

# Université Assane SECK de Ziguinchor



## U.F.R Sciences et Technologies Département de Mathématiques

---

### Mémoire

Pour l'obtention du

### Master

**DOMAINE:** SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
**MENTION:** MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS  
**SPÉCIALITÉ:** MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
**OPTION:** ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES ORDINAIRES (EDO)

Présenté par

**JEAN DIATTA**

---

## Existence de solution positive et périodique pour un système proie-prédateur intégrant une migration des prédateurs

---

Sous la direction du **Dr Timack NGOM**

Sous la supervision du **Pr Titulaire Abdou SENE**

Soutenu le 16 Juillet 2021  
Devant la Commission d'Examen

### JURY

Dr Timack NGOM	Maître de conférences Titulaire U.A.S.Z	Encadreur
Dr Oumar DIOP	Maître de conférences Assimulé U.V.S	Co-encadreur
Pr Salomon SAMBOU	Professeur Titulaire U.A.S.Z	Président
Pr Diène NGOM	Professeur Assimulé U.A.S.Z	Examineur
Pr Abdou SENE	Professeur Titulaire U.V.S	Superviseur

Année universitaire : 2019 – 2020

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents, mes frères et sœurs et à tous ceux qui me sont chers, sans oublier mes très chers enseignants.*

---

# Remerciements

*Tout d'abord, je remercie Dieu le Tout-puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la santé et la patience de mener à terme ce présent travail.*

*Je remercie chaleureusement Dr. Timack NGOM, Maître de conférences Titulaire à l'Université Assane SECK de Ziguinchor de m'avoir proposé le sujet de ce mémoire et de m'avoir guidé de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long du travail.*

*Je remercie également Dr. Oumar DIOP mon Co-encadreur, Maître de conférences Assimulé à l'Université Virtuelle du Sénégal.*

*Je remercie sincèrement Pr. Abdou SENE, Professeur à l'Université Virtuelle du Sénégal, d'avoir accepté de superviser ce travail.*

*Je remercie sincèrement Pr. Salomon SAMBOU, Professeur à l'Université Assane SECK de Ziguinchor, d'avoir accepté de présider le Jury de ce mémoire.*

*Je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance au Pr. Diène NGOM, Professeur Assimulé à l'Université Assane SECK de Ziguinchor.*

*Enfin, je ne saurais terminer ces remerciements sans penser à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.*

---

# Résumé

**Résumé** Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude du modèle proie-prédateur de type Holling II avec la récolte saisonnière des proies et la migration des prédateurs. Ce modèle traduit l'interaction entre la population de proies et celle des prédateurs. Tout d'abord on fait l'analyse mathématique du modèle. On montre que le système est permanent sous certaines conditions en utilisant le théorème de comparaison. Nous montrons aussi la stabilité globale de la solution en construisant une fonction de Lyapunov appropriée. Enfin, on utilise le théorème de continuité du degré de coïncidence pour montrer l'existence d'au moins une solution périodique sous certaines conditions suffisantes et sa stabilité. Enfin des simulations numériques ont été faites.

Mots clés : type Holling II. Parc National du Djoudj. Permanence.  
Théorème de continuité. Stabilité globale

---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	3
1.1.1 Existence locale et existence globale . . . . .	3
1.1.1.1 Existence locale . . . . .	3
1.1.1.2 Existence globale . . . . .	4
1.2 Résultats fondamentaux pour les systèmes autonomes . . . . .	4
1.2.1 Un point d'équilibre . . . . .	4
1.3 Définition de la stabilité . . . . .	5
1.4 Espaces vectoriels normés. Espaces métriques . . . . .	8
1.4.1 Espaces vectoriels normés . . . . .	8
1.4.2 Distances. Espaces métriques . . . . .	9
1.5 Convergence . . . . .	9
1.5.1 Suites convergentes . . . . .	9
1.6 Fonction continue dans un espace vectoriel normé . . . . .	10
1.6.1 Continuité uniforme . . . . .	10
1.7 Espace de Banach . . . . .	10
1.8 Ensembles Compacts . . . . .	10

1.9	Théorème de Heine-Borel . . . . .	10
1.10	Équicontinuité . . . . .	11
1.11	Théorème d'Arzéla-Ascoli . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Quelques modèles de la dynamique des populations</b>	<b>12</b>
2.1	Modèles avec une seule population . . . . .	12
2.1.1	Modèle de Malthus . . . . .	12
2.1.2	Modèle de croissance logistique de Verhulst . . . . .	13
2.2	Modèles avec deux populations . . . . .	14
2.2.1	Modèle de Lotka Volterra . . . . .	14
2.2.1.1	Points d'équilibres . . . . .	15
2.2.1.2	Stabilité locale des points d'équilibres . . . . .	15
2.2.2	Modèle de type Holling II . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modèle proie-prédateur de type Holling II</b>	<b>20</b>
3.1	Les différentes étapes de la modélisation . . . . .	20
3.2	Présentation du modèle . . . . .	20
3.3	Étude du modèle . . . . .	23
3.3.1	Existence et unicité de solutions . . . . .	23
3.3.2	Domaine positivement invariant et permanence . . . . .	24
3.3.2.1	Stabilité globale de solution . . . . .	30
3.4	Existence d'une solution périodique . . . . .	33
3.4.1	Théorème de Mawhin . . . . .	34
3.4.1.1	Application de Fredholm . . . . .	34
3.4.1.2	Degré de Brouwer . . . . .	35
3.5	Simulations numériques et discussions . . . . .	53
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>57</b>
	<b>Annexe</b>	<b>58</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>70</b>

---

# Introduction

Les mathématiques ont longtemps fait l'objet d'études scientifiques dans divers disciplines et notamment en biologie. La modélisation en biologie est utilisée en dynamique de population afin de modéliser d'une part la croissance des populations et d'autre part les interactions qui peuvent exister entre elles. Dans ce présent mémoire, nous détaillons une étude de la dynamique d'un système de dimension deux, référencée dans la publication [4]. Il s'agit d'une étude dans le parc national de Djoudj. Le modèle décrit une population de proies et de prédateurs, il est basé sur le modèle de type Holling II.

Nous nous intéressons à un modèle proie-prédateur de type Holling II

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D} - hx, \\ \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -d_1 y + \frac{\beta xy}{x + D}, \end{cases} \quad (1)$$

avec les conditions initiales

$$x(0) > 0, \quad y(0) > 0.$$

Où  $x(t)$  représente la densité de la population des proies et  $y(t)$  la densité de celle des prédateurs au temps  $t$ , la proie augmente avec un taux de croissance intrinsèque  $r_1$  et une capacité environnementale  $K_1$  à l'absence de prédation,  $\alpha$ ,  $D$ ,  $d_1$ ,  $\beta$ , supposés positifs représentent respectivement le taux de prédation, il est considéré comme le nombre de proies capturées par un prédateur, constante de semi-saturation, le taux de mortalité des prédateurs et le taux de conversion.  $h$  représente le taux de mortalité des proies par saison. Nous considérons dans ce

mémoire,  $x(t)$  comme la densité de poissons et  $y(t)$  celle des oiseaux au temps  $t$ . En tenant compte de la présence saisonnière des oiseaux et de leur migration, nous obtenons un nouveau modèle proie-prédateur de type Holling II

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D} - h(t)x, \\ \dot{y}(t) = -d_1 y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t) - L(t)y(t). \end{cases} \quad (2)$$

Où toutes les variables et paramètres ont la même signification biologique qu'en (1) sauf le taux de mortalité des proies et la migration des prédateurs.

$\Lambda(t)$  représente le nombre d'oiseaux qui arrivent par saison et  $L(t)$  leur taux d'émigration.

$h(t)$ ,  $L(t)$ ,  $\Lambda(t)$  sont supposées être des fonctions positives, périodiques et annuelles.

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques outils mathématiques dont on fera usage dans la suite du mémoire, en particulier la notion de la stabilité au sens de Lyapunov.
- Dans le second chapitre, on s'intéressera aux modèles classiques de Malthus, de Verhulst et de Lotka Volterra.
- Le dernier chapitre constitué de cinq sections sera consacré à l'étude du modèle proie-prédateur. L'objectif principal de l'article [4] que nous exploitons pour ce mémoire est d'étudier l'existence d'au moins une solution périodique positive dont la période dépend de la migration des oiseaux et le taux de prédation des poissons. Dans les deux premières sections, nous allons d'abord présenter les différentes étapes de la modélisation ensuite faire une brève présentation du modèle. Dans la troisième section, nous étudierons d'abord l'existence et l'unicité de solutions. Ensuite, nous abordons quelques problèmes tels que l'invariance positive pour montrer la positivité de solutions, la permanence afin de montrer que la solution est bornée et l'extinction d'espèces. Enfin, nous étudierons aussi la stabilité globale des solutions en construisant une fonction de Lyapunov appropriée. Dans la quatrième section de ce chapitre, nous utiliserons le théorème de continuité de Gaines et Mahwin de la théorie du degré de coïncidence pour prouver l'existence d'une solution périodique. A la dernière section, nous terminerons notre étude par des simulations numériques qui illustreront les résultats.

---

---

# Chapitre 1

---

## Notions préliminaires

### 1.1 Systèmes dynamiques

Dans cette partie,  $J$  est un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . D'une façon simplifiée, un système dynamique s'écrit sous la forme :

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

où  $(t, x) = (t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in J \times \Omega$  et  $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction.

#### 1.1.1 Existence locale et existence globale

##### 1.1.1.1 Existence locale

**Définition 1.1.1 (Solution locale)** Une solution de (1.1) est la donnée d'un couple  $(I, x)$  où  $I \subset J$  et  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction dérivable, vérifiant les conditions suivantes :

1.  $(t, x(t)) \in J \times \mathbb{R}^n$ , pour tout  $t \in I$ ,
2.  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ , pour tout  $t \in I$ .

**Définition 1.1.2 (Lipschitzianité locale)** Soit  $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega$ . On dit que  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable en  $(\tilde{t}, \tilde{x})$  s'ils existent  $\tilde{T} > 0$ ,  $\tilde{r} > 0$  et  $K > 0$  tels que pour tout  $(t, x, y) \in [\tilde{t} - \tilde{T}, \tilde{t} + \tilde{T}] \times B(\tilde{x}, \tilde{r}) \times B(\tilde{x}, \tilde{r})$ ,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Dans la pratique, on vérifie que  $f$  est de classe  $C^1$  au lieu de vérifier que  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable en un point, on a le théorème suivant.

