symétriser ces équations et obtient un temps d'existence indépendant de δ dans le cas d'un fond fixe. Dans ([2]), Alvarez-Samaniego et Lannes montrent l'existence locale du système (2.34) dans le cas d'une pression constante à la surface et d'un fond fixe et obtiennent un temps d'existence mais avec un adimensionnement un peu différent de celui de Iguchi. Tous les résultats donnés précédemment font l'hypothèse d'une pression à la surface constante et d'un fond fixe.

Pour finir sur cette partie, notons que nous avons réduit les équations d'Euler à surface libre à une équation à la surface. Nous sommes partis d'une solution d'Euler pour obtenir une solution des équations des ondes de surface de l'eau sans dimension.

2.2 Modèle asymptotique pour les équations des ondes de surface

Le système (2.34) est en général trop compliqué pour étudier la propagation des ondes de surface de l'eau. Nous allons donc le simplifier en supposant que les deux paramètres adimensionnelles ε et δ sont petits. On parle alors de régime asymptotique.

2.2.1 Approximation en eau peu profonde

Lorsque δ est petit, on parle de régime d'eau peu profonde. Ce régime est bien connu des physiciens. Il revient à supposer que la longueur caractéristique de notre phénomène λ est très grande devant la hauteur d'eau caractéristique h. On peut alors simplifier les équations des ondes de surface de l'eau en ne négligeant que les termes d'ordre $O(\delta^2)$.

Nous commençons à donner le développement asymptotique des opérateurs $\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$ et $\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)$ puis étudier formellement le comportement asymptotique de la solution $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ au **problème de Cauchy** (2.34) et (2.35) lorsque $\delta, \varepsilon \to 0$. Nous dérivons également les équations d'eau peu profonde avec des conditions initiales appropriées, dont la solution se rapproche de $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \nabla\phi^{\delta,\varepsilon})$. Enfin, nous analysons ce que l'on appelle condition de signe de Rayleigh-Taylor qui est importante pour la bonne pose du **problème de Cauchy**.

2.2.2 Développement asymptotique de l'opérateur Dirichlet-Neumann(Λ^{DN})

Dans ce qui suit, nous omettons la dépendance du temps t dans la notation.

Cas $\beta_\tau = 0$

Tout d'abord, nous considérons le cas $\beta_\tau = 0$ où le fond marin est fixe dans le temps. On sait que l'opérateur de Dirichlet-Neumann $\Lambda^{DN} = \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$ peut être approximé par l'opérateur différentiel du second ordre jusqu'à l'ordre $O(\delta^2)$. Pour une fonction ϕ donnée sur Γ, on note Φ la solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} \delta^2 \Delta\Phi + \partial_z^2 \Phi = 0 \;\text{ dans } \Omega, \\ \Phi = \phi \;\text{ sur } \Gamma, \\ -\partial_z \Phi + \delta^2 \nabla b \cdot \nabla\Phi = 0 \;\text{ sur } \Sigma \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\int_{b(x)}^{z} \partial_z^2 \Phi(x,y) dy = (\partial_z \Phi)(x,z) - \partial_z \Phi(x, b(x))$$

$$(\partial_z \Phi)(x,z) = \partial_z \Phi(x, b(x)) + \int_{b(x)}^{z} \partial_z^2 \Phi(x,y) dy$$

$$\text{or}, \partial_z \Phi(x, b(x)) = \delta^2 \nabla b(x) \cdot \nabla \Phi(x, b(x)) \text{ et } \partial_z^2 \Phi(x,z) = -\delta^2 \Delta\Phi(x,z)$$

$$\partial_z \Phi(x,z) = \delta^2 \left[\nabla b(x) \cdot \nabla\Phi(x, b(x)) - \int_{b(x)}^{z} \Delta\Phi(x,y) dy \right] \tag{2.37}$$

ce qui implique que $(\partial_z \Phi)(X) = O(\delta^2)$ et que $(\nabla \partial_z \Phi)(X) = O(\delta^2)$ ceci donne la relation

$$(\nabla\Phi)(x,z) = (\nabla\Phi)(x, 1+\eta(x)) + \int_{1+\eta(x)}^{z} (\nabla\partial_z\Phi)(x,y) dy$$

donc,

$$(\nabla\Phi)(X) = (\nabla\Phi)(x, 1+\eta(x)) + O(\delta^2).$$

La condition limite de Dirichlet de la deuxième équation de (2.33) est donnée par

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x) &= (\nabla\Phi)(x, 1+\eta(x)) + (\partial_z\Phi)(x, 1+\eta(x)) \nabla\eta(x) \\ \nabla\phi(x) &= (\nabla\Phi)(x, 1+\eta(x)) + O(\delta^2), \\ \nabla\phi(x) &= (\nabla\Phi)(X) + O(\delta^2). \end{aligned}$$

De façons similaire on obtient

$$\Delta\phi(x) = \Delta\Phi(X) + O(\delta^2).$$

En injectant ces deux dernières équations dans (2.37) nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_z\Phi(x, 1+\eta(x)) &= \delta^2 \nabla b(x) \cdot \nabla\phi(x, b(x)) - \delta^2 \int_{b(x)}^{1+\eta(x)} \Delta\phi(x,y) dy + O(\delta^4) \\ \partial_z\Phi(x, 1+\eta(x)) &= -\delta^2 (1+\eta(x)) \Delta\phi(x) + \delta^2 \nabla \cdot (b(x) \nabla\phi(x)) + O(\delta^4). \end{aligned}$$

On sait que $\nabla\eta(x) \cdot \nabla\phi(x) = \nabla \cdot (\eta(x)\nabla\phi(x)) - \eta(x)\Delta\phi(x)$, et par (2.32) avec $\beta_\tau = 0$, on a

$$\begin{aligned} \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi &= -(1+\eta(x))\Delta\phi(x) + \nabla \cdot (b(x)\nabla\phi(x)) - \nabla \cdot (\eta(x)\nabla\phi(x)) + \eta(x)\Delta\phi(x) + O(\delta^2). \\ \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi &= -\nabla \cdot \big((1+\eta-b)\nabla\phi\big) + O(\delta^2). \end{aligned} \tag{2.38}$$

2.2.3 Développement asymptotique de l'opérateur Neumann-Neumann (Λ^{NN})

Cas $\beta_\tau \neq 0$:

Considérons le cas général où le fond marin peut se déformer avec le temps. Nous procédons au développement de l'opérateur de Neumann-Neumann $\Lambda^{NN} = \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)$ par rapport à δ^2. Pour une fonction donnée β sur Σ, on note Φ la solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} \delta^2 \Delta\Phi + \partial_z^2 \Phi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ -\partial_z \Phi + \delta^2 \nabla b \cdot \nabla\Phi = \delta^2 \beta \text{ sur } \Sigma \end{cases} \tag{2.39}$$

$$(\partial_z \Phi)(x, z) = \partial_z \Phi(x, b(x)) + \int_{b(x)}^{z} \partial_z^2 \Phi(x, y) dy$$

$$\text{or } \partial_z \Phi(x, b(x)) = -\delta^2 \beta(x) + \delta^2 \nabla b(x) \cdot \nabla\Phi(x, b(x)) \text{ et } \partial_z^2 \Phi(x, z) = -\delta^2 (\Delta\Phi(x, z)$$

$$\partial_z \Phi(x, z) = \delta^2 \left[-\beta(x) + \nabla b(x) \cdot \nabla\Phi(x, b(x)) - \int_{b(x)}^{z} \Delta\Phi(x, y) dy \right]. \tag{2.40}$$

ce qui implique que $(\partial_z \Phi)(X) = O(\delta^2)$ et que $(\nabla \partial_z \Phi)(X) = O(\delta^2)$ ceci donne la relation

$$(\nabla\Phi)(x, z) = (\nabla\Phi)(x, 1 + \eta(x)) + \int_{1+\eta(x)}^{z} (\nabla \partial_z \Phi)(x, y) dy \tag{2.41}$$

donc,

$$(\nabla\Phi)(X) = (\nabla\Phi)(x, 1 + \eta(x)) + O(\delta^2).$$

La condition limite de Dirichlet est donnée par $\Phi(x, 1 + \eta(x)) = 0$ sur Γ, donc on a

$$(\nabla\Phi)(x, 1 + \eta(x)) = -(\partial_z \Phi)(x, 1 + \eta(x)) \nabla\eta(x) \tag{2.42}$$

Par conséquent, on a $(\nabla\Phi)(X) = O(\delta^2)$ et aussi $\Delta\Phi(X) = O(\delta^2)$. D'après ces relations on a

$$(\partial_z \Phi)(X) = -\delta^2 \beta(x) + O(\delta^4)$$

lequel on injecte dans (2.42)

$$(\nabla\Phi)(x, 1 + \eta(x)) = \delta^2 \beta(x) \nabla\eta(x) + O(\delta^4).$$

Ainsi, par (2.41) on obtient

$$\nabla\Phi(x, z) = \delta^2 \beta(x) \nabla\eta(x) + \delta^2 (1 + \eta(x) - z) \nabla\beta(x) + O(\delta^4) \text{ et} \tag{2.43}$$

$$\Delta\Phi(x, z) = \delta^2 \nabla \cdot (\beta(x) \nabla\eta(x)) + \delta^2 \nabla\eta(x) \cdot \nabla\beta(x) + \delta^2 \nabla \cdot (1 + \eta(x) - z) \nabla\beta(x) + O(\delta^4).$$

Injectons ces deux dernières équations dans (2.40) on a

$$\begin{aligned}(\partial_z \Phi)(x,z) =& -\delta^2\beta(x) + \delta^2\nabla b(x)\cdot(\delta^2\beta(x)\nabla\eta(x) + \delta^2(1+\eta(x)-b(x))\nabla\beta(x)) \\ & -\delta^2\int_{b(x)}^{z}\left(\delta^2\nabla\cdot(\beta(x)\nabla\eta(x)) + \delta^2\nabla\eta(x)\cdot\nabla\beta(x) + \delta^2(1+\eta(x)-y)\Delta\beta\right)dy + O(\delta^6). \\ (\partial_z \Phi)(x,z) =& -\delta^2\beta(x) + \delta^4\nabla b(x)\cdot(\beta(x)\nabla\eta(x) + (1+\eta(x)-b(x))\nabla\beta(x)) \\ & -\delta^4(z-b(x))(\nabla\cdot(\beta(x)\nabla\eta(x)) + \nabla\eta(x)\cdot\nabla\beta(x)) \\ & -\delta^4\Delta\beta(x)\int_{b(x)}^{z}(1+\eta(x)-y)dy + O(\delta^6)\end{aligned}$$

or, $\displaystyle\int_{b(x)}^{z}(1+\eta(x)-y)dy = -\frac{1}{2}\left[(1+\eta(x)-y)^2\right]_{b(x)}^{z} = -\frac{1}{2}\left[(1+\eta(x)-z)^2 - (1+\eta(x)-b(x))^2\right]$

donc, on a finalement

$$\begin{aligned}(\partial_z \Phi)(x,z) =& -\delta^2\beta(x) + \delta^4\nabla b(x)\cdot[\beta(x)\nabla\eta(x) + (1+\eta(x)-b(x))\nabla\beta(x)] \\ & -\delta^4(z-b(x))(\nabla\cdot(\beta(x)\nabla\eta(x)) + \nabla\eta(x)\cdot\nabla\beta(x)) \\ & +\frac{\delta^4}{2}\left[(1+\eta(x)-z)^2 - (1+\eta(x)-b(x))^2\right]\Delta\beta(x) + O(\delta^6).\end{aligned}$$

On sait que

$$\nabla b\cdot\nabla\Phi = \nabla\cdot(b\nabla\Phi) - b\nabla\cdot\nabla\Phi \text{ et } \nabla\eta\cdot\nabla\Phi = \nabla\cdot(\eta\nabla\Phi) - \eta\nabla\cdot\nabla\Phi.$$

D'après la relation (2.32) avec $\phi = 0$ on a

$$\begin{aligned}\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta =& -\beta + \delta^2\nabla\cdot(b\beta\nabla\eta) - \delta^2 b\nabla\cdot(\beta\nabla\eta) - \delta^2(1+\eta-b)\nabla\cdot(\beta\nabla\eta) \\ & -\delta^2\nabla\cdot(\eta\beta\nabla\eta) + \delta^2\eta\nabla\cdot(\beta\nabla\eta) - \frac{\delta^2}{2}(1+\eta-b)^2\Delta\beta + O(\delta^4) \\ \Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta =& -\beta + \delta^2(\nabla\cdot((b-\eta)\nabla\eta\beta) - \delta^2\nabla\cdot(\beta\nabla\eta) - \frac{\delta^2}{2}\nabla\cdot(1+\eta-b)^2\nabla\beta + O(\delta^4).\end{aligned}$$

$$\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta = -\beta - \delta^2\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta) + O(\delta^4). \tag{2.44}$$

Remarque 2.1. $\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\beta = -\beta + O(\delta^2)$.

En remplaçant (2.38) et (2.44) dans (2.34) on obtient :

$$\begin{cases}\partial_t\eta + \nabla\cdot((1+\eta-b)\nabla\phi) - \dfrac{1}{\varepsilon}\left[\beta_\tau - \delta^2\left(\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta_\tau + \dfrac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_\tau) + O(\delta^2)\right)\right] = 0 \\ \partial_t\phi + \eta + \dfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \dfrac{1}{2}\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\Big(\nabla\eta\cdot\nabla\phi - \nabla\cdot((1+\eta-b)\nabla\phi) \\ \quad -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\left[\beta_\tau - \delta^2\left(\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta_\tau + \dfrac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_\tau) + O(\delta^2)\right)\right]\Big)^2 = 0.\end{cases}$$

Nous scindons les équations (2.34) en deux parties :

D'une part, les équations (2.34) peuvent être approximées par les équations différentielles ordinaires. En posant $\beta = \dfrac{1}{\varepsilon}\beta_\tau$ et la condition sur la surface de l'eau avec $\phi = 0$, on obtient

$$\begin{cases}\partial_t\eta = \dfrac{1}{\varepsilon}\beta_\tau + \dfrac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon+\delta^2) \\ \\ \partial_t\phi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau^2 + \dfrac{1}{\varepsilon^2}O(\varepsilon^2+\delta^4).\end{cases} \tag{2.45}$$

En résolvant ces équations dans les conditions initiales de (2.35), nous obtenons

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \partial_t \eta dt = \int_0^{t/\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}\beta_\tau + \frac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon+\delta^2) \right) d\tau \\ \displaystyle\int_0^t \partial_t \phi dt = \int_0^{t/\varepsilon} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \beta_\tau^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}O(\varepsilon^2+\delta^4) \right) d\tau. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta(x,t) = \eta_0(x) + \beta(x, \frac{t}{\varepsilon}) - b_0(x) + O(\varepsilon+\delta^2) \\ \phi(x,t) = \phi_0(x) + \dfrac{\delta^2}{2\varepsilon}\displaystyle\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \beta_\tau(x,\tau)^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon^2+\delta^4). \end{cases} \tag{2.46}$$

En particulier, sur l'intervalle de temps $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, on obtient

$$\begin{cases} \eta(x,\varepsilon) = \eta_0(x) + (b_1(x) - b_0(x)) + O(\varepsilon+\delta^2) \\ \phi(x,\varepsilon) = \phi_0(x) + \dfrac{\delta^2}{2\varepsilon}\displaystyle\int_0^1 \beta_\tau(x,\tau)^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon^2+\delta^4). \end{cases} \tag{2.47}$$

Passage à la limite

Nous considérons le comportement asymptotique d'une solution $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ au **problème de Cauchy** (2.34) et (2.35) avec la limite

$$\delta, \varepsilon \to 0, \frac{\delta^2}{\varepsilon} \to \sigma. \tag{2.48}$$

D'autre part, notant que $\beta_\tau = 0$ et $b = b_1$ pour $t \geq \varepsilon$, on voit que les équations de (2.34) peuvent être estimées par les équations différentielles partielles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \nabla \cdot ((1+\eta-b_1)\nabla\phi) = O(\delta^2), \\ \partial_t \phi + \eta + \dfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = O(\delta^2). \end{cases} \tag{2.49}$$

Par conséquent, en prenant la limite (2.48) de (2.49) et (2.47) pour $t \geq \varepsilon$, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t \eta^0 + \nabla \cdot ((1+\eta^0-b_1)\nabla\phi^0) = 0, \\ \partial_t \phi^0 + \eta^0 + \dfrac{1}{2}|\nabla\phi^0|^2 = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\eta^0 = \eta_0 + (b_1 - b_0),\ \phi^0 = \phi_0 + \frac{\sigma}{2}\int_0^1 \beta_\tau(\cdot,\tau)^2 d\tau \text{ à } t = 0.$$

Enfin, en posant $\mathbf{u}^0 := \nabla\phi^0$ et en prenant le gradient de la deuxième équation du système ci-dessus, on a les équations de Saint-Venant (Shallow water equation)

$$\begin{cases} \partial_t \eta^0 + \nabla \cdot ((1+\eta^0-b_1)\mathbf{u}^0) = 0 \\ \partial_t \mathbf{u}^0 + (\mathbf{u}^0 \cdot \nabla)\mathbf{u}^0 + \nabla\eta^0 = 0, \end{cases} \tag{2.50}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \eta^0 = \eta_0 + (b_1 - b_0), \\ \mathbf{u}^0 = \nabla\phi_0 + \nabla\left(\dfrac{\sigma}{2}\displaystyle\int_0^1 \beta_\tau(\cdot,\tau)^2 d\tau\right) \ \text{ à } \ t = 0. \end{cases} \tag{2.51}$$

De plus, $\mathbf{u}^0$ satisfait la condition irrotationnelle

$$rot\mathbf{u}^0 = 0, \tag{2.52}$$

où $rot(\mathbf{u})$ est le rotationnel du vecteur $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)^T$.

Ici nous notons que dans le cas où $(\eta_0, \phi_0) = 0$, et en réécrivant (2.50) et (2.51) dans les variables dimensionnelles et en utilisant la relation (2.21), on obtient les équations (1) et (3) :

- Pour la première équation de (2.50) on a

$$\frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \times \frac{1}{h}\partial_t\eta + \lambda \times \frac{1}{\sqrt{gh}}\nabla \cdot \left(\left(1 + \frac{\eta}{h} - \frac{b_1}{h}\right)\mathbf{u}\right) = 0.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \times \frac{1}{h}\partial_t\eta + \nabla \cdot ((h + \eta - b_1)\mathbf{u}) = 0.$$

En divisant cette équation par $\frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \times \frac{1}{h}$ on a $\partial_t\eta + \nabla \cdot ((h + \eta - b_1)\mathbf{u}) = 0$.

- la deuxième équation de (2.50) on a

$$\frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \times \frac{1}{\sqrt{gh}}\partial_t\mathbf{u} + \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \times \frac{1}{\sqrt{gh}}\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{\lambda}{h}\nabla\eta = 0.$$

$$\lambda\left[\frac{1}{gh}(\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) + \frac{1}{h}\nabla\eta\right] = 0.$$

En divisant cette équation par λ et puis en le multipliant par gh on a $\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta = 0$.

$$\begin{cases} \partial_t\eta + \nabla \cdot ((h + \eta - b_1)\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta = 0 \end{cases}$$

- l'équation de (2.51) on a $\frac{1}{h}\eta = \frac{1}{h}(b_1 - b_0)$ en multipliant par h on a $\eta = b_1 - b_0$. On sait que $b(\cdot, t)^2 = \beta(\cdot, \frac{t}{\varepsilon})^2$, $\frac{\lambda^2}{h^2\sqrt{gh}}b(\cdot, t)^2 = \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2\sqrt{gh}}\beta(\cdot, \frac{t}{\varepsilon})^2 \Rightarrow \beta(\cdot, \frac{t}{\varepsilon})^2 = \frac{\varepsilon^2}{h^2}b(\cdot, t)^2$, or, $\tau = t/\varepsilon$ donc $d\tau = \frac{\lambda}{\varepsilon\sqrt{gh}}dt$.

$$\frac{1}{\sqrt{gh}}\mathbf{u} = \lambda\nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{h^2} \times \frac{\lambda}{\varepsilon\sqrt{gh}}b(\cdot, t)^2 dt\right).$$

En multipliant cette équation par $\sqrt{gh}$ on a $\mathbf{u} = \lambda\nabla \cdot \left(\frac{h^2}{2\lambda^2\varepsilon}\int_0^{t_0} \frac{\varepsilon^2}{h^2} \times \frac{\lambda}{\varepsilon}b(\cdot, t)^2 dt\right)$. On obtient les conditions initiales suivantes

$$\mathbf{u} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0} b(\cdot, t)^2 dt\right), \quad \eta = b_1 - b_0.$$

Ainsi, dans les variables dimensionnelles on obtient les équations de Saint-Venant données par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\eta + \nabla \cdot ((h + \eta - b_1)\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta = 0. \end{cases}$$

La dérivation remonte à Airy [1]. Puis, Friedrich [10] a systématiquement dérivé les équations en utilisant un développement de la solution par rapport à δ^2 (voir aussi Lamb [17] et Stoker[23][22]). Une justification mathématiquement rigoureuse de l'approximation des eaux peu profondes pour les ondes de surface de l'eau bidimensionnelles ($d = 1$) sur un fond plat a été donné par Ovsjannikov [20][21] sous la condition aux limites périodique par rapport à la variable spatiale horizontale, puis par Kano et Nishida [15] dans une classe de fonctions analytiques (voir aussi [15][14]. La justification dans les espaces de Sobolev était donnée par Li [19] pour les ondes de surface de l'eau bidimensionnelles sur un fond plat, puis les travaux de Alvarez- Samaniego et Lannes [2] et Iguchi [12] pour les ondes de surface de l'eau dans le cas général ($d = 1$ ou $d = 2$) avec un fond non plat (mais régulier).

2.3 Condition de signe de Rayleigh-Taylor généralisée

Avant de donner notre principal résultat, nous devons analyser une condition de signe de Rayleigh–Taylor généralisée. On sait que la bonne pose du **problème de Cauchy** (2.34)-(2.35) pour les ondes de surface de l'eau peut être rompue à moins qu'une condition de signe de Rayleigh–Taylor généralisée $-\dfrac{\partial p}{\partial N} \geq c_0 > 0$ à la surface de l'eau ait satisfaite, où p est la pression et N est le vecteur normal dirigé vers l'extérieur à la surface de l'eau.

Wu [25][26] a montré que cette condition est toujours valable pour toute surface lisse non auto-sécante dans le cas de profondeur infinie. Dans le cas à fond variable, Lannes [18] a donné une relation entre cette condition et la bathymétrie du fond. Constantin et Strauss [7] ont étudié sur la pression des ondes de Stokes sur un fond plat et ont également prouver que cette condition est valable pour les ondes de Stokes. On mentionne aussi le résultat d'Ebin [9], où un mouvement proche à une rotation rigide d'un fluide idéal incompressible entouré d'une surface libre a été pris en considération. Il a été montré que le **problème de Cauchy** correspondant est mal posé. Dans ce cas, un signe de Rayleigh-Taylor généralisé n'est pas satisfait. On peut penser que le tourbillon brise la condition, même dans le cas irrotationnel, la condition ne tient pas dans une certaine situation. En fait, Iguchi [11] considérait un écoulement irrotationnel d'un fluide idéal incompressible circulant autour d'un obstacle rigide et a montré que si la circulation est plus étrange que la gravité, alors le signe de Rayleigh-Taylor généralisé n'est pas satisfait et le problème est mal posé. Dans ce qui suit, nous considérons cette condition importante dans la limite (2.48).

2.3.1 Équation de Bernoulli

- Dans les variables dimensionnelles, nous avons

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2}|\partial_z \Phi|^2 + \frac{1}{\rho}(p - p_0) + g(z - h) = 0 \text{ dans } \Omega(t) \tag{2.53}$$

où ρ est une densité constante et p_0 est une pression atmosphérique constante. Cette équation est obtenue en intégrant la conservation de mouvement, c'est-à-dire l'équation d'Euler

$$\rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla_X)v) + \nabla_X p + \rho g e_z = 0$$

$$\rho \nabla_X \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2}|\partial_z \Phi|^2 + \frac{1}{\rho}(p - p_0) + g(z - h) \right) = 0$$

où $v = \nabla_X \Phi$ est la vitesse et e_z est le vecteur unitaire dans la direction verticale.

On redimensionne la pression p par $p = p_0 + \rho g h \tilde{p}$.

$$\frac{\sqrt{gh}}{\lambda}\lambda\sqrt{gh}\partial_{\tilde{t}}\widetilde{\Phi} + \frac{gh}{2}|\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}|^2 + \frac{\lambda^2 gh}{h^2}(\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi})^2 + gh\tilde{p} + g(h\widetilde{x}_{n+1} - h) = 0$$

$$gh\left[\partial_{\tilde{t}}\widetilde{\Phi} + \frac{1}{2}|\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\widetilde{\Phi}|^2 + \frac{\lambda^2}{h^2}(\frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{\Phi})^2 + \tilde{p} + (\widetilde{z} - 1)\right] = 0$$

En divisant par gh et en laissant tomber le tilde dans la notation, on obtient

$$\partial_t\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{\delta^{-2}}{2}(\partial_z\Phi)^2 + (z-1) = -p. \tag{2.54}$$

- De plus, dans les variables adimensionnelles, le signe de Rayleigh-Taylor généralisé peut être écrite sous la forme $\underline{\mathbf{a}} \geq c_0 > 0$, où

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{a}} :&= -(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_z p - \delta^2\nabla\eta\cdot\nabla p)|_{\Gamma(t)} \\
&= -(\partial_z p)|_{\Gamma(t)} \\
&= 1 + \left\{\partial_z\left(\partial_t\Phi + \frac{1}{2}\left(|\nabla\Phi|^2 + \delta^{-2}(\partial_z\Phi)^2\right)\right)\right\}|_{\Gamma(t)}.
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{a}} = 1 + (\partial_z\Phi_t + \nabla\Phi\cdot\nabla\partial_z\Phi - (\partial_z\Phi)\Delta\Phi)|_{\Gamma(t)} \tag{2.55}$$

où, nous avons utilisé la relation $(\nabla Q)|_{\Gamma(t)} = \nabla(Q|_{\Gamma(t)}) - (\partial_z Q)|_{\Gamma(t)}\nabla\eta$, sur la condition au bord de la surface de l'eau (2.23) et l'équation de Laplace (2.22).

2.3.2 Comportement asymptotique

Considérons maintenant le comportement asymptotique de cette fonction $\underline{\mathbf{a}}$ dans la limite (2.48), de sorte que nous pouvons supposer $\delta^2 = O(\varepsilon)$. On note que Φ satisfait (2.22), (2.24) et (2.12), et que nous avons (2.25). D'après la relation (2.43) et en posant $\beta(x) = \varepsilon^{-1}\beta_\tau$

$$\nabla\Phi = \nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta - \frac{\delta^2}{\varepsilon}(1+\eta-z)\nabla\beta_\tau + O(\delta^2),$$

et que

$$\begin{aligned}
\partial_z\Phi =& \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau + \delta^2\nabla b\cdot\left(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta - \frac{\delta^2}{\varepsilon}(1+\eta-b)\nabla\beta_\tau\right) - \delta^2(z-b)\left(\nabla\cdot(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta) - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\eta\cdot\nabla\beta_\tau\right) \\
&- \frac{\delta^2}{2}\frac{\delta^2}{\varepsilon}\left((1+\eta-z)^2 - (1+\eta-b)^2\Delta\beta_\tau\right) + O(\delta^4).
\end{aligned}$$

Il résulte que (2.45) devient

$$\begin{cases}
\partial_t\eta = \dfrac{1}{\varepsilon}\beta_\tau + O(1) \\
\partial_t\phi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau^2 + O(1) \\
\nabla\partial_t\phi - \dfrac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\partial_t\eta = O(1),
\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_z \Phi_t|_{\Gamma(t)} =&\partial_t\Big\{ -\delta^2\nabla\cdot(1+\eta-b)\nabla\phi+\beta+\delta^2\nabla\cdot\Big((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta+\frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta\Big)+\delta^2\nabla\phi\cdot\nabla\eta\Big\}\\
=&-\delta^2\nabla\cdot(1+\eta-b)\nabla\phi_t-\delta^2\nabla\cdot(\partial_t\eta-\partial_t b)\nabla\phi+(\frac{\delta}{\varepsilon})^2\beta_{\tau\tau}+\frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\cdot(\partial_t\eta-\partial_t b)\beta_\tau\nabla\eta\\
&+\frac{\delta^4}{\varepsilon}\nabla\cdot(1+\eta-b)\nabla\partial_t\eta\beta_\tau+\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2\nabla\cdot(1+\eta-b)\nabla\eta\beta_{\tau\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2\nabla\cdot(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\\
&+\frac{\delta^4}{\varepsilon}\nabla\cdot(\partial_t\eta-\partial_t b)(1+\eta-b)\nabla\beta_\tau+\delta^2\nabla\partial_t\eta\cdot(\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)-\frac{\delta^4}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\partial_t\eta\cdot\nabla\eta\\
&+\delta^2(\nabla\partial_t\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\partial_t\eta-\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\beta_{\tau\tau}\nabla\eta)\cdot\nabla\eta.
\end{aligned}
$$

Or, $\dfrac{\delta^4}{\varepsilon}\nabla\cdot(1+\eta-b)\nabla\partial_t\eta\beta_\tau=\delta^2\nabla\cdot(1+\eta-b)\nabla\phi_t+O(1),\quad \partial_t\eta-\partial_t b=O(1)$

$$
\frac{\delta^4}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\partial_t\eta\cdot\nabla\eta=\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau\nabla\beta_\tau\cdot\nabla\eta+O(1). \text{ Donc,}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_z\partial_t\Phi|_{\Gamma(t)}=&\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2(1-\delta^2|\nabla\eta|^2)\beta_{\tau\tau}+\frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\cdot\beta_\tau\left((\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)\right)-\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau\nabla\eta\cdot\nabla\beta_\tau\\
&+\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2\nabla\cdot\left((1+\eta-b)\beta_{\tau\tau}\nabla\eta+\frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\right)+O(\delta^2). \text{ Or,}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\Phi\cdot\nabla\partial_z\Phi=&\frac{\delta^2}{\varepsilon}(\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)\cdot\nabla\beta_\tau,\\
\partial_z\Phi\Delta\Phi=&\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\cdot(\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)-\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau\nabla\eta\cdot\nabla\beta_\tau\\
\frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\cdot\beta_\tau((\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta))=&\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\cdot(\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)+\frac{\delta^2}{\varepsilon}(\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)\cdot\nabla\beta_\tau.
\end{aligned}
$$

En mettant ces équations dans (2.55), on obtient

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{a}}=&1+\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2(1-\delta^2|\nabla\eta|^2)\beta_{\tau\tau}+2\frac{\delta^2}{\varepsilon}(\nabla\phi-\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)\cdot\nabla\beta_\tau\\
&+\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2\nabla\cdot\left((1+\eta-b)\beta_{\tau\tau}\nabla\eta+\frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\right)+O(\delta^2).
\end{aligned}\tag{2.56}
$$

D'autre part, compte tenu de (2.46) et (2.48), nous définissons une solution approchée $(\eta^{(0)},\phi^{(0)})$ avec $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$ par

$$
\begin{cases}
\eta^{(0)}(x,\tau)=\eta_0(x)+\beta(x,\tau)-\beta(x,0),\\
\phi^{(0)}(x,\tau)=\phi_0(x)+\dfrac{1}{2}\sigma\displaystyle\int_0^\tau\beta_\tau(x,\tilde{\tau})^2d\tilde{\tau}.
\end{cases}\tag{2.57}
$$

Alors, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,\varepsilon]$, on a la relation suivante :

$$
\eta(x,t)=\eta^{(0)}(x,\frac{t}{\varepsilon})+O(\varepsilon);\ \ \phi(x,t)=\phi^{(0)}(x,\frac{t}{\varepsilon})+O(1).
$$

Prenant ceci et (2.56) en compte, nous définissons une fonction $\underline{\mathbf{a}}^{(0)}=\underline{\mathbf{a}}^{(0)}(x,\tau)$ par

$$
\underline{\mathbf{a}}^{(0)}=\sigma\nabla\cdot\left((1+\eta^{(0)}-\beta)(\nabla\eta^{(0)})\beta_{\tau\tau}+\frac{1}{2}(1+\eta^{(0)}-\beta)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\right)+2\big(\nabla\phi^{(0)}-\sigma\beta_\tau\nabla\eta^{(0)}\big)\cdot\nabla\beta_\tau,\tag{2.58}
$$

où $(\eta^{(0)},\phi^{(0)})$ est la solution approchée définie dans (2.57). Nous notons que cette fonction $\underline{\mathbf{a}}^{(0)}$ est écrite explicitement en fonction des données initiales (η_0,ϕ_0), la bathymétrie du fond β et la constante σ dans la limite (2.58). Alors, par (2.56), on voit que

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{a}}(x,t) =& 1+\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\left(1-\delta^2\left(\left|\nabla\eta^{(0)}(x,\frac{t}{\varepsilon})\right|^2+C\right)\right)\beta_{\tau\tau}\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)\\ &+\sigma\left(\underline{\mathbf{a}}^{(0)}\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)+C\sigma\beta_{\tau\tau}\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)+O(1),\end{aligned} \tag{2.59}$$

où $C>0$ est une constante arbitraire. Par conséquent, la condition de signe de Rayleight-Taylor est satisfaite si les conditions suivantes sont remplies. Ces conditions dépendent des relations entre δ et ε.

Hypothèse 2.1. Il existe des constantes $C, c>0$ telles que, pour tout $(x,\tau)\in\mathbb{R}^d\times]0,1[$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. dans le cas où $\dfrac{\delta}{\varepsilon}\to 0$, aucune condition n'est satisfaite
2. dans le cas où $\dfrac{\delta}{\varepsilon}\to\nu,\ 1+\nu^2\beta_{\tau\tau}(x,\tau)\geqslant c$
3. dans le cas où $\dfrac{\delta}{\varepsilon}\to\infty$ et $\dfrac{\delta^2}{\varepsilon}\to 0,\ \beta_{\tau\tau}(x,\tau)\geqslant 0$
4. dans le cas où $\dfrac{\delta}{\varepsilon}\to\infty$ et $\dfrac{\delta^2}{\varepsilon}\to\sigma,\ \beta_{\tau\tau}(x,\tau)\geqslant 0,\ 1+\sigma(a^{(0)}+C\sigma\beta_{\tau\tau})(x,\tau)\geqslant c.$

D'un point de vue technique, nous imposons également la condition suivante.

