UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR

UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Mémoire de Master

Domaine :	Sciences et Technologies
Mention :	Mathématiques et Applications
Spécialité :	Mathématiques Appliquées
Option :	Équations aux Dérivées Partielles

Thème :

Existence globale de solutions faibles des Équations Primitives Compressibles tridimensionnelles avec viscosité dégénérée

Présenté par :

Mamadou Korca BA

Sous la direction de : **Docteur Timack NGOM**

Sous la supervision de : **Professeur Édouard DIOUF**

Soutenu publiquement le Lundi 25 Avril 2022 devant le jury composé de :

Prénom(s) et Nom	Grade	Qualité	Université
Salomon SAMBOU	*Professeur Titulaire*	Président	UASZ
Édouard DIOUF	*Professeur Assimilé*	Superviseur	UASZ
Mouhamadou Samsidy GOUDIABY	*Maître de Conférences Titulaire*	Examinateur	UASZ
Mamadou GUEYE	*Maître de Conférences Assimilé*	Examinateur	UASZ
Timack NGOM	*Maître de Conférences Titulaire*	Directeur	UASZ

Année universitaire : 2020/2021

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

À mon cher père Assane BA qui m'a soutenu durant toute la durée de mes études.

À la mémoire de ma mère Kadidiatou DIALLO.

À la mémoire de ma grand-mère Oumou BARRY.

À mes frères et sœurs.

À tous les membres de ma famille.

À mes chers amis.

À tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Remerciements

Je rends grâce à DIEU le TOUT PUISSANT de m'avoir donné la force et la motivation de réaliser ce travail.

C'est sans hésitation et avec un grand plaisir que mes remerciements se tournent en premier lieu vers le directeur de ce mémoire, Docteur Timack NGOM. Sa virtuosité scientifique et son implication en tant qu'encadrant m'ont permis d'évoluer dans un environnement idéal. Je le remercie d'avoir réussi à atteindre l'équilibre délicat d'être un guide indéfectible tout en me proposant une immense liberté. J'ai toujours pu compter sur lui. Il m'a introduit à un sujet riche et passionnant, au cœur de l'Analyse Mathématique des Équations aux Dérivées Partielles. Je suis vraiment ému par sa disponibilité et l'attention qu'il a porté à mon égard tout au long de ce travail.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Édouard DIOUF qui a supervisé ce travail, et dont les nombreuses suggestions m'ont aidées à clarifier et à mieux présenter les idées développées dans ce mémoire.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude au Professeur Salomon SAMBOU pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de présider mon jury.

J'exprime ma reconnaissance la plus sincère au Docteur Mouhamadou Samsidy GOUDIABY et au Docteur Mamadou GUEYE d'avoir accepté de participer au jury en tant qu'examinateur.

Je remercie l'ensemble des membres du corps professoral ainsi que de l'administration du département de Mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor qui ont contribué à ma formation.

J'ai eu l'occasion d'échanger avec de nombreux aînés chercheurs, dont j'ai pu profiter de leurs expériences. Je les remercie à cet égard. En particulier, je remercie Dr. Sény DIATTA, Dr. Abdoulaye DIOUF, Dr. Mamadou Éramane BODIAN, Dr. Souhaïbou SAMBOU, M. Moustapha CAMARA, M. Papa BADIANE et M. Mouhamadou Mokhtar BA.

Je remercie vivement M. Gora LO, *Directeur de la bibliothèque centrale* de l'UASZ pour son professionnalisme et ses conseils.

J'ai eu la grande chance de travailler au sein de différentes équipes. J'ai pu ainsi apprécier leurs méthodes de travail dans le contexte singulier qu'offre une collaboration. Je remercie tous mes amis avec qui j'ai cheminé à l'UASZ de la *Licence Mathématiques-Physique-Informatique* au *Master Mathématiques et Applications*. En particulier, je remercie ici Mohamed NIAMBA, Alioune BA, Samba Alassane BA, Fatou DIENG, Amadou SEYDI, Algassimou DIALLO, Daouda DIACK, Idrissa BIAYE, Amadou NDIAYE, Mamadou Boye DIALLO, Malick DIBA, Émile NGONG, Madiwe BALDÉ, Talatou DIALLO et Boubacar Sidy BA pour ces expériences enrichissantes, pour leur dynamisme et leur enthousiasme, ainsi que pour leur bienveillance.

Je remercie mes amis Amadou Diouldé BA, Mamadou Aliou DIALLO, Boubacar BALDÉ, Oumar BALDÉ, Abdoulaye BALDÉ, Abdoulaye DIAO, Fatoumata Binta BA, Lamine DAFFÉ et Alpha Yéro SABALY avec qui j'ai passé de très bons moments au *Lycée Alpha Molo Baldé de Kolda*.

Je profite de l'occasion pour remercier les enseignants du moyen secondaire qui ont été les premiers à me guider vers les matières scientifiques. Je veux citer M. Paul NGOM, Dr. Dame BOP, M. Alassane BODIAN et M. Mamadou Moussa BALDÉ.

Je remercie également mes amis d'enfance à *Dialambéré*. Ces remerciements s'adressent en particulier à Bouba KOÏTA, Yagouba KANTÉ, Samba Thickam BALDÉ, Modou CAMARA, Abdoulaye SABALY, Ousmane GANO, Bathie KOÏTA, Boubacar KOÏTA et Hamidou BA.

Je voudrais aussi remercier toute ma famille et tous ceux qui m'ont apporté leur soutien de toute nature afin que je puisse poursuivre ma formation dans de bonnes conditions.

Je ne saurais terminer sans exprimer un remerciement particulier à mes grandes sœurs Salimatou DIALLO et Aminata BA pour leurs conseils et leur soutien.

Mamadou Korca BA, *Ziguinchor, le* 15 *Février*, 2022.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

- ✓ t : variable temporelle ($t > 0$)
- ✓ $x = (x_1, x_2)$: variables spatiales horizontales
- ✓ y : variable verticale ; l'altitude
- ✓ $z = 1 - e^{-y}$: variable verticale après changement de variables
- ✓ $\tilde{\Omega}$: domaine d'étude
- ✓ Ω : domaine d'étude après changement de variables
- ✓ $\rho(t, x, y)$: densité stratifiée
- ✓ $\xi(t, x) = \rho e^y$: densité (densité après changement de variables)
- ✓ $u(t, x, y) = (u_1, u_2)$: vitesse horizontale
- ✓ $v(t, x, y)$: vitesse verticale
- ✓ $\mathbf{u}(t, x, y) = (u, v)$: vecteur vitesse
- ✓ $w(t, x, z) = e^{-y} v$: vitesse verticale après changement de variables
- ✓ $[\mathbb{A}]^t$: transposée du tenseur $\mathbb{A}$ (on notera simplement $\mathbb{A}^t$ s'il n'y a pas de risque de confusion)
- ✓ $\mathrm{div}_x u = \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2$: divergence par rapport à x de u
- ✓ $\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathrm{div}_x u + \partial_y v$: divergence par rapport à (x, y) de $\mathbf{u}$
- ✓ $\nabla_x \xi = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \xi \\ \partial_{x_2} \xi \end{pmatrix}$: gradient par rapport à x de ξ
- ✓ $\nabla_x \rho = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \rho \\ \partial_{x_2} \rho \end{pmatrix}$: gradient par rapport à x de ρ
- ✓ $\nabla \rho = \begin{pmatrix} \nabla_x \rho \\ \partial_y \rho \end{pmatrix}$: gradient par rapport à (x, y) de ρ
- ✓ $\nabla_x u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \partial_{x_1} u_2 \\ \partial_{x_2} u_1 & \partial_{x_2} u_2 \end{pmatrix}$: gradient par rapport à x de u
- ✓ $\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \partial_{x_1} u_2 & \partial_{x_1} v \\ \partial_{x_2} u_1 & \partial_{x_2} u_2 & \partial_{x_2} v \\ \partial_y u_1 & \partial_y u_2 & \partial_y v \end{pmatrix}$: gradient par rapport à (x, y) de $\mathbf{u}$
- ✓ $\Delta_x \xi = \partial^2_{x_1} \xi + \partial^2_{x_2} \xi$: laplacien par rapport à x de ξ
- ✓ $\Delta_x \rho = \partial^2_{x_1} \rho + \partial^2_{x_2} \rho$: laplacien par rapport à x de ρ
- ✓ $\Delta \rho = \Delta_x \rho + \partial^2_y \rho$: laplacien par rapport à (x, y) de ρ
- ✓ $\Delta_x u = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} u_1 + \partial^2_{x_2} u_1 \\ \partial^2_{x_1} u_2 + \partial^2_{x_2} u_2 \end{pmatrix}$: laplacien par rapport à x de u

- ✓ $\Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} u_1 + \partial^2_{x_2} u_1 + \partial^2_y u_1 \\ \partial^2_{x_1} u_2 + \partial^2_{x_2} u_2 + \partial^2_y u_2 \\ \partial^2_{x_1} v + \partial^2_{x_2} v + \partial^2_y v \end{pmatrix}$: laplacien par rapport à (x, y) de $\mathbf{u}$
- ✓ $D_x(u) = \dfrac{\nabla_x u + [\nabla_x u]^t}{2}$: tenseur du taux de déformation par rapport à x
- ✓ $D(u) = \dfrac{\nabla u + [\nabla u]^t}{2}$: tenseur du taux de déformation par rapport à (x, y)
- ✓ $A_x(u) = \dfrac{\nabla_x u - [\nabla_x u]^t}{2}$: tenseur du taux de vorticité par rapport à x
- ✓ $A(u) = \dfrac{\nabla u - [\nabla u]^t}{2}$: tenseur du taux de vorticité par rapport à (x, y)
- ✓ $\nabla^2 \mathbb{A} = \nabla(\nabla \mathbb{A})$, en général $\nabla^n \mathbb{A} = \nabla(\nabla^{n-1} \mathbb{A})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
- ✓ $\Delta^2 \mathbb{A} = \Delta(\Delta \mathbb{A})$, en général $\Delta^n \mathbb{A} = \Delta(\Delta^{n-1} \mathbb{A})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
- ✓ `EP` : Équations Primitives
- ✓ `EPC` : Équations Primitives Compressibles
- ✓ `EPI` : Équations Primitives Incompressibles
- ✓ `EPCs` : Équations Primitives Compressibles simplifiées
- ✓ `2D` : dimension 2, bidimensionnel ou bidimensionnelles selon le cas
- ✓ `3D` : dimension 3, tridimensionnel ou tridimensionnelles selon le cas

Résumé

Résumé :
Dans ce mémoire, nous étudions les `Équations Primitives Compressibles simplifiées (EPCs)` avec une viscosité dépendante de la densité pour de grandes données initiales. Le modèle `EPCs` peut être dérivé des équations de Navier-Stokes compressibles et anisotropes `3D` par approximation hydrostatique. Nous nous appuyons sur les travaux de A. F. Vasseur et C. Yu dans [45, 46], dans lesquels l'existence globale de solutions faibles des équations de Navier-Stokes compressibles avec viscosité dégénérée ont été obtenues. Dans ce travail, nous construisons des solutions approchées et prouvons l'existence globale de solutions faibles des `EPCs`. Dans notre démonstration, nous représentons d'abord la vitesse verticale en fonction de la densité et de la vitesse horizontale qui joue un rôle dans l'utilisation de la méthode de Faedo-Galerkin pour obtenir l'existence globale des solutions approchées. Ensuite, nous obtenons les estimations clés de la borne inférieure de la densité, l'inégalité d'énergie et la BD-entropie sur les solutions approchées. Enfin, sur la base de ces estimations, nous appliquons des arguments de compacité pour obtenir l'existence globale de solutions faibles des `EPCs` en faisant disparaître les paramètres dans notre système approximatif pas à pas.

Mots clés :
solutions faibles globales ; équations primitives compressibles ; viscosité dépendante de la densité ; méthode de Faedo-Galerkin ; inégalité d'énergie ; BD-entropie.

Abstract :
In this memoir, we investigate a simple version of the `Compressible Primitive Equations (CPEs)` with density-dependent viscosity for large initial data. The `CPEs` model can be derived from the `3D` compressible and anisotropic Navier–Stokes equations by hydrostatic approximation. Motivated by the work of A. F. Vasseur and C. Yu in [45, 46], in which the global existence of weak solutions to the compressible Navier–Stokes equations with degenerate viscosity was obtained, we construct approximate solutions and prove the global existence of weak solutions to the `CPEs` in this memoir. In our proof, we first present the vertical velocity as a function of density and horizontal velocity, which plays a role in using the Faedo–Galerkin method to obtain the global existence of the approximate solutions. Then, we obtain the key estimates of lower bound of the density, the energy inequality and the Bresch–Desjardins entropy on the approximate solutions. Finally, we apply compactness arguments to obtain global existence of weak solutions by vanishing the parameters in our approximate system step-by-step.

Keywords :
global weak solutions ; compressible primitive equations ; density-dependent viscosity ; Faedo-Galerkin method ; energy inequality ; Bresch–Desjardins entropy.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

On s'intéresse aux équations de type `Équations Primitives (EP)`. Ce sont les équations gouvernant les mouvements de la dynamique de l'atmosphère et des océans, qui sont en pratique les plus utilisées par les modèles de prévision météorologique et climatique. Elles appartiennent à la classe des équations de la *dynamique des fluides géophysiques*[1] (voir [7]). Dans la hiérarchie des modèles (voir [44] et [34]), les `Équations Primitives` se situent entre les équations non-hydrostatiques et les équations de Saint-Venant. En toute généralité, on peut établir la classification suivante :

Équations de Navier-Stokes `3D`
$\Downarrow$
Équations non-hydrostatiques
$\Downarrow$
Équations Primitives
(Équations hydrostatiques)
$\Downarrow$
Équations de Saint-Venant
$\Downarrow$
Équations quasi-géostrophiques.

Parmi les `EP`, on a les `Équations Primitives Compressibles`[2] `(EPC)` qui sont utilisées en général dans l'étude de la circulation atmosphérique à grande échelle et les `Équations Primitives Incompressibles (EPI)` qui interviennent dans le cas océanique.

Présentation du modèle

Dans ce mémoire, nous considérons les `Équations Primitives Compressibles simplifiées (EPCs)` tridimensionnelles (`3D`) suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}_x(\rho u \otimes u) + \partial_y(\rho u v) + \nabla_x P(\rho) + r\rho|u|u \\ = 2\mathrm{div}_x(\nu_1 D_x(u)) + \partial_y(\nu_2 \partial_y u), \\ \partial_y P(\rho) = -g\rho,\ P(\rho) = c^2\rho. \end{cases} \tag{0.1}$$

- Ici, $t > 0$ est le temps et $x = (x_1, x_2)$, y dénote la variable spatiale horizontale et verticale respectivement.

1. La dynamique des fluides géophysiques est l'étude des interactions grandes échelles entre fluides sur Terre ou sur d'autre planètes.
2. Un fluide compressible est un fluide dont on peut changer le volume, c'est-à-dire qu'on peut le comprimer dans un espace plus restreint en exerçant une pression sur ce dernier. La majorité des gaz sont des fluides compressibles (air, oxygène, hydrogène, azote, etc.).

- Les fonctions inconnues ρ, $u = (u_1, u_2)$, v et P représentent respectivement la densité, la vitesse horizontale, la vitesse verticale et la pression de l'écoulement.
- div_x et ∇_x désignent respectivement l'opérateur divergence et l'opérateur gradient par rapport à l'horizontale. $D_x(u)$ est le tenseur de taux de déformation par rapport à l'horizontale avec $D_x(u) = \dfrac{\nabla_x u + [\nabla_x u]^t}{2}$, où $[\nabla_x u]^t$ désigne la transposée du tenseur $\nabla_x u$.
- Le terme $r\rho|u|u$, avec $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ vient de la source de frottement quadratique avec $r > 0$ étant une constante. $\rho u \otimes u = \big((\rho u)_i u_j\big)_{i,j=1;2} = \rho u_i u_j$ est le produit tensoriel de la quantité de mouvement horizontale ρu et de la vitesse horizontale u.
- ν_1 et ν_2 sont les viscosités de turbulence dans la direction horizontale et verticale respectivement, qui dépendent des variables t, x, y et de la densité ρ en général.
- On note $\mathbf{u} = (u, v)$ le vecteur vitesse et $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la viscosité.

Dans le système (0.1) qu'on appellera système original :

- la première équation est appelée équation de *conservation de la masse* [3], ou encore équation de continuité ;
- la deuxième traduit la *conservation de la quantité de mouvement* [4] dans la direction horizontale, on l'appelle aussi équation du moment ;
- l'équation $\partial_y P(\rho) = -g\rho$ appelée *équation hydrostatique* provient de l'approximation hydrostatique avec $g > 0$ étant l'accélération de la chute libre ;
- P est une loi de pression donnée par la loi d'état $P(\rho) = c^2\rho$, la constante c est définie par $c^2 = \mathcal{R}\mathcal{T}$ où $\mathcal{R}$ est la constante universelle des gaz parfaits de l'air et $\mathcal{T}$ la température, supposée constante (on se place dans le cas isotherme) (voir [19, 44]).

On suppose que le mouvement (l'écoulement) se produit dans un domaine $\tilde{\Omega} = \Big\{(x, y) : \ x \in \tilde{\Omega}_x, \ 0 < y < H\Big\}$, où $\tilde{\Omega}_x = \mathbb{T}^2$ désigne un tore bidimensionnel correspondant au domaine spatial horizontal et $H > 0$ une constante.

En s'inspirant de M. Ersoy, T. Ngom et M. Sy dans [19], on suppose $g = c^2 = 1$ pour plus de simplicité et prenons les viscosités comme :

$$\nu_1 = \overline{\nu}_1 \rho(t, x, y), \quad \nu_2 = \overline{\nu}_2 \rho(t, x, y) e^{2y} \tag{0.2}$$

pour certaines constantes $\overline{\nu}_i > 0$ $(i = 1; 2)$ dans (0.1). En effet, la vision compressible en mécanique des fluides pose une question délicate, celle de savoir comment traiter le cas du vide. Plus précisément, pour l'étude d'un modèle de fluides compressibles et pour ne parler que de l'aspect visqueux par exemple, on est amené à conditionner les profils de viscosité [5].

Les conditions aux limites sur $\partial\tilde{\Omega}$ sont exprimées comme :

$$\begin{aligned} &\text{Conditions périodiques sur } \partial\tilde{\Omega}_x, \\ &v_{|y=0} = v_{|y=H} = 0, \\ &\partial_y u_{|y=0} = \partial_y u_{|y=H} = 0. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Les données initiales sont imposées sur la composante horizontale de la quantité de mouvement et la distribution de densité, qui, sans perte de généralité, prend la forme :

$$\rho(0, x, y) u(0, x, y) = m_0 e^{-y}, \quad \rho(0, x, y) = \xi_0 e^{-y}, \tag{0.4}$$

où $m_0 = m_0(x, y) = m(0, x, y)$ et $\xi_0 = \xi_0(x) = \xi(0, x)$ sont fonctions de $x = (x_1, x_2)$ et y.

---

3. La propriété de conservation de la masse exprime que la variation au cours du temps de la masse de fluide contenue dans le volume $\Omega_t = \phi(t)(\tilde{\Omega})$ donnée par $\displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(t, X) dX$ est nulle (avec $X = \phi(t, x, y)$ le champ des positions), car le domaine Ω_t se déplace avec le fluide et l'échange de matière avec l'extérieur est négligeable.
4. Le théorème fondamental de la dynamique exprime que la variation de la quantité de mouvement contenue dans un volume Ω_t se déplaçant avec le fluide est égale à la somme des forces extérieures appliquées à ce volume.
5. La viscosité est le paramètre qui définit la résistance à l'écoulement d'un fluide, c'est la consistance plus ou moins épaisse ou sirupeuse d'un fluide qui permet à celui-ci de s'écouler plus ou moins rapidement. Plus un fluide est visqueux plus il s'écoule lentement.

Contexte physique

Les `Équations Primitives atmosphériques` sont fondamentales dans la dynamique des fluides géophysiques (voir [36]). Elles sont basées sur l'approximation dite *hydrostatique* [6], dans laquelle la conservation de la quantité de mouvement dans la direction verticale est remplacée par l'équation hydrostatique. L. F. Richardson dans [39] a d'abord introduit les `EP` à partir des équations thermodynamiques et hydrodynamiques avec la force de Coriolis. Plus tard dans les années 1940, J. G. Charney, R. Fjörtoft et J. Von Neumann dans [14] ont produit des modèles plus simples tels que les équations quasi-géostrophiques (QG).

Dans [19], M. Ersoy, T. Ngom et M. Sy ont dérivé les `EPCs 3D` (0.1) à partir des équations de Navier-Stokes compressibles et anisotropes `3D` par approximation hydrostatique. En effet, ils se sont intéressés à une version des `EPC` pour laquelle les termes de diffusion, issus de la quantité d'eau dans l'air ou de la chaleur émise par le soleil, ne sont pas pris en compte. De plus, ils tirent profit de la différence entre les dimensions horizontale et verticale de l'atmosphère (10 à 20 kilomètres pour l'altitude contre des milliers de kilomètres de longueur) pour y procéder à une analyse asymptotique en couche mince, ils admettent que les variations des mouvements verticaux sont négligeables par rapport aux mouvements horizontaux. Ils aboutissent alors aux `Équations Primitives Compressibles simplifiées (EPCs)`. L'utilisation d'un tenseur de viscosité anisotrope au niveau du modèle de Navier-Stokes dans ce contexte permet de prendre en compte l'*anisotropie* [7] dans l'atmosphère et d'autre part de justifier l'approximation hydrostatique.

Historique

Les `Équations Primitives` ont attiré beaucoup d'attentions en mécanique des fluides et en mathématiques appliquées comme dans [12, 19, 27, 37, 40, 44], en raison de leur importance physique, de leur complexité, de leurs phénomènes riches et de leurs défis mathématiques.

Les théories mathématiques des `EPI` ont été étudiées à partir des années 1990. J. L. Lions, R. Temam et S. Wang ont d'abord fait l'analyse mathématique des `EP` pour les modèles d'atmosphère en dimension deux (`2D`) et trois (`3D`) dans [31], dans lesquelles l'évaporation et le chauffage solaire à viscosités constantes ont été pris en compte et l'existence globale de solutions faibles a été obtenue. D. Bresch, F. Guillén-Gonzàlez, N. Masmoudi et MA. Rodrìguez-Bellido dans [5] ont obtenu l'existence et l'unicité de solutions faibles pour les équations hydrostatiques bidimensionnelles (`2D`) de Navier-Stokes. Cependant, l'unicité des solutions faibles dans le cas `3D` n'est toujours pas claire. L'existence de solutions fortes des `EPI` a été largement étudiée. Dans [44] R. Temam et M. Ziane ont considéré l'existence locale de solutions fortes pour les `EP` de l'atmosphère, de l'océan, et le couplage atmosphère-océan. M. Petcu, R. Temam et D. Wirosoetisno dans [37] ont examiné certains résultats de régularité pour les `EP 2D` avec des conditions aux limites périodiques. C. Cao et E. S. Titi dans [12] ont prouvé l'existence globale et l'unicité de solutions fortes des `EPI 3D` visqueuses de la dynamique océanique et atmosphérique à grande échelle. Ces dernières années, ils ont également établi l'existence globale de solutions fortes pour le système avec seulement une diffusion verticale ou une diffusivité de tourbillon horizontale. De plus, l'explosion à temps fini de la solution de l'équation primitive non visqueuse, avec ou sans couplage à l'équation de la chaleur, a été montrée par C. Cao, S. Ibrahim, K. Nakanishi et E. S. Titi dans [8].

6. L'approximation hydrostatique stipule que la composante verticale de la force de pression est en équilibre exact avec la force gravitationnelle : l'équilibre hydrostatique. Elle permet de négliger, dans le calcul de la pression le long de l'axe vertical, les forces dues :

- ✓ au mouvement horizontal et vertical de l'air,
- ✓ à la force de Coriolis.

Il s'ensuit que la pression, en tout point du volume atmosphérique, est uniquement et directement proportionnelle au poids de la colonne d'air au-dessus de ce point. Cette approximation est valide à un grand degré de précision dans un très grand nombre des états naturels de l'atmosphère en particulier pour les mouvements de grande échelle. Elle cesse d'être valide à petite échelle (< 10 km) et pour des systèmes intenses comme les tornades et les lignes de grains.

7. L'anisotropie (contraire d'isotropie) est la propriété d'être dépendant de la direction. Quelque chose d'anisotrope pourra présenter différentes caractéristiques selon son orientation.

Contexte mathématique

Afin de comprendre le mécanisme de prévision météorologique et climatique à long terme, certains mathématiciens ont commencé à étudier les `Équations Primitives Compressibles` de l'atmosphère. Dans le cas où les coefficients de viscosité sont constants, B. Gatapov et A. Kazhikhov ont obtenu une existence globale de solutions faibles à un problème du modèle `EPC 2D` en appliquant le théorème classique du point fixe de Schauder dans [25]. L'unicité de ces solutions faibles a été prouvée par Q. Jiu, M. Li et F. Wang dans [28].
M. Ersoy et T. Ngom dans [18] ont montré un résultat similaire de [25] pour les `EPC 2D` avec la viscosité horizontale $\nu_1(t,x,y) = \nu_0 \exp\left(\frac{-g}{c^2}y\right)$ et la viscosité verticale $\nu_2(t,x,y) = \nu_0 \exp\left(\frac{g}{c^2}y\right)$.
Du point de vue physique, la viscosité peut dépendre de la densité.

De plus, M. Ersoy [8], T. Ngom [9] et M. Sy [10] dans [19] ont obtenu la stabilité des solutions faibles des `EPCs 3D` (0.1). Dans [43], T. Tang et H. Gao ont étudié la stabilité des solutions faibles pour le modèle `EPC 2D` en utilisant une nouvelle estimation d'entropie.

Étant donné que le coefficient de viscosité dépend de la densité qui est dégénérée sous le vide, il n'est pas disponible pour obtenir l'estimation de la vitesse elle-même. Comment construire des solutions approchées est un problème majeur et difficile dans ce cas. Jusqu'à présent, l'existence globale de solutions faibles pour le système `EPC 3D` reste d'actualité.

Récemment, l'existence globale de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes compressibles barotropes avec viscosité dégénérée a été prouvée par A. F. Vasseur et C. Yu dans [45] et J. Li et Z. Xin dans [30]. Dans [45], A. F. Vasseur et C. Yu ont construit des solutions approchées basées sur l'existence globale de solutions des équations de Navier-Stokes quantiques (voir [46]).
Tandis que, concernant les équations de Navier-Stokes quantiques, A. Jüngel dans [29] a utilisé la fonction $\rho\varphi$ comme fonction test pour gérer le terme de convection et a obtenu une solution faible particulière, où φ est une fonction régulière à support compact. Il est nécessaire dans [29] que la pression $P(\rho) = \rho^\gamma$ avec $\gamma > 3$ en dimension trois pour assurer la convergence faible du terme quantique $\rho\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)$.
M. Gisclon et I. Lacroix-Violet dans [26] ont utilisé la fonction φ comme fonction test, ont supprimé la restriction $\gamma > 3$ dans [29] et ont prouvé l'existence globale de solutions faibles des équations de Navier-Stokes quantiques avec pression à froid pour $\gamma \geq 1$.

De plus, dans [46], A. F. Vasseur [11] et C. Yu ont obtenu l'existence globale de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes quantiques compressibles avec amortissement.
Bien que le résultat dans [46] ait été énoncé dans le cas $\gamma > 1$, il est en fait vrai pour $\gamma = 1$ si on réécrit la forme d'énergie comme $\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\xi|u|^2 + \xi\ln\xi - \xi + 1\right)dx$ (voir [21]). La convergence des solutions approchées sur le terme linéaire $P(\xi) = \xi$ est directe lorsque $\gamma = 1$.

8. Mehmet ERSOY : Institut de Mathématiques de Toulon (IMATH), Université de Toulon, BP 20132, 839 57 La Garde, France.

9. Timack NGOM : Laboratoire de Mathématiques et Applications (LMA), Université Assane Seck de Ziguinchor, UFR ST BP 523 Ziguinchor, Sénégal.

10. Mamadou SY : Laboratoire d'Analyse Numérique et Informatique(LANI), Université Gaston Berger de Saint-Louis, UFR SAT BP 234 Saint-Louis, Sénégal.

11. Alexis F. VASSEUR est un mathématicien franco-américain, spécialisé en EDP. Il est actuellement professeur John T. Stuart III à l'Université du Texas à Austin. En 2015, il a été nommé membre de l'American Mathematical Society.

A propos de ce mémoire

Dans ce mémoire, nous nous focalisons sur les travaux de FENGCHAO WANG [12], CHANGSHENG DOU [13] et QUANSEN JIU [14] dans [47]. Nous explicitons dans ce document les différents résultats qu'ils ont trouvés et les enrichissons à la mesure du possible.

Ce travail, motivé par les travaux de A. F. VASSEUR et C. YU dans [45] et [46], porte sur `l'étude de l'existence globale de solutions faibles des Équations Primitives Compressibles simplifiées (EPCs) 3D` (0.1) dans lesquelles la pression est supposée être $P(\rho) = \rho$ (on suppose $c^2 = 1$ pour la simplicité).

L'idée principale de notre démonstration est de construire les solutions approchées satisfaisant la borne inférieure de la densité, l'inégalité d'énergie et la BD-entropie (voir [2, 4, 19]).
Pour ce faire, nous donnons la démarche à suivre.

- Nous allons d'abord faire face à la difficulté sur la façon d'estimer la vitesse verticale w puisqu'il n'y a pas d'équation dessus. Afin de surmonter cette complication, nous représentons la vitesse verticale w en fonction de la densité ξ et de la vitesse horizontale u, ce qui nous permettra d'utiliser la méthode de Faedo-Galerkin pour prouver l'existence globale des solutions approchées.
- Ensuite, comme dans [45, 46], nous construisons les solutions approchées en ajoutant le terme de viscosité dans l'équation de continuité, et en ajoutant la traînée, la pression à froid, le terme quantique et les termes des dérivées supérieures dans l'équation de la quantité de mouvement (voir (2.1) pour plus de détails).
- Enfin, en utilisant des arguments de compacité, nous prouvons l'existence globale de solutions faibles des `EPCs` en faisant disparaître les paramètres de notre système approximatif pas à pas par passage aux limites.

Nous signalons que si l'on ne considère que le problème du modèle (1.16), la pression peut être prise comme $h(\xi) = \xi^\gamma$ pour tout $\gamma \geq 1$ (voir aussi la Remarque 1.18).
De plus, dans la construction des solutions approchées dans [45,46] il y a un terme d'amortissement $\tilde{r}\rho|u|^2u$ avec $\tilde{r} > 0$ qui s'annule lorsque $\tilde{r} \to 0$. Dans le système `EPCs` (0.1), le terme amortissement est un quadratique $r\rho|u|u$ au lieu de $\tilde{r}\rho|u|^2u$, qui provient de la source de frottement (voir [19]).

Dans ce travail, nous nous concentrerons sur l'existence de solutions faibles globales du système `EPCs` (0.1). Cependant, afin de se débarrasser du terme d'amortissement $r\rho|u|u$, nous devrons ajouter le terme d'amortissement supplémentaire $r_1\rho|u|^2u$ tel qu'une inégalité de type MELLET-VASSEUR soit disponible (voir [30, 33, 45]). Dans ce cas, on déroule la preuve du résultat d'existence de solutions du système `EPCs` (0.1) sans le terme d'amortissement $r\rho|u|u$ pour la brièveté (voir aussi la Remarque 3.1).

Annonce du plan

Notre étude comporte trois chapitres :

- le premier est consacré aux préliminaires et à la présentation de notre résultat principal ;
- le deuxième est dédié à l'utilisation de l'approximation de Faedo-Galerkin pour montrer l'existence de solutions faibles globales du système approximatif (2.1) ;
- au dernier chapitre, on déduit l'estimation de la BD-entropie et en utilisant des arguments de compacité nous passons aux limites quand $\varepsilon, \mu \to 0$, quand $\eta \to 0$ et quand $\kappa, \delta, r_0 \to 0$ pas à pas.

12. FENGCHAO WANG : School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, People's Republic of China. Email : wfcwymm@163.com.

13. CHANGSHENG DOU : Capital University of Economics and Business, Beijing 100070, People's Republic of China. Email : douchangsheng@cueb.edu.cn.

14. QUANSEN JIU : School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048, People's Republic of China. Email : jiuqs@cnu.edu.cn.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET RÉSULTAT PRINCIPAL

Introduction

L'objet de ce chapitre est d'abord de rappeler quelques notions et résultats classiques fondamentaux de topologie et d'analyse fonctionnelle utiles pour aborder la suite, ensuite d'exposer les espaces fonctionnels de base et leurs propriétés essentielles, et enfin de présenter notre résultat principal. Il a pour but principal de faciliter la lecture du mémoire. On y retrouve toute la finesse et la puissance des outils mathématiques mis au point pour l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles. En particulier, on s'intéresse aux notions de convergence, de compacité, de distribution et d'injection de Sobolev et on discute la notion de fonctions à valeurs dans un espace de Banach, qui sera largement utilisée dans la suite.
Pour réaliser les préliminaires on s'est basé essentiellement sur les livres [1, 6, 15, 16, 20, 48]. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.1 Quelques outils d'analyse réelle et fonctionnelle

1.1.1 Espaces de Banach et espaces de Hilbert

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Définition 1.1 (Espace métrique et Distance)

1. *Un espace métrique noté (E, d) est un ensemble E muni d'une application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ appelée distance vérifiant les propriétés suivantes :*
   - *(a) $\forall\ (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (axiome de séparation) ;*
   - *(b) $\forall\ (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ (axiome de symétrie) ;*
   - *(c) $\forall\ (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Inégalité triangulaire).*
2. *Deux métriques (ou distances) d et d' de E sont dites équivalentes s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tels que :*
$$\forall\ (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \leq \alpha d'(x, y) \text{ et } d'(x, y) \leq \beta d(x, y).$$
   Autrement dit, il existe λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \lambda_2 d(x, y)$.

Définition 1.2 (Norme et Espace vectoriel normé)

1. *On appelle norme sur E l'application $\|\cdot\|_E$ définie de E dans $\mathbb{R}_+$ tels que :*
   - *(a) $\forall\ x \in E,\ \|x\|_E = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$;*

(b) $\forall\ x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\|_E = |\lambda|\|x\|_E$;

(c) $\forall\ (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

2. *E muni de $\|\cdot\|_E$ noté $(E, \|\cdot\|_E)$ est appelé espace vectoriel normé (e v n). Il s'agit d'un cas particulier d'espace métrique dont la distance est donnée par :*

$$d(x,y) = \|x-y\|_E,\ \forall\ (x,y) \in E^2.$$

d est appelée distance induite par la norme $\|\cdot\|_E$.

3. *Si E est muni de plusieurs normes on dit que deux normes quelconques $\|\cdot\|_i$ et $\|\cdot\|_j$ sont équivalentes s'ils existent deux réels strictement positifs α et β tels que :*

$$\forall\ x \in E \text{ on ait } \|x\|_i \leq \alpha\|x\|_j \text{ et } \|x\|_j \leq \beta\|x\|_i.$$

Définition 1.3 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On considère la topologie définie par la distance associée à cette norme.*

1. *(Convergence forte) On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge fortement vers $x \in E$ si :*

$$\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

2. *(Suite de Cauchy) On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de E est une suite de Cauchy si :*

$$\forall\ \varepsilon \geq 0,\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ n,m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_E \leq \varepsilon.$$

3. *(Espace complet) E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.*
4. *(Espace de Banach) Un espace de Banach E est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.4 *Soient E et F deux espaces de Banach.*

1. *(Injection continue) On dit que E s'injecte continûment dans F et on note $E \hookrightarrow F$ si les conditions suivantes sont vérifiées :*

   (a) *E est un sous-espace de F;*

   (b) *toute suite convergente dans E est convergente dans F.*

   Autrement dit, l'identité $I : E \longrightarrow F$ est continue ou encore $\exists\ C > 0$ telle que :

$$\|u\|_F \leq C\|u\|_E,\ \forall\ u \in E.$$

2. *(Injection compacte) On dit que l'injection de E dans F est compacte et on note $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ si les conditions suivantes sont vérifiées :*

   (a) *E s'injecte continûment dans F;*

   (b) *l'application $I : E \longrightarrow F$ est compacte.*

   Autrement dit, toute suite bornée dans E est relativement compacte dans F.

Définition 1.5 (Produit scalaire et Espace pré-hilbertien)

1. *On appelle produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel H toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur $H \times H$, qu'on notera en général $(\cdot,\cdot)_H$.*
2. *On dit qu'un tel couple $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ est un espace pré-hilbertien réel, et qu'il est euclidien si de plus l'espace vectoriel H est de dimension finie.*
3. *Si $(x,y) \longmapsto (x,y)_H$ est un produit scalaire sur H, la norme hilbertienne (norme issue du produit scalaire) d'un élément $x \in H$ est : $\|x\|_H = \sqrt{(x,x)_H}$.*

Proposition 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient H un espace pré-hilbertien réel et $x, y \in H$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(x,y)_H| \leq \|x\|_H\|y\|_H.$$

On déduit quelques relations remarquables dans un espace pré-hilbertien réel.

Propriétés 1.1 *Soient H un espace pré-hilbertien réel et $x, y, z \in H$, on a :*

1. *Pythagore généralisé :* $\|x+y\|_H^2 = \|x\|_H^2 + \|y\|_H^2 + 2(x,y)_H$;
2. *l'identité du parallélogramme :* $\|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 = 2(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2)$;
3. *l'identité de polarisation :* $4(x,y)_H = \|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2$;
4. *la formule de la médiane :* $\|x-z\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 = \frac{1}{2}\|y-z\|_H^2 + 2\|m-x\|_H^2$, *avec* $m = \frac{1}{2}(y+z)$.

Définition 1.6 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme découle d'un produit scalaire unique.*

Théorème 1.1 *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.*

Définition 1.7 (Espace séparable)
On dit qu'un espace métrique est séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable et dense.

Proposition 1.2 *Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E. Alors F est séparable.*

Définition 1.8 (Base hilbertienne)
Soit $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_H$ associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$. On appelle base hilbertienne, une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tels que :

1. $\|e_n\|_H = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *et* $(e_n, e_m)_H = 0 \ \forall\, n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m$;
2. *l'espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H.*

Théorème 1.2

1. *Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors*

$$\forall\, u \in H, \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} (u, e_k)_H e_k. \tag{1.1}$$

2. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

• Dual topologique, Espace réflexif et Théorème de Lax-Milgram

On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On appelle souvent "opérateurs bornés de E dans F" les éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace $\mathcal{L}(E,E)$. On munit cette espace de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ définie par : $\forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \inf\{C > 0 : \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E\} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.\end{aligned}$$

Définition 1.9 (Dual topologique) *Le dual topologique d'un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$ est, par définition, l'ensemble des formes linéaires continues de E, c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$. On note cet ensemble E'. Ainsi, $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ et, E' muni de la norme $\|\cdot\|_{E'}$ appelée norme duale de E définie par :*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E, \|x\|_E = 1} |f(x)| = \sup_{x\in E, \|x\|_E \leq 1} |f(x)|$$

est un espace de Banach puisque $\mathbb{K}$ est complet.
En général, on écrit : $f(x) = \langle f, x\rangle_{E',E}$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E',E}$ est le crochet dans la dualité entre E' et E.

✓ Le dual algébrique d'un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$ noté E^* est, par définition, l'ensemble des formes linéaires de E, c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
✓ Si l'espace E est de dimension finie, le dual topologique coïncide avec le dual algébrique, puisque dans ce cas toute forme linéaire est continue. Mais dans le cas général, l'inclusion du dual topologique dans le dual algébrique est stricte ($E' \subset E^*$).

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual muni de la norme duale de E. Soit $E'' = (E')'$ le dual de E', bidual de E muni de la norme

$$\|\zeta\|_{E''} = \sup_{f \in E', f \neq 0} \frac{|\langle \zeta, f \rangle_{E",E'}|}{\|f\|_{E'}}.$$

Soit l'injection canonique J de E dans E'' définie par :

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J(x) : E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \longmapsto \langle J(x), f \rangle_{E",E'} = \langle f, x \rangle_{E',E}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 J est linéaire, injective et $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$. En effet :

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{f \in E', f \neq 0} \frac{|\langle J(x), f \rangle_{E",E'}|}{\|f\|_{E'}} = \sup_{f \in E', f \neq 0} \frac{|\langle f, x \rangle_{E',E}|}{\|f\|_{E'}} = \|x\|_E,$$

et si $x, y \in E$, on a : $J(x) = J(y) \Longrightarrow \forall\ f \in E',\ f(x) - f(y) = f(x - y) = 0 \Longrightarrow x = y$, car les éléments de E' séparent deux éléments de E.

Définition 1.10 (Espace réflexif) *Grâce à J, E est identifiable à un sous-espace de E'', $J(E)$. Si $J(E) = E''$, c'est-à-dire si J est surjective, alors on dit que E est réflexif.*

Rappelons un résultat dû à Lax-Milgram et constituant la pierre angulaire de la théorie variationnelle des problèmes elliptiques linéaires.
Soit H un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|_H$. On se donne une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ sur $H \times H$ et L une forme linéaire sur H. On considère le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que : } a(u, v) = L(v),\ \forall\ v \in H. \tag{1.2}$$

Définition 1.11

1. *On dit que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est :*
   ✓ *continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que :*
   $$\forall\ u, v \in H,\ |a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H;$$
   ✓ *coercive s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :*
   $$\forall\ u \in H,\ |a(u, u)| \geq \gamma \|u\|_H^2.$$
2. *On dit que la forme linéaire $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe une constante $K > 0$ telle que :*
   $$\forall\ v \in H,\ |L(v)| \leq K \|v\|_H.$$

Théorème 1.3 (de Lax-Milgram)
Supposons que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue et coercive et que la forme linéaire $L(\cdot)$ est continue. Alors, le problème (1.2) admet une solution unique.

1.1.2 Convergence faible, convergence faible-$*$

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, X' son dual topologique et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet dans la dualité entre X' et X. Pour les preuves et les détails voir [1] ou [15] par exemple.

Définition 1.12 (convergence faible) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et x un élément de X. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et on note*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ dans } X,$$

si

$$\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall\ f \in X'.$$

Proposition 1.3 *Si la limite faible d'une suite de X existe, elle est unique.*

Définition 1.13 (convergence faible-$*$) *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X' converge vers f faible-$*$ et on note*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ dans } X',$$

si

$$\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall\ x \in X.$$

Remarque 1.2 Si la limite faible-$*$ d'une suite existe, elle est unique.

Soit H un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$ et H' son dual topologique.

Théorème 1.4 (de représentation de Riesz) *Pour tout $T \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que :*

$$\langle T, y\rangle = (x, y)_H, \ \forall\ y \in H, \text{ et de plus } \|T\|_{H'} = \|x\|_H.$$

Il découle de ce théorème que l'espace H est isométriquement isomorphe à son dual H'.
On déduit de ce théorème la Proposition 1.4.