**Théorème 1.1.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)** Soient  $I$  un intervalle,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soient  $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ . Si  $f$  est continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable dans un voisinage du point  $y_0$ , alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0, & (t_0, y_0) \in I \times \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

admet une unique solution  $y$  définie dans un petit voisinage du point  $t_0$ . De plus la solution est de classe  $C^1$  dans ce voisinage.

### 1.1.1.2 Existence globale

Nous donnons ici une condition d'existence utile pour les solutions globales basée sur la bornitude de la solution maximale. Nous introduisons d'abord la notion de prolongement d'une solution de (1.2)

**Définition 1.1.3 (Prolongement d'une solution)** Soient  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux solutions de (1.2). On dit que  $\tilde{x}$  est un prolongement de  $x$  si  $I \subset \tilde{I}$  et  $\tilde{x} = x$  sur  $I$ .

**Définition 1.1.4 (Solution maximale)** On dit qu'une solution  $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est maximale si  $x$  n'admet pas de prolongement  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $I \subsetneq \tilde{I}$ .

Ainsi, nous allons présenter un théorème qui assure une condition suffisante pour l'existence globale des solutions de (1.2)

**Théorème 1.1.2 (Existence globale)** Soit une solution maximale  $x$ , définie sur un intervalle  $I$ . Alors, si  $\sup I < \sup J$ ,  $x$  sort définitivement de tout compact de  $\mathbb{R}^n$  inclus dans  $\Omega : \forall K$  compact inclus dans  $\Omega$ ,  $\exists t^* \in I$  tel que  $\forall t \in I$ ,  $t > t^*, x(t) \notin K$ .

## 1.2 Résultats fondamentaux pour les systèmes autonomes

### 1.2.1 Un point d'équilibre

**Définition 1.2.1** Considérons un système continu autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

avec  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne sur  $\Omega$  pour assurer l'existence et l'unicité localement.  $x^*$  est appelé point d'équilibre pour le système (1.3) si l'équation

$$f(x^*) = 0. \quad (1.4)$$

### 1.3 Définition de la stabilité

**Définition 1.3.1 (Stabilité au sens de Lyapunov)** *Un point d'équilibre  $x^*$  est stable au sens de Lyapunov si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in \Omega$  avec  $\|x_0 - x^*\| < \eta$ , alors la solution  $x$  de (1.3) de condition initiale  $x(t_0) = x_0$  vérifie :*

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad \forall t > 0. \quad (1.5)$$

*sinon il est instable.*

**Définition 1.3.2 (Stabilité asymptotique locale)** *On dit qu'un point d'équilibre  $x^*$  de (1.3) est localement asymptotiquement stable si et seulement si  $x^*$  est stable et s'il existe un nombre réel  $r > 0$ , tel que pour tout  $x_0 \in \Omega$  avec*

*$\|x_0 - x^*(t)\| < r$ , alors la solution  $x$  de (1.3) ayant pour condition initiale  $x(t_0) = x_0$  vérifie :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0. \quad (1.6)$$

**Définition 1.3.3** *Le système linéarisé de (1.3) autour du point  $x^*$  est défini par*

$$\dot{y}(t) = Df(x^*)y(t) \quad (1.7)$$

*où  $Df(x^*)$  est la différentielle de  $f$  au point  $x^*$ .*

**Théorème 1.3.1 (Lyapunov [10])** *Si  $f$  est différentiable au point  $x^*$ , si de plus toutes les valeurs propres de  $Df(x^*)$  sont de parties réelles strictement négatives, alors  $x^*$  est un point localement asymptotiquement stable pour le système (1.3).*

**Théorème 1.3.2** *Si  $Df(x^*)$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors  $x^*$  est un point d'équilibre instable pour le système non linéaire (1.3).*

**Définition 1.3.4 (stabilité globale)** *On dit que  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable sur  $\Theta \subset \Omega$ , si pour tout  $x_0 \in \Theta$ , la solution  $x$  de (1.3) ayant pour condition initiale  $x(t_0) = x_0$*

vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

**Définition 1.3.5 (Lyapunov)**

1. Soit  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. La dérivée de  $V$  le long des solutions de (1.3) est définie par

$$\dot{V} = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle$$

2.  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, où  $\Omega$  : désigne un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est une fonction de Lyapunov pour le système (1.3) si elle est décroissante le long des solutions du système. Si  $V$  est de classe  $C^1$ , cela équivaut à dire que sa dérivée par rapport au système (1.3) est négative sur  $\Omega$ , c'est-à-dire  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .

**Théorème 1.3.3 (Théorème de Lyapunov)** Soit  $x^*$  un point d'équilibre de (1.3).

Soit  $U$  un voisinage de  $x^*$  inclus dans  $\Omega$  et  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que

1.  $V(x^*) = 0$ ,
2.  $V(x) > 0, \quad \forall x \in U \setminus \{x^*\}$ ,
3.  $\dot{V} \leq 0, \quad \forall x \in U$ .

Alors  $x^*$  est stable. Si de plus  $\dot{V}(x) < 0$  pour tout  $x \in U$ , alors  $x^*$  est asymptotiquement stable.

La fonction  $V$  du Théorème ci-dessus est appelée fonction de Lyapunov associée à (1.3).

**Théorème 1.3.4** Soit le système différentiel linéaire (1.7) et  $\delta = \text{Det}Df(x^*)$  et  $\tau = \text{tr}Df(x^*)$ .

1. Si  $\delta < 0$ , alors  $x^*$  est un point selle.
2. Si  $\delta > 0$  et  $\tau < 0$ , alors le point d'équilibre  $x^*$  est stable.
3. Si  $\delta > 0$  et  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ , alors le point d'équilibre  $x^*$  est un noeud, il est stable si  $\tau < 0$  et instable si  $\tau > 0$ .
4. Si  $\delta > 0$  et  $\tau^2 - 4\delta < 0$ , alors le point d'équilibre  $x^*$  est un foyer, il est stable si  $\tau < 0$  et instable si  $\tau > 0$ .

**Lemme 1.3.1 (Lemme de Barbalat)** Soit  $f$  une fonction positive définie sur  $[0, \infty[$

1. Si  $f$  est intégrable et uniformément continue, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .
2. Si  $f$  est intégrable et  $\dot{f}$  est uniformément continue, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{f}(t) = 0$ .

Ce lemme permet de montrer la stabilité globale d'un système.

**Lemme 1.3.2 (Lemme de comparaison)** *On considère le problème de Cauchy*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.8)$$

où  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue de classe  $C^1$  et supposons que sa solution  $x(t)$  est définie pour tout  $t \geq 0$ .

Soit l'inégalité différentielle

$$\dot{y} \geq f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

avec  $y_0 = x_0$ .

Alors la solution  $y(t)$  de l'inégalité différentielle est définie pour tout  $t \geq 0$  et vérifie

$$x(t) \leq y(t).$$

**Définition 1.3.6** *On considère un système d'équations différentielles ordinaires modélisant l'interaction de deux (ou plusieurs) espèces biologiques i.e ( $x_i \geq 0$ )*

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (1.9)$$

On suppose que le système (1.9) a la propriété d'existence et d'unicité de solutions et que ces solutions sont définies pour tout  $t \geq 0$ . Soit  $(x_1(t), x_2(t))$  une solution de (1.9) de condition initiale strictement positive  $(x_1(0), x_2(0))$ .

Le système (1.9) est dit :

*Faiblement persistant si*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > 0 \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

*Faiblement uniformément persistant s'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que, pour toute condition initiale  $(x_1(0), x_2(0))$*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

*Persistant si*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > 0 \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

*Uniformément persistant s'il existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour toute condition initiale  $(x_1(0), x_2(0))$*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) > \varepsilon_0 \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

Dissipatif s'il existe une constante  $M_i > 0$  telle que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) < M_i \text{ pour tout } i = 1, 2.$$

Le système (1.9) est dit permanent s'il est uniformément persistant et dissipatif. Le système (1.9) est dit impermanent si

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) \right\} = 0.$$

Autre définition de la permanence est donnée comme suit :

**Définition 1.3.7** le système (1.9) est dit permanent s'il existe des constantes positives  $\delta, \Delta$ , avec  $0 < \delta < \Delta$ , tel que :

$$\min \left\{ \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t), \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right\} \geq \delta$$

$$\max \left\{ \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t), \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \right\} \leq \Delta.$$

pour toute solution de (1.9) avec les condition strictement positives  $(x_1(0), x_2(0))$ .

Si  $f$  est borné dans  $\mathbb{R}$ , on définit :

$$f^m = \max_{t \in \mathbb{R}^+} f(t), \quad f^l = \min_{t \in \mathbb{R}^+} f(t), \quad \bar{f} = \int_0^1 f(s) ds$$

## 1.4 Espaces vectoriels normés. Espaces métriques

### 1.4.1 Espaces vectoriels normés

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.4.1** Une norme sur  $E$  est une application  $x \mapsto \|x\|$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant les propriétés suivante :

1.  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pour tous  $x, y \in E$ .
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  pour tout  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

La paire  $(E, \|\cdot\|)$  s'appelle espace vectoriel normé.

## 1.4.2 Distances. Espaces métriques

Soit  $X$  un ensemble.

**Définition 1.4.2** Une distance sur  $E$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les propriétés suivante :

- (i)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  pour tout  $x, y \in X$ .
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  pour tout  $x, y \in X$ .
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  pour tout  $x, y, z \in X$ .

Un espace métrique est une paire  $(X, d)$  formé d'un ensemble  $E$  et d'une distance sur  $X$ .

**Remarque 1.4.1** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , définissons :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

L'application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une distance sur  $E$ . En effet, (i) résulte de 1., (ii) résulte de 3. (avec  $\lambda = -1$ ) et (iii) résulte de 2. Les espace vectoriels normés sont donc des espaces métriques.

## 1.5 Convergence

### 1.5.1 Suites convergentes

**Définition 1.5.1** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. On dit qu'une suite  $(x_n)$  de points de  $E$  converge vers un point  $x \in E$  si  $\|x_n - x\|$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Autrement dit,  $(x_n)$  converge vers  $x$  si et seulement si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall n \geq N, \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

2. On dit qu'une suite  $(x_n)$  est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall n \geq N, \forall m \geq N, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

## 1.6 Fonction continue dans un espace vectoriel normé

**Définition 1.6.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow F$  est continue en un point  $x_0 \in E$  si  $f(x)$  tend vers  $f(x_0)$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ , autrement dit si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta_{(\varepsilon, x_0)} > 0 / \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$

### 1.6.1 Continuité uniforme

**Définition 1.6.2** On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $E$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 / \forall (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\|_E \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

## 1.7 Espace de Banach

**Définition 1.7.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. C'est-à-dire toute suite de Cauchy dans  $E$  converge dans  $E$ .