Hypothèse 2.2. Pour tout $(x,\tau)\in\mathbb{R}^d\times]0,1[$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. dans le cas où $\dfrac{\delta}{\varepsilon}\to\nu$, aucune condition n'est satisfaite
2. dans le cas où $\dfrac{\delta}{\varepsilon}\to\infty,\ \beta_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\leqslant 0.$

Le théorème suivant est l'un des principaux résultats de ce mémoire et affirme l'existence de la solution du **problème de Cauchy** pour le problème des ondes de surface avec des bornes uniformes de la solution indépendantes de δ et ε sur l'intervalle de temps $[0,\varepsilon]$.

Théorème 2.1. *Soit M_0, $c_0>0$, $r>\dfrac{d}{2}$ et $s>\dfrac{1}{2}(d+9)$. Sous les hypothèses 2.1 et 2.2, il existe des constantes C_0, δ_0, ε_0, $\gamma_0>0$, telles que, pour tout $\delta\in]0,\delta_0]$, $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$, $(\eta_0,\phi_0)\in H^{s+4}$ et b satisfait $\left|\dfrac{\delta^2}{\varepsilon}-\sigma\right|\leqslant\gamma_0$ et*

$$\begin{cases}\|\beta(\tau)\|_{s+\frac{9}{2}}+\|\beta_\tau(\tau)\|_{s+5}+\|\beta_{\tau\tau}(\tau)\|_{s+1}+\|\beta_{\tau\tau\tau}(\tau)\|_{r+2}\leqslant M_0,\\ \|\nabla\phi_0\|_{s+3}+\|\eta_0\|_{s+4}\leqslant M_0, 1+\eta_0(x)-b_0(x)\geqslant c_0 \text{ pour } (x,\tau)\in\mathbb{R}^d\times]0,1[,\end{cases}$$

*le **problème de Cauchy** (2.34)-(2.35) a une solution unique $(\eta,\phi)=(\eta^{\delta,\varepsilon},\phi^{\delta,\varepsilon})$ sur l'intervalle de temps $[0,\varepsilon]$ satisfaisant*

$$\begin{aligned}\left\|\eta^{\delta,\varepsilon}(t)-\eta^{(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\|_{s+2}+\left\|\phi^{\delta,\varepsilon}(t)-\phi^{(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\|_{s+2}&\leqslant C_0\left(\varepsilon+\left|\frac{\delta^2}{\varepsilon}-\sigma\right|\right),\\ \|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(t)\|_{s+2}+\|\eta^{\delta,\varepsilon}(t)\|_{s+3}&\leqslant C_0,\\ 1+\eta^{\delta,\varepsilon}(x,t)-b(x,t)&\geqslant\frac{c_0}{2} \text{ pour } (x,\tau)\in\mathbb{R}^d\times[0,\varepsilon],\end{aligned}$$

où $(\eta^{(0)},\phi^{(0)})$ est la solution approchée dans la variable de temps $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$ défini par (2.57).

Le théorème suivant est un autre résultat principal de ce mémoire et donne une justification mathématiquement rigoureuse de l'approximation en eaux peu profondes pour le problème des ondes de surface.

Une fois que nous avons obtenu ce type de théorème d'existence pour la solution avec des bornes uniformes, en combinant ce résultat d'existence obtenu dans [12] où le cas d'un fond fixe a été donné, on peut facilement considérer la solution $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\phi})$ lorsque les limites $\delta, \varepsilon \to 0$.

Théorème 2.2. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.1, il existe un temps $T > 0$ indépendamment de $\delta \in]0, \delta_0]$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ telle que la solution $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ obtenue dans le théorème 2.1 peut être étendu sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et satisfait*

$$\left\|\eta^{\delta,\varepsilon}(t) - \eta^0(t)\right\|_{s-1} + \left\|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(t) - \boldsymbol{u}^0(t)\right\|_{s-1} \leqslant C_0\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right) \text{ pour } \varepsilon \leqslant t \leqslant T,$$

où $(\eta^0, \boldsymbol{u}^0)$ est une solution unique des équations de Saint-Venant (2.50) sous les conditions initiales (2.51) et $\boldsymbol{u}^0$ satisfait la condition irrotationnelle (2.52).

Chapitre 3

Définition et analyse des opérateurs Λ^{DN}, Λ^{NN}, Λ^{DD} et Λ^{ND} pour l'équation de Laplace dans les espaces de Sobolev

Dans ce chapitre, nous définissons et analysons les opérateurs de Dirichlet-Neumann, Neumann-Neumann et opérateurs associés Λ^{DD} et Λ^{ND} par les équations de Laplace. Nous donnons une définition précise de ces opérateurs et leurs propriétés. Nous étudions la forme des dérivées des opérateurs (c'est à dire des dérivées par rapport à η à la surface). Nous donnons ensuite quelques résultats techniques (estimations de commutateurs) qui serons nécessaire à la résolution des équations des ondes de surface. On donne alors enfin, des estimations des normes des opérateurs, qui sont nettes par rapport à la régularité de l'élévation de la surface par rapport à η et δ.
Tout au long de cette section, le temps t est fixé arbitrairement, de sorte que $\Omega(t)$, $\Gamma(t)$, $\Sigma(t)$, $\eta(x,t)$ et $b(x,t)$ sont simplement désignés respectivement par Ω, Γ, Σ, $\eta(x)$ et $b(x)$.

3.1 Définition

3.1.1 L'équation de Laplace dans le domaine fluide

Le domaine fluide Ω est donné par

$$\Omega := \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, b(x) < z < 1 + \eta(x)\right\}.$$

Introduisons une matrice I_δ de $(d+1)\times(d+1)$ par :

$$I_\delta = \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}, \nabla^\delta = I_\delta \nabla_{X,z} = \left(\partial x, \delta^{-1}\partial z\right)^T, \quad \Delta^\delta = \nabla^\delta \cdot \nabla^\delta = \partial^2 x + \delta^{-2}\partial^2 z \quad \text{pour } d = 1,$$

où E_d est la matrice d'unité $d \times d$, nous transformons le problème de Laplace (2.27) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega \\ \Phi = \phi \;\; \text{sur } \Gamma \\ (\nabla b, -1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = \beta \text{ sur } \Sigma \end{cases} = \begin{cases} \Delta^\delta \Phi = 0 \text{ dans } \;\Omega \\ \Phi = \phi \;\; \text{sur } \Gamma \\ \partial \mathbf{n} \Phi = \beta \text{ sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.1}$$

Notons ici que $\mathbf{n}$ est le vecteur normal qui pointe vers le haut

$$\mathbf{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \eta|^2}} \times (-\nabla \eta, 1)^T, \;\; \text{à la surface} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 + |\nabla b|^2}} \times (\nabla b, -1)^T, \;\;\; \text{au fond} \end{cases}$$

Notons que $\partial \mathbf{n} \Phi$ est ici la dérivée conormale pointant vers le haut $\partial \mathbf{n} \Phi|_{z=b(x)} = I_\delta \mathbf{n} \cdot \nabla^\delta \Phi|_{z=b(x)}$.

3.1.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses appropriées sur η et b, pour toute fonction ϕ sur la surface de l'eau Γ et β sur le fond marin Σ, il existe une unique solution Φ du problème de Laplace donné par*

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = 0 \;\;\; \textit{dans} \;\; \Omega \\ \Phi = \phi \;\;\; , \;\;\;\; \textit{sur } \Gamma \\ (\nabla b, -1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = \beta, \;\; \textit{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{3.2}$$

Démonstration. On cherche une solution au problème de Dirichlet avec conditions aux limites non homogènes, où $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ sont des fonctions données. On rappelle que

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ \phi \in L^2(\partial\Omega) : \exists \Phi \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \gamma(\Phi) = \phi, \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \right\}.$$

On montre que ce problème admet une unique solution (faible) $\Phi \in H^1(\Omega)$. Notons d'abord qu'en raisonnant comme dans le cas homogène, on multiplie l'équation aux dérivées partielles (3.2) par une fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ (pour annuler le terme sur le bord), on obtient

$$\int_\Omega \nabla^\delta \Phi \cdot \nabla^\delta \varphi dX = \int_{\partial\Omega} \beta \varphi dS,$$

via la formule de Green. La formulation variationnelle est

$$\text{Trouver } \Phi \in W, \; \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla^\delta \Phi \cdot \nabla^\delta \varphi dX = \int_\Omega \beta \varphi dS$$
$$W = \left\{ \Phi \in H^1(\Omega) : \gamma_0(\Phi) = \phi \in L^2(\partial\Omega) \right\}$$

et γ_0 est l'application trace. Comme l'espace des solutions n'est pas le même que celui des fonctions φ, alors pour pouvoir utiliser le théorème de Lax-Milgram, on va "symétriser" le problème. Comme Ω est un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, alors l'application trace γ_0 sur $\partial\Omega$ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ est telle que :

$$\gamma_0(\omega) = \phi, \;\; \omega \in H^1(\Omega).$$

En posant $\psi = \Phi - \omega$, le problème ci-dessus se ramène à celui-ci

$$\begin{cases} \Delta^\delta \psi = -\Delta^\delta \omega \ \ \text{dans} \ \ \Omega \\ \psi = 0 \ \ \text{sur} \ \ \Gamma \\ -\partial_n \psi = \partial_n \omega \ \ \text{sur} \ \ \Sigma. \end{cases}$$

Pour établir la formulation variationnelle de ce problème et appliquer les résultats obtenus précédemment, on va raisonner un peu différemment (il faut noter que pour $\omega \in H^1(\Omega)$, on a $\nabla\omega \in L^2(\Omega)$ et donc $\Delta\omega = div(\nabla\omega) \in H^{-1}(\Omega)$ d'où $\Delta\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions). Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \Delta^\delta \psi, \varphi \rangle = -\langle \Delta^\delta \omega, \varphi \rangle$$

c'est-à-dire (en tenant compte de la dérivation au sens des distributions),

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), -\sum_{i=1}^{d} \langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle - \langle \partial_n \omega, \varphi \rangle$$

ou encore (les termes dans les crochets appartiennent à $L^2(\Omega)$),

$$\int_\Omega \nabla^\delta \psi \cdot \nabla^\delta \varphi dX = -\int_\Omega \nabla^\delta \omega \cdot \nabla^\delta \varphi dX + \int_\Sigma (\beta) \varphi dS \ \ \forall \varphi \in \ W.$$

La formulation variationnelle retenue consiste donc à trouver $\psi \in W$ telle que $a(\psi, \varphi) = L(\varphi)$ pour tout $\varphi \in W$, où

$$a(\psi, \varphi) = \int_\Omega \nabla^\delta \psi \cdot \nabla^\delta \varphi dX$$
$$L(\varphi) = \int_\Sigma \beta \varphi dS - \int_\Omega \nabla^\delta \omega \cdot \nabla^\delta \varphi dX.$$

► Montrons que a est continue

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(\psi, \varphi)| \leqslant \left(\int_\Omega |\nabla^\delta \psi|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla^\delta \varphi|^2 \right)^{1/2}$$
$$|a(\psi, \varphi)| \leqslant \|\nabla^\delta \psi\|_{L^2} \|\nabla^\delta \varphi\|_{L^2}$$
$$|a(\psi, \varphi)| \leqslant \|\psi\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}$$
$$|a(\psi, \varphi)| \leqslant \|\psi\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1},$$

d'où la continuité.

► Montrons que la forme a est coercive $\forall \ \ \varphi \in W$

$$a(\varphi, \varphi) = \int_\Omega |\nabla^\delta \varphi|^2 = \|\nabla^\delta \varphi\|_W^2$$
$$a(\varphi, \varphi) \geqslant \|\varphi\|_W^2,$$

d'où la coercitivité. D'après 1 et 2 a est bilinéaire.

► Montrons que L est continue

$$|L(\varphi)| = \left| \int_\Sigma (\beta)\, \varphi dS - \int_\Omega \nabla^\delta \omega \cdot \nabla^\delta \varphi dX \right|$$

$$|L(\varphi)| \leqslant \left(\|\beta\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla^\delta \omega\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla^\delta \varphi\|_{L^2(\Omega)} \right) \leqslant \left(\|\omega\|_{H^1(\Omega)} + \|\beta\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Mais, l'application trace étant continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, il existe C, ne dépendant que de Ω telle que

$$\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

et ainsi

$$|L(\varphi)| \leqslant \left(C\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\beta\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ce qui montre bien la continuité de L.

D'après le théorème de Lax-Milgramm on peut conclure que l'équation admet une unique solution. Comme $\Phi = \psi + \omega$, alors Φ est une solution (faible) du problème proposé. En outre, cette solution est unique

En effet, si $\Phi_1, \Phi_2 \in H^1(\Omega)$ avec $\gamma_0(\Phi_1) = \gamma_0(\Phi_2) = \phi \in L^2(\partial\Omega)$ et $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla^\delta \Phi_1 \cdot \nabla^\delta \varphi dX = \int_\Omega \nabla^\delta \Phi_2 \cdot \nabla^\delta \varphi dX = \int_\Sigma \beta \varphi dS,$$

alors, $\Phi_1 - \Phi_2 \in H_0^1(\Omega)$ et on a

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla^\delta (\Phi_1 - \Phi_2) \cdot \nabla^\delta \varphi dX = \int_\Sigma \beta \varphi dS.$$

Le théorème de Lax-Milgram affirme que ce problème possède une solution unique et comme 0 est solution, alors $\Phi_1 - \Phi_2 = 0$. □

Definition 3.1. La solution Φ du problème (3.1) sera notée $(\phi, \beta)^\hbar$. Utilisons cette solution Φ pour définir les opérateurs linéaires $\Lambda^{DN} = \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$, $\Lambda^{NN} = \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)$, $\Lambda^{DD} = \Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)$ et $\Lambda^{ND} = \Lambda^{ND}(\eta, b, \delta)$.

L'application Dirichlet-Neumann associée au problème de Laplace (2.36) est l'application

$$\Lambda^{DN} : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$\phi \mapsto \partial \mathbf{n}_+ \Phi^{ff}|_\Gamma, \text{ avec } \partial \mathbf{n}_+ \Phi|_\Gamma = (-\nabla\eta, 1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = \partial_z \Phi - \delta^2 \nabla\eta \cdot \nabla\Phi.$$

$$\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi = (-\nabla\eta, 1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = \partial_z \Phi - \delta^2 \nabla\eta \cdot \nabla\Phi.$$

L'application Neumann-Neumann associée au problème de Laplace (2.39) est l'application

$$\Lambda^{NN} : L^2(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$\beta \mapsto \partial \mathbf{n}_+ \Phi^{fm}|_\Gamma = (-\nabla\eta, 1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = \partial_z \Phi - \delta^2 \nabla\eta \cdot \nabla\Phi$$

$$\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta = (-\nabla\eta, 1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = \partial_z \Phi - \delta^2 \nabla\eta \cdot \nabla\Phi.$$

$$\begin{cases} \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta = (-\nabla\eta, 1)^T \cdot I_\delta^2 (\nabla_X \Phi)(\cdot, 1 + \eta(\cdot)) \\ \Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{ND}(\eta, b, \delta)\beta = \Phi(\cdot, b(\cdot)) \end{cases}$$

qui sont respectivement appelés Dirichlet-Neumann (DN), Neumann-Neumann (NN), Neumann-Dirichlet (ND) et Dirichlet-Dirichlet (DD).

Dans ce qui suit, nous écrivons

$$\Lambda_0^{DN} = \Lambda^{DN}(0, 0, \delta), \ \Lambda_0^{NN} = \Lambda^{NN}(0, 0, \delta), \ \Lambda_0^{DD} = \Lambda^{DD}(0, 0, \delta) \text{ et } \Lambda_0^{ND} = \Lambda^{ND}(0, 0, \delta).$$

Remarque 3.1. L'espace $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ est le dual topologique de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

3.1.3 Propriétés des opérateurs

Proposition 3.1. Nous avons

$$\Lambda_0^{DN} = \frac{|D|}{\delta}\tanh(\delta|D|);\ \Lambda_0^{ND} = \frac{\delta}{|D|}\tanh(\delta|D|);\ -\Lambda_0^{NN} = \Lambda_0^{DD} = \frac{1}{\cosh(\delta|D|}$$

Démonstration. Dans le cas $(\eta,\phi)=0$, la solution de (3.1) peut s'écrire explicitement en termes de multiplicateurs de Fourier comme

$$\Phi(\cdot,z) = \frac{\cosh(\delta|D|z)}{\cosh(\delta|D|)}\phi + \frac{\delta\sinh(\delta|D|(1-z))}{|D|\cosh(\delta|D|)}\beta,$$

afin d'obtenir facilement les expressions souhaitées. □

Proposition 3.2. Les opérateurs Λ^{DN} et Λ^{ND} sont symétriques pour le produit scalaire dans L^2 et l'opérateur adjoint de Λ^{NN} dans L^2 est égale à $-\Lambda^{DD}$. Pour tout $\phi,\,\psi\in H^1$ et pour tout $\beta,\gamma\in L^2$, on a

$$(\Lambda^{DN}\phi,\psi) = (\phi,\Lambda^{DN}\psi),\ (\Lambda^{ND}\beta,\gamma) = (\beta,\Lambda^{ND}\gamma),\ (\Lambda^{NN}\beta,\psi) = -(\beta,\Lambda^{DD}\psi).$$

Démonstration. soient $\Phi=(\phi,\beta)^\hbar$ et $\Psi=(\psi,\gamma)^\hbar$. En utilisant les équations (3.1) et en multipliant par une fonction Ψ. Selon la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi dX &= \int_\Omega \big((\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi - \Phi(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)\big)\,dX\\
0 &= \int_{\partial\Omega}((N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi - \Phi(N.I_\delta^2\nabla_X\Psi))dS\\
0 &= (\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta,\psi) - (\phi,\Lambda^{DN}\psi+\Lambda^{NN}\gamma)\\
&\quad + (\beta,\Lambda^{DD}\psi+\Lambda^{ND}\gamma) - (\Lambda^{DD}\phi+\Lambda^{ND}\beta,\gamma)\\
(\phi,\Lambda^{DN}\psi)-(\beta,\Lambda^{DD}\psi)+(\phi,\Lambda^{DD}\gamma)+(\Lambda^{ND}\beta,\gamma) &= (\Lambda^{DN}\phi,\psi)+(\Lambda^{DD}\beta,\psi)+(\beta,\Lambda^{ND}\psi)-(\Lambda^{DD}\phi,\gamma).
\end{aligned}$$

où N est l'unité normale dirigée vers extérieure à la frontière $\partial\Omega$. Dans le calcul ci-dessus, nous avons utilisé la condition aux limites sur le fond Σ. Puisque $\Phi=\phi$, $\Psi=\psi$, $\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi = \Lambda^{DN}\phi$, $\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi = \Lambda^{DN}\psi$ et $dS=\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}dx$ sur Γ. En fixant $(\beta,\gamma)=0$, $(\phi,\psi)=0$ et $(\phi,\gamma)=0$ dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons respectivement les identités souhaitées. □

Lemme 3.1. Pour $\phi\in H^1$ et $\beta\in L^2$, il suit que $(\Lambda^{DN}\phi,\phi) = \|I_\delta\nabla_X\Phi\|^2_{L^2(\Omega)}$ avec $\Phi=(\phi,0)^\hbar$ et que $(\Lambda^{ND}\beta,\beta) = \|I_\delta\nabla_X\Psi\|^2_{L^2(\Omega)}$ avec $\Psi=(0,\beta)^\hbar$.

Démonstration. En prenant Φ dans H^1 et en utilisant la formule de Green et la définition 3.1, nous voyons que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\big(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi\big)\,\Phi dX &= \int_{\partial\Omega}\big(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi\big)\,\Phi dS - \int_\Omega I_\delta\nabla_X\Phi\cdot I_\delta\nabla_X\Phi dX\\
\int_{\partial\Omega}\big(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi\big)\,\Phi dS &= \int_\Omega |I_\delta\nabla_X\Phi|^2 dX\\
(\Lambda^{DN}\phi,\phi) &= \|I_\delta\nabla_X\Phi\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En prenant Ψ dans H^1 et en utilisant la formule de Green et la définition 3.1, nous voyons que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Psi\right) \Psi dX &= \int_{\partial\Omega} \left(N \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Psi\right) \Psi dS - \int_\Omega I_\delta \nabla_X \Psi \cdot I_\delta \nabla_X \Psi dX \\ \int_{\partial\Omega} \left(N \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Psi\right) \Psi dS &= \int_\Omega |I_\delta \nabla_X \Psi|^2 dX \\ (\Lambda^{DN}\beta, \beta) &= \|I_\delta \nabla_X \Psi\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

3.1.4 Dérivées de formes des opérateurs

La linéarisation des équations (2.34) requiert entre autres la linéarisation de Λ^{DN} et Λ^{NN}. En d'autres termes, nous aurons besoin d'une formule explicite des dérivées de formes des opérateurs Λ^{DN} et Λ^{NN} par rapport à η. La dérivée de forme Λ^{DN} a été donnée dans [18] et nous généralisons la formule comme suit :

Théorème 3.2. *Les dérivées au sens de Fréchet de $\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$ et $\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)$ par rapport à η sont de la forme suivante*

$$D_\eta \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)[\widetilde{\eta}]\phi + D_\eta \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)[\widetilde{\eta}]\beta = -\delta^2 \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)(Z\widetilde{\eta}) - \nabla \cdot (v\widetilde{\eta}).$$

$$\begin{cases} Z = (1 + \delta^2 |\nabla\eta|^2)^{-1} \left(\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta + \nabla\eta \cdot \nabla\phi\right) \\ v = \nabla\phi - \delta^2 Z \nabla\eta. \end{cases} \tag{3.3}$$

Démonstration. Prenons ϕ, ψ et $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soient $\Phi = (\phi, \beta)^\hbar$ et $\Psi = (\psi, 0)^\hbar$ les solutions des problèmes de Laplace suivants :

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Phi = \phi \text{ sur } \Gamma \\ (\nabla b, -1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi = \beta \text{ sur } \Sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Psi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Psi = \psi \text{ sur } \Gamma \\ (\nabla b, -1)^T \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Psi = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.4}$$

Ces solutions dépendent non seulement de X mais aussi de η, de sorte que nous les notons également solutions par $\Phi = \Phi(X) = \Phi(X, \eta)$ et $\Psi = \Psi(X) = \Psi(X, \eta)$. Ici, nous notons que

$$\left(D_\eta \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)[\widetilde{\eta}]\phi, \psi\right) = \frac{d}{dh} \left(D\Lambda^{DN}(\eta + h\widetilde{\eta}, b, \delta)\phi, \psi\right)\Big|_{h=0}. \tag{3.5}$$

Par la formule de Green et la proposition 3.2, nous voyons que

$$\begin{aligned}\int_\Omega I_\delta \nabla_X \Phi \cdot I_\delta \nabla_X \Psi dX &= -\int_\Omega (\nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi)\Psi dX + \int_{\partial\Omega} (N \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi)\Psi dS \\ &= (\Lambda^{DN}\phi + \Lambda^{NN}\beta, \psi) + (\beta, \Lambda^{DD}\psi) \\ &= (\Lambda^{DN}\phi, \psi) + (\Lambda^{NN}\beta, \psi) + (\beta, \Lambda^{DD}\psi)\end{aligned}$$

Or, $(\Lambda^{NN}\beta, \psi) + (\beta, \Lambda^{DD}\psi) = 0$

$$\int_\Omega I_\delta \nabla_X \Phi \cdot I_\delta \nabla_X \Psi dX = (\Lambda^{DN}\phi, \psi). \tag{3.6}$$

De sorte que

$$\left(\Lambda^{DN}(\eta+h\widetilde{\eta},b,\delta)\phi,\psi\right)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)}I_\delta\nabla_X\Phi(X,\eta+h\widetilde{\eta})\cdot I_\delta\nabla_X\Psi(X,\eta+h\widetilde{\eta})dz\right)dx.$$

Nous élargissons formellement les solutions $\Phi(X,\eta+h\widetilde{\eta})$ et $\Psi=(X,\eta+h\widetilde{\eta})$ par

$$\begin{cases}\Phi(X,\eta+h\widetilde{\eta})=\Phi(X,\eta)+\Phi_1(X)h+O(h^2)\\ \Psi(X,\eta+h\widetilde{\eta})=\Psi(X,\eta)+\Psi_1(X)h+O(h^2).\end{cases}\tag{3.7}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}\left(D\Lambda^{DN}(\eta+h\widetilde{\eta},b,\delta)\phi,\psi\right)\Big|_{h=0}&=\int_\Omega\left(I_\delta\nabla_X\Phi_1\cdot I_\delta\nabla_X\Psi+I_\delta\nabla_X\Phi\cdot I_\delta\nabla_X\Psi_1\right)dX\\&+\int_{\mathbb{R}^d}\left(I_\delta\nabla_X\Phi\cdot I_\delta\nabla_X\Psi\right)|_\Gamma\widetilde{\eta}dx\\&=J_1+J_2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Il en résulte de la condition aux limites sur la surface de l'eau et du développement (3.7) que

$$\begin{aligned}\phi(x)=&\Phi(x,1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x);\eta+h\widetilde{\eta})\\=&\Phi(x,1+\eta(x);\eta)+h\{(\partial_z\Phi)(x,1+\eta(x);\eta)\widetilde{\eta}(x)+\Phi_1(x,1+\eta(x))\}+O(h^2).\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\Phi_1|_\Gamma=-(\partial_z\Phi)|_\Gamma\widetilde{\eta}$. De même nous avons $\Psi_1|_\Gamma=-(\partial_z\Psi|_\Gamma\widetilde{\eta}$ (voir annexe pour la justification de (3.7)).

En revanche, en prenant la trace du développement de (3.7) sur le fond Σ et en utilisant la définition de l'opérateur Λ^{DD}, nous obtenons :

$$\Lambda^{DD}(\eta+h\widetilde{\eta},b,\delta)\psi=\Lambda^{DD}(\eta,b,\delta)\psi+h\Psi_1|_\Sigma+O(h^2).$$

En dérivant ceci par rapport à h et en utilisant la proposition 2 on voit que

$$\Psi_1|_\Sigma=D_\eta\Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\psi=-D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\psi.$$

Par conséquent, par la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned}J_1=&-\int_\Omega\left(\Phi_1(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)+(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1)\right)dX+\int_{\partial\Omega}\left(\Phi_1(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)+(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1\right)dS\\=&-\int_{\mathbb{R}^d}\left((\partial_z\Phi)|_\Gamma(\Lambda^{DN}\psi)+(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta)(\partial_z\Psi)|_\Gamma\right)\widetilde{\eta}dx-(D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta,\psi).\end{aligned}$$

En revanche compte tenu des résultats

$$(\nabla Q)|_\Gamma=\nabla(Q|_\Gamma)-(\partial_zQ)|_\Gamma\nabla\eta\quad\clubsuit$$

$$J_2=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\nabla\phi\cdot\nabla\psi-(\partial_z\Phi)|_\Gamma\nabla\eta\cdot\nabla\psi-(\partial_z\Psi)|_\Gamma\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\delta^{-2}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)(\partial_z\Psi\partial_z\Phi)|_\Gamma\right)\widetilde{\eta}dx.$$

Ainsi, par les relations

$$\begin{aligned}(\partial_z\Phi)|_\Gamma=&\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta+\nabla\eta\cdot\nabla\phi)=\delta^2Z\\(\partial_z\Psi)|_\Gamma=&\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\psi+\nabla\eta\cdot\nabla\psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a } \ (D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi + D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta, \psi) = &- \int_{\mathbb{R}^d} \delta^2 Z(\Lambda^{DN}\psi)\widetilde{\eta} + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\phi\cdot\nabla\psi\widetilde{\eta} - \int_{\mathbb{R}^d} \delta^2 Z\nabla\eta\cdot\nabla\psi\widetilde{\eta} \\
&- \int_{\mathbb{R}^d} \delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\psi + \nabla\eta\cdot\nabla\psi)(\Lambda^{DN}\phi + \Lambda^{NN}\beta)\widetilde{\eta} \\
&- \int_{\mathbb{R}^d} \delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\psi + \nabla\eta\cdot\nabla\psi)\nabla\eta\cdot\nabla\phi\widetilde{\eta} \\
&+ \delta^2 Z(\Lambda^{DN}\psi + \nabla\eta\cdot\nabla\psi)\widetilde{\eta} \\
(D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi + D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta, \psi) = &\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\phi\cdot\nabla\psi\widetilde{\eta} - \delta^2 Z(\Lambda^{DN}\psi + \nabla\eta\cdot\nabla\psi)\widetilde{\eta})dx.
\end{aligned}$$

D'après la relation (3.3) on a le résultat

$$\Big(D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi + D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta, \psi\Big) = -\big(\delta^2\Lambda^{DN}(Z\widetilde{\eta}) + \nabla\cdot(v\widetilde{\eta}), \psi\big),$$

où nous avons utilisé la propriété symétrique de Λ^{DN} donnée dans la proposition 3.8. Pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, nous obtenons la formule souhaitée. □

Théorème 3.3. *Les dérivées au sens de Fréchet de $\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$ et $\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)$ par rapport à b sont de la forme*

$$D_b\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)[\widetilde{b}]\phi + D_b\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)[\widetilde{b}]\beta = -\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)(\nabla\cdot(w\widetilde{b}))$$

où

$$\begin{cases} W = (1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}\Big(-\beta + \nabla b\cdot\nabla\big(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta\big)\Big) \\ w = \nabla(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta) - \delta^2 W\nabla b \end{cases} \tag{3.9}$$

Démonstration. Pour la démonstration de ce théorème, nous nous référons sur la preuve du théorème précédent. Nous prenons $\phi, \beta, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soient Φ et Ψ les solutions limites du problème (3.4). Puisque nous considérons une variation des applications par rapport à b, nous notons les solutions par

$$\Phi = \Phi(X) = \Phi(X; b) \text{ et } \Psi = \Psi(X) = \Psi(X; b)$$

et les étendre

$$\begin{cases} \Phi(X, b+h\widetilde{b}) = \Phi(X, b) + \Phi_1(X)h + O(h^2) \\ \Psi = (X, b+h\widetilde{b}) = \Psi(X, b) + \Psi_1(X)h + O(h^2) \end{cases} \tag{3.10}$$

Ensuite, à la place de (3.8), nous avons

$$(\Lambda^{DN}(\eta, b+h\widetilde{b}, \delta)\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\int_{b(x)+h\widetilde{b}(x)}^{1+\eta(x)} I_\delta\nabla_X\Phi(X, b+h\widetilde{b})\cdot I_\delta\nabla_X\Psi(X, b+h\widetilde{b})dz\Bigg)dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh}(\Lambda^{DN}(\eta, b+h\widetilde{b}, \delta)\phi, \psi)\big|_{h=0} &= \int_\Omega (I_\delta\nabla_X\Phi_1\cdot I_\delta\nabla_X\Psi + I_\delta\nabla_X\Phi\cdot I_\delta\nabla_X\Psi_1)dX \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d}(I_\delta\nabla_X\Phi\cdot I_\delta\nabla_X\Psi)|_\Sigma\widetilde{b}dx \\
&:= J_1 + J_2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En prenant la trace du développement de (3.10) sur la surface de l'eau Γ et en utilisant la condition limite, nous obtenons $\Phi_1|_\Gamma = \Psi_1|_\Gamma = 0$. En prenant la trace de (3.10) sur le fond Σ et en utilisant la définition de l'opérateur Λ^{DD}, on voit que

$$\begin{aligned}(\Lambda^{DD}(\eta, b+h\widetilde{b}, \delta)\psi)(x) =& \Psi(x, b(x)+h\widetilde{b}(x); b+h\widetilde{b}) \\ =& (\Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)\psi)(x) + h((\partial_z\Psi)(x, b(x); b)\widetilde{b}(x) + \Psi_1(x, b(x))) + O(h^2) \quad \clubsuit\clubsuit\end{aligned}$$

On dérive cette relation par h puis on l'applique sur le fond

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}(\Lambda^{DD}(\eta, b+h\widetilde{b}, \delta)\psi)(x) =& ((\partial_z\Psi)(x, b(x); b)\widetilde{b}(x) + \Psi_1(x, b(x))) \\ D_b\Lambda^{DD}[\widetilde{b}]\psi =& \partial_z\Psi|_\Sigma\widetilde{b} + \Psi_1|_\Sigma \\ D_b\Lambda^{DD}[\widetilde{b}]\psi - \partial_z\Psi|_\Sigma\widetilde{b} =& \Psi_1|_\Sigma \text{ ,or } D_b\Lambda^{DD}[\widetilde{b}]\psi = -(D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}])\psi.\end{aligned}$$

D'après la proposition (3. 3) on a

$$\Psi_1|_\Sigma = -(D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}])\psi - \partial_z\Psi|_\Sigma\widetilde{b}.$$

Donc, par la formule de Green on a

$$J_1 = -\int_\Omega \Phi_1(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi) + (\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1)dX + \int_{\partial\Omega}(\Phi_1(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi) + (N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1)dS$$

En remplaçant $\Psi_1|_\Sigma$ dans J_1 on a

$$J_1 = -(D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}]\beta, \psi) - \int_{\mathbb{R}^d}\beta(\partial_z\Psi)|_\Sigma\widetilde{b}dx.$$

D'autre part, on utilise la relation $\clubsuit$ pour calculer J_2

$$\begin{aligned}J_2 =& -\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla(\Phi|_\Sigma)\cdot\nabla(\Psi|_\Sigma - (\partial_z\Phi)|_\Sigma\nabla b\cdot\nabla(\Psi|_\Sigma) - (\partial_z\Psi)|_\Sigma\nabla b\cdot\nabla(\Phi|_\Sigma) \\ &+ \delta^{-2}(1+\delta^2|\nabla b|^2)(\partial_z\Phi\partial_z\Psi)|_\Sigma)\widetilde{b}dx.\end{aligned}$$

Au vu des relations $\Psi|_\Sigma = \Lambda^{DD}\psi$, $\Phi|_\Sigma = \Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta$ et

$$\begin{cases}(\partial_z\Phi)|_\Sigma = (1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(-\beta + \nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta)) = \delta^2 W \\ (\partial_z\Psi)|_\Sigma) = \delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi))\end{cases}$$

$$\begin{aligned}J_2 =& -\int_{\mathbb{R}^d}\nabla(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta)\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi)\widetilde{b} + \int_{\mathbb{R}^d}\delta^2 W\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi)\widetilde{b} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d}\delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi))\nabla b\cdot(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta)\widetilde{b} - \delta^2 W(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi))\widetilde{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}]\phi, \psi) = J_1 + J_2 =& -(D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}]\beta, \psi) - \int_{\mathbb{R}^d}\beta(\partial_z\Psi)|_\Sigma\widetilde{b}dx - \int_{\mathbb{R}^d}\nabla(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta)\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi)\widetilde{b} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d}\delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi))\nabla b\cdot(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta)\widetilde{b}\end{aligned}$$

$$(D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}]\phi + (D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}]\beta, \psi)) = -\int_{\mathbb{R}^d}\nabla(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta)\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\psi)\widetilde{b} - \delta^2 W(\nabla b\cdot(\Lambda^{DD}\psi))\widetilde{b}dx.$$

Or, $\nabla(\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta) = w + \delta^2 W\nabla b$ et $\Lambda^{DD}\psi = -\Lambda^{NN}\psi$

Ainsi, on a le résultat

$$(D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}]\phi + (D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}]\beta, \psi)) = -(\Lambda^{NN}(\nabla\cdot(w\widetilde{b})), \psi)$$

□

Théorème 3.4. *Les dérivées au sens de Fréchet de $\Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)$ et $\Lambda^{ND}(\eta, b, \delta)$ par rapport à η sont de la forme suivantes*

$$D_n\Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)[\widetilde{\eta}]\phi + D_n\Lambda^{ND}(\eta, b, \delta)[\widetilde{\eta}]\beta = -\delta^2\Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)(Z\widetilde{\eta})$$

où Z est donné par la relation (3.3).