Proposition 1.4 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge faiblement vers x dans l'espace de Hilbert H si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y)_H = (x, y)_H, \ \forall\ y \in H.$$

Théorème 1.5 *Soit X un espace de Banach, X' son dual. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$. On a alors :*

1. *convergence forte implique convergence faible :* $x_n \to x$ *dans* $X \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$ *dans* X;
2. $x_n \rightharpoonup x$ *dans* $X \Longrightarrow (\|x_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\|x\|_X \leq \liminf_{n\to+\infty}\|x_n\|_X$;
3. *convergence fort-faible :* $(x_n \rightharpoonup x$ *dans* X *et* $f_n \to f$ *dans* $X') \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\langle f_n, x_n\rangle = \langle f, x\rangle$;
4. $f_n \to f$ *dans* $X' \Longrightarrow f_n \rightharpoonup f$ *dans* $X' \Longrightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *dans* X';
5. $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $X' \Longrightarrow (\|f_n\|_{X'})_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\|f\|_{X'} \leq \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{X'}$;
6. $(x_n \to x$ *dans* X *et* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *dans* $X') \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\langle f_n, x_n\rangle = \langle f, x\rangle$.

Grâce à ce théorème, on peut avoir des résultats intéressants.

Proposition 1.5 *Soient X et Y deux espaces de Banach, et L une application linéaire de X dans Y, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L est continue de X fort dans Y fort ;*
2. *L est continue de X faible dans Y faible, c'est-à-dire si $x_n \rightharpoonup x$ dans X alors $L(x_n) \rightharpoonup L(x)$ dans Y.*

Proposition 1.6 *Soit X un espace de Banach réflexif. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$; on suppose que :*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée i.e. $\exists\ C > 0$ une constante t.q. $\|x_n\| \le C < +\infty$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;*
2. *l'ensemble des points d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour la topologie faible est réduit à $\{x\}$.*

Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ toute entière converge faiblement vers x, dans X.

Preuve de la Proposition 1.6 : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers x, pour la topologie faible, alors il est possible de trouver $\varepsilon > 0$, $f \in X'$, et une sous-suite extraite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$|\langle f, x_m - x\rangle| > \varepsilon > 0,\ \forall\ m \in \mathbb{N}^*.$$

D'après 1), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et X est un espace de Banach réflexif. Donc on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement vers un élément de X lequel n'est autre que x d'après 2).
On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |\langle f, x_k - x\rangle| = 0$. D'où la contradiction. ■

Remarque 1.3 On a un résultat analogue pour la convergence faible-$*$ en considérant un espace de Banach (non réflexif) séparable X, une suite d'éléments dans X' et la topologie faible-$*$.

Par la même occasion, on a un résultat semblable pour la convergence forte. Plus précisément, on a la Proposition 1.7.

Proposition 1.7 *Soit X un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, et $x \in X$.*
Supposons que toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers x.
Alors, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute entière converge vers x.

Preuve de la Proposition 1.7 : Supposons le contraire.
Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\|x_k - x\|_X > \varepsilon,\ \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Or, comme toutes les sous-suites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ devrait admettre une sous-suite convergente vers x, ce qui contredit (1.3). ■

1.1.3 Compacité, compacité faible

Nous parlons brièvement de la compacité. Pour les preuves et les détails voir [6] ou [48].

Définition 1.14 *Soit (X, τ) un espace topologique.*
(X, τ) est dit séparé (ou de Hausdorff) si $\forall\ a, b \in X$, $\exists\ V_a \in \mathcal{V}_\tau(a)$ et $V_b \in \mathcal{V}_\tau(b)$ tel que $V_a \cap V_b = \emptyset$.
$\mathcal{V}_\tau(a)$ (resp. $\mathcal{V}_\tau(b)$) désigne l'ensemble des voisinages de a (resp. b) pour la topologie τ.

Définition 1.15 *Un sous-ensemble Y d'un espace topologique séparé est dit compact si de tout recouvrement ouvert de Y, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.16 *Un sous-ensemble Y d'un espace normé X est dit :*

1. *pré-compact si le complété de Y est compact pour la topologie de X;*
2. *relativement compact dans X si son adhérence est compacte ;*
3. *séquentiellement compact pour la topologie faible de X si, de toute suite de points de Y, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans Y.*
   Dans ce cas, on dit que Y est faiblement compact.

Dans les espaces métriques, le Théorème de Bolzano-Weierstrass (voir Théorème 1.6) permet de caractériser la compacité avec des suites.

Théorème 1.6 (de Bolzano-Weierstrass)
Une partie K d'un espace métrique X (et en particulier d'un espace normé) est compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

Remarque 1.4 On déduit immédiatement de ce théorème que dans un espace métrique, une partie Y est relativement compacte si et seulement si toute suite d'éléments de Y admet une sous-suite convergente dans X.

Théorème 1.7 *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $A \subset X$.*

1. *Si A est compact, alors A est fermé borné.*
2. *Si X est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé borné.*

Les résultats de compacité faible et faible-$*$ énoncés ci-dessous sont largement utilisés pour "passer à la limite" dans la plupart des méthodes constructives de résolution des problèmes aux limites.

Théorème 1.8 *La boule unité fermée d'un espace de Banach réflexif X est faiblement compacte.*

Remarque 1.5 Le Théorème 1.8 est parfois formulé comme suit : " toute suite bornée dans un espace de Banach réflexif X, admet une sous-suite faiblement convergente dans X".

Proposition 1.8 *Si X est un espace normé séparable, alors toute suite bornée dans X' admet une sous-suite faiblement-$*$ convergente dans X'.*

1.1.4 Quelques théorèmes de point fixe et complément d'analyse réelle

Définition 1.17 *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $k > 0$.*

1. *Une application $f : X \to Y$ est dite k-lipschitzienne si $d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \forall \ x, y \in X$.*
2. *Une application k-lipschitzienne avec $k < 1$ est dite contractante.*

Voici l'important Théorème du point fixe de Banach. Pour la preuve voir [42] ou [20] page 534.

Théorème 1.9 (point fixe de Banach) *Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $S : X \to X$ est contractante, alors elle admet un point fixe unique (i.e. $\exists! \ x \in X$ tel que $S(x) = x$).*

Définition 1.18 *Soit E un espace topologique.*
Une fonction $f : E \to]-\infty; +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[f \leq \gamma] = \{x \in E : f(x) \leq \gamma\}$ est fermé.

Nous donnons quelques propriétés des fonctions s.c.i. (voir [6]).

Propriétés 1.2 *Soient E un espace topologique et $f : E \to]-\infty, +\infty]$.*

1. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$. Si f est s.c.i. et si $x_n \to x$ dans E, alors : $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.*
2. *Soient $f_1, f_2 : E \to]-\infty; +\infty]$. Si f_1 et f_2 sont s.c.i alors $f_1 + f_2$ est s.c.i..*
3. *Soient $f_i : E \to]-\infty; +\infty]$, $i \in I$.*
   Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions s.c.i. alors l'enveloppe supérieure des $(f_i)_{i\in I}$ est s.c.i., c'est-à-dire la fonction F définie par $F(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$, $x \in E$ est s.c.i..
4. *Si E est compact et f est s.c.i., alors f atteint sa borne inférieure sur E.*

Il convient d'étendre la Définition 1.18 pour la convergence faible.

Définition 1.19 *On dit que f est faiblement s.c.i. au point $x \in E$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ dans E, alors $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.*
On dit que f est faiblement s.c.i. sur E si elle est faiblement s.c.i. en tout point de E.

Remarque 1.6 Si f est faiblement s.c.i., alors f est s.c.i.. Dans le cas convexe, les deux notions de semi-continuité inférieure coïncident.

De plus, on a le Théorème 1.10.

Théorème 1.10 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et s.c.i.. Alors f est faiblement s.c.i..*

Définition 1.20 *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^N$ est dit convexe si pour tout couple $(x, y) \in K^2$ et $\forall\ \lambda \in [0; 1]$, on a : $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.*

Définition 1.21 *Soit E un espace vectoriel. Une fonction $f : E \to]-\infty, +\infty]$ est dite convexe si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),\ \forall\ x, y \in E,\ \forall\ \lambda \in [0, 1].$$

On dira que f est strictement convexe si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),\ \forall\ x, y \in E,\ x \neq y,\quad \forall\ \lambda \in]0, 1[.$$

Propriétés 1.3

1. *Si f est une fonction convexe, alors pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[f(x) \leq \gamma]$ est convexe ; mais la réciproque n'est pas vraie.*
2. *Si f_1 et f_2 sont des fonctions convexes, alors $f_1 + f_2$ est convexe.*
3. *Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions convexes alors l'enveloppe supérieure des (f_i) est convexe.*
4. *Si f est une fonction convexe définie sur un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^N$, alors f est continue sur Ω et lipschitzienne sur tout compact de Ω.*
5. *De la propriété de Lipschitz découle, en utilisant le théorème de Rademacher, que toute fonction convexe définie sur $E \subset \mathbb{R}^N$ est différentiable presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) sur son domaine.*

Nous pouvons maintenant présenter le Théorème du point fixe de Schauder dont une preuve se trouve dans [42].

Théorème 1.11 (point fixe de Schauder) *Soient X un espace de Banach et $K \subset X$ convexe et compact alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.*

Nous poursuivons avec le Lemme de Gronwall et ses corollaires. Pour les preuves voir [1].

Théorème 1.12 (Lemme de Gronwall) *Soient f, g et h trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité :*

$$\forall\ t \in [a, b],\quad f(t) \leq h(t) + \int_a^t f(s)g(s)ds.$$

Alors,

$$\forall\ t \in [a, b],\quad f(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)g(s) \exp\Big(\int_s^t g(u)du\Big)ds.$$

Dans le cas particulier où h est une constante égale à C, on a le Corollaire 1.1 qui est couramment appelé "forme intégrale du Lemme de Gronwall".

Corollaire 1.1 *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues vérifiant :*

$$\exists\ C \geq 0\ /\ \forall\ t \in [a, b],\quad f(t) \leq C + \int_a^t f(s)g(s)ds.$$

Alors,

$$\forall\ t \in [a, b],\quad f(t) \leq C \exp\Big(\int_a^t g(s)ds\Big).$$

On a aussi la “forme différentielle du Lemme de Gronwall”, donnée par le Corollaire 1.2.

Corollaire 1.2 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une application continue et dérivable et $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue avec :*

$$\forall\ t \in [a,b], \quad f'(t) \leq f(t)g(t).$$

Alors,

$$\forall\ t \in [a,b], \quad f(t) \leq f(a) \exp\Big(\int_a^t g(s)ds\Big).$$

De plus, le Lemme de Gronwall permet d'obtenir le Corollaire 1.3.

Corollaire 1.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :*

$$\exists\ A > 0,\ B \geq 0,\ \forall\ t \in [a,b], \quad \|f'(t)\| \leq B + A\|f(t)\|.$$

Alors,

$$\forall\ t \in [a,b], \quad \|f(t)\| \leq \|f(a)\|e^{A(t-a)} + \frac{B}{A}\Big(e^{A(t-a)} - 1\Big).$$

Nous terminons cette sous-section par quelques précisions sur l'obtention d'une solution globale en dimension finie pour un problème de Cauchy donné que nous utilisons au Chapitre 2.
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe d'un espace de Banach E et une application $f : I \times \Omega \longrightarrow E$ continue.
✓ Problème de Cauchy : étant donnée $t_0 \in I,\ x_0 \in \Omega$, trouver $J \subset I$ intervalle contenant t_0 et une application $x : J \to \Omega$ dérivable sur J, satisfaisant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

✓ Forme intégrale du problème de Cauchy : un couple (J, x) est solution du Problème de Cauchy (1.4) si, et seulement si, l'équation intégrale suivante est vérifiée :

$$\forall\ t \in J,\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \quad x_0 = x(t_0).$$

Théorème 1.13 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (local Lipschitz))
On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Alors il existe une unique solution maximale (J, x) au Problème de Cauchy (1.4), qui est définie sur un intervalle J ouvert.

$*$ On suppose que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $I \times \Omega$. Soit (J, x) la solution maximale du Problème de Cauchy (1.4).
$*$ L'intervalle J est ouvert, disons de la forme $]T_-, T_+[$. Si $T_+ < \sup I$, la solution maximale x “explose” au voisinage du temps T_+, de la manière décrite par les théorèmes suivants.

Théorème 1.14 (Théorème de sortie de tout compact)
Soit $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du Problème de Cauchy (1.4). Si $T_+ < \sup I$, alors la trajectoire $\{x(t)\}$ sort de tout compact au voisinage de T_+, c'est-à-dire : quelque soit $K \subset \Omega$ compact, il existe $T_K \in]T_-, T_+[$ tel que, pour tout $t \in [T_K, T_+[,\ x(t) \in \Omega \setminus K$.

Corollaire 1.4 (Explosion en dimension finie) *On suppose $\Omega = E$ et E de dimension finie. Soit $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du Problème de Cauchy (1.4). Si $T_+ < \sup I$, alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\|_E = +\infty.$$

Remarque 1.7 [intéressante]

1. Si E est de dimension infinie, on peut avoir $T_+ < \sup I$ bien que $(\|x(t)\|_E)$ reste bornée dans un voisinage de T_+.
2. Si E est de dimension finie, les bornés sont relativement compacts : il suffit donc de montrer qu'une solution maximale est bornée pour savoir qu'elle est globale.

1.1.5 Espaces $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$. Pour les preuves dans cette partie voir [1].

► Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables de $p-ième$ puissance intégrable (au sens de Lebesgue) sur Ω, i.e.

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty.$$

On norme l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

► Pour $p = +\infty$, on note $L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables essentiellement bornées dans Ω, i.e.,

$$\exists\ M \geq 0 \text{ t.q. } |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

La quantité

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)| = \inf \big\{ M \geq 0;\ |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega \big\},$$

est une norme sur $L^\infty(\Omega)$.

Proposition 1.9 *Les espaces $L^p(\Omega)$ jouissent des propriétés suivantes.*

1. *(Fischer-Riesz) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\big)$ est un espace de Banach.*
2. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*
3. *Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif, et le dual de $L^p(\Omega)$ s'identifie à $L^q(\Omega)$, où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

✓ À titre exceptionnel, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx,$$

dont la norme associée est

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous donnons, sans démonstration, des versions assez générales des inégalités de Young et de Hölder que nous utiliserons sans cesse par la suite sans les mentionner explicitement.

Théorème 1.15 (Inégalité de Young) *Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Soient également $p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. On a alors :*

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{p_i}}{p_i}.$$

En particulier, si $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q > 1$, tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

On déduit immédiatement de cela une version extrêmement utile de l'inégalité de Young.

Corollaire 1.5 *Soient $p_1, \cdots, p_n$ des réels vérifiant l'hypothèse de la proposition précédente. Pour tous $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1} \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une constante $C(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}) > 0$, telle que pour tous $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^{p_i} + C(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}) x_n^{p_n}.$$

En particulier, soient $p, q > 1$, tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ C(\varepsilon) > 0\ /\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}_+ : ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q.$$

Théorème 1.16 (Inégalité de Hölder) *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $p_1, \cdots, p_n$ *des réels positifs (éventuellement infinis). Soit* $r \in [1, +\infty]$ *tel que* $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$. *Alors pour toute famille de fonctions* $f_1, \cdots, f_n$, *avec* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, *on a :*

$$\prod_{i=1}^{n} f_i \in L^r(\Omega) \quad et \quad \Big\| \prod_{i=1}^{n} f_i \Big\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

En particulier, soient p, q, *et* $r \geq 1$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, *alors pour tous* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$, *on a :* $fg \in L^r(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.5}$$

✓ Si $r = 1$, (1.5) est couramment appelé inégalité de Hölder.
✓ Si $r = 1$ et $p = q = 2$ dans (1.5), on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

On déduit de ce théorème l'inégalité d'interpolation entre les espaces L^p, qui n'est autre qu'une propriété de convexité.

Corollaire 1.6 *Soient* Ω *un ouvert quelconque de* $\mathbb{R}^N$ *et* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p, q \leq +\infty$. *Alors pour tout réel* r *tel que :*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \ 0 \leq \theta \leq 1,$$

on a : $u \in L^r(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Rappelons le Lemme de Fatou, le Théorème de Fubini et le Théorème de la Convergence Dominée de Lebesgue (TCDL).

Théorème 1.17 (Lemme de Fatou) *Soit* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* E *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *On a :*

$$\int_E (\liminf_{n \to +\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \Big(\int_E f_n d\mu \Big). \tag{1.7}$$

Le Lemme de Fatou est une conséquence du Théorème de convergence monotone.

Théorème 1.18 (Théorème de Fubini) *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$ *et* $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonctionnelle, on suppose que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$ *:*

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \ et \ \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même pour presque tout $y \in \Omega_2$ *:*

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \ et \ \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^2_x(\Omega_2).$$

De plus, on a :

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \Big) dx = \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \Big) dy.$$

Définition 1.22 (Convergence presque partout) *Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* F *un ensemble,* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *et* f *une fonction de* E *dans* F. *On dit que* f_n *converge presque partout vers* f *et on note* $f_n \to f$ *p.p. s'il existe une partie* A *de* E, *négligeable (i.e.* $mes(A) = 0$*), tel que, pour tout* x *élément de* A^c *(*$A^c = \{x \in E / x \notin A\}$*), la suite* $\big(f_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$.

Théorème 1.19 (TCDL) *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction de* $L^p(\Omega)$*, tels que :*

1. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p. sur* Ω;
2. $\exists\ g \in L^p(\Omega)$ *tels que* $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ *p.p. dans* Ω.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le TCDL admet la réciproque partielle suivante.

Théorème 1.20 (RTCDL) *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction de* $L^p(\Omega)$*, telle que* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *dans* $L^p(\Omega)$*. Alors, il existe* $g \in L^p(\Omega)$ *et une sous-suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tels que :*

1. $f_{n_k}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$;
2. $\forall\ k \in \mathbb{N},\ |f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$.

On a aussi le résultat de compacité suivant qu'on utilise régulièrement dans la suite.

Lemme 1.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ensemble mesurable borné. Supposons que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$*,* $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ *avec* C *une constante positive et* $f_n \to f$ *p.p. dans* Ω*. Alors*

1. $f \in L^p(\Omega)$ *et* $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C$.
2. $f_n \to f$ *fortement dans* $L^{\overline{p}}$*, pour tout* $\overline{p} \in [1, p[$.

Preuve du Lemme 1.1 : Grâce au Lemme de Fatou, on a :

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \leq \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)|^p dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n(x)|^p dx \leq C^p,$$

donc (1.) est prouvé.
Ensuite, sous les hypothèses du lemme, avec le théorème de Lebesgue, il s'ensuit que pour tout $\varepsilon > 0$, si on définit $\Omega_n = \{x \in \Omega; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, alors $mes\Omega_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
En appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(f_n - f)(x)|^{\overline{p}} dx &= \int_{\Omega_n} |(f_n - f)(x)|^{\overline{p}} dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_n} |(f_n - f)(x)|^{\overline{p}} dx \\
&\leq \|f_n - f\|^{\overline{p}}_{L^{\overline{p}}(\Omega_n)} + \int_{\Omega\setminus\Omega_n} \varepsilon^{\overline{p}} dx \\
&\leq \|1\|^{\overline{p}}_{L^{\frac{p\overline{p}}{p-\overline{p}}}(\Omega_n)} \|f_n - f\|^{\overline{p}}_{L^p(\Omega_n)} + \varepsilon^{\overline{p}} |\Omega \setminus \Omega_n| \\
&\leq |\Omega_n|^{1-\frac{\overline{p}}{p}} \|f_n - f\|^{\overline{p}}_{L^p(\Omega_n)} + \varepsilon^{\overline{p}} |\Omega|,
\end{aligned}$$

où $|A|$ désigne la mesure de l'ensemble A. Soit $n \to \infty$, alors $\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^{\overline{p}} dx \leq \varepsilon^{\overline{p}} |\Omega|$.
Puisque ε est arbitrairement petit, nous avons

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^{\overline{p}} dx = 0,$$

ce qui donne (2.). ■
On donne aussi le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.21 *Soit* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction, où* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $a < b$*. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe une fonction intégrable* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ \forall\ x \in [a, b]; \tag{1.8}$$
2. F *est absolument continue.*
De plus, si (1.8) *se tient, alors* $F'(x) = f(x)$ *p.p.* $x \in [a, b]$.

Terminons ce paragraphe par le Théorème 1.22.

Théorème 1.22 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*. Soit* (u_n) *une suite convergente dans* $L^k(\Omega)$ *et bornée dans* $L^q(\Omega)$ *pour un certain* $q > k$*. Alors elle converge dans tous les* $L^p(\Omega)$ *tels que* $k \leq p < q$.

1.2 Distributions et Espaces de Sobolev

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on note :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N,$$

l'opérateur de dérivation d'ordre α par rapport à la variable d'espace $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$.

1.2.1 Notion de distribution

La théorie des distributions a été introduite par le mathématicien français Laurent Schwartz en 1945. Les distributions sont des objets qui généralisent les fonctions localement intégrables et les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$. L'un des intérêts principaux de la théorie des distributions est de permettre la construction d'un calcul différentiel qui prolonge le calcul différentiel ordinaire et pour lequel toute distribution est indéfiniment dérivable. Cette théorie est devenue un outil essentiel, notamment dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Elle a aussi permis une modélisation mathématique pour de nombreux phénomènes physiques.

L'idée de base de la théorie des distributions est de définir les distributions par leur action sur un espace de fonctions appelées "fonctions-test". On peut noter que cette idée apparait déjà dans la définition de mesures et en particulier dans la définition des mesures de Radon.

Pour plus d'informations voir [16]. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$.

Définition 1.23 (Support) *On appelle support de f l'adhérence (ou la fermeture, c'est-à-dire le plus petit fermé) du lieu où f n'est pas nulle :*

$$supp\ (f) = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.24 (Espace des fonctions tests)
L'espace des fonctions tests noté $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ indéfiniment différentiables et à support compact inclus dans Ω.
Pour $K \subset \Omega$ compact, on note $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ à support dans K.

Définition 1.25 *On dit qu'une suite φ_j converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand $j \to +\infty$, si :*

1. *les φ_j et φ ont leur support dans le même compact $K \subset \Omega$;*
2. *pour tout multi-indice α, $D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ uniformément sur K ce qui revient à une convergence uniforme sur Ω.*

Définition 1.26 *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire "séquentiellement" continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ c'est-à-dire : $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \longmapsto T(\varphi)$, linéaire et continue au sens suivant : pour toute suite φ_j qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la suite de nombres complexes $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$.*

Les distributions sur Ω forment un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, c'est exactement l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$: c'est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ ce qui justifie la notation. On peut reformuler la définition précédente de la manière suivante dans le cas réel.

Définition 1.27 *On dit que T est une distribution (réelle) dans Ω si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$:*

$$\begin{aligned} T : \quad \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\longmapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante :
pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $A_K \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq A_K \sup_{x \in K, |\alpha| \leq p} |D^\alpha \varphi(x)|, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega),$$

où $x \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice.
Lorsque l'entier p peut être choisi indépendamment de K on dit que la distribution T, est d'ordre fini, et la plus petite valeur de p possible est appelée l'ordre de T.

Définition 1.28 (Dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'application $\varphi \longmapsto -\langle T, \varphi' \rangle$ est une distribution. Par définition, c'est la dérivée de T notée $\frac{dT}{dx}$. On a donc :*

$$\Big\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \Big\rangle = -\Big\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \Big\rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

De la même façon, on peut définir la dérivée d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. C'est une distribution notée $\frac{d^kT}{dx^k}$ définie par :

$$\begin{aligned} \frac{d^kT}{dx^k} : \ \ \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \ &\longmapsto \Big\langle \frac{d^kT}{dx^k}, \varphi \Big\rangle = (-1)^k \Big\langle T, \frac{d^k\varphi}{dx^k} \Big\rangle. \end{aligned}$$

En général, on a la Définition 1.29.

Définition 1.29 (Dérivée partielle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) *Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α multi-indice. L'application*

$$\begin{aligned} D^\alpha T : \ \ \mathcal{D}(\Omega) \ &\to \mathbb{R} \\ \varphi \ &\mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \end{aligned}$$

est une distribution sur Ω, appelée dérivée partielle d'indice α de T. On a la formule :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.30 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) *On dit qu'une suite de distributions (réelles) $(T_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ \text{dans } \mathbb{R} \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

Remarque 1.8 [importante] Il y a unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, ceci découle de l'unicité de la limite dans $\mathbb{R}$, si $T_j \to T_1$ et $T_j \to T_2$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et donc $T_1 = T_2$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.2.2 Espaces de Sobolev : définitions et propriétés élémentaires

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels modelés pour la plupart à partir des espaces de Lebesgue et munis des normes combinant celle de la fonction en question et de celles des dérivées faibles jusqu'à un certain ordre. Ces espaces jouent un rôle très important dans la résolution des équations aux dérivées partielles modélisant des phénomènes physiques, mécaniques et même biologiques. Elles portent le nom du savant SERGUEÏ LVOVITCH SOBOLEV un mathématicien et un physicien atomique russe de l'époque Soviétique.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour plus de détails dans cette partie voir par exemple [16,20,38].

• Espaces $W^{m,p}(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$

Définition 1.31 *Soient $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, \ 0 \leq |\alpha| \leq m \Big\},$$

où $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$ est la dérivée partielle de u d'ordre α au sens faible (des distributions). L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & si \quad p = +\infty, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ *désigne la norme des espaces de Lebesgue. La norme :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & si \quad p = +\infty \end{cases}$$

est une norme équivalente à la précédente. On utilisera donc indifféremment l'une de ces normes, et on notera la norme employée $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

► ***Exemples (Cas particuliers) :***
Dans le cas $p = 2$*, on note*

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega),$$

cet espace est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

✓ *Pour* $m = 1$*, on a :*

$$H^1(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega) \big/ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ 1 \leq i \leq N\Big\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}$ *:*

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big(u \cdot v + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) dx$$

et par le fait même d'une norme induite :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big((u,u)_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_\Omega \Big(|u|^2 + \sum_{i=1}^N \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2\Big) dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_\Omega (|u|^2 + \nabla u \cdot \nabla u) dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

ou de la norme équivalente :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

✓ *Pour* $m = 2$*, on a :*

$$H^2(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega) \big/ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \ 1 \leq i,j \leq N\Big\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)_{H^2(\Omega)}$ *:*

$$(u,v)_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega \Big(u \cdot v + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\Big) dx$$

et la norme induite :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \Big((u,u)_{H^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_\Omega \Big(|u|^2 + \sum_{i=1}^N \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 + \sum_{i,j=1}^N \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big|^2\Big) dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^N \Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

ou de la norme équivalente :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^N \Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 1.23

1. *Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.*
   Ils sont séparables si $1 \le p < +\infty$ et réflexifs si $1 < p < +\infty$.
2. *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert séparables.*

Remarque 1.9 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ et $x \in W^{m,p}(\Omega)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x_n \longrightarrow x \text{ dans } W^{m,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \begin{cases} \quad x_n \longrightarrow x & \text{dans} \quad L^p(\Omega), \\ D^\alpha x_n \longrightarrow D^\alpha x & \text{dans} \quad L^p(\Omega), \ \forall\ 1 \le |\alpha| \le m. \end{cases}$$

• **Espaces** $W_0^{m,p}(\Omega)$ **et** $H_0^m(\Omega),\ m \in \mathbb{N}$

Définition 1.32 *Pour tout $1 \le p < +\infty$, on pose :*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = \Big\{u \in W^{m,p}(\Omega);\ \exists\ (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)\ t.q.\ \|u-\varphi_n\|_{W^{m,p}(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\Big\},$$

et

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Proposition 1.10 (Inégalité de Poincaré) *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour tout $1 \le p < +\infty$, il existe une constante C (dépendant uniquement de N, p et Ω) telle que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.9}$$

Remarque 1.10 ✓ Vu l'inégalité (1.9), la quantité :

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

définit une norme dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.
✓ Plus généralement, en appliquant l'inégalité de Poincaré m fois, on voit que la quantité

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

définit une norme sur $W_0^{m,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $W^{m,p}(\Omega)$.

• **Espaces** $W^{-m,p}(\Omega)$

Définition 1.33 *Pour tout $1 < p \le +\infty$, on désigne par $W^{-m,p}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{m,p'}(\Omega)$, où p' désigne le conjugué harmonique de p, muni de la norme duale*

$$\|T\|_{W^{-m,p}(\Omega)} = \sup_{\substack{u\in W_0^{m,p'}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{|\langle T,u\rangle|}{\|u\|_{W_0^{m,p'}(\Omega)}} = \sup_{\substack{u\in W_0^{m,p'}(\Omega)\\ \|u\|_{W_0^{m,p'}(\Omega)}\le 1}} |\langle T,u\rangle| = \sup_{\substack{u\in W_0^{m,p'}(\Omega)\\ \|u\|_{W_0^{m,p'}(\Omega)}= 1}} |\langle T,u\rangle|.$$

✓ *Dans le cas $p = 2$, on note*

$$W^{-m,2}(\Omega) = H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'.$$

Bien que le dual de $W^{1,p}(\Omega)$ n'est pas si facile à identifier à un autre espace fonctionnel concret, on a la caractérisation suivante de la convergence faible dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.11 *Une suite (u_n) converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si et seulement si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup g_i$ faiblement dans $L^p(\Omega)$, $i = 1, \cdots, N$.*
Dans ce cas, on a $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Preuve de la Proposition 1.11 : Soit (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$. Pour toute forme linéaire continue L sur $W^{1,p}(\Omega)$, on a donc $\langle L, u_n\rangle \to \langle L, u\rangle$. Prenons $v \in L^{p'}(\Omega)$ arbitraire. Les formes linéaires $\langle L, u\rangle = \displaystyle\int_\Omega uvdx$ et $\langle L_i, u\rangle = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} vdx$ sont continues sur $W^{1,p}(\Omega)$ par l'inégalité de Hölder. Par conséquent, $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^p(\Omega)$.

Réciproquement, soit (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup g_i$ faiblement dans $L^p(\Omega)$ pour $i = 1, \cdots, N$. On en déduit d'une part que $u_n \to u$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to g_i$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par continuité de la dérivation au sens des distributions, il s'ensuit que $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. On en déduit d'autre part que la suite (u_n) est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$. Comme $1 < p < +\infty$, on peut en extraire une sous-suite u_{n_j} qui converge faiblement au sens de $W^{1,p}(\Omega)$, lequel est réflexif, vers un certain $v \in W^{1,p}(\Omega)$. D'après ce qui précède, on a donc $v = u$ et l'on conclut par unicité de la limite. ■

Théorème 1.24 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ lipschitzien de frontière $\partial\Omega$ de mesure surfacique σ. Soit $n = (n_i)$, $i = 1, \cdots, N$ le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω.*

1. *(Intégration par parties) Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a :*
$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} vdx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} udx + \int_{\partial\Omega} uvn_i d\sigma, \ i = 1, \cdots, N,$$
où n_i désigne la $i-$ième composante de n.
2. *(Formule de Green) Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On a :*
$$\int_\Omega \Delta uvdx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma.$$
3. *(Conséquences de la formule de Green)*
   ✓ *Soient $M \in (H^1(\Omega))^N$ et $f \in H^1(\Omega)$. On a :*
$$\int_\Omega M \cdot \nabla f dx = -\int_\Omega f \mathrm{div} M dx + \int_{\partial\Omega} fM \cdot nd\sigma.$$
   ✓ *Soient $u, v \in H^2(\Omega)$, on a :*
$$\int_\Omega \Delta uvdx = \int_\Omega u\Delta vdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

Où $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ est la dérivée normale de u.

1.2.3 Injections de Sobolev

On appelle conjugué de Sobolev du nombre p, le nombre p^*, défini par la relation :
$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}, \ i.e. \ p^* = \frac{Np}{N - mp}.$$

Définition 1.34

1. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, les entiers $j \geq 0$ étant donnés, on définit la famille des espaces $\mathcal{C}_b^j(\Omega)$ par :*
$$\mathcal{C}_b^j(\Omega) = \Big\{u \in \mathcal{C}^j(\Omega) \ / \ \forall \ \alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \leq j, \ \exists \ K_\alpha, \ \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq K_\alpha\Big\},$$
muni de la norme suivante
$$\|u\|_{\mathcal{C}_b^j(\Omega)} = \sup_{|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$
$\mathcal{C}_b^j(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

2. *Les sous-espaces* $\mathcal{C}_b^{j,\lambda}(\Omega)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, *sont constitués des fonctions de* $\mathcal{C}_b^j(\Omega)$ *telles que, si* $|\alpha| \leq j$ *alors :*

$$\exists\ C_{\alpha,\lambda},\ \forall\ x, y \in \Omega,\ |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C_{\alpha,\lambda}|x-y|^\lambda,$$

muni de la norme suivante

$$\|u\|_{\mathcal{C}_b^{j,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{C}_b^j(\Omega)} + \sup_{|\alpha|\leq j} \sup_{\{(x,y)\in\Omega^2,\ x\neq y\}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

$\mathcal{C}_b^{j,\lambda}(\Omega)$ *muni de cette norme est un espace de Banach.*

Remarque 1.11 $\forall\ (\beta,\lambda),\ 0 < \beta < \lambda < 1 : \mathcal{C}_b^{j,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^{j,\beta}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^j(\Omega)$, les inclusions étant strictes.

Remarque 1.12 Lorsque Ω est un ouvert borné, toute fonction de cet espace et ses dérivées se prolongent continûment sur $\overline{\Omega}$, cet espace est alors identique à l'espace $\mathcal{C}^j(\overline{\Omega})$.

Théorème 1.25 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* (u_n) *une suite de* $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\Omega)$ *relativement compacte dans* $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. *Alors, pour tout* μ *tel que* $0 < \mu < \lambda$, *la suite* (u_n) *est relativement compacte dans tous les* $\mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$.

Rappelons le célèbre théorème d'injection de Rellich–Kondrachov (voir [22]) qui est un résultat de compacité prenant en compte de nombreuses situations.

Théorème 1.26 (Rellich–Kondrachov) *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine lipschitzien borné.*

1. *Alors, si* $mp < N$ *et* $p \geq 1$, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\ 1 \leq q \leq p^* = \dfrac{Np}{N-mp}$.
   De plus, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *si* $m > 0$ *et* $q < p^*$.
2. *Si* $mp = N$, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\ q \in [1, +\infty[$.
3. *Si* $mp > N$ *et* $p \geq 1$, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^{m-[N/p]-1,\nu}(\overline{\Omega})$, *où* $[\cdot]$ *dénotes la partie entière et*

$$\nu = \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p} \ \text{si}\ \dfrac{N}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{nombre positif arbitraire dans }]0;1[\ \text{si}\ \dfrac{N}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

   De plus, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}_b^{m-[N/p]-1,\nu}(\overline{\Omega})$ *si* $0 < \nu < \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}$.

Le résultat suivant est une conséquence direct du Théorème 1.26 et représente un théorème d'injection pour les espaces dual de Sobolev.

Corollaire 1.7 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine borné. Soient* $m > 1$ *et* $q < +\infty$ *satisfaisant :*

$$q > \frac{p^*}{p^*-1},\ \text{où } p^* = \frac{Np}{N-mp} \ \text{si } mp < N,$$

$$q > 1 \ \text{pour } mp = N,$$

ou

$$q \geq 1 \ \text{si } mp > N.$$

Alors $L^q(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{-m,p'}(\Omega),\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Avec le Théorème 1.26 on peut avoir aussi les deux résultats suivants qui nous permettent de faire des raccourcis dans certains cas.

Théorème 1.27 *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.*

1. *On suppose que $N \geq 2$:*
   (a) *pour tout $q \in \left]1, \dfrac{N}{N-1}\right[$, on a $L^1(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$;*
   (b) *pour tout $p \in]1, N[$, on a $L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p^*}(\Omega)$;*
   (c) *pour tout $p \geq N$, on a $L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,\infty}(\Omega)$.*
2. *Si $N = 1$, on a $L^1(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,\infty}(\Omega)$.*

Proposition 1.12 *Soient $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ pour $p \geq \dfrac{2N}{N+2}$.*

Preuve de la Proposition 1.12 : Il s'agit de montrer que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.
On a si $p > N$, alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.
Si $p < N$, alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, car $p^* = \dfrac{Np}{N-p} \geq 2 \Longleftrightarrow p \geq \dfrac{2N}{N+2}$. D'où

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega).\blacksquare$$

Terminons cette section par donné l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg (voir [35]) que nous utiliserons régulièrement dans la suite.

Lemme 1.2 (Inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg)
Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine lipschitzien borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\forall\, 1 \leq q, r \leq +\infty$ et un entier naturel m. Supposons qu'un nombre réel θ et un entier naturel j soient tels que :

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right)\theta + \frac{1-\theta}{q}$$

et

$$\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Alors, nous avons

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|D^m u\|_{L^r(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} + C_2 \|u\|_{L^s(\Omega)},$$

où $s > 0$ est une constante arbitraire. Les constantes C_1 et C_2 dépendent du domaine Ω ainsi que de m, N, j, r, q, θ.

1.3 Espaces $L^p(a, b, X)$, $p \in [1, +\infty]$ des fonctions à valeurs dans un espace de Banach

Les espaces que nous allons définir à présent sont d'une importance fondamentale pour la suite. Dans ce qui suit X est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, X' son dual topologique et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet dans la dualité entre X et X'.

• Définitions et premières propriétés

Théorème 1.28 (de Pettis)
Soient Y un espace de Banach réel séparable et $f : \Omega \to Y$ une fonction définie sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *la fonction f est mesurable sur Ω;*
2. *la fonction réelle $x \mapsto \langle g, f(x)\rangle$ est mesurable sur Ω pour tout $g \in Y'$.*

Cet important résultat connu sous le nom de Théorème de Pettis réduit la mesurabilité de fonctions à valeurs dans un espace de Banach à la mesurabilité de fonctions réelles.

Définition 1.35 *On pose $F(x) = f(x, u(x))$.*
Si la fonction $u : \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to U$ est mesurable, alors la fonction $F : \ \Omega \to Y$ est aussi mesurable à condition que les hypothèses suivantes soient satisfaites :

1. *l'ensemble Ω est mesurable et les espaces de Banach U, Y sont réels et séparables ;*
2. *la fonction $f : \ \Omega \times U \to Y$ est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire,*
   (a) *$x \mapsto f(x, u)$ est mesurable sur Ω, $\forall \ u \in U$,*
   (b) *$u \mapsto f(x, u)$ est continue sur U p.p. $x \in \Omega$.*

Définition 1.36

1. *L'espace $C^m([a, b]; X)$, $m \in \mathbb{N}$ désigne l'espace de toutes les fonctions continues $f : [a, b] \to X$ qui ont des dérivées $f^{(i)}$ continues jusqu'à l'ordre m inclus sur $[a, b]$, avec la norme*
$$\|f\|_{C^m([a,b];X)} =: \sum_{i=0}^{m} \max_{x\in[a,b]} \|f^{(i)}(x)\|_X.$$
On écrit $C([a, b]; X)$ au lieu de $C^0([a, b]; X)$.
2. *Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p(a, b; X)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $f :]a, b[\to X$ qui sont mesurables et telle que $\int_a^b \|f\|_X^p dx < +\infty$, qu'on munit de la norme*
$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \Big(\int_a^b \|f(x)\|_X^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
3. *Pour $p = +\infty$, on note $L^\infty(a, b; X)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $f :]a, b[\to X$ mesurables et essentiellement bornées sur $]a, b[$, c'est-à-dire pour lesquelles il existe une constante C telle que*
$$\|f(x)\|_X \leq C, \ \text{p.p. dans }]a, b[,$$
qu'on munit de la norme
$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \inf \Big\{C > 0; \|f(x)\|_X \leq C, \ \text{p.p. dans }]a, b[\Big\} = \sup_{x\in]a,b[} \text{ess} \ \|f(x)\|_X.$$

Proposition 1.13 *Soit $m \in \mathbb{N}$ et soient X, Y deux espaces de Banach. Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *$C^m([a, b]; X)$ est un espace de Banach ;*
2. *pour $p \in [1, +\infty]$, $L^p(a, b; X)$ est un espace de Banach ;*
3. *pour $p \in [1, +\infty[$, $C([a, b]; X)$ est dense dans $L^p(a, b; X)$, et*
$$C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X);$$
4. *l'ensemble de tous les polynômes $P : [a, b] \to X$, i.e., $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ avec $a_i \in X$ pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$ et $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $C([a, b]; X)$ et $L^p(a, b; X)$;*
5. *si X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(a, b; X)$ est aussi un espace de Hilbert pour la norme $\| \cdot \|_{L^2(a,b;X)}$ associée au produit scalaire*
$$(f, g)_{L^2(a,b;X)} = \int_a^b (f(x), g(x))_X dx, \ \forall \ f, g \in L^2(a, b; X);$$
6. *pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p(a, b; X)$ est séparable dans le cas où X est séparable ;*
7. *si l'injection de X dans Y est continue, alors*
$$L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y), \ 1 \leq q \leq r \leq +\infty. \tag{1.10}$$

• Espace dual de l'espace $L^p(0,T;X)$

On donne d'abord l'inégalité de Hölder dans $L^p(0,T;X)$ qui est à la base de nombreuses applications.

Proposition 1.14 (Inégalité de Hölder dans $L^p(0,T;X)$)
Soit X un espace de Banach. Alors l'inégalité de Hölder

$$\int_0^T |\langle f(t), g(t)\rangle_{X',X}|dt \leq \Big(\int_0^T \|f(t)\|_{X'}^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_0^T \|g(t)\|_X^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1.11}$$

est vraie pour tous

$$f \in L^q(0,T;X'),\ g \in L^p(0,T;X)$$

avec $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Proposition 1.15 *Soit X un espace de Banach séparable réflexif et soit $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Alors, on a les propriétés suivantes.*

1. *A chaque fonction $f \in L^q(0,T;X')$ correspond une unique forme $\overline{f} \in \big(L^p(0,T;X)\big)'$ tel que :*

$$\langle \overline{f}, g\rangle_{(L^p(0,T;X))',L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle_{X',X}dt,\ \forall\ g \in L^p(0,T;X).$$

2. *Inversement, à chaque $\overline{f} \in \big(L^p(0,T;X)\big)'$ correspond une unique forme $f \in L^q(0,T;X')$ tel que :*

$$\langle \overline{f}, g\rangle_{(L^p(0,T;X))',L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle_{X',X}dt,\ \forall\ g \in L^p(0,T;X).$$

De plus, on a :

$$\|\overline{f}\|_{(L^p(0,T;X))'} = \|f\|_{L^q(0,T;X')}.$$

Ainsi, on peut identifier $\big(L^p(0,T;X)\big)'$ avec $L^q(0,T;X')$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, ce qu'on écrit :

$$\big(L^p(0,T;X)\big)' \equiv L^q(0,T;X'),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

3. *L'espace $L^p(0,T;X)$ est réflexif.*

Dans le cas spécifique où l'espace de Banach X est un espace de Lebesgue, nous avons le Théorème 1.29 dont une preuve se trouve dans [1].

Théorème 1.29 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p_1, q_1, p_2, q_2 quatre réels dans $[1,+\infty]$. Si $f \in L^{p_1}(I, L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(I, L^{q_2}(\Omega))$ alors pour tout $\theta \in]0,1[$, la fonction f est dans $L^p(I, L^q(\Omega))$ pour p et q définis par :*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2},\ \ et\ \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}, \tag{1.12}$$

et de plus on a :

$$\|f\|_{L^p(I,L^q(\Omega))} \leq \|f\|^{\theta}_{L^{p_1}(I,L^{q_1}(\Omega))}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2}(I,L^{q_2}(\Omega))}. \tag{1.13}$$

On déduit du Théorème 1.29 le Corollaire 1.8 dont la preuve est également détaillée dans [1].