## 1.8 Ensembles Compacts

**Définition 1.8.1** Soit  $E$  un espace topologique.

1. Soit  $A$  une partie de  $E$ . Un recouvrement de  $A$  est une famille  $(U_i)_{i \in I}$  de parties de  $E$  telle

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

2. On dit que  $A \subset E$  est compact si de tout recouvrement de  $A$  par des ouverts de  $E$  on peut extraire un sous-recouvrement fini.

## 1.9 Théorème de Heine-Borel

**Théorème 1.9.1** Pour tout sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A$  est compact si, et seulement si,  $A$  est fermé et borné.

## 1.10 Équicontinuité

**Définition 1.10.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces métriques. On note  $C(E, F)$  l'ensemble des applications continues  $f : E \rightarrow F$ . Si  $F = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on écrit  $C(E)$  au lieu de  $C(E, F)$

**Définition 1.10.2** On dit qu'une partie  $A$  de  $C(E, F)$  est équicontinue en un point  $x \in E$  si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta = \eta_{(x, \varepsilon)} > 0, \quad \forall y \in E : \quad (\|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \forall f \in A \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon).$$

On dit que la famille  $A$  est équicontinue si elle est équicontinue en tout point  $x \in E$ .

**Définition 1.10.3 (Ensemble relativement compact)** Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ , on dit que  $A$  est relativement compact si son adhérence notée  $\bar{A}$  est compacte.

## 1.11 Théorème d'Arzéla-Ascoli

**Théorème 1.11.1** Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact,  $(F, d')$  un espace métrique complet et  $C(E, F)$  l'ensemble des fonctions continues, définies sur  $E$  à valeurs dans  $F$ . Une partie  $A$  de  $C(E, F)$  est relativement compacte si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- 1)  $A$  est équicontinue,
- 2)  $A$  uniformément bornée.

---

---

## Chapitre 2

---

### Quelques modèles de la dynamique des populations

#### 2.1 Modèles avec une seule population

##### 2.1.1 Modèle de Malthus

Le biologiste Thomas Malthus propose en 1798 [11] le premier modèle traduisant la croissance d'une seule population. Il suppose que la population est isolée (c'est-à-dire aucune migration n'est envisagée). La population possède un taux de croissance  $r$  constant, différent du taux de natalité et du taux de mortalité. Soit  $N(t)$  la taille de la population à l'instant  $t$ . Le modèle de Malthus s'écrit :

$$\dot{N}(t) = rN(t), \tag{2.1}$$

avec la condition initiale  $N(0) = N_0$ .

La solution de cette équation différentielle est :

$$N(t) = N_0 \exp(rt). \tag{2.2}$$

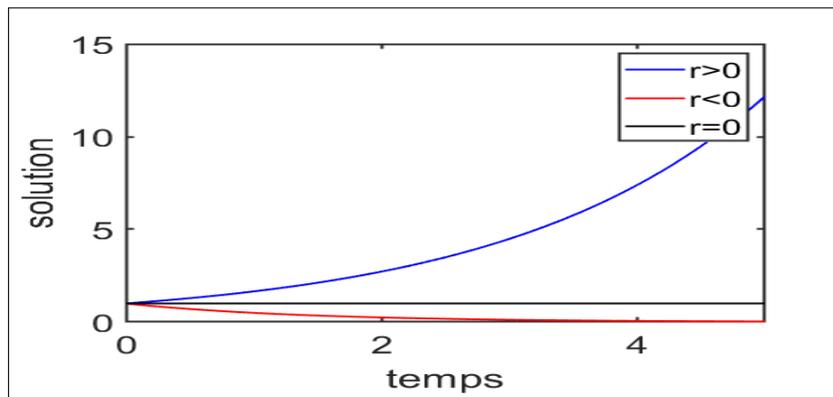


Figure 2.1 – Modèle de Malthus

On voit que :

- Si  $r > 0$  il y a croissance exponentielle de la population.
- Si  $r < 0$  il y a décroissance exponentielle de la population qui tend vers 0.
- Si  $r = 0$  la population reste constante.

### 2.1.2 Modèle de croissance logistique de Verhulst

Le modèle Malthusien n'est pas réaliste. En effet ce modèle ne tient pas compte de l'habitat et de la nourriture limitée. C'est ainsi que le biologiste belge Pierre-François Verhulst [17] propose en 1838 un modèle beaucoup plus réaliste en tenant compte de la capacité limite imposée par l'environnement. Il suppose que le taux d'accroissement de la population est donné par :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right), \quad (2.3)$$

avec la condition initiale  $N(0) = N_0$

$K$  : la capacité limite du milieu.

La solution est donnée par :

$$N(t) = N_0 \frac{K}{N_0 + (K - N_0) \exp(-rt)}. \quad (2.4)$$

## 2.2. Modèles avec deux populations

---

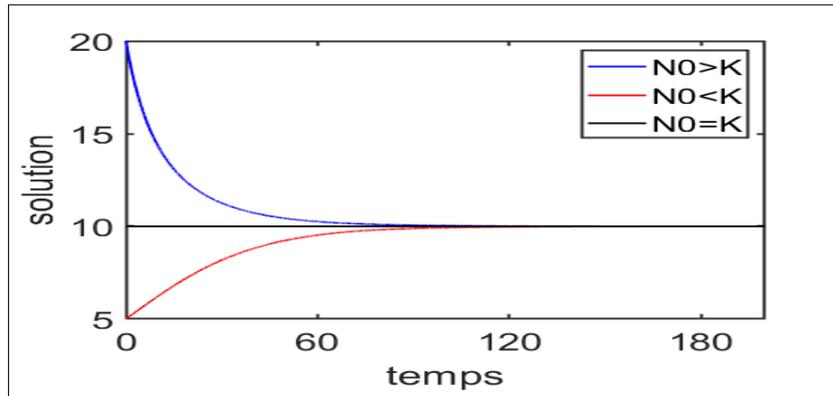


Figure 2.2 – Modèle logistique,  $r = 0.1$ ,  $K = 10$

On remarque que :

- Si  $N_0 < K$ , La population croît et s'approche asymptotiquement de  $K$  quand  $t \rightarrow \infty$ .
- Si  $N_0 > K$ , la population décroît et elle s'approche asymptotiquement de  $K$  quand  $t \rightarrow \infty$ .
- Et dans le cas où  $N_0 = K$ , la population reste constante pour tout ( $t > 0$ ).

## 2.2 Modèles avec deux populations

### 2.2.1 Modèle de Lotka Volterra

Le premier système proie-prédateur a été proposé indépendamment par les mathématiciens Alfred James Lotka américain en 1925 et Vito Volterra italien en 1926 pour modéliser l'évolution de sardines et des requins dans la mer Adriatique, juste après la deuxième guerre mondiale. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

1. Il n'y a pas de compétition entre les proies.
2. La nourriture des proies est illimitée.
3. Les prédateurs se nourrissent uniquement des proies.

On désigne respectivement par  $x(t)$ ,  $y(t)$  la densité de proies et la densité des prédateurs à l'instant  $t$ .

Le modèle de Lotka-Valterra est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - \alpha xy \\ \dot{y}(t) = -dy + \beta \alpha xy. \end{cases} \quad (2.5)$$

$a$  : le taux de croissance intrinsèque des proies à l'absence des prédateurs

$\alpha$  : le taux de mortalité des proies due aux prédateurs rencontrés (le taux de prédation)

$\beta$  : le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et consommées

$d$  : le taux de mortalité naturel des prédateurs (constant, indépendant du nombre de proies).

### 2.2.1.1 Points d'équilibres

Les points d'équilibres de (2.5) sont solutions du système

$$\begin{cases} ax - \alpha xy & = 0, \\ -dy + \beta \alpha xy & = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

On obtient donc :

$$E_0(0, 0) \text{ et } E_1\left(\frac{d}{\beta\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right).$$

### 2.2.1.2 Stabilité locale des points d'équilibres

La matrice jacobienne du système (2.5) est donnée par

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \beta \alpha y & -d + \beta \alpha x \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne du système précédent au point  $E_0(0, 0)$  est :

$$JE_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}.$$

Donc  $E_0$  est un équilibre instable, car  $a > 0$  est une valeur propre de  $JE_0$ .

La matrice jacobienne de (2.5) au point  $E_1\left(\frac{d}{\beta\alpha}, \frac{a}{\alpha}\right)$  est :

$$JE_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{\beta} \\ \beta a & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Modèles avec deux populations

---

$JE_1$  admet deux valeurs imaginaires pures, donc la linéarisation ne permet pas de conclure la stabilité de  $E_1$ . Pour cela on utilise la technique de la méthode de Lyapunov. On a

$$\frac{-d + \beta\alpha x}{x(t)}\dot{x}(t) + \frac{\alpha y - a}{y(t)}\dot{y}(t) = 0. \quad (2.7)$$

On définit la fonction  $V$  par

$$V(x, y) = (\beta\alpha x - d \ln x) + (\alpha y - a \ln y). \quad (2.8)$$

$V$  est constante le long des solutions du système (2.5). On pose

$$L(x, y) = V(x, y) - V(E_1). \quad (2.9)$$

Alors,  $L(E_1) = 0$  et  $L(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq E_1$  à cause de la convexité de  $L$ , de plus  $\dot{L}(x, y) = 0$ . On en déduit que  $L$  est une fonction de Lyapunov. D'où  $E_1$  est stable.

**Proposition 2.2.1** *Les solutions du (2.5) sont périodiques.*

**Preuve:**

Les droites isoclines  $x = \frac{d}{\beta\alpha}$  et  $y = \frac{a}{\alpha}$  divisent le quadrant  $H = \{(x(t), y(t)) / x > 0, y > 0\}$  en quatre régions, notées  $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$  où  $x(t)$  et  $y(t)$  sont strictement monotones. on a :

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\{ (x(t), y(t)) \in H / \frac{dx(t)}{dt} > 0, \frac{dy(t)}{dt} < 0 \right\}, \\ H_2 &= \left\{ (x(t), y(t)) \in H / \frac{dx(t)}{dt} > 0, \frac{dy(t)}{dt} > 0 \right\}, \\ H_3 &= \left\{ (x(t), y(t)) \in H / \frac{dx(t)}{dt} < 0, \frac{dy(t)}{dt} > 0 \right\}, \\ H_4 &= \left\{ (x(t), y(t)) \in H / \frac{dx(t)}{dt} < 0, \frac{dy(t)}{dt} < 0 \right\}. \end{aligned}$$

On suppose que la condition initiale  $(x(0), y(0))$  est dans  $H_1$ . Puisque  $x(t)$  et  $y(t)$  sont bornées et monotones, on peut affirmer que :

- il existe un temps  $t_1 > 0$ , à partir duquel  $(x(t), y(t)) \in H_2$ ,

- il existe un temps  $t_2 > t_1$ , à partir duquel  $(x(t), y(t)) \in H_3$ ,
- il existe un temps  $t_3 > t_2$ , à partir duquel  $(x(t), y(t)) \in H_4$ ,
- il existe un temps  $t_4 > t_3$ , à partir duquel  $(x(t), y(t)) \in H_1$ ,
- il existe un temps  $t_5 > t_4$ , à partir duquel  $(x(t), y(t)) \in H_2$ .