Démonstration. Nous prenons ϕ,β,$\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soient $\Phi = (\phi, \beta)^\hbar$ et $\Psi = (0, \gamma)^\hbar$. Alors, à la place de (3. 5), nous avons d'après la formule de Green

$$\int_\Omega I_\delta\nabla_X\Phi \cdot I_\delta\nabla_X\Psi dX = -\int_\Omega \Phi(\nabla_X \cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)dX + \int_{\partial\Omega} \Phi(N \cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)dS$$

$$\int_\Omega I_\delta\nabla_X\Phi \cdot I_\delta\nabla_X\Psi dX = -(\phi, \Lambda^{NN}\gamma) + (\Lambda^{DD}\phi + \Lambda^{ND}\beta, \gamma) = (\Lambda^{ND}\beta, \gamma) \tag{3.12}$$

De sorte que

$$\left(\Lambda^{ND}(\eta + h\widetilde{\eta}, b, \delta)\beta, \gamma\right) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} I_\delta\nabla_X\Phi(X, \eta + h\widetilde{\eta}) \cdot I_\delta\nabla_X\Psi(X, \eta + h\widetilde{\eta})d_z\right)dx$$

nous élargissons formellement les solutions $\Phi(X, \eta + h\widetilde{\eta})$ et $\Psi = (X, \eta + h\widetilde{\eta})$ par la relation (3.7) on a alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}(\Lambda^{ND}(\eta + h\widetilde{\eta}, b, \delta)\beta, \gamma)|_{h=0} =& \int_\Omega (I_\delta\nabla_X\Phi_1 \cdot I_\delta\nabla_X\Psi + I_\delta\nabla_X\Phi \cdot I_\delta\nabla_X\Psi_1)dX \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} (I_\delta\nabla_X\Phi \cdot I_\delta\nabla_X\Psi)|_\Gamma\widetilde{\eta}dx \\ =& J_1 + J_2.\end{aligned}$$

Il résulte de la condition aux limites de la surface de l'eau et de l'expression (3.7) que

$$\begin{aligned}\phi(x) =&\Phi(x, 1 + \eta(x) + h\widetilde{\eta}(x); \eta + h\widetilde{\eta}) \\ =&\Phi(x, 1 + \eta(x); \eta) + h((\partial_z\Phi)(x, 1 + \eta(x); \eta)\widetilde{\eta}(x) + \Phi_1(x, 1 + \eta(x))) + O(h^2)\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\Phi_1|_\Gamma = -(\partial_z\Phi)|_\Gamma\widetilde{\eta}.$$

De même nous avons

$$\Psi_1|_\Gamma = -(\partial_z\Psi|_\Gamma\widetilde{\eta}.$$

En revanche, en prenant la trace de l'expression (3.7) sur le fond Σ et en utilisant la définition de l'application DD de Λ^{DD}, nous obtenons

$$\Lambda^{ND}(\eta + h\widetilde{\eta}, b, \delta)\gamma = \Lambda^{ND}(\eta, b, \delta)\gamma + h\Psi_1|_\Sigma + O(h^2)$$

$$(\Lambda^{DD}(\eta + h\widetilde{\eta}, b, \delta)\phi + \Lambda^{DD}(\eta + h\widetilde{\eta}, b, \delta)\beta, \gamma)) = \Phi_1|_\Sigma + \Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)\beta + O(h^2)$$

En dérivant ceci par rapport à h et la proposition 2 on voit que

$$\Psi_1|_\Sigma = D_\eta\Lambda^{ND}[\widetilde{\eta}]\gamma.$$

$$\Phi_1|_\Sigma = D_\eta\Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\phi + D_\eta\Lambda^{ND}[\widetilde{\eta}]\beta$$

Par conséquent, par la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned}
J_1 =& -\int_\Omega \Phi_1(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)+(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1)dX\\
&+\int_{\partial\Omega}(\Phi_1(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)+(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1)dS\\
=& -\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_z\Phi)|_\Gamma(\Lambda^{NN}\gamma)+(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta)(\partial_z\Psi)|_\Gamma+\Phi_1|_\Sigma\gamma+\Psi_1|_\Sigma\beta)\widetilde{\eta}dx.
\end{aligned}$$

En revanche compte tenu des résultats ♣

$$J_2=\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla\phi\cdot\nabla\gamma-(\partial_z\Phi)|_\Gamma\nabla\eta\cdot\nabla\gamma-(\partial_z\Psi)|_\Gamma\nabla\eta\cdot\nabla\phi+\delta^{-2}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)(\partial_z\Psi\partial_z\Phi)|_\Gamma)\widetilde{\eta}dx.$$

Ainsi que les relations

$$\begin{cases}
(\partial_z\Phi)|_\Gamma=\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta+\nabla\eta\cdot\nabla\phi)=\delta^2Z\\
(\partial_z\Psi)|_\Gamma=\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\psi+\nabla\eta\cdot\nabla\psi)
\end{cases}$$

$$(D_\eta\Lambda^{ND}[\widetilde{\eta}]\beta,\gamma)-\Phi_1|_\Sigma\gamma-\Psi_1|_\Sigma\beta=-\int_{\mathbb{R}^d}((\partial_z\Phi)|_\Gamma(\Lambda^{NN}\gamma)+(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta)(\partial_z\Psi)|_\Gamma)\widetilde{\eta}+J_2$$

$$(D_\eta\Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\phi+D_\eta\Lambda^{ND}[\widetilde{\eta}]\beta,\gamma)=\int_{\mathbb{R}^d}((\partial_z\Phi)|_\Gamma(\Lambda^{NN}\gamma)+(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta)(\partial_z\Psi)|_\Gamma)\widetilde{\eta}-J_2$$

$$\begin{aligned}
\left(D_\eta\Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\phi+D_\eta\Lambda^{ND}[\widetilde{\eta}]\beta,\gamma\right)=&\delta^2Z(\Lambda^{NN}\gamma)\widetilde{\eta}+\left(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{NN}\beta\right)\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\left(\Lambda^{NN}\gamma+\nabla\eta\cdot\nabla\gamma\right)\widetilde{\eta}\\
&-\delta^2Z\left((\Lambda^{NN}\gamma+\nabla\eta\cdot\nabla\gamma)\widetilde{\eta}\right)+\delta^2Z\nabla\eta\cdot\nabla\gamma\widetilde{\eta}\\
&+\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{NN}\gamma+\nabla\eta\cdot\nabla\gamma)\nabla\eta\cdot\nabla\phi\widetilde{\eta}-(\nabla\phi\cdot\nabla\gamma)\widetilde{\eta}\\
\left(D_\eta\Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\phi+D_\eta\Lambda^{ND}[\widetilde{\eta}]\beta,\gamma\right)=&\delta^2Z(\Lambda^{NN}\gamma)\widetilde{\eta}+\delta^2Z(\nabla\eta\cdot\nabla\gamma)\widetilde{\eta}-(\nabla\phi\cdot\nabla\gamma)\widetilde{\eta}
\end{aligned}$$

D'après cette relation , on pose $v=0$ donc on a $\delta^2Z(\nabla\eta)=\nabla\phi$, or $\Lambda^{NN}=-\Lambda^{DD}$. Ainsi,

$$(D_\eta\Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\phi+D_\eta\Lambda^{ND}[\widetilde{\eta}]\beta,\gamma)=-\delta^2(\Lambda^{DD}(Z\widetilde{\eta}),\gamma)$$

Pour tout $\gamma\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ nous avons le résultat souhaité. □

Théorème 3.5. *Les dérivées au sens de Fréchet de $\Lambda^{DD}(\eta,b,\delta)$ et $\Lambda^{ND}(\eta,b,\delta)$ par rapport à b sont de la forme suivantes :*

$$D_b\Lambda^{DD}(\eta,b,\delta)[\widetilde{b}]\phi+D_b\Lambda^{ND}(\eta,b,\delta)[\widetilde{b}]\beta=\delta^2W\widetilde{b}-\Lambda^{ND}(\eta,b,\delta)(\nabla\cdot(w\widetilde{b})).$$

Où W et w sont donnés par la relation (3.9).

Démonstration. Nous prenons $\phi,\beta,\gamma\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soient $\Phi=(\phi,\beta)^\hbar$ et $\Psi=(0,\gamma)^\hbar$. Nous élargissons formellement les solutions $\Phi(X,b+h\widetilde{b})$ et $\Psi(X,b+h\widetilde{b})$. En utilisant les relations (3.10) et (3.12) et avec le même raisonnement que le théorème précédent.

$$\begin{aligned}
(\Lambda^{ND}(\eta,b+h\widetilde{b},\delta)\gamma)(x)=&\Psi(x,b(x)+h\widetilde{b}(x);b+h\widetilde{b})\\
=&(\Lambda^{ND}(\eta,b,\delta)\gamma)(x)+h((\partial_z\Psi)(x,b(x);b)\widetilde{b}(x)+\Psi_1(x,b(x)))+O(h^2)
\end{aligned}$$

On dérive cette relation par h puis on l'applique sur le fond

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}(\Lambda^{ND}(\eta,b+h\widetilde{b},\delta)\gamma)(x) =&((\partial_z\Psi)(x,b(x);b)\widetilde{b}(x)+\Psi_1(x,b(x)))\\ D_b\Lambda^{ND}[\widetilde{b}]\gamma =&\partial_z\Psi|_\Sigma\widetilde{b}+\Psi_1|_\Sigma\\ D_b\Lambda^{ND}[\widetilde{b}]\gamma-\partial_z\Psi|_\Sigma\widetilde{b} =&\Psi_1|_\Sigma,\end{aligned}$$

De façon analogue on aura la solution pour Φ

$$\begin{aligned}D_b\Lambda^{DD}[\widetilde{b}]\phi+D_b\Lambda^{ND}[\widetilde{b}]\beta =&\partial_z\Phi|_\Sigma\widetilde{b}+\Phi_1|_\Sigma\\ \Phi_1|_\Sigma =&D_b\Lambda^{DD}[\widetilde{b}]\phi+D_b\Lambda^{ND}[\widetilde{b}]\beta-\partial_z\Phi|_\Sigma\widetilde{b}\end{aligned}$$

Sur la surface libre Γ on a $\Phi_1|_\Gamma=\Psi_1|_\Gamma=0$. En utilisant la relation (3.11)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}(\Lambda^{ND}(\eta,b+h\widetilde{b},\delta)\beta,\gamma)|_{h=0} =&\int_\Omega(I_\delta\nabla_X\Phi_1\cdot I_\delta\nabla_X\Psi+I_\delta\nabla_X\Phi\cdot I_\delta\nabla_X\Psi_1)dX\\ &-\int_{\mathbb{R}^d}(I_\delta\nabla_X\Phi\cdot I_\delta\nabla_X\Psi)|_\Gamma\widetilde{\eta}dx\\ =&J_1+J_2\end{aligned}$$

Par conséquent, par la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned}J_1=&-\int_\Omega\Phi_1(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)+(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1)dX+\int_{\partial\Omega}(\Phi_1(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)+(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi_1)dS\\ =&-\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_z\Phi)|_\Gamma(\Lambda^{ND}\gamma)+(\Lambda^{DD}\phi+\Lambda^{ND}\beta)(\partial_z\Psi)|_\Gamma+\Phi_1|_\Sigma\gamma+\Psi_1|_\Sigma\beta)\widetilde{b}dx\end{aligned}$$

En revanche compte tenu des résultats ♣

$$\begin{aligned}J_2=&\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla(\Phi|_\Sigma)\cdot\nabla(\Psi|_\Sigma)-(\partial_z\Phi)|_\Sigma\nabla\eta\cdot\nabla(\Psi|_\Sigma)-(\partial_z\Psi)|_\Sigma\nabla\eta\cdot\nabla(\Phi|_\Sigma)\\ &+\delta^{-2}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)(\partial_z\Psi\partial_z\Phi)|_\Sigma)\widetilde{b}dx\end{aligned}$$

Au vu des relations $\Psi|_\Sigma=\Lambda^{ND}\gamma$, $\Phi|_\Sigma=\Lambda^{DD}\phi+\Lambda^{ND}\beta$ et

$$\begin{cases}(\partial_z\Phi)|_\Sigma=(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(-\beta+\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}\phi+\Lambda^{ND}\beta))=\delta^2W\\ (\partial_z\Psi)|_\Sigma)=\delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma))\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(D_b\Lambda^{ND}[\widetilde{b}]\beta,\gamma)-\Phi_1|_\Sigma\gamma-\Psi_1|_\Sigma\beta=&-\int_{\mathbb{R}^d}((\partial_z\Phi)|_\Gamma(\Lambda^{NN}\gamma)+(\Lambda^{DN}\phi+\Lambda^{ND}\beta)(\partial_z\Psi)|_\Gamma)\widetilde{\eta}+J_2\\ (D_b\Lambda^{DD}[\widetilde{b}]\phi+D_b\Lambda^{ND}[\widetilde{b}]\beta,\gamma)=&\int_{\mathbb{R}^d}((\partial_z\Phi)|_\Sigma\gamma)+(\beta\partial_z\Psi)|_\Sigma)\widetilde{b}-J_2\\ J_2+\int_{\mathbb{R}^d}((\partial_z\Phi)|_\Sigma\gamma)+(\beta\partial_z\Psi)|_\Sigma)\widetilde{b}=&\int_{\mathbb{R}^d}\nabla(\Lambda^{DD}\phi+\Lambda^{ND}\beta)\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma)\widetilde{b}-\int_{\mathbb{R}^d}\delta^2W\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma)\widetilde{b}\\ &-\int_{\mathbb{R}^d}\delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma))\nabla b\cdot(\Lambda^{DD}\phi\\ &+\Lambda^{ND}\beta)\widetilde{b}+\delta^2W(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma))\widetilde{b}\\ &+\int_{\mathbb{R}^d}(\delta^2W\gamma+\beta\delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma))\widetilde{b}\\ J_2+\int_{\mathbb{R}^d}((\partial_z\Phi)|_\Sigma\gamma)+(\beta\partial_z\Psi)|_\Sigma)\widetilde{b}=&-\delta^2W\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma)\widetilde{b}\\ ((\Lambda^{DD}\phi+\Lambda^{ND}\beta)-\delta^2W\nabla b)\cdot\nabla(\Lambda^{ND}\gamma)\widetilde{b}=&w\nabla(\Lambda^{ND}\gamma)\widetilde{b}\end{aligned}$$

Ainsi

$$(D_b\Lambda^{DD}[\widetilde{b}]\phi + D_b\Lambda^{ND}[\widetilde{b}]\beta, \gamma) = (\delta^2 W\widetilde{b} - \Lambda^{ND}(\nabla(w\widetilde{b})), \gamma) \text{ pour tout } \gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

□

En réduisant les équations non linéaires complètes (2.34) à un système d'équations quasi-linéaires, nous aurons également besoin de formules explicites des dérivées du second ordre des opérateurs Λ^{DN} et Λ^{NN} suivants :

Théorème 3.6. *Les dérivées au sens de Fréchet du second ordre de $\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$ et $\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)$ par rapport à η sont de la forme suivante :*

$$\begin{aligned}
D_\eta^2\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)[\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2]\phi + D_\eta^2\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)[\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2]\beta \\
=&\delta^2((\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Delta\phi)\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2) \\
&- \nabla \cdot ((1 + \delta^2|\nabla\eta^2)^{-1}(\Delta\phi)\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2) + \Delta(Z\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2)) \\
&+ \delta^4(\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)((1 + \delta^2|\nabla\eta^2)^{-1}(\widetilde{\eta}_2\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)(Z\widetilde{\eta}_1) \\
&+ \widetilde{\eta}_1\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)(Z\widetilde{\eta}_2) + Z\nabla\eta \cdot \nabla(\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2) - \widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2 Z\Delta \\
&- \nabla \cdot (((1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\widetilde{\eta}_2\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)(Z\widetilde{\eta}_1) + \widetilde{\eta}_1\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)(Z\widetilde{\eta}_2))) \\
&+ Z\nabla\eta \cdot \nabla(\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2) - \widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2 Z\Delta\eta)\nabla\eta)))
\end{aligned}$$

Où Z est donné par la relation (3.3)

Démonstration. D'après le théorème 3.2 on a

$$\begin{aligned}
D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}_1]\phi + D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1]\beta =& - \delta^2\Lambda^{DN}((1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}((\Lambda^{DN}\phi + \Lambda^{NN}\beta + \nabla\eta.\nabla\phi)\widetilde{\eta}_1) \\
&- \nabla \cdot \Big[(\nabla\phi - \delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \Lambda^{NN}\beta + \nabla\eta.\nabla\phi)\nabla\eta\widetilde{\eta}_1)\Big]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

En prenant la dérivée au sens de Fréchet de (3.13) par rapport à η, nous obtenons encore

$$\begin{aligned}
D_\eta^2\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2]\phi + D_\eta^2\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2]\beta =& - \delta^2 D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}](Z\widetilde{\eta}_1) \\
&- \delta^2\Lambda^{DN}\Big[(-2\delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}Z(\nabla\eta \cdot \nabla\widetilde{\eta}_2))\widetilde{\eta}_1 \\
&+ (1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\big[- \delta^2\Lambda^{DN}(Z\widetilde{\eta}_2) \\
&- \nabla \cdot (\nabla\phi - \delta^2 Z\nabla\eta)\widetilde{\eta}_2 + \nabla\widetilde{\eta}_2 \cdot \nabla\phi\big]\widetilde{\eta}_1\Big] \\
&- \nabla \cdot \Big[2\delta^4(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}Z(\nabla\eta \cdot \nabla\widetilde{\eta}_2)\nabla\eta\widetilde{\eta}_1 \\
&- \delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(-\delta^2\Lambda^{DN}(Z\widetilde{\eta}_2) \\
&- \nabla \cdot (\nabla\phi - \delta^2 Z\nabla\eta)\widetilde{\eta}_2 + \nabla\widetilde{\eta}_2 \cdot \nabla\phi)\nabla\eta\widetilde{\eta}_1 - \delta^2 Z\nabla\widetilde{\eta}_2\widetilde{\eta}_1\Big] \quad \text{or,}
\end{aligned}$$

$$\nabla\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2 \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot (\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2\nabla\phi) - \widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2\Delta\phi, \quad \text{avec} \quad \nabla\phi = \delta^2 Z\nabla\eta$$

$$\nabla\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2 \cdot \nabla\phi = \delta^2 Z\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2\Delta\eta + \delta^2 Z\nabla\eta \cdot \nabla(\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2) - \widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2\Delta\phi$$

Ici, nous utilisons à nouveau le théorème 3.2.

$$\begin{aligned}D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}_2](Z\widetilde{\eta}_1) =& -\delta^2\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\widetilde{\eta}_2\Lambda^{DN}(Z\widetilde{\eta}_1)) + \nabla\eta\cdot\nabla Z\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2)\\ &-\Delta(Z\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2) + \delta^2\nabla\cdot((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\widetilde{\eta}_2\Lambda^{DN}(Z\widetilde{\eta}_1)\nabla\eta + \nabla\eta\cdot\nabla(Z\widetilde{\eta}_1\widetilde{\eta}_2)\nabla\eta)).\end{aligned}$$

Ensuite, un simple calcul donne l'identité souhaitée. □

Théorème 3.7. *Les dérivées au sens de Fréchet du second ordre de $\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)$ et $\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)$ par rapport à η et b sont de la forme :*

$$\begin{aligned}&D_\eta D_b\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)[\widetilde{\eta},\widetilde{b}]\phi + D_\eta D_b\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)[\widetilde{\eta},\widetilde{b}]\beta\\ &\quad=\delta^2\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)\nabla\cdot\Big\{\widetilde{b}(\nabla(\Lambda^{DD}(Z\widetilde{\eta}))\\ &\qquad-\delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla\Lambda^{DD}(Z\widetilde{\eta})))\nabla b)\Big\}\\ &\qquad+\delta^2\Lambda^{DN}(\widetilde{\eta}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\Lambda^{NN}\nabla\cdot(w\widetilde{b}))\\ &\qquad-\delta^2\nabla\cdot(\widetilde{\eta}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{NN}\nabla\cdot(w\widetilde{b}))\nabla\eta),\end{aligned}$$

où Z et w sont donnés respectivement par (3.3) *et* (3.9).

Démonstration. En prenant la dérivée de (3.13) par rapport à b, on a :

$$\begin{aligned}&D_\eta D_b\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)[\widetilde{\eta},\widetilde{b}]\phi + D_\eta D_b\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)[\widetilde{\eta},\widetilde{b}]\beta\\ &\quad=-\delta^2 D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}](Z\widetilde{\eta}) - \delta^2\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\times(D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}]\phi + D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}]\beta)\widetilde{\eta})\\ &\qquad-\nabla\cdot\Big\{(-\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}]\phi + D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}]\beta)\nabla\eta)\widetilde{\eta}\Big\}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 3.5 et en remplaçant ϕ par $Z\widetilde{\eta}$ et $\beta=0$ on a,

$$w = \nabla(\Lambda^{DD}(Z\widetilde{\eta})) - \delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}(Z\widetilde{\eta})))\nabla b$$

$$D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}](Z\widetilde{\eta}) = -\Lambda^{NN}(\nabla\cdot(w\widetilde{b}))$$

$$\begin{aligned}&D_\eta D_b\Lambda^{DN}(\eta,b,\delta)[\widetilde{\eta},\widetilde{b}]\phi + D_\eta D_b\Lambda^{NN}(\eta,b,\delta)[\widetilde{\eta},\widetilde{b}]\beta\\ &\quad=+\delta^2\Lambda^{NN}\nabla\cdot\Big\{b\nabla(\Lambda^{DD}(Z\widetilde{\eta})) - \delta^2(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\nabla b\cdot\nabla(\Lambda^{DD}(Z\widetilde{\eta})))\nabla b\Big\}\\ &\quad+\delta^2\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\Lambda^{NN}(\nabla\cdot(w\widetilde{b}))\widetilde{\eta})\\ &\quad-\delta^2\nabla\cdot\Big\{\widetilde{\eta}(1+\delta^2|\nabla b|^2)^{-1}(\Lambda^{NN}(\nabla\cdot(w\widetilde{b})))\nabla\eta\Big\}.\end{aligned}$$

□

3.2 Analyse des opérateurs

Dans cette section, nous préparons des estimations elliptiques de la solution, en notant en particulier la dépendance de δ et la régularité de η. Pour cela, il conviendrait de transformer le problème (3.1) sur la région d'eau Ω dans un problème de domaine simple fixe $\Omega_0 := \mathbb{R}^d\times]0,1[$ en utilisant un difféomorphisme $\Theta = (\Theta_1,\cdots,\Theta_d,\Theta_z) : \overline{\Omega}_0 \to \overline{\Omega}$, qui est conforme aux directions tangentielles et normales sur la frontière.

3.2.1 Transformation de l'équation de Laplace

Nous définirons un tel difféomorphisme comme suit. On prend les fonctions $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d, \theta_z)$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \theta_j(x,0) = \theta_j(x,1) = 0, \\ \partial_z\theta_j(x,0) = -\nabla b(x), \partial_z\theta_j(x,1) = -\nabla\eta(x) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant d \\ \theta_z(x,0) = b(x), \quad \theta_z(x,1) = \eta(x) \\ \partial_z\theta_z(x,0) = \partial_z\theta_z(x,1) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

et le difféomorphisme est défini par

$$\begin{cases} \Theta_j(X) = x_j + \delta^2\theta_j(X) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant d, \\ \Theta_z(X) = z + \theta_z(X) \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial X} = \begin{pmatrix} E_d + \delta^2 \dfrac{\partial(\theta_1, \cdots, \theta_d)}{\partial(x_1, \cdots ., x_d)} & \delta^2\partial_z(\theta_1, \cdots, \theta_d)^T \\ (\nabla\theta_z)^T & 1 + \partial_z\theta_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Theta(x,0) = (x, b(x)), \quad \Theta(x,1) = (x, 1 + \eta(x)), \\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial X}(x,0) = \begin{pmatrix} E_d & -\delta^2\nabla b(x) \\ (\nabla b(x))^T & 1 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial X}(x,1) = \begin{pmatrix} E_d & -\delta^2\nabla\eta(x) \\ (\nabla\eta(x))^T & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nous posons $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$

$$\begin{aligned} P &:= \det\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right) I_\delta^{-1} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^{-1} I_\delta^2 \left(\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^{-1}\right)^T I_\delta^{-1} \\ &:= \det\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right) \left(\left(I_\delta^{-1}\frac{\partial\Theta}{\partial X} I_\delta\right)^T \left(I_\delta^{-1}\frac{\partial\Theta}{\partial X} I_\delta\right)\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$I_\delta^{-1}\frac{\partial\Theta}{\partial X} I_\delta = \begin{pmatrix} E_d + \delta^2 \dfrac{\partial(\theta_1, \cdots, \theta_d)}{\partial(x_1, \cdots, x_d)} & \delta\partial_z(\theta_1, \cdots, \theta_d)^T \\ \delta(\nabla\theta_z)^T & 1 + \partial_z\theta_z \end{pmatrix}$$

$$\left(I_\delta^{-1}\frac{\partial\Theta}{\partial X} I_\delta\right)^T = \begin{pmatrix} E_d + \delta^2 \dfrac{\partial(\theta_1, \cdots, \theta_d)}{\partial(x_1, \cdots, x_d)} & \delta(\nabla\theta_z)^T \\ \delta\partial_z(\theta_1, \cdots, \theta_d)^T & 1 + \partial_z\theta_z \end{pmatrix}$$

Sur la surface libre $z = 1$, on a $\det\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial X}\right) = 1 + \delta^2|\nabla\eta|^2$

$$P = 1 + \delta^2|\nabla\eta|^2 \left(\begin{pmatrix} E_d & \delta\nabla\eta \\ -\delta(\nabla\eta)^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_d & -\delta\nabla\eta \\ \delta(\nabla\eta)^T & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$P = 1 + \delta^2|\nabla\eta|^2 \begin{pmatrix} E_d + \delta^2(\nabla\eta)^T(\nabla\eta) & 0 \\ 0 & 1 + \delta^2|\nabla\eta|^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$P = \frac{1 + \delta^2|\nabla\eta|^2}{(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)(E_d + \delta^2(\nabla\eta)^T(\nabla\eta))} \begin{pmatrix} 1 + \delta^2|\nabla\eta|^2 & 0 \\ 0 & E_d + \delta^2(\nabla\eta)^T(\nabla\eta) \end{pmatrix}$$

Sur le fond $z = 0$, on a

$$P(x,0) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P(x,1) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Ce qui signifie que le difféomorphisme Θ est conforme dans la direction tangentielle et normale sur la frontière, de sorte que la condition aux limites de Neumann sur le fond est à nouveau transformée avec un vecteur normal très simple $N = (0, \cdots, 0, -1)^T$.

En introduisant $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$, il est facile de voire que le problème de Laplace (3.1) satisfait par Φ se transforme en un problème elliptique sur Ω_0 pour $\widetilde{\Phi}$:

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} = 0 \ \text{ dans } \ \Omega_0 \\ \widetilde{\Phi} = \phi \ \text{ sur } \ \Gamma_0 \\ -\delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Phi} = \beta \ \text{ sur } \ \Sigma_0, \end{cases} \tag{3.18}$$

où P est une matrice symétrique définie positive ne dépendant que du difféomorphisme choisi et Γ_0 et Σ_0 sont les bords à la surface libre et la bathymétrie du fond de Ω_0. De plus, on a

$$\begin{cases} \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta = \delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot, 1) \\ \Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{ND}(\eta, b, \delta)\beta = \widetilde{\Phi}(\cdot, 0). \end{cases} \tag{3.19}$$

Où

$$\Omega_0 = \left\{X = (x,z) \in \mathbb{R}^d \times]0,1[; 0 < z < 1\right\},$$
$$\Gamma_0 = \left\{X = (x,z) \in \mathbb{R}^d \times]0,1[; z = 1\right\},$$
$$\Sigma_0 = \left\{X = (x,z) \in \mathbb{R}^d \times]0,1[; z = 0\right\}.$$

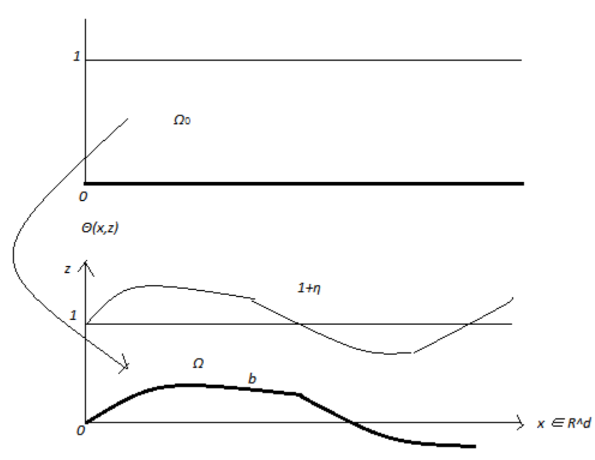

Figure 3: Domaine du fluide redressé par

Nous imposerons les conditions suivantes à la surface de l'eau et au fond.

Hypothèse 3.1.

(A1) : Il existe un C^1-difféomorphisme $\Theta : \overline{\Omega}_0 \to \overline{\Omega}$ satisfaisant (3.14), (3.15) et les conditions

$$\det\left(\frac{\partial \Theta}{\partial X}(X)\right) \geqslant c > 0 \quad \text{et} \quad |\nabla_X \theta(X)| \leqslant M \quad \text{pour } X \in \Omega_0.$$

(A2) : $\|\nabla_X \theta(\cdot, z)\|_q \leqslant M$ pour $0 \leqslant z \leqslant 1$.

(A3) : $\|J^{q+\frac{1}{2}} \nabla_X \ \theta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant M$.

(A4) : $\|\nabla_X \left(D_{(\eta,b)}\right) \theta[\widetilde{\eta}, \widetilde{b}])(\cdot, z)\|_{\tilde{s}} + \|J^{\tilde{s}+\frac{1}{2}} \nabla_X (D_(\eta, b)\theta[\widetilde{\eta}, \widetilde{b}])\|_{L^2(\Omega_0} \leqslant M(\|\widetilde{\eta}\|_{\tilde{s}+1} + \|\widetilde{b}\|_{\tilde{s}+1})$ pour $0 \leqslant z \leqslant 1$, $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ et θ dépend linéairement de (η, b).

La construction d'un difféomorphisme Θ satisfaisant les conditions ci-dessus a été donnée dans [12]. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 3.3. Soient $r > \dfrac{1}{2}d$ et c_1, M_1 et on suppose que $\eta, b \in H^{1+r}$ satisfait les conditions

$$\|\eta\|_{1+r} + \|b\|_{1+r} \leqslant M_1, \quad 1 + \eta(x) - b(x) \geqslant c_1 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors, il existe une constante $\delta_1 = \delta_1(M_1, c_1, r) > 0$ pour tout $\delta \in (0, \delta_1)$, nous pouvons construire un difféomorphisme Θ satisfaisant les conditions dans (A1). De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{cases} \|J^s \nabla_X \theta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C_1(\|\eta\|_{s+\frac{1}{2}} + \|b\|_{s+\frac{1}{2}}) \\ \sup \|\partial_z^k \theta(., z)\|_s \leqslant C_2(\|\eta\|_{s+k} + \|b\|_{s+k}) \end{cases} \tag{3.20}$$

où $C_1 = C_1(c_1)$ et $C_2 = C_2(c_1, k) > 0$.

Dans le cas où η et b dépendent aussi du temps, pour tout $l \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{cases} \|J^s \nabla_X \partial_t^l \theta(t)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C_1 \left(\|\partial_t^l \eta(t)\|_{s+\frac{1}{2}} + \|\partial_t^l b(t\|_{s+\frac{1}{2}}\right) \\ \sup \|\partial_z^k \partial_t^l \theta(., z, t)\|_s \leqslant C_2 \left(\|\partial_t^l \eta(t)\|_{s+k} + \|\partial_t^l b(t\|_{s+k}\right). \end{cases} \tag{3.21}$$

Nous allons donner des estimations elliptiques pour (3.18) dans les espaces de Sobolev. Bien que la théorie des équations elliptiques pourrait fournir une estimation de la solution, par exemple l'estimation de la solution dépend fortement du paramètre δ et ne donne pas une borne uniforme de la solution par rapport au petit paramètre δ. Par conséquent, nous allons effectuer une estimation de la solution avec un soin particulier sur la dépendance du paramètre δ et sur la régularité de η. Les six lemmes suivants étaient de légères modifications de ceux donnés dans [12].