Corollaire 1.8 *On reprend les notations du Théorème 1.29 et on suppose que p_1 et q_1 sont finis et que p_2 et q_2 sont strictement plus grands que 1.*
Si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions qui converge fortement vers u dans $L^{p_1}(I, L^{q_1}(\Omega))$ et faiblement (ou faiblement-$*$ si p_2 et/ou q_2 sont infinis) dans $L^{p_2}(I, L^{q_2}(\Omega))$, alors pour tout θ tel que $0 < \theta \leq 1$ la suite $(u_n)_n$ converge vers u fortement dans $L^p(I, L^q(\Omega))$, où p et q sont donnés par (1.12).

• Intégrale de Bochner

Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Pour les fonctions définies sur $]a,b[$ à valeurs réelles, nous disposons de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Cette théorie peut être généralisée aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach, c'est-à-dire, aux fonctions $f:]a,b[\to X$, où X est un espace de Banach.

Dans tout ce qui suit, $(X, \|\cdot\|_X)$ désigne un espace de Banach.

Définition 1.37 (fonction simple) *Une fonction $f:]a,b[\to X$ est dite simple (ou étagée), si elle est mesurable et s'il existe un nombre fini de sous-ensembles de $]a,b[$ Lebesgue-mesurables $(A_i)_{i=1,\cdots,m}$ de mesure finie, deux à deux disjoints tels que*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}(t),$$

où $\mathbb{1}_{A_i}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble A_i et $a_i \in X$.
On note $S(a,b;X)$ l'espace vectoriel des fonctions simples de $]a,b[$ dans X.

Pour toute fonction simple, on définit la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \sum_{i=1}^{m} a_i mes(A_i)$.

Définition 1.38 *Soient A un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et f une fonction arbitraire définie p.p. de A dans X. La fonction f est dite fortement mesurable dans A, s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples à supports inclus dans A tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \ \ p.p. \ t \in A.$$

Définition 1.39 (Fonction Bochner intégrable) *Une fonction $f:]a,b[\to X$ est dite intégrable au sens de Bochner, s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S(a,b;X)$ telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \ \ p.p. \ t \in]a,b[,$$

et si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0.$$

Alors $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$ converge dans X et sa limite est indépendante du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions ci-dessus. On définit alors l'intégrale de Bochner de la fonction f par

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

L'important Théorème 1.30 (voir [48], Théorème 1, p. 133) précise le lien entre l'intégrabilité au sens de Bochner et celle au sens de Lebesgue.

Théorème 1.30 (de Bochner) *Une fonction fortement mesurable $f:]a,b[\to X$ est Bochner-intégrable si et seulement si la fonction réelle $t \mapsto \|f(t)\|_X$ est Lebesgue-intégrable sur $]a,b[$, c'est-à-dire $f \in L^1(a,b;X)$. Dans ce cas, on a :*

$$\Big\| \int_a^b f(t)dt \Big\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X dt.$$

Citons deux autres propriétés importantes.

Corollaire 1.9 *Soient $p \geq 1$, et a et b finis. Si $g \in L^p(a,b;X)$, et $f \in X'$, alors on a :*

$$\Big\langle f, \int_a^b g(t)dt \Big\rangle = \int_a^b \langle f, g(t) \rangle dt.$$

Théorème 1.31 (fondamental généralisé du calcul intégral)
Soit X un espace de Banach. Étant donné une fonction $g \in L^1(a,b;X)$, on pose :

$$f(t) = \int_a^t g(s)ds.$$

Alors, $f \in C([a,b];X)$ et f admet p.p. dans $]a,b[$ une dérivée au sens classique avec

$$\frac{df}{dt}(t) = g(t) \text{ p.p. } t \in]a,b[.$$

• Distributions à valeurs dans un Banach

Définition 1.40 *Une distribution sur $]a,b[$ à valeurs dans un Banach X, est une application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D}(]a,b[) & \longrightarrow & X \\ \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi \rangle \end{array}$$

continue sur $\mathcal{D}(]a,b[)$, au sens suivant :

$$\lim_{j \to +\infty} \langle T, \varphi_j \rangle = \langle T, \varphi \rangle \text{ dans } X,$$

pour toute suite $(\varphi_j)_j$ telle que :

$$\varphi_j \to \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(]a,b[), \text{ i.e., } \|\langle T, \varphi_j \rangle - \langle T, \varphi \rangle\|_X \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

► **Exemple :** Soit $u \in L^1_{loc}(a,b;X)$, l'espace des (classes de) fonctions u telle que : pour tout compact $K \subset]a,b[$, $\mathbb{1}_K u \in L^1(a,b;X)$, où $\mathbb{1}_K$ désigne la fonction caractéristique du compact K. Alors :

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D}(]a,b[) & \longrightarrow & X \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b u(s)\varphi(s)ds \end{array}$$

est une distribution sur $]a,b[$ à valeurs dans X. En effet :

✓ T est bien définie puisque $u(\cdot)\varphi(\cdot) \in L^1(a,b;X)$ et est clairement linéaire ;

✓ T est continue.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ et soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(]a,b[)$.

$$\text{On a } \varphi_j \to \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(]a,b[) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\ K \text{ compact } \subset]a,b[\text{ tel que :} \\ \text{supp } \varphi_j \subset K, \ \forall\ j \in \mathbb{N} \\ \text{supp } \varphi \subset K \\ D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi \text{ uniformément sur } K\ \forall\ \alpha \leq k, \\ \text{i.e. } \sup\limits_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi(x)| \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0\ \forall\ \alpha \leq k. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\langle T, \varphi_j \rangle - \langle T, \varphi \rangle\|_X &= \Big\| \int_a^b u(s)\varphi_j(s)ds - \int_a^b u(s)\varphi(s)ds \Big\|_X \\ &= \Big\| \int_a^b u(s)(\varphi_j(s) - \varphi(s))ds \Big\|_X \\ &\leq \int_a^b \big\| u(s)(\varphi_j(s) - \varphi(s)) \big\|_X ds \\ &\leq \int_K \sup_{x \in K} |\varphi_j(s) - \varphi(s)| \|u(s)\|_X ds \\ &\leq \sup_{x \in K} |\varphi_j(s) - \varphi(s)| \int_K \|u(s)\|_X ds \\ &\leq M \times \sup_{x \in K} |\varphi_j(s) - \varphi(s)| \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{cases} \sup\limits_{x \in K} |\varphi_j(s) - \varphi(s)| \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \displaystyle\int_K \|u(s)\|_X ds < +\infty. \end{cases}$$

Remarque 1.13 Les fonctions $u, v \in L^1_{loc}(a, b; X)$ définissent la même distribution si et seulement si u et v sont scalairement presque partout égales.

► **Notation :** On désigne par $\mathcal{D}'(a, b; X)$ (ou $\mathcal{D}'(]a, b[; X)$) l'espace des distributions sur $]a, b[$ à valeurs dans X.
Donnons maintenant la définition de la dérivée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(]a, b[; X)$.

Définition 1.41 *Soit $T \in \mathcal{D}'(]a, b[; X)$. Pour tout entier k, on définit une distribution $T^{(k)}$ par la formule*

$$\langle T^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \Big\langle T, \frac{d^k\varphi}{dt^k}\Big\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[),$$

$T^{(k)}$ est appelé la $k-$ ième dérivée de T sur $]a, b[$, et sera également notée $T^{(k)} = \dfrac{d^kT}{dt^k}$.

✓ Si $u \in L^1_{loc}(a, b; X)$ et si X est un espace de fonctions de la variable x, par exemple $X = L^p(\Omega)$, alors u s'identifie à une fonction $u(t, x)$:

$$u(t) \text{ désigne la fonction “} x \mapsto u(t, x)\text{” pour presque tout } t \in]a, b[.$$

✓ La dérivée distribution $\dfrac{du}{dt}$ s'identifie à la dérivée $\dfrac{\partial u}{dt}$ de u dans $\mathcal{D}'(]a, b[\times\Omega)$.
✓ On notera indifféremment dans la suite la dérivée en t de u par $\dfrac{du}{dt}$ ou u' ou $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ou encore $\partial_t u$.

Remarque 1.14 Soit (X, Y) un couple d'espaces de Banach avec $X \hookrightarrow Y$. Alors, on a :

$$\mathcal{D}'(]a, b[; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(]a, b[; Y).$$

Définition 1.42 *Soient X et Y deux espaces de Banach avec $X \hookrightarrow Y$. Soit $u \in L^2(a, b; X)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$*

$$\frac{du}{dt}(\varphi) = -\int_a^b u(t)\varphi'(t)dt.$$

On dira que $u' = \dfrac{du}{dt} \in L^2(a, b; Y)$ s'il existe $v \in L^2(a, b; Y)$ tel que

$$-\int_a^b u(t)\varphi'(t)dt = \int_a^b v(t)\varphi(t)dt, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[).$$

L'intégration étant entendue au sens de Bochner et l'égalité a lieu dans Y.

• Espace $W^{1,2}(]a, b[; V, V')$

Considérons la situation de deux espaces de Hilbert réels V, H séparables. On note $((\cdot, \cdot))$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme dans V, et $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$ les notations correspondantes dans H.
On suppose que V est dense dans H et que $V \hookrightarrow H$ si bien qu'en identifiant H et son dual H', on a (en notant V' le dual de V de norme notée $\|\cdot\|_*$) : $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, chaque espace étant dense dans le suivant.

Définition 1.43 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On désigne par $W^{1,2}(]a, b[; V, V')$ l'espace :*

$$W^{1,2}(]a, b[; V, V') =: \{u \in L^2(]a, b[; V),\ \partial_t u \in L^2(]a, b[; V')\}.$$

Proposition 1.16 *L'espace $W^{1,2}(]a, b[; V, V')$ est un espace de Hilbert pour la norme*

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(]a,b[;V,V')} = \|u\|^2_{L^2(]a,b[;V)} + \|\partial_t u\|^2_{L^2(]a,b[;V')}. \tag{1.14}$$

Preuve de la Proposition 1.17 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,2}(]a,b[;V,V')$ c'est-à-dire,

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0 \text{ t.q. } \forall\ p,q\geq n_0 : \|u_p-u_q\|_{W^{1,2}(]a,b[;V,V')}\leq\varepsilon.$$

Donc

$$\|u_p-u_q\|^2_{L^2(]a,b[;V)}+\|\partial_t u_p-\partial_t u_q\|^2_{L^2(]a,b[;V')}\leq\varepsilon$$

ce qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(]a,b[;V)$ et $(\partial_t u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(](a,b[;V')$, lesquels sont complets donc

$$\begin{cases} \exists\ u\in L^2(]a,b[;V) & \text{t.q.}\quad u_n\to u \quad \text{dans } L^2(]a,b[;V),\\ \exists\ u^1\in L^2(]a,b[;V') & \text{t.q. } \partial_t u_n\to u^1 \text{ dans } L^2(]a,b[;V'). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \quad u_n\to u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]a,b[;V)\subset\mathcal{D}'(]a,b[;V')\\ \partial_t u_n\to u^1 \text{ dans } \mathcal{D}'(]a,b[;V'). \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\langle\partial_t u_n,\varphi\rangle=-\lim_{n\to+\infty}\langle u_n,\partial_t\varphi\rangle=-\langle u,\partial_t\varphi\rangle=\langle\partial_t u,\varphi\rangle$$

donc $\partial_t u_n\to\partial_t u$ dans $\mathcal{D}'(]a,b[;V')$ d'où $\partial_t u=u^1$ d'après l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(]a,b[;V')$. ■

On désigne par $\mathcal{D}([a,b];V)$ l'espace des restrictions à $[a,b]$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R};V)$. $\mathcal{D}(\mathbb{R};V)$ étant l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans V, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}([a,b];V)=\{f_{|[a,b]} \text{ t.q. } f\in\mathcal{D}(\mathbb{R};V)\}.$$

Remarque 1.15 $\mathcal{D}([a,b];V)$ est dense dans $W^{1,2}(]a,b[;V,V')$ pour la norme (1.14).

Théorème 1.32 *Soit $u\in W^{1,2}(]a,b[;V,V')$. Alors u peut être identifiée avec une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans H. De plus, on a :*

$$W^{1,2}(]a,b[;V,V')\hookrightarrow C([a,b];H),$$

où $C([a,b];H)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans H muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[a,b]$.

Une conséquence fondamentale du Théorème 1.32 est qu'il permet de définir pour $u\in W^{1,2}(]a,b[;V,V')$ la trace $u(a),\ u(b)$ comme étant les valeurs dans H de la fonction $u\in C([a,b];H)$.
A partir de cet argument, on peut déduire la formule de Green.

Théorème 1.33 (Formule de Green) *Soient $u,v\in W^{1,2}(]a,b[;V,V'),\ a,b\in\mathbb{R}$, alors :*

$$\int_a^b\langle u'(t),v(t)\rangle dt+\int_a^b\langle u(t),v'(t)\rangle dt=(u(b),v(b))_H-(u(a),v(a))_H, \tag{1.15}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ désignant le crochet dans la dualité entre V et V'.

Une propriété très utile est donnée par la Proposition 1.17.

Proposition 1.17 *Pour $u\in W^{1,2}(]a,b[;V,V'),\ v\in V$, on a :*

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot),v)=\langle u'(\cdot),v\rangle \text{ dans } \mathcal{D}'(]a,b[).$$

Terminons cette section par le théorème de compacité d'Aubin-Simon dont l'ingrédient principal pour sa preuve (cf. [1,41]) est le théorème d'Ascoli, donc le représentant dans les espaces $L^p(a,b;X)$.

Lemme 1.3 (Lemme d'Aubin–Simon) *Soient X_0, X et X_1 trois espaces de Banach avec $X_0\subseteq X\subseteq X_1$. Supposons que X_0 soit injecté de manière compacte dans X et que X soit injecté continûment dans X_1. Pour $1\leq p,q\leq+\infty$, soit :*

$$W=\Big\{u\in L^p([0,T];X_0)/\partial_t u\in L^q([0,T];X_1)\Big\}.$$

1. *Si $p<+\infty$, alors l'injection de W dans $L^p([0,T];X)$ est compacte.*
2. *Si $p=+\infty$ et $q>1$, alors l'injection de W dans $C([0,T];X)$ est compacte.*

1.4 Résultat principal

Nous procédons comme Ngom et al. dans [18] et [19], avant d'énoncer notre résultat principal, nous reformulons le système (0.1) en effectuant un changement de variables comme suit :

- à partir de l'équation hydrostatique nous obtenons
$$\rho(t,x,y) = \xi(t,x)e^{-y},$$
où $\xi(t,x)$ est une fonction inconnue ;
- grâce à la structure de la densité ρ, nous posons $z = 1 - e^{-y}$ et nous notons $u(t,x,z) = u(t,x,y), \quad w(t,x,z) = e^{-y}v(t,x,y)$.

Alors le système (0.1) que nous étudions se réduit à :

$$\begin{cases} \partial_t\xi + \operatorname{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0, \\ \partial_t(\xi u) + \operatorname{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi uw) + \nabla_x\xi + r\xi|u|u \\ = 2\overline{\nu}_1 \operatorname{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u), \\ \partial_z\xi = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Ici, $t > 0$, $(x,z) \in \Omega = \Big\{(x,y) : \ x \in \Omega_x, \ 0 < z < h = 1 - e^{-H}\Big\}$ et $\Omega_x = \mathbb{T}^2$ est le tore bidimensionnel. Ainsi, les conditions aux limites ont la forme :

$$\begin{aligned} &\text{Conditions périodiques sur } \partial\Omega_x, \\ &w_{|z=0} = w_{|z=h} = 0, \\ &\partial_z u_{|z=0} = \partial_z u_{|z=h} = 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Les données initiales s'écrivent :

$$\xi(0,x)u(0,x,z) = m_0(x,z), \ \xi(0,x) = \xi_0(x). \tag{1.18}$$

En effet :

► Comme indiquer dans l'**Introduction générale** en prenant $g = c^2 = 1$, $\nu_1 = \overline{\nu}_1\rho(t,x,y)$ et $\nu_2 = \overline{\nu}_2\rho(t,x,y)e^{2y}$ pour certaines constantes $\overline{\nu}_i > 0$ $(i = 1;2)$ puis en remplaçant la pression P par son expression $P(\rho) = c^2\rho$, le système original (0.1) devient :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \partial_y(\rho uv) + \nabla_x\rho + r\rho|u|u \\ = 2\overline{\nu}_1 \operatorname{div}_x(\rho D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_y(\rho e^{2y}\partial_y u), \\ \partial_y\rho = -\rho. \end{cases} \tag{1.19}$$

► En exploitant l'équation hydrostatique $\partial_y P(\rho) = -g\rho$ qui devient $\partial_y\rho = -\rho$ pour $P(\rho) = c^2\rho$ et $g = c^2 = 1$, nous avons pour $\rho \neq 0$:

$$\partial_y\rho = -\rho \Longleftrightarrow \frac{\partial_y\rho}{\rho} = -1 \Longleftrightarrow \ln|\rho| = -y + C(t,x) \Longleftrightarrow |\rho| = \exp\left(-y + C(t,x)\right) = \exp\left(C(t,x)\right)e^{-y}.$$

Comme la densité ρ est une grandeur physique positive alors $\rho = \exp\left(C(t,x)\right)e^{-y}$ avec $C(t,x)$ une fonction dépendante que de t et x puisqu'elle est indépendante de y.
Alors, nous posons :

$$\xi(t,x) = \begin{cases} \exp\left(C(t,x)\right) & \text{si } \rho \neq 0, \\ 0 & \text{si } \rho = 0. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\rho(t,x,y) = \xi(t,x)e^{-y}. \tag{1.20}$$

► En remplaçant ρ par ξe^{-y} dans (1.19), nous avons :

$$\begin{cases} e^{-y}\partial_t\xi + e^{-y}\mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_y(\xi e^{-y}v) = 0, \\ e^{-y}\partial_t(\xi u) + e^{-y}\mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_y(\xi e^{-y}uv) + e^{-y}\nabla_x\xi + e^{-y}r\xi|u|u \\ = 2\overline{\nu}_1 e^{-y}\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_y(\xi e^{y}\partial_y u), \\ \partial_y(\xi e^{-y}) = -\xi e^{-y}. \end{cases} \tag{1.21}$$

Puis en multipliant par e^y dans chacune des équations du système (1.21), nous obtenons :

$$\begin{cases} \partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + e^{y}\partial_y(\xi e^{-y}v) = 0, \\ \partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + e^{y}\partial_y(\xi e^{-y}uv) + \nabla_x\xi + r\xi|u|u \\ = 2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2 e^{y}\partial_y(\xi e^{y}\partial_y u), \\ e^{y}\partial_y(\xi e^{-y}) = -\xi. \end{cases} \tag{1.22}$$

► En posant $\partial_z\cdot = e^y\partial_y\cdot$, ce qui donne en particulier $\partial_z y = e^y$ et $\partial_y z = e^{-y}$, nous avons donc :

$$\partial_y z = e^{-y} \Longleftrightarrow z(y) - z(0) = \int_0^y e^{-s}ds = [-e^{-s}]_0^y = 1 - e^{-y}.$$

Nous pouvons prendre donc :

$$z = 1 - e^{-y}. \tag{1.23}$$

Ainsi, (1.22) devient :

$$\begin{cases} \partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi e^{-y}v) = 0, \\ \partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi e^{-y}uv) + \nabla_x\xi + r\xi|u|u \\ = 2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u), \\ \partial_z(\xi e^{-y}) = -\xi. \end{cases} \tag{1.24}$$

► En posant $w = e^{-y}v$, (1.24) devient :

$$\begin{cases} \partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0, \\ \partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi uw) + \nabla_x\xi + r\xi|u|u \\ = 2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u), \\ \partial_z(\xi e^{-y}) = -\xi. \end{cases} \tag{1.25}$$

► Comme $\partial_z(\xi e^{-y}) = e^{-y}\partial_z\xi + \xi\partial_z e^{-y} = e^{-y}\partial_z\xi + \xi\partial_z(1-z) = e^{-y}\partial_z\xi - \xi$, alors $(1.25)_3$ se réduit à $\partial_z\xi = 0$.
Alors le système original (0.1) que nous étudions se réduit au système intermédiaire (1.16).
► Le domaine d'étude est adapté conformément au changement de variable $z = 1 - e^{-y}$ en posant $h = 1 - e^{-H}$ et le tore bidimensionnel Ω_x qui est le domaine de vie de la variable $x = (x_1, x_2)$ est une adaptation de $\tilde{\Omega}_x$ par rapport à la variation de la hauteur.
► Grâce au changement de variables $\rho = \xi e^{-y}$, $z = 1 - e^{-y}$ et $\partial_z\cdot = e^y\partial_y\cdot$ les conditions aux limites (1.17) et les conditions initiales (1.18) se déduisent respectivement de (0.3) et (0.4).

Remarque 1.16 Pour une loi de pression de la forme $P(\rho) = k\rho^\gamma$ avec $\gamma \neq 1$, en utilisant l'équation hydrostatique $\partial_y P(\rho) = -g\rho$ on a $k\gamma\rho^{\gamma-1}\partial_y\rho = -g\rho$, c'est-à-dire $\partial_y(\rho^{\gamma-1}) = -\dfrac{\gamma-1}{k\gamma}g$.
En intégrant par rapport à y, nous obtenons $\rho^{\gamma-1}(t,x,y) = \dfrac{(1-\gamma)g}{k\gamma}y + \beta(t,x)$.
Ainsi,

$$\rho(t,x,y) = (\alpha y + \beta(t,x))^{\frac{1}{\gamma-1}}, \text{ où } \alpha = \frac{(1-\gamma)g}{k\gamma}.$$

En posant $\tilde{\rho} = \exp(\rho^{\gamma-1})$, nous pouvons écrire $\tilde{\rho}(t,x,y) = e^{\alpha y}\xi(t,x)$.

Pour construire les solutions régulières[1] du schéma d'approximation (2.1), nous représentons la vitesse verticale inconnue w en fonction de la densité et de la vitesse horizontale.
Puisque $\partial_z\xi = 0$ (voir $(1.16)_3$), il résulte en dérivant l'équation de conservation de la masse $\partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0$ par rapport à z et des conditions aux limites (1.17) que :

$$\begin{aligned} &\xi\partial_{zz}w = -\partial_z \mathrm{div}_x(\xi u), \\ &w_{|z=0} = w_{|z=h} = 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Grâce à (1.26), si $\partial_z\mathrm{div}_x(\xi u)$ est une fonction continue par rapport à z alors en intégrant par rapport à la variable z, on a pour $\xi > 0$:

$$\xi(t,x)\partial_{zz}w(t,x,z) = -\partial_z\mathrm{div}_x(\xi(t,x)u(t,x,z)) \Longrightarrow \partial_{zz}w(t,x,z) = -\frac{\partial_z\mathrm{div}_x(\xi(t,x)u(t,x,z))}{\xi(t,x)}$$

$$\Longrightarrow \partial_z w(t,x,z) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)u(t,x,z))}{\xi(t,x)} + K(t,x), \text{ avec } K \text{ une fonction indépendante de z,}$$

$$\Longrightarrow \int_0^z \partial_\tau w(t,x,\tau)d\tau = \int_0^z \Big(-\frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)u(t,x,\tau))}{\xi(t,x)} + K(t,x)\Big)d\tau$$

$$\Longrightarrow \big[w(t,x,\tau)\big]_0^z = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)\int_0^z u(t,x,\tau)d\tau)}{\xi(t,x)} + zK(t,x)$$

$$\Longrightarrow w(t,x,z) - w(t,x,0) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)\tilde{u}(t,x,z))}{\xi(t,x)} + zK(t,x), \text{ avec } \tilde{u}(t,x,z) = \int_0^z u(t,x,\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow w(t,x,z) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)\tilde{u}(t,x,z))}{\xi(t,x)} + zK(t,x), \text{ car } w(t,x,0) = w_{|z=0} = 0.$$

Puisque $w(t,x,h) = w_{|z=h} = 0$, alors $w(t,x,h) = -\dfrac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)\tilde{u}(t,x,h))}{\xi(t,x)} + hK(t,x) = 0$

$$\Longrightarrow K(t,x) = \frac{1}{h}\frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)\tilde{u}(t,x,h))}{\xi(t,x)} = \frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x) \times \frac{1}{h}\tilde{u}(t,x,h))}{\xi(t,x)}$$

$$\Longrightarrow K(t,x) = \frac{\mathrm{div}_x(\xi(t,x)\overline{u}(t,x,h))}{\xi(t,x)} \text{ avec } \overline{u} = \frac{1}{h}\tilde{u}(t,x,h) = \frac{1}{h}\int_0^h u(t,x,\tau)d\tau.$$

Donc, la résolution de (1.26) donne pour $\xi > 0$:

$$w(z) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi\tilde{u}(z))}{\xi} + z\frac{\mathrm{div}_x(\xi\overline{u})}{\xi}. \tag{1.27}$$

Alors

$$\partial_z w(z) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi u(z))}{\xi} + \frac{\mathrm{div}_x(\xi\overline{u})}{\xi}, \tag{1.28}$$

où

$$\tilde{u}(z) = \int_0^z u(\tau)d\tau, \quad \overline{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u(\tau)d\tau. \tag{1.29}$$

Remarque 1.17

1. L'expression (1.27) est cruciale pour nous permettre d'utiliser la méthode de Faedo-Galerkin dans le Chapitre 3.
2. Le terme d'amortissement $r\xi|u|u$ est utilisé ici pour donner la convergence forte de $\sqrt{\xi}u$ dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$.

1. La notion intuitive de régularité d'une fonction ou d'une distribution peut se traduire par un grand nombre de concepts mathématiques. On peut dire qu'une fonction très dérivable est plus régulière qu'une fonction peu dérivable, qui est elle-même plus régulière qu'une distribution d'ordre élevé.
Mais on peut dire aussi qu'une fonction localement bornée est plus régulière qu'une fonction localement intégrable, tandis que les fonctions localement de carré intégrable occupent une position intermédiaire.

La définition des solutions faibles est présentée comme suit.

Définition 1.44 *On dit que (ξ, u, w) est une solution faible du système (1.16) sur $[0,T]\times\Omega$, avec les conditions aux limites (1.17) et les données initiales (1.18), si :*

1. *(1.18) est valable dans $\mathcal{D}'(\Omega)$;*
2. *ξ, u, et w satisfont :*

$$\begin{cases} \xi \in L^\infty(]0,T[;L^3(\Omega)),\ \sqrt{\xi}u \in L^\infty(]0,T[;(L^2(\Omega))^2), \\ \sqrt{\xi} \in L^\infty(]0,T[;H^1(\Omega)),\ \xi^{\frac{1}{3}}u \in L^2(]0,T[;(L^2(\Omega))^2), \\ \xi\nabla_x u,\ \xi[\nabla_x u]^t \in L^2(]0,T[;(W^{-1,1}(\Omega))^{2\times 2}),\ \sqrt{\xi}w \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega)), \\ \sqrt{\xi}\partial_z w \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega)),\ \sqrt{\xi}\partial_z u \in L^2(]0,T[;(L^2(\Omega))^2); \end{cases} \tag{1.30}$$

3. *l'équation de conservation de la masse $(1.16)_1$ est valable au sens de $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$ et l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega m_0\cdot\varphi(0,x,z)dxdz - \int_\Omega \xi u\cdot\varphi(T,x,z)dxdz \\ &+\int_0^T\int_\Omega \Big(\xi u\cdot\partial_t\varphi + \xi u\otimes u : \nabla_x\varphi + \xi uw\cdot\partial_z\varphi + \xi\mathrm{div}_x\varphi\Big)dxdzdt \\ &+\int_0^T\int_\Omega (\overline{\nu}_2\xi u\cdot\partial_{zz}\varphi - r\xi|u|u\cdot\varphi)dxdzdt - \overline{\nu}_1\langle\xi\nabla_x u,\nabla_x\varphi\rangle - \overline{\nu}_1\langle\xi[\nabla_x u]^t,\nabla_x\varphi\rangle = 0 \end{aligned} \tag{1.31}$$

pour toute fonction test régulière $\varphi(t,x,z)\in\big(C^\infty(]0,T[;\Omega)\big)^2$, où

$$\langle\xi\nabla_x u,\nabla_x\varphi\rangle \triangleq \int_0^T\int_\Omega (\xi u\cdot\Delta_x\varphi + 2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\xi}u)dxdzdt,$$

$$\langle\xi[\nabla_x u]^t,\nabla_x\varphi\rangle \triangleq \int_0^T\int_\Omega (\xi u\cdot\mathrm{div}_x([\nabla_x\varphi]^t) + 2[\nabla_x\varphi]^t\cdot\nabla_x\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\xi}u)dxdzdt.$$

✓ *Nous supposons que les données initiales satisfont :*

$$\begin{aligned} &0\le\xi_0(x)\le M<+\infty,\ \xi_0\in L^1(\Omega),\ \xi_0\ln\xi_0-\xi_0+1\in L^1(\Omega), \\ &\nabla_x\sqrt{\xi_0}\in(L^2(\Omega))^2,\ m_0=0 \text{ si } \xi_0=0,\ \frac{|m_0|^2}{\xi_0}\in L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Alors les résultats obtenus par Wang et al dans [47] s'énoncent comme suit.

Théorème 1.34 (F. Wang, C. Dou, Q. Jiu)
Supposons que les données initiales satisfont (1.32). Alors, pour tout $T>0$, le système (1.16) avec les conditions aux limites (1.17) et les données initiales (1.18) a une solution faible (ξ,u,w) au sens de la Définition 1.44.

Remarque 1.18 Dans la seconde équation de (1.16), le terme de pression $\nabla_x\xi$ est issu de l'expression isotherme $P(\rho)=\rho$ dans l'équation primitive compressible (0.1). Mathématiquement, si le terme de pression en (1.16) est remplacé par $\nabla_x\xi^\gamma$ avec $\gamma>1$, l'existence globale de solutions faibles peut être obtenue de façon similaire. Cependant, il ne s'ensuit pas que le cas $P(\rho)=\rho^\gamma$ avec $\gamma>1$ dans (0.1) puisse être traité.

Remarque 1.19 Si l'on suppose que les viscosités $\nu_i(t,x,y)=\overline{\nu}_i\rho(t,x,y),\ i=1;2$ on peut aussi obtenir l'existence de solutions faibles des équations primitives compressibles tridimensionnelles (0.1). Dans ce cas, $1-z$ est minoré par une constante positive.

En utilisant le changement de variables $\rho(t,x,y)=\xi(t,x)e^{-y}$, $v(t,x,y)=e^y w(t,x,z)$, $z=1-e^{-y}$ et le Théorème 1.34, nous obtenons le théorème principal de ce mémoire.

Théorème 1.35 (F. Wang, C. Dou, Q. Jiu)
Sous les hypothèses du Théorème 1.34, le système (0.1) avec le profil de viscosités (0.2), les conditions aux limites (0.3) et les données initiales (0.4) a une solution faible (ρ,u,v) qui peut être définie de la même manière que la Définition 1.44.

CHAPITRE 2

APPROXIMATION DE FAEDO-GALERKIN

Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons le schéma de Faedo-Galerkin du système approximatif (2.1), comme dans [[21], chapitre 7] et [29,46] et nous prouvons l'existence globale des solutions de (2.1). Ensuite, au Chapitre 3 nous prouverons l'existence globale de solutions faibles du problème intermédiaire (1.16)-(1.18) en faisant disparaître les paramètres ε, μ, η, δ, κ et r_0 de notre système approximatif pas à pas.

• **Principe de la méthode de Faedo [1]-Galerkin [2] :** L'approximation de Galerkin est une méthode très générale et très robuste qui concerne les formulations faibles. Elle possède l'avantage d'être une méthode **constructive** en ce sens que la solution cherchée est obtenue comme limite d'une suite de "solutions approchées", d'où son double intérêt théorique et numérique.
Le schéma général de la méthode est le suivant.

Étape 1 : Partant d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie V, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V$ tels que $\overline{\bigcup_{k\geq 1} V_k} = V$, ce qui permet de définir $u_k \in V_k$ solution du problème approché.

Étape 2 : On établit des estimations à priori sur u_k qui traduisent que la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est bornée dans certains espaces normés.

Étape 3 : Une fois en possession des estimations à priori, il faut **passer à la limite** $k \to +\infty$ en utilisant un argument de **compacité**. Soit alors u la limite obtenue de la suite $(u_k)_{k\geq 1}$.

Étape 4 : On montre que u est une solution du problème de départ.

Étape 5 : On établit l'unicité de la solution si tel est le cas.

Étape 6 : Une étape supplémentaire, mais importante pour le calcul numérique, consiste à montrer que la solution obtenue dépend continûment des données.

La méthode de Faedo-Galerkin est une adaptation de la méthode de Galerkin dans le cas d'un problème d'évolution.

1. Alessandro Carlo FAEDO était un mathématicien et homme politique italien , né à Chiampo. Il est connu pour ses travaux en analyse numérique, aboutissant à la *méthode Faedo-Galerkin* : il fut l'un des élèves de Leonida Tonelli et, après sa mort, il lui succéda à la chaire d'analyse mathématique de l'université de Pise, devenant doyen de la faculté des sciences puis recteur et exerçant une forte influence positive sur le développement de l'université.

2. Boris Grigorievitch GALERKIN est un mathématicien et un ingénieur russe puis soviétique, réputé pour ses contributions à l'étude des treillis de poutres et des plaques élastiques. Son nom reste lié à la *méthode de Galerkin*, qui est l'une des bases de la méthodes des éléments finis.

2.1 Système approximatif

Afin de prouver l'existence globale de solutions faibles pour les équations primitives compressibles, nous considérons le système approximatif suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \operatorname{div}_x(\xi \overline{u}) = \varepsilon \Delta_x \xi, \\ \partial_t(\xi u) + \operatorname{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi u w) + \nabla_x \xi + r_0 u + r\xi |u| u + \mu \Delta^2 u + \varepsilon \nabla_x \xi \cdot \nabla_x u \\ = 2\overline{\nu}_1 \operatorname{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2 \partial_z(\xi \partial_z u) + \eta \nabla_x \xi^{-10} + \kappa \xi \nabla_x \Big(\dfrac{\Delta_x \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \Big) + \delta \xi \nabla_x \Delta_x^5 \xi, \\ \partial_z \xi = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où les paramètres artificiels ε, μ, η, δ, κ et r_0 sont des constantes positives et la vitesse verticale w peut être exprimée comme $w(z) = -\dfrac{\operatorname{div}_x(\xi \tilde{u}(z))}{\xi} + z \dfrac{\operatorname{div}_x(\xi \overline{u})}{\xi}$.

Pour garder la densité bornée et minorée par une constante positive pour tout le temps, nous ajoutons les termes supplémentaires $\eta \nabla_x \xi^{-10}$ et $\delta \xi \nabla_x \Delta_x^5 \xi$. Cela nous permet de prendre $\dfrac{\nabla \xi}{\xi}$ comme fonction test pour dériver la BD-entropie. De plus, le terme $r_0 u$ est utilisé pour contrôler la densité près du vide, $r\xi|u|u$ est utilisé pour s'assurer que $\sqrt{\xi} u$ converge fortement dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$ au dernier niveau d'approximation.

Pour $T > 0$, on définit un espace de dimension finie $X_n = vect\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, où ψ_i pour $i = 1, \cdots, n$ est la fonction propre du Laplacien :

$$\begin{aligned} &-\Delta \psi_i = \lambda_i \psi_i, \text{ sur } \Omega, \\ &\psi_i \text{ est périodique en } x_1 \text{ et } x_2, \\ &\partial_z \psi_i|_{z=0} = \partial_z \psi_i|_{z=h} = 0. \end{aligned}$$

Ici, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ qui est aussi une base orthogonale de $H^1(\Omega)$. Soit $(\xi_0, u_0) \in (C^\infty(\Omega))^3$ une donnée initiale satisfaisant $\xi_0 \geq \underline{\xi} > 0$ avec $\underline{\xi} = \inf_{x \in \Omega} \xi_0(x)$, et soit la vitesse $u \in C([0,T]; X_n)$ satisfaisant :

$$u(t,x,z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \psi_i(x,z), \ (t,x,z) \in [0,T] \times \Omega,$$

La norme de u dans $C([0,T]; X_n)$ peut être formulé comme $\|u\|_{C([0,T];X_n)} = \max_{t \in [0,T]} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(t)|$. Puisque X_n est un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur X_n. Donc, u est bornée dans $C([0,T]; (C^k(\Omega))^2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et il existe une constante $C > 0$ dépendant de k telle que :

$$\|u\|_{C([0,T];(C^k(\Omega))^2)} \leq C \|u\|_{C([0,T];(L^2(\Omega))^2)}. \tag{2.2}$$

Ainsi, nous considérons le système approximatif de l'équation de continuité,

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \operatorname{div}_x(\xi \overline{u}) = \varepsilon \Delta_x \xi, \\ \xi_0 \in C^\infty(\Omega), \ \xi_0 \geq \underline{\xi} > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Afin de montrer que le problème parabolique (2.3) est bien posé, nous introduisons le Lemme 2.1 dont la preuve est similaire à la Preuve du Lemme 3.1 dans [23].

Lemme 2.1 *Soit $\Omega = \mathbb{T}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ un tore tridimensionnel et soit $U \in C([0,T]; X_n)$ un champ de vecteur donné. Si la donnée initiale $\xi_0 \geq \inf_{x \in \Omega} \xi_0(x) > 0$, $\xi_0 \in C^2(\Omega)$, alors il existe une solution classique unique $\xi = \xi_U$ au système suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \operatorname{div}(\xi U) = \varepsilon \Delta \xi, \\ \xi \text{ est périodique en } x_1, \ x_2, \text{ et } z. \end{cases}$$

Plus précisément,
$$\xi \in C([0,T];C^2(\Omega)),\ \partial_t \xi \in C([0,T];C(\Omega)). \tag{2.4}$$
et
$$0 < \underline{\xi} e^{-\int_0^T \|\mathrm{div} U\|_{L^\infty} dt} \leq \xi(x,t) \leq \overline{\xi} e^{\int_0^T \|\mathrm{div} U\|_{L^\infty} dt},\ \forall\ x \in \Omega,\ t \geq 0. \tag{2.5}$$
où $\underline{\xi} = \inf_{x\in\Omega} \xi_0(x)$ *et* $\overline{\xi} = \sup_{x\in\Omega} \xi_0(x)$.

De plus, si on prend $U = \overline{u} \in C([0,T];X_n)$ dans le Lemme 2.1, on obtient que le système (2.3) admet une solution classique unique $\xi \in C^1([0,T];C^{11}(\Omega))$ en utilisant la méthode bootstrap.

Ensuite, nous montrons que la solution de l'équation (2.3) dépend continûment de la vitesse u. Pour cela, on se donne $\xi_1,\ \xi_2$ deux solutions avec les mêmes données initiales $(2.3)_2$, c'est-à-dire
$$\partial_t \xi_1 + \mathrm{div}_x(\xi_1 \overline{u}_1) = \varepsilon \Delta_x \xi_1,\ \partial_t \xi_2 + \mathrm{div}_x(\xi_2 \overline{u}_2) = \varepsilon \Delta_x \xi_2.$$
En soustrayant les deux équations ci-dessus, nous avons :
$$\partial_t(\xi_1 - \xi_2) + \mathrm{div}_x(\xi_1 \overline{u}_1 - \xi_2 \overline{u}_2) = \varepsilon \Delta_x(\xi_1 - \xi_2). \tag{2.6}$$
En multipliant (2.6) par $-\Delta_x(\xi_1 - \xi_2) + (\xi_1 - \xi_2)$, nous obtenons :
$$\begin{aligned} &-\partial_t(\xi_1 - \xi_2)\Delta_x(\xi_1 - \xi_2) + \partial_t(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2) - \mathrm{div}_x(\xi_1 \overline{u}_1 - \xi_2 \overline{u}_2)\Delta_x(\xi_1 - \xi_2) \\ &+\mathrm{div}_x(\xi_1 \overline{u}_1 - \xi_2 \overline{u}_2)(\xi_1 - \xi_2) = -\varepsilon|\Delta_x(\xi_1 - \xi_2)|^2 + \varepsilon \Delta_x(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2). \end{aligned} \tag{2.7}$$
Ainsi, en intégrant par parties (2.7) par rapport à x sur Ω et par l'utilisation de l'écriture
$$\begin{aligned} \mathrm{div}_x(\xi_1 \overline{u}_1 - \xi_2 \overline{u}_2) &= \mathrm{div}_x(\xi_1(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)) + \mathrm{div}_x((\xi_1 - \xi_2)\overline{u}_2) \\ &= \xi_1 \mathrm{div}_x(\overline{u}_1 - \overline{u}_2) + \nabla_x \xi_1 \cdot (\overline{u}_1 - \overline{u}_2) + (\xi_1 - \xi_2)\mathrm{div}_x(\overline{u}_2) + \nabla_x(\xi_1 - \xi_2) \cdot \overline{u}_2 \end{aligned}$$
et du Lemme de Gronwall, nous montrons que :
$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|\xi_1 - \xi_2\|_{H^1(\Omega)} \leq \tau C\Big(\xi_0, \varepsilon, \|\overline{u}_1\|_{L^1(]0,\tau[;W^{1,\infty}(\Omega))}, \|\overline{u}_2\|_{L^1(]0,\tau[;W^{1,\infty}(\Omega))}\Big)\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{H^1(\Omega)},$$
pour tout $0 \leq \tau \leq T$.
De plus, puisque $\overline{u} \in C([0,T];X_n)$ est un champ de vecteurs donné, en utilisant la méthode bootstrap et l'analyse de la compacité, nous avons :
$$\|\xi_1 - \xi_2\|_{C([0,\tau];C^{11}(\overline{\Omega}))} \leq \tau C\Big(\xi_0, \varepsilon, \|\overline{u}_1\|_{L^1(]0,\tau[;X_n)}, \|\overline{u}_2\|_{L^1(]0,\tau[;X_n)}\Big)\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C([0,\tau];X_n)}. \tag{2.8}$$
Comme $\overline{u}_i = \displaystyle\int_0^h u_i(\tau)d\tau$, $i = 1;2$, nous avons $\|\overline{u}_i\|_{X_n} \leq C\|u_i\|_{X_n}$ et $\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{X_n} \leq C\|u_1 - u_2\|_{X_n}$. Alors, nous obtenons :
$$\|\xi_1 - \xi_2\|_{C([0,\tau];C^{11}(\Omega))} \leq \tau C\Big(\xi_0, \varepsilon, \|\overline{u}_1\|_{L^1(]0,\tau[;X_n)}, \|\overline{u}_2\|_{L^1(]0,\tau[;X_n)}\Big)\|u_1 - u_2\|_{C([0,\tau];X_n)}. \tag{2.9}$$
Grâce à l'équation de conservation de la masse, nous construisons l'opérateur
$$\mathcal{S} : C([0,T];X_n) \longrightarrow C([0,T];C^{11}(\Omega)) \text{ par } \mathcal{S}(u) = \xi.$$
Grâce au Lemme 2.1 et (2.9), nous avons la Proposition 2.1.