Donc la solution traverse les quatre régions successivement. De plus notons que  $H_2$  est borné à gauche par la droite verticale  $x = \frac{d}{\beta\alpha}$  et en haut par la droite horizontale  $y = \frac{a}{\alpha}$ . La solution est une courbe fermée d'équation (2.8) et donc  $V(x(t_1), y(t_1)) = V(x(t_5), y(t_5))$ . Ce implique que

$$\begin{aligned}
 (\beta\alpha x(t_1) - d \ln x(t_1)) + (\alpha y(t_1) - a \ln y(t_1)) &= (\beta\alpha x(t_5) - d \ln x(t_5)) \\
 &+ (\alpha y(t_5) - a \ln y(t_5)). \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Par la définition de  $t_1$  et  $t_5$ , on a :

$$x(t_1) = x(t_5) = \frac{d}{\beta\alpha},$$

et donc

$$(\alpha y(t_1) - a \ln y(t_1)) = (\alpha y(t_5) - a \ln y(t_5)). \tag{2.11}$$

Cependant, on va montrer que  $y(t_1) = y(t_5)$ . Soit  $h : [0, \frac{a}{\alpha}] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(y) = \alpha y - a \ln y$  et sa dérivée est donnée par :

$$\frac{dh}{dy} = \alpha - \frac{a}{y} < 0, \quad \forall y \in [0, \frac{a}{\alpha}],$$

donc  $h$  est strictement monotone et l'équation (2.11) s'écrit sous la forme

$$h(y(t_1)) = h(y(t_5)).$$

Ce qui implique, en utilisant la propriété de la stricte monotonie pour la fonction  $h$  que  $y(t_1) = y(t_5)$ . On conclut que  $(x(t_1), y(t_1))$  et  $(x(t_5), y(t_5))$  se coïncident. Montrons que la période de  $x$  et  $y$  est  $T = t_5 - t_1$ . D'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz les deux solutions

## 2.2. Modèles avec deux populations

doivent-êre égales

$$\begin{cases} x(t + t_1) = x(t + t_5), \\ y(t + t_1) = y(t + t_5). \end{cases} \quad (2.12)$$

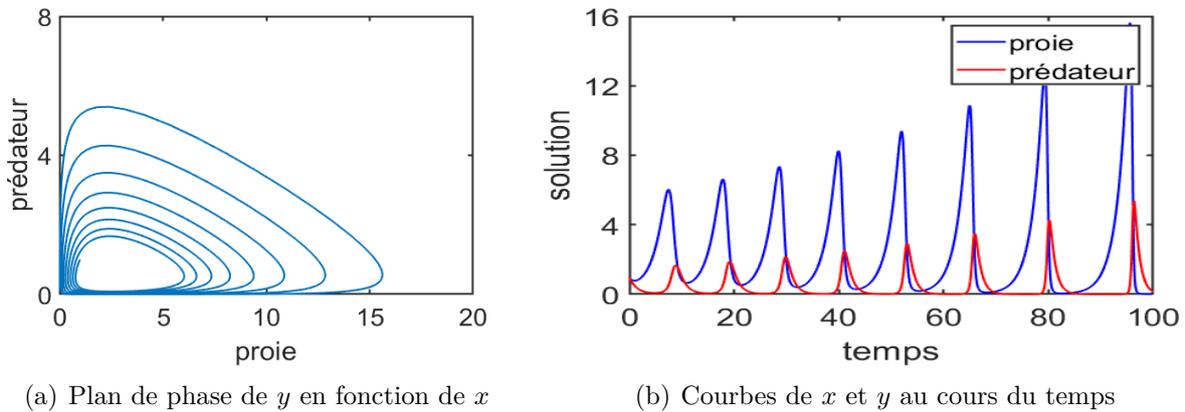
Si on remplace  $t$  par  $t - t_1$  dans (2.12), on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = x(t + t_5 - t_1), \\ y(t) = y(t + t_5 - t_1). \end{cases} \quad (2.13)$$

Ce qui montre que la période commune de  $x$  et  $y$  est  $t_5 - t_1$ . ■

On utilise les valeurs des paramètres suivants pour la simulation du modèle :

$a = 0.5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\beta = 0.4$ , avec la condition initiale  $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ .



**Figure 2.3** – Modèle de Lotka-Volterra

### 2.2.2 Modèle de type Holling II

La forme générale, d'un modèle proie-prédateur est définie comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) - h(x, y), \\ \dot{y}(t) = g(y) + \delta h(x, y). \end{cases} \quad (2.14)$$

Où le signe négatif devant la fonction  $h$  montre que l'interaction entre les proies et les prédateurs a un effet négatif sur la croissance des proies. Dans le modèle de Lotka-Volterra présenté

## Chapitre 2. Quelques modèles de la dynamique des populations

---

précédemment, la réponse fonctionnelle  $\phi(x, y)$  est la suivante :

$$\phi(x, y) = \frac{h(x, y)}{y}. \quad (2.15)$$

Dans ce cas particulier, la fonction  $h(x, y) = \alpha xy$  et on en déduit que :

$$\phi(x, y) = \alpha x. \quad (2.16)$$

C'est la réponse fonctionnelle de Lotka-Volterra de type I. En réalité, cette fonction n'est pas réaliste. En effet, la consommation des prédateurs augmentent si la taille de la population des proies augmente. Cependant, on doit s'attendre à une limitation du nombre de proies tuées et consommées par un prédateur même si la densité des proies est très grande.

La capacité de consommation des prédateurs est limitée et même si un grand nombre de proies est disponible, un prédateur ne pourra pas consommer un nombre de proies supérieur à cette limite. Elle donc atteint un point de saturation. Il est par conséquent plus réaliste de concevoir une réponse fonctionnelle présentant un effet de saturation avec la taille des proies. Cette réponse est dite fonction réponse de type II, en opposition à la fonction réponse de Lotka-Volterra appelée de type I. La fonction de type II dite de Holling est traduite par la relation suivante :

$$P(x, y) = \frac{\alpha x}{x + D}. \quad (2.17)$$

---

---

# Chapitre 3

---

## Modèle proie-prédateur de type Holling II

Ce chapitre décrit une étude théorique d'un système dynamique continu, traduisant l'interaction entre la population des poissons et celle des oiseaux. Tout d'abord, nous présentons les différentes étapes de la modélisation. Ensuite, nous nous intéressons à l'étude des solutions. Nous utilisons essentiellement les Théorèmes de Lyapunov ainsi que le Lemme de Barbalat pour établir les résultats de stabilité de ce modèle et le théorème de continuation de Mawhin pour démontrer l'existence de solutions périodiques.

### 3.1 Les différentes étapes de la modélisation

La modélisation, c'est l'ensemble du processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation. Ainsi, les étapes de la modélisation sont :

- On fait des hypothèses sur les phénomènes étudiés.
- Les hypothèses sont traduites mathématiquement en un modèle.
- On étudie le modèle mathématique; on tire des conséquences qualitatives ou quantitatives et on fait des prévisions.
- Nous comparons les prévisions aux réalités expérimentales.
- Enfin, on revient sur les hypothèses pour modifier le modèle si c'est nécessaire et le cycle continu.

### 3.2 Présentation du modèle

Dans cette section, nous allons décrire le système considéré comme cas d'étude et d'application. Il s'agit d'un modèle proie-prédateur, il montre l'interaction entre les proies et les

prédateurs dans les écosystèmes. Ce système est étudié indépendamment de façon théorique par Lotka-volterra. Ils sont les premier à avoir mis en évidence une équation traduisant la prédation et leur modèle est à la base de toutes les équations différentielles en écologie ou en biologie. Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent que ce modèle n'est pas réaliste, ce modèle va nous permettre d'illustrer l'utilité de l'intégration d'un modèle hétérogène pour modéliser un système que nous pouvons qualifier de complexe (modèle proie-prédateur de type Holling II). Si on considère une espèce de proies et celle des prédateurs nous aurons deux types d'interactions :

1. interaction directe : les prédateurs capturent les proies,
2. interaction indirecte : par exemple la quantité ou la distribution des proies à une influence sur l'efficacité des prédateurs ou encore l'effet de la compétition quand plusieurs prédateurs se disputent la même ressource. Chaque espèce possède ses propres caractéristiques physiques qui lui confèrent certaines aptitudes.

Ce modèle complexe n'est rien d'autre qu'un système d'équations différentielles traduisant la dynamique de la population de poissons et celle des oiseaux en interaction. Donc ce système doit tenir compte des processus de croissance, de mortalité et d'interaction.