Lemme 3.2. Sous l'hypothèse (A1), il existe une constante $C = C(M, c) \geqslant 1$ indépendante de δ telle que

$$C^{-1} \|I_\delta \nabla_X \Phi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \|I_\delta \nabla_X \Phi\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$.

Le lemme suivant est l'une des parties cruciales de ce mémoire et conduit à des estimations uniformes de l'opérateur Λ^{DN}.

Lemme 3.3. Sous l'hypothèse (A1), il existe une constante $C = C(M, c) \geqslant 1$ indépendante de δ telle que, pour tout $\phi \in H^1$, on a

$$C^{-1}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|^2 \leqslant (\Lambda^{DN}\phi, \phi) \leqslant C\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|^2.$$

Remarque 3.2. Le point le plus important du lemme ci-dessus est que $(\Lambda^{DN}\phi, \phi)$ est équivalent à $\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|^2$ uniformément par rapport à δ.

Lemme 3.4. Soit $r > \dfrac{1}{2}d$, il existe une constante $C = C(r) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\left\|\left[(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{a}}\right]u\right\| \leqslant C\left\|\nabla\underline{\mathbf{a}}\right\|_r \|u\| \;\; ; \;\; \left\|\left[(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}, \underline{\mathbf{a}}\right]u\right\|_r \leqslant C\left\|\nabla\underline{\mathbf{a}}\right\|_r \|u\|_r .$$

Lemme 3.5. Soit $s \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s \leqslant \min\{\|\nabla\phi\|_s, \delta^{-\frac{1}{2}}\|\phi\|_{s+\frac{1}{2}}\}, \quad \|\nabla\phi\|_s \leqslant \sqrt{2(1+\delta)}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{s+\frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.6. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $r > \dfrac{1}{2}d$, il existe une constante $C = C(s, r) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(\phi\psi)\|_s \leqslant C\left(\|\phi\|_r\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\psi\|_s + \|\phi\|_s\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\psi\|_r + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s\|\psi\|_r + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_r\|\psi\|_s\right).$$

Lemme 3.7. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ *et* $r > \dfrac{1}{2}d$, il existe une constante $C = C(s, r) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}[J^s, \psi]\nabla\phi\| \leqslant C\left(\|\nabla\psi\|_{r+1}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s + \|\nabla\psi\|_s\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{r+1}\right).$$

Lemme 3.8. Pour toute fonction $\widetilde{\Phi}$ définie sur Ω_0 on a $\left\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi}(\cdot, 0)\right\| \leqslant \left\|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\right\|_{L^2(\Omega_0)}$.

Démonstration. Nous prenons $\psi \in H^0$ arbitrairement et $\widetilde{\Psi}$ défini par $\widetilde{\Psi}(\cdot, z) = \dfrac{\cosh(\delta|D|(1-z))}{\cosh(\delta|D|)}\psi$

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta^2\nabla_X\widetilde{\Psi} = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega_0 \\ \partial_z\widetilde{\Psi} = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_0 \\ \widetilde{\Psi} = \psi \;\; \text{sur} \;\; \Sigma_0 \end{cases}$$

Alors, on a

$$-\delta^{-2}\partial_z\widetilde{\Psi}(\cdot, 0) = \Lambda_0^{DN}\psi$$

D'après la formule de Green nous voyons que

$$\begin{aligned} \left|(\Lambda_0^{DN}\widetilde{\Phi}, \psi)\right| &= \left|\left(\widetilde{\Phi}(\cdot, 0), \Lambda_0^{DN}\psi\right)\right|. \\ \left|\int_{\Omega_0}(\nabla_X \cdot I_\delta^2\nabla_X\widetilde{\Psi})\widetilde{\Phi}dX\right| &= \left|-\int_{\Omega_0} I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi} \cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}dX\right| + \left|\int_{\Sigma_0}\widetilde{\Phi}(N \cdot I_\delta^2\nabla_X\widetilde{\Psi})dS\right| = 0 \\ \left|\left(\Lambda_0^{DN}\widetilde{\Phi}(\cdot, 0), \psi\right)\right| &= \left|\int_{\Omega_0} I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi} \cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}dX\right| \\ &\leqslant \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\|(\Lambda_0^{DN})^{-\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &= \|I_\delta\nabla_X((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)}\|\psi\| \\ \|(\Lambda_0^{DN}\widetilde{\Phi}(\cdot, 0)\| &\leqslant \|I_\delta\nabla_X((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Si nous remplaçons $(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi}$ par $\widetilde{\Phi}$ dans cette inégalité on obtient le résultat. $\square$

3.2.2 Préliminaires

Dans cette sous-section, nous donnons quelques lemmes utiles pour prouver des estimations elliptiques de la solution.

Nous considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} = \nabla_X \cdot I_\delta F + f \text{ dans } \Omega_0, \\ \widetilde{\Phi} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ -\delta^{-2} \partial_z \widetilde{\Phi} = \beta + (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} \gamma \text{ sur } \Sigma_0, \end{cases} \tag{3.22}$$

où P est la matrice donnée par (3.16).

Lemme 3.9. Sous l'hypothèse (A1), il existe une constante $C = C(M, c) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.22) avec $F_{d+1}(\cdot, 0) = 0$ satisfait

$$\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C(\|F\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{-1} f\|_{L^2(\Omega_0)} + \delta\|\beta\| + \|\gamma\|).$$

Démonstration. Prenons le produit scalaire de la première équation dans (3.22) avec $\widetilde{\Phi}$ comme solution et en utilisant la formule de Green et la limite au bord, nous obtenons

$$C^{-1}\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} = \nabla_X \cdot I_\delta F + f$$

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}) \widetilde{\Phi} dX = \int_{\Omega_0} (\nabla_X \cdot I_\delta F + f) \widetilde{\Phi} dX$$

$$-\int_{\Omega_0} P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX + \int_{\Sigma_0} (N \cdot P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}) \widetilde{\Phi} dS = -\int_{\Omega_0} F \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX + \int_{\Omega_0} f \widetilde{\Phi} dX$$

$$\int_{\Omega_0} P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX = \int_{\Omega_0} F \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX - \int_{\Omega_0} f \widetilde{\Phi} dX + \int_{\mathbb{R}^d} (\beta + (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} \gamma) \widetilde{\Phi}(\cdot, 0) dx$$

$$C^{-1}\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|^2_{L^2(\Omega_0)} = \int_{\Omega_0} F \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX - \int_{\Omega_0} f \widetilde{\Phi} dX + \int_{\mathbb{R}^d} (\beta + (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} \gamma) \widetilde{\Phi}(\cdot, 0) dx.$$

$$C^{-1}\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|F\|_{L^2(\Omega_0)} \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J J^{-1} f \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\beta\| \|\widetilde{\Phi}(\cdot, 0)\| + \|\gamma\| \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Phi}(\cdot, 0)\|$$

$$C^{-1}\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|F\|_{L^2(\Omega_0)} \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{-1} f\|_{L^2(\Omega_0)} \|J \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\beta\| \|\widetilde{\Phi}(\cdot, 0)\| + \|\gamma\| \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Phi}(\cdot, 0)\|.$$

Ici, nous obtenons facilement

$$\left\|\widetilde{\Phi}(\cdot, 0)\right\| = \left\|\int_1^z \partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot z) dy\right\| \leqslant \delta \left\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\right\|_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\|J \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant (1 + \delta) \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Par conséquent, en appliquant le lemme 3.8 au dernier terme de l'estimation ci-dessus, nous obtenons le résultat. □

Lemme 3.10. Soit $s > \frac{1}{2} d + 1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.22) avec $F_{d+1}(\cdot, 0) = 0$ satisfait

$$\|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C(\|J^s F\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s-1} f\|_{L^2(\Omega_0)} + \delta\|\beta\|_s + \|\gamma\|_s).$$

Démonstration. Il est facile de voir que $J^s\widetilde{\Phi}$ satisfait

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X J^s\widetilde{\Phi} = \nabla_X \cdot I_\delta(J^s F - [J^s, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}) + J^s f \quad \text{dans} \quad \Omega_0, \\ J^s\widetilde{\Phi} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ -\delta^{-2}\partial_z J^s\widetilde{\Phi} = J^s\beta + (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} J^s\gamma \quad \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

et que $N \cdot [J^s, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} = 0$ sur $\partial\Omega_0$. Par conséquent, en se basant sur la démonstration précédente on a

$$\int_{\Omega_0} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta J^s \widetilde{\Phi} = \left(\int_{\Omega_0} J^s F I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} - [J^s, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} - J^{s-1} J f \widetilde{\Phi}\right) dX + (J^s\beta + (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} J^s\gamma)\widetilde{\Phi}$$

$$\begin{aligned} \|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C\|J^s F\|_{L^2(\Omega_0)} \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s-1} f\|_{L^2(\Omega_0)} \|J\widetilde{\Phi}\| + \|\beta\|_s \|\widetilde{\Phi}\| \\ & + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Phi}\| \|\gamma\|_s + \|[J^s, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Le dernier terme à droite peut être évalué par une estimation de commutateur
$\|[J^s, a]u\| \leqslant C\|\nabla a\|_{s-1}\|u\|_{s-1}$ et une inégalité d'interpolation $\|u\|_{s-1} \leqslant \varepsilon\|u\| + C_\varepsilon\|u\|$ pour $\varepsilon > 0$, et le lemme 3.8, nous obtenons le résultat. □

Lemme 3.11. Soit $s > \dfrac{1}{2}d$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s + 1$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.22) avec $F_{d+1}(\cdot, 0) = 0$, on ait

$$\begin{aligned} \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C(\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} F\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s-1}(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\Omega_0)} \\ & + \|\beta\|_s + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\gamma\|_s + \|F\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{-1} f\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\gamma\|). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Démonstration. Il est facile de voir que $(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi}$ satisfait

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi} = \nabla_X \cdot I_\delta((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} F - [(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}) + (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} f = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0 \\ (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \\ -\delta^{-2}\partial_z (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi} = (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(\beta + (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\gamma) \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 \end{cases}$$

et que $N \cdot [(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} = 0$ sur $\partial\Omega_0$. En appliquant le lemme 3.10 on obtient

$$\begin{aligned} \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C\Big(\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} F\|_{L^2(\Omega_0)} \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^s[(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \\ & + \|J^{s-1}(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\Omega_0)} \|J\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \\ & + \|\beta\|_s \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi}\| + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi}\| \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\gamma\|_s \Big). \end{aligned}$$

Ici, l'inégalité d'interpolation et le lemme 3.5 impliquent que

$$\|u\|_s \leqslant \varepsilon\|\nabla u\|_{s-\frac{1}{2}} + C_\varepsilon\|u\| \leqslant 2\varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} u\|_s + C_\varepsilon\|u\|.$$

Grâce à cela et le lemme 3.4, le deuxième terme à droite de l'estimation ci-dessus peut être évalué comme

$$\|J^s[(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \varepsilon\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + C_\varepsilon\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Ces estimations et le lemme 3.9, nous obtenons le résultat. □

Lemme 3.12. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.22) avec $F_{d+1}(\cdot,0) = F_{d+1}(\cdot,1) = \gamma = 0$ vérifie

$$\delta^{-2}\|\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1)\|_s \leqslant \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}F\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^s f\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\beta\|_s.$$

Démonstration. Nous prenons $\psi \in H^0$ arbitrairement et $\widetilde{\Psi}$ défini par $\widetilde{\Psi}(\cdot,z) = \dfrac{\cosh(\delta|D|z)}{\cosh(\delta|D|)}\psi$ qui est une solution au problème des limites

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta^2\nabla_X\widetilde{\Psi} = 0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega_0 \\ \widetilde{\Psi} = \psi \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_0 \\ \partial_z\widetilde{\Psi} = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Sigma_0 \end{cases}$$

nous avons aussi que

$$\|(\Lambda_0^{DN})^{-\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega_0)} = \|\psi\|_{L^2(\Omega_0)} \text{ et } \|\widetilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|\psi\|.$$

En utilisant les relations (3.18) et (3.19), on a d'après la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0}(J^s\nabla_X\cdot I_\delta PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi})\widetilde{\Psi}dX &= \int_{\Omega_0} J^s(\nabla_X\cdot I_\delta F + f)\widetilde{\Psi}dX \\ -\int_{\Omega_0} J^sPI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}dX + \int_{\Sigma_0}(d\cdot J^sI_\delta PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi})\widetilde{\Psi}dS &= -\int_{\Omega_0} J^sF\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi} + J^sf\widetilde{\Psi}dX \\ \int_{\Omega_0} J^sPI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}dX &= \int_{\Omega_0} J^sF\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi} - J^sf\widetilde{\Psi}dX + (\delta^{-2}J^s\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\psi) + (J^s\beta,\Lambda_0^{DD}\psi) \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant les propositions 3.1 et 3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|(\delta^{-2}J^s\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\psi)\right| &= \left|(J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi} - F)\cdot(\Lambda_0^{DN})^{-\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi} + J^sf\widetilde{\Psi})dX + (J^s\Lambda_0^{DD}\beta,\psi)\right| \\ \left|(\delta^{-2}J^s\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\psi)\right| &\leqslant \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\beta\|_s\|\psi\| \\ &\quad + \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}F\|_{L^2(\Omega_0)})\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{-\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}\| + \|J^sf\|_{L^2(\Omega_0)}\|\widetilde{\Psi}\| \\ \delta^{-2}\|\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1)\|_s &\leqslant (\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}F\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^sf\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\beta\|_s). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.13. Soit $s > \dfrac{1}{2}d$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s+1$, il existe une constante $C = C(M,c,s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.22) avec $f = 0$ et $F_{d+1}(\cdot,0) = F_{d+1}(\cdot,1) = \gamma = 0$ satisfait

$$\delta^{-2}\|\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1)\|_s \leqslant C(\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}F\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\beta\|_s + \|F\|_{L^2(\Omega_0)}).$$

Démonstration. Par le lemme 3.6 nous avons

$$\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C(\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^sI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Ceci et les lemmes 3.10-3.12 donnent l'estimation souhaitée. □

3.2.3 Estimations de la solution du problème elliptique

Nous donnons maintenant des estimations de la solution du problème elliptique (3.18).

Proposition 3.4. Sous l'hypothèse (A1), il existe une constante $C = C(M, c) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) vérifie

$$\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C(\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\| + \delta\|\beta\|).$$

Démonstration. Soient $\Phi_1 = (\phi, 0)^\hbar$, $\Phi_2 = (0, \beta)^\hbar$, $\widetilde{\Phi}_1 = \Phi_1 \circ \Theta$ et $\widetilde{\Phi}_2 = \Phi_2 \circ \Theta$, alors les solutions peuvent être décomposer par $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2$. En utilisant le lemme 3.9, on a

$$\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_2\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta\|\beta\|.$$

Il découle des lemmes 3.2 et 3.3 que

$$\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_1\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|I_\delta \nabla_X \Phi_1\|_{L^2(\Omega)} = C(\Lambda^{DN}\phi, \phi)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|.$$

□

Proposition 3.5. Soit $s > \dfrac{1}{2}d + 1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) vérifie

$$\|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\left(\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s + \delta\|\beta\|_s\right). \tag{3.24}$$

Démonstration. Soit $\Phi_s := (J^s\phi, 0)^h$ et $\widetilde{\Phi}_s := \Phi_s \circ \Theta$. Alors, nous obtenons

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X (J^s\widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_s) = -\nabla_X \cdot I_\delta [J^s, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \ \text{ dans } \Omega_0 \\ (J^s\widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_s) = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0 \\ -\delta^{-2}\partial_z (J^s\widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_s) = J^s\beta \ \text{ sur } \ \Sigma_{\ 0} \end{cases}$$

Par conséquent, par le lemme 3.9 et par une inégalité d'interpolation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|I_\delta \nabla_X (J^s\widetilde{\Phi} - \Phi_s)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C\left(\|[J^s, P] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \delta\|\beta\|_s\right) \\ & \leqslant \varepsilon\|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + C_\varepsilon(\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \delta\|\beta\|_s). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Par contre, par la proposition 3.4, on a $\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_s\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s$. Ces estimations et la proposition 3.4 donnent l'estimation souhaitée. □

Proposition 3.6. Soit $s > \dfrac{1}{2}d + 1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s + 1$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) vérifie

$$\|J^s (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\big(\|(\Lambda_0^{DN})\phi\|_s + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s + \|\beta\|_s\big).$$

Démonstration. Soit $\Phi_1 = ((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi, 0)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi}_1 = \Phi_1 \circ \Theta$. Alors, nous avons

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X \left((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_1\right) = -\nabla_X \cdot I_\delta \left[(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}, P\right] I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \ \text{ dans } \ \Omega_0 \\ \left((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_1\right) = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_0 \\ -\delta^{-2}\partial_z \left((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_1\right) = (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\beta \ \text{ sur } \ \Sigma_0 \end{cases}$$

En multipliant la relation ci-dessus par $J^s\widetilde{\Phi}$ et en utilisant la formule de Green et par les lemmes 3.10 et 3.4 nous obtenons

$$\|J^s I_\delta \nabla_X((\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Phi}-\widetilde{\Phi}_1)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\left(\|J^s\left[(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}},P\right]I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}+\|\beta\|_s\right).$$

D'après la proposition 3.5 et le lemme 3.4 on a

$$\|J^s\left[(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}},P\right]I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|\leqslant C\|J^sI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \quad \text{et} \quad \|J^sI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_1\|_{L^2(\Omega_0)}\leqslant C\|(\Lambda_0^{DN})\phi\|_s$$

$$\begin{aligned}\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} &\leqslant C\big(\|J^sI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}+\|(\Lambda_0^{DN})\phi\|_s+\|\beta\|_s\big)\\ \|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} &\leqslant C\big(\|(\Lambda_0^{DN})\phi\|_s+\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s+\|\beta\|_s\big).\end{aligned}$$

□

3.2.4 Estimations de décroissance de la norme L^∞

On va donner une L^∞-estimation de $\nabla_X\widetilde{\Phi}$ afin d'obtenir un ordre correct de δ et l'estimation sous une hypothèse plus faible sur la surface de l'eau et le fond.

$$A := \left(I_\delta\frac{\partial\Theta}{\partial X}I_\delta^{-1}\right)\left(I_\delta\frac{\partial\Theta}{\partial X}I_\delta^{-1}\right)^T = A_1+\delta^2A_2$$

où A_2 est une matrice dont les éléments sont des polynômes de $\nabla_X\theta$ avec des coefficients qui sont aussi polynômes de δ^2, et $A_1 = \begin{pmatrix} E_d & \delta\mathbf{a}^T \\ \delta\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{pmatrix}$ où

$$\begin{cases}\mathbf{a}=\partial_z\theta+(1+\partial_z\theta_z)\nabla\theta_z\\ \mathbf{b}=(1+\partial_z\theta_z)^2.\end{cases}$$

$$A_2=\begin{pmatrix}\delta^2\left(\dfrac{\partial(\theta_j)}{\partial(x_j)}\right)+2\dfrac{\partial\,(\theta_j)}{\partial(x_j)}+\left((\nabla\theta_z)^2\right)^T & \delta\dfrac{\partial(\theta_j)}{\partial(x_j)}\partial_z\theta_j\\ \delta\dfrac{\partial(\theta_j)}{\partial(x_j)}\partial_z\theta_j & (\partial_z\theta_j)^2\end{pmatrix}.$$

Par définition, on a $P = \left(\det\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial X}\right)\right)^{-1}\widetilde{A}$, où $\widetilde{A}$ est la matrice adjointe de A qui s'écrit de la forme $\widetilde{A}=\widetilde{A}_1+\delta^2A_3$, où A_3 est une matrice dont les éléments sont des polynômes de $\nabla_X\theta$. De plus, on voit que

$$\widetilde{A}_1=\begin{pmatrix}(\mathbf{b}-\delta^2|\mathbf{a}|^2)E_d+\delta^2\mathbf{a}^T\mathbf{a} & -\delta\mathbf{a}^T\\ -\delta\mathbf{a} & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\det\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)\right)^{-1}=\frac{1}{1+\partial_z\theta_z+\delta^2\Big((1+\partial_z\theta_z)\frac{\partial(\theta_j)}{\partial(x_j)})-(\nabla\theta_z)^T\partial_z(\theta_j)\Big)}.$$

Par ces relations ci-dessus on voit que la matrice P est donnée sous la forme suivante :

$$P=\begin{pmatrix}(1+\partial_z\theta_z)E_d+\delta^2P_{11} & \delta\mathbf{p}_{12}^T\\ \delta\mathbf{p}_{12} & (1+\partial_z\theta_z)^{-1}+\delta^2\mathbf{p}_{22}\end{pmatrix}$$

où P_{11}, $\mathbf{p}_{12}$ et $\mathbf{p}_{22}$ sont des matrices $d \times d$, $1 \times d$ et 1×1 dont les éléments sont des fonctions rationnelles de $\nabla_X \theta$ et dont les dénominateurs sont définis positifs sous l'hypothèse (A_1). De plus, $\mathbf{p}_{12}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{p}_{12} = \mathbf{p}_{12}^0 + \delta^2 \widetilde{\mathbf{p}}_{12}$, où chaque élément de $\widetilde{\mathbf{p}}_{12}$ est aussi une fonction rationnelle de $\nabla_X \theta$ et

$$\mathbf{p}_{12}^0 = -(1+\partial_z \theta_z)^{-1} (\partial_z(\theta_1, \cdots, \theta_n)^T + (1+\partial_z\theta_z)\nabla\theta_z). \tag{3.26}$$

Nous notons qu'il résulte de (3.17) que

$$\mathbf{p}_{12}(x,0) = \mathbf{p}_{12}(x,1) = 0, \ \mathbf{p}_{22}(x,0) = \mathbf{p}_{22}(x,1) = 0. \tag{3.27}$$

En utilisant cette notation, nous pouvons réécrire la première équation de (3.18) comme

$$\partial_z \left(\delta^{-2}(1+\partial_z\theta_z)^{-1} + \mathbf{p}_{22} \right) \partial_z \widetilde{\Phi} = -\nabla \cdot \left((1+\partial_z\theta_z) E_d + \delta^2 P_{11} \right) \nabla \widetilde{\Phi} - \nabla \cdot \left(\mathbf{p}_{12} \partial_z \widetilde{\Phi} - \partial_z (\mathbf{p}_{12} \cdot \nabla \widetilde{\Phi} \right).$$

En intégrant ceci par rapport à z et en utilisant (3.14), (3.27) et une condition aux limites dans (3.18), on voit que

$$\begin{aligned} \partial_z \widetilde{\Phi} &= \int_0^z \partial_z \left((1+\partial_z\theta_z)^{-1} + \delta^2 \mathbf{p}_{22} \right) \partial_z \widetilde{\Phi} dy \\ &= -\delta^2 \beta - \delta^2 \int_0^z \nabla \cdot (((1+\partial_z\theta_z)E_d + \delta^2 P_{11}) \nabla \widetilde{\Phi}) dy - \delta^2 \int_0^z \nabla \cdot (\mathbf{p}_{12} \partial_z \widetilde{\Phi}) dy - \delta^2 \mathbf{p}_{12} \cdot \nabla \widetilde{\Phi}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

On a aussi

$$\nabla \widetilde{\Phi} = \nabla \phi - \int_z^1 \nabla \partial_z \widetilde{\Phi} dy. \tag{3.29}$$

Corollaire 3.1. Soit $s > \frac{1}{2}d + 1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) avec $\phi = 0$ satisfait

$$\|J^s \partial_z \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s-1} \nabla \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2 \|\beta\|_s.$$

Démonstration. Il découle de la proposition 3.5 que

$$\|J^s \partial_z \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2 \|\beta\|_s.$$

Ceci et (3.29) montrent que

$$\|J^{s-1} \nabla \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|J^s \partial_z \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2 \|\beta\|_s.$$

□

Corollaire 3.2. Soit $s > \frac{1}{2}d + 1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) avec $\beta = 0$ satisfait

$$\|J^s \nabla \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}} \phi\|_s, \quad \|J^{s-1} \partial_z \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2 \|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}} \phi\|_s.$$

Démonstration. La première estimation vient directement de la proposition 3.5. Donc,

$$\|J^s \nabla \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}} \phi\|_s.$$

Il découle de la relation (3.28) que $\|J^{s-1}\partial_z\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|J^s\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}$. Ceci et la proposition 3.5 donnent la seconde estimation d'où

$$\|J^{s-1}\partial_z\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s.$$

□

Proposition 3.7. Soit $r > \dfrac{1}{2}d$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = r+1$, il existe une constante $C = C(M,c,r) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) satisfait

$$\begin{cases} \|\nabla\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leqslant C\left(\|\nabla\phi\|_r + \delta\|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{r+1} + \delta^2\|\beta\|_{r+1}\right) \\ \|\partial_z\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\left(\|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{r+1} + \|\beta\|_{r+1}\right). \end{cases}$$

Démonstration. Notons que ces hypothèses impliquent la délimitation uniforme de $P_{11}, \mathbf{p}_{22}$, $\mathbf{p}_{12}$ et leurs premiers dérivés par rapport à x. Il découle de (3.29) et l'inégalité de Sobolev que

$$\|\nabla\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leqslant C(\|\nabla\phi\|_r + \delta\|J^{r+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Ceci, avec la proposition 3.5 donne la première estimation de cette proposition. De même, il résulte de (3.28) que

$$\|\partial_z\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\left(\|\beta\|_{r+1} + \|J^{r+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\right).$$

La proposition 3.5 et le lemme 3.5, donne la deuxième estimation. D'où le résultat. □

Corollaire 3.3. Soit $s > \dfrac{1}{2}(d+3)$. Sous les hypothèses (A1)-(A3) avec $q = s - \dfrac{1}{2}$, il existe une constante $C = C(M,c,s) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) satisfait (3.24).

Démonstration. La preuve est la même que celle de la proposition 3.5, sauf que le premier terme sur le côté droit de (3.25) est évalué comme :

$$\begin{aligned} \|[J,P]I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant& C\left(\|\nabla P\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|J^{s-1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^sP\|_{L^2(\Omega_0)}\|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\right) \\ \|[J,P]I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant& \varepsilon\|J^sI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + C_\varepsilon\left(\|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\right). \end{aligned}$$

Le dernier terme peut être évaluée par la proposition 3.7 et le lemme 3.5. D'où le résultat. □

3.2.5 Estimations de la solution $\widetilde{\Phi}$ par rapport à (η, b)

La solution $\widetilde{\Phi}$ du problème elliptique (3.18) dépend de (η, b) coefficient de la matrice P.

Proposition 3.8. Soit $s > \dfrac{1}{2}d+1$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses $(A1)-(A4)$ avec $q = s$, il existe une constante $C = C(M,c,s,m) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) satisfait

$$\left\|J^sI_\delta\nabla_X\left(D_\eta^m\widetilde{\Phi}\,[\widetilde{\eta}_1,\cdots,\widetilde{\eta}_m]\right)\right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\,\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+\frac{1}{2}}\cdots\|\widetilde{\eta}_m\|_{s+\frac{1}{2}}\left(\left\|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\right\|_s + \delta\,\|\beta\|_s\right).$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet par rapport à b.

Démonstration. Nous ne montrons l'estimation que dans le cas $m = 1$, et le cas général peut être prouvé de la même manière. Pour simplifier, nous écrivons $\widetilde{\Phi}_\eta = D_\eta \widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}]$ et $P_\eta = D_\eta P[\widetilde{\eta}]$. En prenant la dérivée de Fréchet de (3.18), nous obtenons

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_\eta = -\nabla_X \cdot I_\delta P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \quad \text{dans} \;\; \Omega_0 \\ \widetilde{\Phi}_\eta = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_0 \\ -\delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Phi}_\eta = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Sigma_0 \end{cases}$$

Par conséquent, par les lemmes 3.10 et 3.5 et les propositions 3.5 et 3.7, nous voyons que

$$\begin{aligned} \|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C\|J^s P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \\ \|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C\left(\|P_\eta\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^s P_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}\|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\right) \end{aligned}$$

Or, $\|P_\eta\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \|J^s P_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{1}{2}}$

$$\|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{1}{2}}\left(\|(\Lambda^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s + \delta\|\beta\|_s\right)$$

ce qui donne l'estimation souhaitée. □

Corollaire 3.4. Soit $s > \dfrac{1}{2}d + 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s$, il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) avec $\phi = 0$ satisfait

$$\|J^s \partial_z (D_\eta^m \widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m])\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s-1}\nabla(D_\eta^m \widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m])\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+\frac{1}{2}} \cdots \|\widetilde{\eta}_m\|_{s+\frac{1}{2}}\|\beta\|_s.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet par rapport à b.

Démonstration. Le premier terme de l'estimation vient directement de la proposition 3.8. D'autre part, il découle de la relation (3.29) que

$$\nabla D_\eta \widetilde{\Phi} = -\int_z^1 \nabla \partial_z D_\eta \widetilde{\Phi} dy.$$

Donc,

$$\|J^{s-1}\nabla D_\eta \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|J^s \partial_z D_\eta \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{1}{2}}\|\beta\|_s$$

□

Corollaire 3.5. Soit $s > \dfrac{1}{2}d$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s + 1$, il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que la solution $\widetilde{\Phi}$ de (3.18) avec $\beta = 0$ satisfait

$$\|J^s \partial_z (D_\eta^m \widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m])\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s-1}\nabla(D_\eta^m \widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m])\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+\frac{3}{2}} \cdots \|\widetilde{\eta}_m\|_{s+\frac{3}{2}}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{s+1}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet par rapport à b.

Démonstration. Nous ne montrons l'estimation que dans le cas $m = 1$. Pour simplifier, nous écrivons $\widetilde{\Phi}_\eta = D_\eta \widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}]$. En prenant la dérivée de Fréchet de (3.28) d'une part et les propositions 3.5, 3.7 et 3.8 et le lemme

3.5, nous voyons que

$$\|J^s\partial_z\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\Big(\|J^{s+1}\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s+1}\nabla_X(D_\eta\theta[\widetilde{\eta}])\|_{L^2(\Omega_0)}\|\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)}$$
$$+ \|\nabla_X(D_\eta\theta[\widetilde{\eta}])\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|J^{s+1}\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\Big)$$

Or, $\|J^{s+1}\nabla_X(D_\eta\theta[\widetilde{\eta}])\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla_X(D_\eta\theta[\widetilde{\eta}])\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leqslant C\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{3}{2}}$

$$\|J^s\partial_z\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{3}{2}}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{s+1}.$$

D'autre part, par la relation (3.29) on a $\nabla\widetilde{\Phi}_\eta = -\displaystyle\int_z^1 \nabla\partial_z\widetilde{\Phi}_\eta$ et aussi

$$\|J^{s-1}\nabla\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|J^s\partial_z\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Ce qui donne l'estimation souhaitée. □

3.3 Estimations uniformes des opérateurs

Dans cette section, nous donnerons les normes des opérateurs Λ^{DN}, Λ^{NN}, Λ^{DD} et Λ^{ND} et ses commutateurs dans les espaces de Sobolev. Nous analysons surtout la dépendance du petit paramètre δ pour obtenir des estimations uniformes par rapport à δ. De plus, ces opérateurs dépendent de la fonction inconnue η, nous devons également examiner avec précision la dépendance à la régularité de η.

3.3.1 Norme de l'opérateur Λ^{DN}

Les quatre propositions suivantes sur l'opérateur $\Lambda^{DN} = \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$ ont été données dans [12].

Proposition 3.9. Soit $s > \dfrac{1}{2}d + 1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s + 1$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|(\Lambda^{DN})\phi\|_s \leqslant C(\|(\Lambda_0^{DN})\phi\|_s + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s).$$

En particulier, on a

$$\|\Lambda^{DN}\phi\|_s \leqslant C\delta^{-1}\|\phi\|_{s+1}.$$

Proposition 3.10. Soit $s > \dfrac{1}{2}d + 2$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s$, nous supposons que $\|(\eta, b)\|_{s+1} \leqslant M$, alors il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{DN}\phi\|_s \leqslant C\delta^{-\frac{1}{2}}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{s+\frac{1}{2}}.$$

La proposition suivante est une justification mathématiquement rigoureuse du développement de l'opérateur Λ^{DN} par rapport à δ^2.

Proposition 3.11. Soit $s > \dfrac{1}{2}d$. Sous les hypothèses (A1)-(A3) avec $q = s + \dfrac{5}{2}$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\left\|\Lambda^{DN}\phi + \nabla\cdot((1+\eta-b)\nabla\phi)\right\|_s \leqslant C\delta^2\left(\left\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\right\|_{s+3} + \|\nabla\phi\|_s\right).$$

Démonstration. Soit $\Phi := \phi^\hbar$ et $\widetilde{\Phi} := \Phi \circ \Theta$. On utilise la relation (3.18) et puisque

$$\partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot, 0) = 0 \text{ et } \delta^{-2} \partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot, 1) = \Lambda^{DN} \phi.$$

On voit que

$$\begin{aligned}\Lambda^{DN}\phi &= \int_0^1 \partial_z \left(\left(\delta^{-2}(1+\partial_z\theta_z)^{-1} + p_{22} \right) \partial_z \widetilde{\Phi} \right) dy \\ &= -\int_0^1 \nabla \cdot \left(\left(1+\partial_z\theta_z\right) E_d + \delta^2 P_{11} \right) \nabla \widetilde{\Phi} dy - \int_0^1 \nabla \cdot ((\mathbf{p}_{12}\partial_z \widetilde{\Phi}))dy.\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé (3.27) et (3.28). Par (3.26) nous avons

$$\widetilde{\Phi}(\cdot, z) = \phi - \int_z^1 \partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot, y) dy \quad \text{et} \quad \int_0^1 (1+\partial_z\theta_z) dy = 1 + \eta - b \text{ et aussi}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{DN}\phi + \nabla \cdot ((1+\eta-b)\nabla\phi) = &\int_0^1 \nabla \cdot ((1+\partial_z\theta_z) \int_z^1 \nabla \partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot, y) dy) dy \\ &- \delta^2 \int_0^1 \nabla \cdot ((P_{11} \nabla \widetilde{\Phi} dy - \int_0^1 \nabla \cdot ((\mathbf{p}_{12}\partial_z \widetilde{\Phi}))dy.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\|\Lambda^{DN}\phi + \nabla \cdot ((1+\eta-b)\nabla\phi)\|_s \leqslant C \left(\delta^2 \|J^{s+2} \nabla \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s+2} \partial_z \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \right).$$

En utilisant la relation (3.28) on obtient

$$\|J^{s+2}\partial_z \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2 \|J^{s+3} \nabla \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

□

Proposition 3.12. $\left|\left(\Lambda^{DN}\phi, \psi\right)\right| \leqslant \sqrt{(\Lambda^{DN}\phi, \phi)}\sqrt{(\Lambda^{DN}\psi, \psi)}$.