Proposition 2.1 *Si* $0 < \underline{\xi} \leq \xi \leq \overline{\xi}$, $\xi \in C^\infty(\Omega)$, $u, \overline{u} \in C([0,T];X_n)$, *alors il existe un opérateur* $\mathcal{S} : C([0,T];X_n) \longrightarrow C([0,T];C^{11}(\Omega))$, $\mathcal{S}(u) = \xi$ *satisfaisant :*

1. $\xi = \mathcal{S}(u)$ *est une solution unique au problème* (2.3) *;*
2. $0 < \underline{\xi} e^{-\int_0^T \|\mathrm{div}_x \overline{u}\|_{L^\infty} dt} \leq \xi(x,t) \leq \overline{\xi} e^{\int_0^T \|\mathrm{div}_x \overline{u}\|_{L^\infty} dt}$, $\forall\ x \in \Omega,\ t \geq 0$;
3. $\|\mathcal{S}(u_1) - \mathcal{S}(u_2)\|_{C([0,\tau];C^{11}(\Omega))} \leq \tau C\Big(\xi_0, \varepsilon, \|u_1\|_{L^1(]0,\tau[;X_n)}, \|u_1\|_{L^1(]0,\tau[;X_n)}\Big)\|u_1 - u_2\|_{C([0,\tau];X_n)}$
   pour tout $\tau \in [0,T]$ *et* $u_1, u_2 \in M_k = \Big\{u \in C([0,T];X_n);\ \|u\|_{C([0,T];X_n)} \leq k,\ t \in [0,T]\Big\}$.

Remarque 2.1 La proposition 2.1 implique que l'opérateur $\mathcal{S}$ est continu lipschitzien.

2.2 Approximation de Faedo-Galerkin

Dans cette section, notre objectif est de résoudre l'équation du moment sur l'espace X_n. Pour toute fonction test $\varphi \in X_n$, la solution approchée $u_n \in C(0,T;X_n)$ satisfait la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \xi_n u_n(T)\cdot\varphi dxdz - \int_\Omega m_0\cdot\varphi dxdz + \mu\int_0^T\int_\Omega \Delta u_n\cdot\Delta\varphi dxdzdt \\
&-\int_0^T\int_\Omega \xi_n u_n w_n\cdot\partial_z\varphi dxdzdt - \int_0^T\int_\Omega (\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot\nabla_x\varphi dxdzdt \\
&+2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega \xi_n D_x(u_n)\cdot\nabla_x\varphi dxdzds - \int_0^T\int_\Omega \xi_n \mathrm{div}_x\varphi dxdzdt \\
&+\overline{\nu}_2\int_0^T\int_\Omega \xi_n\partial_z u_n\cdot\partial_z\varphi dxdzdt + \eta\int_0^T\int_\Omega \xi_n^{-10}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt \\
&+\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x u_n\cdot\varphi dxdzdt + r_0\int_0^T\int_\Omega u_n\cdot\varphi dxdzdt \\
&+r\int_0^T\int_\Omega \xi_n|u_n|u_n\cdot\varphi dxdzdt - \delta\int_0^T\int_\Omega \xi_n\nabla_x\Delta_x^5\xi_n\cdot\varphi dxdzdt \\
&= -2\kappa\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\nabla_x\sqrt{\xi_n}\cdot\varphi dxdzdt - \kappa\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\sqrt{\xi_n}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$w_n = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi_n\tilde{u}_n)}{\xi_n} + z\frac{\mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n)}{\xi_n}$$

et

$$\xi_n = \mathcal{S}(u_n).$$

Pour résoudre (2.10), nous suivons les mêmes arguments que dans [21, 24, 29] et nous introduisons la famille d'opérateurs suivante, étant donné une fonction $\xi \in L^1(\Omega)$ avec $\xi \geq \underline{\xi} > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[\xi] : X_n &\longrightarrow X_n' \\
u &\longmapsto \mathcal{M}[\xi](u) : X_n \longrightarrow \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad v \longmapsto \langle\mathcal{M}[\xi](u), v\rangle = \int_\Omega \xi u\cdot v dx,
\end{aligned}$$

où X_n' est l'espace dual de X_n.
Ces opérateurs sont symétriques et définis positifs avec la plus petite valeur propre

$$\inf_{\|v\|_{L^2(\Omega)}=1}\langle\mathcal{M}[\xi]v, v\rangle = \inf_{\|v\|_{L^2(\Omega)}=1}\int_\Omega \xi|v|^2dx \geq \inf_{x\in\Omega}\xi(x) \geq \underline{\xi}.$$

Par conséquent, puisque X_n est de dimension finie, les opérateurs sont inversibles avec

$$\|(\mathcal{M}[\xi])^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_n', X_n)} \leq \underline{\xi}^{-1},$$

où $\mathcal{L}(X_n', X_n)$ est l'ensemble des applications linéaires et bornées de X_n' à X_n.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[\xi] : X_n &\longrightarrow X_n' \\
u &\longmapsto \mathcal{M}[\xi](u)
\end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}
(\mathcal{M}[\xi])^{-1} : X_n' &\longrightarrow X_n \\
f &\longmapsto (\mathcal{M}[\xi])^{-1}(f)
\end{aligned}$$

Posons $\mathcal{T}[\xi] = (\mathcal{M}[\xi])^{-1}$, c'est-à-dire $\mathcal{T}[\xi]\mathcal{M}[\xi] = \mathcal{I}d_{X_n}$ et $\mathcal{M}[\xi]\mathcal{T}[\xi] = \mathcal{I}d_{X_n'}$, avec $\mathcal{I}d_{X_n}$ (resp. $\mathcal{I}d_{X_n'}$) l'opérateur identité de X_n dans X_n (resp. de X_n' dans X_n').
On obtient pour $\xi \in L^1(\Omega)$ avec $\xi \geq \underline{\xi} > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} : L^1(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{L}(X_n', X_n) \\
\xi &\longmapsto \mathcal{T}[\xi] : X_n' \longrightarrow X_n \qquad \text{et } \|\mathcal{T}[\xi]\|_{\mathcal{L}(X_n', X_n)} \leq \underline{\xi}^{-1} \\
&\qquad\qquad f \longmapsto \mathcal{T}[\xi](f)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[\xi_1]-\mathcal{T}[\xi_2] &= \mathcal{T}[\xi_2]\mathcal{M}[\xi_2]\mathcal{T}[\xi_1]-\mathcal{T}[\xi_2]\mathcal{M}[\xi_1]\mathcal{T}[\xi_1]\\ &= \mathcal{T}[\xi_2]\Big(\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1]\Big)\mathcal{T}[\xi_1].\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}[\xi_1]-\mathcal{T}[\xi_2]\|_{\mathcal{L}(X_n',X_n)} &= \|\mathcal{T}[\xi_2](\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1])\mathcal{T}[\xi_1]\|_{\mathcal{L}(X_n',X_n)}\\ &\leq C\|\mathcal{T}[\xi_2]\|_{\mathcal{L}(X_n',X_n)}\|\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1]\|_{\mathcal{L}(X_n,X_n')}\|\mathcal{T}[\xi_1]\|_{\mathcal{L}(X_n',X_n)}\\ &\leq C\underline{\xi}_2^{-1}\|\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1]\|_{\mathcal{L}(X_n,X_n')}\underline{\xi}_1^{-1}\\ &\leq C(\underline{\xi})\|\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1]\|_{\mathcal{L}(X_n,X_n')}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Puisque

$$\|\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1]\|_{\mathcal{L}(X_n,X_n')}=\sup_{u\in X_n,u\neq 0}\frac{\|(\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1])(u)\|_{X_n'}}{\|u\|_{X_n}}$$

et

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1])(u)\|_{X_n'} &= \sup_{v\in X_n,v\neq 0}\frac{|\langle(\mathcal{M}[\xi_2]-\mathcal{M}[\xi_1])(u),v\rangle|}{\|v\|_{X_n}}\\ &= \sup_{v\in X_n,v\neq 0}\frac{|\langle\mathcal{M}[\xi_2](u),v\rangle-\langle\mathcal{M}[\xi_1](u),v\rangle|}{\|v\|_{X_n}}\\ &= \sup_{v\in X_n,v\neq 0}\frac{\Big|\int_\Omega(\xi_2-\xi_1)u\cdot v dx\Big|}{\|v\|_{X_n}}\\ &\leq C(n)\sup_{v\in X_n,v\neq 0}\frac{\int_\Omega|\xi_2-\xi_1|dx\|u\|_{X_n}\|v\|_{X_n}}{\|v\|_{X_n}}\\ &\leq C(n)\|\xi_1-\xi_2\|_{L^1(\Omega)}\|u\|_{X_n}\end{aligned}$$

alors (2.11) implique que l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu lipschitzien dans le sens :

$$\|\mathcal{T}[\xi_1]-\mathcal{T}[\xi_2]\|_{\mathcal{L}(X_n^*,X_n)}\leq C(n,\underline{\xi})\|\xi_1-\xi_2\|_{L^1(\Omega)}$$

pour tout ξ_1, ξ_2 appartenant à l'ensemble $E_\varsigma=\{\xi\in L^1(\Omega)\mid \underline{\xi}\geq\varsigma>0\}$.
Alors, l'équation intégrale (2.10) peut être reformulée comme suit :

$$u_n(t)=\mathcal{T}[\mathcal{S}(u_n)(t)]\Big(\mathcal{M}[\xi_0](u_0)+\int_0^t\mathcal{N}(\mathcal{S}(u_n),u_n)(s)ds\Big), \tag{2.12}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathcal{S}(u_n),u_n)(s) &= 2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi_n D_x(u_n))+\overline{\nu}_2\partial_z(\xi_n\partial_z u_n)+\eta\nabla\xi_n^{-10}+\delta\xi_n\nabla_x\Delta_x^5\xi_n\\ &\quad+\kappa\xi_n\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big)-\mathrm{div}_x(\xi_n u_n\otimes u_n)-\partial_z(\xi_n u_n w_n)\\ &\quad-\nabla_x\xi_n-r\xi_n|u_n|u_n-r_0u_n-\mu\Delta^2u_n-\varepsilon\nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x u_n.\end{aligned}$$

Au vu des estimations continues et lipschitziennes pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$, l'équation (2.12) peut être résolue sur un temps court $[0,T']$, où $T'\leq T$, en utilisant le théorème du point fixe sur l'espace de Banach $C([0,T];X_n)$. Ainsi, nous obtenons une unique solution locale dans le temps (ξ_n,u_n,w_n) à (2.3) et (2.12).

Ensuite, nous étendrons cette solution locale obtenue à une solution globale.
Nous remarquons que :

$$\begin{aligned}\int_\Omega\xi_n u_n(T)\cdot\varphi dxdz-\int_\Omega m_0\cdot\varphi dxdz &= \int_\Omega(\xi_n u_n(T)-\xi_n u_n(0))\cdot\varphi dxdz\\ &= \int_\Omega\Big(\int_0^T\partial_t(\xi_n u_n)dt\Big)\cdot\varphi dxdz\\ &= \int_0^T\int_\Omega\partial_t(\xi_n u_n)\cdot\varphi dxdzdt.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ainsi, en remplaçant (2.13) dans (2.10) et en différenciant l'équation résultante par rapport au temps t, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t(\xi_n u_n)\cdot\varphi dxdz + \mu\int_\Omega \Delta u_n\cdot\Delta\varphi dxdz - \int_\Omega (\xi_n u_n w_n)\cdot\partial_z\varphi dxdz\\
&-\int_\Omega (\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot\nabla_x\varphi dxdz + 2\overline{\nu}_1\int_\Omega \xi_n D_x(u_n)\cdot\nabla_x\varphi dxdz - \int_\Omega \xi_n \mathrm{div}_x\varphi dxdz\\
&+\overline{\nu}_2\int_\Omega \xi_n\partial_z u_n\cdot\partial_z\varphi dxdz + \eta\int_\Omega \xi_n^{-10}\mathrm{div}_x\varphi dxdz + \varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x u_n\cdot\varphi dxdz\\
&+r_0\int_\Omega u_n\cdot\varphi dxdz + r\int_\Omega \xi_n|u_n|u_n\cdot\varphi dx - \delta\int_\Omega \xi_n\nabla_x\Delta_x^5\xi_n\cdot\varphi dxdz\\
&= -2\kappa\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\nabla_x\sqrt{\xi_n}\cdot\varphi dxdz - \kappa\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\sqrt{\xi_n}\mathrm{div}_x\varphi dxdz.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

L'équation (2.14) étant vraie $\forall\ \varphi\in X_n$ et comme $u_n\in X_n$, alors en prenant $\varphi = u_n$ dans (2.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t(\xi_n u_n)\cdot u_n dxdz + \mu\int_\Omega \Delta u_n\cdot\Delta u_n dxdz - \int_\Omega (\xi_n u_n w_n)\cdot\partial_z u_n dxdz\\
&-\int_\Omega (\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz + 2\overline{\nu}_1\int_\Omega \xi_n D_x(u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz - \int_\Omega \xi_n \mathrm{div}_x u_n dxdz\\
&+\overline{\nu}_2\int_\Omega \xi_n\partial_z u_n\cdot\partial_z u_n dxdz + \eta\int_\Omega \xi_n^{-10}\mathrm{div}_x u_n dxdz + \varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x u_n\cdot u_n dxdz\\
&+r_0\int_\Omega u_n\cdot u_n dxdz + r\int_\Omega \xi_n|u_n|u_n\cdot u_n dx - \delta\int_\Omega \xi_n\nabla_x\Delta_x^5\xi_n\cdot u_n dxdz\\
&= -2\kappa\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\nabla_x\sqrt{\xi_n}\cdot u_n dxdz - \kappa\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\sqrt{\xi_n}\mathrm{div}_x u_n dxdz.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Puis, en utilisant le fait que :

$$u_n\cdot u_n = |u_n|^2,\quad \Delta u_n\cdot\Delta u_n = |\Delta u_n|^2,\quad u_n\cdot\partial_z u_n = \frac{1}{2}\partial_z(|u_n|^2)\ \text{et}\ \nabla_x u_n\cdot u_n = \frac{1}{2}\nabla_x(|u_n|^2)$$

nous aboutissons à

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t(\xi_n u_n)\cdot u_n dxdz + \mu\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dxdz - \frac{1}{2}\int_\Omega \xi_n w_n\partial_z(|u_n|^2) dxdz\\
&-\int_\Omega (\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz + 2\overline{\nu}_1\int_\Omega \xi_n D_x(u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz - \int_\Omega \xi_n \mathrm{div}_x u_n dxdz\\
&+\overline{\nu}_2\int_\Omega \xi_n|\partial_z u_n|^2 dxdz + \eta\int_\Omega \xi_n^{-10}\mathrm{div}_x u_n dxdz + \frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x(|u_n|^2) dxdz\\
&+r_0\int_\Omega |u_n|^2 dxdz + r\int_\Omega \xi_n|u_n|^3 dx - \delta\int_\Omega \xi_n\nabla_x\Delta_x^5\xi_n\cdot u_n dxdz\\
&= -2\kappa\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\nabla_x\sqrt{\xi_n}\cdot u_n dxdz - \kappa\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\sqrt{\xi_n}\mathrm{div}_x u_n dxdz.
\end{aligned}\tag{2.16}$$

En intégrant par parties par rapport à x sur Ω et le fait que :

$$\mathrm{div}_x(\xi_n u_n\otimes u_n) = u_n\mathrm{div}_x(\xi_n u_n) + (\xi_n u_n)\cdot\nabla_x u_n,\ u_n\cdot u_n = |u_n|^2\ \text{et}\ \nabla_x u_n\cdot u_n = \frac{1}{2}\nabla_x(|u_n|^2)$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega (\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz &= \int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot u_n dxdz\\
&= \int_\Omega \Big(\mathrm{div}_x(\xi_n u_n)u_n + (\xi_n u_n)\cdot\nabla_x u_n\Big)\cdot u_n dxdz\\
&= \int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n)u_n\cdot u_n dxdz + \int_\Omega (\xi_n u_n)\cdot\nabla_x u_n\cdot u_n dxdz\\
&= \int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n)|u_n|^2 dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega (\xi_n u_n)\cdot\nabla_x(|u_n|^2) dxdz\\
&= \int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n)|u_n|^2 dxdz - \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n)|u_n|^2 dxdz\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n)|u_n|^2 dxdz.
\end{aligned}\tag{2.17}$$

De même, nous avons :

$$\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x(|u_n|^2)dxdz = -\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega \Delta_x\xi_n|u_n|^2dxdz. \tag{2.18}$$

En intégrant par parties par rapport à z sur Ω, nous écrivons :

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \xi_n w_n\partial_z(|u_n|^2)dxdz = \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_z(\xi_n w_n)|u_n|^2dxdz. \tag{2.19}$$

En additionnant membre à membre (2.17), (2.18) et (2.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega(\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz + \frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega\nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x(|u_n|^2)dxdz - \frac{1}{2}\int_\Omega\xi_n w_n\partial_z(|u_n|^2)dxdz\\
&\quad= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n)|u_n|^2dxdz - \frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega\Delta_x\xi_n|u_n|^2dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega\partial_z(\xi_n w_n)|u_n|^2dxdz\\
&\quad= \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\mathrm{div}_x(\xi_n u_n) - \varepsilon\Delta_x\xi_n + \partial_z(\xi_n w_n)\right)|u_n|^2dxdz\\
&\quad= -\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_t\xi_n|u_n|^2dxdz,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où nous avons utilisé

$$\partial_t\xi_n + \mathrm{div}_x(\xi_n u_n) + \partial_z(\xi_n w_n) = \varepsilon\Delta_x\xi_n \tag{2.21}$$

qui à son tour est obtenu grâce à $\partial_z(\xi_n w_n) = -\mathrm{div}_x(\xi_n u_n) + \mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n)$ (voir (1.28) et $(1.16)_3$) et l'équation de conservation de la masse $\partial_t\xi_n + \mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n) = \varepsilon\Delta_x\xi_n$ (voir $(1.16)_1$).
Par ailleurs, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\partial_t(\xi_n u_n)\cdot u_n dxdz &= \int_\Omega\partial_t\xi_n|u_n|^2dxdz + \int_\Omega\xi_n\partial_t(u_n)\cdot u_n dxdz\\
&= \int_\Omega\partial_t\xi_n|u_n|^2dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega\xi_n\partial_t(|u_n|^2)dxdz\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega\partial_t\xi_n|u_n|^2dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega\partial_t(\xi_n|u_n|^2)dxdz.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Ainsi, en additionnant membre à membre (2.20) et (2.22) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\partial_t(\xi_n u_n)\cdot u_n dxdz - \int_\Omega(\xi_n u_n\otimes u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz\\
&\quad+\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega\nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x(|u_n|^2)dxdz - \frac{1}{2}\int_\Omega\xi_n w_n\partial_z(|u_n|^2)dxdz\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega\partial_t(\xi_n|u_n|^2)dxdz = \frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{1}{2}\xi_n|u_n|^2dxdz.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Comme $\nabla_x u_n = \dfrac{\nabla_x u_n + [\nabla_x u_n]^t}{2} + \dfrac{\nabla_x u_n - [\nabla_x u_n]^t}{2} = D_x(u_n) + A_x(u_n)$ alors

$$2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n D_x(u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz = 2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n|D_x(u_n)|^2dxdz + 2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n D_x(u_n)\cdot A_x(u_n)dxdz.$$

Par un calcul direct, nous remarquons que :

$$\begin{aligned}
&2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n D_x(u_n)\cdot A_x(u_n)dxdz = 2\overline{\nu}\int_\Omega\xi_n\frac{\nabla_x u_n + [\nabla_x u_n]^t}{2}\cdot\frac{\nabla_x u_n - [\nabla_x u_n]^t}{2}dxdz\\
&\quad= \frac{1}{2}\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n\Big(\nabla_x u_n\cdot\nabla_x u_n - \nabla_x u_n\cdot[\nabla_x u_n]^t + [\nabla_x u_n]^t\cdot\nabla_x u_n - [\nabla_x u_n]^t\cdot[\nabla_x u_n]^t\Big)dxdz\\
&\quad= \int_\Omega\xi_n\Big(|\nabla_x u_n|^2 - \nabla_x u_n\cdot[\nabla_x u_n]^t + \nabla_x u_n\cdot[\nabla_x u_n]^t - |[\nabla_x u_n]^t|^2\Big)dxdz\\
&\quad= \int_\Omega\xi_n(|\nabla_x u_n|^2 - |[\nabla_x u_n]^t|^2)dxdz = 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n D_x(u_n)\cdot\nabla_x u_n dxdz = 2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n|D_x(u_n)|^2dxdz. \tag{2.24}$$

En plus, l'intégration par parties par rapport à x nous donne :

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \xi_n \mathrm{div}_x u_n dxdz &= \int_\Omega \nabla_x \xi_n \cdot u_n dxdz \\ \eta \int_\Omega \xi_n^{-10} \mathrm{div}_x u_n dxdz &= -\eta \int_\Omega \nabla_x \xi_n^{-10} \cdot u_n dxdz \\ -\delta \int_\Omega \xi_n \nabla_x \Delta_x^5 \xi_n \cdot u_n dxdz &= \delta \int_\Omega \Delta_x^5 \xi_n \mathrm{div}_x (\xi_n u_n) dxdz.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Enfin, nous avons :

$$\begin{aligned}&-2\kappa \int_\Omega \Delta_x \sqrt{\xi_n} \nabla_x \sqrt{\xi_n} u_n dxdz - \kappa \int_\Omega \Delta_x \sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} \mathrm{div}_x u_n dxdz \\ &= -2\kappa \int_\Omega \Delta_x \sqrt{\xi_n} \frac{\nabla_x \xi_n}{2\sqrt{\xi_n}} u_n dxdz - \kappa \int_\Omega \frac{\Delta_x \sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}} \xi_n \mathrm{div}_x u_n dxdz \\ &= -\kappa \int_\Omega \frac{\Delta_x \sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}} \Big(\nabla_x \xi_n u_n + \xi \mathrm{div}_x u_n \Big) dxdz \\ &= -\kappa \int_\Omega \frac{\Delta_x \sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}} \mathrm{div}_x (\xi_n u_n) dxdz.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Alors, en remplaçant (2.23), (2.24), (2.25) et (2.26) dans (2.16), nous déduisons que :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{1}{2} \xi_n |u_n|^2 dxdz + \int_\Omega \nabla_x \xi_n \cdot u_n dxdz + r_0 \int_\Omega |u_n|^2 dxdz + r \int_\Omega \xi_n |u_n|^3 dxdz \\ &+\mu \int_\Omega |\Delta u_n|^2 dxdz + 2\overline{\nu}_1 \int_\Omega \xi_n |D_x u_n|^2 dxdz + \overline{\nu}_2 \int_\Omega \xi_n |\partial_z u_n|^2 dxdz \\ &-\eta \int_\Omega \nabla_x \xi_n^{-10} \cdot u_n dxdz + \kappa \int_\Omega \frac{\Delta_x \sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}} \mathrm{div}_x (\xi_n u_n) dxdz + \delta \int_\Omega \Delta_x^5 \xi_n \mathrm{div}_x (\xi_n u_n) dxdz = 0.\end{aligned} \tag{2.27}$$

De plus, en utilisant (2.21) nous estimons les termes du côté gauche dans (2.27) un par un.

► Comme $\nabla_x \ln \xi_n = \dfrac{\nabla_x \xi_n}{\xi_n}$ et $\nabla_x \sqrt{\xi_n} = \dfrac{\nabla_x \xi_n}{2\sqrt{\xi_n}}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla_x \xi_n \cdot u_n dxdz &= \int_\Omega \nabla_x \ln \xi_n \cdot \xi_n u_n dxdz = -\int_\Omega \ln \xi_n \mathrm{div}_x (\xi_n u_n) dxdz \\ &= \int_\Omega \ln \xi_n (\partial_t \xi_n - \varepsilon \Delta_x \xi_n + \partial_z (\xi_n w_n)) dxdz \\ &= \int_\Omega \ln \xi_n \partial_t \xi_n dxdz - \varepsilon \int_\Omega \ln \xi_n \Delta_x \xi_n dxdz + \int_\Omega \ln \xi_n \partial_z (\xi_n w_n) dxdz \\ &= \int_\Omega (\partial_t (\xi_n \ln \xi_n) - \xi_n \partial_t \ln \xi_n) dxdz + \varepsilon \int_\Omega \nabla_x \ln \xi_n \nabla_x \xi_n dxdz + \int_{\Omega_x} \xi_n \ln \xi_n \int_0^h \partial_z w_n dzdx \\ &= \int_\Omega \partial_t (\xi_n \ln \xi_n - \xi_n) dxdz + \varepsilon \int_\Omega \frac{|\nabla_x \xi_n|^2}{\xi_n} dxdz + \int_{\Omega_x} \xi_n \ln \xi_n [w_n]_0^h dx \\ &= \int_\Omega \partial_t (\xi_n \ln \xi_n - \xi_n + 1) dxdz + 4\varepsilon \int_\Omega \left| \frac{\nabla_x \xi_n}{2\sqrt{\xi_n}} \right|^2 dxdz + \int_{\Omega_x} \xi_n \ln \xi_n (w_n(h) - w_n(0)) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_\Omega (\xi_n \ln \xi_n - \xi_n + 1) dxdz + 4\varepsilon \int_\Omega |\nabla_x \sqrt{\xi_n}|^2 dxdz,\end{aligned} \tag{2.28}$$

où nous avons utilisé $(1.17)_2$, les règles de dérivation classiques et l'intégration par parties.

► Ensuite, réécrivons la pression à froid et la dérivée d'ordre élevé des termes de densité. Puisque

$$\left\{ \begin{aligned} &\nabla_x \xi_n^{-10} = -10 \xi_n^{-11} \nabla_x \xi_n \\ &\nabla_x (\xi_n^{-11} \times \xi_n) = \xi_n \nabla_x \xi_n^{-11} + \xi_n^{-11} \nabla_x \xi_n \end{aligned} \right. \implies \nabla_x \xi_n^{-10} = \xi_n \nabla_x \xi_n^{-11} - \frac{1}{10} \nabla_x \xi_n^{-10},$$

c'est-à-dire :

$$\nabla_x \xi_n^{-10} = \frac{10}{11} \xi_n \nabla_x \xi_n^{-11}, \tag{2.29}$$

alors :

$$\begin{aligned}
&-\eta\int_\Omega \nabla_x\xi_n^{-10}\cdot u_n dxdz = -\frac{10}{11}\eta\int_\Omega \nabla_x\xi_n^{-11}\cdot \xi_n u_n dxdz\\
&=\frac{10}{11}\eta\int_\Omega \xi_n^{-11}\mathrm{div}_x(\xi_n u_n)dxdz = \frac{10}{11}\eta\int_\Omega \xi_n^{-11}[\varepsilon\Delta_x\xi_n-\partial_t\xi_n-\partial_z(\xi_n w_n)]dxdz\\
&=-\frac{10}{11}\eta\int_\Omega \xi_n^{-11}\partial_t\xi_n dxdz+\frac{10}{11}\eta\varepsilon\int_\Omega \xi_n^{-11}\Delta_x\xi_n dxdz\ -\frac{10}{11}\eta\int_\Omega \xi_n^{-10}\partial_z w_n dxdz\\
&=\frac{1}{11}\eta\int_\Omega \partial_t(\xi_n^{-10})dxdz-\frac{10}{11}\eta\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi_n^{-11}\cdot\nabla_x\xi_n dxdz\\
&=\frac{1}{11}\eta\int_\Omega \partial_t(\xi_n^{-10})dxdz+10\eta\varepsilon\int_\Omega \xi_n^{-12}\nabla_x\xi_n\cdot\nabla_x\xi_n dxdz\\
&=\frac{1}{11}\eta\int_\Omega \partial_t(\xi_n^{-10})dxdz+10\eta\varepsilon\int_\Omega |\xi_n^{-6}\nabla_x\xi_n|^2 dxdz\\
&=\frac{1}{11}\eta\frac{d}{dt}\int_\Omega \xi_n^{-10}dxdz+\frac{2}{5}\eta\varepsilon\int_\Omega |\nabla_x\xi_n^{-5}|^2 dxdz.
\end{aligned}\tag{2.30}$$

► En utilisant la formule de Green successivement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\delta\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n u_n)\Delta_x^5\xi_n dxdz = \delta\int_\Omega [\varepsilon\Delta_x\xi_n-\partial_t\xi_n-\partial_z(\xi_n w_n)]\Delta_x^5\xi_n dxdz\\
&=-\delta\int_\Omega \partial_t\xi_n\Delta_x^5\xi_n dxdz+\delta\varepsilon\int_\Omega \Delta_x\xi_n\Delta_x^5\xi_n dxdz-\delta\int_\Omega \xi_n\Delta_x^5\xi_n\partial_z w_n dxdz\\
&=-\delta\int_\Omega \partial_t(\Delta_x\xi_n)\Delta_x^4\xi_n dxdz+\delta\varepsilon\int_\Omega \Delta_x^2\xi_n\Delta_x^4\xi_n dxdz\\
&=-\delta\int_\Omega \partial_t(\Delta_x^2\xi_n)\Delta_x^3\xi_n dxdz+\delta\varepsilon\int_\Omega \Delta_x^3\xi_n\Delta_x^3\xi_n dxdz\\
&=\delta\int_\Omega \partial_t(\nabla_x\Delta_x^2\xi_n)\nabla_x\Delta_x^2\xi_n dxdz+\delta\varepsilon\int_\Omega |\Delta_x^3\xi_n|^2 dxdz\\
&=\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla_x\Delta_x^2\xi_n|^2 dxdz+\delta\varepsilon\int_\Omega |\Delta_x^3\xi_n|^2 dxdz.
\end{aligned}\tag{2.31}$$

► Enfin, nous estimons le terme quantique comme suit :

$$\begin{aligned}
&\kappa\int_\Omega \frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\mathrm{div}_x(\xi_n u_n)dxdz = \kappa\int_\Omega \frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}[\varepsilon\Delta_x\xi_n-\partial_t\xi_n-\partial_z(\xi_n w_n)]dxdz\\
&=-\kappa\int_\Omega \frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\partial_t\xi_n dxdz+\kappa\varepsilon\int_\Omega \frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Delta_x\xi_n dxdz-\kappa\int_\Omega \frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\xi_n\partial_z w_n dxdz\\
&=-\kappa\int_\Omega 2\Delta_x\sqrt{\xi_n}\partial_t\sqrt{\xi_n}dxdz-\kappa\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big)\nabla_x\xi_n dxdz\\
&=\kappa\int_\Omega 2\nabla_x\sqrt{\xi_n}\partial_t\nabla_x\sqrt{\xi_n}dxdz-\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_\Omega 2\xi_n\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big)\nabla_x\ln\xi_n dxdz\\
&=\kappa\int_\Omega \partial_t(|\nabla_x\sqrt{\xi_n}|^2)dxdz-\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n\nabla_x^2\ln\xi_n)\nabla_x\ln\xi_n dxdz\\
&=\kappa\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla_x\sqrt{\xi_n}|^2 dxdz+\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_\Omega \xi_n|\nabla_x^2\ln\xi_n|^2 dxdz,
\end{aligned}\tag{2.32}$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}
&2\xi_n\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big) = 2\xi_n\nabla_x\Big(\frac{\mathrm{div}_x\nabla_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big) = 2\xi_n\nabla_x\Big[\mathrm{div}_x\Big(\frac{\nabla_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big)-\nabla_x\sqrt{\xi_n}\cdot\nabla_x\Big(\frac{1}{\sqrt{\xi_n}}\Big)\Big]\\
&=2\xi_n\nabla_x\Big[\mathrm{div}_x\Big(\frac{\nabla_x\xi_n}{2\sqrt{\xi_n}}\frac{1}{\sqrt{\xi_n}}\Big)-\nabla_x\sqrt{\xi_n}\cdot\Big(-\frac{\nabla_x\sqrt{\xi_n}}{\xi_n}\Big)\Big] = 2\xi_n\nabla_x\Big[\frac{1}{2}\mathrm{div}_x\Big(\frac{\nabla_x\xi_n}{\xi_n}\Big)+\Big|\frac{\nabla_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big|^2\Big]\\
&=2\xi_n\nabla_x\Big[\frac{1}{2}\mathrm{div}_x\nabla_x\ln\xi_n+\frac{1}{4}|\nabla_x\ln\xi_n|^2\Big] = \xi_n\nabla_x\Delta_x\ln\xi_n+\frac{1}{2}\xi_n\nabla_x(|\nabla_x\ln\xi_n|^2)\\
&=\xi_n\Delta_x\nabla_x\ln\xi_n+\xi_n\nabla_x(\nabla_x\ln\xi_n)\cdot\nabla_x\ln\xi_n = \xi_n\mathrm{div}_x\nabla_x\nabla_x\ln\xi_n+\xi_n\nabla_x^2\ln\xi_n\cdot\nabla_x\ln\xi_n\\
&=\xi_n\mathrm{div}_x(\nabla_x^2\ln\xi_n)+\nabla_x^2\ln\xi_n\cdot\nabla_x\xi_n = \mathrm{div}_x(\xi_n\nabla_x^2\ln\xi_n).
\end{aligned}$$

En remplaçant (2.28)-(2.32) dans (2.27), nous aboutissons à l'estimation :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E(\xi_n,u_n)+4\varepsilon\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi_n}|^2dxdz+r_0\int_\Omega|u_n|^2dxdz+r\int_\Omega\xi_n|u_n|^3dxdz\\
&+2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi_n|D_x(u_n)|^2dxdz+\overline{\nu}_2\int_\Omega\xi_n|\partial_z u_n|^2dxdz+\mu\int_\Omega|\Delta u_n|^2dxdz\\
&+\frac{2}{5}\eta\varepsilon\int_\Omega|\nabla_x\xi_n^{-5}|^2dxdz+\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_\Omega\xi_n|\nabla_x^2\ln\xi_n|^2dxdz+\delta\varepsilon\int_\Omega|\Delta_x^3\xi_n|^2dxdz=0
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

sur $[0,T']$, où

$$
E(\xi_n,u_n)=\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi_n|u_n|^2+(\xi_n\ln\xi_n-\xi_n+1)+\frac{1}{11}\eta\xi_n^{-10}+\kappa|\nabla_x\sqrt{\xi_n}|^2+\frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi_n|^2\Big)dxdz.
$$

En intégrant l'équation (2.33) par rapport au temps t sur $[0,T']$, nous avons l'égalité d'énergie suivante :

$$
\begin{aligned}
&E(\xi_n,u_n)(T')+4\varepsilon\int_0^{T'}\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi_n}|^2dxdzdt+r_0\int_0^{T'}\int_\Omega|u_n|^2dxdzdt\\
&+r\int_0^{T'}\int_\Omega\xi_n|u_n|^3dxdzdt+2\overline{\nu}_1\int_0^{T'}\int_\Omega\xi_n|D_x(u_n)|^2dxdzdt+\overline{\nu}_2\int_0^{T'}\int_\Omega\xi_n|\partial_z u_n|^2dxdzdt\\
&+\mu\int_0^{T'}\int_\Omega|\Delta u_n|^2dxdzdt+\frac{2}{5}\eta\varepsilon\int_0^{T'}\int_\Omega|\nabla_x\xi_n^{-5}|^2dxdzdt\\
&+\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_0^{T'}\int_\Omega\xi_n|\nabla_x^2\ln\xi_n|^2dxdzdt+\delta\varepsilon\int_0^{T'}\int_\Omega|\Delta_x^3\xi_n|^2dxdzdt=E_0,
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

où

$$
\begin{aligned}
E_0&=E(\xi_n,u_n)(0)=E(\xi,u)(0)\\
&=\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2+(\xi_0\ln\xi_0-\xi_0+1)+\frac{1}{11}\eta\xi_0^{-10}+\kappa|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2+\frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi_0|^2\Big)dxdz.
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'égalité d'énergie (2.34) nous donne :

$$
\int_0^{T'}\|\Delta u_n\|^2_{L^2(\Omega)}dt\le C(E_0)<+\infty,
\tag{2.35}
$$

$$
\sup_{t\in]0,T'[}\text{ess}\int_\Omega\xi_n|u_n|^2dxdz\le C(E_0)<+\infty
\tag{2.36}
$$

et

$$
\int_0^{T'}\int_\Omega\xi_n|D_x(u_n)|^2dxdzdt=\int_0^{T'}\int_\Omega\xi_n\Big|\frac{\nabla_x u_n+[\nabla_x u_n]^t}{2}\Big|^2dxdzdt\le C(E_0)<\infty.
\tag{2.37}
$$

Et puis (2.37) implique à son tour

$$
\int_0^{T'}\int_\Omega\xi_n|\nabla_x u_n|^2dxdzdt\le C(E_0)<+\infty.
\tag{2.38}
$$

Grâce à $\dim(X_n)<\infty$ et (2.5), la densité est bornée et délimitée du coup par une constante positive, ce qui signifie qu'il existe une constante $c>0$ telle que :

$$
0<\frac{1}{c}\le\xi_n(t)\le c,
\tag{2.39}
$$

pour tout $t\in[0,T'[$, avec c dépendant de n.
En utilisant (2.39), les estimations (2.36) et (2.38) nous donnent respectivement :

$$
\sup_{t\in]0,T'[}\text{ess}\,\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}dt\le C(E_0,n)<+\infty
\tag{2.40}
$$

et

$$\int_0^{T'} \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leq C(E_0, n) < +\infty. \tag{2.41}$$

En exploitant l'équivalence des normes L^2 et L^∞ sur X_n, les estimations (2.35), (2.40) et (2.41), nous permettent d'obtenir :

$$\sup_{t\in]0,T'[} \mathrm{ess} \Big(\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u_n\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\Delta u_n\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) \leq C(E_0, n) < +\infty. \tag{2.42}$$

Par conséquent, nous pouvons étendre de T' à T en répétant plusieurs fois l'argument ci-dessus et obtenir $u_n \in C([0,T]; X_n)$. En d'autres termes, nous obtenons une solution globale (ξ_n, u_n, w_n) de (2.3) et (2.12).
Par l'égalité d'énergie (2.34), nous avons :

$$\sup_{t\in]0,T[} \mathrm{ess} \int_\Omega \xi_n |u_n|^2 dxdz \leq C(E_0). \tag{2.43}$$

Donc, en utilisant (2.43) nous concluons que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \xi_n |\overline{u}_n|^2 dxdz &= \int_\Omega \xi_n \Big| \int_0^h \frac{1}{h} u_n(\tau) d\tau \Big|^2 dxdz \\
&\leq \int_\Omega \xi_n \frac{1}{h^2} \Big(\int_0^h 1^2 d\tau \Big) \Big(\int_0^h |u_n|^2(\tau) d\tau \Big) dxdz \\
&\leq \int_\Omega \xi_n \frac{1}{h^2} \times h \Big(\int_0^h |u_n|^2(\tau) d\tau \Big) dxdz \\
&\leq \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega_x} \int_0^h \xi_n |u_n|^2(\tau) d\tau dxdz \\
&\leq \frac{1}{h} \int_0^h \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{ess} \Big(\int_\Omega \xi_n |u_n|^2(\tau) dx d\tau \Big) dz \\
&\leq \frac{1}{h} \int_0^h C(E_0) dz = \frac{1}{h} C(E_0) \int_0^h 1 dz \\
&\leq C(E_0)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \xi_n |\tilde{u}_n|^2 dxdz &= \int_\Omega \xi_n \Big| \int_0^z u_n(\tau) d\tau \Big|^2 dxdz \\
&\leq \int_\Omega \xi_n \Big| \int_0^h u_n(\tau) d\tau \Big|^2 dxdz \\
&\leq \int_\Omega \xi_n \Big(\int_0^h 1^2 d\tau \Big) \Big(\int_0^h |u_n|^2(\tau) d\tau \Big) dxdz \\
&\leq h \int_0^h \int_{\Omega_x} \xi_n \Big(\int_0^h |u_n|^2(\tau) d\tau \Big) dxdz \\
&\leq h \int_0^h \int_{\Omega_x} \int_0^h \xi_n |u_n|^2(\tau) d\tau dxdz \\
&\leq h \int_0^h \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{ess} \Big(\int_\Omega \xi_n |u_n|^2(\tau) dx d\tau \Big) dz \\
&\leq h \int_0^h C(E_0) dz = h C(E_0) \int_0^h 1 dz \\
&\leq h^2 C(E_0).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

De plus, l'utilisation de l'égalité d'énergie de base (2.34) nous donne également

$$\sup_{t\in]0,T[} \mathrm{ess} \int_\Omega \delta |\nabla_x \Delta_x^2 \xi_n|^2 dxdz \leq C(E_0),$$

ce qui avec (2.39) implique que $\xi(t,x)$ est une fonction régulière positive pour tout (t,x).
Alors comme dans [46] et [29] l'inégalité d'énergie nous permet de présenter le Lemme 2.2.

Lemme 2.2 *Soit $\xi_n(t,x)$ la fonction positive régulière obtenue ci-dessus. Alors, l'estimation uniforme*

$$(\kappa\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\xi_n}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}+(\kappa\varepsilon)^{\frac{1}{4}}\|\nabla_x\sqrt[4]{\xi_n}\|_{L^4(0,T;(L^4(\Omega))^2)}\le C, \tag{2.46}$$

est valable pour une certaine constante $C>0$ qui est indépendante de n.