Nous nous intéressons d'abord à l'équation des proies qui se décompose en trois parties. La première partie  $\left( r_1 x \left( 1 - \frac{x}{K_1} \right) \right)$  correspond à la croissance logistique de la population de proies, ce qui signifie que la croissance est limité par la disponibilité de la ressource nutritionnelle pour les proies. La deuxième partie  $\left( \frac{\alpha xy}{x + D} \right)$  correspond à la pression de prédation exercée par un prédateur. La dernière partie  $(h(t)x)$  c'est la quantité de poissons du à la pêche. En regroupant ces trois équations, on obtient :

$$\dot{x}(t) = r_1 x \left( 1 - \frac{x}{K_1} \right) - \frac{\alpha xy}{x + D} - h(t)x. \quad (3.1)$$

L'équation qui modélise la dynamique des prédateurs (équation (3.2)) se décompose en quatre parties. Une première partie  $(d_1 y)$  correspond la mortalité naturelle des prédateurs, une deuxièmes partie  $\left( \frac{\beta xy}{x + D} \right)$  correspond à la croissance des prédateurs par consommation de proies. Une troisième partie  $(\Lambda(t))$  représente la quantité d'oiseaux qui arrivent par saison. Enfin, la dernière  $(L(t)y)$  correspond la quantité d'oiseaux qui repartent. D'où on a l'équation suivante :

### 3.2. Présentation du modèle

---

$$\dot{y}(t) = -d_1 y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t) - L(t)y. \quad (3.2)$$

Les équations (3.1) et (3.2) nous ramènent au système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D} - h(t)x, \\ \dot{y}(t) = -d_1 y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t) - L(t)y. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour étudier ce système, on effectue la réduction du nombre de paramètres. Donc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x \left( r_1 - \frac{r_1 x}{K_1} - h(t) \right) - \frac{\alpha xy}{x + D}, \\ \dot{y}(t) = (-d_1 - L(t))y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t). \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (r_1 - h(t))x \left(1 - \frac{r_1 x}{(r_1 - h(t))K_1}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D}, \\ \dot{y}(t) = (-d_1 - L(t))y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t). \end{cases}$$

En posant

$$r(t) = r_1 - h(t), \quad d(t) = d_1 + L(t), \quad \frac{1}{K(t)} = \frac{r_1}{(r_1 - h(t))K_1}.$$

Le modèle devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r(t)x \left(1 - \frac{x}{K(t)}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D}, \\ \dot{y}(t) = -d(t)y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour une raison biologique, nous supposons que :

$$x(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad y(0) \geq 0, \quad (3.5)$$

et

$$r(t) = r_1 - h(t) > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

## 3.3 Étude du modèle

### 3.3.1 Existence et unicité de solutions

Le modèle de type Holling II est un système d'équations différentielles non linéaires, autonome du premier ordre de la forme :

$$\dot{X}(t) = F(X(t), t),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

et  $F$  la fonction continue de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :

$$\begin{aligned} F(X(t), t) &= \begin{pmatrix} F_1(X(t), t) \\ F_2(X(t), t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r(t)x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D} \\ -d(t)y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On pose

$$F(u, v, \cdot) = \begin{pmatrix} ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{\alpha uv}{u + D} \\ -dv + \frac{\beta uv}{u + D} + \Lambda \end{pmatrix}.$$

$F$  étant de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ , donc localement lipschitzienne par rapport à  $X$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ . Par ailleurs,  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{y}(t)$  existent, donc  $x$  et  $y$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent,  $F$  est continue par rapport à  $t$ ; ce qui implique l'existence et l'unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy associé au système différentiel (3.4) sur  $[0, T_{max})$ , pour une condition initiale  $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$  (voire Théorème 1.1.1). Biologiquement, les seules solutions significatives sont les solutions

### 3.3. Étude du modèle

---

positives. Nous limiterons donc notre étude sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

#### 3.3.2 Domaine positivement invariant et permanence

Pour de nombreux systèmes biologiques, la délimitation des solutions et la permanence sont importantes. Ils donnent un sens biologique des systèmes [7, 18]. Nous proposons le lemme suivant basé sur le théorème 16.9, de [1] qui prouve la positivité et délimitation des solutions, on en déduit la coexistence des espèces et l'extinction.

**Lemme 3.3.1** *Supposons que  $n$  est un entier positif et  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) des fonctions fluides. Si  $f_i|_{x_i=0, x \in \mathbb{R}_+^n} \geq 0$  (où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ), alors  $\mathbb{R}_+^n$  est un domaine invariant de l'équation suivant :*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

*Si  $f_i|_{x_i=0, x \in \mathbb{R}_+^n} \leq 0$  (où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ), alors  $\mathbb{R}_-^n$  est un domaine invariant de l'équation (3.7).*

Pour la preuve de ce Lemme (voire [1])

#### Théorème 3.3.1

$\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y)^T / x \geq 0, y \geq 0\}$  est un domaine invariant de l'équation (3.4).

**Preuve:**

En effet, si on pose  $X = (x, y)^T$ . Pour le système (3.4), on remarque

$$F_1|_{x=0, X \in \mathbb{R}_+^2} = r(t)x \left(1 - \frac{x}{K(t)}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D}|_{x, X \in \mathbb{R}_+^2} = 0 \geq 0,$$

$$F_2|_{y=0, X \in \mathbb{R}_+^2} = -d(t)y - \frac{\beta xy}{x(t) + D} + \Lambda(t)|_{y, X \in \mathbb{R}_+^2} = \Lambda(t) \geq 0.$$

En utilisant Lemme 3.3.1, nous déduisons que  $\mathbb{R}_+^2$  est un domaine invariant de (3.4) avec les conditions (3.5) et (3.6). Les solutions restent donc dans le domaine positif. ■

**Proposition 3.3.1** *Soit  $a$  une fonction continue et  $b$  une constante, l'équation*

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t)(b - x(t)), \quad b \neq 0$$

satisfait

$$x(t) = \frac{bx^0 \exp \left\{ b \int_0^t a(s) ds \right\}}{x^0 \left( \exp \left\{ b \int_0^t a(s) ds \right\} - 1 \right) + b}, \quad x^0 = x(0). \quad (3.8)$$

**Preuve:**

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a(t)x(t)(b - x(t)), \quad b \neq 0 \\ \frac{dx(t)}{dt} &= a(t)xb \left( 1 - \frac{x(t)}{b} \right), \\ \frac{dx(t)}{x \left( 1 - \frac{x}{b} \right)} &= ba(t)dt, \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq b. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{x \left( 1 - \frac{x}{b} \right)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{b - x},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} + \frac{dx}{b - x} &= ba(t)dt, \\ \int_0^t \frac{dx}{x} + \int_0^t \frac{dx}{b - x} &= b \int_0^t a(t)dt, \\ \ln |x(t)| - \ln |x^0| - \ln |b - x(t)| + \ln |b - x^0| &= b \int_0^t a(t)dt, \\ \ln \left| \frac{x(t)}{b - x(t)} \right| &= b \int_0^t a(t)dt + \ln \left| \frac{x^0}{b - x^0} \right|, \\ \left| \frac{x(t)}{b - x(t)} \right| &= \left| \frac{x^0}{b - x^0} \right| \exp \left( b \int_0^t a(t)dt \right), \\ x(t)x^0 \exp \left( b \int_0^t a(t)dt \right) - x^0x(t) + bx(t) &= bx^0 \exp \left( b \int_0^t a(t)dt \right), \\ x(t) \left( x^0 \left( \exp \left( b \int_0^t a(t)dt \right) - 1 \right) + b \right) &= bx^0 \exp \left( b \int_0^t a(t)dt \right). \end{aligned}$$

### 3.3. Étude du modèle

---

D'où

$$x(t) = \frac{bx^0 \exp \left\{ b \int_0^t a(t) dt \right\}}{x^0 \left( \exp \left\{ b \int_0^t a(t) dt \right\} - 1 \right) + b}$$

■

**Théorème 3.3.2** *si*

$$d^l - \frac{\alpha \Lambda^m}{r^l D} > \beta, \quad (H1)$$

alors l'ensemble  $\Gamma^\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : m_1^\varepsilon < x < M_1^\varepsilon, m_2^\varepsilon < y < M_2^\varepsilon \right\}$ ,  
est un domaine invariant sous la suite induite par le système (3.4), où  
 $M_1^\varepsilon = K_1^\varepsilon + \varepsilon$ ,  $M_2^\varepsilon = \frac{\Lambda^m}{d^l - \beta} + \varepsilon$ ,  $m_1^\varepsilon = K^l \left( 1 - \frac{\alpha M_2^\varepsilon}{r^l D} \right)$ ,  $m_2^\varepsilon = \frac{\Lambda^l}{d^m} - \varepsilon$   
et  $\varepsilon$  est suffisamment petit pour que  $m_i^\varepsilon$  soit positif ( $i = 1, 2$ ).

**Preuve:**

Soit  $(x(t), y(t))$  une solution de (3.4) avec  $(x(0), y(0)) \in \Gamma^\varepsilon$ . Grâce à la positivité de la solution du système (3.4).

l'équation des proies donne :

$$\dot{x}(t) \leq r(t)x \left( 1 - \frac{x}{K(t)} \right) \leq r(t)x \left( 1 - \frac{x}{M_1^\varepsilon} \right) \leq \frac{r(t)}{M_1^\varepsilon} x (M_1^\varepsilon - x).$$

On pose  $\dot{z}(t) = \frac{r(t)}{M_1^\varepsilon} z (M_1^\varepsilon - z)$  avec  $z(0) = x(0)$ .

De l'égalité (3.8), on a

$$z(t) = \frac{M_1^\varepsilon z(0) \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}}{z(0) \left( \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\} - 1 \right) + M_1^\varepsilon}$$

D'après le Lemme 1.3.2, on en déduit que :

$$x(t) \leq \frac{M_1^\varepsilon x(0) \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}}{x(0) \left( \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\} - 1 \right) + M_1^\varepsilon}$$

Puisque  $(x_0, y_0) \in \Gamma^\varepsilon$  et que  $x_0 < M_1^\varepsilon$ , on déduit de l'inégalité que

$$x(t) < M_1^\varepsilon \quad \forall t \in R_+. \quad (3.9)$$

L'équation des prédateurs satisfait :

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &\leq - \left( d^l - \frac{\beta x}{x + D} \right) y(t) + \Lambda^m, \\
 &\leq - (d^l - \beta) y(t) + \Lambda^m, \\
 &\leq (d^l - \beta) \left( -y + \frac{\Lambda^m}{d^l - \beta} + \varepsilon \right), \\
 \dot{y}(t) + (d^l - \beta) y(t) &\leq (d^l - \beta) \left( \frac{\Lambda^m}{d^l - \beta} + \varepsilon \right), \\
 \dot{y}(t) + (d^l - \beta) y(t) &\leq (d^l - \beta) M_2^\varepsilon.
 \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par  $\exp((d^l - \beta)t)$  et en intégrant de 0 à t on obtient :  
 $y(t) \leq M_2^\varepsilon + (y(0) - M_2^\varepsilon) \exp(- (d^l - \beta) t)$ . Puisque  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  et que  $y_0 < M_2^\varepsilon$ , alors à partir de l'inégalité précédente, on déduit que

$$y(t) < M_2^\varepsilon \quad \forall t \in R_+. \quad (3.10)$$

De l'équation des proies, nous avons

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &\geq r(t)x \left( 1 - \frac{x}{K^l} \right) - \frac{\alpha x M_2^\varepsilon}{D}, \\
 &\geq \left( r(t) - \frac{\alpha M_2^\varepsilon}{D} \right) x - \frac{r(t)}{K^l} x^2, \\
 &\geq \frac{r(t)}{K^l} x \left( \frac{K^l}{r(t)} \left( r(t) - \frac{\alpha M_2^\varepsilon}{D} \right) - x \right), \\
 &\geq \frac{r(t)}{K^l} x \left( K^l \left( 1 - \frac{\alpha M_2^\varepsilon}{r(t) D} \right) - x \right), \\
 &\geq \frac{r(t)}{K^l} x \left( K^l \left( 1 - \frac{\alpha M_2^\varepsilon}{r^l D} \right) - x \right), \\
 &\geq \frac{r(t)}{K^l} x (m_1^\varepsilon - x),
 \end{aligned}$$

en posant à nouveau  $z(t) = \frac{r(t)}{K^l} z(m_1^\varepsilon - z)$  et à partir de (3.8) et de la propriété d'inégalité différentielle, nous obtenons l'inégalité suivante :