Proposition 3.13. Sous l'hypothèse (A1), il existe une constante $C = C(M, c) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{DN}\phi\|_{-1} \leqslant C\|\nabla\phi\|.$$

Démonstration. Soit $\Phi = (\phi, 0)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$. Alors, $\widetilde{\Phi}$ satisfait (3.18) avec $\beta = 0$ et $\delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot, 1) = \Lambda^{DN}\phi$. Par conséquent, d'après des lemmes 3.12 et 3.5 que

$$\|\Lambda^{DN}\phi\|_s \leqslant \|J^s (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Pour $s = -1$ on a

$$\|\Lambda^{DN}\phi\|_{-1} \leqslant \|J^{-1}(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\|\nabla\phi\|.$$

Par les lemmes 3.2, 3.1 et 3.3 on obtient l'estimation souhaitée. □

3.3.2 Estimations sur les commutateurs

Pour obtenir des estimations d'énergie sur le linéarisé des équations (2.34), il faudra contrôler plusieurs commutateurs.

Proposition 3.14. Soit $r > \frac{1}{2}d$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = r+1$, il existe une constante $C = C(M, c, r) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\left\| \left[\nabla, \Lambda^{DN} \right] \phi \right\|_{-1} \leqslant C \left\| \nabla \phi \right\|.$$

Démonstration. Soit $\Phi = (\phi, 0))^{\hbar}$, $\Phi_i = (\partial_i \phi, 0)^{\hbar}$, $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$, $\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i \circ \Theta$. Alors,

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i)) = -\nabla_X \cdot I_\delta (\partial_i P) I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \ \text{ dans } \ \Omega_0 \\ (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) = 0, \quad \delta^{-2} \partial_z (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) = [\partial_i, \Lambda^{DN}] \phi \ \text{ sur } \ \Gamma_0 \\ -\delta^{-2} \partial_z (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma_0 \end{cases} \tag{3.30}$$

En utilisant la formule de Green on a

$$-\int_{\Omega_0} J^{-1} (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} P I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX + [\partial_i, \Lambda^{DN}] \phi$$
$$= \int_{\Omega_0} J^{-1} (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} (\partial_i P) I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX.$$

$$\left\| \left[\partial_i, \Lambda^{DN} \right] \phi \right\|_{-1} \leqslant \left\| J^{-1} (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} P I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) \right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\| J^{-1} (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} (\partial_i P) I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

D'après les lemmes 3.12 et 3.5, nous avons

$$\left\| J^{-1} (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} P I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \left\| I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) \right\|_{L^2(\Omega_0)}$$
$$\left\| J^{-1} (\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} (\partial_i P) I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \left\| (\partial_i P) I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

D'autre part, par le lemme 3.9, nous avons

$$\left\| I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \left\| (\partial_i P) I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \left\| I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \right\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

D'où d'après les lemmes 3.2, 3.1 et 3.3 nous obtenons

$$\left\| \left[\partial_i, \Lambda^{DN} \right] \phi \right\|_{-1} \leqslant C \left\| I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \left\| \nabla \phi \right\|.$$

□

Proposition 3.15. Soit $r > \frac{1}{2}d$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = r+1$, il existe une constante $C = C(M, c, r) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\left\| \left[\Lambda^{DN}, \underline{\mathbf{a}} \right] \phi \right\|_{-1} \leqslant C \left\| \nabla \underline{\mathbf{a}} \right\|_{r+2} \left\| \phi \right\|.$$

Démonstration. Soit $\Phi = (\phi, 0)^{\hbar}$, $A = (\underline{\mathbf{a}}, 0)^{\hbar}$, $\Phi_{\underline{\mathbf{a}}} = (\underline{\mathbf{a}} \phi, 0)^{\hbar}$, $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$, $\widetilde{A} = A \circ \Theta$ et $\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}} = \Phi_{\underline{\mathbf{a}}} \circ \Theta$. Alors,

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X (\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}} - \widetilde{A} \widetilde{\Phi}) = -2 P I_\delta \nabla_X \widetilde{A} \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} \text{ dans } \ \Omega_0 \\ (\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}} - \widetilde{A} \widetilde{\Phi}) = 0, \ \delta^{-2} \partial_z (\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}} - \widetilde{A} \widetilde{\Phi}) = [\Lambda^{DN}, \underline{\mathbf{a}}] \phi - \phi \Lambda^{DN} \underline{\mathbf{a}} \quad \text{sur } \ \Gamma_0 \\ -\delta^{-2} \partial_z (\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}} - \widetilde{A} \widetilde{\Phi}) = 0 \ \text{ sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

Par conséquent, d'après les lemmes 3.12 et 3.5 nous avons

$$\begin{aligned}\|[\Lambda^{DN},\underline{\mathbf{a}}]\phi-\phi\Lambda^{DN}\underline{\mathbf{a}}\| \leqslant&\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}PI_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)}+2\|PI_\delta\nabla_X\widetilde{A}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\\ \|[\Lambda^{DN},\underline{\mathbf{a}}]\phi-\phi\Lambda^{DN}\underline{\mathbf{a}}\| \leqslant&C\left(\|JI_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)}+\|I_\delta\nabla_X\widetilde{A}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\right).\end{aligned}$$

Par le lemme 3.9 nous avons

$$\|I_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)}\leqslant C\|I_\delta\nabla_X\widetilde{A}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

En outre, notons que aussi

$$\begin{cases}\nabla_X\cdot I_\delta PI_\delta\nabla_XJ(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})=-2JPI_\delta\nabla_X\widetilde{A}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}-\nabla_X\cdot I_\delta[J,P]I_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi}) \ \text{ dans } \ \Omega_0\\ J(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})=0, \ \text{ sur } \ \Gamma_0\\ -\delta^{-2}\partial_zJ(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})=0 \ \text{ sur } \ \Sigma_0\end{cases}$$

le lemme 3.9 nous donne aussi

$$\begin{aligned}\|JI_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant&C(\|[J,P]I_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)}+\|PI_\delta\nabla_X\widetilde{A}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)})\\ \|JI_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant&C\left(\|I_\delta\nabla_X(\widetilde{\Phi}_{\underline{\mathbf{a}}}-\widetilde{A}\widetilde{\Phi})\|_{L^2(\Omega_0)}+\|I_\delta\nabla_X\widetilde{A}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les propositions 3.9, 3.7 et les lemmes 3.2, 3.1, 3.3 et 3.5, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|[\Lambda^{DN},\underline{\mathbf{a}}]\phi\| &\leqslant \|\phi\Lambda^{DN}\underline{\mathbf{a}}\|+C\|I_\delta\nabla_X\widetilde{A}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\\ &\leqslant C\left(\|\phi\|\|\Lambda^{DN}\underline{\mathbf{a}}\|_r+\|I_\delta\nabla_X\widetilde{A}\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\right)\\ &\leqslant C\|\nabla\underline{\mathbf{a}}\|_{r+2}\|\phi\|_1.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.16. Soit $s>\dfrac{1}{2}d+1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q=s+1$, il existe une constante $C=C(M,c,s)>0$ indépendante de δ telle que

$$\left\|\left[J^s,\Lambda^{DN}\right]\phi\right\|\leqslant C\left\|\left(\Lambda_0^{DN}\right)^{\frac{1}{2}}\phi\right\|_s.$$

Proposition 3.17. Soit $r>\dfrac{1}{2}d$. Sous l'hypothèse (A1), il existe une constante $C=C(M,c,r)>0$ indépendante de δ telle que

$$\left|\left[\partial_t,\Lambda^{DN}\right]\phi,\phi\right|\leqslant C\left\|(\eta_t,b_t)\right\|_{r+1}\left(\Lambda^{DN}\phi,\phi\right).$$

Proposition 3.18. Soit $r>\dfrac{1}{2}d$. Sous l'hypothèse (A1) et $\|(\eta,b)\|_{r+2}\leqslant M$, il existe une constante $C=C(M,c,r)>0$ indépendante de δ telle que

$$\left|\left(\Lambda^{DN}\phi,v\cdot\nabla\phi\right)\right|\leqslant C\left\|v\right\|_{r+1}\left(\Lambda^{DN}\phi,\phi\right).$$

La preuve de ces trois propositions ci-dessus sur l'opérateur Λ^{DN} ont été données dans [12].

3.3.3 Normes sur les opérateurs Λ^{NN}, Λ^{ND} et Λ^{DD}

Nous donnons maintenant les estimations des opérateurs.

Proposition 3.19. Soit $s > \dfrac{1}{2}d$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s+1$, il existe une constante $C = C(M,c,s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{NN}\beta\|_s \leqslant C\|\beta\|_s.$$

Démonstration. Soit $\Phi = (0,\beta)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$. Alors, $\widetilde{\Phi}$ satisfait (3.18) avec $\phi = 0$ et $\delta^{-2}\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1) = \Lambda^{NN}\beta$. Ainsi, par le lemme 3.13 on a

$$\delta^{-2}\|\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1)\|_s = \|\Lambda^{NN}\beta\|_s \leqslant C\|\beta\|_s.$$

□

Le lemme suivant nous permet d'obtenir les normes des opérateurs associés.

Lemme 3.14. Pour toute fonction $\widetilde{\Phi}$ définie dans Ω_0, on a

$$\left\|\widetilde{\Phi}(\cdot,0)\right\| \leqslant \left\|(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\Lambda_0^{DD}\widetilde{\Phi}(\cdot,1)\right\|.$$

Démonstration. Prenons $\gamma \in H^0$ arbitrairement et soit $\widetilde{\Psi}(\cdot,z) = \dfrac{\delta}{|D|}\dfrac{\sinh(\delta|D|(1-z))}{\cosh(\delta|D|)}\gamma$ qui est une solution du problème de Laplace suivant

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \widetilde{\Psi} = 0 \text{ dans } \Omega_0, \\ \widetilde{\Psi} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ -\delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Psi} = \gamma \text{ sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

$\|(\Lambda_0^{ND})^{-\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega_0)} = \|\gamma\|$. Par la formule de Green, on voit que

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_X \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Psi})\widetilde{\Phi} dX = \int_{\Omega_0} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Psi} \cdot I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX = \int_{\partial\Omega_0} \widetilde{\Phi}(N \cdot I_\delta^2 \nabla_X \widetilde{\Psi}) dS.$$

$$\int_{\Omega_0} (\Lambda_0^{ND})^{-\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Psi} \cdot (\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} dX = (\widetilde{\Phi}(\cdot,0),\gamma) + (\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\Lambda_0^{NN}\gamma).$$

$$\|\widetilde{\Phi}(\cdot,0),\gamma\| \leqslant \|(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\|\gamma\| - \|\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\Lambda_0^{NN}\gamma\|.$$

Or, d'après la proposition 3.3

$$-\|\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\Lambda_0^{NN}\gamma\| = \|\Lambda_0^{DD}\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\gamma\|.$$

Ainsi,

$$\left\|\widetilde{\Phi}(\cdot,0)\right\| \leqslant \left\|(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\Lambda_0^{DD}\widetilde{\Phi}(\cdot,1)\right\|.$$

□

Proposition 3.20. Soit $s > \dfrac{1}{2}(d+5)$. Sous les hypothèses (A1)-(A3) avec $q = s-1$, il existe une constante $C = C(M,c,s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\nabla\Lambda^{DD}\phi\|_{s-1} \leqslant C\|\nabla\phi\|_{s-1} \quad \text{et} \quad \|\Lambda^{DD}\phi\|_s \leqslant C\|\phi\|_s.$$

Démonstration. Soit $\Phi = (\phi, 0)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$. Alors, $\widetilde{\Phi}$ satisfait(3.18) avec $\beta = 0$, $\widetilde{\Phi}(\cdot, 1) = \phi$ et $\widetilde{\Phi}(\cdot, 0) = \Lambda^{DD}\phi$. Par conséquent, en utilisant le lemme 3.14 et la proposition 3.1, nous obtenons

$$\|\partial_i \Lambda^{DD}\phi\|_{s-1} \leqslant \|J^{s-1}(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \partial_i \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\Lambda_0^{DD}\partial_i\phi\|_{s-1}.$$

$$\|\partial_i \Lambda^{DD}\phi\|_{s-1} \leqslant 2\delta^{\frac{1}{2}} \|J^{s-\frac{3}{2}} I_\delta \nabla_X \partial_i \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\partial_i\phi\|_{s-1}.$$

Ici, on pose aussi $\Phi_i := (\partial_i\phi, 0)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i \circ \Theta$. Alors, (3.30) est vérifié. Par conséquent, par le lemme 3.10, on voit que

$$\|J^{s-\frac{3}{2}} I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \|J^{s-\frac{3}{2}} (\partial_i P) I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\|J^{s-\frac{3}{2}} I_\delta \nabla_X (\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \bigg(\|J^{s-\frac{3}{2}} (\partial_i P)\|_{L^2(\Omega_0)} \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \|(\partial_i P)\|_{L^\infty(\Omega_0)} \|J^{s-\frac{3}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \bigg)$$

Or $\|(\partial_i P)\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \|J^{s-\frac{3}{2}}(\partial_i P)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C$

$$\left\| J^{s-\frac{3}{2}} I_\delta \nabla_X \left(\partial_i \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi}_i \right) \right\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C \left\| \nabla\phi \right\|_{s-\frac{3}{2}}.$$

Où nous avons utilisé les propositions 3.5 et 3.7 et le lemme 3.5. En outre, on obtient aussi

$$\delta^{\frac{1}{2}} \|J^{s-\frac{3}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_i\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^{\frac{1}{2}} \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} \partial_i\phi\|_{s-\frac{3}{2}} \leqslant C\|\partial_i\phi\|_{s-1}.$$

Ainsi,

$$\|\partial_i \Lambda^{DD}\phi\|_{s-1} \leqslant C\|\partial_i\phi\|_{s-1}.$$

On déduit du résultat ci-dessus que

$$\|\Lambda^{DD}\phi\|_s \leqslant C\|\phi\|_s.$$

□

Proposition 3.21. Soit $s > \dfrac{1}{2}d + 2$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{ND}\beta\|_s \leqslant C \min\left\{\delta^2\|\beta\|_s, \delta\|\beta\|_{s-1}\right\}.$$

Démonstration. Soit $\Phi = (0, \beta)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$. Alors, $\widetilde{\Phi}$ satisfait (3.18) avec $\phi = 0$ et $\widetilde{\Phi}(\cdot, 0) = \Lambda^{ND}\beta$. Par conséquent, en utilisant le lemme 3.14 et les propositions 3.1 et 3.5, nous obtenons

$$\|\Lambda^{ND}\beta\|_s \leqslant \|J^s(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta\|J^s I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|\beta\|_s.$$

D'après le lemme 3.14 et les propositions 3.1, 3.4 et 3.6, nous voyons que

$$\|\Lambda^{ND}\beta\|_s \leqslant \|J^s(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \tilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\|\Lambda^{ND}\beta\|_s \leqslant C \left(\|J^{s-1}|D|(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|(\Lambda_0^{ND})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \right)$$

$$\|\Lambda^{ND}\beta\|_s \leqslant C\delta \left(\|J^{s-1}(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \right)$$

$$\|\Lambda^{ND}\beta\|_s \leqslant C\delta\|\beta\|_{s-1}.$$

Où, nous avons utilisé la relation

$$|D|^2\Lambda_0^{ND} = \delta^2\Lambda_0^{DN}.$$

□

Les deux propositions suivantes sont des justifications mathématiquement rigoureuses du développement asymptotique de (2.38).

Proposition 3.22. Soit $s > \frac{1}{2}d - 1$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s + 2$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{NN}\beta + \beta\|_s \leqslant C\delta^2\|\beta\|_{s+2}.$$

Démonstration. Soit $\Phi = (0, \beta)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$. Alors, $\widetilde{\Phi}$ satisfait (3.17) et $\Lambda^{NN}\beta = \delta^{-2}\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot, 1)$. Par conséquent, en utilisant les relations (3.14) et (3.27), nous avons

$$\Lambda^{NN}\beta = -\beta - \nabla \cdot \int_0^1 ((1 + \partial_z\theta_z)\nabla\widetilde{\Phi} + \mathbf{p}_{12}\partial_z\widetilde{\Phi} + \delta^2 P_{11}\nabla\widetilde{\Phi})dy \quad . \tag{3.31}$$

D'après (3.31) et le corollaire 3.1, on a $\|\Lambda^{NN}\beta + \beta\|_s \leqslant C\delta^2\|\beta\|_{s+2}$. □

Proposition 3.23. Soit $s > \frac{1}{2}d - 2$. Sous les hypothèses (A1) et (A2) avec $q = s + 4$, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{NN}\beta + \beta + \delta^2\nabla \cdot ((1 + \eta - b)(\nabla\eta)\beta + \frac{1}{2}(1 + \eta - b)^2\nabla\beta)\|_s \leqslant C\delta^4\|\beta\|_{s+4}.$$

Démonstration. Soit $\Phi := (0, \beta)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi} := \Phi \circ \Theta$. Il résulte de (3.17) que

$$\begin{aligned}\partial_z\widetilde{\Phi} + \delta^2(1 + \partial_z\theta_z)\beta = &-\delta^2(1 + \partial_z\theta_z) \times \Big\{p_{22}\partial_z\widetilde{\Phi} + p_{12} \cdot \nabla_X\widetilde{\Phi} \\ &+ \nabla \cdot \int_0^z \Big((1 + \partial_z\theta_z)\nabla\widetilde{\Phi} + p_{12}\partial_z\widetilde{\Phi} + \delta^2 P_{11}\nabla\widetilde{\Phi}\Big)\, dy\Big\}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Pour que

$$\|J^{s+2}(\partial_z\widetilde{\Phi} + \delta^2(1 + \partial_z\theta_z)\beta)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|J^{s+3}\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Au vu de la relation

$$\widetilde{\Phi} + \delta^2(z + \theta_z - 1 - \eta)\beta = \int_1^z (\partial_z\widetilde{\Phi} + \delta^2(1 + \partial_z\theta_z)\beta)dy. \tag{3.33}$$

on a

$$\|J^{s+1}\nabla(\widetilde{\Phi} + \delta^2(z + \theta_z - 1 - \eta)\beta)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^2\|J^{s+3}\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Par conséquent, par le corollaire 3.1, on a

$$\|J^{s+1}\nabla(\widetilde{\Phi} + \delta^2(z + \theta_z - 1 - \eta)\beta)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C\delta^4\|\beta\|_{s+4}. \tag{3.34}$$

Par contre, par (3.14) et (3.26) on voit que

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \Big\{(1 + \partial_z\theta_z)\nabla(-z - \theta_z + 1 + \eta)\beta) - \mathbf{p}_{12}^0(1 + \partial_z\theta_z)\beta\Big\}dy \\ &\qquad = \int_0^1 \partial_z\Big\{(z + \theta_z)\nabla(1 + \eta)\beta) - \frac{1}{2}(z + \theta_z)^2\nabla\beta + (\theta_1, \cdots \theta_d)^T\beta\Big\}dy \\ &\qquad = (1 + \eta - b)(\nabla\eta)\beta + \frac{1}{2}(1 + \eta - b)^2\nabla\beta.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous réécrivons (3.31) comme

$$\begin{aligned}\Lambda^{NN}\beta =& -\beta-\delta^2\nabla\cdot\left((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta+\frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta\right)-\delta^2\nabla\cdot\int_0^1(\widetilde{\mathbf{p}}_{12}\partial_z\widetilde{\Phi}+P_{11}\nabla\widetilde{\Phi})dy\\ &-\nabla\cdot\int_0^1\Big\{(1+\partial_z\theta_z)\nabla(\widetilde{\Phi}+\delta^2(z+\theta_z-1-\eta)\beta)\\ &+\mathbf{p}^0_{12}\partial_z(\widetilde{\Phi}+\delta^2(z+\theta_z-1-\eta)\beta)\Big\}dy.\end{aligned}\tag{3.35}$$

D'après (3.35), le corollaire 3.1 et la relation (3.34), on obtient l'estimation souhaitée. □

3.3.4 Estimations sur les dérivées de formes des opérateurs

Nous donnons les estimations des dérivées au sens de Fréchet des opérateurs de Λ^{DN} et Λ^{NN}.

Proposition 3.24. Soit $s>\frac{1}{2}d$ et $m\in\mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A4) avec $q=s+1$, il existe une constante $C=C(M,c,s,m)>0$ indépendante de δ telle que

$$\left\|D^m_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}_1,\cdots,\widetilde{\eta}_m]\phi\right\|_s\leqslant C\left\|\widetilde{\eta}_1\right\|_{s+\frac{3}{2}}\cdots\left\|\widetilde{\eta}_m\right\|_{s+\frac{3}{2}}\left\|(\Lambda^{DN}_0)^{\frac{1}{2}}\phi\right\|_{s+1}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet de Λ^{DN} par rapport à b.

Démonstration. Nous ne montrons l'estimation que dans le cas $m=1$. Soit $\Phi=(\phi,0)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi}=\Phi\circ\Theta$. Alors, on a

$$\begin{cases}\nabla_X\cdot I_\delta PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}=0 \ \text{ dans } \ \Omega_0\\ \widetilde{\Phi}(\cdot,1)=0,\quad \delta^{-2}\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,1)=\Lambda^{DN}\phi \ \text{ sur } \ \Gamma_0\\ -\delta^{-2}\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,0)=0 \ \text{ sur } \ \Sigma_0.\end{cases}$$

Posons $\Lambda^{DN}_\eta\phi=D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi$, $\widetilde{\Phi}_\eta=D_\eta\widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}]$ et $P_\eta=D_\eta P[\widetilde{\eta}]$. En prenant la dérivée de Fréchet de l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{cases}\nabla_X\cdot I_\delta PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta=-\nabla_X\cdot I_\delta P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi} \quad \text{dans } \ \Omega_0\\ \widetilde{\Phi}_\eta(\cdot,1)=0,\delta^{-2}\partial_z\widetilde{\Phi}_\eta(\cdot,1)=\Lambda^{DN}_\eta\phi \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\\ -\delta^{-2}\partial_z\widetilde{\Phi}_\eta(\cdot,0)=0 \qquad \text{sur} \qquad \Sigma_0 \qquad (a)\end{cases}$$

Nous prenons $\psi\in H^0$ arbitrairement et $\widetilde{\Psi}$ définie par $\widetilde{\Psi}(\cdot,z)=e^{-\delta|D|(1-z)}\psi$. En prenant le produit scalaire de l'équation et $J^s\widetilde{\Psi}\in L^2(\Omega_0)$ et en utilisant la formule de Green, nous avons

$$(J^s\Lambda^{DN}_\eta\phi,\psi)=\int_{\Omega_0}J^sP_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}dX+\int_{\Omega_0}J^sPI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\cdot I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}dX.$$

Au vu de $\|(\Lambda^{DN}_0)^{-\frac{1}{2}}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Psi}\|_{L^2(\Omega_0)}\leqslant C\|\psi\|_{L^2(\Omega_0)}$, on a

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{DN}_\eta\phi\|_s\leqslant& C(J^s(\Lambda^{DN}_0)^{\frac{1}{2}}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}+\|(\Lambda^{DN}_0)^{\frac{1}{2}}J^sPI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)})\\ \|\Lambda^{DN}_\eta\phi\|_s\leqslant& C\left(\|J^{s+1}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}+\|J^{s+1}PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}\right)\qquad (b)\end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire de la première équation dans (a) et $J^{2(s+1)}\widetilde{\Phi}_\eta \in L^2(\Omega_0)$ et en utilisant la formule de Green

$$\int_{\Omega_0} PJ^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\cdot J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta dX = -\int_{\Omega_0}[J^{s+1},P]I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\cdot J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta dX - \int_{\Omega_0} J^{s+1}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\cdot J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta dX.$$

$$\text{Où } \ [J^{s+1},P]u = J^{s+1}Pu - PJ^{s+1}u \Rightarrow J^{s+1}Pu = [J^{s+1},P]u + PJ^{s+1}u$$

Ce qui implique que

$$\|J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C(\|[J^{s+1},P]I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s+1}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)})$$

$$\|J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant C(\|J^{s}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s+1}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}). \quad (c)$$

En prenant cette fois ci $\widetilde{\Phi}_\eta \in L^2(\Omega_0)$ dans (a) on a

$$\|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \|P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}$$

Par l'inégalité d'interpolation on obtient

$$\begin{aligned}
\|J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} &\leqslant C\|J^{s+1}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}\\
\|J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} &\leqslant C\|J^{s+1}P_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}\|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \|\nabla P_\eta\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}\\
\|J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} &\leqslant C\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{3}{2}}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s.
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé les lemmes 3.5 et la proposition 3.7. □

Proposition 3.25. Soit $s > \dfrac{1}{2}(d+1)$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A4) avec $q = s + \dfrac{1}{2}$, il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\left\|D_\eta^m\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}_1,\cdots,\widetilde{\eta}_m]\phi\right\|_s \leqslant C\delta^{-\frac{1}{2}}\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+1}\cdots\|\widetilde{\eta}_m\|_{s+1}\left\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\right\|_{s+\frac{1}{2}}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet par rapport à b.

Démonstration. En utilisant la relation (b) on a

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\eta^{DN}\phi\|_s &\leqslant C(\|J^{s+1}PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s+1}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)})\\
\|\Lambda_\eta^{DN}\phi\|_s &\leqslant C\delta^{-\frac{1}{2}}(\|J^{s+\frac{1}{2}}PI_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s+\frac{1}{2}}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)})
\end{aligned}$$

Par conséquent, par les mêmes argument de la preuve de la proposition précédente, nous obtenons l'estimation souhaitée. □

La proposition suivante est une modification de l'estimation de la proposition 3.24. Plus précisément, on améliore la norme de $(\widetilde{\eta}_1,\cdots,\widetilde{\eta}_m)$ et l'hypothèse sur la régularité de la surface de l'eau et le fond.

Proposition 3.26. Soit $s > \dfrac{1}{2}d+2$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s+\dfrac{1}{2}$ et $\|\eta\|_{s+1}+\|b\|_{s+\frac{3}{2}} \leqslant M$, il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\left\|D_\eta^m\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}_1,\cdots,\widetilde{\eta}_m]\phi\right\|_s \leqslant C\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+1}\cdots\|\widetilde{\eta}_m\|_{s+1}\left\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\right\|_{s+1}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet par rapport à b.

Démonstration. Nous montrons seulement l'estimation dans le cas $m = 1$. Il suffit d'évaluer $\|D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi\|_{s-1}$ et $\|\nabla(D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi)\|_{s-1}$. Par la proposition 3.24 on a

$$\|D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi\|_{s-1} \leqslant C\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{1}{2}}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s.$$

Soit T_h^j un opérateur de translation par rapport à la variable spatiale, qui s'écrit

$$(T_h^j(u))(x) = u(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \cdots, x_d).$$

Alors, il est claire que

$$T_h^j \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta) = \Lambda^{DN}(T_h^j \eta, T_h^j b, \delta) T_h^j$$

et que

$$\nabla \Lambda^{DN}\phi = \Lambda^{DN}\nabla\phi + D_\eta \Lambda^{DN}[\nabla\eta]\phi + D_b \Lambda^{DN}[\nabla b]\phi.$$

Par conséquent, nous voyons que

$$\nabla(D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi) = D_\eta(\nabla \Lambda^{DN}\phi)[\widetilde{\eta}].$$

$$\partial_j(D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi) = D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\partial_j\phi + D_\eta(D_\eta \Lambda^{DN}[\partial_j\eta]\phi)[\widetilde{\eta}] + D_\eta D_b \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}, \partial_j b]\phi.$$

Ici, par la proposition 3.24 nous avons

$$\|D_\eta D_b \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}, \partial_j b]\phi\|_{s-1} \leqslant C\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{1}{2}}\|\partial_j b\|_{s+\frac{1}{2}}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s.$$

$$\|D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\partial_j\phi\|_{s-1} \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{1}{2}}\|\partial_j(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_s.$$

Il découle du théorème 3.2 que

$$\begin{aligned}
D_\eta \Lambda^{DN}[\partial_j\eta]\phi = &- \delta^2\Lambda^{DN}\{(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)(\partial_j\eta)\} \\
&- \nabla\cdot\{(\nabla\phi - \delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)\nabla\eta)(\partial_j\eta)\} \\
D_\eta(D_\eta \Lambda^{DN}[\partial_j\eta]\phi)[\widetilde{\eta}] = &- \delta^2 D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\{(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)(\partial_j\eta)\} \\
&- \delta^2\Lambda^{DN}\{(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)(\partial_j\widetilde{\eta}) \\
&+ (1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi + \nabla\widetilde{\eta}\cdot\nabla\phi)(\partial_j\eta) \\
&- 2\delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-2}(\nabla\eta\cdot\nabla\widetilde{\eta})(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)(\partial_j\eta)\} \\
&- \nabla\cdot\{(\nabla\phi - \delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)\nabla\eta)(\partial_j\widetilde{\eta}) \\
&- \delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi + \nabla\widetilde{\eta}\cdot\nabla\phi)(\partial_j\eta)\nabla\eta \\
&- \delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)(\partial_j\eta)\nabla\widetilde{\eta} \\
&+ 2\delta^4(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-2}(\nabla\eta\cdot\nabla\widetilde{\eta})(\Lambda^{DN}\phi + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)(\partial_j\eta)\nabla\eta\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par les propositions 3.25, 3.9 et 3.10 et le lemme 3.5 nous voyons que

$$\begin{aligned}
\|D_\eta(D_\eta \Lambda^{DN}[\partial_j\eta]\phi)[\widetilde{\eta}]\|_{s-1} \leqslant &C\left\{\|\widetilde{\eta}\|_{s+1}(\delta\|\Lambda^{DN}\phi\|_s + \|\nabla\phi\|_s) + \delta\|D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi\|\right\} \\
\|D_\eta(D_\eta \Lambda^{DN}[\partial_j\eta]\phi)[\widetilde{\eta}]\|_{s-1} \leqslant &C\|\widetilde{\eta}\|_{s+1}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{s+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\|\nabla(D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi)\|_{s-1} \leqslant C\|\widetilde{\eta}\|_{s+1}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{s+1}.$$

Où nous avons utilisé les propositions 3.24 et 3.9 et le lemme 3.5. D'où le résultat. $\square$

Nous allons donner les estimations des dérivées au sens de Fréchet de l'application $\Lambda^{NN} = \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)$.

Proposition 3.27. Soit $s > \dfrac{1}{2}(d+1)$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s+1$ et il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\left\| D_\eta^m \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m]\beta \right\|_s \leqslant C\delta^{\frac{1}{2}} \|\widetilde{\eta}_1\|_{s+1} \cdots \|\widetilde{\eta}_m\|_{s+1} \|\beta\|_{s+\frac{1}{2}}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet par rapport à b.

Démonstration. Nous montrons seulement l'estimation dans le cas $m = 1$ et le cas général peut être prouver de la même manière. Soit $\Phi = (0, \beta)^\hbar$, $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Theta$. Alors, $\widetilde{\Phi}$ satisfait (3.18) avec $\phi = 0$ et $\delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Phi}(\cdot, 1) = \Lambda^{NN}\beta$. Pour simplifier, on écrit

$$\Lambda_\eta^{NN}\beta = D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta, \quad \widetilde{\Phi}_\eta = D_\eta \widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}] \texttt{ et } P_\eta = D_\eta P[\widetilde{\eta}].$$

Prenant la dérivée de Fréchet de (3.18) par rapport à η, on obtient

$$\begin{cases} \nabla_X \cdot I_\delta P I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}_\eta = -\nabla_X \cdot I_\delta P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi} & \text{dans } \Omega_0 \\ \widetilde{\Phi}_\eta = 0, \ \delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Phi}_\eta(\cdot, 1) = \Lambda_\eta^{NN}\beta \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ -\delta^{-2}\partial_z \widetilde{\Phi}_\eta(\cdot, 0) = 0 \qquad \text{sur} \qquad \Sigma_0 \end{cases}$$

Par conséquent, par les lemmes 3.13 et 3.5, on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\eta^{NN}\beta\|_s \leqslant & C\left(\|J^s(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \right) \\ \|\Lambda_\eta^{NN}\beta\|_s \leqslant & C\delta^{-\frac{1}{2}} \|J^{s+\frac{1}{2}} P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Comme dans la preuve de la proposition 3.2, on a

$$\begin{aligned} \|J^{s+\frac{1}{2}} P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C\|P_\eta\|_{L^\infty(\Omega_0)} \|J^{s+1} I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|J^{s+1}P_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} \|I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \\ \|J^{s+\frac{1}{2}} P_\eta I_\delta \nabla_X \widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant & C\delta \|\widetilde{\eta}\|_{s+1} \|\beta\|_{s+\frac{1}{2}}. \ \text{Donc} \end{aligned}$$

$$\|\Lambda_\eta^{NN}\beta\|_s \leqslant C\delta^{1/2} \|\widetilde{\eta}\|_{s+1} \|\beta\|_{s+\frac{1}{2}}.$$

□

Afin d'obtenir l'estimation de l'opérateur Λ^{NN} dans la proposition 3.19 sous une hypothèse plus faible sur la surface de l'eau et le fond, on donne le corollaire de la proposition précédente.