Preuve du Lemme 2.2 : Nous procédons comme A. JÜNGEL dans [29] et A. F. VASSEUR et C. YU dans [46] en montrant d'abord que pour toute fonction positive régulière $\xi(x)$, les estimations

$$\int_\Omega \xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdz\ge\frac{1}{7}\int_\Omega|\nabla_x^2\sqrt{\xi}|^2dxdz \tag{2.47}$$

et

$$\int_\Omega \xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdz\ge\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla_x\sqrt[4]{\xi}|^4dxdz \tag{2.48}$$

sont valables. Pour cela, par un calcul direct, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sqrt{\xi}\nabla_x^2\ln\sqrt{\xi} &= \sqrt{\xi}\nabla_x(\nabla_x\ln\sqrt{\xi})=\sqrt{\xi}\nabla_x\Big(\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)=\sqrt{\xi}\partial_{x_i}\Big(\frac{\partial_{x_j}\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\\ &= \partial_{x_i}\partial_{x_j}\sqrt{\xi}-\frac{\partial_{x_i}\sqrt{\xi}\partial_{x_j}\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}=\nabla_x^2\sqrt{\xi}-\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|\sqrt{\xi}\nabla_x^2\ln\sqrt{\xi}|^2=|\nabla_x^2\sqrt{\xi}|^2+\Big|\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big|^2-2\nabla_x^2\sqrt{\xi}\cdot\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}. \tag{2.49}$$

En posant $A=\dfrac{\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}$, nous écrivons :

$$\begin{aligned}|A|^2 &= \frac{1}{\xi}\partial_{x_i}\sqrt{\xi}\partial_{x_k}\sqrt{\xi}\partial_{x_k}\sqrt{\xi}\partial_{x_j}\sqrt{\xi}=\frac{1}{\xi}|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2\partial_{x_i}\sqrt{\xi}\partial_{x_j}\sqrt{\xi}=\frac{1}{\xi}|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}\\ &= \Big|2\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}}{2\sqrt[4]{\xi}}\Big|^2\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}=|2\nabla_x\sqrt[4]{\xi}|^2A.\end{aligned}$$

Alors $|A|^4=|2\nabla_x\sqrt[4]{\xi}|^4|A|^2$, c'est-à-dire $|A|^2=|2\nabla_x\sqrt[4]{\xi}|^4$.
Ainsi, en intégrant (2.49) sur Ω, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\sqrt{\xi}\nabla_x^2\ln\sqrt{\xi}|^2dxdz &= \int_\Omega|\nabla_x^2\sqrt{\xi}|^2dxdz+\int_\Omega|2\nabla_x\sqrt[4]{\xi}|^4dxdz-2\int_\Omega\nabla_x^2\sqrt{\xi}\cdot\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}dxdz\\ &= A_1+A_2-A_3.\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties et le fait que $\nabla_x\ln\sqrt{\xi}=\dfrac{\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}$, nous écrivons A_3 comme suit :

$$\begin{aligned}A_3 &= 2\int_\Omega\nabla_x^2\sqrt{\xi}\cdot\Big(\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}\Big)dxdz=2\int_\Omega\nabla_x^2\sqrt{\xi}\cdot\Big(\nabla_x\ln\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}\Big)dxdz\\ &= -2\int_\Omega\nabla_x\sqrt{\xi}\cdot\nabla_x(\nabla_x\ln\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi})dxdz=-2\int_\Omega\partial_{x_j}\sqrt{\xi}\partial_{x_i}(\partial_{x_i}\ln\sqrt{\xi}\partial_{x_j}\sqrt{\xi})dxdz\\ &= -2\int_\Omega\partial_{x_j}\sqrt{\xi}\Big(\partial_{x_i}^2\ln\sqrt{\xi}\partial_{x_j}\sqrt{\xi}+\partial_{x_i}\ln\sqrt{\xi}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sqrt{\xi}\Big)dxdz\\ &= -2\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2\Delta_x\ln\sqrt{\xi}dxdz-2\int_\Omega\nabla_x^2\sqrt{\xi}\cdot\frac{\nabla_x\sqrt{\xi}\otimes\nabla_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}dxdz\\ &= -2\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2\Delta_x\ln\sqrt{\xi}dxdz-A_3,\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}2A_3 &= -2\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2\Delta_x\ln\sqrt{\xi}dxdz=-4\int_\Omega\frac{|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2}{\sqrt{\xi}}\sqrt{\xi}\Delta_x\ln\sqrt{\xi}dxdz\\ &= -4\int_\Omega|2\nabla_x\sqrt[4]{\xi}|^2\sqrt{\xi}\Delta_x\ln\sqrt{\xi}dxdz\le2\sqrt{3A_2A_4}.\end{aligned}$$

où $A_4 = \displaystyle\int_\Omega \xi|\nabla_x^2 \ln\sqrt{\xi}|^2 dxdz$, et donc en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$A_1 + A_2 = A_4 + A_3 \leq A_4 + \sqrt{3A_2A_4} \leq A_4 + \sqrt{12A_4}\sqrt{\frac{1}{4}A_2} \leq A_4 + 6A_4 + \frac{1}{8}A_2 \leq 7A_4 + \frac{1}{8}A_2,$$

et ainsi,

$$\frac{1}{7}A_1 + \frac{1}{8}A_2 \leq A_4.$$

Alors, les estimations (2.47) et (2.48) sont bien vérifiées.
Par ailleurs, l'inégalité d'énergie (2.34), nous permet d'obtenir :

$$E(\xi_n, u_n) \leq E_0(\xi_n, u_n) \Longrightarrow \sup_{t\in]0,T[}\text{ess} \int_\Omega \delta|\nabla_x\Delta_x^2\xi_n|^2 dxdz \leq C(E_0),$$

cela nous donne

$$\|\xi_n\|_{L^\infty(0,T;H^5(\Omega))} \leq C(E_0, \delta);$$

ceci, combiné avec (2.39)), nous donne que la densité $\xi(t,x)$ est une fonction régulière positive pour tout (t,x). Nous remarquons aussi avec (2.34) que

$$\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_0^T\int_\Omega \xi_n|\nabla_x^2\ln\xi_n|^2 dxdzdt \leq E_0 < +\infty.$$

Ainsi, par (2.47) et (2.48) nous bouclons la preuve du Lemme 2.2. ■

Nous donnons à la Proposition 2.2 un résumé des estimations que satisfait la solution approchée (ξ_n, u_n, w_n).

Proposition 2.2 *Supposons que (ξ_n, u_n, w_n) soit la solution de (2.3) et (2.12) sur $]0,T[\times\Omega$ construite ci-dessus. Alors elle satisfait l'inégalité d'énergie :*

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in]0,T[}\text{ess}\ E(\xi_n,u_n) + 4\varepsilon\int_0^T\int_\Omega |\nabla_x\sqrt{\xi_n}|^2 dxdzdt + r_0\int_0^T\int_\Omega |u_n|^2 dxdzdt\\
&+r\int_0^T\int_\Omega \xi_n|u_n|^3 dxdzdt + 2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega \xi_n|D_x(u_n)|^2 dxdzdt\\
&+\overline{\nu}_2\int_0^T\int_\Omega \xi_n|\partial_z u_n|^2 dxdzdt + \mu\int_0^T\int_\Omega |\Delta_x u_n|^2 dxdzdt\\
&+\frac{2}{5}\eta\varepsilon\int_0^T\int_\Omega |\nabla_x\xi_n^{-5}|^2 dxdzdt + \frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_0^T\int_\Omega \xi_n|\nabla_x^2\ln\xi_n|^2 dxdzdt\\
&+\delta\varepsilon\int_0^T\int_\Omega |\Delta_x^3\xi_n|^2 dxdzdt \leq E_0,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

où

$$E(\xi_n,u_n) = \int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi_n|u_n|^2 + (\xi_n\ln\xi_n - \xi_n + 1) + \frac{1}{11}\eta\xi_n^{-10} + \kappa|\nabla_x\sqrt{\xi_n}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi_n|^2\Big)dxdz.$$

En particulier, on a :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\xi_n}u_n \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \xi_n\ln\xi_n - \xi_n + 1 \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\\
&\eta\xi_n^{-10} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\ \sqrt{\overline{\nu}_1}\sqrt{\xi_n}D_x(u_n) \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}),\\
&\sqrt{\mu}\Delta u_n \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\kappa}\sqrt{\xi_n} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\ \sqrt{\delta}\xi_n \in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)),\\
&\sqrt{\varepsilon}\nabla_x\sqrt{\xi_n} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\overline{\nu}_2}\sqrt{\xi_n}\partial_z u_n \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\\
&\sqrt{\varepsilon\eta}\nabla\xi_n^{-5} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\delta\varepsilon}\xi_n \in L^2(0,T;H^6(\Omega)),\\
&\sqrt{r_0}u_n \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \xi_n^{\frac{1}{3}}u_n \in L^3(0,T;(L^3(\Omega))^2),\\
&\sqrt{\kappa\varepsilon}\sqrt{\xi_n} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ \sqrt[4]{\kappa\varepsilon}\nabla_x\xi_n^{\frac{1}{4}} \in L^4(0,T;(L^4(\Omega))^2),\\
&\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_n}\tilde{u}_n \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

2.3 Passage aux limites quand $n \to \infty$

Nous fixons $\varepsilon,\ \eta,\ \kappa,\ \mu,\ \delta,\ r_0 > 0$ et prenons d'abord les limites quand $n \to \infty$. Ici, nous avons besoin des régularités de la solution, du Lemme 1.3 et des résultats de compacité suivants.

2.3.1 Convergence de ξ_n

Lemme 2.3 *Pour toutes les constantes positives fixées $\varepsilon,\ \eta,\ \kappa,\ \mu,\ \delta$ et r_0, les estimations suivantes sont valables :*

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t\sqrt{\xi_n}\|_{L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega))} + \|\sqrt{\xi_n}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le K,\\
&\|\xi_n\|_{L^\infty(0,T;H^5(\Omega))} + \|\partial_t\xi_n\|_{L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega))} \le K,\\
&\|\xi_n^{-10}\|_{L^{\frac{5}{3}}(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} \le K,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

où K est indépendante de n, dépend de $\varepsilon,\ \eta,\ \delta,\ r_0$, des données initiales et de T.
De plus, quitte à extraire une sous-suite, on a :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\xi_n} \to \sqrt{\xi} \textit{ fortement dans } \ L^2([0,T];H^1(\Omega)) \textit{ et } \sqrt{\xi_n} \to \sqrt{\xi} \textit{ p.p.},\\
&\xi_n \to \xi \textit{ fortement dans } C([0,T];H^5(\Omega)) \textit{ et } \xi_n \to \xi \textit{ p.p.},\\
&\xi_n^{-10} \to \xi^{-10} \textit{ fortement dans } L^1(0,T;L^1(\Omega)) \textit{ et } \xi_n^{-10} \to \xi^{-10} \textit{ p.p.}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Preuve du Lemme 2.3 : Puisque $\sqrt{\xi_n} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ et $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, nous en déduisons que $\sqrt{\xi_n} \in L^\infty(0,T;L^6(\Omega))$. De plus, en (2.51) nous avons $\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)$.
Alors, grâce à l'inégalité de Hölder nous obtenons :

$$\xi_n\overline{u}_n = \sqrt{\xi_n}\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n \in L^\infty(0,T;(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^2).$$

Ainsi, par l'approximation de l'équation de continuité (2.3), nous obtenons :

$$\partial_t\xi_n = \varepsilon\Delta_x\xi_n - \mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n) \in L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)). \tag{2.54}$$

En utilisant (2.54), $\xi_n \in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^6(\Omega))$ et le Lemme 1.3, nous déduisons que

$$\xi_n \in C([0,T];H^5(\Omega)).$$

Donc quitte à extraire une sous-suite, nous avons :

$$\xi_n \to \xi \text{ fortement dans } C([0,T];H^5(\Omega)) \text{ et } \xi_n \to \xi \ \textit{p.p.}.$$

Maintenant, montrons que ξ_n^{-10} est borné dans $L^{\frac{5}{3}}(0,T;L^{\frac{5}{3}}(\Omega))$. Grâce au fait que $\nabla\xi_n^{-5}$ est borné dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$, l'inégalité de Poincaré, l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg et l'inégalité de Hölder (voir la preuve du Lemme 3.3 pour les détails), nous obtenons ξ_n^{-10} est borné dans $L^1(0,T;L^3(\Omega))$. Nous rappelons que $\xi_n^{-10} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$.
Ensuite, nous appliquons l'inégalité d'interpolation 1.13 du Théorème 1.29 pour avoir

$$\|\xi_n^{-10}\|_{L^{\frac{5}{3}}(0,T;L^{\frac{5}{3}}(\Omega))} \le \|\xi_n^{-10}\|^{\frac{2}{5}}_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\|\xi_n^{-10}\|^{\frac{3}{5}}_{L^1(0,T;L^3(\Omega))} \le K. \tag{2.55}$$

Pendant ce temps, en utilisant l'inégalité de Sobolev suivante (voir [3] et [49]) :

$$\|\xi_n^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(1+\|\xi_n^{-1}\|_{L^3(\Omega)})^3(1+\|\xi_n\|^2_{H^{k+2}(\Omega)}),$$

pour $k \ge \dfrac{3}{2}$, et les estimations de la densité dans (2.51), nous obtenons :

$$\|\xi_n^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\eta,\delta),\ \textit{p.p. dans }]0,T[\times\Omega. \tag{2.56}$$

Ainsi, nous avons ξ_n^{-10} converge presque partout vers ξ^{-10}. Grâce à (2.55) et le Lemme 1.1, nous avons :

$$\xi_n^{-10} \to \xi^{-10} \text{ fortement dans } L^1(0,T;L^1(\Omega)).$$

En utilisant à nouveau l'équation de la masse (2.3), nous avons $\partial_t\sqrt{\xi_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial_t\xi_n}{\sqrt{\xi_n}}$ qui combinée avec (2.56) et $\partial_t\xi_n \in L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega))$ (voir (2.54)), nous donne :

$$\partial_t\sqrt{\xi_n} \in L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)).$$

De plus en (2.51) on a $\sqrt{\xi_n} \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Ainsi, puisque $H^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)$, en utilisant le Lemme d'Aubin-Simon (Lemme 1.3), nous obtenons :

$$\sqrt{\xi_n} \to \sqrt{\xi} \text{ fortement dans } L^2([0,T];H^1(\Omega)) \text{ et } \sqrt{\xi_n} \to \sqrt{\xi} \textit{ p.p.}.$$

Alors la démonstration de ce lemme est complétée. ■

2.3.2 Convergence du moment $\xi_n u_n$.

Lemme 2.4 *Quitte à extraire une sous-suite, on a :*

$$\xi_n u_n \to \xi u \textit{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2) \textit{ et } \xi_n u_n \to \xi u \textit{ p.p.}.$$

Preuve du Lemme 2.4 : D'après les estimations d'énergie, nous savons que u_n est borné dans l'espace de Hilbert $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$. Donc, quitte à extraire une sous-suite, nous avons :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2).$$

En rappelant que $\xi_n \to \xi$ fortement dans $C([0,T];H^5(\Omega))$, on a :

$$\xi_n u_n \to \xi u \text{ fortement dans } L^1(0,T;(L^1(\Omega))^2).$$

De plus, puisque

$$\xi_n \in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)),\ u_n \in L^2(0,T;(H^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_n}\partial_z u_n \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),$$

on a :

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\xi_n u_n)\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} = \|\nabla_x(\xi_n u_n)\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} + \|\partial_z(\xi_n w_n)\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \\
&= \|\nabla_x\xi_n \otimes u_n + \xi_n\nabla_x u_n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} + \|\partial_z(\xi_n w_n)\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \\
&\le \|\nabla_x\xi_n \otimes u_n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} + \|\xi_n\nabla_x u_n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} + \|\xi_n\partial_z u_n\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} < +\infty,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\nabla(\xi_n u_n) \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}).$$

Ainsi, comme $\xi_n u_n \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$ on obtient $\xi_n u_n \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^2)$.
Ensuite, nous pouvons prouver

$$\partial_t(\xi_n u_n) \in L^2(0,T;(H^{-s}(\Omega))^2) \text{ pour un certain } s > 0.$$

En fait,

$$\begin{aligned}
\partial_t(\xi_n u_n) = &-\mathrm{div}_x(\xi_n u_n \otimes u_n) - \partial_z(\xi_n u_n w_n) - \nabla_x\xi_n - r_0 u_n - r\xi|u_n|u_n - \mu\Delta^2 u_n \\
&-\varepsilon\nabla_x\xi_n \cdot \nabla_x u_n + 2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi_n D_x(u_n)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi_n\partial_z u_n) \\
&+\eta\nabla_x\xi_n^{-10} + \kappa\xi_n\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big) + \delta\xi_n\nabla_x\Delta_x^5\xi_n,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

où

$$\begin{aligned}
\partial_z(\xi_n u_n w_n) &= \partial_z\Big(\xi_n u_n\Big(-\frac{\mathrm{div}_x(\xi_n\tilde{u}_n)}{\xi_n} + z\frac{\mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n)}{\xi_n}\Big)\Big) \\
&= \partial_z\Big(-u_n\mathrm{div}_x(\xi_n\tilde{u}_n) + zu_n\mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n)\Big) \\
&= \partial_z\big[-\mathrm{div}_x(\xi_n\tilde{u}_n\otimes u_n) + \xi_n\tilde{u}_n\cdot\nabla_x u_n + z\mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n\cdot u_n) - z\xi_n\overline{u}_n\cdot\nabla_x u_n\big].
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Sur la base des estimations d'énergie (2.51), on vérifie que

$$\partial_t(\xi_n u_n) \in L^2(0,T;(H^{-5}(\Omega))^2).$$

Ensuite, nous pouvons montrer que

$$\xi_n u_n \longrightarrow g \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$$

pour une certaine fonction $g \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$.
De plus, puisque $\xi_n u_n \to \xi u$ fortement dans $L^1(0,T;(L^1(\Omega))^2)$, on a :

$$\xi_n u_n \longrightarrow \xi u \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2).$$

Ainsi, la preuve de ce lemme est complétée. ■

2.3.3 Convergence de $\sqrt{\xi_n}u_n$, $\sqrt{\xi_n}\tilde{u}_n$, et $\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n$.

Lemme 2.5 *Quitte à extraire une sous-suite, on a, quand $n \to +\infty$:*

$$\sqrt{\xi_n}u_n \to \sqrt{\xi}u \textit{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2) \textit{ et } \sqrt{\xi_n}u_n \to \sqrt{\xi}u \textit{ p.p.},$$

$$\sqrt{\xi_n}\tilde{u}_n \to \sqrt{\xi}\tilde{u} \textit{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2) \textit{ et } \sqrt{\xi_n}\tilde{u}_n \to \sqrt{\xi}\tilde{u} \textit{ p.p.},$$

$$\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n \to \sqrt{\xi}\overline{u} \textit{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2) \textit{ et } \sqrt{\xi_n}\overline{u}_n \to \sqrt{\xi}\overline{u} \textit{ p.p.}.$$

Preuve du Lemme 2.5 : Le Lemme de Fatou et (2.50) donnent :

$$\int_0^T\int_\Omega \xi|u|^3 dxdzdt \le \int_0^T\int_\Omega \liminf \xi_n|u_n|^3 dxdzdt \le \liminf \int_0^T\int_\Omega \xi_n|u_n|^3 dxdzdt \le \frac{E_0}{r},$$

et donc $\xi|u|^3$ est borné dans $L^1(0,T;L^1(\Omega))$.
D'après le Lemme 2.4, quitte à extraire une sous-suite, on a $\sqrt{\xi_n} \to \sqrt{\xi}$ et $\xi_n u_n \to \xi u$ p.p..
Ensuite, en écrivant $\sqrt{\xi_n}u_n = \dfrac{1}{\xi_n}\sqrt{\xi_n}\xi_n u_n$ pour $\xi_n \neq 0$ nous montrons à l'aide de (2.56) que :

$$\sqrt{\xi_n}u_n \to \sqrt{\xi}u, \text{ p.p. dans } \{(t,x,z):\ \xi_n(t,x)\neq 0\}.$$

Et pour presque tout (t,x,z) dans $\{(t,x,z):\ \xi_n(t,x)=0\}$, nous avons :

$$\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M} \le M\sqrt{\xi_n} = 0 = \sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M}.$$

En fait, $\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M}$ converge vers $\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M}$ presque partout pour tout (t,x).
Pendant ce temps, $\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M}$ est uniformément borné dans $L^\infty(0,T;(L^6(\Omega))^2)$.
En utilisant le Lemme 2.3, nous obtenons :

$$\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M} \to \sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M} \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2). \tag{2.59}$$

Pour tout $M>0$, puisque

$$\sqrt{\xi_n}u_n = \sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u|\le M} + \sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u|>M} \text{ et } \sqrt{\xi}u = \sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M} + \sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|>M},$$

nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}u_n-\sqrt{\xi}u|^2 dxdzdt\\
&=\int_0^T\int_\Omega |(\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M}-\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M})+(\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|>M}-\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|>M})\big|^2 dxdzdt\\
&\le 2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M}-\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M}|^2 dxdzdt\\
&\quad +2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|>M}-\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|>M}|^2 dxdzdt\\
&\le 2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M}-\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M}|^2 dxdzdt\\
&\quad +2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\ge M}|^2 dxdzdt+2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\ge M}|^2 dxdzdt\\
&\le 2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M}-\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M}|^2 dxdzdt\\
&\quad +2\int_0^T\int_\Omega \xi_n|u_n|^2\frac{|u_n|}{M}dxdzdt+2\int_0^T\int_\Omega \xi|u|^2\frac{|u|}{M}dxdzdt\\
&\le 2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}u_n\mathbb{1}_{|u_n|\le M}-\sqrt{\xi}u\mathbb{1}_{|u|\le M}|^2 dxdzdt\\
&\quad +\frac{2}{M}\int_0^T\int_\Omega \xi_n|u_n|^3 dxdzdt+\frac{2}{M}\int_0^T\int_\Omega \xi|u|^3 dxdzdt,
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

où on a utilisé l'inégalité $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2\le|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2,$ pour $a_i,b_i\ge 0$ (voir (A.24)).
Notez que $\xi|u|^3$ et $\xi_n|u_n|^3$ sont bornés dans $L^1(0,T;(L^1(\Omega))^2)$. Grâce à (2.58), en laissant $M\to\infty$, nous avons :

$$\sqrt{\xi_n}u_n\to\sqrt{\xi}u \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2).$$

En rappelant que $\overline{u}=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h u(\tau)d\tau$, comme à la démonstration ci-dessus, nous avons :

$$\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n\mathbb{1}_{|\overline{u}_n|\le M}\longrightarrow\sqrt{\xi}\overline{u}\mathbb{1}_{|\overline{u}|\le M} \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2). \tag{2.61}$$

Alors, en s'inspirant de (2.60), nous écrivons :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n-\sqrt{\xi}\overline{u}|^2 dxdzdt\\
&\le 2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n\mathbb{1}_{|\overline{u}|\le M}-\sqrt{\xi}\overline{u}\mathbb{1}_{|\overline{u}|\le M}|^2 dxdzdt\\
&\quad +2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n\mathbb{1}_{|\overline{u}|\ge M}|^2 dxdzdt+2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n\mathbb{1}_{|\overline{u}|\ge M}|^2 dxdzdt\\
&\le 2\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n\mathbb{1}_{|\overline{u}|\le M}-\sqrt{\xi}\overline{u}\mathbb{1}_{|\overline{u}|\le M}|^2 dxdzdt\\
&\quad +\frac{2}{M}\int_0^T\int_\Omega \xi_n|\overline{u}_n|^3 dxdzdt+\frac{2}{M}\int_0^T\int_\Omega \xi|\overline{u}|^3 dxdzdt.
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Grâce au Lemme de Fatou et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \xi|\overline{u}|^3 dxdzdt\le\int_0^T\int_\Omega \text{lim inf } \xi_n|\overline{u}_n|^3 dxdzdt\\
&\le \text{lim inf }\int_0^T\int_\Omega \xi_n|\overline{u}_n|^3 dxdzdt\le \text{lim inf }\int_0^T\int_\Omega \xi_n\Big|\frac{1}{h}\int_0^h u_n(\tau)d\tau\Big|^3 dxdzdt\\
&\le \text{lim inf }\frac{1}{h^3}\int_0^T\int_\Omega \xi_n\Big(\Big(\int_0^h |u(\tau)|^3 d\tau\Big)^{\frac{1}{3}}\Big(\int_0^h |1|^{\frac{3}{2}}d\tau\Big)^{\frac{2}{3}}\Big)^3 dxdzdt\\
&\le \text{lim inf }\frac{1}{h}\int_0^T\int_\Omega \xi_n\int_0^h |u(\tau)|^3 d\tau dxdzdt=\text{lim inf}\,\frac{1}{h}\int_0^h\int_0^T\int_\Omega \xi_n|u_n|^3 dxdzdtdz\\
&\le \text{lim inf}\,\frac{1}{h}\int_0^h C(E_0)dz=\text{lim inf }\frac{C(E_0)}{h}\int_0^h dz\\
&\le C(E_0).
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Alors (2.63) et (2.61) combinées à (2.62) nous donnent :

$$\|\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n - \sqrt{\xi}\overline{u}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \leq \frac{C}{\sqrt{M}}$$

pour $C > 0$ fixé. On prend $M \to \infty$ pour obtenir :

$$\sqrt{\xi_n}\overline{u}_n \to \sqrt{\xi}\overline{u} \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2).$$

De même, pour $\tilde{u} = \displaystyle\int_0^z u(\tau)d\tau$, nous pouvons obtenir :

$$\sqrt{\xi_n}\tilde{u}_n \to \sqrt{\xi}\tilde{u} \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2).$$

Ainsi, la démonstration de ce lemme est complétée. ■

2.3.4 Convergence de $\partial_z(\xi_n u_n w_n)$.

Soit $\varphi \in (C^\infty([0,T];\Omega))^2$ une fonction régulière. Grâce à (2.57), nous écrivons :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \partial_z(\xi_n u_n w_n)\cdot\varphi dxdzdt = -\int_0^T\int_\Omega \xi_n u_n w_n\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega u_n\big(-\mathrm{div}_x(\xi_n\tilde{u}_n) + z\mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n)\big)\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega \big[-\mathrm{div}_x(\xi_n\tilde{u}_n\otimes u_n) + \xi_n\tilde{u}_n\cdot\nabla_x u_n + z\mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n\otimes u_n) - z\xi_n\overline{u}_n\cdot\nabla_x u_n\big]\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n\tilde{u}_n\otimes u_n)\cdot\partial_z\varphi dxdzdt - \int_0^T\int_\Omega z\mathrm{div}_x(\xi_n\overline{u}_n\otimes u_n)\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&\quad - \int_0^T\int_\Omega \xi_n\tilde{u}_n\cdot\nabla_x u_n\cdot\partial_z\varphi dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega z\xi_n\overline{u}_n\cdot\nabla_x u_n\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega \xi_n\tilde{u}_n\otimes u_n : \partial_z\nabla_x\varphi dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega \xi_n\overline{u}_n\otimes u_n : z\partial_z\nabla_x\varphi dxdzdt\\
&\quad - \int_0^T\int_\Omega \xi_n\tilde{u}_n\cdot\nabla_x u_n\cdot\partial_z\varphi dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega \xi_n\overline{u}_n\cdot\nabla_x u_n\cdot z\partial_z\varphi dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi_n}\tilde{u}_n\otimes\sqrt{\xi_n}u_n : \partial_z\nabla_x\varphi dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi_n}\overline{u}_n\otimes\sqrt{\xi_n}u_n : z\partial_z\nabla_x\varphi dxdzdt\\
&\quad - \int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi_n}\tilde{u}_n\cdot\sqrt{\xi_n}\nabla_x u_n\cdot\partial_z\varphi dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi_n}\overline{u}_n\cdot\sqrt{\xi_n}\nabla_x u_n\cdot z\partial_z\varphi dxdzdt.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi_n}\nabla_x u_{i_n}\cdot\varphi dxdzdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega \big[\nabla_x(\sqrt{\xi_n}u_{i_n}) - \nabla_x\sqrt{\xi_n}u_{i_n}\big]\cdot\varphi dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega (\sqrt{\xi_n}u_{i_n})\cdot\mathrm{div}\varphi dxdzdt - \int_0^T\int_\Omega \nabla_x\sqrt{\xi_n}u_{i_n}\cdot\varphi dxdzdt\\
&\longrightarrow -\int_0^T\int_\Omega (\sqrt{\xi}u_i)\cdot\mathrm{div}\varphi dxdzdt - \int_0^T\int_\Omega \nabla_x\sqrt{\xi}u_i\cdot\varphi dxdzdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi}\nabla_x u_i\cdot\varphi dxdzdt
\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$ pour $i = 1;2$, nous déduisons que :

$$\sqrt{\xi_n}\nabla_x u_n \rightharpoonup \sqrt{\xi}\nabla_x u \text{ faiblement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}).$$

Ainsi, en combinant avec (2.64) et le Lemme 2.5, nous avons :

$$\int_0^T\int_\Omega \partial_z(\xi_n u_n w_n)\cdot\varphi dxdzdt \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega \partial_z(\xi u w)\cdot\varphi dxdzdt,$$

quand $n \to \infty$, où

$$w(z) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi\tilde{u}(z))}{\xi} + z\frac{\mathrm{div}_x(\xi\overline{u})}{\xi}.$$

2.3.5 Convergence des termes de diffusion non linéaires

Par calcul direct, nous écrivons :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}_x(\xi_n D_x(u_n)) \cdot \varphi dx dz dt = -\int_0^T \int_\Omega (\xi_n D_x(u_n)) : \nabla_x \varphi dx dz dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \xi_n \frac{\nabla_x u_n + [\nabla_x u_n]^t}{2} : \nabla_x \varphi dx dz dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\xi_n \nabla_x u_n) : \nabla_x \varphi dx dz dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\xi_n [\nabla_x u_n]^t) : \nabla_x \varphi dx dz dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\xi_n \nabla_x u_n) : \nabla_x \varphi dx dz dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega [\nabla_x \varphi]^t : (\xi_n \nabla_x u_n) dx dz dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\nabla_x(\xi_n u_n) - \nabla_x \xi_n \otimes u_n) : \nabla_x \varphi dx dz dt \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega [\nabla_x \varphi]^t : (\nabla_x(\xi_n u_n) - \nabla_x \xi_n \otimes u_n) dx dz dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \nabla_x(\xi_n u_n) : \nabla_x \varphi dx dz dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\nabla_x \xi_n \otimes u_n) : \nabla_x \varphi dx dz dt \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega [\nabla_x \varphi]^t : \nabla_x(\xi_n u_n) dx dz dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega [\nabla_x \varphi]^t : (u_n \otimes \nabla_x \xi_n) dx dz dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\xi_n u_n) \cdot \Delta_x \varphi dx dz dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \nabla_x \xi_n \cdot u_n \cdot \nabla_x \varphi dx dz dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}_x([\nabla_x \varphi]^t) \cdot (\xi_n u_n) dx dz dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega [\nabla_x \varphi]^t \cdot u_n \cdot \nabla_x \xi_n dx dz dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\xi_n u_n) \cdot \Delta_x \varphi dx dz dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_n} \cdot \sqrt{\xi_n} u_n dx dz dt \\
&+\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\xi_n u_n) \cdot \operatorname{div}_x([\nabla_x \varphi]^t) dx dz dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega 2[\nabla_x \varphi]^t \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_n} \cdot \sqrt{\xi_n} u_n dx dz dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Big(\xi_n u_n \cdot \Delta_x \varphi + 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_n} \cdot \sqrt{\xi_n} u_n\Big) dx dz dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Big(\xi_n u_n \cdot \operatorname{div}_x([\nabla_x \varphi]^t) + 2[\nabla_x \varphi]^t \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_n} \cdot \sqrt{\xi_n} u_n\Big) dx dz dt.
\end{aligned} \tag{2.65}
$$

Puisque

$$
\begin{gathered}
\sqrt{\xi_n} \to \sqrt{\xi} \text{ fortement dans } L^2([0,T]; H^1(\Omega)), \\
\xi_n u_n \to \xi u \text{ fortement dans } L^2(0,T; (L^2(\Omega))^2), \\
\sqrt{\xi_n} u_n \to \sqrt{\xi} u \text{ fortement dans } L^2(0,T; (L^2(\Omega))^2),
\end{gathered}
$$

nous déduisons que :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Big(\xi_n u_n \cdot \Delta_x \varphi + 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_n} \cdot \xi_n u_n\Big) dx dz dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Big(\xi_n u_n \cdot \operatorname{div}_x([\nabla_x \varphi]^t) + 2[\nabla_x \varphi]^t \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_n} \cdot \xi_n u_n\Big) dx dz dt \\
\longrightarrow \quad &\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Big(\xi u \cdot \Delta_x \varphi + 2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \sqrt{\xi} \cdot \xi u\Big) dx dz dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Big(\xi u \cdot \operatorname{div}_x([\nabla_x \varphi]^t) + 2[\nabla_x \varphi]^t \cdot \nabla_x \sqrt{\xi} \cdot \xi u\Big) dx dz dt,
\end{aligned} \tag{2.66}
$$

quand $n \to \infty$. D'où

$$
\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}_x(\xi_n D_x(u_n)) \cdot \varphi dx dz dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}_x(\xi D_x(u)) \cdot \varphi dx dz dt, \text{ quand } n \to \infty.
$$

L'intégration par parties nous fournit :

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \xi_n\nabla_x\Delta_x^5\xi_n\cdot\varphi dxdzdt &= -\int_0^T\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_n\varphi)\Delta_x^5\xi_n dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega (\xi_n\mathrm{div}_x\varphi+\varphi\cdot\nabla_x\xi_n)\Delta_x^5\xi_n dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega \Delta_x(\xi_n\mathrm{div}_x\varphi+\varphi\cdot\nabla_x\xi_n)\Delta_x^4\xi_n dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega \Delta_x^2(\xi_n\mathrm{div}_x\varphi+\varphi\cdot\nabla_x\xi_n)\Delta_x^3\xi_n dxdzdt.
\end{aligned}\tag{2.67}$$

La convergence du terme $-\int_0^T\int_\Omega \varphi\cdot\nabla_x\Delta_x^2\xi_n\Delta_x^3\xi_n dxdzdt$ est difficile à trouver. Grâce au fait que $\xi_n\to\xi$ fortement dans $C([0,T];H^5(\Omega))$ et $\xi_n\rightharpoonup\xi$ faiblement dans $L^2(0,T;H^6(\Omega))$, nous avons :

$$-\int_0^T\int_\Omega \varphi\cdot\nabla_x\Delta_x^2\xi_n\Delta_x^3\xi_n dxdzdt\longrightarrow-\int_0^T\int_\Omega \varphi\cdot\nabla_x\Delta_x^2\xi\Delta_x^3\xi dxdzdt,\ \text{ quand } n\to\infty.$$

De même, en appliquant les arguments ci-dessus, nous pouvons traiter les autres termes de

$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta_x^2(\xi_n\mathrm{div}_x\varphi+\varphi\cdot\nabla_x\xi_n)\Delta_x^3\xi_n\varphi dxdzdt.$$

Nous avons donc :

$$\int_0^T\int_\Omega \xi\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot\varphi dxdzdt\to\int_0^T\int_\Omega \xi\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot\varphi dxdzdt,\ \text{ quand } n\to\infty.$$

Pour traiter le terme quantique, nous utilisons les mêmes arguments pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \xi_n\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\Big)\cdot\varphi dxdzdt=-\int_0^T\int_\Omega \frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}\mathrm{div}_x(\xi_n\varphi)dxdzdt\\
&=-\int_0^T\int_\Omega \frac{\Delta_x\sqrt{\xi_n}}{\sqrt{\xi_n}}(\nabla_x\xi_n\cdot\varphi+\xi_n\mathrm{div}_x\varphi)dxdzdt\\
&=-2\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\nabla_x\sqrt{\xi_n}\cdot\varphi dxdzdt-\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi_n}\sqrt{\xi_n}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt\\
&\to-2\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi}\nabla_x\sqrt{\xi}\cdot\varphi dxdzdt-\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi}\sqrt{\xi}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt\\
&=\int_0^T\int_\Omega \xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot\varphi dxdzdt,\qquad\text{quand } n\to\infty.
\end{aligned}$$

Du fait de la compacité ci-dessus, en prenant les limites quand $n\to\infty$ dans le système approximatif (2.3) et (2.12), on peut montrer que (ξ,u) satisfait :

$$\partial_t\xi+\mathrm{div}_x(\xi\overline{u})=\varepsilon\Delta_x\xi,\ sur\ ]0,T[\times\Omega,$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \xi u(T)\cdot\varphi dxdz-\int_\Omega m_0\cdot\varphi dxdz+\mu\int_0^T\int_\Omega \Delta u\cdot\Delta\varphi dxdzdt\\
&-\int_0^T\int_\Omega (\xi uw)\cdot\partial_z\varphi dxdzdt-\int_0^T\int_\Omega (\xi u\otimes u)\cdot\nabla_x\varphi dxdzdt\\
&+2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega \xi D_x(u)\cdot\nabla_x\varphi dxdzdt-\int_0^T\int_\Omega \xi\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt\\
&+\overline{\nu}_2\int_0^T\int_\Omega \xi\partial_z u\cdot\partial_z\varphi dxdzdt+\eta\int_0^T\int_\Omega \xi^{-10}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt\\
&+\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot\varphi dxdzdt+r_0\int_0^T\int_\Omega u\cdot\varphi dxdzdt\\
&+r\int_0^T\int_\Omega \xi|u|u\cdot\varphi dxdzdt-\delta\int_0^T\int_\Omega \xi\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot\varphi dxdzdt\\
&=-2\kappa\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi}\nabla_x\sqrt{\xi}\cdot\varphi dxdzdt-\kappa\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\sqrt{\xi}\sqrt{\xi}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt
\end{aligned}\tag{2.68}$$

pour toute fonction test φ donnée, où

$$w(z) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi \tilde{u}(z))}{\xi} + z\frac{\mathrm{div}_x(\xi \overline{u})}{\xi}.$$

En utilisant la semi-continuité inférieure et la convexité, nous prenons les limites de l'estimation d'énergie (2.50), et obtenons l'inégalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in]0,T[} \mathrm{ess}\; E(\xi,u) + 4\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |\nabla_x \sqrt{\xi}|^2 dxdzdt + r_0 \int_0^T \int_\Omega |u|^2 dxdzdt \\
&+r \int_0^T \int_\Omega \xi |u|^3 dxdzdt + \int_0^T \int_\Omega 2\overline{\nu}_1 \xi |D_x(u)|^2 dxdzdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \overline{\nu}_2 \xi |\partial_z u|^2 dxdzdt + \mu \int_0^T \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdzdt \\
&+\frac{2}{5}\eta\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |\nabla_x \xi^{-5}|^2 dxdzdt + \frac{\kappa\varepsilon}{2} \int_0^T \int_\Omega \xi |\nabla_x^2 \ln \xi|^2 dxdzdt \\
&+\delta\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |\Delta_x^3 \xi|^2 dxdzdt \leq E_0,
\end{aligned} \tag{2.69}$$

où

$$E(\xi, u_) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\xi|u|^2 + (\xi \ln \xi - \xi + 1) + \frac{1}{11}\eta\xi^{-10} + \kappa|\nabla_x \sqrt{\xi}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x \Delta_x^2 \xi|^2\Big) dxdz.$$

Ainsi, nous obtenons l'existence de solutions faibles au niveau du système approximatif.

Proposition 2.3 *Pour tout $T > 0$, le système*

$$\begin{cases}
\partial_t \xi + \mathrm{div}_x(\xi \overline{u}) = \varepsilon \Delta_x \xi, \\
\partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi u w) + \nabla_x \xi + r_0 u + r\xi|u|u + \mu\Delta^2 u + \varepsilon \nabla_x \xi \cdot \nabla_x u \\
= 2\overline{\nu}_1 \mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2 \partial_z(\xi \partial_z u) + \eta \nabla_x \xi^{-10} + \kappa \xi \nabla_x \Big(\frac{\Delta_x \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big) + \delta \xi \nabla_x \Delta_x^5 \xi, \\
\partial_z \xi = 0
\end{cases} \tag{2.70}$$

admet une solution faible (ξ, u, w) avec des données initiales appropriées.
En particulier, la solution faible satisfait l'inégalité d'énergie (2.69).

CHAPITRE 3

LA BD-ENTROPIE ET PASSAGE AUX LIMITES

Introduction

Dans ce chapitre, nous obtenons l'estimation de l'entropie mathématique appelée BD-entropie (ou estimation de Bresch-Desjardins ou inégalité d'énergie modifiée) pour le système approximatif de la Proposition 2.3, introduite pour la première fois par Didier Bresch et Benoît Desjardins dans [2]. Puis, en utilisant l'inégalité d'énergie (2.69), la BD-entropie (3.5), des estimations à priori supplémentaires et des arguments de compacité nous passons aux limites pas à pas suivant nos paramètres artificiels dans le but de récupérer le système intermédiaire (1.16) tout en gardant l'existence des solutions faibles à chaque étape. Nous terminerons par la preuve du Théorème 1.35.

3.1 La BD-entropie

Par (2.56) et (2.51), nous avons :

$$\xi(t,x) \geq C(\delta,\eta) > 0, \quad \xi \in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^6(\Omega)). \tag{3.1}$$

Grâce à (3.1), nous pouvons prendre $\dfrac{\nabla\xi}{\xi}$ comme fonction test pour dériver la BD-entropie à partir de l'équation du moment. Nous suivons la même démarche que T. Ngom dans [34].

En prenant le gradient de l'équation de conservation de la masse $(2.70)_1$ par rapport à x, on écrit :

$$\partial_t \nabla_x \xi + \nabla_x \mathrm{div}_x(\xi\overline{u}) = \varepsilon \nabla_x \Delta_x \xi.$$

Or d'après (1.28) et le fait que $\partial_z \xi = 0$, nous avons $\mathrm{div}_x(\xi\overline{u}) = \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w)$, alors :

$$\partial_t \nabla_x \xi + \nabla_x \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\nabla_x(\xi w)) = \varepsilon \nabla_x \Delta_x \xi.$$

Puisque

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathrm{div}_x(\xi u) &= \mathrm{div}_x\big([\nabla_x(\xi u)]^t\big) = \mathrm{div}_x\big([\nabla_x\xi \otimes u + \xi\nabla_x u]^t\big) = \mathrm{div}_x\big([\nabla_x\xi \otimes u]^t + [\xi\nabla_x u]^t\big)\\ &= \mathrm{div}_x\big(u \otimes \nabla_x\xi + \xi[\nabla_x u]^t\big) = \mathrm{div}_x\big(u\otimes\nabla_x\xi\big) + \mathrm{div}_x\big(\xi[\nabla_x u]^t\big)\end{aligned}$$

alors

$$\partial_t \nabla_x \xi + \mathrm{div}_x(u \otimes \nabla_x \xi) + \mathrm{div}_x(\xi[\nabla_x u]^t) + \partial_z(\nabla_x(\xi w)) = \varepsilon \nabla_x \Delta_x \xi. \tag{3.2}$$

En multipliant l'équation (3.2) par $2\overline{\nu}_1$ et en écrivant les termes $\nabla_x\xi$ sous la forme $\xi\nabla_x \ln\xi$, on aboutit à :

$$\begin{aligned}&\partial_t(2\overline{\nu}_1\xi\nabla_x\ln\xi) + \mathrm{div}_x\big((\xi u)\otimes(2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)\big) + \mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi[\nabla_x u]^t)\\ &\quad+\partial_z(2\overline{\nu}_1\nabla_x(\xi w)) = 2\overline{\nu}_1\varepsilon\nabla_x\Delta_x\xi.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ensuite, on additionne l'équation (3.3) avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement $(2.70)_2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\xi(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))+\mathrm{div}_x((\xi u)\otimes(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))+\partial_z(2\overline{\nu}_1\nabla_x(\xi w))+\partial_z(\xi uw)\\
&+\nabla_x\xi+r_0u+r\xi|u|u+\mu\Delta^2u=\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))+\overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u)+\eta\nabla_x\xi^{-10}\\
&-\varepsilon\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u+2\overline{\nu}_1\varepsilon\nabla_x\Delta_x\xi+\kappa\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)+\delta\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi,
\end{aligned}\tag{3.4}$$

où $A_x(u)=\dfrac{\nabla_x u-[\nabla_x u]^t}{2}=\nabla_x u-D_x(u)=D_x(u)-[\nabla_x u]^t$ est le tenseur de taux de vorticité.

Comme l'obtention de l'inégalité d'énergie en multipliant (3.4) par $u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi$ appelée communément vitesse modifiée puis en intégrant par parties, le tout combiné avec une bonne dose de calculs et de majorations nous obtenons la BD-entropie donnée par le Lemme 3.1.