### 3.3. Étude du modèle

---

$$x(t) \geq \frac{m_1^\varepsilon x(0) \exp \left\{ \frac{m_1^\varepsilon}{K^l} \int_0^t r(s) ds \right\}}{x(0) \left( \exp \left\{ \frac{m_1^\varepsilon}{K^l} \int_0^t r(s) ds \right\} - 1 \right) + m_1^\varepsilon}.$$

Alors

$$x(0) > m_1^\varepsilon \Rightarrow x(t) > m_1^\varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.11)$$

Avec l'équation des prédateurs, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &\geq -d(t)y(t) + \Lambda(t) \geq -d^m y(t) + \Lambda^l, \\ &\geq d^m \left( -y(t) + \frac{\Lambda^l}{d^m} - \varepsilon \right), \\ &\geq d^m \left( -y(t) + m_2^\varepsilon \right), \\ \dot{y}(t) + d^m y(t) &\geq d^m m_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par  $\exp(d^m t)$ , puis en intégrant de 0 à t on obtient :

$$y(t) \geq m_2^\varepsilon + \left( y(0) - m_2^\varepsilon \right) \exp(-d^m t).$$

Puisque  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  et que  $y_0 > m_2^\varepsilon$ , alors à partir de l'inégalité précédente, on déduit que :

$$y(t) > m_2^\varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.12)$$

De (3.9) - (3.12) nous avons  $(x(t), y(t)) \in \Gamma^\varepsilon$ . ■

De plus, en utilisant la comparaison standard et les arguments précédents on montre que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) < M_1^\varepsilon, \quad (3.13)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) < M_2^\varepsilon, \quad (3.14)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) > m_1^\varepsilon, \quad (3.15)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) > m_2^\varepsilon. \quad (3.16)$$

(3.13)-(3.14), montrent que (3.4) est dissipatif (la solution bornée) et (3.15)-(3.16), montrent que (3.4) est uniformément persistant. D'où (3.4) est permanent.

**Corollaire 3.3.1** *Sous l'hypothèse (H1), on obtient :*

$$m_1^0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1^0,$$

et

$$m_2^0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_2^0.$$

**Preuve:**

D'après le Théorème 3.3.2, on a :

$$\frac{m_1^\varepsilon x^0 \exp \left\{ \frac{m_1^\varepsilon}{K^l} \int_0^t r(s) ds \right\}}{x^0 \exp \left\{ \frac{m_1^\varepsilon}{K^l} \int_0^t r(s) ds \right\} - x^0 + m_1^\varepsilon} \leq x(t) \leq \frac{M_1^\varepsilon x^0 \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}}{x^0 \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\} - x^0 + M_1^\varepsilon},$$

$$\frac{m_1^\varepsilon x^0}{x^0 + (m_1^\varepsilon - x^0) \exp \left\{ \frac{-m_1^\varepsilon}{K^l} \int_0^t r(s) ds \right\}} \leq x(t) \leq \frac{M_1^\varepsilon x^0}{x^0 + (M_1^\varepsilon - x^0) \exp \left\{ - \int_0^t r(s) ds \right\}}$$

et

$$m_2^\varepsilon + \left( y(0) - m_2^\varepsilon \right) \exp(-d^m t) \leq y(t) \leq M_2^\varepsilon + \left( y(0) - M_2^\varepsilon \right) \exp(-(d^l - \beta)t).$$

Quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et  $t$  tend vers l'infini, on obtient :

$$m_1^0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1^0,$$

et

$$m_2^0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_2^0.$$

D'où, le système (3.4) est permanent. ■

**Corollaire 3.3.2** *Soit  $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ , la solution maximale  $X(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_+^2$  du problème de Cauchy relative à (3.4) de condition initiale  $X_0$  est globale.*

### 3.3. Étude du modèle

---

#### Démonstration:

En effet, soit  $X(t) = (x(t), y(t))$  la solution maximale du problème de Cauchy associé au (3.4) de condition initiale  $X_0$ . D'après le Théorème 3.3.1 et 3.3.2,  $X(t)$  est bornée. Ce qui implique que la solution maximale est globale (voire Théorème 1.1.1.2). ■

#### Théorème 3.3.3 Si

$$d^m < \frac{\alpha \Lambda^l}{r^m(D + K^m)}, \quad (H2)$$

alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , c'est-à-dire l'extinction des proies.

#### Preuve:

Avec l'équation des proies, on a

$$\dot{x}(t) \leq rx - \frac{\alpha xy}{D + x} \leq r^m x - \frac{\alpha x m_2^\varepsilon}{D + M_1^\varepsilon},$$

donc,  $\exists T_0 > 0$  telle que  $\forall t > T_0$ ,

$$\dot{x}(t) \leq \left( r^m - \frac{\alpha m_2^0}{D + M_1^0} \right) x,$$

ce qui implique que

$$x(t) \leq x(0) \exp \left( \left( r^m - \frac{\alpha \Lambda^l}{d^m(D + K^m)} \right) t \right).$$

Donc

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \quad \blacksquare$$

#### 3.3.2.1 Stabilité globale de solution

Cependant, nous allons montrer que, sous certaines conditions, la solution  $(x^*, y^*)$  du système (3.4) est globalement asymptotiquement stable. D'où le théorème suivant :

**Théorème 3.3.4** *Supposons que l'hypothèse (H1) du Théorème 3.3.2 est vraie et soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $m_1^\varepsilon > 0$ , soit  $(x^*(t), y^*(t))^T$  une solution positive du système (3.4) si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\mu_1 = \frac{r^l}{K^m} - \frac{\alpha M_2^\varepsilon + \beta D}{(D + m_1^\varepsilon)^2} > 0, \quad (H3)$$

$$\mu_2 = -\frac{\alpha}{(D + m_1^\varepsilon)} + \frac{\Lambda^l}{M_2^{\varepsilon 2}} > 0. \quad (H4)$$

Alors  $(x^*(t), y^*(t))$  est globalement asymptotiquement stable.

**Preuve:**

Soit  $(x(t), y(t))^T$  toute solution positive de (3.4) avec une valeur initiale positive dans  $\Gamma^\varepsilon$ . D'après Théorème 3.3.2, on sait que  $\Gamma^\varepsilon$  est un domaine finalement borné. Ainsi, il existe un  $T^* > 0$ , tel que  $(x(t), y(t)) \in \Gamma^\varepsilon$  pour tout  $t \geq T^*$ . On définit une fonction de Lyapunov

$$V(x, y) = |\ln x(t) - \ln x^*(t)| + |\ln y(t) - \ln y^*(t)|.$$

Dans  $\Gamma^\varepsilon$ , la fonction  $V$  satisfait à

$$V(E_2) = 0, \text{ et pour tout } (x, y) \in \Gamma^\varepsilon \setminus \{E_2\}, V(x, y) > 0.$$

D'où  $V$  est bien définie. En calculant la dérivée supérieure droite de  $V$ , il s'en suit que :

$$\begin{aligned} D^+V(x, y) &= \frac{\partial V(t)}{\partial x(t)} \times \frac{\partial x(t)}{\partial t} + \frac{\partial V(t)}{\partial x^*(t)} \times \frac{\partial x^*(t)}{\partial t} + \frac{\partial V(t)}{\partial y(t)} \times \frac{\partial y(t)}{\partial t} + \frac{\partial V(t)}{\partial y^*(t)} \times \frac{\partial y^*(t)}{\partial t}, \\ &= \operatorname{sgn}(x - x^*) \left( \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} - \frac{\dot{x}^*(t)}{x^*(t)} \right) + \operatorname{sgn}(y - y^*) \left( \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} - \frac{\dot{y}^*(t)}{y^*(t)} \right) \\ &= \operatorname{sgn}(x - x^*) \left( -\frac{r(t)}{K(t)}(x - x^*) - \frac{\alpha y}{D + x} + \frac{\alpha y^*}{D + x^*} \right) \\ &\quad + \operatorname{sgn}(y - y^*) \left( \frac{\beta x}{D + x} - \frac{\beta x^*}{D + x^*} - \frac{\Lambda(t)}{yy^*}(y - y^*) \right) \\ &= \operatorname{sgn}(x - x^*) \left( -\frac{r(t)}{K(t)}(x - x^*) - \frac{\alpha D(y - y^*)}{(D + x)(D + x^*)} + \frac{\alpha(xy^* - yx^*)}{(D + x)(D + x^*)} \right) \\ &\quad + \operatorname{sgn}(y - y^*) \left( \frac{\beta D(x - x^*)}{(D + x)(D + x^*)} - \frac{\Lambda(t)}{yy^*}(y - y^*) \right) \end{aligned}$$

### 3.3. Étude du modèle

---

puisque  $xy^* - yx^* = xy^* - xy + xy - yx^* = x(y^* - y) + y(x - x^*)$ , on a :

$$\begin{aligned} D^+V(t) &= \operatorname{sgn}(x - x^*) \left( -\frac{r(t)}{K(t)}(x - x^*) - \frac{\alpha D(y - y^*)}{(D + x)(D + x^*)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha x(y - y^*)}{(D + x)(D + x^*)} + \frac{\alpha y(x - x^*)}{(D + x)(D + x^*)} \right) \\ &\quad + \operatorname{sgn}(y - y^*) \left( \frac{\beta D(x - x^*)}{(D + x)(D + x^*)} - \frac{\Lambda(t)}{yy^*}(y - y^*) \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D^+V(t) &\leq \left( -\frac{r(t)}{K(t)} + \frac{\alpha y}{(D + x)(D + x^*)} \right) |x - x^*| \\ &\quad + \left( \frac{\alpha D}{(D + x)(D + x^*)} + \frac{\alpha x}{(D + x)(D + x^*)} \right) |y - y^*| \\ &\quad - \frac{\Lambda(t)}{yy^*} |y - y^*| + \frac{\beta D |x - x^*|}{(D + x)(D + x^*)}, \\ D^+V(t) &\leq \left( -\frac{r(t)}{K(t)} + \frac{\alpha y + \beta D}{(D + x)(D + x^*)} \right) |x - x^*| \\ &\quad + \left( \frac{\alpha(D + x)}{(D + x)(D + x^*)} - \frac{\Lambda(t)}{yy^*} \right) |y - y^*|, \\ D^+V(t) &\leq \left( -\frac{r^l}{K^m} + \frac{\alpha y + \beta D}{(D + x)(D + x^*)} \right) |x - x^*| \\ &\quad + \left( \frac{\alpha}{D + x^*} - \frac{\Lambda(t)}{yy^*} \right) |y - y^*|. \end{aligned}$$