Corollaire 3.6. Soit $s > \dfrac{1}{2}(d+3)$. En plus des hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s$, nous supposons que $\|(\eta, b)\|_{s+1} \leqslant M$. Alors, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{NN}\beta\|_s \leqslant C\|\beta\|_s.$$

Démonstration. Il suffit d'évaluer $\|\Lambda^{NN}\beta\|_{s-1}$ et $\|\nabla\Lambda^{NN}\beta\|_{s-1}$. Nous avons dans la proposition 3.19 que $\|\Lambda^{NN}\beta\|_{s-1} \leqslant C\|\beta\|_{s-1}$. Soit T_h^j un opérateur de translation par rapport à la variable spatiale. Alors, il est claire que $T_h^j \Lambda^{NN}(\eta, b, \delta) = \Lambda^{NN}(T_h^j \eta, T_h^j b, \delta) T_h^j$ et que

$$\partial_j \Lambda^{NN}\beta = \Lambda^{NN}\partial_j \beta + D_\eta \Lambda^{NN}[\partial_j \eta]\beta + D_b \Lambda^{NN}[\partial_j b]\beta. \tag{3.37}$$

Par conséquent, par les propositions 3.19 et 3.27, nous obtenons

$$\|\nabla\Lambda^{NN}\beta\|_{s-1} \leqslant C\left(\|\nabla\beta\|_{s-1} + \|(\nabla\eta,\nabla b)\|_s\|\beta\|_{s-\frac{1}{2}}\right) \leqslant C\|\beta\|_s.$$

Ainsi on obtient l'estimation souhaitée. $\square$

Proposition 3.28. Soit $s > \dfrac{1}{2}d$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s+1$, il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|D^m_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m]\beta\|_s \leqslant C\delta\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+\frac{3}{2}} \cdots \|\widetilde{\eta}_m\|_{s+\frac{3}{2}}\|\beta\|_{s+1}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet par rapport à b.

Démonstration. Pour simplifier, nous ne montrons l'estimation que dans le cas $m = 1$ et utilisons la même notation que dans la preuve de la proposition 3.27. Il découle de la relation (3.36) et le lemme 3.5 que

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{NN}_\eta\beta\|_s \leqslant & C\|J^{s+1}P_\eta I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\\ \|\Lambda^{NN}_\eta\beta\|_s \leqslant & C\|J^{s+1}P_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}\|I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \|P_\eta\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|J^{s+1}I_\delta\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}.\end{aligned}$$

Ceci avec les propositions 3.5 et 3.7 donnent l'estimation souhaitée. $\square$

Proposition 3.29. Soit $s > \dfrac{1}{2}d - 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s+2$, il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|D^m_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m]\beta\|_s \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+\frac{5}{2}} \cdots \|\widetilde{\eta}_m\|_{s+\frac{5}{2}}\|\beta\|_{s+2}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet de Λ^{NN} par rapport à b.

Démonstration. Pour simplifier, nous ne montrons l'estimation que dans le cas $m = 1$ et utilisons la même notation que dans la preuve de la proposition 3.27. En prenant la dérivée de Fréchet de (3.31) nous voyons que

$$\begin{aligned}\|D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta\|_s \leqslant & C\|J^{s+1}\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla_X(D_\eta\theta[\widetilde{\eta}])\|_{L^\infty(\Omega_0)}\|J^{s+1}\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\\ \|D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta\|_s \leqslant & C\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{5}{2}}\|\beta\|_{s+2}.\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé les corollaires 3.1 et 3.4. D'où le résultat. $\square$

La proposition suivante est une modification de l'estimation de la proposition ci-dessus. En particulier, nous améliorons la norme de $(\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m)$ et l'hypothèse sur la régularité de la surface de l'eau et du fond.

Proposition 3.30. Soit $s > \dfrac{1}{2}d+2$ et $m \in \mathbb{N}$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s+1$ et $\|\eta\|_{s+2}+\|b\|_{s+\frac{5}{2}} \leqslant M$, il existe une constante $C = C(M, c, s, m) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|D^m_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_m]\beta\|_s \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}_1\|_{s+2} \cdots \|\widetilde{\eta}_m\|_{s+2}\|\beta\|_{s+2}.$$

Une estimation similaire vaut pour la dérivée de Fréchet de Λ^{NN} par rapport à b.

Démonstration. Pour simplifier, nous ne montrons l'estimation que dans le cas $m = 1$. Il suffit d'évaluer

$$\|D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1]\beta\|_{s-1} \text{ et } \|\nabla(D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}_1]\beta)\|_{s-1}.$$

Par la proposition 3.29 on a

$$\|D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta\|_{s-1} \leqslant C\delta^2 \|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{3}{2}} \|\beta\|_{s+1}.$$

Au vu de (3.37), on voit que

$$\nabla(D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta) = D_\eta(\nabla \Lambda^{NN}\beta)[\widetilde{\eta}]$$

$$\nabla(D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta) = D_\eta(D_\eta \Lambda^{NN}[\nabla\eta]\beta)[\widetilde{\eta}] + D_\eta D_b \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}, \nabla b]\beta + D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\nabla\beta.$$

$$\|D_\eta D_b \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}, \nabla b]\beta\|_{s-1} \leqslant C\delta^2 \|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{3}{2}} \|\nabla b\|_{s+\frac{3}{2}} \|\beta\|_{s+1}. \text{ Et}$$

$$\|D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\nabla\beta\|_{s-1} \leqslant C\delta^2 \|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{3}{2}} \|\nabla\beta\|_{s+1}$$

Il découle du théorème 3.2 que

$$D_\eta \Lambda^{NN}[\nabla\eta]\beta = -\delta^2 \Lambda^{DN}\{(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta)\Lambda^{NN}\beta\} + \delta^2 \nabla \cdot \{(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}((\nabla\eta)\Lambda^{NN}\beta)\nabla\}.$$

$$\begin{aligned} D_\eta(D_\eta \Lambda^{NN}[\nabla\eta]\beta)[\widetilde{\eta}] = &- \delta^2 D_\eta \Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\{(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta)\Lambda^{NN}\beta\} \\ &- \delta^2 \Lambda^{DN}\{(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\widetilde{\eta})\Lambda^{NN}\beta + ((\nabla\eta)D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta) \\ &- 2\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-2}(\nabla\eta\cdot\nabla\widetilde{\eta})(\nabla\eta)\Lambda^{NN}\beta\} \\ &+ \delta^2 \nabla \cdot \{(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\widetilde{\eta})\Lambda^{NN}\beta + ((\nabla\eta)D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta)\nabla\eta \\ &- 2\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-2}(\nabla\eta\cdot\nabla\widetilde{\eta})(\nabla\eta)(\Lambda^{NN}\beta)\nabla\eta \\ &+ (1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\nabla\eta)(\Lambda^{NN}\beta)\nabla\widetilde{\eta}\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, par les propositions 3.24, 3.9 et 3.28, le lemme 3.5 et le corollaire 3.6, on voit que

$$\begin{aligned} \|D_\eta(D_\eta \Lambda^{NN}[\nabla\eta]\beta)[\widetilde{\eta}]\|_{s-1} \leqslant& C(\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+2}\|\Lambda^{NN}\beta\|_{s+1} + \delta\|D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta\|_s) \\ \|D_\eta(D_\eta \Lambda^{DD}[\nabla\eta]\beta)[\widetilde{\eta}]\|_{s-1} \leqslant& C\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+2}\|\beta\|_{s+1}. \end{aligned}$$

De sorte que nous obtenons

$$\|\nabla(D_\eta \Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta)\|_{s-1} \leqslant C\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+2}\|\beta\|_{s+2}. \text{ D'où le résultat.}$$

□

En corollaire de cette proposition, on peut obtenir l'estimation de l'opérateur Λ^{NN} dans la proposition 3.22 sous une hypothèse plus faible sur la surface de l'eau et le fond.

Corollaire 3.7. Soit $s > \frac{1}{2}d + 3$. En plus les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s + 1$, nous supposons que $\|(\eta, b)\|_{s+2} \leqslant M$. Alors, il existe une constante $C = C(M, c, s) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\Lambda^{NN}\beta + \beta\|_s \leqslant C\delta^2\|\beta\|_{s+2}.$$

Démonstration. Il suffit d'évaluer $\|\Lambda^{NN}\beta+\beta\|_{s-1}$ et $\|\nabla(\Lambda^{NN}\beta+\beta)\|_{s-1}$. Par la proposition 3.22 on a $\|\Lambda^{NN}\beta+\beta\|_{s-1}\leqslant C\delta^2\|\beta\|_{s+1}$. Donc, par (3.36) et les propositions 3.22 et 3.30, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\partial_j(\Lambda^{NN}\beta+\beta)\|_{s-1}\leqslant&\|\Lambda^{NN}\partial_j\beta+\partial_j\beta\|_{s-1}+\|D_\eta\Lambda^{NN}[\partial_j\eta]\beta\|_{s-1}+\|D_b\Lambda^{NN}[\partial_j b]\beta\|_{s-1}\\ \|\partial_j(\Lambda^{NN}\beta+\beta)\|_{s-1}\leqslant&C\delta^2\left(\|\partial_j\beta\|_{s+1}+(\|\partial_j\eta,\partial_j\beta)\|_{s+1}\|\beta\|_{s+1}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons l'estimation souhaitée. □

Nous terminons cette section en donnant des développements des dérivées au sens de Fréchet des opérateurs Λ^{DN} et Λ^{NN} avec des estimations des termes d'erreur.

Proposition 3.31. Soit $s>\dfrac{1}{2}d-1$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec$q=s+3$, il existe une constante $C=C(M,c,s)>0$ indépendante de δ telle que

$$\left\|D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi+D_b\Lambda^{DN}[\widetilde{b}]\phi+\nabla\cdot\left(\left(\widetilde{\eta}-\widetilde{b}\right)\nabla\phi\right)\right\|_s\leqslant C\delta^2\left\|\left(\widetilde{\eta},\widetilde{b}\right)\right\|_{s+\frac{7}{2}}\left\|\left(\Lambda_0^{DN}\right)^{\frac{1}{2}}\phi\right\|_{s+3}.$$

Démonstration. Nous montrons seulement l'estimation pour $D_\eta\Lambda^{DN}$. L'estimation de $D_b\Lambda^{DN}$ peut être prouvée de la même manière. Soit $\Phi=(\phi,0)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi}=\Phi\circ\Theta$. On a alors (3.18) avec $\beta=0$, et à la place (3.31),

$$\Lambda^{DN}\phi+\nabla\cdot((1+\eta-b)\nabla\phi)=\nabla\cdot\int_0^1\left\{(1+\partial_z\theta_z)\nabla\int_z^1\partial_z\widetilde{\Phi}(\cdot,y)dy-\mathbf{p}_{12}\partial_z\widetilde{\Phi}-\delta^2P_{11}\nabla\widetilde{\Phi}\right\}dy.$$

Pour simplifier, on écrit $\widetilde{\Phi}_\eta=D_\eta\widetilde{\Phi}[\widetilde{\eta}]$. Prenant la dérivée de Fréchet de l'équation ci-dessus par rapport à η, on obtient

$$\begin{aligned}\|D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi+\nabla\cdot(\widetilde{\eta}\nabla\phi)\|_s\leqslant&C(\|J^{s+2}\partial_z\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}+\delta^2\|J^{s+1}\nabla\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}\\&+C\|\widetilde{\eta}\|_{s+2}(\|J^{s+2}\partial_z\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}+\delta^2\|J^{s+1}\nabla\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)})\\ \|D_\eta\Lambda^{DN}[\widetilde{\eta}]\phi+\nabla\cdot(\widetilde{\eta}\nabla\phi)\|_s\leqslant&C\delta^2\|\widetilde{\eta}\|_{s+\frac{7}{2}}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\phi\|_{s+3}.\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé les corollaires 3.2 et 3.5. D'où le résultat. □

Proposition 3.32. Soit $s>\dfrac{1}{2}d-1$. Sous les hypothèses (A1)-(A4) avec $q=s+4$, il existe une constante $C=C(M,c,s)>0$ indépendante de δ telle que

$$\begin{aligned}\|D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta+D_b\Lambda^{NN}[\widetilde{b}]\beta+\delta^2\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\widetilde{\eta})\beta+(\widetilde{\eta}-\widetilde{b})(\nabla\eta)\beta\\+(1+\eta-b)(\widetilde{\eta}-\widetilde{b})(\nabla\beta)\|_s\leqslant C\delta^4\|(\widetilde{\eta},\widetilde{b})\|_{s+\frac{9}{2}}\|\beta\|_{s+4}.\end{aligned}$$

Démonstration. Nous ne montrons que l'estimation pour $D_\eta\Lambda^{NN}$. L'estimation pour $D_b\Lambda^{NN}$ peut être prouvée de la même manière. On pose $\Phi=(0,\beta)^\hbar$ et $\widetilde{\Phi}=\Phi\circ\Theta$. En prenant la dérivée de Fréchet de (3.35) par rapport à η on obtient

$$\begin{aligned}&\|D_\eta\Lambda^{NN}[\widetilde{\eta}]\beta+\delta^2\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\widetilde{\eta})\beta+\widetilde{\eta}(\nabla\eta)\beta+(1+\eta-b)(\widetilde{\eta})(\nabla\beta)\|_s\\&\qquad\leqslant C\left(\delta^2\|J^{s+1}\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}+\|J^{s+1}\nabla_X(\widetilde{\Phi}_\eta+\delta^2(D_\eta\theta_z[\widetilde{\eta}]-\widetilde{\eta})\beta)\|_{L^2(\Omega_0)}\right)\\&\qquad\quad+C\|\widetilde{\eta}\|_{s+2}\left(\delta^2\|J^{s+1}\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}+\|J^{s+1}\nabla_X(\widetilde{\Phi}+\delta^2(z+\theta_z-1-\eta)\beta)\|_{L^2(\Omega_0)}\right).\end{aligned}$$

Ici, en prenant la dérivée de Fréchet de (3.32) et (3.33) par rapport à η, on voit que

$$\|J^{s+1}\nabla_X(\widetilde{\Phi}_\eta+\delta^2(D_\eta\theta_z[\widetilde{\eta}]-\widetilde{\eta})\beta)\|_{L^2(\Omega_0)}\leqslant C\delta^2\left(\|J^{s+3}\nabla_X\widetilde{\Phi}_\eta\|_{L^2(\Omega_0)}+\|\widetilde{\eta}\|_{s+4}\|J^{s+3}\nabla_X\widetilde{\Phi}\|_{L^2(\Omega_0)}\right).$$

Par les estimations ci-dessus, (3.34) et les corollaires 3.1 et 3.4, nous obtenons l'estimation souhaitée. □

Chapitre 4

Le caractère bien posé du problème de Cauchy

Dans ce chapitre, nous montrons le bien posé du **problème de Cauchy** associé aux équations des ondes de surface. D'abord, nous transformons les équations non linéaires en un système d'équations quasi-linéaires.Ensuite, nous linéarisons les équations des ondes de surface et donnons une estimation d'énergie. Enfin, nous terminons par prouver les principaux théorèmes.

4.1 Équations quasi-linéaires

Réduisons les équations non-linéaires complètes (2.34) à un système d'équations quasi-linéaires. Supposons (η, ϕ) une solution de (2.34). Au vu du théorème 3.2, on définit Z et v par

$$\begin{cases} Z = (1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}(\eta, b, \delta)\beta_\tau + \nabla\eta \cdot \nabla\phi) \\ v = \nabla\phi - \delta^2 Z\nabla\eta. \end{cases} \tag{4.1}$$

On dérive la deuxième équation de (2.34) par rapport à x_i, on obtient

$$\phi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \frac{\delta^2}{2}(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau + \nabla\eta \cdot \nabla\phi)^2 = 0.$$

$$\partial_i\phi_t + \partial_i\eta + \nabla\partial_i\phi \cdot \nabla\phi + \delta^4\nabla\partial_i\eta\nabla\eta Z^2 - \delta^2 Z\partial_i(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) - \delta^2 Z(\nabla\partial_i\eta \cdot \nabla\phi) - \delta^2 Z(\nabla\eta \cdot \nabla\partial_i\phi) = 0.$$

$$\partial_i\phi_t + \partial_i\eta + (\nabla\partial_i\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_i\eta) \cdot \nabla\phi - \delta^2 Z(\nabla\partial_i\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_i\eta) \cdot \nabla\eta - \delta^2 Z\partial_i(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = 0.$$

$$\partial_i\phi_t + \partial_i\eta + v \cdot (\nabla\partial_i\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_i\eta) - \delta^2 Z\partial_i(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = 0.$$

En dérivant cette dernière équation ci-dessus par rapport à x_j et x_k, on a

$$\begin{aligned} &\partial_{ijk}\phi_t + \partial_{ijk}\eta + v \cdot \Big\{\nabla\partial_{ijk}\phi - \delta^2(Z\nabla\partial_{ijk}\eta + (\partial_{jk}Z)\nabla\partial_i\eta + (\partial_j Z)\nabla\partial_{ki}\eta + (\partial_k Z)\nabla\partial_{ij}\eta)\Big\} \\ &\quad + \partial_j v \cdot \Big\{\nabla\partial_{ki}\phi - \delta^2(Z\nabla\partial_{ki}\eta + (\partial_k Z)\nabla\partial_i\eta)\Big\} + (\partial_k v) \cdot \Big\{\nabla\partial_{ij}\phi - \delta^2(Z\nabla\partial_{ij}\eta + (\partial_j Z)\nabla\partial_i\eta)\Big\} \\ &\quad + (\partial_{jk}v) \cdot \Big\{\nabla\partial_i\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_i\eta\Big\} - \delta^2\Big\{Z\partial_{ijk}(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) + (\partial_j Z)(\partial_{ki})(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) \\ &\quad + (\partial_k Z)\partial_{ij}(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) + (\partial_{jk}Z)\partial_i(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau)\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Par la définition (4.5) de Z et v nous avons $v = \nabla\phi - \delta^2 Z\nabla\eta \Rightarrow \nabla\phi = v + \delta^2 Z\nabla\eta$,

$$(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = Z(1+\delta^2|\nabla\eta|^2) - \nabla\eta\cdot\nabla\phi$$
$$(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = Z - v\cdot\nabla\eta.$$

Par conséquent, on a

$$\partial_{ki}(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = \partial_{ki}Z - v\cdot\nabla\partial_{ki}\eta - (\partial_{ki}v)\cdot\nabla\eta - (\partial_k v)\cdot\nabla\partial_i\eta - (\partial_i v)\cdot\nabla\partial_k\eta.$$

$$\partial_{ij}(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = \partial_{ij}Z - v\cdot\nabla\partial_{ij}\eta - (\partial_{ij}v)\cdot\nabla\eta - (\partial_i v)\cdot\nabla\partial_j\eta - (\partial_j v)\cdot\nabla\partial_i\eta.$$

$$\partial_{jk}(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = \partial_{jk}Z - v\cdot\nabla\partial_{jk}\eta - (\partial_{jk}v)\cdot\nabla\eta - (\partial_j v)\cdot\nabla\partial_k\eta - (\partial_k v)\cdot\nabla\partial_j\eta.$$

Pour que

$$\begin{aligned}(\partial_{ijk}\phi - \delta^2 Z\partial_{ijk}\eta)_t + v\cdot\nabla(\partial_{ijk}\phi - \delta^2 Z\partial_{ijk}\eta) + (1+\delta^2 Z_t + \delta^2 v\cdot\nabla Z)\partial_{ijk}\eta \\ = \delta^2((\partial_j Z)(\partial_{ki}Z) + (\partial_k Z)(\partial_{ij}Z) + (\partial_i Z)(\partial_{jk}Z)) + f_3^{ijk} \text{ où}\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}f_3^{ijk} =& -(\partial_j v)\cdot(\nabla\partial_{ki}\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_{ki}\eta) - (\partial_k v)\cdot(\nabla\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_{ij}\eta) \\ &- (\partial_{jk}v)\cdot(\nabla\partial_i\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_i\eta) - \delta^2\Big\{(\partial_j Z)\Big((\partial_{ki}v)\cdot\nabla\eta + (\partial_i v)\cdot\nabla\partial_k\eta\Big) \\ &+ (\partial_k Z)\Big((\partial_{ij}v)\cdot\nabla\eta + (\partial_i v)\cdot\nabla\partial_j\eta\Big) + (\partial_{jk}Z)(\partial_i v)\cdot\nabla\eta\Big\}.\end{aligned}$$

Nous écrivons maintenant $u = (\eta, b)$ et notons par Λ_m^{DN} et Λ_m^{NN} les m ième dérivées de Fréchet de DN de l'application Λ^{DN} et NN de l'application Λ^{NN} par rapport à u respectivement. Alors

$$\begin{aligned}\partial_{ijk}(\Lambda^{DN}\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) =& f_4^{ijk} + \Lambda^{DN}\partial_{ijk}\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\partial_{ijk}\beta_\tau + \Lambda_1^{DN}[\partial_{ijk}u]\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda_1^{NN}[\partial_{ijk}u]\beta_\tau \\ &+ \Lambda_1^{DN}[\partial_i u]\partial_{jk}\phi + \Lambda_1^{DN}[\partial_j u]\partial_{ki}\phi + \Lambda_1^{DN}[\partial_k u]\partial_{ij}\phi \\ &- \varepsilon^{-1}\Big(\Lambda_1^{NN}[\partial_{ij}u]\partial_k\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_{jk}u]\partial_i\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_{ki}u]\partial_j\beta_\tau\Big) \\ &+ \Lambda_2^{DN}[\partial_{ij}u, \partial_k u]\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_{jk}u, \partial_i u]\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_{ki}u, \partial_j u]\phi \\ &- \varepsilon^{-1}\Big(\Lambda_2^{NN}[\partial_{ij}u, \partial_k u]\beta_\tau + \Lambda_2^{NN}[\partial_{jk}u, \partial_i u]\beta_\tau + \Lambda_2^{NN}[\partial_{ki}u, \partial_j u]\beta_\tau\Big), \text{ où}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_4^{ijk} =& -\varepsilon^{-1}\Big(\Lambda_1^{NN}[\partial_i u]\partial_{jk}\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_j u]\partial_{ki}\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_k u]\partial_{ij}\beta_\tau\Big) + \Lambda_1^{DN}[\partial_{ij}u]\partial_k\phi + \Lambda_1^{DN}[\partial_{jk}u]\partial_i\phi \\ &+ \Lambda_1^{DN}[\partial_{ki}u]\partial_j\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_i u, \partial_j u]\partial_k\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_j u, \partial_k u]\partial_i\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_k u, \partial_i u]\partial_j\phi \\ &- \varepsilon^{-1}\Big(\Lambda_2^{NN}[\partial_i u, \partial_j u]\partial_k\beta_\tau + \Lambda_2^{NN}[\partial_j u, \partial_k u]\partial_i\beta_\tau + \Lambda_2^{NN}[\partial_k u, \partial_i u]\partial_j\beta_\tau\Big) \\ &+ \Lambda_3^{DN}[\partial_i u, \partial_j u, \partial_k u]\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda_3^{NN}[\partial_i u, \partial_j u, \partial_k u]\beta_\tau.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 3.2, on obtient

$$\Lambda^{DN}\partial_{ijk}\phi + \Lambda_1^{DN}[\partial_{ijk}u]\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda_1^{NN}[\partial_{ijk}u]\beta_\tau = \Lambda^{DN}(\partial_{ijk}\phi - \delta^2 Z\partial_{ijk}\eta) - \nabla\cdot(v\partial_{ijk}\eta) + f_5^{ijk},$$

$$\varepsilon^{-1}\Lambda_1^{NN}[\partial_{ij}u]\partial_k\beta_\tau = -\varepsilon^{-1}\delta^2\Lambda^{DN}((\Lambda^{NN}\partial_k\beta_\tau)\partial_{ij}\eta) + f_6^{ijk},$$
$$\varepsilon^{-1}\Lambda_1^{NN}[\partial_{jk}u]\partial_i\beta_\tau = -\varepsilon^{-1}\delta^2\Lambda^{DN}((\Lambda^{NN}\partial_i\beta_\tau)\partial_{jk}\eta) + f_6^{jki},$$
$$\varepsilon^{-1}\Lambda_1^{NN}[\partial_{ki}u]\partial_j\beta_\tau = -\varepsilon^{-1}\delta^2\Lambda^{DN}((\Lambda^{NN}\partial_j\beta_\tau)\partial_{ki}\eta) + f_6^{kij}, \text{ où}$$

$$\begin{aligned}
f_5^{ijk} =& D_b\Lambda^{DN}[\partial_{ijk}b]\phi - \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{NN}[\partial_{ijk}b]\beta_\tau,\\
f_6^{ijk} =& \varepsilon^{-1}\delta^4\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}|\nabla\eta|^2(\partial_{ij}\eta)(\Lambda^{NN}\partial_k\beta_\tau))\\
&+\varepsilon^{-1}\delta^2\nabla\cdot((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{ij}\eta)(\Lambda^{NN}\partial_k\beta_\tau)\nabla\eta) + \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{NN}[\partial_{ij}b]\partial_k\beta_\tau.\\
f_6^{jki} =& \varepsilon^{-1}\delta^4\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}|\nabla\eta|^2(\partial_{jk}\eta)(\Lambda^{NN}\partial_i\beta_\tau))\\
&+\varepsilon^{-1}\delta^2\nabla\cdot((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{jk}\eta)(\Lambda^{NN}\partial_i\beta_\tau)\nabla\eta) + \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{NN}[\partial_{jk}b]\partial_i\beta_\tau.\\
f_6^{kij} =& \varepsilon^{-1}\delta^4\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}|\nabla\eta|^2(\partial_{ki}\eta)(\Lambda^{NN}\partial_j\beta_\tau))\\
&+\varepsilon^{-1}\delta^2\nabla\cdot((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{ki}\eta)(\Lambda^{NN}\partial_j\beta_\tau)\nabla\eta) + \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{DD}[\partial_{ki}b]\partial_j\beta_\tau.
\end{aligned}$$

Par les théorèmes 3.2, 3.3, 3.6 et 3.7, nous voyons que

$$\Lambda_1^{DN}[\partial_k u]\partial_{ij}\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_{ij}u,\partial_k u]\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda_2^{NN}[\partial_{ij}u,\partial_k u]\beta_\tau = f_7^{ijk}.$$
$$\Lambda_1^{DN}[\partial_i u]\partial_{jk}\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_{jk}u,\partial_i u]\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda_2^{DD}[\partial_{jk}u,\partial_i u]\beta_\tau = f_7^{jki}.$$
$$\Lambda_1^{DN}[\partial_j u]\partial_{ki}\phi + \Lambda_2^{DN}[\partial_{ki}u,\partial_j u]\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda_2^{NN}[\partial_{ki}u,\partial_j u]\beta_\tau = f_7^{kij}, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned}
f_7^{ijk} =& D_\eta D_b\Lambda^{DN}[\partial_k\eta,\partial_{ij}b]\phi - \varepsilon^{-1}D_\eta D_b\Lambda^{NN}[\partial_k\eta,\partial_{ij}b]\beta_\tau + D_b^2\Lambda^{DN}[\partial_{ij}b,\partial_k b]\phi\\
&-\varepsilon^{-1}D_b^2\Lambda^{NN}[\partial_{ij}b,\partial_k b]\beta_\tau + \Lambda_1^{DN}[\partial_k u](\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\partial_{ij}\eta)\\
&+\delta^2\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_k\eta)(\partial_{ij}\eta)\Delta\phi)\\
&+\delta^2\nabla\cdot((\partial_{ij}\eta)Z\nabla\partial_k\eta) - \delta^2\nabla\cdot((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_k\eta)(\partial_{ij}\eta)\Delta\phi)\nabla\eta)\\
&+\delta^4\Lambda^{DN}\left\{(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{ij}\eta)\times(\Lambda^{DN}(Z\partial_k\eta) + Z\nabla\eta\cdot\nabla\partial_k\eta - (\partial_k\eta)\nabla\cdot(Z\nabla\eta)\right\}\\
&-\delta^4\nabla\cdot\left\{(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{ij}\eta)\times(\Lambda^{DN}(Z\partial_k\eta) + Z\nabla\eta\cdot\nabla\partial_k\eta - (\partial_k\eta)\nabla\cdot(Z\nabla\eta))\nabla\eta\right\}\\
&-\delta^2\Lambda^{DN}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{ij}\eta)(D_b\Lambda^{DN}[\partial_k b]\phi - \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{NN}[\partial_k b]\beta_\tau))\\
&+\delta^2\nabla\cdot((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{ij}\eta)(D_b\Lambda^{DN}[\partial_k b]\phi - \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{NN}[\partial_k b]\beta_\tau))\nabla\eta).
\end{aligned}$$

f_7^{jki} et f_7^{kij} s'obtiennent de la même façon que f_7^{ijk}. Donc, on a

$$\partial_{ijk}(\Lambda^{DN}\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = \Lambda^{DN}(\partial_{ijk}\phi - \delta^2 Z\partial_{ijk}\eta) - v\cdot\nabla\partial_{ijk}\eta - L^{ijk}\eta + \varepsilon^{-1}\partial_{ijk}\beta_\tau + f_1^{ijk} \tag{4.3}$$

où L^{ijk} est un opérateur linéaire ne dépendent que de $(\eta, b, \delta, \varepsilon^{-1}\beta_\tau)$ défini par

$$L^{ijk}\widetilde{\eta} = \varepsilon^{-1}\delta^2\Lambda^{DN}\left((\Lambda^{NN}\partial_k\beta_\tau)\partial_{ij}\widetilde{\eta} + (\Lambda^{NN}\partial_i\beta_\tau)\partial_{jk}\widetilde{\eta} + (\Lambda^{NN}\partial_j\beta_\tau)\partial_{ki}\widetilde{\eta}\right),$$

$$f_1^{ijk} = f_4^{ijk} - \varepsilon^{-1}(\Lambda^{NN}\partial_{ijk}\beta_\tau + \partial_{ijk}\beta_\tau) - (\nabla\cdot v)\partial_{ijk}\eta + f_5^{ijk} - f_6^{ijk} - f_6^{jki} - f_6^{kij} + f_7^{ijk} + f_7^{jki} + f_7^{kij}.$$

Ainsi, nous introduisons deux nouvelles fonctions ζ_{ijk} et ψ_{ijk} par

$$\begin{cases} \zeta_{ijk} = \partial_{ijk}\eta; \\ \psi_{ijk} = \partial_{ijk}\phi - \delta^2 Z\partial_{ijk}\eta. \end{cases} \tag{4.4}$$

D'après les relations (4.2), (4.3) et (4.4) nous obtenons le système d'équations quasi-linéaires suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_{ijk} + v \cdot \nabla \zeta_{ijk} - \Lambda^{DN} \psi_{ijk} + L^{ijk}\eta = \varepsilon^{-1}\partial_{ijk}\beta_\tau + f_1^{ijk} \\ \partial_t \psi_{ijk} + v \cdot \nabla \psi_{ijk} + \underline{\mathbf{a}}\zeta_{ijk} = \varepsilon^{-1} g_2^{ijk} + f_2^{ijk}, \end{cases} \tag{4.5}$$

où $\underline{\mathbf{a}}$, f_2^{ijk} et g_2^{ijk} sont données par

$$\underline{\mathbf{a}} = 1 + \delta^2 Z_t + \delta^2 v \cdot \nabla Z \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} f_2^{ijk} =& f_3^{ijk} + \delta^2 \Big\{ (\partial_j Z)\partial_{ki}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau) + \partial_j(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\varepsilon^{-1}\partial_{ki}\beta_\tau + (\partial_k Z)\partial_{ij}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau) \\ &+ \partial_k(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\varepsilon^{-1}\partial_{ij}\beta_\tau + (\partial_i Z)(\partial_{jk}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau) + \partial_i(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\varepsilon^{-1}\partial_{jk}\beta_\tau \Big\}, \\ g_2^{ijk} =& \varepsilon^{-2}\delta^2 \Big((\partial_j\beta_\tau)(\partial_{ki}\beta_\tau) + (\partial_k\beta_\tau)(\partial_{ij}\beta_\tau) + (\partial_i\beta_\tau)(\partial_{jk}\beta_\tau) \Big). \end{aligned}$$

Nous allons donner quelques estimations uniformes des coefficients v et $\underline{\mathbf{a}}$, et le reste des termes $f_1 = f_1^{ijk}$ et $f_2 = f_2^{ijk}$. Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante

$$\begin{cases} \partial\phi = \partial_j\phi,\ \partial^2\phi = \partial_{ij}\phi,\ \partial^3\phi = \partial_{ijk}\phi,\ \partial^3\phi - \delta^2 Z\partial^3\eta = \partial_{ijk}\phi - \delta^2 Z(\partial_{ijk}\eta) \\ E = \|\eta\|_{s+3} + \|\nabla\phi\|_{s+2} + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(\partial^3\phi - \delta^2 Z\partial^3\eta)\|_s \end{cases}$$

et on posera $\delta_2 = \delta_1(M_1, \underline{\mathbf{a}}, s+1)$ la constante apparaissant dans la proposition 3.3.