Lemme 3.1 (Estimation de la BD-entropie)
Sous l'hypothèse (3.1), on a la BD-entropie suivante :

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in]0,T[}\mathrm{ess}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2-2\overline{\nu}_1r_0(\ln\xi)_-\Big)dxdz+2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|\partial_z w|^2dxdzdt\\
&+8\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdzdt+r\int_0^T\int_\Omega\xi|u|^3dxdzdt+\overline{\nu}_2\int_0^T\int_\Omega\xi|\partial_z u|^2dxdzdt\\
&+\frac{8}{5}\eta\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla_x\xi^{-5}|^2dxdzdt+\mu\int_0^T\int_\Omega|\Delta u|^2dxdzdt\\
&+\kappa\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdzdt+r_0\int_0^T\int_\Omega|u|^2dxdzdt+2\delta\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\Delta_x^3\xi|^2dxdzdt\\
&+2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|A_x(u)|^2dxdzdt+\overline{\nu}_1r_0\varepsilon\int_0^T\int_\Omega\frac{|\nabla_x\xi|^2}{\xi^2}dxdzdt\\
&\le\int_\Omega\Big(\xi_0|u_0|^2+12\overline{\nu}_1^2|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2+2\overline{\nu}_1r_0(\ln\xi)_+-2\overline{\nu}_1r_0\ln\xi_0\Big)dxdz\\
&\qquad+E_0+C+\varepsilon C(\delta,\eta)+\sqrt{\mu}C(\delta,\eta),
\end{aligned}\tag{3.5}$$

où $(\ln\xi)_-=\ln(\min\{\xi,1\})$, $(\ln\xi)_+=\ln(\max\{\xi,1\})$, C est une constante positive générique dépendante des données initiales et autres constantes mais indépendante de ε, δ, η, r_0, μ, κ et $C(\delta,\eta)$ est une constante positive générique qui ne dépend que de δ et η.

Preuve de l'estimation de la BD-entropie (Lemme 3.1) :
En multipliant (3.4) par $u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\mathrm{ln}\xi$ et en intégrant sur Ω, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\partial_t(\xi(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&+\int_\Omega\mathrm{div}_x\big((\xi u)\otimes(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)\big)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&+\int_\Omega\partial_z(2\overline{\nu}_1\nabla_x(\xi w))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz+\int_\Omega\partial_z(\xi uw)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\mathrm{ln}\xi)dxdz\\
&+\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz+\int_\Omega r_0u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&+\int_\Omega r\xi|u|u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz+\int_\Omega\mu\Delta^2u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&=\int_\Omega\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&+\int_\Omega\overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz+\int_\Omega\eta\nabla_x\xi^{-10}\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))dxdz\\
&-\int_\Omega\varepsilon\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz+\int_\Omega2\overline{\nu}_1\varepsilon\nabla_x\Delta_x\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&+\int_\Omega\kappa\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz+\int_\Omega\delta\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

En s'inspirant de la Section 2.1 explicitons les termes dans (3.6) un par un.

► Par un calcul direct, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t(\xi(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi)dxdz \\
&= \int_\Omega \partial_t\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz + \int_\Omega \frac{1}{2}\xi\partial_t(|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2)dxdz \\
&= \int_\Omega \partial_t(\frac{1}{2}\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2)dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz
\end{aligned} \tag{3.7}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathrm{div}_x\big((\xi u)\otimes(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)\big)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi)dxdz \\
&= \int_\Omega \big[(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)\mathrm{div}_x(\xi u)+(\xi u)\cdot\nabla_x(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)\big]\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi)dxdz \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi u)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega (\xi u)\cdot\nabla_x(|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2)dxdz \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi u)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz - \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi u)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi u)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

En additionnant membre à membre (3.7) et (3.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t(\xi(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi)dxdz \\
&+\int_\Omega \mathrm{div}_x\big((\xi u)\otimes(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)\big)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi)dxdz \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\partial_t\xi+\mathrm{div}_x(\xi u)\Big)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Or en utilisant (2.21), nous avons $\partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) = \varepsilon\Delta_x\xi - \partial_z(\xi w)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t\xi+\mathrm{div}_x(\xi u))|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon\Delta_x\xi-\partial_z(\xi w))|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \Delta_x\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_z(\xi w)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \Delta_x\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \Delta_x\xi(|u|^2+4\overline{\nu}_1 u\cdot\nabla_x\ln\xi+4\overline{\nu}_1^2|\nabla_x\ln\xi|^2)dxdz \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \Delta_x\xi|u|^2dxdz + 2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_\Omega \Delta_x\xi u\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz + 2\overline{\nu}_1^2\varepsilon\int_\Omega \Delta_x\xi|\nabla_x\ln\xi|^2dxdz \\
&= -\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x(|u|^2)dxdz - 2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x(u\cdot\nabla_x\ln\xi)dxdz \\
&\quad -2\overline{\nu}_1^2\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x(|\nabla_x\ln\xi|^2)dxdz \\
&= -\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot u dxdz - 2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz \\
&\quad -2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x^2\ln\xi\cdot u dxdz - 4\overline{\nu}_1^2\varepsilon\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x^2\ln\xi\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Donc, en combinant (3.9), (3.10) et (3.11), nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t(\xi(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&+\int_\Omega \mathrm{div}_x((\xi u)\otimes(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&=\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{1}{2}\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz-\varepsilon\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot udxdz\\
&\quad-2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz-2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot\nabla_x^2\ln\xi\cdot udxdz\\
&\quad-4\overline{\nu}_1^2\varepsilon\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot\nabla_x^2\ln\xi\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz-\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_z(\xi w)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

▶

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\partial_z(2\overline{\nu}_1\nabla_x(\xi w))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz &= -2\overline{\nu}_1\int_\Omega\nabla_x(\xi w)\cdot\partial_z(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&= -2\overline{\nu}_1\int_\Omega(w\nabla_x\xi+\xi\nabla_x w)\cdot\partial_z udxdz\\
&= -2\overline{\nu}_1\int_\Omega w\nabla_x\xi\cdot\partial_z udxdz-2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi\nabla_x w\cdot\partial_z udxdz.
\end{aligned}$$

Or par intégration par parties suivant x puis suivant z, nous pouvons écrire :

$$\int_\Omega\xi\nabla_x w\cdot\partial_z udxdz=\int_\Omega\nabla_x w\cdot\partial_z(\xi u)dxdz=-\int_\Omega w\mathrm{div}_x\partial_z(\xi u)dxdz=-\int_\Omega w\partial_z\mathrm{div}_x(\xi u)dxdz$$

et d'après l'équation (1.26), on a $\xi\partial_{zz}w=-\partial_z\mathrm{div}_x(\xi u)$, alors

$$\int_\Omega\xi\nabla_x w\cdot\partial_z udxdz=\int_\Omega\xi w\partial_{zz}wdxdz=-\int_\Omega\partial_z(\xi w)\partial_z wdxdz=-\int_\Omega\xi|\partial_z w|^2dxdz.$$

Donc

$$\int_\Omega\partial_z(2\overline{\nu}_1\nabla_x(\xi w))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz=-2\overline{\nu}_1\int_\Omega w\nabla_x\xi\cdot\partial_z udxdz+2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi|\partial_z w|^2dxdz.\tag{3.13}$$

▶

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\partial_z(\xi uw)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&=\int_\Omega\partial_z(\xi w(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi-2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&=\int_\Omega\partial_z[\xi w(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)]\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&\quad-2\overline{\nu}_1\int_\Omega\partial_z(\xi w\nabla_x\ln\xi)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&=\int_\Omega\partial_z(\xi w)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz+\frac{1}{2}\int_\Omega(\xi w)\partial_z(|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2)dxdz\\
&\quad-2\overline{\nu}_1\int_\Omega\partial_z(w\nabla_x\xi)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&=\int_\Omega\partial_z(\xi w)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz-\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_z(\xi w)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz\\
&\quad+2\overline{\nu}_1\int_\Omega(w\nabla_x\xi)\cdot\partial_z(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_z(\xi w)|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2dxdz+2\overline{\nu}_1\int_\Omega w\nabla_x\xi\cdot\partial_z udxdz.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

▶

$$\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz=\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot udxdz+2\overline{\nu}_1\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz.$$

Or d'après l'équation (2.28), nous savons que :

$$\int_\Omega\nabla_x\xi\cdot udxdz=\frac{d}{dt}\int_\Omega(\xi\ln\xi-\xi+1)dxdz+4\varepsilon\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdz$$

et

$$2\overline{\nu}_1\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz = 2\overline{\nu}_1\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot\frac{\nabla_x\xi}{\xi}dxdz = 2\overline{\nu}_1\int_\Omega 4\Big|\frac{\nabla_x\xi}{2\sqrt{\xi}}\Big|^2dxdz = 8\overline{\nu}_1\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdz.$$

Alors, nous obtenons :

$$\int_\Omega \nabla_x\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz = \frac{d}{dt}\int_\Omega(\xi\ln\xi-\xi+1)dxdz + (8\overline{\nu}_1+4\varepsilon)\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdz. \tag{3.15}$$

▶

$$\begin{aligned}\int_\Omega r_0u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz &= r_0\int_\Omega u\cdot udxdz + 2\overline{\nu}_1r_0\int_\Omega u\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz\\ &= r_0\int_\Omega|u|^2dxdz + 2\overline{\nu}_1r_0\int_\Omega u\cdot\frac{\nabla_x\xi}{\xi}dxdz.\end{aligned}\tag{3.16}$$

▶

$$\begin{aligned}\int_\Omega r\xi|u|u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz &= r\int_\Omega\xi|u|(u\cdot u)dxdz + 2\overline{\nu}_1r\int_\Omega\xi|u|u\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz\\ &= r\int_\Omega\xi|u|^3dxdz + 2\overline{\nu}_1r\int_\Omega|u|u\cdot\nabla_x\xi dxdz.\end{aligned}\tag{3.17}$$

▶

$$\begin{aligned}\int_\Omega\mu\Delta^2u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz &= \mu\int_\Omega(\Delta^2u)\cdot udxdz + 2\overline{\nu}_1\mu\int_\Omega\Delta^2u\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz\\ &= \mu\int_\Omega\Delta u\cdot\Delta udxdz + 2\overline{\nu}_1\mu\int_\Omega\Delta u\cdot\Delta\nabla_x\ln\xi dxdz\\ &= \mu\int_\Omega|\Delta u|^2dxdz + 2\overline{\nu}_1\mu\int_\Omega\Delta_xu\cdot\nabla_x\Delta_x\ln\xi dxdz.\end{aligned}\tag{3.18}$$

▶

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\ &= \int_\Omega\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))\cdot udxdz + 2\overline{\nu}_1\int_\Omega\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_\Omega\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))\cdot udxdz &= -2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi A_x(u)\cdot\nabla_xudxdz = -2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi A_x(u)\cdot(A_x(u)+D_x(u))dxdz\\ &= -2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi|A_x(u)|^2dxdz - 2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi A_x(u)\cdot D_x(u)dxdz = -2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi|A_x(u)|^2dxdz.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\ &= -2\overline{\nu}_1\int_\Omega\xi|A_x(u)|^2dxdz + 2\overline{\nu}_1\int_\Omega\mathrm{div}_x(2\overline{\nu}_1\xi A_x(u))\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz.\end{aligned}\tag{3.19}$$

▶

$$\begin{aligned}\int_\Omega\overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_zu)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz &= -\overline{\nu}_2\int_\Omega(\xi\partial_zu)\cdot\partial_z(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\ &= -\overline{\nu}_2\int_\Omega\xi\partial_zu\cdot\partial_zudxdz\\ &= -\overline{\nu}_2\int_\Omega\xi|\partial_zu|^2dxdz.\end{aligned}\tag{3.20}$$

▶

$$\int_\Omega\eta\nabla_x\xi^{-10}\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))dxdz = \eta\int_\Omega\nabla_x\xi^{-10}\cdot udxdz + 2\overline{\nu}_1\eta\int_\Omega\nabla_x\xi^{-10}\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz.$$

Or d'après l'équation (2.30), nous savons que :

$$\eta\int_{\Omega}\nabla_x\xi^{-10}\cdot udxdz=-\frac{1}{11}\eta\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\xi^{-10}dxdz-\frac{2}{5}\eta\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla_x\xi^{-5}|^2dxdz.$$

De plus, $\nabla_x\xi^{-10}\cdot\nabla_x\ln\xi=-10\xi^{-11}\nabla_x\xi\cdot\dfrac{\nabla_x\xi}{\xi}=-10\xi^{-12}|\nabla_x\xi|^2=-10|\xi^{-6}\nabla_x\xi|^2=-\dfrac{2}{5}|\nabla_x\xi^{-5}|^2$, c'est-à-dire :

$$2\overline{\nu}_1\eta\int_{\Omega}\nabla_x\xi^{-10}\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz=-\frac{4}{5}\overline{\nu}_1\eta\int_{\Omega}|\nabla_x\xi^{-5}|^2dxdz.$$

Alors, nous obtenons :

$$\int_{\Omega}\eta\nabla_x\xi^{-10}\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi))dxdz=-\frac{1}{11}\eta\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\xi^{-10}dxdz-\frac{2}{5}\eta(\varepsilon+2\overline{\nu}_1)\int_{\Omega}|\nabla_x\xi^{-5}|^2dxdz. \tag{3.21}$$

▶

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega}\varepsilon\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\&=-\varepsilon\int_{\Omega}\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot udxdz-2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_{\Omega}\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u\cdot\nabla_x\mathrm{ln}\xi dxdz.\end{aligned}\tag{3.22}$$

▶

$$\int_{\Omega}2\overline{\nu}_1\varepsilon\nabla_x\Delta_x\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz=2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_{\Omega}\nabla_x\Delta_x\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz. \tag{3.23}$$

▶

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\kappa\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\&=\kappa\int_{\Omega}\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot udxdz+2\overline{\nu}_1\kappa\int_{\Omega}\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz\\&=-\kappa\int_{\Omega}\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\mathrm{div}_x(\xi u)dxdz+\overline{\nu}_1\kappa\int_{\Omega}2\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz.\end{aligned}$$

Or d'après l'équation (2.32), nous savons que :

$$-\kappa\int_{\Omega}\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\mathrm{div}_x(\xi u)dxdz=-\kappa\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdz-\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_{\Omega}\xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdz$$

et

$$2\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)=\mathrm{div}_x(\xi\nabla_x^2\ln\xi),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_1\kappa\int_{\Omega}2\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz&=\overline{\nu}_1\kappa\int_{\Omega}\mathrm{div}_x(\xi\nabla_x^2\ln\xi)\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz\\&=-\overline{\nu}_1\kappa\int_{\Omega}\xi\nabla_x^2\ln\xi\cdot\nabla_x\nabla_x\ln\xi dxdz\\&=-\overline{\nu}_1\kappa\int_{\Omega}\xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdz.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\kappa\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz\\&=-\kappa\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdz-\frac{\kappa(\varepsilon+2\overline{\nu}_1)}{2}\int_{\Omega}\xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdz.\end{aligned}\tag{3.24}$$

▶

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\delta\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdz&=\delta\int_{\Omega}\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot udxdz+2\overline{\nu}_1\delta\int_{\Omega}\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot\nabla_x\ln\xi dxdz\\&=-\delta\int_{\Omega}\Delta_x^5\xi\mathrm{div}_x(\xi u)dxdz+2\overline{\nu}_1\delta\int_{\Omega}\nabla_x\Delta_x^5\xi\cdot\nabla_x\xi dxdz\\&=-\delta\int_{\Omega}\Delta_x^5\xi\mathrm{div}_x(\xi u)dxdz-2\overline{\nu}_1\delta\int_{\Omega}\Delta_x^5\xi\Delta_x\xi dxdz.\end{aligned}$$

Or d'après (2.31), nous savons que :

$$\delta \int_\Omega \Delta_x^5 \xi \operatorname{div}_x(\xi u) dxdz = \frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla_x \Delta_x^2 \xi|^2 dxdz + \delta\varepsilon \int_\Omega |\Delta_x^3 \xi|^2 dxdz.$$

Par ailleurs, par intégration par parties successives, nous avons :

$$-2\overline{\nu}_1 \delta \int_\Omega \Delta_x^5 \xi \Delta_x \xi dxdz = -2\overline{\nu}_1 \delta \int_\Omega \Delta_x^4 \xi \Delta_x^2 \xi dxdz = -2\overline{\nu}_1 \delta \int_\Omega |\Delta_x^3 \xi|^2 dxdz.$$

Alors

$$\int_\Omega \delta \xi \nabla_x \Delta_x^5 \xi \cdot (u + 2\overline{\nu}_1 \nabla_x \ln \xi) dxdz = -\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla_x \Delta_x^2 \xi|^2 dxdz - \delta(\varepsilon + 2\overline{\nu}_1)\int_\Omega |\Delta_x^3 \xi|^2 dxdz. \quad (3.25)$$

Ainsi, en remplaçant (3.12)-(3.25) dans (3.6), nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\xi|u + 2\overline{\nu}_1 \nabla_x \ln \xi|^2 + (\xi \ln \xi - \xi + 1) + \frac{1}{11}\eta \xi^{-10} + \kappa |\nabla_x \sqrt{\xi}|^2 + \\
&\frac{\delta}{2}|\nabla_x \Delta_x^2 \xi|^2 dxdz + 2\overline{\nu}_1 \int_\Omega \xi |\partial_z w|^2 dxdz + (8\overline{\nu}_1 + 4\varepsilon)\int_\Omega |\nabla_x \sqrt{\xi}|^2 dxdz \\
&+ r\int_\Omega \xi |u|^3 dxdz + \overline{\nu}_2 \int_\Omega \xi |\partial_z u|^2 dxdz + \frac{2}{5}\eta(\varepsilon + 2\overline{\nu}_1)\int_\Omega |\nabla_x \xi^{-5}|^2 dxdz \\
&+ \mu \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdz + \frac{\kappa(\varepsilon + 2\overline{\nu}_1)}{2}\int_\Omega \xi |\nabla_x^2 \ln \xi|^2 dxdz + \delta(\varepsilon + 2\overline{\nu}_1)\int_\Omega |\Delta_x^3 \xi|^2 dxdz \\
&+ 2\overline{\nu}_1 \int_0^T \int_\Omega \xi |A_x(u)|^2 dxdz + r_0 \int_\Omega |u|^2 dxdz \\
&= 2\overline{\nu}_1 \int_\Omega \operatorname{div}_x(2\overline{\nu}_1 \xi A_x(u)) \cdot \nabla_x \ln \xi dxdz - 2\overline{\nu}_1 \mu \int_\Omega \Delta_x u \cdot \nabla_x \Delta_x \ln \xi dxdz \\
&+ 2\overline{\nu}_1 \varepsilon \int_\Omega \nabla_x \xi \cdot \nabla_x^2 \ln \xi \cdot u dxdz + 4\overline{\nu}_1^2 \varepsilon \int_\Omega \nabla_x \xi \cdot \nabla_x^2 \ln \xi \cdot \nabla_x \ln \xi dxdz \\
&+ 2\overline{\nu}_1 \varepsilon \int_\Omega \nabla_x \Delta_x \xi \cdot (u + 2\overline{\nu}_1 \nabla_x \ln \xi) dxdz - 2\overline{\nu}_1 r \int_\Omega |u| u \cdot \nabla_x \xi dxdz \\
&- 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega u \cdot \frac{\nabla_x \xi}{\xi} dxdz = \sum_{i=1}^7 I_i.
\end{aligned} \quad (3.26)$$

Grâce au fait que ξ et u sont périodiques suivant x_1 et x_2 (conditions aux limites périodiques sur le bord du tore), on conclut que le premier terme $I_1 = 0$. En effet :

$$\begin{aligned}
&2\int_\Omega \operatorname{div}_x(\xi A_x(u)) \cdot \nabla_x \ln \xi dxdz = \int_\Omega \partial_{x_j}(\xi(\partial_{x_i} u_j - \partial_{x_j} u_i))\frac{\partial_{x_i} \xi}{\xi} dxdz \\
&= \int_\Omega \frac{\partial_{x_i} \xi \partial_{x_j} \xi}{\xi}(\partial_{x_i} u_j - \partial_{x_j} u_i) + (\partial_{x_j}\partial_{x_i} u_j - \partial_{x_j}\partial_{x_j} u_i)\partial_{x_i} \xi dxdz \\
&= \int_\Omega \partial_{x_j}\partial_{x_i} u_j \partial_{x_i} \xi - \partial_{x_j}\partial_{x_j} u_i \partial_{x_i} \xi dxdz \\
&= \int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_i} u_j \partial_{x_j} \xi - \partial_{x_j}\partial_{x_j} u_i \partial_{x_i} \xi dxdz = 0.
\end{aligned} \quad (3.27)$$

Pour I_7, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
I_7 &= -2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega u \cdot \frac{\nabla_x \xi}{\xi} dxdz = -2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\xi u) \cdot \frac{\nabla_x \xi}{\xi^2} dxdz \\
&= 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\xi u) \cdot \nabla_x \Big(\frac{1}{\xi}\Big) dxdz = -2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \frac{\operatorname{div}_x(\xi u)}{\xi} dxdz \\
&= 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \frac{\partial_t \xi + \partial_z(\xi w) - \varepsilon \Delta_x \xi}{\xi} dxdz \\
&= 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \frac{\partial_t \xi}{\xi} dxdz + 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \frac{\xi \partial_z w}{\xi} dxdz - 2\overline{\nu}_1 r_0 \varepsilon \int_\Omega \frac{\Delta_x \xi}{\xi} dxdz \\
&= 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \partial_t \ln \xi dxdz + 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_{\Omega_x}\int_0^h \partial_z w dz dx + 2\overline{\nu}_1 r_0 \varepsilon \int_\Omega \nabla_x \xi \cdot \nabla_x \Big(\frac{1}{\xi}\Big) dxdz \\
&= 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \partial_t \ln \xi dxdz - 2\overline{\nu}_1 r_0 \varepsilon \int_\Omega \frac{|\nabla_x \xi|^2}{\xi^2} dxdz.
\end{aligned} \quad (3.28)$$

Ainsi,

$$\int_0^T I_7 dt = 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \ln \xi dxdz - 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \ln \xi_0 dxdz - 2\overline{\nu}_1 r_0 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla_x \xi|^2}{\xi^2} dxdzdt.$$

Or

$$\int_\Omega \ln \xi dxdz = \int_\Omega (\ln \xi)_- dxdz + \int_\Omega (\ln \xi)_+ dxdz,$$

où $(\ln g)_- = \ln(\min\{g, 1\})$ et $(\ln g)_+ = \ln(\max\{g, 1\})$ pour toute fonction g donnée.
Puisque $(\ln g)_- \leq 0$ alors $-2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi)_- dxdz \geq 0$. Ainsi, en mettant ce terme du côté gauche de l'estimation de la BD-entropie on gagne, car on a une intégrale positive qui est destinée à être majorée par une quantité finie donc elle n'explose pas.
Par contre $(\ln g)_+$ étant positif ou nul nous donne $-2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi)_+ dxdz \leq 0$ ce qui ne garantie pas que cette intégrale converge, y a possibilité qu'elle diverge notamment vers $-\infty$.
En étudiant la fonction $h(x) = f(x) - x$ sur $]0; +\infty[$ avec $f(x) = x \ln x - x + 1$ on montre qu'elle admet un minimum global en e égal à $1 - e$. C'est-à dire $f(x) - x \geq 1 - e \Leftrightarrow f(x) + e - 1 \geq x$.
On a donc $(\xi \ln \xi - \xi + 1) + e - 1 \geq \xi$.
De même l'étude de la fonction $x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$ montre qu'elle admet un minimum global en 1 égal à 1. C'est-à-dire $x - \ln x \geq 1 > 0$. Ce qui donne $\xi > \ln \xi$.
Pour $\xi \leq 1$, $(\ln \xi)_+ = 0 \Rightarrow -2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi)_+ dxdz = 0$.
Donc, nous nous plaçons désormais dans le cas délicat où $\xi > 1$, c'est-à-dire $\ln \xi = (\ln \xi)_+ > 0$.
En combinant ces résultats, nous obtenons : $0 < (\ln \xi)_+ < \xi \leq (\xi \ln \xi - \xi + 1) + e - 1$.
Ainsi, en intégrant sur Ω, nous avons :

$$0 < \int_\Omega (\ln \xi)_+ dxdz < \int_\Omega \xi dxdz \leq \int_\Omega (\xi \ln \xi - \xi + 1) dxdz + \int_\Omega (e - 1) dxdz.$$

À partir de l'inégalité d'énergie on a $\xi \ln \xi - \xi + 1 \in L^1(\Omega)$ et comme le domaine Ω est borné, alors nous obtenons :

$$0 < \int_\Omega (\ln \xi)_+ dxdz < \int_\Omega \xi dxdz < +\infty, \text{ i.e. } \xi \in L^1(\Omega) \text{ et } (\ln \xi)_+ \in L^1(\Omega).$$

Nous déduisons donc que $-2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi)_+ dxdz$ n'explose pas.
De plus, puisque nos données initiales satisfont $\xi_0 \in L^1(\Omega)$ et $\xi_0 \ln \xi_0 - \xi_0 + 1 \in L^1(\Omega)$ alors le même raisonnement que ci-dessus nous permet de montrer que $-2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi_0)_+ dxdz$ n'explose pas.
Pour boucler, nous supposons que $-2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi_0)_- dxdz$ est uniformément bornée dans $L^1(\Omega)$ ce qui en fait raisonnable puisque nous sommes à l'instant initial.

En substituant (3.27)-(3.28) dans (3.27) et en l'intégrant par rapport à t sur $[0, T]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\xi |u + 2\overline{\nu}_1 \nabla_x \ln \xi|^2 + (\xi \ln \xi - \xi + 1) + \frac{1}{11}\eta \xi^{-10} + \kappa |\nabla_x \sqrt{\xi}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x \Delta_x^2 \xi|^2\Big) dxdz \\
&+ 2\overline{\nu}_1 \int_0^T \int_\Omega \xi |\partial_z w|^2 dxdzdt + (8\overline{\nu}_1 + 4\varepsilon) \int_0^T \int_\Omega |\nabla_x \sqrt{\xi}|^2 dxdzdt + r \int_0^T \int_\Omega \xi |u|^3 dxdzdt \\
&+ \overline{\nu}_2 \int_0^T \int_\Omega \xi |\partial_z u|^2 dxdzdt + \frac{2}{5}\eta(\varepsilon + 2\overline{\nu}_1) \int_0^T \int_\Omega |\nabla_x \xi^{-5}|^2 dxdzdt + \mu \int_0^T \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdzdt \\
&+ \frac{\kappa(\varepsilon + 2\overline{\nu}_1)}{2} \int_0^T \int_\Omega \xi |\nabla_x^2 \ln \xi|^2 dxdzdt + \delta(\varepsilon + 2\overline{\nu}_1) \int_0^T \int_\Omega |\Delta_x^3 \xi|^2 dxdzdt \\
&+ 2\overline{\nu}_1 \int_0^T \int_\Omega \xi |A_x(u)|^2 dxdzdt + r_0 \int_0^T \int_\Omega |u|^2 dxdzdt - 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi)_- dxdz = \\
&\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\xi_0 |u_0 + 2\overline{\nu}_1 \nabla_x \ln \xi_0|^2 + (\xi_0 \ln \xi_0 - \xi_0 + 1) + \frac{1}{11}\eta \xi_0^{-10} + \kappa |\nabla_x \sqrt{\xi_0}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x \Delta_x^2 \xi_0|^2\Big) dxdz \\
&+ \int_0^T \sum_{i=2}^{6} I_i dt + 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega (\ln \xi)_+ dxdz - 2\overline{\nu}_1 r_0 \int_\Omega \ln \xi_0 dxdz - 2\overline{\nu}_1 r_0 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla_x \xi|^2}{\xi^2} dxdzdt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous écrivons :

$$\begin{aligned}&2\overline{\nu}_1\xi_0 u_0\cdot\nabla_x\ln\xi_0 = 2(\sqrt{\xi_0}u_0)\cdot(\overline{\nu}_1\sqrt{\xi_0}\nabla_x\ln\xi_0)\\&\leq|\sqrt{\xi_0}u_0|^2+|\overline{\nu}_1\sqrt{\xi_0}\nabla_x\ln\xi_0|^2=\xi_0|u_0|^2+\overline{\nu}_1^2\xi_0|\nabla_x\ln\xi_0|^2,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\xi_0|u_0+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi_0|^2=\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2+2\overline{\nu}_1\xi_0u_0\cdot\nabla_x\ln\xi_0+2\overline{\nu}_1^2\xi_0|\nabla_x\ln\xi_0|^2\\&\leq\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2+\xi_0|u_0|^2+3\overline{\nu}_1^2\xi_0|\nabla_x\ln\xi_0|^2=\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2+\xi_0u_0^2+3\overline{\nu}_1^2\xi_0\Big|\frac{\nabla_x\xi_0}{\xi_0}\Big|^2\\&\leq\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2+\xi_0|u_0|^2+12\overline{\nu}_1^2\Big|\frac{\nabla_x\xi_0}{2\sqrt{\xi_0}}\Big|^2=\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2+\xi_0|u_0|^2+12\overline{\nu}_1^2|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\frac{1}{2}\xi_0|u_0+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi_0|^2+(\xi_0\ln\xi_0-\xi_0+1)+\frac{1}{11}\eta\xi_0^{-10}+\kappa|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2+\\&\frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi_0|^2)dxdz\leq E_0+\int_\Omega\xi_0u_0^2+12\overline{\nu}_1^2|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2dxdz.\end{aligned}$$

De plus, nous savons que :

$$\begin{aligned}&4\varepsilon\int_0^T\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdzdt+\frac{2}{5}\eta\varepsilon\int_0^T\int_\Omega|\nabla_x\xi^{-5}|^2dxdzdt+\\&\frac{\kappa\varepsilon}{2}\int_0^T\int_\Omega\xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdzdt+\delta\varepsilon\int_0^T\int_\Omega|\Delta_x^3\xi|^2dxdzdt\geq0.\end{aligned}$$

Alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in]0,T[}\mathrm{ess}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2-2\overline{\nu}_1r_0(\ln\xi)_-\Big)dxdz+2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|\partial_zw|^2dxdzdt\\&+8\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdzdt+r\int_0^T\int_\Omega\xi|u|^3dxdzdt+\bar{\nu}_2\int_0^T\int_\Omega\xi|\partial_zu|^2dxdzdt\\&+\frac{8}{5}\eta\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla_x\xi^{-5}|^2dxdzdt+\mu\int_0^T\int_\Omega|\Delta u|^2dxdzdt\\&+\kappa\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdzdt+r_0\int_0^T\int_\Omega|u|^2dxdzdt+2\delta\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\Delta_x^3\xi|^2dxdzdt\\&+2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|A_x(u)|^2dxdzdt+2\overline{\nu}_1r_0\varepsilon\int_0^T\int_\Omega\frac{|\nabla_x\xi|^2}{\xi^2}dxdzdt\\&\leq\int_\Omega\Big(\xi_0|u_0|^2+12\overline{\nu}_1^2|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2+2\overline{\nu}_1r_0(\ln\xi)_+-2\overline{\nu}_1r_0\ln\xi_0\Big)dxdz+\int_0^T\sum_{i=2}^6I_idt+E_0.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Ensuite, nous contrôlons les autres termes à droite de (3.29).

► On commence par I_2. À l'aide de l'inégalité de Hölder, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^TI_2dt&=-2\overline{\nu}_1\mu\int_0^T\int_\Omega\Delta_xu\cdot\nabla_x\Delta_x\ln\xi dxdzdt\\&=-2\overline{\nu}_1\mu\int_0^T\int_\Omega\Delta_xu\cdot\Big(\frac{\nabla_x\Delta_x\xi}{\xi}-\frac{\Delta_x\xi\nabla_x\xi}{\xi^2}-2\frac{\nabla_x^2\xi\cdot\nabla_x\xi}{\xi^2}+2\frac{|\nabla_x\xi|^2\nabla_x\xi}{\xi^3}\Big)dxdzdt\\&\leq C\mu\int_0^T\int_\Omega|\Delta_xu|\Big(\xi^{-1}|\nabla_x^3\xi|+\xi^{-2}|\nabla_x\xi||\nabla_x^2\xi|+\xi^{-3}|\nabla_x\xi|^3\Big)dxdzdt\\&\leq C\sqrt{\mu}\|\sqrt{\mu}\Delta_xu\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\Big(\|\xi^{-1}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\nabla_x^3\xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times2\times2})}\\&\quad+\|\xi^{-1}\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\nabla_x\xi\|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^2)}\|\nabla_x^2\xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times2})}\\&\quad+\|\xi^{-1}\|^3_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\nabla_x\xi\|^3_{L^6(0,T;(L^6(\Omega))^2)}\Big)\\&\leq C\sqrt{\mu}\|\sqrt{\mu}\Delta_xu\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\\&\quad\Big(\|\xi^{-1}\|^3_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\nabla_x^3\xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times2\times2})}+\|\xi^{-1}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\Big)\\&\leq C(\delta,\eta)\sqrt{\mu},\end{aligned}\tag{3.30}$$

où nous avons utilisé le développement suivant :

$$
\begin{aligned}
&\nabla_x \Delta_x \ln \xi = \nabla_x \mathrm{div}_x \nabla_x \ln \xi = \nabla_x \mathrm{div}_x \Big(\frac{\nabla_x \xi}{\xi} \Big) = \nabla_x \Big(\frac{1}{\xi} \mathrm{div}_x \nabla_x \xi + \nabla_x \xi \cdot \nabla_x \Big(\frac{1}{\xi} \Big) \Big) \\
&= \nabla_x \Big(\frac{\Delta_x \xi}{\xi} - \nabla_x \xi \cdot \frac{\nabla_x \xi}{\xi^2} \Big) = \nabla_x \Big(\frac{\Delta_x \xi}{\xi} - \frac{|\nabla_x \xi|^2}{\xi^2} \Big) = \nabla_x \Big(\frac{\Delta_x \xi}{\xi} \Big) - \nabla_x \Big(\frac{|\nabla_x \xi|^2}{\xi^2} \Big) \\
&= \frac{1}{\xi} \nabla_x \Delta_x \xi + \Delta_x \xi \nabla_x \Big(\frac{1}{\xi} \Big) - \frac{1}{\xi^2} \nabla_x (|\nabla_x \xi|^2) - |\nabla_x \xi|^2 \nabla_x \Big(\frac{1}{\xi^2} \Big) \\
&= \frac{\nabla_x \Delta_x \xi}{\xi} - \frac{\Delta_x \xi \nabla_x \xi}{\xi^2} - 2 \frac{\nabla_x^2 \xi \cdot \nabla_x \xi}{\xi^2} + 2 \frac{|\nabla_x \xi|^2 \nabla_x \xi}{\xi^3},
\end{aligned}
$$

► Nous poursuivons avec I_4. En remarquant que $\nabla_x \big(|\nabla_x \ln \xi|^2 \big) = 2 \nabla_x^2 \ln \xi \cdot \nabla_x \ln \xi$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\int_0^T I_4 dt &= 4 \overline{\nu}_1^2 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \nabla_x \xi \cdot \nabla_x^2 \ln \xi \cdot \nabla_x \ln \xi dx dz dt \\
&= 4 \overline{\nu}_1^2 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \nabla_x \xi \cdot \frac{\nabla_x \big(|\nabla_x \ln \xi|^2 \big)}{2} dx dz dt \\
&= -2 \overline{\nu}_1^2 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \Delta_x \xi |\nabla_x \ln \xi|^2 dx dz dt \\
&= -2 \overline{\nu}_1^2 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \Delta_x \xi |\nabla_x \xi|^2 \Big(\frac{1}{\xi} \Big)^2 dx dz dt \\
&\le 2 \overline{\nu}_1^2 \varepsilon \Big\| \frac{1}{\xi} \Big\|^2_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \|\nabla_x \xi\|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^2)} \\
&\quad \times \|\nabla_x \xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \|\Delta_x \xi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\le \varepsilon C(\delta, \eta).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

► En utilisant le fait que $\nabla_x \ln \xi = \dfrac{\nabla_x \xi}{\xi}$ et le fait que $\nabla_x^2 \ln \xi$ est un tenseur symétrique (nous permettant d'écrire $\nabla_x \ln \xi \cdot \nabla_x^2 \ln \xi = \nabla_x^2 \ln \xi \cdot \nabla_x \ln \xi = \dfrac{1}{2} \nabla_x (|\nabla_x \ln \xi|^2)$), nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T I_3 dt = 2 \overline{\nu}_1 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \nabla_x \xi \cdot \nabla_x^2 \ln \xi \cdot u dx dz dt = 2 \overline{\nu}_1 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \nabla_x \ln \xi \cdot \nabla_x^2 \ln \xi \cdot (\xi u) dx dz dt \\
&= \overline{\nu}_1 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \nabla_x \big(|\nabla_x \ln \xi|^2 \big) \cdot (\xi u) dx dz dt = - \overline{\nu}_1 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \Big| \frac{\nabla_x \xi}{\xi} \Big|^2 \mathrm{div}_x (\xi u) dx dz dt \\
&= - \overline{\nu}_1 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \Big| \frac{\nabla_x \xi}{\xi} \Big|^2 (\xi \mathrm{div}_x u + u \cdot \nabla_x \xi) dx dz dt \\
&\le \overline{\nu}_1 \varepsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla_x \xi|^2}{\xi^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\xi} \nabla_x u + \frac{|\nabla_x \xi|^2}{\xi^{\frac{5}{2}}} \sqrt{\xi} u \cdot \nabla_x \xi dx dz dt \\
&\le \varepsilon \overline{\nu}_1 \Big\| \frac{1}{\xi} \Big\|^{\frac{3}{2}}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \|\nabla_x \xi\|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^2)} \|\nabla_x \xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \|\sqrt{\xi} \nabla_x u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2})} \\
&\quad + \varepsilon \overline{\nu}_1 \Big\| \frac{1}{\xi} \Big\|^{\frac{5}{2}}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \|\nabla_x \xi\|^2_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^2)} \|\nabla_x \xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \|\sqrt{\xi} u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \\
&\le \varepsilon \overline{\nu}_1 C(\delta, \eta) \Big(\|\sqrt{\xi} \nabla_x u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2})} + 1 \Big) \\
&\le \frac{\overline{\nu}_1}{2} \|\sqrt{\xi} A_x u\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2})} + \varepsilon C(\delta, \eta),
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

où nous avons utilisé

$$
\|\sqrt{\xi} A_x u\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2})} + \|\sqrt{\xi} D_x u\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2})} = \|\sqrt{\xi} \nabla_x u\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2})}.
$$

▶ Pour I_5, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^T I_5 dt &= 2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\Delta_x\xi\cdot(u+2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi)dxdzdt\\ &= 2\overline{\nu}_1\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\Delta_x\xi\cdot udxdzdt+4\overline{\nu}_1^2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega\nabla_x\Delta_x\xi\cdot\frac{\nabla_x\xi}{\xi}dxdzdt\\ &\le 2\overline{\nu}_1\varepsilon\|\nabla_x\Delta_x\xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\sqrt{\xi}u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\xi^{-1}\|^{\frac12}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\\ &\quad+4\overline{\nu}_1^2\varepsilon\|\nabla_x\Delta_x\xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\nabla_x\xi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\xi^{-1}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\\ &\le \varepsilon C(\delta,\eta).\end{aligned}\tag{3.33}$$

▶ En fin, comme :

$$\begin{cases}\nabla_x(|u|^2)=2|u|\nabla_x(|u|)\Longrightarrow\nabla_x(|u|)=\dfrac{1}{2|u|}\nabla_x(|u|^2),\\ \nabla_x(|u|^2)=\nabla_x(u_1^2+u_2^2)=2u_1\nabla_xu_1+2u_2\nabla_xu_2=2\nabla_xu\cdot u,\end{cases}\Longrightarrow\nabla_x(|u|)=\frac{1}{|u|}\nabla_xu\cdot u$$

alors

$$\mathrm{div}_x(|u|u)=|u|\mathrm{div}_x(u)+u\cdot\nabla_x(|u|)=|u|\mathrm{div}_x(u)+u\cdot\Big(\frac{1}{|u|}\nabla_xu\cdot u\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^T I_6dt &= -2\overline{\nu}_1r\int_0^T\int_\Omega|u|u\cdot\nabla_x\xi dxdzdt=2\overline{\nu}_1r\int_0^T\int_\Omega\xi\mathrm{div}_x(|u|u)dxdzdt\\ &= 2\overline{\nu}_1r\int_0^T\int_\Omega\xi\Big(|u|\mathrm{div}_xu+\frac{1}{|u|}u\cdot(\nabla_xu\cdot u)\Big)dxdzdt\\ &\le C\overline{\nu}_1\|\sqrt{\xi}u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}\|\sqrt{\xi}\nabla_xu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{2\times2})}\\ &\le C+\frac{\overline{\nu}_1}{2}\|\sqrt{\xi}A_x(u)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{2\times2})}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Ainsi, en remplaçant (3.30)-(3.34) dans (3.29), nous déduisons la BD-entropie (3.5). ■

3.2 Passage aux limites quand $\mu,\varepsilon\to0$ puis quand $\eta\to0$.

3.2.1 Passage aux limites quand $\mu,\varepsilon\to0$.

Nous notons la solution de (2.70) à ce niveau d'approximation par $(\xi_{\mu,\varepsilon},u_{\mu,\varepsilon},w_{\mu,\varepsilon})$. A partir de l'inégalité d'énergie (2.69), nous obtenons les régularités uniformes suivantes :

$$\begin{aligned}&\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}u_{\mu,\varepsilon}\in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \xi_{\mu,\varepsilon}\ln\xi_{\mu,\varepsilon}-\xi_{\mu,\varepsilon}+1\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))\\ &\eta\xi_{\mu,\varepsilon}^{-10}\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\ \sqrt{\delta}\xi_{\mu,\varepsilon}\in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)),\ \sqrt{r_0}u_{\mu,\varepsilon}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)\\ &\xi_{\mu,\varepsilon}^{\frac13}u_{\mu,\varepsilon}\in L^3(0,T;(L^3(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}D_x(u_{\mu,\varepsilon})\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times2}),\\ &\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\partial_zu_{\mu,\varepsilon}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\sqrt{\mu}\Delta u_{\mu,\varepsilon}\in L^2(0,T;L^2(\Omega)).\end{aligned}\tag{3.35}$$

En plus la BD-entropie (3.5) nous donne les régularités uniformes suivantes :

$$\begin{aligned}&\nabla_x\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\delta}\xi_{\mu,\varepsilon}\in L^2(0,T;H^6(\Omega)),\ \sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\partial_zw\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\ &\sqrt{\eta}\nabla\xi_{\mu,\varepsilon}^{-5}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}A_x(u_{\mu,\varepsilon})\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times2}).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Grâce au Lemme 2.2, nous avons l'estimation uniforme suivante :

$$\sqrt{\kappa}\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\sqrt[4]{\kappa}\nabla_x\xi_{\mu,\varepsilon}^{\frac14}\in L^4(0,T;(L^4(\Omega))^2).\tag{3.37}$$

Avec les régularités (3.35)-(3.37), nous montrons les résultats de compacité uniforme suivants.

Lemme 3.2 *Soit* $(\xi_{\mu,\varepsilon}, u_{\mu,\varepsilon}, w_{\mu,\varepsilon})$ *étant la solution faible de* (2.70) *satisfaisant* (3.35) *et* (3.36), *alors les estimations suivantes sont valables :*

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\|_{L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega))} + \|\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq K,\\
&\|\xi_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;H^6(\Omega))} + \|\partial_t\xi_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq K, \quad \|\xi_{\mu,\varepsilon}^{-10}\|_{L^{\frac{5}{3}}(0,T;L^{\frac{5}{2}}(\Omega))} \leq K,\\
&\|\xi_{\mu,\varepsilon}u_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;(W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega))^2)} + \|\partial_t(\xi_{\mu,\varepsilon}u_{\mu,\varepsilon})\|_{L^2(0,T;(H^{-5}(\Omega))^2)} \leq K,
\end{aligned}$$

où K *est indépendante de* ε *et* μ.