D'après (H1)

$$\frac{\alpha y + \beta D}{(D + x)(D + x^*)} \leq \frac{\alpha M_2^\varepsilon + \beta D}{(D + m_1^\varepsilon)^2}$$

et

$$\frac{\alpha}{D + x^*} - \frac{\Lambda(t)}{yy^*} \leq \frac{\alpha}{D + m_1^\varepsilon} - \frac{\Lambda^l}{(M_2^\varepsilon)^2}.$$

Et à partir de l'hypothèse (H3)-(H4), on obtient ce qui suit :

$$D^+V(t) \leq -\mu_1|x - x^*| - \mu_2|y - y^*|. \quad (3.17)$$

En intégrant les deux côtés de (3.17) sur l'intervalle  $[T^*, t]$ , on obtient :

$$V(t) + \mu_1 \int_{T^*}^t |x(s) - x^*(s)| ds + \mu_2 \int_{T^*}^t |y(s) - y^*(s)| ds \leq V(T^*).$$

Puisque  $V$  est une fonction positive, alors à partir de l'inégalité précédente, on obtient

$$\mu_1 \int_{T^*}^t |x(s) - x^*(s)| ds + \mu_2 \int_{T^*}^t |y(s) - y^*(s)| ds \leq V(T^*) < +\infty \quad \forall t > T^*.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{T^*}^t |x(s) - x^*(s)| ds &< +\infty, \\ \int_{T^*}^t |y(s) - y^*(s)| ds &< +\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$(x(t) - x^*(t)), (y(t) - y^*(t)) \in L^1[T^*, +\infty).$$

La solution  $(x(t), y(t))$  du système (3.4) est bornée de même que  $(x^*(t), y^*(t))$ . Ce qui implique  $(x(t), y(t))$  et  $(x^*(t), y^*(t))$  possèdent des dérivées bornées pour  $t > T^*$ , on en déduit que  $|x(t) - x^*(t)|$  et  $|y(t) - y^*(t)|$  sont uniformément continues sur  $[T^*, +\infty)$ . En utilisant le Lemme de Barbalat 1.3.1, on en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x - x^*| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y - y^*| = 0.$$

C'est-à-dire que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = x^* \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = y^*.$$

■

### 3.4 Existence d'une solution périodique

Dans cette section, nous allons étudier l'existence d'une solution périodique en utilisant le théorème de continuation de Mahwin et de la théorie des degrés de coïncidence proposée par Gaine et Mahwin [6]. Le théorème de continuation consiste à construire un espace ouvert

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

approprié un sous-ensemble borné  $\Omega$  dans un espace de Banach  $X$  tel que l'équation

$$Lx = Nx \tag{3.18}$$

admet au moins une solution dans  $\bar{\Omega}$ ,  $L$  est un opérateur linéaire et  $N$  un opérateur continu. De plus, si  $X$  est composé de solution périodique de période  $\omega$ , alors la solution de (3.18) est  $\omega$ -périodique. Pour cela, on rappelle quelques résultats sur les systèmes non autonomes périodiques. Considérons le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{3.19}$$

où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$ ,  $\omega$ -périodique. Les équations différentielles périodiques régissent l'évolution de nombreux systèmes intervenant dans la biologie. C'est pourquoi, on s'intéresse à la recherche des solutions périodiques. Dans ce qui suit, nous présentons un résultat fondamental : Le **théorème de continuation de Mawhin** qui sera utilisé dans ce mémoire pour démontrer l'existence de solutions périodiques.

#### 3.4.1 Théorème de Mawhin

Dans ce paragraphe, on se propose de démontrer, que l'équation  $L(u) = N(u)$  admet une solution sous certaines conditions.

Avant d'énoncer le théorème de continuation de Mawhin, nous présentons quelques définitions sur la théorie de Fredholm.

##### 3.4.1.1 Application de Fredholm

**Définition 3.4.1 (Codimension d'un sous-espace vectoriel)** *Soit  $X$  un espace de Banach. Un sous-espace vectoriel fermé  $E \subset X$  est de codimension finie dans  $X$ , si le quotient  $X/E$  est de dimension finie. La codimension de  $E$  dans  $X$  est la dimension de l'espace vectoriel quotient  $X/E$ . On la notera  $\text{codim}_X E$  ou tout simplement  $\text{codim} E$ .*

**Définition 3.4.2 (Projecteur)** *Soit  $X$  un espace vectoriel donné, une transformation linéaire  $P$  de  $X$  dans lui même telle que  $P^2 = P$  est appelée projecteur.*

**Définition 3.4.3** *On appelle l'indice d'une application  $L$  le nombre entier*

$$\text{Ind} L = \dim \text{Ker} L - \text{codim} \text{Im} L$$

**Définition 3.4.4** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach,  $L : \text{Dom}L \subset X \rightarrow Y$  est une application linéaire et  $N : X \rightarrow Y$  une application continue. L'application  $L$  est dite application de Fredholm d'indice zéro si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $\text{Ker}L$  est de dimension finie.
2.  $\text{Im}L$  est fermé dans  $Y$  et de codimension finie.
3.  $\dim \text{Ker}L = \text{codim} \text{Im}L < +\infty$ .

On rappelle que  $\text{codim} \text{Im}L$  est la dimension du complémentaire de  $\text{Im}L$  dans  $X$ .

Si  $L$  est une application de Fredholm d'indice zéro, alors ils existent deux projecteurs  $P$  et  $Q$

$$P : X \rightarrow X, \quad Q : Y \rightarrow Y$$

tels que,

$\text{Im}P = \text{ker}L$ ,  $\text{Im}L = \text{ker}Q = \text{Im}(I - Q)$  et  $X = \text{Ker}L \oplus \text{Ker}P$ ,  $Y = \text{Im}L \oplus \text{Im}P$ . Ce qui implique que

$$L|_{\text{Dom}L \cap \text{Ker}P} : (I - P)X \rightarrow \text{Im}L$$

est inversible. Notons l'inverse de  $L|_{\text{Dom}L \cap \text{Ker}P}$  par  $K_p$ . Comme  $\text{Im}Q$  est isomorphe à  $\text{Ker}L$ , alors il existe un isomorphisme

$$J : \text{Im}Q \rightarrow \text{Ker}L, \quad x \rightarrow x.$$

L'inverse généralisé de  $L$  est défini par  $K_p(I - Q) : Y \rightarrow \text{Dom}L \cap \text{Ker}L$ .

**Définition 3.4.5 (Application  $L$ -compact)** Pour tout ouvert  $\Omega$  borné de  $X$ , l'application  $N$  est dite  $L$ -compact sur  $\bar{\Omega}$  si les deux conditions sont vérifiées :

1.  $QN(\bar{\Omega})$  est borné,
2.  $K_p(I - Q)N : \bar{\Omega} \rightarrow X$  est compact.

### 3.4.1.2 Degré de Brouwer

**Définition 3.4.6 (Définition du Degré de Brouwer)** Soit  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ .

Pour  $x \in \Omega$ , soit  $J_{f(x)}$  désigne le déterminant jacobien de  $f$  en  $x$  et  $S_f$  soit un ensemble de tous les points critiques de  $f$ , c'est-à-dire  $S_f = \{x \in \Omega : J_{f(x)} = 0\}$ .

Pour tout  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f)$ , c'est-à-dire que  $y$  est un point régulier de  $f$ , le degré topologique de  $f$  en  $y$  est défini comme suit :

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

$$\deg \{f, \Omega, y\} = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn} J_{f(x)}, \\ 0 \quad \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

**Définition 3.4.7 (Homotopie)** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques,  $f$  et  $g : X \rightarrow Y$  deux applications continues. On dit que  $f$  est homotope à  $g$  s'il existe une application continue  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que  $H(x, 0) = f(x)$  et  $H(x, 1) = g(x)$  pour tout  $x \in X$ . On dit que l'application  $H$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$ . De plus la relation  $f$  homotope à  $g$  est une relation d'équivalence.

**Proposition 3.4.1** Soient  $F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un ouvert borné  $\Omega$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  satisfait  $\gamma = \min \{\|F(x) - b\|, x \in \partial\Omega\} > 0$ .

Si  $\alpha \in ]0, \gamma[$  et  $\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|F(x) - G(x)\| < \frac{1}{7}\alpha$ , Alors

$$\deg(F, \Omega, b) = \deg(G, \Omega, b).$$

**Remarque 3.4.1** Cette proposition que nous venons d'énoncer nous permettra de calculer le degré de Brouwer dans la preuve du théorème de l'existence de solutions périodiques positives du modèle (3.4).

**Propriété 3.4.1 (Invariance par homotopie)** Soit  $H : \Omega \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  sur un  $\Omega \times [0, 1]$ , supposons que  $b \in \mathbb{R}^n$  satisfait  $\forall x \in \partial\Omega \times [0, 1] H(x, t) \neq b$  alors  $\deg(H, \Omega, b)$  est constant pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Preuve:**

Puisque  $\partial\Omega \times [0, 1]$  est compact,  $\exists \alpha > 0$  tel que

$$\min \{\|H(x) - b\|_2, (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]\} > \alpha > 0.$$

Et d'après la continuité uniforme de  $H$  sur  $\bar{\Omega} \times [0, 1]$  on a

$$\forall t, s \in [0, 1] \exists \sigma > 0, |t - s| < \sigma \Rightarrow \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|H(x, s) - H(x, t)\|_2 < \frac{1}{7}\alpha$$

Par la proposition 3.4.1, on a  $\forall s, t \in [0, 1]$  et  $|t - s| < \sigma$

$$\deg(H(x, t), \Omega, b) = \deg(H(x, s), \Omega, b).$$

Puisque  $[0,1]$  est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'intervalles  $]t_i, t_{i+1}[$  de longueur  $\sigma$ , donc  $\forall t_i, t_{i+1} \in [0, 1]$  on a

$$\deg(H(x, t_i), \Omega, b) = \deg(H(x, t_{i+1}), \Omega, b).$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le théorème de continuation de Mawhin.