Lemme 4.1. Soit $s > \dfrac{1}{2}d + 3$, $M_1, c_1 > 0$ et supposons que

$$\begin{cases} \|\eta\|_{s+2} + \|\nabla\phi\|_{s+1} \leqslant M_1,\ \|b\|_{s+5} + \|\beta_\tau\|_{s+5} \leqslant M_1 \\ 1 + \eta(x) - b(x) \geqslant c_1 \text{ pour } \ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4.7}$$

Alors, il existe une constante $C = C(M_1, c_1, s) > 0$ telle que pour tout $\delta \in]0, \delta_2]$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ vérifiant $\varepsilon^{-1}\delta^2 \leqslant M_1$, on a

$$\|f_1\|_s \leqslant C(E + 1 + \delta^2\|Z\|_{s+2}).$$

Démonstration. Par la proposition 3.1, pour tout $\delta \in]0, \delta_2]$ on peut construire un difféomorphisme Θ vérifiant les hypothèses $(A1) - (A4)$ avec $q = s+1$ et une constante M indépendante de δ. On peut donc directement évaluer f_5 et f_6 par les propositions 3.9, 3.24, 3.30, le lemme 3.5 et le corollaire 3.6, de sorte que

$$\|(f_5, f_6)\|_s \leqslant C(\|\eta\|_{s+3} + \|\nabla\phi\|_{s+1} + 1).$$

On peut réécrire symboliquement f_4 comme

$$\begin{aligned} f_4 =& -\varepsilon^{-1}(3\Lambda_1^{NN}[\partial u]\partial^2\beta_\tau + 3\Lambda_2^{NN}[\partial u, \partial u]\partial\beta_\tau + \Lambda_3^{NN}[\partial u, \partial u, \partial u]\beta_\tau) \\ &+ 3\Lambda_1^{DN}[\partial^2 u]\partial\phi + 3\Lambda_2^{DN}[\partial u, \partial u]\partial\phi + \Lambda_3^{DN}[\partial u, \partial u, \partial u]\phi, \end{aligned}$$

pour que nous ayons

$$\begin{aligned} \partial f_4 =& -\varepsilon^{-1}(3\Lambda_1^{NN}[\partial u]\partial^3\beta_\tau + 3\Lambda_1^{NN}[\partial^2 u]\partial^2\beta_\tau + 6\Lambda_2^{NN}[\partial u, \partial u]\partial^2\beta_\tau \\ &+ 6\Lambda_2^{NN}[\partial^2 u, \partial u]\partial\beta_\tau + 4\Lambda_3^{NN}[\partial u, \partial u, \partial u]\partial\beta_\tau + 3\Lambda_3^{NN}[\partial^2 u, \partial u, \partial u]\beta_\tau \\ &+ \Lambda_4^{NN}[\partial u, \partial u, \partial u, \partial u]\beta_\tau) + 3\Lambda_1^{DN}[\partial^2 u]\partial^2\phi + 3\Lambda_1^{DN}[\partial^3 u]\partial\phi \\ &+ 3\Lambda_2^{DN}[\partial^2 u, \partial u]\partial\phi + \partial(3\Lambda_2^{DN}[\partial u, \partial u]\partial\phi + \Lambda_3^{DN}[\partial u, \partial u, \partial u]\phi). \end{aligned}$$

Par conséquent, par les propositions 3.26 et 3.30 et le lemme 3.5, on obtient

$$\|f_4\|_s \leqslant \|f_4\|_{s-1} + \|\nabla f_4\|_{s-1} \leqslant C(\|\eta\|_{s+3} + \|\nabla\phi\|_{s+2} + 1).$$

Concernant f_7, on utilise la proposition 3.26 et le lemme 3.5, on voit que

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda_1^{DN}[\partial_k u](\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\partial_{ij}\eta\|_s \\
&\qquad \leqslant C\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\partial_{ij}\eta\|_{s+1} \\
&\qquad \leqslant C\left(\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\nabla(\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\partial_{ij}\eta)\|_s + \|\nabla(\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\partial_{ij}\eta)\|_s\right) \\
&\qquad \leqslant C\left(\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(\nabla\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\nabla\partial_{ij}\eta)\|_s + \delta^2\|(\nabla Z)\partial_{ij}\eta\|_{s+1} + \|\nabla\phi\|_{s+2} + \delta^2\|Z\partial_{ij}\eta\|_{s+1}\right).
\end{aligned}$$

Ici, il découle que

$$\begin{aligned}
\delta^2\|\nabla Z\partial_{ij}\eta\|_{s+1} &\leqslant C\delta^2\left(\|\nabla Z\|_{s+1}\|\partial_{ij}\eta\|_{s-1} + \|\nabla Z\|_{s-1}\|\partial_{ij}\eta\|_{s+1}\right) \\
&\leqslant C\delta^2\left(\|Z\|_{s+2} + \|Z\|_s\|\eta\|_{s+3}\right).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\delta^2\|Z\partial_{ij}\eta\|_{s+1} \leqslant C\delta^2\left(\|Z\|_{s+1} + \|Z\|_s\|\eta\|_{s+3}\right).$$

De plus, par la définition (4.1) de Z et les propositions 3.9 et 3.19, le lemme 3.5 et le corollaire 3.7, on a

$$\|Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau\|_s \leqslant C(\|\nabla\phi\|_{s+1} + 1),$$

ce qui donne aussi

$$\delta^2\|Z\|_s \leqslant C(\|\nabla\phi\|_{s+1} + 1).$$

Par conséquent, on obtient

$$\|\Lambda_1^{DN}[\partial_k u](\partial_{ij}\phi - \delta^2 Z\partial_{ij}\eta\|_s \leqslant C(E + 1 + \delta^2\|Z\|_{s+2}).$$

Les autres termes de f_7 peuvent être évalués par les propositions 3.10, 3.24 et 3.30 et le lemme 3.5. Par exemple, par la proposition 3.10 et le lemme 3.5, on a

$$\begin{aligned}
&\delta^4\|\Lambda^{DN}((1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{ij}\eta)\Lambda^{DN}(Z\partial_k\eta))\|_s \\
&\qquad \leqslant C\delta^3\left(\|(\partial_{ij}\eta)\Lambda^{DN}(Z\partial_k\eta)\|_{s+1}\right) \\
&\qquad \leqslant C\delta^3\left(\|\partial_{ij}\eta\|_{s+1}\|\Lambda^{DN}Z\partial_k\eta\|_{s-1} + \|\Lambda^{DN}(Z\partial_k\eta)\|_{s+1}\right) \\
&\qquad \leqslant C\delta^2\left(\|\eta\|_{s+3}\|Z\partial_k\eta\|_s + \|Z\partial_k\eta\|_{s+2}\right) \\
&\qquad \leqslant C\left(\|\eta\|_{s+3} + \delta^2\|Z\|_{s+2}\right)
\end{aligned}$$

et par la proposition 3.24 on a

$$\begin{aligned}
\|D_b\Lambda^{DN}[\partial_k b]\phi\|_{s+1} \leqslant& \|D_b\Lambda^{DN}[\partial_k b]\nabla\phi\|_s + \|D_b\Lambda^{DN}[\nabla\partial_k b]\phi\|_s + \|D_u D_b\Lambda^{DN}[\nabla u, \partial_k b]\phi\|_s + \|D_b\Lambda^{DN}[\partial_k b]\phi\|_s \\
\leqslant& C(\|\eta\|_{s+3} + \|\nabla\phi\|_{s+2}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|f_7\|_s \leqslant C(E + 1 + \delta^2\|Z\|_{s+2}).$$

Ces estimations, ainsi que le corollaire 3.7, on obtient l'estimation souhaitée. $\square$

Proposition 4.1. Soit $s > \frac{1}{2}(d+7), M_1, c_1 > 0$ et supposons les conditions dans (4.7). Alors, il existe une constante $C = C(M_1, c_1, s) > 0$ telle que, pour tout $\delta \in]0, \delta_2]$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ vérifiant $\varepsilon^{-1}\delta^2 \leqslant M_1$, on a

$$\|Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau\|_{s+2} + \delta\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\|_{s+2} \leqslant C(E+1),$$

$$\|v\|_{s+2} + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} v\|_{s+2} \leqslant CE.$$

Démonstration. Notons que nous avons le difféomorphisme Θ satisfaisant les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = s+1$ et l'estimation

$$\|Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau\|_s + \delta^2\|Z\|_s \leqslant C(\|\nabla\phi\|_{s+1} + 1).$$

Afin d'évaluer les dérivées supérieurs de $Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau$, nous allons dériver une expression de Z.

$$(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)Z = \Lambda^{DN}\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi$$

et en utilisant (4.2) et la définition (4.1) de v, on voit que

$$\begin{aligned}(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)\partial_{ijk}Z =& (\Lambda^{DN} + \nabla\eta\cdot\nabla)(\partial_{ijk}\phi - \delta^2 Z\partial_{ijk}\eta) - L^{ijk}\eta + \varepsilon^{-1}\partial_{ijk}\beta_\tau \\ & - \delta^2\Big(2Z(\nabla\partial_i\eta\cdot\nabla\partial_{jk}\eta + \nabla\partial_j\eta\cdot\nabla\partial_{ki}\eta + \nabla\partial_k\eta\cdot\nabla\partial_{ij}\eta) \\ & + (\partial_i Z)\partial_{jk}|\nabla\eta|^2 + (\partial_j Z)\partial_{ki}|\nabla\eta|^2 + (\partial_k Z)\partial_{ij}|\nabla\eta|^2 + (\partial_{jk}Z)\partial_i|\nabla\eta|^2 \\ & + (\partial_{ki}Z)\partial_j|\nabla\eta|^2 + (\partial_{ij}Z)\partial_k|\nabla\eta|^2\Big) + \nabla\partial_i\eta\cdot\nabla\partial_{jk}\phi + \nabla\partial_j\eta\cdot\nabla\partial_{ki}\phi + \nabla\partial_k\eta\cdot\nabla\partial_{ij}\phi \\ & + \nabla\partial_{jk}\eta\cdot\nabla\partial_i\phi + \nabla\partial_{ki}\eta\cdot\nabla\partial_j\phi + \nabla\partial_{ij}\eta\cdot\nabla\partial_k\phi + \delta^2(\nabla\eta\cdot\nabla Z)\partial_{ijk}\eta + f_1^{ijk}.\end{aligned}$$

Donc, par les propositions 3.9 et 3.19, les lemmes 3.5, 3.6 et 4.1 et une inégalité d'interpolation, on obtient

$$\begin{aligned}\|\partial_{ijk}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\|_{s-1} + & \delta\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\partial_{ijk}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\|_{s-1} \\ & \leqslant C(E + 1 + \delta^2\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}Z\|_{s+1} + \delta^{\frac{1}{2}}\|f_1\|_{s-\frac{1}{2}}) \\ & \leqslant C(E + 1 + \delta^2\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}Z\|_{s+1} + \delta^2\|Z\|_{s+\frac{3}{2}}) \\ & \leqslant \varepsilon(\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\|_{s+2} + \|Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\|_{s+2}) + C_\varepsilon(E+1) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Cela donne les estimations souhaitées pour $Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau$, de sorte que nous avons également

$$\delta^2\|Z\|_{s+2} + \delta^2\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}Z\|_{s+2} \leqslant C(E+1).$$

Puisque $v = \nabla\phi - \delta^2 Z\nabla\eta$, on obtient $\|v\|_{s+2} \leqslant CE$. De plus, d'après le lemme 3.6 on a

$$\begin{aligned}\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\partial^2 v\|_s \leqslant & \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}(\partial^3\phi - \delta^2 Z\partial^3\eta)\|_s + \delta^2(\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}((\partial^2 Z)(\partial\eta))\|_s + 2\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}((\partial Z)(\partial^2\eta)\|_s \\ \leqslant & E + C\delta^2(\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}Z\|_{s+2} + \|Z\|_{s+2} + \|Z\|_s\|\eta\|_{s+3}).\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons l'estimation souhaitée pour v. $\square$

Proposition 4.2. Soit $s > \frac{1}{2}(d+7)$, $M_1, c_1 > 0$ et supposons tenir la condition dans (4.7). Alors il existe une constante $C = C(M_1, c_1, s) > 0$ telle que, pour tout $\delta \in]0, \delta_2]$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ vérifiant $\varepsilon^{-1}\delta^2 \leqslant M_1$, on a

$$\|f_1\|_s \leqslant C(E+1),\ \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} f_2\|_s \leqslant C\varepsilon^{-1}\delta(E+1).$$

Démonstration. L'estimation de f_1 est une conséquence directe du lemme 4.1 et de la proposition 4.1. Il découle des lemmes 3.5 et 3.6 et de la proposition 4.1 que $\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}} f_3\|_s \leqslant CE$. Ceci et la proposition 4.1 donnent l'estimation souhaitée pour f_2. □

Proposition 4.3. Soit $s > \frac{1}{2}(d+7)$, $M_1, c_1 > 0$. En plus des conditions dans (4.7) on suppose que $\|\beta_{\tau\tau}\|_{s+1} \leqslant M_1$ et $\|(\eta_t, \phi_t)\|_s \leqslant M_1 \varepsilon^{-1}$. Alors il existe une constante $C = C(M_1, c_1, s) > 0$ telle que pour tout $\delta \in]0, \delta_2]$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ vérifiant $\varepsilon^{-1}\delta^2 \leqslant M_1$, la fonction $\underline{\mathbf{a}}$ définie dans (4.6) satisfait

$$\|\underline{\mathbf{a}} - 1\|_{s-1} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \quad \|\underline{\mathbf{a}} - 1\|_{s+1} \leqslant C\left(\varepsilon^{-1}(E+1) + \|(\eta_t, \phi_t)\|_{s+2}\right).$$

Démonstration. Au vu de la proposition 4.1 on a

$$\|v\|_s + \delta^2\|Z\|_s \leqslant C, \quad \|v\|_{s+2} \leqslant CE \ \text{ et } \ \delta^2\|Z\|_{s+2} \leqslant C(E+1).$$

Dérivons la relation suivante par rapport à t

$$(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)Z = \Lambda^{DN}\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau + \nabla\eta \cdot \nabla\phi \ \text{ on a}$$

$$\begin{aligned}(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)Z_t = &- 2\delta^2(\nabla\eta \cdot \nabla\eta_t)Z + \Lambda^{DN}\phi_t - \varepsilon^{-2}\Lambda^{NN}\beta_{\tau\tau} + \Lambda_1^{DN}[u_t]\phi \\ &- \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}[u_t]\beta_\tau + \nabla\eta \cdot \nabla\phi_t + \nabla\eta_t \cdot \nabla\phi.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Par conséquent, par les propositions 3.9, 3.19, 3.26, 3.29 et le lemme 3.5, nous voyons que

$$\delta^2\|Z_t\|_{s-1} \leqslant C\varepsilon^{-1}$$

et que

$$\delta^2\|Z_t\|_{s+1} \leqslant \delta^2(\|\nabla Z_t\|_s + \|Z_t\|_s) \leqslant C\left(\varepsilon^{-1}(E+1) + \|(\eta_t, \phi_t)\|_{s+2}\right).$$

Puisque $\underline{\mathbf{a}} - 1 = \delta^2 v \cdot \nabla Z + \delta^2 Z_t$, nous obtenons les estimations souhaitées. □

Remarque 4.1. Les fonctions Z et v dans (4.1) sont liées au potentiel de vitesse Φ par $\delta^2 Z = (\partial_z\Phi)|_{\Gamma(t)}$ et $v = (\nabla\Phi)|_{\Gamma(t)}$, de sorte que la fonction $\underline{\mathbf{a}}$ dans (4.6) puisse être écrit en termes de pression p dans (2.54) comme

$$\underline{\mathbf{a}} = -(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_z p - \delta^2\nabla\eta \cdot \nabla p)|_{\Gamma(t)}.$$

La proposition suivante assure la positivité de cette fonction $\underline{\mathbf{a}}$, à savoir la condition de signe de Rayleight-Taylor. Soit $\delta_3 = \delta_1(M_1, c_1, r+4)$ la constante apparaissant dans la proposition 3.3

Proposition 4.4. Soit $r > \frac{1}{2}d, M_1, c_1 > 0$ et supposons que

$$\begin{cases} \|\beta_\tau\|_{r+\frac{9}{2}} + \|\beta_{\tau\tau}\|_{r+4} + \|\beta_{\tau\tau\tau}\|_{r+2} + \|(\eta, b)\|_{r+5} + \|\nabla\phi\|_{r+3} \leqslant M_1, \\ \left\|\eta_t(t) - \varepsilon^{-1}\beta_\tau\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\|_{r+\frac{9}{2}} + \left\|\nabla\left(\phi_t(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2\right)\right\|_{r+3} \leqslant M_1, \\ \|\eta_{tt}\|_{r+\frac{5}{2}} + \|\nabla\phi_{tt}\|_{r+1} \leqslant M_1\varepsilon^{-2}, \\ 1 + \eta(x,t) - b(x,t) \geqslant c_1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Alors, il existe une constante $C = C(M_1, c_1, r) > 0$, telle que pour tout $\delta \in]0, \delta_3]$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ vérifiant $\varepsilon^{-1}\delta^2 \leqslant M_1$, la fonction $\underline{\mathbf{a}}$ définie dans (4.6) satisfait

$$\begin{cases} \left\| \underline{\mathbf{a}}(t) - \left(1 + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \left(1 - \delta^2 \left|\nabla\eta(t)\right|^2\right) \beta_{\tau\tau}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \sigma\underline{\mathbf{a}}^{(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right\|_r \leqslant C\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right) \\ \\ \left\| \underline{\mathbf{a}}_t(t) - \varepsilon^{-3}\delta^2\beta_{\tau\tau\tau}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\|_r \leqslant C\varepsilon^{-1} \text{ pour } \ 0 < t \leqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{4.10}$$

où $\underline{\mathbf{a}}^{(0)}$ est la fonction définie par (2.58). En particulier, si l'on suppose de plus les hypothèses 2.1 et 2.2 alors, il existe de petites constantes ε_0, $\gamma_0 > 0$ telles que

$$\frac{1}{2}c \leqslant \underline{\mathbf{a}}(x,t) \leqslant C\varepsilon^{-1}, \ \underline{\mathbf{a}}_t(x,t) \leqslant C\varepsilon^{-1} \ \text{ tant que } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ \text{ et } \ \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right| \leqslant \gamma_0.$$

Démonstration. Notons que sous notre hypothèse nous avons le difféomorphisme Θ satisfaisant les hypothèses (A1)-(A4) avec $q = r + 4$ et que l'on a $\partial_t^k = \varepsilon^{-k}\partial_\tau^k\beta$ et

$$\begin{cases} \left\|\eta(t) - \eta^{(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\|_{r+\frac{9}{2}} + \left\|\nabla\left(\phi(t) - \phi^{(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right\|_{r+3} \leqslant C\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right), \\ \|\eta_t(t)\|_{r+\frac{9}{2}} + \|\nabla\phi_t(t)\|_{r+3} \leqslant C\varepsilon^{-1} \ \text{ où } \ 0 < t < \varepsilon, \end{cases} \tag{4.11}$$

où $(\eta^{(0)}, \phi^{(0)})$ est la solution approchée définie par (2.57). Par la définition de $\underline{\mathbf{a}}$, on a

$$\underline{\mathbf{a}}_t = \delta^2(Z_{tt} + v\cdot\nabla Z_t + v_t\cdot\nabla Z).$$

De la même manière que dans la preuve de la proposition précédente, on obtient facilement

$$\delta^2\|Z\|_{r+1} + \|v\|_{r+1} \leqslant C \ \text{ et } \ \delta^2\|Z_t\|_{r+1} + \|v_t\|_{r+1} \leqslant C\varepsilon^{-1}.$$

Dérivée second de la relation suivante par rapport à t

$$(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)Z = \Lambda^{DN}\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned}(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)(Z_{tt} - \varepsilon^{-3}\beta_{\tau\tau\tau}) = &- 4\delta^2(\nabla\eta\cdot\nabla\eta_t)Z_t - 2\delta^2(\nabla\eta\cdot\nabla\eta_{tt} + |\nabla\eta_t|^2)Z \\ &- \varepsilon^{-3}\delta^2|\nabla\eta|^2\beta_{\tau\tau\tau} + \Lambda^{DN}\phi_{tt} - \varepsilon^{-3}(\Lambda^{NN}\beta_{\tau\tau\tau} + \beta_{\tau\tau\tau}) \\ &+ \Lambda_1^{DN}[u_{tt}]\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda_1^{NN}[u_{tt}]\beta_\tau + 2\Lambda_1^{DN}[u_t]\phi_t \\ &- 2\varepsilon^{-2}\Lambda_1^{NN}[u_t]\beta_{\tau\tau} + 2\nabla\eta_t\cdot\nabla\phi_t + \Lambda_2^{DN}[u_t, u_t]\phi \\ &- \varepsilon^{-1}\Lambda_2^{NN}[u_t, u_t]\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi_{tt} + \nabla\eta_{tt}\cdot\nabla\phi.\end{aligned}$$

Ce qui, avec les propositions 3.9, 3.24 et 3.29, impliquent que

$$\delta^2\|Z_{tt} - \varepsilon^{-3}\beta_{\tau\tau\tau}\|_r \leqslant C\varepsilon^{-1}.$$

Par conséquent, nous obtenons la deuxième estimation en (4.10). Pour montrer la première estimation nous notons d'abord que

$$\|Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau\|_r \leqslant C \ \text{ et } \ \|Z_t - \varepsilon^{-2}\beta_{\tau\tau}\|_r \leqslant C\varepsilon^{-1}.$$

Au vu de (4.8), on peut réécrire Z_t comme $Z_t = Z_t^{(0)} + Z_t^{(1)}$, où

$$\begin{aligned}
\delta^2 Z_t^{(0)} =& \delta^2 \partial_t \Big\{ -\nabla\cdot((1+\eta-b)\nabla\phi) + \nabla\eta\cdot\nabla\phi + \frac{1}{\varepsilon}(1-\delta^2|\nabla\eta|^2)\beta_\tau \\
&+ \frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta_\tau + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_\tau)\Big\} \\
=& \left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)(1-\delta^2|\nabla\eta|^2)\beta_{\tau\tau} + \frac{\delta^2}{\varepsilon}(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)\cdot\nabla\beta_\tau \\
&+ \left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2 \nabla\cdot\left((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta_{\tau\tau} + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\right) \\
&+ \delta^2\Big\{ -\nabla\cdot((1+\eta-b)\nabla(\phi_t - \frac{1}{2}\delta^2 b_t^2) + (\eta_t - b_t)\nabla\phi) + \nabla(\eta_t - b_t)\cdot\nabla\phi \\
&+ \nabla\eta\cdot\nabla(\phi_t - \frac{1}{2}\delta^2 b_t^2) - 2\frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta\cdot\nabla(\eta_t - b_t) \\
&+ \frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\cdot((\eta_t - b_t)(\nabla\eta)\beta_\tau + (1+\eta-b)\nabla((\eta_t - b_t)\beta_\tau))\Big\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Z_t^{(1)} =& -\delta^2|\nabla\eta|^2(Z_t - \varepsilon^{-1}\beta_{\tau\tau}) - 2\delta^2(\nabla\eta\cdot\nabla\eta_t)(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau) \\
&+ \Big\{\Lambda^{DN}\phi_t + \nabla\cdot((1+\eta-b)\nabla\phi_t\Big\} + \Big\{\Lambda_1^{DN}[u_t]\phi + \nabla\cdot((\eta_t - b_t)\nabla\phi)\Big\} \\
&- \varepsilon^{-2}\Big\{\Lambda^{NN}\beta_{\tau\tau} + \beta_{\tau\tau} + \delta^2\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta_{\tau\tau} + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\Big\} \\
&- \varepsilon^{-1}\Big\{\Lambda_1^{NN}[u_t]\beta_\tau + \delta^2\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\eta_t)\beta_\tau + (\eta_t - b_t)(\nabla\eta)\beta_\tau + (1+\eta-b)(\eta_t - b_t)\nabla\beta_\tau)\Big\}.
\end{aligned}$$

Ici, par hypothèse, on a

$$\|\eta_t - b_t\|_{r+4} \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad \left\|\nabla\left(\phi_t - \frac{1}{2}\delta^2 b_t^2\right)\right\|_{r+4} \leqslant M_1.$$

Par les propositions 3.11, 3.23, 3.31 et 3.32 on a aussi $\|Z_t^{(1)}\|_r \leqslant C$.

D'autre part, on peut réécrire $\delta^2 v\cdot\nabla Z$ comme

$$\delta^2 v\cdot\nabla Z = \frac{\delta^2}{\varepsilon}(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)\cdot\nabla\beta_\tau + \delta^2\left(v\cdot\nabla(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau) - \frac{\delta^2}{\varepsilon}(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\nabla\eta\cdot\nabla\beta_\tau\right).$$

Par conséquent, on obtient

$$\left\|\underline{\mathbf{a}} - \left(1 + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\left(1 - \delta^2|\nabla\eta|^2\right)\beta_{\tau\tau} + \alpha^{(0)}\right)\right\|_r \leqslant C\delta^2, \text{ où}$$

$$\alpha^{(0)} := 2\frac{\delta^2}{\varepsilon}(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta)\cdot\nabla\beta_\tau + \frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\cdot((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta_{\tau\tau} + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}).$$

Compte tenu de (2.58) et (4.11), nous obtenons $\left\|\alpha^{(0)} - \sigma\underline{\mathbf{a}}^{(0)}\right\|_r \leqslant C\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right)$. Ceux-ci montrent la première estimation en (4.10). La dernière assertion de la proposition suit directement à partir de (4.10) et de l'inégalité de Sobolev. D'où le résultat. $\square$

4.2 Linéarisation des équations

On dérive la deuxième équation de (2.34) par rapport à ∂, on obtient

$$\phi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \frac{\delta^2}{2}(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)^2 = 0.$$

$$\partial\phi_t + \partial\eta + \nabla\partial\phi\cdot\nabla\phi + \delta^4\nabla\partial\eta\nabla\eta Z^2 - \delta^2 Z\partial(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) - \delta^2 Z(\nabla\partial\eta\cdot\nabla\phi) - \delta^2 Z(\nabla\eta\cdot\nabla\partial\phi) = 0.$$

$$\partial\phi_t + \partial\eta + (\nabla\partial\phi - \delta^2 Z\nabla\partial\eta)\cdot\nabla\phi - \delta^2 Z(\nabla\partial\phi - \delta^2 Z\nabla\partial\eta)\cdot\nabla\eta - \delta^2 Z\partial(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = 0.$$

$$\partial\phi_t + \partial\eta + v\cdot(\nabla\partial\phi - \delta^2 Z\nabla\partial\eta) - \delta^2 Z\partial(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau) = 0.$$

On sait que $\partial\eta_t = \partial(\Lambda^{DN}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{NN}\beta_\tau)$, on a

$$\partial\phi_t + \partial\eta + v\cdot(\nabla\partial\phi - \delta^2 Z\nabla\partial\eta) - \delta^2 Z\partial\eta_t = 0$$

$$(\partial\phi - \delta^2 Z\partial\eta)_t + v\cdot\nabla(\partial\phi - \delta^2 Z\partial\eta) + (1 + \delta^2 Z_t + \delta^2 v\cdot\nabla Z)\partial\eta = 0.$$

Par le théorème 3.2, on a

$$\partial\eta_t = \Lambda^{DN}(\partial\phi - \delta^2 Z\widetilde{\eta}) - \nabla\cdot(v\widetilde{\eta}) + D_b\Lambda^{DN}[\partial b]\phi + \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{NN}[\partial b]\beta_{\tau.}$$

Introduisons de nouvelle fonctions ζ et ψ par $\zeta := \widetilde{\eta}$ et $\psi := \partial\phi - \delta^2 Z\partial\eta$. Nous obtenons

$$\begin{cases} \zeta_t + \nabla\cdot(v\zeta) - \Lambda^{DN}\psi = D_b\Lambda^{DN}[\partial b]\phi + \varepsilon^{-1}D_b\Lambda^{NN}[\partial b]\beta_\tau \\ \psi_t + v\cdot\nabla\psi + \underline{\mathbf{a}}\zeta = 0. \end{cases}$$

4.2.1 Estimations d'énergie

Considérons le système ci-dessus dans le cas où $v = 0$.

$$\begin{cases} \partial_t\zeta_{ijk} - \Lambda^{DN}\psi_{ijk} = 0 \\ \partial_t\psi_{ijk} + \underline{\mathbf{a}}\zeta_{ijk} = 0 \end{cases}$$

qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^{DN} \\ \underline{\mathbf{a}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix} = 0$$

On considère maintenant le système d'équations linéaires de la forme

$$U_t + \mathcal{A}U = 0, \text{ avec } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^{DN} \\ \underline{\mathbf{a}} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = (\zeta,\psi)^T.$$

Trouvons un opérateur matriciel $\mathcal{A}_0$ défini positif tel que l'opérateur matriciel $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0\mathcal{A}$ soit anti-symétrique, on dit que l'opérateur $\mathcal{A}_0$ est un symétriseur pour le système(équation linéarisée). Posons

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^{DN} \\ \underline{\mathbf{a}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}} & 0 \\ 0 & \Lambda^{DN} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{a}} & 0 \\ 0 & \Lambda^{DN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^{DN} \\ \underline{\mathbf{a}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{\mathbf{a}}\Lambda^{DN} \\ \Lambda^{DN}\underline{\mathbf{a}} & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que la fonction énergétique correspondante est définie par

$$E(t) := (\mathcal{A}_0 U, U) = (\underline{\mathbf{a}}\zeta, \zeta) + (\Lambda^{DN}\psi, \psi).$$

Considérons maintenant le système d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_{ijk} + v \cdot \nabla \zeta_{ijk} - \Lambda^{DN}\psi_{ijk} + L^{ijk}\eta = \varepsilon^{-1}\partial_{ijk} g_1 + f_1^{ijk}, \quad \zeta_{ijk} = \partial_{ijk}\eta \\ \partial_t \psi_{ijk} + v \cdot \nabla \psi_{ijk} + \underline{\mathbf{a}}\zeta_{ijk} = \varepsilon^{-1} g_2^{ijk} + f_2^{ijk} \end{cases} \tag{4.12}$$

Où, a, $v = (v_1, \cdots, v_n)^T$, $f_1 = (f_1^{ijk})$, $f_2 = (f_2^{ijk})$ sont des fonction de x et t et peuvent dépendre de δ et ε, alors que g_1 et $g_2 = (g_2^{ijk})$ sont des fonction de x et $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$, $\Lambda^{DN} = \Lambda^{DN}(\eta, b, \delta)$ est l'application de DN et L^{ijk} sont des opérateurs linéaires défini par

$$L^{ijk}\eta = \Lambda^{DN}\Big(p_k\partial_{ij}\eta + p_i\partial_{jk}\eta + p_j\partial_{ki}\eta\Big)$$

Où $p = (p_1, \cdots, p_d)$ sont des fonction de x et t et peuvent dépendre de δ et ε.

En dérivant $E(t)$ par rapport à t et en utilisant la relation (4.1) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) =& (\underline{\mathbf{a}}_t\zeta, \zeta) + 2(\underline{\mathbf{a}}\zeta, \zeta_t) + ([\partial_t, \Lambda^{DN}]\psi, \psi) + 2(\Lambda^{DN}\psi, \psi_t). \\ =& (\underline{\mathbf{a}}_t\zeta, \zeta) + ((\nabla\cdot(\underline{\mathbf{a}}v))\zeta, \zeta) + 2(\underline{\mathbf{a}}\zeta, f_1) - 2(\underline{\mathbf{a}}\zeta, L\eta) \\ &+ ([\partial_t, \Lambda^{DN}]\psi, \psi) - 2(\Lambda^{DN}\psi, v\cdot\nabla\psi) + 2(\Lambda^{DN}\psi, f_2). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Remarque 4.2. Il résulte de la proposition 3.9 que $\|L^{ijk}\eta\|_s \leqslant C\delta^{-1}\|p\|_{s+1}\|\eta\|_{s+3}$ donc nous pouvons considérer L^{ijk} dans (4.12) comme un opérateur d'ordre inférieur en fixant le paramètre δ. Ce pendant, pour obtenir une estimation uniforme de la solution par rapport à δ nous devons utiliser l'estimation $\|L^{ijk}\eta\|_s \leqslant C\|p\|_{s+2}\|\eta\|_{s+4}$, de sorte que $L^{ijk}\eta$ ne peut pas être considérer comme un terme d'ordre inférieur. Notons que $\|\eta\|_{s+4}$ dans la dernière estimation est optimale car Λ^{DN} fait converger un second opérateur différentiel d'ordre lorsque δ passe à zéro.

La proposition suivante est l'une des estimations uniformes de la solution pour les équations linéarisées.