Preuve du Lemme 3.2 : La preuve est similaire à l'analyse de compacité dans le Chapitre 2. Pour la simplicité, nous omettons les détails ici. ∎

Avec le Lemme d'Aubin-Simon (Lemme 1.3) et le Lemme 3.2 en main, nous avons les résultats de compacité suivants quand $\mu, \varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}} \to \sqrt{\xi}, \text{ fortement dans } L^2([0,T]; H^1(\Omega)),\\
&\xi_{\mu,\varepsilon} \to \xi, \text{ fortement dans } C([0,T]; H^5(\Omega)), \ \xi_{\mu,\varepsilon} \rightharpoonup \xi, \text{ dans } L^2(0,T; H^6(\Omega)),\\
&u_{\mu,\varepsilon} \rightharpoonup u, \text{ dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2), \ \sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}} \rightharpoonup \sqrt{\xi}, \text{ dans } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\
&\xi_{\mu,\varepsilon}u_{\mu,\varepsilon} \to \xi u, \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^p(\Omega))^2), \text{ pour } \forall\ 1 \leq p < 3,\\
&\xi_{\mu,\varepsilon}^{-10} \to \xi^{-10}, \text{ fortement dans } L^1(0,T;L^1(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Par conséquent, $\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}} \to \sqrt{\xi}$, $\xi_{\mu,\varepsilon} \to \xi$ et $\xi_{\mu,\varepsilon}^{-10} \to \xi^{-10}$ presque partout.
Comme à la preuve du Lemme 2.5, nous pouvons démontrer que :

$$\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}u_{\mu,\varepsilon} \to \sqrt{\xi}u, \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2), \text{ quand } \mu, \varepsilon \to 0.$$

De plus, grâce à $\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\partial_z w_{\mu,\varepsilon} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, par l'inégalité de Poincaré, nous avons :

$$\int_0^h |\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}w_{\mu,\varepsilon}|^2 dz \leq c\int_0^h |\partial_z(\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}w_{\mu,\varepsilon})|^2 dz.$$

Ainsi, en intégrant sur Ω_x puis sur $[0,T]$, nous obtenons :

$$\int_0^T\int_\Omega |\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}w_{\mu,\varepsilon}|^2 dxdzdt \leq c\int_0^T\int_\Omega \xi_{\mu,\varepsilon}|\partial_z w_{\mu,\varepsilon})|^2 dxdzdt,$$

ce qui implique que $\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}w_{\mu,\varepsilon} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et il existe $l \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tel que $\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}w_{\mu,\varepsilon} \rightharpoonup l$ faiblement. Puisque $\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}} \to \sqrt{\xi}$, fortement, nous définissons w comme suit :

$$w = \begin{cases} \dfrac{l}{\sqrt{\xi}} & \text{si } \xi > 0,\\ 0 & \text{p.p. si } \xi = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Alors, la limite $l = \sqrt{\xi}\Big(\dfrac{l}{\sqrt{\xi}}\Big) = \sqrt{\xi}w$.

Par les résultats de régularité ci-dessus, nous pouvons passer aux limites quand $\mu, \varepsilon \to 0$. Pour toute fonction test $\varphi \in (C^\infty([0,T];\Omega))^2$, lorsque $\mu, \varepsilon \to 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \partial_z(\xi_{\mu,\varepsilon}u_{\mu,\varepsilon}w_{\mu,\varepsilon})\cdot\varphi dxdzdt = -\int_0^T\int_\Omega (\xi_{\mu,\varepsilon}u_{\mu,\varepsilon}w_{\mu,\varepsilon})\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega (\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}u_{\mu,\varepsilon}\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}w_{\mu,\varepsilon})\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&\longrightarrow -\int_0^T\int_\Omega (\sqrt{\xi}u\sqrt{\xi}w)\cdot\partial_z\varphi dxdzdt\\
&= -\int_0^T\int_\Omega (\xi uw)\cdot\partial_z\varphi dxdzdt = \int_0^T\int_\Omega \partial_z(\xi uw)\cdot\varphi dxdzdt.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

et

$$\int_0^T\int_\Omega \partial_z(\xi_{\mu,\varepsilon}w_{\mu,\varepsilon})\varphi dxdzdt = -\int_0^T\int_\Omega \xi_{\mu,\varepsilon}w_{\mu,\varepsilon}\partial_z\varphi dxdzdt = -\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}w_{\mu,\varepsilon}\sqrt{\xi_{\mu,\varepsilon}}\partial_z\varphi dxdzdt$$
$$\longrightarrow -\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\xi}w\sqrt{\xi}\partial_z\varphi dxdzdt = -\int_0^T\int_\Omega \xi w\partial_z\varphi dxdzdt = \int_0^T\int_\Omega \partial_z(\xi w)\varphi dxdzdt. \tag{3.41}$$

De plus, en intégrant par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\xi_{\mu,\varepsilon}\cdot\nabla_x u_{\mu,\varepsilon}\cdot\varphi dxdzdt = \varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\xi_{\mu,\varepsilon}\cdot(\nabla_x(u_{\mu,\varepsilon}\varphi) - u_{\mu,\varepsilon}\mathrm{div}_x\varphi)dxdzdt\\
&= \varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\xi_{\mu,\varepsilon}\cdot\nabla_x(u_{\mu,\varepsilon}\varphi)dxdzdt - \varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\xi_{\mu,\varepsilon}\cdot u_{\mu,\varepsilon}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt\\
&= -\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \Delta_x\xi_{\mu,\varepsilon}u_{\mu,\varepsilon}\varphi dxdzdt - \varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\xi_{\mu,\varepsilon}\cdot u_{\mu,\varepsilon}\mathrm{div}_x\varphi dxdzdt\\
&\le \varepsilon\|\Delta_x\xi_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|u_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega)^2)}\\
&\quad +\varepsilon\|\nabla_x\xi_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|u_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\mathrm{div}_x\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\\
&\longrightarrow 0,\ \text{quand } \varepsilon\to 0,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu\int_0^T\int_\Omega \Delta^2 u_{\mu,\varepsilon}\cdot\varphi dxdzdt &= \mu\int_0^T\int_\Omega \Delta u_{\mu,\varepsilon}\cdot\Delta\varphi dxdzdt\\
&\le \sqrt{\mu}\|\sqrt{\mu}\Delta u_{\mu,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\Delta\varphi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\\
&\longrightarrow 0,\ \text{quand } \mu\to 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Nous vérifions grâce à (1.27) que :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \partial_t\xi_{\mu,\varepsilon}\varphi + \mathrm{div}_x(\xi_{\mu,\varepsilon}\overline{u}_{\mu,\varepsilon})\varphi dxdzdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega \partial_t\xi_{\mu,\varepsilon}\varphi + \mathrm{div}_x(\xi_{\mu,\varepsilon}u_{\mu,\varepsilon})\varphi + \partial_z(\xi_{\mu,\varepsilon}w_{\mu,\varepsilon})\varphi dxdzdt = 0.
\end{aligned}$$

Donc, en prenant $\mu,\varepsilon\to 0$ dans (2.70), nous montrons que :

$$\begin{cases}
\partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0,\\
\partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u\otimes u) + \partial_z(\xi uw) + \nabla_x\xi + r_0 u + r\xi|u|u =\\
2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u) + \eta\nabla_x\xi^{-10} + \kappa\xi\nabla_x\Big(\dfrac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big) + \delta\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi,\\
\partial_z\xi = 0
\end{cases} \tag{3.44}$$

est valable au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$.

De plus, grâce à la semi-continuité inférieure, à la convexité et la convergence forte de $(\xi_{\mu,\varepsilon}, u_{\mu,\varepsilon}, w_{\mu,\varepsilon})$, nous pouvons passer aux limites dans l'inégalité d'énergie (2.69) et la BD-entropie (3.5) quand $\mu,\varepsilon\to 0$ avec $\delta,\ \eta,\ r_0,\ \kappa$ étant fixés. Et, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in]0,T[}\mathrm{ess}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\xi|u|^2 + \xi\ln\xi - \xi + 1 + \frac{1}{11}\eta\xi^{-10} + \kappa|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi|^2\Big)dxdz\\
&+r_0\int_0^T\int_\Omega |u|^2dxdzdt + r\int_0^T\int_\Omega \xi|u|^3dxdzdt\\
&+\int_0^T\int_\Omega 2\overline{\nu}_1\xi|D_x(u)|^2dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega \overline{\nu}_2\xi|\partial_z u|^2dxdzdt\\
&\le \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2 + (\xi_0\ln\xi_0 - \xi_0 + 1) + \frac{1}{11}\eta\xi_0^{-10} + \kappa|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi_0|^2\Big)dxdz
\end{aligned} \tag{3.45}$$

et

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in]0,T[}\text{ess} \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\xi|u+2\overline{\nu}_1\nabla_x \ln\xi|^2 - 2\overline{\nu}_1 r_0(\ln\xi)_-\Big)dxdz + 2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega \xi|\partial_z w|^2 dxdzdt\\
&+8\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega |\nabla_x\sqrt{\xi}|^2 dxdzdt + r\int_0^T\int_\Omega \xi|u|^3 dxdzdt + \overline{\nu}_2\int_0^T\int_\Omega \xi|\partial_z u|^2 dxdzdt\\
&+\frac{8}{5}\eta\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega |\nabla_x\xi^{-5}|^2 dxdzdt + \kappa\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega \xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2 dxdzdt\\
&+r_0\int_0^T\int_\Omega |u|^2 dxdzdt + 2\delta\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega |\Delta_x^3\xi|^2 dxdzdt + 2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega \xi|A_x(u)|^2 dxdzdt\\
&\le \int_\Omega \Big(\xi_0|u_0|^2 + 12\overline{\nu}_1^2|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2 + 2\overline{\nu}_1 r_0(\ln\xi)_+ - 2\overline{\nu}_1 r_0\ln\xi_0\Big)dxdz + E_0 + C.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Ainsi, pour conclure cette partie, nous donnons l'existence de solutions faibles pour le système approximatif avec la Proposition 3.1.

Proposition 3.1 *Pour tout $T>0$, le système*

$$
\begin{cases}
\partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0,\\
\partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u\otimes u) + \partial_z(\xi u w) + \nabla_x\xi + r_0 u + r\xi|u|u =\\
2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u) + \eta\nabla_x\xi^{-10} + \kappa\xi\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big) + \delta\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi,\\
\partial_z\xi = 0
\end{cases}
\tag{3.47}
$$

admet une solution faible avec des données initiales appropriées. En particulier, la solution faible (ξ,u,w) satisfait l'inégalité d'énergie (3.45) et la BD-entropie (3.46).

3.2.2 Passage aux limites quand $\eta\to 0$.

Dans cette sous-section, nous passons aux limites quand $\eta\to 0$ avec $\delta,\ \kappa,\ r_0$ étant fixés. Nous notons par (ξ_η,u_η,w_η) la solution faible à ce niveau.
A partir de la Proposition 3.1, nous avons les régularités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\xi_\eta}u_\eta \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_\eta}D_x(u_\eta)\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}),\ \sqrt{\xi_\eta}\partial_z u_\eta\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\\
&\nabla_x\sqrt{\xi_\eta}\in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\delta}\xi_\eta\in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)),\ \sqrt{\delta}\xi_\eta\in L^2(0,T;H^6(\Omega)),\\
&\sqrt{r_0}u_{\xi_\eta}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \xi_\eta^{\frac{1}{3}}u_\eta\in L^3(0,T;(L^3(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_\eta}\nabla_x u_\eta\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}),\\
&\xi_\eta\ln\xi_\eta - \xi_\eta + 1\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\ -r_0\ln\xi_\eta\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\\
&\eta\xi_\eta^{-10}\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\ \sqrt{\eta}\nabla_x\xi_\eta^{-5}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega)^2)),\ \sqrt{\xi_\eta}\partial_z w_\eta\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\sqrt{\kappa}\sqrt{\xi_\eta}\in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ \sqrt[4]{\kappa}\nabla_x\xi_\eta^{\frac{1}{4}}\in L^4(0,T;(L^4(\Omega))^2).
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Ainsi, nous avons des estimations similaires comme dans le Lemme 3.2 uniforme avec η.
De plus, nous en déduisons une compacité similaire pour (ξ_η,u_η,w_η) comme suit :

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\xi_\eta}\to\sqrt{\xi},\ \text{fortement dans } L^2([0,T];H^1(\Omega)),\\
&\xi_\eta\to\xi,\ \text{fortement dans } C([0,T];H^5(\Omega)),\ \xi_\eta\rightharpoonup\xi,\ \text{dans } L^2(0,T;H^6(\Omega)),\\
&u_\eta\rightharpoonup u,\ \text{dans } L^2(0,T;L^2),\ \xi_\eta u_\eta\rightharpoonup\xi u,\ \text{dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\\
&\xi_\eta u_\eta\to\xi u,\ \text{fortement dans } L^2(0,T;(L^p(\Omega))^2),\ \text{pour } \forall\ 1\le p<3,\\
&\sqrt{\xi_\eta}u_\eta\to\sqrt{\xi}u,\ \text{fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\\
&\sqrt{\xi_\eta}\rightharpoonup\sqrt{\xi},\ \text{dans } L^2(0,T;H^2(\Omega)).
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Donc, à ce niveau d'approximation, nous nous concentrons uniquement sur la convergence de la pression à froid $\eta\nabla\xi_\eta^{-10}$. Nous énonçons ici le Lemme 3.3.

Lemme 3.3 *Pour ξ_η défini comme dans la Proposition 3.1, on a :*

$$\eta\int_0^T\int_\Omega \xi_\eta^{-10}dxdzdt \longrightarrow 0, \qquad \textit{quand } \eta\to 0.$$

Preuve du Lemme 3.3 : La preuve est inspirée par A. F. Vasseur et C. Yu dans [46]. A partir de la BD-entropie (3.46), on a :

$$\sup_{t\in[0,T]}\operatorname{ess}\int_\Omega\big[-2\overline{\nu}_1 r_0(\ln\xi_\eta)_-\big]dxdz<+\infty \Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]}\operatorname{ess}\int_\Omega\big[-(\ln\xi_\eta)_-\big]dxdz\le C(r_0)<+\infty.$$

Or

$$-(\ln\xi_\eta)_- = -\ln(\min\{\xi_\eta,1\}) = \ln\Big(\frac{1}{\min\{\xi_\eta,1\}}\Big) = \ln\Big(\max\Big\{\frac{1}{\xi_\eta},1\Big\}\Big) = \Big(\ln\Big(\frac{1}{\xi_\eta}\Big)\Big)_+.$$

Alors

$$\sup_{t\in[0,T]}\operatorname{ess}\int_\Omega\Big(\ln\Big(\frac{1}{\xi_\eta}\Big)\Big)_+dxdz\le C(r_0)<+\infty. \tag{3.50}$$

Notez que la fonction $\Big(\ln\Big(\dfrac{1}{y}\Big)\Big)_+$, $y\in\mathbb{R}_+$ est convexe.
Ainsi, en combinant la propriété de la fonction convexe et le Lemme de Fatou, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Big(\ln\Big(\frac{1}{\xi}\Big)\Big)_+dxdz &\le \int_\Omega\liminf_{\eta\to0}\Big(\ln\Big(\frac{1}{\xi_\eta}\Big)\Big)_+dxdz\\ &\le \liminf_{\eta\to0}\int_\Omega\Big(\ln\Big(\frac{1}{\xi_\eta}\Big)\Big)_+dxdz\end{aligned} \tag{3.51}$$

ce qui implique que $\Big(\ln\Big(\dfrac{1}{\xi}\Big)\Big)_+$ est borné dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$.
Cela nous permet donc de déduire que :

$$|\{x\in\Omega_x:\ \xi(t,x)=0\}|=0,\ \text{pour presque tout } t\in[0,T], \tag{3.52}$$

où $|A|$ désigne la mesure de l'ensemble A.

En raison de $\xi_\eta\to\xi$, fortement dans $C([0,T];H^5(\Omega))$, alors $\xi_\eta\to\xi$ p.p..
Alors les limites ci-dessus et (3.52) nous permettent de déduire que :

$$\eta\xi_\eta^{-10}\longrightarrow 0 \text{ p.p. quand } \eta\to0. \tag{3.53}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, nous obtenons :

$$\|\eta\xi_\eta^{-10}\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega))} = \|\sqrt{\eta}\xi_\eta^{-5}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\le C\|\sqrt{\eta}\nabla_x\xi_\eta^{-5}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega)^2))}. \tag{3.54}$$

Par ailleurs, l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg (voir Lemme 1.2) nous founit :

$$\|\xi_\eta^{-10}\|_{L^3(\Omega)}\le C\|\nabla_x\xi_\eta^{-10}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac45}\|\xi_\eta^{-10}\|_{L^1(\Omega)}^{\frac15}. \tag{3.55}$$

De plus, comme $\nabla_x\xi_\eta^{-10}=2\xi_\eta^{-5}\nabla_x\xi_\eta^{-5}$ et $\|\xi_\eta^{-5}\|_{L^2(\Omega)}=\|\xi_\eta^{-10}\|_{L^1(\Omega)}^{\frac12}$ avec l'inégalité de Hölder nous avons :

$$\|\nabla_x\xi_\eta^{-10}\|_{L^2(\Omega)}\le 2\|\xi_\eta^{-5}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla_x\xi_\eta^{-5}\|_{L^2(\Omega)} = 2\|\xi_\eta^{-10}\|_{L^1(\Omega)}^{\frac12}\|\nabla_x\xi_\eta^{-5}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.56}$$

Par (3.48), nous rappelons que $\sqrt{\eta}\nabla_x\xi_\eta^{-5}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega)^2)$, alors en combinant (3.54), (3.55) et (3.56), nous obtenons $\eta\xi_\eta^{-10}\in L^1(0,T;L^3(\Omega))$.

Nous rappelons également par (3.48) que $\eta\xi_\eta^{-10} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$.
Ainsi, en utilisant l'inégalité d'interpolation (1.13) du Théorème 1.29, on a :

$$\|\eta\xi_\eta^{-10}\|_{L^{\frac{5}{3}}(0,T;L^{\frac{5}{3}}(\Omega))} \leq \|\eta\xi_\eta^{-10}\|^{\frac{2}{5}}_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\|\eta\xi_\eta^{-10}\|^{\frac{3}{5}}_{L^1(0,T;L^3(\Omega))} \leq C. \tag{3.57}$$

Enfin, en combinant (3.53), (3.57) et le Lemme 1.1, nous concluons que :

$$\eta\xi_\eta^{-10} \longrightarrow 0, \text{ fortement dans } L^1(0,T;L^1(\Omega)).\blacksquare$$

Ainsi, avec les résultats de compacité (3.49), nous pouvons passer aux limites quand $\eta \to 0$ dans (3.47) et nous obtenons que :

$$\begin{cases} \partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0, \\ \partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi u w) + \nabla_x\xi + r_0 u + r\xi|u|u \\ = 2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u) + \kappa\xi\nabla_x\Big(\dfrac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big) + \delta\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi, \\ \partial_z\xi = 0 \end{cases} \tag{3.58}$$

est valable au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$.

Grâce à la semi-continuité inférieure et à la convexité, nous pouvons obtenir l'inégalité d'énergie et la BD-entropie suivante en passant aux limites dans (3.45) et (3.46) quand $\eta \to 0$:

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in]0,T[}\mathrm{ess}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi|u|^2 + \xi\ln\xi - \xi + 1 + \kappa|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi|^2\Big)dxdz \\ &+r_0\int_0^T\int_\Omega|u|^2dxdzdt + r\int_0^T\int_\Omega\xi|u|^3dxdzdt \\ &+\int_0^T\int_\Omega 2\overline{\nu}_1\xi|D_x(u)|^2dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega\overline{\nu}_2\xi|\partial_z u|^2dxdzdt \\ &\leq \int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi_0|u_0|^2 + (\xi_0\ln\xi_0 - \xi_0 + 1) + \kappa|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2 + \frac{\delta}{2}|\nabla_x\Delta_x^2\xi_0|^2\Big)dxdz \end{aligned} \tag{3.59}$$

et

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in]0,T[}\mathrm{ess}\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\xi|u + 2\overline{\nu}_1\nabla_x\ln\xi|^2 - 2\overline{\nu}_1 r_0(\ln\xi)_-\Big)dxdz \\ &+8\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\nabla_x\sqrt{\xi}|^2dxdzdt + r\int_0^T\int_\Omega\xi|u|^3dxdzdt \\ &+\overline{\nu}_2\int_0^T\int_\Omega\xi|\partial_z u|^2dxdzdt + \kappa\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|\nabla_x^2\ln\xi|^2dxdzdt \\ &+r_0\int_0^T\int_\Omega|u|^2dxdzdt + 2\delta\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega|\Delta_x^3\xi|^2dxdzdt \\ &+2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|A_x(u)|^2dxdzdt + 2\overline{\nu}_1\int_0^T\int_\Omega\xi|\partial_z w|^2dxdzdt \\ &\leq \int_\Omega\Big(\xi_0|u_0|^2 + 12\overline{\nu}_1^2|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2 + 2\overline{\nu}_1 r_0(\ln\xi)_+ - 2\overline{\nu}_1 r_0\ln\xi_0\Big)dxdz + E_0 + C. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Nous obtenons ainsi l'existence de la solution faible (ξ,u,w) à ce niveau d'approximation donné par la Proposition 3.2.

Proposition 3.2 *Pour tout $T > 0$, le système (3.58) admet une solution faible avec des données initiales appropriées. En particulier, la solution faible (ξ,u,w) satisfait l'inégalité d'énergie (3.59) et la BD-entropie (3.60).*

3.3 Passage aux limites quand $\kappa, \delta, r_0 \to 0$.

A ce niveau, la solution faible (ξ, u, w) satisfait l'inégalité d'énergie (3.59) et la BD-entropie (3.60). Nous avons, donc les régularités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}D_x(u_{\delta,\kappa,r_0}) \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}),\\
&\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\partial_z u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2),\\
&\sqrt{\delta}\xi_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^6(\Omega)),\ \sqrt{r_0}u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\\
&\xi^{\frac{1}{3}}_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^3(0,T;(L^3(\Omega))^2),\ \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\nabla_x u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}),\\
&\xi_{\delta,\kappa,r_0}\ln\xi_{\delta,\kappa,r_0} - \xi_{\delta,\kappa,r_0} + 1 \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\\
&-r_0\ln\ \xi_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\ \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\partial_z w_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\sqrt{\kappa}\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ \sqrt[4]{\kappa}\nabla_x\xi^{\frac{1}{4}}_{\delta,\kappa,r_0} \in L^4(0,T;(L^4(\Omega))^2).
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Ensuite, nous allons procéder aux arguments de compacité en une seule étape.

3.3.1 Convergence de $\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}$.

Lemme 3.4 *Pour ξ_{δ,κ,r_0} satisfaisant la proposition 3.2, on a :*

$$\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \textit{ est borné dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),$$

$$\partial_t\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \textit{ est borné dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite, la suite $\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}$ converge presque partout et converge fortement dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, ce qui signifie

$$\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \to \sqrt{\xi}, \textit{ p.p. et fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De plus, on a :

$$\xi_{\delta,\kappa,r_0} \to \xi, \textit{ p.p. et fortement dans } C([0,T];L^p(\Omega)), \textit{ pour tout } p \in [1;3[.$$

Preuve du Lemme 3.4 :

$$\text{On a : } \|\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}|^2 dxdz = \int_\Omega |\xi_{\delta,\kappa,r_0}|dxdz = \|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^1(\Omega)}$$

À l'aide de l'équation de conservation de la masse $\partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0$, en intégrant sur Ω, puis sur $[0,t]$, nous avons :

$$\int_0^t\int_\Omega \partial_s\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdzds + \int_0^t\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0})dxdzds + \int_0^t\int_\Omega \partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0}w_{\delta,\kappa,r_0})dxdzds = 0.$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_\Omega \partial_s\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdzds &= \int_\Omega\int_0^t \partial_s\xi_{\delta,\kappa,r_0}dsdxdz = \int_\Omega \xi_{\delta,\kappa,r_0}(t) - \xi_{\delta,\kappa,r_0}(0)dxdz\\
&= \int_\Omega \xi_{\delta,\kappa,r_0}(t)dxdz - \int_\Omega \xi_{\delta,\kappa,r_0}(0)dxdz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0})dxdz &= \int_\Omega \xi_{\delta,\kappa,r_0}\mathrm{div}_x(u_{\delta,\kappa,r_0})dxdz + \int_\Omega u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\nabla_x\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdz\\
&= -\int_\Omega u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\nabla_x\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdz + \int_\Omega u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\nabla_x\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdz = 0
\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega \partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0} w_{\delta,\kappa,r_0}) dxdz = \int_{\Omega_x} \xi_{\delta,\kappa,r_0} \int_0^h \partial_z(w_{\delta,\kappa,r_0}) dzdx$$
$$= \int_{\Omega_x} \xi_{\delta,\kappa,r_0} w_{\delta,\kappa,r_0}(h) - w_{\delta,\kappa,r_0}(0) dzdx = 0, \text{ car } w(h) = w(0) = 0$$

alors en remplaçant, nous obtenons $\int_\Omega \xi_{\delta,\kappa,r_0}(t) dxdz = \int_\Omega \xi_{\delta,\kappa,r_0}(0) dxdz$, c'est-à-dire $\|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^1(\Omega)} = \|\xi_0\|_{L^1(\Omega)}$. Ainsi, $\|\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\xi_0\|_{L^1(\Omega)}$.
De plus, comme $\nabla_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)$, nous avons $\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.
Ensuite, un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned}
\partial_t \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} &= \frac{\partial_t \xi_{\delta,\kappa,r_0}}{2\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}} = -\frac{\operatorname{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0}) + \partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0} w_{\delta,\kappa,r_0})}{2\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \operatorname{div}_x(u_{\delta,\kappa,r_0}) - u_{\delta,\kappa,r_0} \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} - \frac{1}{2}\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \partial_z w_{\delta,\kappa,r_0} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \operatorname{div}_x(u_{\delta,\kappa,r_0}) - \operatorname{div}_x(\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} u_{\delta,\kappa,r_0}) - \frac{1}{2}\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \partial_z w_{\delta,\kappa,r_0}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

ce qui nous fournit en utilisant (3.61) $\partial_t \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
En utilisant le Lemme 1.3, nous avons, quand $\delta, \kappa, r_0 \to 0$,

$$\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \to \sqrt{\xi}, \text{ fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ et alors } \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \to \sqrt{\xi} \text{ p.p..}$$

En utilisant le théorème d'injection de Sobolev, nous obtenons que $\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^\infty(0,T;L^6(\Omega))$, alors

$$\xi_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;L^3(\Omega)).$$

Puisque $\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)$, nous déduisons

$$\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} = \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^2), \tag{3.63}$$

ce qui nous donne

$$\operatorname{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0}) \in L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)).$$

Ceci combiné avec $\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \partial_z w_{\delta,\kappa,r_0}$ et l'équation de continuité $(3.58)_1$, nous fournit

$$\partial_t \xi_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega)).$$

De plus, nous avons :

$$\nabla_x \xi_{\delta,\kappa,r_0} = 2\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \nabla_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^\infty(0,T;(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^2). \tag{3.64}$$

Donc ξ_{δ,κ,r_0} est borné dans $L^\infty(0,T;W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega))$. En utilisant le Lemme 1.3 nous obtenons :

$$\xi_{\delta,\kappa,r_0} \to \xi, \ \textit{fortement dans } C([0,T];L^p(\Omega)), \text{ pour tout } p \in [1;3[. \tag{3.65}$$

Et par conséquent, nous avons

$$\xi_{\delta,\kappa,r_0} \to \xi, \quad \text{p.p.},$$

quand $\delta, \kappa, r_0 \to 0$.
Ainsi, la preuve de ce lemme est complétée. ■

3.3.2 Convergence du moment.

Lemme 3.5 *Quitte à extraire une sous-suite, le moment* $m_{\delta,\kappa,r_0} = \xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0}$ *satisfait*

$$m_{\delta,\kappa,r_0} \longrightarrow m, \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^q(\Omega))^2), \text{ pour tout } q \in [1;1,5[.$$

et

$$m_{\delta,\kappa,r_0} \longrightarrow m, \text{ p.p. pour } (x,t) \in \Omega\times]0,T[.$$

En particulier, on peut définir $u(t,x,z) = m(t,x,z)/\xi(t,x)$ *en dehors de l'ensemble* $\{x/\xi(t,x) = 0\}$. *On obtient alors :*

$$\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} \longrightarrow \xi u, \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^q(\Omega))^2), \text{ pour tout } q \in [1;1,5[.$$

Preuve du Lemme 3.5 : Par (3.61), nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
&\nabla_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0}) = \nabla_x \xi_{\delta,\kappa,r_0} \otimes u_{\delta,\kappa,r_0} + \xi_{\delta,\kappa,r_0} \nabla_x u_{\delta,\kappa,r_0} \\
&= 2\nabla_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \otimes \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} u_{\delta,\kappa,r_0} + \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \nabla_x u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^1(\Omega))^{2\times 2}), \\
&\qquad\qquad \partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0}) = \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \partial_z u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^2)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

ce qui en plus avec (3.63) nous donnent que

$$\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(W^{1,1}(\Omega))^2).$$

De plus, comme

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0}) = 2\overline{\nu}_1 \mathrm{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0} D_x(u_{\delta,\kappa,r_0})) + \overline{\nu}_2 \partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0} \partial_z u_{\delta,\kappa,r_0}) \\
&+\kappa \xi_{\delta,\kappa,r_0} \nabla_x \Big(\frac{\Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}{\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}\Big) + \delta \xi_{\delta,\kappa,r_0} \nabla_x \Delta_x^5 \xi_{\delta,\kappa,r_0} - \mathrm{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} \otimes u_{\delta,\kappa,r_0}) \\
&-\partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} w_{\delta,\kappa,r_0}) - \nabla_x \xi_{\delta,\kappa,r_0} + r_0 u_{\delta,\kappa,r_0} - r \xi_{\delta,\kappa,r_0} |u_{\delta,\kappa,r_0}| u_{\delta,\kappa,r_0},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

nous pouvons montrer que

$$\partial_t(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0}) \text{ est borné dans } L^2(0,T;(H^{-s}(\Omega))^2), \text{ pour une certaine constante } s > 0.$$

En fait en utilisant (3.61), nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
&\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} \otimes u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;(L^1(\Omega))^{2\times 2}),\ \xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} w_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^1(\Omega))^2), \\
&\xi_{\delta,\kappa,r_0} \partial_z u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^2),\ \xi_{\delta,\kappa,r_0} D_x(u_{\delta,\kappa,r_0}) \in L^2(0,T;(L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^{2\times 2}).
\end{aligned}$$

En utilisant les injections de Sobolev, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} \otimes u_{\delta,\kappa,r_0}) \in L^\infty(0,T;(W^{-2,2}(\Omega))^2),\ \partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0} u_{\delta,\kappa,r_0} w_{\delta,\kappa,r_0}) \in L^2(0,T;(W^{-2,2}(\Omega))^2), \\
&\partial_z(\xi_{\delta,\kappa,r_0} \partial_z u_{\delta,\kappa,r_0}) \in L^2(0,T;(W^{-2,2}(\Omega))^2),\ \mathrm{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0} D_x(u_{\delta,\kappa,r_0})) \in L^2(0,T;(W^{-2,2}(\Omega))^2).
\end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{\delta} \xi_{\delta,\kappa,r_0} \in L^\infty(0,T;H^5(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^6(\Omega))$ et $\sqrt{\kappa}\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ on a :

$$\delta \xi_{\delta,\kappa,r_0} \nabla_x \Delta_x^5 \xi_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(W^{-5,2}(\Omega))^2)$$

et

$$\begin{aligned}
&\kappa \xi_{\delta,\kappa,r_0} \nabla_x \Big(\frac{\Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}{\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}\Big) = \kappa \xi_{\delta,\kappa,r_0} \nabla_x \Big(\frac{\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\Big) \\
&= \kappa \xi_{\delta,\kappa,r_0} \Big[\frac{\nabla_x\big(\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\big)}{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} + \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \nabla_x \Big(\frac{1}{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\Big)\Big] \\
&= \kappa \xi_{\delta,\kappa,r_0} \Big[\frac{\nabla_x\big(\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\big)}{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} - \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \Big(\frac{\nabla_x \xi_{\delta,\kappa,r_0}}{\xi^2_{\delta,\kappa,r_0}}\Big)\Big] \\
&= \kappa \nabla_x\big(\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\big) - 2\kappa \Delta_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \nabla_x \sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^2(0,T;(W^{-3,2}(\Omega))^2).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons que

$$\partial_t(\xi_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0}) \text{ est borné dans } L^2(0,T;(H^{-5}(\Omega))^2).$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 1.3 et le Lemme 3.4, nous complétons la preuve du Lemme 3.5. ■

Avec le Lemme 3.4 et le Lemme 3.5 en main, comme à la preuve du Lemme 2.5, nous déduisons que :

$$\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}u_{\delta,\kappa,r_0} \to \sqrt{\xi}u \text{ fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2) \text{ quand } \kappa,\delta,r_0 \to 0. \tag{3.68}$$

3.3.3 Convergence des termes r_0u_{δ,κ,r_0}, $\operatorname{div}_x\big(\xi_{\delta,\kappa,r_0}D_x(u_{\delta,\kappa,r_0})\big)$, $\xi_{\delta,\kappa,r_0}\nabla_x\Delta_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}$ et $\kappa\xi_{\delta,\kappa,r_0}\nabla_x\Big(\Delta_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\Big/\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\Big)$.

Pour toute fonction test $\varphi \in (C^\infty([0,T[;\Omega))^2$, nous avons :

$$r_0\int_0^T\int_\Omega u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\varphi dxdzdt \le \sqrt{r_0}\|\sqrt{r_0}u_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\varphi\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \longrightarrow 0,$$

quand $r_0 \to 0$, car par (3.61) $\sqrt{r_0}u_{\delta,\kappa,r_0} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$.

Concernant le terme de diffusion $\operatorname{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0}D_x(u_{\delta,\kappa,r_0}))$, en utilisant (2.64), nous savons que :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \operatorname{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0}D_x(u_{\delta,\kappa,r_0}))\cdot\varphi dxdzdt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\Big(\xi_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\Delta_x\varphi + 2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\cdot\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}u_{\delta,\kappa,r_0}\Big)dxdzdt\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\Big(\xi_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\operatorname{div}_x([\nabla_x\varphi]^t) + 2[\nabla_x\varphi]^t\cdot\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\cdot\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}u_{\delta,\kappa,r_0}\Big)dxdzdt.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Grâce à $\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \in L^\infty([0,T];(L^2(\Omega))^2)$, nous obtenons que :

$$\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}} \rightharpoonup \nabla_x\xi \text{ faiblement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),\ \text{quand } \delta,\kappa,r_0 \to 0,$$

ce qui combiné avec le Lemme 3.4, le Lemme 3.5 et (3.68), nous donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\Big(\xi_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\Delta_x\varphi + 2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\cdot\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}u_{\delta,\kappa,r_0}\Big)dxdzdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\Big(\xi_{\delta,\kappa,r_0}u_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\operatorname{div}_x([\nabla_x\varphi]^t) + 2[\nabla_x\varphi]^t\cdot\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\cdot\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}u_{\delta,\kappa,r_0}\Big)dxdzdt\\
&\to\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\Big(\xi u\cdot\Delta_x\varphi + 2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\xi}u\Big)dxdzdt\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\Big(\xi u\cdot\operatorname{div}_x([\nabla_x\varphi]^t) + 2[\nabla_x\varphi]^t\cdot\nabla_x\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\xi}u\Big)dxdzdt,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

quand $\delta,\kappa,r_0 \to 0$. Ainsi,

$$\int_0^T\int_\Omega \operatorname{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0}D_x(u_{\delta,\kappa,r_0}))\cdot\varphi dxdzdt \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega \operatorname{div}_x(\xi D_x(u))\cdot\varphi dxdzdt,$$

quand $\kappa,\delta,r_0 \to 0$.

Pour le terme quantique, en rappelant (3.61), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\kappa\int_0^T\int_\Omega \xi_{\delta,\kappa,r_0}\nabla_x\Big(\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}{\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}\Big)\cdot\varphi dxdzdt = -\kappa\int_0^T\int_\Omega\frac{\Delta_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}{\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}}\operatorname{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0}\varphi)dxdzdt\\
&=-2\kappa\int_0^T\int_\Omega\Delta_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\cdot\varphi dxdzdt - \kappa\int_0^T\int_\Omega\Delta_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\operatorname{div}_x\varphi dxdzdt\\
&\le 2\sqrt{\kappa}\|\sqrt{\kappa}\Delta_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\nabla_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;(L^\infty(\Omega))^2)}\\
&\quad+\sqrt{\kappa}\|\sqrt{\kappa}\Delta_x\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\sqrt{\xi_{\delta,\kappa,r_0}}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\operatorname{div}_x\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\\
&\longrightarrow 0,\ \text{quand } \kappa \to 0.
\end{aligned}$$

Finalement, nous prouvons la convergence du terme d'ordre supérieur $\xi_{\delta,\kappa,r_0}\nabla_x\Delta_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}$. En utilisant l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg (voir le Lemme 1.2), nous avons :

$$\|\nabla_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla_x^6\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{(L^2(\Omega))^{2^6}}^{\frac{9}{11}}\|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{2}{11}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\delta\|\nabla_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{(L^2(\Omega))^{2^5}}^{\frac{22}{9}} \leq C\delta\|\nabla_x^6\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{(L^2(\Omega))^{2^6}}^2\|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{4}{9}}\\
\Longrightarrow\ &\int_0^T\delta\|\nabla_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{(L^2(\Omega))^{2^5}}^{\frac{22}{9}}dt \leq C\int_0^T\delta\|\nabla_x^6\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{(L^2(\Omega))^{2^6}}^2\|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^3(\Omega)}^{\frac{4}{9}}dt\\
\Longrightarrow\ &\int_0^T\|\delta^{\frac{9}{22}}\nabla_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{(L^2(\Omega))^{2^5}}^{\frac{22}{9}}dt \leq C\Big(\sup_{t\in]0,T[}\|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^3(\Omega)}\Big)^{\frac{4}{9}}\int_0^T\|\sqrt{\delta}\nabla_x^6\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{(L^2(\Omega))^{2^6}}^2dt\\
&\qquad\leq C\|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^\infty(0,T;L^3(\Omega))}^{\frac{4}{9}}\|\sqrt{\delta}\nabla_x^6\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2^6})}^2\\
&\qquad\leq C\|\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^\infty(0,T;L^3(\Omega))}^{\frac{4}{9}}\|\sqrt{\delta}\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^2(0,T;H^6(\Omega))}^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\delta^{\frac{9}{22}}\nabla_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0} \in L^{\frac{22}{9}}(0,T;(L^2(\Omega))^{2^5}).$$

Pour toute fonction test $\varphi \in (C^\infty([0,T];\Omega))^2$, en intégrant par parties, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
&\delta\int_0^T\int_\Omega\xi_{\delta,\kappa,r_0}\nabla_x\Delta_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\varphi dxdzdt = -\delta\int_0^T\int_\Omega\Delta_x^2\mathrm{div}_x(\xi_{\delta,\kappa,r_0}\varphi)\Delta_x^3\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdzdt\\
&= -\delta\int_0^T\int_\Omega\Delta_x^2(\nabla_x\xi_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\varphi + \xi_{\delta,\kappa,r_0}\mathrm{div}_x\varphi)\Delta_x^3\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdzdt\\
&= -\delta\int_0^T\int_\Omega\Delta_x^2(\nabla_x\xi_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\varphi)\Delta_x^3\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdzdt - \delta\int_0^T\int_\Omega\Delta_x^2(\xi_{\delta,\kappa,r_0}\mathrm{div}_x\varphi)\Delta_x^3\xi_{\delta,\kappa,r_0}dxdzdt
\end{aligned}$$

Nous nous focalisons sur le terme le plus délicat :

$$\begin{aligned}
&\Big|\delta\int_0^T\int_\Omega\Delta_x^2(\nabla_x\xi_{\delta,\kappa,r_0})\Delta_x^3\xi_{\delta,\kappa,r_0}\varphi dxdzdt\Big|\\
&\leq C\delta^{\frac{1}{11}}\|\sqrt{\delta}\nabla_x^6\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2^6})}\|\delta^{\frac{9}{22}}\nabla_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\|_{L^{\frac{22}{9}}(0,T;(L^2(\Omega))^{2^5})}\|\varphi\|_{L^{11}(0,T;L^\infty(\Omega))} \to 0,
\end{aligned}\tag{3.71}$$

quand $\delta \to 0$. Comme les arguments ci-dessus, on peut contrôler les autres termes de

$$\delta\int_0^T\int_\Omega\xi_{\delta,\kappa,r_0}\nabla_x\Delta_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\varphi dxdzdt.$$

Ainsi, on a :

$$\delta\int_0^T\int_\Omega\xi_{\delta,\kappa,r_0}\nabla_x\Delta_x^5\xi_{\delta,\kappa,r_0}\cdot\varphi dxdzdt \longrightarrow 0,\ \text{quand } \delta \to 0.$$

En passant aux limites dans (3.58) quand $\delta \to 0,\ \kappa \to 0$ et $r_0 \to 0$, nous déduisons que :

$$\begin{cases}
\partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi u) + \partial_z(\xi w) = 0,\\[2mm]
\partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u\otimes u) + \partial_z(\xi uw) + \nabla_x\xi + r\xi|u|u\\
= 2\overline{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \overline{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u),\\[2mm]
\partial_z\xi = 0
\end{cases}\tag{3.72}$$

est valable au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$.

Ainsi, nous avons complété la preuve du Théorème 1.34. ■

3.3.4 Preuve du Théorème 1.35.

Maintenant on considère la solution faible (ξ, u, w) du système (0.4).
A partir du Théorème 1.34, nous avons les régularités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\xi} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\ \sqrt{\xi}u \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2), \xi^{\frac{1}{3}}u \in L^3(0,T;(L^3(\Omega))^2),\\
&\xi\nabla_x u,\ \xi[\nabla_x u]^t \in L^2(0,T;(W^{-1,1}(\Omega))^{2\times 2}),\ \sqrt{\xi}w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\sqrt{\xi}\partial_z w \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega)),\ \sqrt{\xi}\partial_z u \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2).
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Afin de prouver le Théorème 1.35, nous rappelons que :

$$\rho(t,x,y) = \xi(t,x)e^{-y} \text{ et } w(t,x,y) = v(t,x,y)e^{-y}$$

et nous présentons le Lemme 3.6.