Proposition 4.5. Soit $r > \dfrac{1}{2}d$. En plus des hypothèses (A1) et (A2) avec $q = r+1$, on suppose que

$$\begin{cases} \|(\eta, b)\|_{r+2} \leqslant M, \ \|(\eta_t, b_t)\|_{r+1} \leqslant M\varepsilon^{-1}, \ \|v\|_{r+1} \leqslant M, \ \|p\|_{r+3} \leqslant M \\ M^{-1} \leqslant \underline{\mathbf{a}}(x,t) \leqslant M\varepsilon^{-1}; \ \underline{\mathbf{a}}_t(x,t) \leqslant M\varepsilon^{-1}; \ \|\nabla\underline{\mathbf{a}}\|_{r+2} \leqslant M\varepsilon^{-1}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Alors, il existe une constante $C = C(M, c, r) > 0$ indépendante de δ et ε telle que, pour toute solution lisse (η, ζ, ψ) de (4.12), on a

$$\begin{aligned} \|\zeta(t)\|^2 + \left\|\left(\Lambda_0^{DN}\right)^{\frac{1}{2}}\psi(t)\right\|^2 \leqslant & Ce^{Ct/\varepsilon}\Big\{\|\eta(0)\|_4^2 + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}\psi(0)\|^2 \\ &+ \left(\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}}\Big(\|g_1(\tau)\|_4 + \|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}g_2(\tau)\|\Big)\,d\tau\right)^2 \\ &+ \int_0^t e^{-C\frac{\widetilde{t}}{\varepsilon}}\Big(\varepsilon^{-1}\left(\|f_1(\widetilde{t})\|^2 + \|\eta(\widetilde{t})\|^2\right) + \varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{\frac{1}{2}}f_2(\widetilde{t})\|^2\Big)\,d\widetilde{t}\Big\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Ici, en utilisant la relation (4.13) et par définition nous avons

$$(\underline{\mathbf{a}}\zeta, L\eta) = \sum_{ijk=1}^{d} \Big\{ (\underline{\mathbf{a}}\partial_{ijk}\eta, \Lambda^{DN}(p_k\partial_{ij}\eta) + (\underline{\mathbf{a}}\partial_{ijk}\eta, \Lambda^{DN}(p_i\partial_{jk}\eta) + (\underline{\mathbf{a}}\partial_{ijk}\eta, \Lambda^{DN}(p_j\partial_{ki}\eta) \Big\}.$$

En utilisant l'intégration par partie, les propositions 3.12, 3.14 et 3.15 et les lemmes 3.3 et 3.5 nous avons

$$\begin{aligned} 2\left(\underline{\mathbf{a}}\partial_{ijk}\eta, \Lambda^{DN}(p_k\partial_{ij}\eta)\right) = &-\Big(\partial_{ij}\eta, (\partial_k\underline{\mathbf{a}})\Lambda^{DN}(p_k\partial_{ij}\eta) + \underline{\mathbf{a}}[\partial_k, \Lambda^{DN}](p_k\partial_{ij}\eta) \\ &+ \underline{\mathbf{a}}\Lambda^{DN}((\partial_k p_k)\partial_{ij}\eta) + [\underline{\mathbf{a}}, \Lambda^{DN}](p_k\partial_{ijk}\eta) + [\Lambda^{DN}, p_k](\underline{\mathbf{a}}\partial_{ijk}\eta)\Big). \\ 2\Big|\left(\underline{\mathbf{a}}\partial_{ijk}\eta, \Lambda^{DN}(p_k\partial_{ij}\eta)\right)\Big| \leqslant & \sqrt{(\Lambda^{DN}((\partial_k\underline{\mathbf{a}})\partial_{ij}\eta), (\partial_k\underline{\mathbf{a}})\partial_{ij}\eta)}\sqrt{\Lambda^{DN}(p_k)\partial_{ij}\eta, (p_k)\partial_{ij}\eta)} \\ &+ \|\underline{\mathbf{a}}\partial_{ij}\eta\|_1 \|[\partial_k, \Lambda^{DN}](p_k\partial_{ij}\eta\|_{-1} \\ &+ \sqrt{\Lambda^{DN}(\underline{\mathbf{a}}\partial_{ij}\eta), \underline{\mathbf{a}}\partial_{ij}\eta)}\sqrt{\Lambda^{DN}((\partial_k p_k)\partial_{ij}\eta, (\partial_k p_k)\partial_{ij}\eta)} \\ &+ \Big(\|[\underline{\mathbf{a}}, \Lambda^{DN}](p_k\partial_{ijk}\eta\|_{-1} + \|[\Lambda^{DN}, p_k](\underline{\mathbf{a}}\partial_{ijk}\eta)\|_{-1}\Big)\|\partial_{ij}\eta\|_1 \\ \leqslant & C\left(\|\nabla\underline{\mathbf{a}}\|_{r+2} + \|\underline{\mathbf{a}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right)\|p\|_{r+3}\|\eta\|_3^2. \end{aligned}$$

Les autres termes de droite de (4.13) peuvent être évalués par les propositions 3.17, 3.18 et 3.12 et le lemme 3.3, donc

$$\frac{d}{dt}E(t) \leqslant C\varepsilon^{-1}E(t) + C\Big(\varepsilon^{-1}(\|f_1(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2) + \varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}f_2(t)\|^2\Big).$$

Ainsi, avec l'inégalité croissante de Gronwall on a

$$E(t) \leqslant Ce^{Ct/\varepsilon}E(0) + \int_0^t e^{-C\tilde{t}/\varepsilon}\Big\{\varepsilon^{-1}\left(\|f_1(\widetilde{t})\|^2 + \|\eta(\widetilde{t})\|^2\right) + \varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}f_2(\widetilde{t})\|^2 d\widetilde{t}\Big\}$$

et la relation

$$\|\zeta(t)\|^2 + \|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(t)\|^2 \leqslant CE(t), \quad E(0) \leqslant C\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(0)\|^2 \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} \|\zeta(t)\|^2 + \|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(t)\|^2 \leqslant & Ce^{Ct/\varepsilon}\Big\{\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(0)\|^2 \\ &+ \int_0^t e^{-C\tilde{t}/\varepsilon}\Big(\varepsilon^{-1}(\|f_1(\widetilde{t})\|^2 + \|\eta(\widetilde{t})\|^2) + \varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}f_2(\widetilde{t})\|^2\Big)d\widetilde{t}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

D'autres part, nous considérerons le cas général. Soit (η, ζ, ψ) une solution lisse de (4.12) et définissons $(\eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$ et $(\overline{\eta}, \overline{\zeta})$ par

$$\begin{aligned} \eta^{(0)}(x,t) :=& \eta(x,0) + \int_0^{t/\varepsilon} g_1(\tau)d\tau; \quad \zeta_{ijk}^{(0)} := \partial_{ijk}\eta^{(0)} \\ \overline{\eta} :=& \eta - \eta^{(0)} \quad , \quad \overline{\zeta} := \zeta - \zeta^{(0)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} \partial_t\overline{\zeta}_{ijk} + v\cdot\nabla\overline{\zeta}_{ijk} - \Lambda^{DN}\psi_{ijk} + L^{ijk}\overline{\eta} = \overline{f}_1^{ijk}, \quad \overline{\zeta}_{ijk} = \partial_{ijk}\overline{\eta} \\ \partial_t\psi_{ijk} + v\cdot\nabla\psi_{ijk} + \underline{\mathbf{a}}\overline{\zeta}_{ijk} = \overline{f}_2^{ijk}, \end{cases}$$

et $\overline{\eta}|_{t=0} = 0$, où

$$\overline{f}_1^{ijk} = f_1^{ijk} - v\cdot\nabla\zeta_{ijk}^{(0)} - L^{ijk}\eta^{(0)}, \quad \overline{f}_2^{ijk} = \varepsilon^{-1}g_2^{ijk} + f_2^{ijk} - \underline{\mathbf{a}}\zeta_{ijk}^{(0)}.$$

Donc, en appliquant l'estimation obtenu dans le cas précédent (4.15) on a

$$\|\overline{\zeta}(t)\|^2 + \|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(t)\|^2 \leqslant C e^{Ct/\varepsilon}\Big\{\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(0)\|^2 + \int_0^t e^{-C\widetilde{t}/\varepsilon}\Big(\varepsilon^{-1}\left(\|\overline{f}_1(\widetilde{t})\|^2 + \|\overline{\eta}(\widetilde{t})\|^2\right) + \varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\overline{f}_2(\widetilde{t})\|^2\Big) d\widetilde{t}\Big\}.$$

Il est facile de voir que

$$\|\zeta(t)\| \leqslant \|\overline{\zeta}(t)\| + \|\eta^{(0)}\|_3 + \int_0^{t/\varepsilon}\|g_1(\tau)\|_3 d\tau \quad \text{et}$$

$$\varepsilon^{-1}\left(\|\overline{f}_1(t)\|^2 + \|\overline{\eta}(t)\|^2\right) + \varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\overline{f}_2(t)\|^2 \leqslant C\Big\{\varepsilon^{-1}\Big(\|f_1(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + \|\eta(0)\|_4^2\Big) + \varepsilon\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}f_2(t)\|^2 + \varepsilon^{-1}\Big(\int_0^{t/\varepsilon}\|g_1(\tau)\|_4 + \|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}g_2(\tau)\|d\tau\Big)^2\Big\}.$$

En résumant ces estimations ci-dessus nous obtenons les résultats. □

4.3 Preuves des principaux théorèmes

Cette section est consacrée à la justification complète du système asymptotique du modèle de tsunami en eaux peu profondes. Plus précisément, nous prouvons que les solutions aux équations des ondes de surface existent sur l'échelle de temps pertinente associée au régime asymptotique et nous montrons que ces solutions restent proches de l'approximation fourni par le modèle de tsunami.

4.3.1 Preuve du théorème 2.1

Soit (η, ϕ) la solution de (2.34)-(2.35) et posons

$$\xi(t)^2 := \|\eta(t)\|_{s+3}^2 + \|\nabla\phi(t)\|_{s+2}^2 + \|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\left(\partial^3\phi(t) - \delta^2 Z\partial^3\eta(t)\right)\|_s^2,$$

où Z est déterminé dans (4.5). Supposons que la solution (η, ϕ) satisfait

$$\begin{cases} \xi(t) \leqslant N_1, \ \|\eta(t)\|_{s+2} + \|\nabla\phi(t)\|_{s+1} \leqslant N_2, \\ 1 + \eta(x,t) - b(x,t) \geqslant \dfrac{1}{2}c_0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \quad 0 < \delta \leqslant \delta_0, \end{cases} \tag{4.16}$$

où les constantes positives N_1, N_2 et δ_0 seront déterminées plus tard. Par la proposition 3.3, il existe une constante $\delta_1 = \delta_1(M_1, N_2, c_0, s)$ indépendante de N_1 telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_1]$ on peut construire un difféomorphisme Θ vérifiant les hypothèses (A1)-(A4) avec $r = s + 1$ et une constante M indépendante de δ et N_1 mais dépend de N_2.
Soit $\delta_0 := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, où $\delta_2, \delta_3 > 0$ sont les constantes apparaissant dans les propositions 4.1-4.4. Dans ce qui suit, nous écrivons simplement les constantes dépendantes uniquement de (M_0, N_1, c_0, s) et (M_0, N_2, c_0, s) respectivement par C_1 et C_2. En ajoutant $\varepsilon^{-1}\beta_\tau$ dans (2.34) on obtient

$$\begin{cases} \eta_t - \varepsilon^{-1}\beta_\tau &= (Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau) + \delta^2|\nabla\eta|^2 Z - \nabla\eta\cdot\nabla\phi, \\ \phi_t - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau^2 &= -\eta - \dfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \dfrac{1}{2}\left(\delta^4|\nabla\eta|^2 Z^2 + \delta^2(Z + \varepsilon^{-1}\beta_\tau)(Z - \varepsilon^{-1}\beta_\tau)\right). \end{cases} \tag{4.17}$$

Par la proposition 3.9, le lemme 3.5 et le corollaire 3.7 on obtient

$$\left\|Z-\varepsilon^{-1}\beta_\tau\right\|_s \le C_2,$$

$$\left\|\eta_t(t)-\varepsilon^{-1}\beta_\tau(t/\varepsilon)\right\|_s + \left\|\phi_t(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau(t/\varepsilon)^2\right\|_s \le C_2.$$

$$\|\eta_t(t)\|_s + \|\phi_t(t)\|_s \le C_2\varepsilon^{-1}.$$

De plus, on a

$$\eta_{tt} = \Lambda^{DN}\phi_t + \Lambda_1^{DN}[u_t]\phi - \varepsilon^{-2}\Lambda^{NN}\beta_{\tau\tau} - \varepsilon^{-1}\Lambda_1^{NN}[u_t]\beta_\tau$$
$$\phi_{tt} = \delta^2 Z\eta_{tt} - \eta_t - (\nabla\phi - \delta^2 Z\nabla\eta)\cdot(\nabla\phi_t - \delta^2 Z\nabla\eta_t)$$

qui, avec les estimations précédentes, les propositions 3.9, 3.26, 3.19 et 3.27 et le lemme 3.5 donnent

$$\|\eta_{tt}\|_{s-1} + \|\phi_{tt}\|_{s-1} \le C_2\varepsilon^{-2}.$$

Par conséquent, par les propositions 4.3 et 4.4, il existe de petites constantes ε_0, $\gamma_0 > 0$ telles que la fonction $\underline{\mathbf{a}}$ définie par (4.6) vérifie

$$\|\nabla\underline{\mathbf{a}}(t)\|_{s-2} \le C_2\varepsilon^{-1},\ \frac{1}{2}c \le \underline{\mathbf{a}}(x,t) \le C_2\varepsilon^{-1}$$

et

$$\underline{\mathbf{a}}(x,t) \le C_2\varepsilon^{-1} \ \text{ tant que } 0<\varepsilon\le\varepsilon_0 \text{ et } \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon}-\sigma\right| \le \gamma_0.$$

Donc

$$\|v(t),p(t)\|_s \le C_2 \ \text{ où } \ p = \varepsilon^{-1}\delta^2\Lambda^{NN}(\nabla\beta_\tau).$$

Par conséquent, nous avons vérifié toutes les conditions de la proposition 4.5.

Maintenant, en appliquant l'opérateur J^s aux équations (4.5), on a

$$\begin{cases} \partial_t(J^s\zeta)_{ijk} + v\cdot\nabla(J^s\zeta)_{ijk} - \Lambda^{DN}(J^s\psi)_{ijk} + L^{ijk}(J^s\eta) = \varepsilon^{-1}\partial_{ijk}(J^s\beta_\tau) + \widetilde{f}_1^{ijk}, \\ \partial_t(J^s\psi)_{ijk} + v\cdot\nabla(J^s\psi)_{ijk} + \underline{\mathbf{a}}(J^s\zeta)_{ijk} = \varepsilon^{-1}(J^s g_2)^{ijk} + \widetilde{f}_2^{ijk}, \end{cases} \tag{4.18}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_1^{ijk} =& J^s f_1^{ijk} - [J^s,v]\cdot\nabla\zeta_{ijk} + [J^s,\Lambda^{DN}]\psi_{ijk} - [J^s,\Lambda^{DN}]\big(p_k\partial_{ij}\eta + p_i\partial_{jk}\eta + p_j\partial_{ki}\eta\big) \\ & - \Lambda^{DN}\left([J^s,p_k]\,\partial_{ij}\eta + [J^s,p_i]\,\partial_{jk}\eta + [J^s,p_j]\,\partial_{ki}\eta\right), \\ \widetilde{f}_2^{ijk} =& J^s f_2^{ijk} - [J^s,v]\cdot\nabla\psi_{ijk} - [J^s,\underline{\mathbf{a}}]\zeta_{ijk}. \end{aligned}$$

Par les propositions 3.9 et 3.16 et les lemmes 3.5 et 3.7 on a

$$\|\widetilde{f}_1(t)\| \le C_2\left(\xi(t) + \|v(t)\|_s + \|p(t)\|_{s+2} + \|f_1(t)\|_s\right)$$

$$\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\widetilde{f}_2(t)\| \le C_2\left(\xi(t) + \|v(t)\|_{s+1} + \|\nabla\underline{\mathbf{a}}(t)\|_s + \|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}f_2(t)\|_s\right).$$

Nous pouvons évaluer ces estimations ci-dessus par les propositions 4.1-4.3 sauf le terme $\|p(t)\|_{s+2}$ puisque $p = \varepsilon^{-1}\delta^2\Lambda^{NN}(\nabla\beta_\tau)$.

$$\partial_{jk}p_i = \varepsilon^{-1}\delta^2\left(\Lambda^{NN}\partial_{ij}\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_k u]\partial_{ij}\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_j u]\partial_{ki}\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_{jk}u]\partial_i\beta_\tau + \Lambda_1^{NN}[\partial_j u,\partial_k u]\partial_i\beta_\tau\right).$$

De sorte que, on peut aussi évaluer $\|p(t)\|_{s+2}$ par les propositions 3.19 et 3.27, et obtenir

$$\varepsilon^{-1}\left\|\widetilde{f}_1(t)\right\|^2+\varepsilon\left\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\widetilde{f}_2(t)\right\|^2\leq C_2\left(\varepsilon^{-1}\xi(t)^2+1\right).$$

Ainsi, en appliquant l'estimation d'énergie de la proposition 4.5 à la relation (4.18), nous obtenons

$$\|\zeta(t)\|_s^2+\left\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(t)\right\|_s^2\leq C_2+\frac{C_2}{\varepsilon}\int_0^t\xi(\widetilde{t})^2d\widetilde{t}\ \text{ pour } 0\leq t\leq\varepsilon$$

$$\|\nabla\phi(t)\|_{s+2}\leq\|\nabla\phi(t)\|_{s+1}+\|\nabla(\partial^3\phi(t)-\delta^2Z\partial^3\eta(t))\|_{s-1}+\delta^2\|Z\partial^3\eta(t)\|_s$$

$$\|\nabla\phi(t)\|_{s+2}\leq C_2\left(1+\|(\Lambda_0^{DN})^{1/2}\psi(t)\|_{s-\frac{1}{2}}+\|\zeta(t)\|_s\right).$$

D'après ces deux estimations ci-dessus, nous avons

$$\xi(t)^2\leq C_2+\frac{C_2}{\varepsilon}\int_0^t\xi(\widetilde{t})^2d\widetilde{t}\ \text{ pour } 0\leq t\leq\varepsilon$$

et par l'inégalité de Gronwall on a

$$\xi(t)\leq C_2 \text{ pour tout }\ 0\leq t\leq\varepsilon. \tag{4.19}$$

D'autre part, compte tenu de (4.17) et de la proposition 4.1, on a

$$\left\|\eta_t(t)-\varepsilon^{-1}\beta_\tau\left(t/\varepsilon\right)\right\|_{s+2}+\left\|\phi_t(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau^2\left(t/\varepsilon\right)^2\right\|_{s+2}\leq C_1.$$

Soit $(\eta^{(0)},\phi^{(0)})$ la solution approchée définie dans (2.57)

$$\begin{aligned}\left\|\eta(t)-\eta^{(0)}(t/\varepsilon)\right\|_{s+2}+\left\|\phi(t)-\phi^{(0)}(t/\varepsilon)\right\|_{s+2}\leq&\int_0^t\Bigg(\left\|\eta_t(\widetilde{t})-\varepsilon^{-1}\beta_\tau(\widetilde{t}/\varepsilon)\right\|_{s+2}\\&+\left\|\phi_t(\widetilde{t})-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\beta_\tau(\widetilde{t}/\varepsilon)^2\right\|_{s+2}\Bigg)d\widetilde{t}\\\left\|\eta(t)-\eta^{(0)}(t/\varepsilon)\right\|_{s+2}+\left\|\phi(t)-\phi^{(0)}(t/\varepsilon)\right\|_{s+2}\leq&C_1\left(t+\frac{t}{\varepsilon}\left|\frac{\delta^2}{\varepsilon}-\sigma\right|\right)\\\left\|\eta(t)-\eta^{(0)}\left(t/\varepsilon\right)\right\|_{s+2}+\left\|\phi(t)-\phi^{(0)}(t/\varepsilon)\right\|_{s+2}\leq&C_1\left(\varepsilon+\left|\frac{\delta^2}{\varepsilon}-\sigma\right|\right)\ \text{ pour } 0\leq t\leq\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.20}$$

En particulier, on obtient

$$\|\eta(t)\|_{s+2}+\|\nabla\phi(t)\|_{s+1}\leq\max_{0\leq\tau\leq1}(\|\eta^{(0)}(\tau)\|_{s+2}+\|\nabla\phi^{(0)}(\tau)\|_{s+1})+C_1(\varepsilon+|\frac{\delta^2}{\varepsilon}-\sigma|)\text{ pour } 0\leq t\leq\varepsilon.\tag{4.21}$$

De plus, on voit que

$$\begin{aligned}1+\eta(x,t)-b(x,t)&=1+\eta_0(x)-b_0(x)+\int_0^t\left(\eta_t(x,\widetilde{t})-\varepsilon^{-1}\beta_\tau(x,\widetilde{t}/\varepsilon)\right)d\widetilde{t}\\&\geqslant c_0-C\int_0^t\|\eta_t(\widetilde{t})-\varepsilon^{-1}\beta_\tau(\widetilde{t}/\varepsilon\|_{s+2}d\widetilde{t}\\&\geqslant c_0-C_1t\geqslant c_0-C_1\varepsilon \text{ pour } 0\leq t\leq\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Au vu des relations (4.19), (4.21) et (4.22) nous définissons les constantes N_1, N_2, ε_0 et γ_0 par

$$\begin{cases}N_2:=2\max\limits_{0\leq\tau\leq1}\left(\|\eta^{(0)}(\tau)\|_{s+2}+\|\nabla\phi^{(0)}(\tau)\|_{s+1}\right),\quad N_1:=C_2\\\varepsilon_0:=(2C_1)^{-1}\min\{c_0,N_2\},\quad\gamma_0:=(2C_1)^{-1}N_2.\end{cases}$$

Enfin, nous voyons que les estimations de (4.16) tiennent. Par conséquent, par (4.20), nous obtenons l'estimation d'erreur. Ce qui met fin la preuve du théorème 2.1.

4.3.2 Preuve du théorème 2.2

Nous allons prouver le théorème 2.2. En utilisant le théorème 2.1 nous avons

$$\|\eta^{\delta,\varepsilon}(\varepsilon)\|_{s+3} + \|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(\varepsilon)\|_{s+2} \leq C_0$$
$$1 + \eta^{\delta,\varepsilon}(x,\varepsilon) - b_1(x) \geqslant \frac{1}{2}c_0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d$$

et

$$\left\|\eta^{\delta,\varepsilon}(\varepsilon) - \eta^{(0)}(1)\right\|_{s+2} + \left\|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(\varepsilon) - \nabla\phi^{(0)}(1)\right\|_{s+1} \leq C_0\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right). \tag{4.23}$$

Puisque $b(x,t) = b_1(x)$ pour $t \geqslant \varepsilon$, les résultats dans [12] impliquent que la solution $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ obtenue dans le théorème 2.1 peut être étendue sur un intervalle de temps $[0,T]$ indépendant de $\delta \in]0,\delta_0]$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ et satisfait

$$\begin{cases} \|\eta^{\delta,\varepsilon}(t) - \eta^{\varepsilon}(t)\|_{s-1} + \|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(t) - \mathbf{u}^{\varepsilon}(t)\|_{s-1} \leq C\delta^2 \\ \|\eta^{\delta,\varepsilon}(t)\|_{s+2} + \|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(t)\|_{s+1} \leq C \quad \text{pour} \quad \varepsilon \leq t \leq T, \end{cases} \tag{4.24}$$

où $(\eta^{\varepsilon}, \mathbf{u}^{\varepsilon}) \in C([-T,T], H^{s+2} \times H^{s+1})$ est une solution unique des équations de Saint-Venant

$$\begin{cases} \eta_t^{\varepsilon} + \nabla \cdot ((1 + \eta^{\varepsilon} - b_1)\mathbf{u}^{\varepsilon}) = 0 \\ \mathbf{u}_t^{\varepsilon} + (\mathbf{u}^{\varepsilon} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{\varepsilon} + \nabla\eta^{\varepsilon} = 0, \end{cases}$$

sous les conditions initiales $\eta^{\varepsilon} = \eta^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\varepsilon)$, $\mathbf{u}^{\varepsilon} = \nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\varepsilon)$ à $t = \varepsilon$ et satisfait

$$\|(\eta^{\varepsilon}(t), \mathbf{u}^{\varepsilon}(t))\|_{s+2} + \|(\eta_t^{\varepsilon}(t), \mathbf{u}_t^{\varepsilon}(t))\|_{s+1} \leq C \text{ pour } -T \leq t \leq T.$$

En particulier, en intégrant $\|(\eta_t^{\varepsilon}(t), \mathbf{u}_t^{\varepsilon}(t))\|_{s+1} \leq C$ sur $[0,\varepsilon]$ nous avons

$$\|\eta^{\varepsilon}(\varepsilon) - \eta^{\varepsilon}(0)\|_{s+1} + \|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon) - \mathbf{u}^{\varepsilon}(0))\|_{s+1} \leq C\varepsilon. \tag{4.25}$$

Soit $(\eta^0, \mathbf{u}^0)$ l'unique solution du **problème de Cauchy** pour les équations de Saint-Venant (2.50) et (2.51). Puisque $\eta^{(0)}(1) = \eta^0(0)$ et $\nabla\phi^{(0)}(1) = \mathbf{u}^0(0)$ et la relation (4.23) implique que

$$\left\|\eta^{\varepsilon}(\varepsilon) - \eta^0(0)\right\|_{s+2} + \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon) - \mathbf{u}^0(0))\right\|_{s+1} \leq C_0\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right),$$

qui, avec (4.25), donne

$$\left\|\eta^{\varepsilon}(0) - \eta^0(0)\right\|_{s+1} + \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(0) - \mathbf{u}^0(0))\right\|_{s+1} \leq C\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right).$$

Puisque $(\eta^{\varepsilon}, \mathbf{u}^{\varepsilon})$ et $(\eta^0, \mathbf{u}^0)$ satisfont les mêmes équations de Saint-Venant et leurs données initiales satisfont l'estimation ci-dessus, d'où on a

$$\left\|\eta^{\varepsilon}(t) - \eta^0(t)\right\|_{s+1} + \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t) - \mathbf{u}^0(t))\right\|_{s+1} \leq C\left(\varepsilon + \left|\frac{\delta^2}{\varepsilon} - \sigma\right|\right) \text{ pour } -T \leq t \leq T,$$

qui, avec (4.24), donne l'estimation souhaitée.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons fait l'étude d'une analyse mathématique de la génération du tsunami en eau peu profonde due à la déformation du fond marin.

En partant des équations des ondes de surface sans dimension à la surface de l'eau nous avons rappelé la dérivation du modèle de tsunami. Pour trouver ce modèle, nous avons fait une approximation en régime d'eau peu profonde sous l'hypothèse que la longueur typique de notre phénomène λ est très grande devant la hauteur d'eau typique h et à partir des approximations asymptotiques des développements Λ^{DN} et Λ^{NN} par rapport à δ jusqu'à l'ordre de $O(\delta^2)$.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous avons prouvé l'existence et des bornes uniformes de la solution du problème de Cauchy par les méthodes des estimations d'énergie dans les équations linéarisées et quasi-linéaires du problème complet grâce à une analyse sur les opérateurs dans les espaces de Sobolev afin d'obtenir la justification mathématique du modèle de tsunami.

D'une manière générale, le théorème 2.3 nous assure que le modèle de tsunami standard (1) et (2) est une bonne approximation dans le régime d'échelle $\delta^2 \ll \varepsilon \ll 1$. De plus, dans le régime d'échelle critique $\delta^2 \simeq \varepsilon \ll 1$, nous devons prendre en compte l'effet du champ de vitesse initial dans (3).

Annexe

Nous justifierons l'argument formel (3.7). Par conséquent, nous devons donner une bonne définition de $\Phi_1(X)$ et $\Psi_1(X)$ pour obtenir la formule (3.8). Ainsi, nous utilisons un difféomorphisme $X = \Xi(Y;\eta)$ à partir d'un domaine simple $\Omega_0 := \mathbb{R}^d \times]0,1[$ dans la région d'eau $\Omega = \{X \in \mathbb{R}^{d+1}; b(x) < z < 1+\eta(x)\}$ défini par

$$x_j = y_j \quad ; \quad 1 < j < d \quad ; \quad z = b(y) + y_{n+1}(1+\eta(y) - b(y))$$

Pour toute fonction $f = f(X;\eta)$ définie dans Ω, nous fixons $\widetilde{f}(Y;\eta) := f(\Xi(Y;\eta);\eta)$, qui est une fonction dans le domaine fixe Ω_0, de sorte que la dérivée de Fréchet de cette fonction $\widetilde{f}(Y;\eta)$ par rapport à η ait un sens. Pour plus de simplicité, nous écrivons $\widetilde{f}_\eta = D_\eta \widetilde{f}[\widetilde{\eta}]$. Alors, nous voyons que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} f(X;\eta+h\widetilde{\eta})dy\right)dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} \widetilde{f}(\Xi^{-1}(X;\eta+h\widetilde{\eta});\eta+h\widetilde{\eta})dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} \widetilde{f}(\Xi^{-1}(X;\eta+h\widetilde{\eta});\eta)dy\right)dx \\
&\quad + h\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} \widetilde{f}_\eta(\Xi^{-1}(X;\eta+h\widetilde{\eta}))dy\right)dx + O(h^2)
\end{aligned}$$

Ceci, associé à la simple identité

$$\begin{aligned}
\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} \widetilde{f}(\Xi^{-1}(X;\eta+h\widetilde{\eta});\eta)dy =&(1+\frac{h\widetilde{\eta}(x)}{1+\eta(x)-b(x)})\int_{b(x)}^{1+\eta(x)} \widetilde{f}(\Xi^{-1}(X;\eta);\eta)dy. \\
h\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} \widetilde{f}_\eta(\Xi^{-1}(X;\eta+h\widetilde{\eta}))dy =&(h+\frac{h^2\widetilde{\eta}(x)}{1+\eta(x)-b(x)})\int_{b(x)}^{1+\eta(x)} \widetilde{f}_\eta(\Xi^{-1}(X;\eta))dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} f(X;\eta+h\widetilde{\eta})dy\right)dx\bigg|_{h=0} =& \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)}(\widetilde{f}_\eta(\Xi^{-1}(X;\eta))\right. \\
&\left. + \frac{\widetilde{\eta}(x)}{1+\eta(x)-b(x)}\widetilde{f}(\Xi^{-1}(X;\eta);\eta))dy\right)dx
\end{aligned}$$

Ici, en utilisant l'intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{b(x)}^{1+\eta(x)} \frac{\widetilde{\eta}(x)}{1+\eta(x)-b(x)}\widetilde{f}(\Xi^{-1}(X;\eta);\eta))dy =& -\int_{b(x)}^{1+\eta(x)} \frac{\widetilde{\eta}(x)(z-b(x))}{(1+\eta(x)-b(x))^2}(\partial_z\widetilde{f})(\Xi^{-1}(X;\eta);\eta))dy \\
&+ \widetilde{\eta}(x)\widetilde{f}(x,1;\eta) \\
=&\widetilde{\eta}(x)f(x,1+\eta(x);\eta) \\
&- \int_{b(x)}^{1+\eta(x)} \frac{\widetilde{\eta}(x)(z-b(x))}{(1+\eta(x)-b(x))}(\partial_z f)(X;\eta)dy
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\frac{d}{dh}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{b(x)}^{1+\eta(x)+h\widetilde{\eta}(x)} f(X;\eta+h\widetilde{\eta})dy\right)dx\bigg|_{h=0} = \int_{\mathbb{R}^d}\widetilde{\eta}(x)f(x,1+\eta(x);\eta)dx + \int_\Omega f_1(X)dX. \tag{4.26}$$

où

$$f_1(X) = \widetilde{f}_\eta(\Xi^{-1}(X;\eta)) - \frac{\widetilde{\eta}(x)(z-b(x))}{(1+\eta(x)-b(x))}(\partial_z f)(X;\eta). \tag{4.27}$$

Maintenant, pour les fonctions $\Phi = \Phi(X;\eta)$ et $\Psi = \Psi(X;\eta)$ définies par (3.3), nous définissons Φ_1 *et* Ψ_1 comme dans (4.27) et appliquons la formule (4.26) à la fonction $f(X;\eta) = I_\delta \nabla_X \Phi(X;\eta) \cdot I_\delta \nabla_X \Psi(X;\eta)$. Ensuite, par un calcul simple, nous voyons que

$$f_1(X;\eta) = I_\delta \nabla_X \Phi_1(X) \cdot I_\delta \nabla_X \Psi(X;\eta) + I_\delta \nabla_X \Phi(X;\eta) \cdot I_\delta \nabla_X \Psi_1(X),$$

de sorte que nous récupérons la formule (3.8). De plus, compte tenu des relations

$$\widetilde{\Phi}(\cdot, 1;\eta) = \phi \quad , \quad \widetilde{\Psi}(\cdot, 1;\eta) = \psi \text{ et } \widetilde{\Psi}(\cdot, 0;\eta) = \Lambda^{DD}(\eta, b, \delta)\psi \quad ,$$

nous avons $\widetilde{\Phi}_\eta(\cdot, 1) = 0$, $\widetilde{\Psi}_\eta(\cdot, 1) = 0$, $\widetilde{\Psi}_\eta(\cdot, 0) = D_\eta \Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\psi$
Il résulte donc de (4.27) que

$$\Phi_1|_\Gamma = -(\partial_z \Phi)|_\Gamma \widetilde{\eta} \quad , \quad \Psi_1|_\Gamma = -(\partial_z \Psi)|_\Gamma \widetilde{\eta} \ \ ; \Psi_1|_\Sigma = D_\eta \Lambda^{DD}[\widetilde{\eta}]\psi$$

Références bibliographiques

[1] G. B. Airy. Tides and waves. In H. J. Rose et al., editor, *Encyclopedia metropolitana (1817–1845)*. London, 1841.

[2] Borys Alvarez-Samaniego and David Lannes. Large time existence for 3d water-waves and asymptotics. *Inventiones mathematicae*, 171(3) :485–541, 2008.

[3] Patrick Bar-Avi. Water waves : The mathematical theory with application.

[4] J Thomas Beale, Thomas Y Hou, and John S Lowengrub. Growth rates for the linearized motion of fluid interfaces away from equilibrium. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(9) :1269–1301, 1993.

[5] Adrian Constantin. On the relevance of soliton theory to tsunami modelling. *Wave Motion*, 46(6) :420–426, 2009.

[6] Adrian Constantin and Robin Stanley Johnson. Modelling tsunamis. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39(14) :L215, 2006.

[7] Adrian Constantin and Walter Strauss. Pressure beneath a stokes wave. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 63(4) :533–557, 2010.

[8] Walter Craig. Surface water waves and tsunamis. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 18(3) :525–549, 2006.

[9] David G Ebin. The equations of motion of a perfect fluid with free boundary are not well posed. *Communications in Partial Differential Equations*, 12(10) :1175–1201, 1987.

[10] KO Friedrices. On the derivation of the shallow water theory. appendix to. *The Formation of Breakers and Bores. The Theory of Nonlinear Wave Propagation in Shallow Water and Open Channels, JJ Stoker, Comm. Pure Appl. Math*, 1 :1–87, 1948.

[11] Tatsuo Iguchi. On the irrotational flow of incompressible ideal fluid in a circular domain with free surface. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 34(6) :525–565, 1998.

[12] Tatsuo Iguchi et al. *A shallow water approximation for water waves.* Keio University. Department of Mathematics, 2006.

[13] Tadayoshi Kano et al. Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de friedrichs. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 26(1) :101–155, 1986.

[14] Tadayoshi Kano and Takaaki Nishida. Water waves and friedriehs expansion. In *North-Holland Mathematics Studies*, volume 98, pages 39–57. Elsevier, 1984.

[15] Tadayoshi Kano, Takaaki Nishida, et al. Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 19(2) :335–370, 1979.

[16] M Lakshmanan. Integrable nonlinear wave equations and possible connections to tsunami dynamics. In *Tsunami and nonlinear waves*, pages 31–49. Springer, 2007.

[17] H Lamb. Hydrodynamics (6th edn), 1932.

[18] David Lannes. Well-posedness of the water-waves equations. *Journal of the American Mathematical Society*, 18(3) :605–654, 2005.

[19] Yi A Li. A shallow-water approximation to the full water wave problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 59(9) :1225–1285, 2006.

[20] Lev V Ovsjannikov and OVSJANNIKOV LV. To the shallow water theory foundation. 1974.

[21] LV Ovsjannikov. Cauchy problem in a scale of banach spaces and its application to the shallow water theory justification. In *Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics*, pages 426–437. Springer, 1976.

[22] Harvey Segur. Waves in shallow water, with emphasis on the tsunami of 2004. In *Tsunami and nonlinear waves*, pages 3–29. Springer, 2007.

[23] James Johnston Stoker. *Water waves : The mathematical theory with applications*, volume 36. John Wiley & Sons, 2011.

[24] Raphael Stuhlmeier. Kdv theory and the chilean tsunami of 1960. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 12(3) :623, 2009.

[25] Sijue Wu. Well-posedness in sobolev spaces of the full water wave problem in 2-d. *Inventiones mathematicae*, 130(1) :39–72, 1997.

[26] Sijue Wu. Well-posedness in sobolev spaces of the full water wave problem in 3-d. *Journal of the American Mathematical Society*, 12(2) :445–495, 1999.