Lemme 3.6 *Par le changement de variable $z = 1 - e^{-y}$ et $\dfrac{dz}{dy} = e^{-y}$, on obtient les propriétés suivantes :*

$$
\begin{aligned}
\|\sqrt{\rho}u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\tilde\Omega))^2)} &= \|\sqrt{\xi}u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)},\\
\|\sqrt[3]{\rho}u\|_{L^3(0,T;(L^3(\tilde\Omega))^2)} &= \|\sqrt[3]{\xi}u\|_{L^3(0,T;(L^3(\Omega))^2)},\\
\|\rho\nabla_x u\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\tilde\Omega))^{2\times 2}))} &= \|\xi\nabla_x u\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\Omega))^{2\times 2}))},\\
\|\rho[\nabla_x u]^t\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\tilde\Omega))^{2\times 2}))} &= \|\xi[\nabla_x u]^t\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\Omega))^{2\times 2}))},\\
\|\sqrt{\nu_2}\partial_y u\|_{L^2(0,T;(L^2(\tilde\Omega))^2)} &= \sqrt{\nu_2}\|\sqrt{\xi}\partial_z u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)},\\
\|\partial_y\rho\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\tilde\Omega))^2)} &= \sqrt{\alpha}\|\xi\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)},\\
\|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\tilde\Omega))} &\le \frac{\sqrt{5}}{2}\|\sqrt{\xi}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))},\\
\|\sqrt{\rho}v\|_{L^2(0,T;L^2(\tilde\Omega))} &\le C\|\sqrt{\xi}w\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},\\
\|\sqrt{\rho}\partial_y v\|_{L^2(0,T;L^2(\tilde\Omega))} &\le C\Big(\|\sqrt{\xi}\partial_z w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\xi}w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

où

$$\alpha = \frac{1}{1-e^{-H}}\int_0^{1-e^{-H}}(1-z)dz < +\infty.$$

Preuve du Lemme 3.6 : Par calcul direct, nous obtenons les résultats suivantes.

▶

$$
\begin{aligned}
\|\sqrt{\rho}u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\tilde\Omega))^2)} &= \operatorname*{sup\,ess}_{t\in]0,T[}\|\sqrt{\rho}u\|_{(L^2(\tilde\Omega))^2} = \operatorname*{sup\,ess}_{t\in]0,T[}\Big(\int_{\tilde\Omega}|\sqrt{\rho}u|^2dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \operatorname*{sup\,ess}_{t\in]0,T[}\Big(\int_\Omega|\sqrt{\xi e^{-y}}u|^2dx(e^y dz)\Big)^{\frac{1}{2}} = \operatorname*{sup\,ess}_{t\in]0,T[}\Big(\int_\Omega|\sqrt{\xi}u|^2e^{-y}e^ydxdz\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \operatorname*{sup\,ess}_{t\in]0,T[}\Big(\int_\Omega|\sqrt{\xi}u|^2dxdz\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|\sqrt{\xi}u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^2)}.
\end{aligned}
$$

▶

$$
\begin{aligned}
\|\sqrt[3]{\rho}u\|_{L^3(0,T;(L^3(\tilde\Omega))^2)} &= \Big(\int_0^T\|\sqrt[3]{\rho}u\|^3_{(L^3(\tilde\Omega))^2}dt\Big)^{\frac{1}{3}} = \Big(\int_0^T\int_{\tilde\Omega}|\sqrt[3]{\rho}u|^3dxdydt\Big)^{\frac{1}{3}}\\
&= \Big(\int_0^T\int_{\tilde\Omega}|\sqrt[3]{\xi e^{-y}}u|^3dx(e^ydz)dt\Big)^{\frac{1}{3}} = \Big(\int_0^T\int_{\tilde\Omega}|\sqrt[3]{\xi}u|^3e^{-y}e^ydxdzdt\Big)^{\frac{1}{3}}\\
&= \Big(\int_0^T\int_{\tilde\Omega}|\sqrt[3]{\xi}u|^3dxdzdt\Big)^{\frac{1}{3}}\\
&= \|\sqrt[3]{\xi}u\|_{L^3(0,T;(L^3(\Omega))^2)}.
\end{aligned}
$$

►

$$
\begin{aligned}
\|\sqrt{\nu_2}\partial_y u\|_{L^2(0,T;(L^2(\tilde\Omega))^2)} &= \Big(\int_0^T\int_{\tilde\Omega}|\sqrt{\nu_2}\partial_y u|^2dxdydt\Big)^{\frac12} = \Big(\int_0^T\int_{\tilde\Omega}|\sqrt{\overline{\nu}_2\rho e^{2y}}\partial_y u|^2dxdydt\Big)^{\frac12}\\
&= \sqrt{\overline{\nu}_2}\Big(\int_0^T\int_{\tilde\Omega}|\sqrt{\xi e^{-y}e^{2y}}\partial_y u|^2dxdydt\Big)^{\frac12}\\
&= \sqrt{\overline{\nu}_2}\Big(\int_0^T\int_{\Omega}e^{-y}|\sqrt{\xi}\partial_z u|^2dx(e^y dz)dt\Big)^{\frac12}\\
&= \sqrt{\overline{\nu}_2}\Big(\int_0^T\int_{\Omega}|\sqrt{\xi}\partial_z u|^2dxdzdt\Big)^{\frac12}\\
&= \sqrt{\overline{\nu}_2}\|\sqrt{\xi}\partial_y u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}.
\end{aligned}
$$

►

$$
\|\partial_y\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\tilde\Omega))} = \sup_{t\in]0,T[}\mathrm{ess}\Big(\|\partial_y\rho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\Big),
$$

or

$$
\begin{aligned}
\|\partial_y\rho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} &= \int_{\tilde\Omega}|\partial_y\rho|^2dxdy = \int_\Omega|\partial_y(\xi e^{-y})|^2dx(e^y dz)\\
&= \int_\Omega|-\xi e^{-y}|^2e^y dxdz = \int_\Omega|\xi|^2e^{-y}dxdz\\
&= \int_0^h e^{-y}dz\int_{\Omega_x}|\xi|^2dx = \int_0^h e^{-y}dz\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\Omega_x}|\xi|^2dxdz\\
&= \frac1h\int_0^h(1-z)dz\|\xi\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \alpha\|\xi\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{1-e^{-H}}\int_0^{1-e^{-H}}(1-z)dz = \frac1h\int_0^h(1-z)dz = \frac1h\Big(\int_0^h 1dz - \int_0^h zdz\Big)\\
&= \frac1h\Big(h-\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_0^h\Big) = \frac{2-h}{2} = \frac{2-(1-e^{-H})}{2} = \frac{1+e^{-H}}{2} < +\infty.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|\partial_y\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\tilde\Omega))} = \sqrt{\alpha}\|\xi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}
$$

►

$$
\|\rho\nabla_x u\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\tilde\Omega))^{2\times2})} = \Big(\int_0^T\|\rho\nabla_x u\|^2_{(W^{-1,1}(\tilde\Omega))^{2\times2}}dt\Big)^{\frac12},
$$

or

$$
\begin{aligned}
\|\rho\nabla_x u\|_{(W^{-1,1}(\tilde\Omega))^{2\times2}} &= \sup_{\varphi\in(W_0^{1,\infty}(\tilde\Omega))^{2\times2},\ \varphi\neq0}\frac{|\langle\rho\nabla_x u,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{(W_0^{1,\infty}(\tilde\Omega))^{2\times2}}}\\
&= \sup_{\varphi\in(W_0^{1,\infty}(\tilde\Omega))^{2\times2},\ \varphi\neq0}\frac{|\langle\xi e^{-y}\nabla_x u,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{(W_0^{1,\infty}(\tilde\Omega))^{2\times2}}} = \sup_{\varphi\in(W_0^{1,\infty}(\tilde\Omega))^{2\times2},\ \varphi\neq0}\frac{|\langle\xi\nabla_x u,e^{-y}\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{(W_0^{1,\infty}(\tilde\Omega))^{2\times2}}}\\
&= \sup_{\psi\in(W_0^{1,\infty}(\Omega))^{2\times2},\ \psi\neq0}\frac{|\langle\xi\nabla_x u,\psi\rangle|}{\|\psi\|_{(W_0^{1,\infty}(\Omega))^{2\times2}}},
\end{aligned}
$$

avec $\psi = e^{-y}\varphi$. Donc

$$
\|\rho\nabla_x u\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\tilde\Omega))^{2\times2})} = \|\xi\nabla_x u\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\Omega))^{2\times2})}.
$$

► De même que ci-dessus, on a :

$$
\|\rho[\nabla_x u]^t\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\tilde\Omega))^{2\times2})} = \|\xi[\nabla_x u]^t\|_{L^2(0,T;(W^{-1,1}(\Omega))^{2\times2})}.
$$

▶ On a : $\|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\tilde{\Omega}))} = \underset{t\in]0,T[}{\sup\mathrm{ess}}\ \|\sqrt{\rho}\|_{H^1(\tilde{\Omega})}$ et

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\rho}\|^2_{H^1(\tilde{\Omega})} = \|\sqrt{\rho}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla\sqrt{\rho}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} = \|\sqrt{\rho}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_x\sqrt{\rho}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\partial_y\sqrt{\rho}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\\
&= \int_{\tilde{\Omega}} |\sqrt{\rho}|^2 dxdy + \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla_x\sqrt{\rho}|^2 dxdy + \int_{\tilde{\Omega}} |\partial_y\sqrt{\rho}|^2 dxdy\\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \rho dxdy + \int_{\tilde{\Omega}} \Big|\frac{\nabla_x\rho}{2\sqrt{\rho}}\Big|^2 dxdy + \int_{\tilde{\Omega}} \Big|\frac{\partial_y\rho}{2\sqrt{\rho}}\Big|^2 dxdy\\
&= \int_{\Omega} \xi e^{-y} dx(e^y dz) + \int_{\Omega} \Big|\frac{\nabla_x(\xi e^{-y})}{2\sqrt{\xi e^{-y}}}\Big|^2 dx(e^y dz) + \int_{\Omega} \Big|\frac{\partial_y(\xi e^{-y})}{2\sqrt{\xi e^{-y}}}\Big|^2 dx(e^y dz)\\
&= \int_{\Omega} \xi dxdz + \int_{\Omega} \Big|\frac{\nabla_x \xi e^{-y}}{2\sqrt{\xi}\sqrt{e^{-y}}}\Big|^2 e^y dxdz + \int_{\Omega} \Big|\frac{-\xi e^{-y}}{2\sqrt{\xi}\sqrt{e^{-y}}}\Big|^2 e^y dxdz\\
&= \int_{\Omega} |\sqrt{\xi}|^2 dxdz + \int_{\Omega} \Big|\frac{\nabla_x \xi}{2\sqrt{\xi}}\Big|^2 dxdy + \int_{\Omega} \Big|\frac{\xi}{2\sqrt{\xi}}\Big|^2 dxdz\\
&= \|\sqrt{\xi}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla_x\sqrt{\xi}|^2 dxdy + \frac{1}{4}\int_{\Omega} |\sqrt{\xi}|^2 dxdz\\
&= \|\sqrt{\xi}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_x\sqrt{\xi}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\sqrt{\xi}\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \|\sqrt{\xi}\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\sqrt{\xi}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\sqrt{\xi}\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\sqrt{\xi}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{5}{4}\|\sqrt{\xi}\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

donc

$$\|\sqrt{\rho}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\tilde{\Omega}))} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\|\sqrt{\xi}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}.$$

En plus,

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{\rho}\partial_y v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\tilde{\Omega}))} &= \int_0^T\int_0^H\int_{\tilde{\Omega}_x} |\sqrt{\rho}\partial_y v|^2 dxdydt = \int_0^T\int_0^H\int_{\tilde{\Omega}_x} \rho|\partial_y(we^y)|^2 dxdydt\\
&= \int_0^T\int_0^H\int_{\tilde{\Omega}_x} \rho|\partial_y we^y + we^y|^2 dxdydt\\
&= \int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} \xi e^{-y}|e^{-y}\partial_z we^y + we^y|^2 dx(e^y dz)dt\\
&= \int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} \xi|\partial_z w + we^y|^2 dxdzdt\\
&\leq \int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} \xi\big[2(|\partial_z w|^2 + |we^y|^2)\big] dxdzdt\\
&\leq 2\int_0^T\int_0^h\int_{\tilde{\Omega}_x} \xi|\partial_z w|^2 + \xi w^2\frac{1}{(1-z)^2} dxdzdt\\
&\leq 2\int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} |\sqrt{\xi}\partial_z w|^2 dxdzdt + \frac{2}{(1-h)^2}\int_0^T\int_0^h\int_{\tilde{\Omega}_x} |\sqrt{\xi}w|^2 dxdzdt\\
&\leq C\big(\|\sqrt{\xi}\partial_z w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\xi}w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)}\big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{\rho}v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\tilde{\Omega}))} &= \int_0^T\int_0^H\int_{\tilde{\Omega}_x} |\sqrt{\rho}v|^2 dxdydt = \int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} \xi e^{-y}|we^y|^2 dx(e^y dz)dt\\
&= \int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} \xi w^2 e^{2y} dxdzdt = \int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} \xi w^2\frac{1}{(1-z)^2} dxdzdt\\
&\leq \frac{1}{(1-h)^2}\int_0^T\int_0^h\int_{\Omega_x} |\sqrt{\xi}w|^2 dxdzdt\\
&\leq C\|\sqrt{\xi}w\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Donc la preuve du Lemme 3.6 est achevée. ■
Avec les estimations du Lemme 3.6 en main, le Théorème 1.35 est prouvé. ■

Remarque 3.1 Comme mentionné dans l'Introduction générale, le terme d'amortissement $r\xi|u|u$ peut être retiré de (1.16). C'est-à-dire que nous pouvons prouver l'existence de solutions faibles du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}_x(\rho u \otimes u) + \partial_y(\rho u v) + \nabla_x P(\rho) = 2\mathrm{div}_x(\nu_1 D_x(u)) + \partial_y(\nu_2 \partial_y u), \\ \partial_y P(\rho) = -g\rho, \ P(\rho) = c^2\rho. \end{cases} \tag{3.74}$$

Pour cela, il suffit d'ajouter le terme $r_1\xi|u|^2u$ au système approximatif (2.1) que nous avons construit dans le Chapitre 2. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi\bar{u}) = \varepsilon\Delta_x\xi, \\ \partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi u w) + \nabla_x\xi + r_0 u + r\xi|u|u + r_1\xi|u|^2u \\ +\mu\Delta^2 u + \varepsilon\nabla_x\xi\cdot\nabla_x u = 2\bar{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \bar{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u) \\ +\eta\nabla_x\xi^{-10} + \kappa\xi\nabla_x\Big(\dfrac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big) + \delta\xi\nabla_x\Delta_x^5\xi, \\ \partial_z\xi = 0. \end{cases} \tag{3.75}$$

En utilisant les mêmes calculs que dans la preuve du Théorème 1.35 et en prenant les cinq niveaux limites quand ε, μ, η, δ, $r \to 0$, on obtient l'existence globale de solutions faibles du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\xi + \mathrm{div}_x(\xi\bar{u}) = \varepsilon\Delta_x\xi, \\ \partial_t(\xi u) + \mathrm{div}_x(\xi u \otimes u) + \partial_z(\xi u w) + \nabla_x\xi + r_0 u + r_1\xi|u|^2u \\ = 2\bar{\nu}_1\mathrm{div}_x(\xi D_x(u)) + \bar{\nu}_2\partial_z(\xi\partial_z u) + \kappa\xi\nabla_x\Big(\dfrac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big), \\ \partial_z\xi = 0. \end{cases} \tag{3.76}$$

Maintenant, on garde les termes r_0u, $r_1\xi|u|^2u$ et $\kappa\xi\nabla_x\Big(\dfrac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)$ dans le système 3.76. Il est à noter que les termes $r_1\xi|u|^2u$ et $\kappa\xi\nabla_x\Big(\dfrac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big)$ peuvent assurer que l'approximation de la vitesse $v = \phi(\xi)u$ soit borné dans $L^2(0,T,(H^1(\Omega))^2)$ (voir le Lemme 2.1 du travail de Vasseur et Yu dans [45]), où $\phi(\xi) = \phi_m(\xi)\phi_K(\xi)$, et ϕ_m et ϕ_K sont deux fonctions de troncature $\mathcal{C}^\infty$ définies comme suit :

$$\phi_m(\xi) = 1, \text{ pour tout } \xi > \frac{1}{m}, \quad \phi_m(\xi) = 0, \text{ pour tout } \xi < \frac{1}{2m}$$

et

$$\phi_K(\xi) = 1, \text{ pour tout } \xi < K, \quad \phi_K(\xi) = 0, \text{ pour tout } \xi > 2K,$$

ici $m,\ K > 0$ sont des nombres réels quelconques, et $|\phi_m'| \le 2m,\ |\phi_K'| \le \dfrac{2}{K}$.

Pour faire les autres limites $r_0,\ r_1,\ \kappa \to 0$, il est nécessaire d'obtenir une estimation de type Mellet-Vasseur (voir [45]). L'idée de la preuve de l'estimation de type Mellet-Vasseur est la suivante. Comme au Lemme 2.3 de Vasseur et Yu dans [45], pour tout $\psi(t) \in \mathcal{D}(]-1,+\infty[)$, on peut prouver que

$$\begin{aligned} &-\int_0^T\int_\Omega \psi_t\xi\varphi_n(v)dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega \psi(t)\varphi_n'(v)\mathbb{F}dxdzdt \\ &\int_0^T\int_\Omega \psi(t)\mathbb{S} : \nabla_x(\psi_n'(v))dxdzdt + \int_0^T\int_\Omega \psi(t)\mathbb{S}_1\partial_z(\psi_n'(v))dxdzdt \\ &= \int_0^T\int_\Omega \xi_0\varphi_n(v_0)\psi(0)dxdzdt, \end{aligned}$$

où

$$\mathbb{S} = \xi\phi(\xi)\Big(D_x(u) + \kappa\frac{\Delta_x\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\mathbb{I}\Big), \quad \mathbb{S}_1 = \xi\phi(\xi)\partial_z u,$$

$$\mathbb{F} = \xi^2 u\phi'(\xi)\mathrm{div}_x u + \xi^2 u\phi'(\xi)\partial_z w + \nabla_x \xi \phi(\xi) + D_x(u)\cdot \nabla_x \phi(\xi)\xi + r_0 u\phi(\xi)$$
$$+ r_1 \xi |u|^2 u\phi(\xi) + \kappa\sqrt{\xi}\nabla_x\phi(\xi)\Delta_x\sqrt{\xi} + 2\kappa\phi(\xi)\nabla_x\sqrt{\xi}\Delta_x\sqrt{\xi},$$

et φ_n est une fonction de troncature

$$\varphi_n(u) = \tilde{\varphi}_n(|u|^2),$$

où $\tilde{\varphi}_n$ est donné sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\tilde{\varphi}_n''(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+y}, & \text{si } 0 \leq y \leq n \\ -\dfrac{1}{1+y}, & \text{si } n < y < C_n \\ 0, & \text{si } y \geq C_n, \end{cases}$$

avec $\tilde{\varphi}_n'(0) = 0$, $\tilde{\varphi}_n(0) = 0$, et $C_n = e(1+n)^2 - 1$.

À la différence de Vasseur et Yu dans [45], nous avons le terme supplémentaire $\xi^2 u\phi'(\xi)\partial_z w$ dans $\mathbb{F}$ et le terme $\mathbb{S}_1$, mais ce sont de bons termes. En effet, de l'énergie de base et de la BD-entropie, on a :

$$\sqrt{\xi}D_x(u) \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}), \quad \sqrt{\xi}\partial_z u \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2),$$
$$\sqrt{\xi}\nabla_x(u) \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^{2\times 2}), \quad \sqrt{\xi}\partial_z w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Par conséquent, on peut manipuler le terme $\xi^2 u\phi(\xi)\partial_z w$ d'une manière similaire au terme $\xi^2 u\phi(\xi)\mathrm{div}_x u$ dans les travaux de Vasseur et Yu dans [45] quand $m \to +\infty$, $\kappa \to 0$, $K \to +\infty$. On peut traiter $\mathbb{S}_1$ de manière similaire au premier terme $\xi\phi(\xi)D_x(u)$ de $\mathbb{S}$.

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_\Omega \psi'(t)\xi\varphi_n(u)dxdzdt \\ &< 12\|\psi\|_{L^\infty}\Big(\int_\Omega \xi_0|u_0|^2 + 12\overline{\nu}_1|\nabla_x\sqrt{\xi_0}|^2 - 2\overline{\nu}_1 r_0\ln\xi_0)dxdz + E_0 + C\Big) \\ &+\psi(0)\int_\Omega \xi_0\varphi_n(u_0)dxdz + C(\|\varphi\|_{L^\infty})\int_0^T\int_\Omega(1+\tilde{\varphi}_n'(|u|^2))\xi dxdzdt, \end{aligned} \tag{3.77}$$

quand $m \to +\infty$, $\kappa \to 0$, $K \to +\infty$. Comme ce que Vasseur et Yu ont fait dans la partie 5 de [45], en laissant $n \to +\infty$ dans (3.77) et en prenant

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq \tilde{t} - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{t-\tilde{t}}{\varepsilon} & \text{si } \tilde{t} - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \tilde{t} + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{si } t \geq \tilde{t} + \dfrac{\varepsilon}{2}, \end{cases}$$

pour tout petit $\varepsilon > 0$, on peut prouver l'inégalité de type Mellet–Vasseur.

Remarque 3.2 Indépendamment de ces travaux de F. Wang, C. Dou et Q. Jiu que nous avons explicité dans ce mémoire, signalons que Xin Liu et Edriss S. Titi [1] ont produit l'article [32] dans lequel une approche différente et intéressante (voir [30]) a été utilisée pour construire des solutions approchées régulières et prouver l'existence globale de solutions faibles des équations primitives compressibles.

1. Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843 (titi@math.tamu.edu), and Department of Computer Science and Applied Mathematics, The Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel (edriss.titi@weizmann.ac.il).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur un article de Fengchao Wang, Changsheng Dou et Quansen Jiu intitulé "Global existence of weak solutions to 3D compressible primitive equations with degenerate viscosity", publié dans *Journal of Mathematical Physics* en Février 2020.

Après avoir défini les outils nécessaires et rappelé leurs propriétés, nous avons reformulé le système original par le changement de variables proposé par T. Ngom et M. Ersoy et obtenu un système intermédiaire pour lequel la densité ne dépend plus de la verticale, ce qui nous a permis d'exprimer la vitesse verticale w en fonction de la densité ξ et de la vitesse horizontale u selon l'expression suivante :

$$w(z) = -\frac{\mathrm{div}_x(\xi\tilde{u}(z))}{\xi} + z\frac{\mathrm{div}_x(\xi\overline{u})}{\xi}, \quad \text{pour } \xi > 0. \tag{3.78}$$

Ensuite, en perturbant ce système intermédiaire par des paramètres artificiels positifs accompagnés de "bons termes" nous avons considéré un système approximatif pour lequel nous avons montré l'existence des solutions faibles globales par le biais de la méthode de Faedo-Galerkin.

Enfin, en estimant la BD-entropie que nous combinons avec l'inégalité d'énergie obtenue au système approximatif et d'autres estimations à priori, nous avons pu utiliser des arguments de compacité pour passer aux limites et "dégager" nos termes avec paramètres artificiels pas à pas tout en gardant l'existence des solutions faibles à chaque étape.

Une fois que nous obtenons la solution faible au niveau du système intermédiaire le retour au système original par le changement de variables est immédiat moyennant quelques calculs.

Ainsi, nous avons réussi à montrer l'existence globale des solutions faibles des équations primitives compressibles $3D$ pour lesquelles $P(\rho) = c^2\rho$.

Ce travail nous a ouvert quelques perspectives. D'une part, pour ξ pouvant s'annuler nous constatons qu'à priori l'expression (3.78) pose problème. Nous pensons qu'il est possible de gérer ce cas délicat toujours avec l'approximation de Faedo-Galerkin.

D'autre part, il serait mathématiquement intéressant d'étudier les équations primitives avec une loi de pression de la forme :

$$P(\rho) = k\rho^\gamma, \quad \gamma \neq 1.$$

Dans ce cas, la densité ne peut plus s'écrire $\rho(t,x,y) = \xi(t,x)\exp\Big(-\dfrac{g}{c^2}y\Big)$.
Néanmoins, par l'équation hydrostatique $\partial_y P(\rho) = -g\rho$ elle prend la forme :

$$\rho(t,x,y) = (\alpha y + \beta(t,x))^{\frac{1}{\gamma-1}}, \text{ où } \alpha = \frac{(1-\gamma)g}{k\gamma}.$$

En posant $\tilde{\rho} = \exp(\rho^{\gamma-1})$, nous pouvons écrire $\tilde{\rho}(t,x,y) = e^{\alpha y}\xi(t,x)$.

Par ailleurs, il serait intéressant de construire via la méthode des éléments finis un schéma numérique pour un tel modèle et de comparer les résultats à ceux obtenus par un solveur pour les équations complètes de Navier-Stokes compressibles.

ANNEXE A

ÉLÉMENTS DE CALCUL TENSORIEL

Les équations aux dérivées partielles font un usage intensif des champs scalaires, vectoriels et tensoriels. Ces outils mathématiques indispensables permettent non seulement d'établir des résultats fondamentaux indépendamment du référentiel choisi, mais en outre, confèrent aux formules qui les expriment une concision remarquable.
Les scalaires, vecteurs et tenseurs ont en effet la propriété d'être invariant lors d'un changement de base. C'est ainsi que grâce à ces quantités on peut écrire les équations de la mécanique de manière intrinsèque c'est-à-dire indépendamment de la base choisie.

A.1 Convention de sommation d'Einstein

Chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme des N termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs $1; 2; \cdots; N$.
Par exemple, $a_i b_i$ est la notation compacte pour $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_N b_N$. L'indice répété sur lequel on effectue la sommation est appelé indice muet. On peut lui substituer n'importe quel indice pourvu qu'il diffère des autres indices présents dans le monôme. Un indice non muet est dit franc. Ainsi, dans $a_{ij} b_j$, l'indice i est franc et l'indice j est muet ; on peut le remplacer par n'importe quel autre indice excepté i. Cette convention de sommation est dite *convention d'Einstein*.

A.2 Produit contracté

Le produit contracté de deux vecteurs (appelé plus couramment produit scalaire) est un scalaire :

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i \longleftrightarrow s = a_i b_i. \tag{A.1}$$

La norme euclidienne d'un vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ est :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2} \longleftrightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{a_i a_i}. \tag{A.2}$$

Le produit contracté d'un tenseur d'ordre deux $\mathbb{A}$ et d'un vecteur $\mathbf{b}$ est un vecteur, on peut post- ou pré-multiplié par un vecteur. Le résultat n'est pas le même à moins que $\mathbb{A}$ ne soit symétrique :

$$\mathbb{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \longleftrightarrow (\mathbb{A} \cdot \mathbf{b})_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} b_j = c_i \text{ pour } i = 1; \cdots; N \longleftrightarrow A_{ij} b_j = c_i, \tag{A.3}$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbb{A}=\mathbf{d}\longleftrightarrow(\mathbf{b}\cdot\mathbb{A})_j=\sum_{i=1}^{N}b_iA_{ij}=d_j \text{ pour } j=1;\cdots;N\longleftrightarrow b_iA_{ij}=d_j. \tag{A.4}$$

Retenons que $\mathbf{b}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{A}^t\cdot\mathbf{b}$ ou encore $\mathbb{A}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbb{A}^t$.
Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre deux est un tenseur d'ordre deux défini par :

$$\mathbb{C}=\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\longleftrightarrow C_{ij}=A_{ik}B_{kj}. \tag{A.5}$$

Retenons que dans ce cas le produit contracté se comporte comme le produit matriciel.
En effet, pour $\mathbb{A}=(A_{ij})_{i,j=1}^{N,M}$ et $\mathbb{B}=(A_{ij})_{i,j=1}^{M,P}$ on a :

$$(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})_{ij}=\sum_{k=1}^{M}A_{ik}B_{kj}.$$

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre deux est un scalaire :

$$s=\mathbb{A}:\mathbb{B}=\sum_{i,j=1}^{N}A_{ij}B_{ij}\longleftrightarrow s=A_{ij}B_{ij}=A_{ij}B^t_{ji}=Tr(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}^t). \tag{A.6}$$

Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second ($m=1$ pour un vecteur, $m=2$ pour un tenseur d'ordre deux...). Le résultat d'un produit simplement contracté est un tenseur d'ordre $n+m-2$ et le résultat d'un produit doublement contracté est un tenseur d'ordre $n+m-4$.
Par exemple, le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre quatre et d'un tenseur d'ordre deux est un tenseur d'ordre deux :

$$\mathbb{C}=\mathbb{A}:\mathbb{B}\longleftrightarrow C_{ij}=A_{ijkl}B_{kl}. \tag{A.7}$$

Remarque A.1 Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre deux antisymétrique et un tenseur d'ordre deux symétrique donne toujours le tenseur nul.

A.3 Produit tensoriel

Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur d'ordre deux :

$$\mathbb{A}=\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}\longleftrightarrow A_{ij}=b_ic_j. \tag{A.8}$$

Concrètement pour $N=3$, on a :

$$\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}=\begin{pmatrix}b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3\\ b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3\\ b_3c_1 & b_3c_2 & b_3c_3\end{pmatrix}$$

Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second. Le résultat du produit tensoriel est un tenseur d'ordre $n+m$.
Par exemple, le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre deux est un tenseur d'ordre quatre :

$$\mathbb{A}=\mathbb{B}\otimes\mathbb{C}\longleftrightarrow A_{ijkl}=B_{ij}C_{kl}. \tag{A.9}$$

A.4 Opérateurs différentiels classiques

On présente dans cette partie quelques opérateurs différentiels et leurs relations usuelles. Pour les détails le lecteur peut se référer au Chapitre 1 dans [22]. Le symbole

$$\partial_{y_i}f(y)=\frac{\partial f}{\partial y_i}(y),\quad i=1;\cdots;N,$$

désigne la dérivée partielle de $f=f(y),\ y=(y_1,\cdots,y_N)$, par rapport à la variable y_i calculée en un point $y\in\mathbb{R}^N$. On est souvent amené à considérer des fonctions de type $g=g(t,x)$ de variable en temps $t\in]0,T[$ et de coordonnées spatiales $x=(x_1,\cdots,x_N)\in\Omega\subset\mathbb{R}^N$ pour un certain domaine (ouvert, connexe) Ω donné de frontière $\partial\Omega$.

A.4.1 Gradient

Le gradient d'une fonction scalaire $g = g(t,x)$ par rapport à la variable x est le vecteur :

$$\nabla_x g = (\partial_{x_i} g(t,x))_{i=1}^N \longleftrightarrow (\nabla_x g)_i = \partial_{x_i} g. \tag{A.10}$$

Le gradient d'une fonction vectorielle $\mathbf{b} = (b_1(t,x), \cdots, b_N(t,x))^t = (b_i(t,x))_{i=1}^N$ (on écrit aussi $(\mathbf{b})_i = b_i(t,x)$) par rapport à la variable x est le tenseur d'ordre deux :

$$\nabla_x \mathbf{b} = (\partial_{x_i} b_j(t,x))_{i,j=1}^N \longleftrightarrow (\nabla_x \mathbf{b})_{ij} = \partial_{x_i} b_j. \tag{A.11}$$

A.4.2 Divergence

La divergence d'une fonction vectorielle $\mathbf{b} = (b_i(t,x))_{i=1}^N$ par rapport à x est le scalaire :

$$\mathrm{div}_x \mathbf{b} = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} b_i \longleftrightarrow \mathrm{div}_x \mathbf{b} = \partial_{x_i} b_i. \tag{A.12}$$

La divergence d'une fonction tensorielle $\mathbb{B} = (B_{ij}(t,x))_{i,j=1}^N$ (on écrit aussi $(\mathbb{B})_{ij} = B_{ij}(t,x)$) par rapport à la variable x est le vecteur :

$$(\mathrm{div}\mathbb{B})_j = (\mathrm{div}_x \mathbb{B})_j = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} B_{ij}(t,x) \longleftrightarrow (\mathrm{div}_x \mathbb{B})_j = \partial_{x_i} B_{ij}. \tag{A.13}$$

A.4.3 Laplacien

L'*opérateur de Laplace standard* communément appelé Laplacien et noté Δ est la composition de l'opérateur divergence et de l'opérateur gradient dans cette ordre. Ainsi, on écrit : $\Delta_x = \mathrm{div}_x \nabla_x$. Le laplacien d'une fonction scalaire $g(t,x)$ par rapport à x est le scalaire :

$$\Delta_x g = \Delta_x g(t,x) = \mathrm{div}_x \nabla_x g(t,x) = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 g(t,x) \longleftrightarrow \Delta_x g = \partial_{x_i}\partial_{x_i} g. \tag{A.14}$$

Le laplacien d'une fonction vectorielle $\mathbf{b} = (b_i(t,x))_{i=1}^N$, par rapport à x est le vecteur :

$$(\Delta_x \mathbf{b})_j = (\Delta_x \mathbf{b}(t,x))_j = (\mathrm{div}_x \nabla_x \mathbf{b}(t,x))_j = \Big(\sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 \mathbf{b}_j(t,x)\Big)_j \longleftrightarrow (\Delta_x \mathbf{b})_j = \partial_{x_i}\partial_{x_i} b_j. \tag{A.15}$$

A.4.4 Quelques exemples en coordonnées cartésiennes

Soit f une fonction scalaire régulière. En coordonnées cartésiennes pour $N = 3$ les composantes d'un vecteur et celles d'un tenseur d'ordre deux sont respectivement notées :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

• Les opérateurs différentiels scalaires :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \mathrm{div}\nabla f \;; \qquad \mathrm{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

• Les opérateurs différentiels vectoriels :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} ; \qquad \mathrm{div}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{31}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial A_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{32}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial A_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{div}A_{.1} \\ \mathrm{div}A_{.2} \\ \mathrm{div}A_{.3} \end{pmatrix} ;$$

$$\Delta\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix} = \mathrm{div}\nabla\mathbf{a}.$$

• De type tensoriel :

$$\nabla\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla a_1 & \nabla a_2 & \nabla a_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow [\nabla\mathbf{a}]^t = \begin{pmatrix} [\nabla a_1]^t \\ [\nabla a_2]^t \\ [\nabla a_3]^t \end{pmatrix}.$$

A.5 Formules et relations usuelles

Soient f et g deux champs scalaires et $\mathbf{a} = (a_i)$ et $\mathbf{b} = (b_i)$ deux champs de vecteurs. Alors, on a les relations suivantes :

$$\nabla(fg) = \partial_{x_i}(fg) = f\partial_{x_i}g + g\partial_{x_i}f = f\nabla g + g\nabla f; \tag{A.16}$$

$$\mathrm{div}(f\mathbf{b}) = \partial_{x_i}(f\mathbf{b}) = f\partial_{x_i}b_i + b_i\partial_{x_i}f = f\mathrm{div}\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\nabla f; \tag{A.17}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \partial_{x_i}(a_i b_j) = b_j\partial_{x_i}a_i + a_i\partial_{x_i}b_j = \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}; \tag{A.18}$$

$$\nabla(f\mathbf{b}) = \partial_{x_i}(fb_j) = f\partial_{x_i}b_j + b_j\partial_{x_i}f = f\nabla\mathbf{b} + \nabla f\otimes b; \tag{A.19}$$

$$\nabla(|\mathbf{b}|^2) = \partial_{x_i}(b_j b_j) = 2b_j\partial_{x_i}b_j = 2(\partial_{x_i}b_j)b_j = 2\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}; \tag{A.20}$$

$$\nabla(|\mathbf{b}|) = \frac{\nabla(|\mathbf{b}|^2)}{2|\mathbf{b}|} = \frac{1}{|\mathbf{b}|}\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}; \tag{A.21}$$

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 \leq 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2); \tag{A.22}$$

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2; \tag{A.23}$$

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2, \text{ pour } a_i, b_i \geq 0. \tag{A.24}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2005.

[2] Didier Bresch and Benoît Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2d viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Communications in mathematical physics*, 238(1) :211–223, 2003.

[3] Didier Bresch and Benoît Desjardins. On the construction of approximate solutions for the 2d viscous shallow water model and for compressible navier–stokes models. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 86(4) :362–368, 2006.

[4] Didier Bresch, Benoît Desjardins, and Chi-Kun Lin. On some compressible fluid models : Korteweg, lubrication, and shallow water systems. 2003.

[5] Didier Bresch, F Guillén-González, Nader Masmoudi, and MA Rodríguez-Bellido. On the uniqueness of weak solutions of the two-dimensional primitive equations. *Differential and Integral Equations*, 16(1) :77–94, 2003.

[6] Haım Brezis. Analyse fonctionnelle. théorie et applications. collection mathématiques appliquées pour la maıtrise, 1983.

[7] Günter Buntebarth. Zur entwicklung des begriffes geophysik. *Abhandlungen der Braunschwiegischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, 32 :95–109, 1981.

[8] Chongsheng Cao, Slim Ibrahim, Kenji Nakanishi, and Edriss S Titi. Finite-time blowup for the inviscid primitive equations of oceanic and atmospheric dynamics. *Communications in Mathematical Physics*, 337(2) :473–482, 2015.

[9] Chongsheng Cao, Jinkai Li, and Edriss S Titi. Global well-posedness of strong solutions to the 3d primitive equations with horizontal eddy diffusivity. *Journal of Differential Equations*, 257(11) :4108–4132, 2014.

[10] Chongsheng Cao, Jinkai Li, and Edriss S Titi. Local and global well-posedness of strong solutions to the 3d primitive equations with vertical eddy diffusivity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 214(1) :35–76, 2014.

[11] Chongsheng Cao, Jinkai Li, and Edriss S Titi. Global well-posedness of the three-dimensional primitive equations with only horizontal viscosity and diffusion. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 69(8) :1492–1531, 2016.

[12] Chongsheng Cao and Edriss S Titi. Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics. *Annals of Mathematics*, pages 245–267, 2007.

[13] Chongsheng Cao and Edriss S Titi. Regularity criteria for the three-dimensional navier–stokes equations. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 2643–2661, 2008.

[14] Jules G Charney, Ragnar Fjörtoft, and John Von Neumann. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. In *The Atmosphere—A Challenge*, pages 267–284. Springer, 1990.

[15] Michel Chipot. *Elements of nonlinear analysis.* Springer Science & Business Media, 2000.

[16] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. *Collection du Commissariat a l'Energie Atomique. Serie Scientifique*, 1985.

[17] Benoit DESJARDINS. On the construction of approximate solutions for the 2d viscous shallow water model and for compressible navier-stokes models bresch, didier. 2006.

[18] Mehmet Ersoy, Timack Ngom, et al. Existence of a global weak solution to compressible primitive equations. 2012.

[19] Mehmet Ersoy, Timack Ngom, and Mamadou Sy. Compressible primitive equations : formal derivation and stability of weak solutions. *Nonlinearity*, 24(1) :79, 2010.

[20] Lawrence C Evans. Partial differential equations. *Graduate studies in mathematics*, 19(4) :7, 1998.

[21] Eduard Feireisl. *Dynamics of viscous compressible fluids*, volume 26. Oxford University Press, 2004.

[22] Eduard Feireisl, Trygve G Karper, and Milan Pokornỳ. *Mathematical theory of compressible viscous fluids.* Springer, 2016.

[23] Eduard Feireisl and Antonín Novotnỳ. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, volume 2. Springer, 2009.

[24] Eduard Feireisl, Antonın Novotnỳ, and Hana Petzeltová. On the existence of globally defined weak solutions to the navier—stokes equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 3(4) :358–392, 2001.

[25] B Gatapov and A Kazhikhov. Existence of a global solution to one model problem of atmosphere dynamics. *Siberian Mathematical Journal*, 46(5), 2005.

[26] Marguerite Gisclon and Ingrid Lacroix-Violet. About the barotropic compressible quantum navier–stokes equations. *Nonlinear Analysis*, 128 :106–121, 2015.

[27] Francisco Guillén-González, Nader Masmoudi, and MA Rodríguez-Bellido. Anisotropic estimates and strong solutions of the primitive equations. *Differential and Integral Equations*, 14(11) :1381–1408, 2001.

[28] Quansen Jiu, Mingjie Li, and Fengchao Wang. Uniqueness of the global weak solutions to 2d compressible primitive equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461(2) :1653–1671, 2018.

[29] Ansgar Jüngel. Global weak solutions to compressible navier–stokes equations for quantum fluids. *SIAM journal on mathematical analysis*, 42(3) :1025–1045, 2010.

[30] Jing Li and Zhouping Xin. Global existence of weak solutions to the barotropic compressible navier-stokes flows with degenerate viscosities. *arXiv preprint arXiv :1504.06826*, 2015.

[31] Jacques-Louis Lions, Roger Temam, and Shouhong Wang. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. *Nonlinearity*, 5(2) :237, 1992.

[32] Xin Liu and Edriss S Titi. Global existence of weak solutions to the compressible primitive equations of atmospheric dynamics with degenerate viscosities. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 51(3) :1913–1964, 2019.

[33] Antoine Mellet and Alexis Vasseur. On the barotropic compressible navier–stokes equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 32(3) :431–452, 2007.

[34] Timack Ngom. *Etude mathématique et numérique de quelques modèles d'écoulement en couches minces : application à la sédimentation.* PhD thesis, Chambéry, 2010.

[35] Louis Nirenberg. On elliptic partial differential equations. In *Il principio di minimo e sue applicazioni alle equazioni funzionali*, pages 1–48. Springer, 2011.

[36] Joseph Pedlosky et al. *Geophysical fluid dynamics*, volume 710. Springer, 1987.

[37] M Petcu, Roger Temam, and D Wirosoetisno. Existence and regularity results for the primitive equations in two space dimensions. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 3(1) :115, 2004.

[38] Michael Renardy and Robert C Rogers. *A first graduate course in partial differential equations.* Springr-Verlag, 1993.

[39] Lewis Fry Richardson. *Weather Prediction by numerical process : Richardson, Lewis F (ry) ; With a new introd. by Sydney Chapman.* Dover Publ., 1965.

[40] Antoine Rousseau, Roger Temam, and Joe Tribbia. The 3d primitive equations in the absence of viscosity : boundary conditions and well-posedness in the linearized case. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 89(3) :297–319, 2008.

[41] Jacques Simon. Compact sets in the space l p (o, t ; b). *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146(1) :65–96, 1986.

[42] DR Smart. Fixed point theorems, cambridge uni. *Press., Cambridge*, 1980.

[43] Tong Tang and Hongjun Gao. On the stability of weak solution for compressible primitive equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 140(1) :133–145, 2015.

[44] Roger Temam and Mohammed Ziane. Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. In *Handbook of mathematical fluid dynamics*, volume 3, pages 535–658. Elsevier, 2005.

[45] Alexis F Vasseur and Cheng Yu. Existence of global weak solutions for 3d degenerate compressible navier–stokes equations. *Inventiones mathematicae*, 206(3) :935–974, 2016.

[46] Alexis F Vasseur and Cheng Yu. Global weak solutions to the compressible quantum navier–stokes equations with damping. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(2) :1489–1511, 2016.

[47] Fengchao Wang, Changsheng Dou, and Quansen Jiu. Global existence of weak solutions to 3d compressible primitive equations with degenerate viscosity. *Journal of Mathematical Physics*, 61(2) :021507, 2020.

[48] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis, 6th ed.* Springer-Verlag, 1980.

[49] Ewelina Zatorska. On the flow of chemically reacting gaseous mixture. *Journal of Differential Equations*, 253(12) :3471–3500, 2012.