**Théorème 3.4.1 (Théorème de continuation de Mawhin) [6]**

*Soient  $\Omega \subset X$  un ouvert borné,  $L$  une application de Fredholm de l'indice zéro et  $N$  est  $L$ -compact sur  $\bar{\Omega}$ . Supposons que*

1. *pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $u \notin \partial\Omega$ ,  $Lu = \lambda Nu$ ;*
2. *pour tout  $u \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L$ ,  $QNu \neq 0$ ;*
3.  *$\deg\{JQN, \Omega \cap \text{Ker}L, 0\} \neq 0$ .*

*Alors l'équation  $Lu = Nu$  a au moins une solution dans  $\text{Dom}L \cap \bar{\Omega}$ .*

Pour utiliser le Théorème 3.4.1, nous construisons d'abord un espace de Banach  $X$ , composé de fonctions périodiques. Par définition de fonctions  $L$  et  $N$ , le système (3.4) est réécrit en une équation abstraite  $Lu = Nu$ . Ce Théorème montre que sous les conditions 1 à 3, l'équation abstraite  $Lu = Nu$  a au moins une solution, qui appartient à un sous-ensemble borné ouvert de l'espace de Banach  $X$ . Par conséquent, le système (3.4) a au moins une solution périodique. La clé de cette méthode est de construire un sous-ensemble borné ouvert de l'espace de Banach  $X$  tel qu'il peut répondre aux conditions du Théorème 3.4.1.

Dans notre étude, nous sommes intéressé que par des solutions positives ; on considère ainsi le changement de variables suivant :  $x = e^{u_1}$  et  $y = e^{u_2}$ . On a alors

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t)e^{u_1(t)} = r(t) \left( 1 - \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right) e^{u_1(t)} - \frac{\alpha e^{u_2(t)} e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D}, \\ \dot{u}_2(t)e^{u_2(t)} = -d(t)e^{u_2(t)} + \frac{\beta e^{u_1(t)} e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t). \end{cases} \quad (3.20)$$

Après simplification le système (3.4) devient :

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = r(t) \left( 1 - \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right) - \frac{\alpha e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D}, \\ \dot{u}_2(t) = -d(t) + \frac{\beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t) e^{-u_2(t)}. \end{cases} \quad (3.21)$$

**Lemme 3.4.1** *Les espaces définis par*

$$X = Y = \left\{ u = (u_1, u_2) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), u(t+1) = u(t) \right\},$$

*munis de la norme*

$$\|(u_1, u_2)\| = \max_{t \in (0,1)} |u_1(t)| + \max_{t \in (0,1)} |u_2(t)|,$$

*pour tout  $u \in X$  sont des espaces de Banach.*

**Démonstration:**

$$\|u\| = \max_{t \in (0,1)} |u_1(t)| + \max_{t \in (0,1)} |u_2(t)|.$$

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $X$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  :

$\forall n \geq N, \quad \forall m \geq N$ , on a :

$$\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon.$$

En posant  $u_n = (x_n, y_n)$  et  $u_m = (x_m, y_m)$  On a alors :

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon.$$

et

$$|y_n(t) - y_m(t)| \leq \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve que  $u_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}^2$ . Or  $\mathbb{R}^2$  est complet, donc cette suite est convergente. On note  $u(t)$  sa limite. Par passage à la limite dans

$$u_n(t+1) = u_n(t),$$

on obtient

$$u(t+1) = u(t).$$

La fonction limite  $u$  est donc périodique et de période 1.

Montrons que  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On sait que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ , tel que  $\forall t, s \in \mathbb{R}, |t - s| < \eta$

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq \varepsilon,$$

en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient :

$$\|u(t) - u(s)\| \leq \varepsilon.$$

Donc  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Montrons que  $u_n$  converge vers  $u$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et pour tous  $n \geq N, m \geq N$ , on a :

$$|x_n(t) - x_m(t)| + |y_n(t) - y_m(t)| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre  $m$  vers  $+\infty$  pour tout  $n \geq N$  et en passant au maximum puisque  $n$  est quelconque et ne dépend pas de  $t$ , on obtient donc :

$$|x_n(t) - x(t)| + |y_n(t) - y(t)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|u_n - u\| \leq \varepsilon,$$

D'où  $u \in X$ ,  $X$  est donc complet. Donc  $Y$  est aussi complet. ■

**Lemme 3.4.2** Soit  $L$  défini par

$$L : \text{Dom}L \subset X \rightarrow X, \quad L(u(t)) = \dot{u}(t),$$

où

$$\text{Dom}L = \left\{ u \in X \text{ telle que } u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \right\} \subset X.$$

Alors,  $L$  est une application de Fredholm d'indice zéro.

**Démonstration:**

On voit clairement que :

$$\text{Ker}L = \mathbb{R}^2, \quad \text{Im}L = \left\{ z \in Y : \int_0^1 z(t)dt = 0 \right\}.$$

En effet, soit  $u \in X$ .  $u \in \text{Ker}L \Leftrightarrow \dot{u}(t) = 0 \Leftrightarrow u$  est constante. D'où

$$\text{Ker}L = \mathbb{R}^2$$

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

Et, soit  $z \in \text{Im}L$ , alors il existe  $u \in \text{Dom}L$  tel que :

$$\dot{u}(t) = z(t) \Rightarrow \int_0^1 z(t)dt = \int_0^1 \dot{u}(t)dt = 0, \text{ car } u(0) = u(1).$$

Donc

$$\int_0^1 z(t)dt = 0.$$

D'autre part, soit  $z \in Y$  tel que  $\int_0^1 z(t)dt = 0$ , alors il existe

$$u(t) = \int_0^t z(s)ds + u(0) \in \text{Dom}L, \text{ avec } \dot{u}(t) = z(t). \quad (3.22)$$

D'où

$$\text{Im}L = \left\{ z \in Y : \int_0^1 z(t)dt = 0 \right\}.$$

Par ailleurs,  $P$  et  $Q$  sont des applications définies par

$$Pu = \int_0^1 udt, \quad u \in X, \quad Qu = \int_0^1 udt, \quad u \in Y.$$

Montrons que

$$\text{Im}P = \ker L, \quad \text{Im}L = \ker Q = \text{Im}(I - Q).$$

Montrons d'abord que  $P$  et  $Q$  sont continues.

Soit  $u, v \in X$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|P(u) - P(v)\| &= \left\| \int_0^1 (u(t) - v(t))dt \right\|, \\ &= \left| \int_0^1 (u_1(t) - v_1(t))dt \right| + \left| \int_0^1 (u_2(t) - v_2(t))dt \right|, \\ &\leq \max_{t \in (0,1)} |(u_1 - v_1)(t)| \int_0^1 dt + \max_{t \in (0,1)} |(u_2 - v_2)(t)| \int_0^1 dt, \\ &\leq \max_{t \in (0,1)} |(u_1 - v_1)(t)| + \max_{t \in (0,1)} |(u_2 - v_2)(t)|, \\ &\leq \|u - v\|. \end{aligned}$$

Donc  $P$  est contractante (i.e 1-Lipschitzienne), d'où  $P$  est continue. Ainsi en procédant de la même manière on montre que  $Q$  est continue.

Soient  $u, v \in Y$  et  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1 u + \lambda_2 v) &= \int_0^1 (\lambda_1 u(t) + \lambda_2 v(t)) dt = \lambda_1 \int_0^1 u(t) dt + \lambda_2 \int_0^1 v(t) dt, \\ &= \lambda_1 Qu + \lambda_2 Qv, \end{aligned}$$

donc  $Q$  est un endomorphisme de  $Y$ . On en déduit aussi que  $P$  est un endomorphisme de  $X$ .

Par définition,  $Q$  est un endomorphisme de  $Y \Leftrightarrow Q = Q^2$ . (voir définition 3.4.2)

Montrons que

$$[Q \text{ projecteur} \Leftrightarrow I - Q \text{ projecteur}]$$

$$(I - Q)^2 = I - 2Q + Q^2, \text{ donc } (I - Q)^2 = (I - Q) \Leftrightarrow Q = Q^2.$$

Soit  $u \in Y$ ,  $Q \circ (I - Q)u = 0$ , donc  $Im(I - Q) \subset KerQ$ .

Soit  $u \in KerQ$ , on a  $(I - Q)u = u - Qu = u$ , donc  $u \in Im(I - Q)$ . Ainsi  $KerQ \subset Im(I - Q)$ , d'où

$$KerQ = Im(I - Q).$$

$ImL = KerQ$  est évident, ce qui implique que

$$ImL = kerQ = KerP = Im(I - Q).$$

$P$  et  $Q$  sont des projecteurs continus. Donc  $ImL$  est un fermé dans  $Y$  (car l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé). On a alors

$$\begin{aligned} codim_E ImL &= dimE - dimImL \\ &= dimKerL + dimImL - dimImL, \\ &= dimKerL = dim\mathbb{R}^2, \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc,  $dimKerL = codimImL = 2$ , d'où  $L$  est une application de Fredholm d'indice zéro.

De plus, soit  $u \in X$ .  $u \in ImP \Rightarrow \exists v \in X/P(v) = u$ . Alors  $P(u) = P^2(v) = P(v) = u$ .

Donc  $\forall v \in X$ ,  $(u \in ImP \Rightarrow P(u) = u)$ . Réciproquement, si  $P(u) = u$ , alors  $u \in ImP$ .

Donc pour tout  $u \in X$ ,  $u \in ImP \Leftrightarrow P(u) = u \Leftrightarrow (I - P)(u) = 0 \Leftrightarrow u \in Ker(I - P)$ .

D'où

$$KerL = ImP = ImQ = Ker(I - P).$$

■

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

**Corollaire 3.4.1** *L'application*

$$L_p = L|_{\text{Dom}L \cap \text{Ker}P} : (I - P)X \rightarrow \text{Im}L$$

*est inversible et son inverse*  $K_p : \text{Im}L \rightarrow \text{Dom}L \cap \text{Ker}P$  *est donné par*

$$K_p(z) = \int_0^t z(s)ds - \int_0^1 \int_0^t z(s)dsdt, \quad t \in [0, 1]$$

**Démonstration:**

Tout d'abord on a

$$\text{Im}L = \text{Ker}P = \text{Im}(I - P) = \{(I - P)u, u \in X\} = (I - P)X.$$

Donc,  $\text{Ker}P \cap \text{Dom}L = (I - P)X$  d'après (3.22).

Maintenant montrons que l'application  $L_p$  est injective.

Soit

$$u \in \text{Ker}L_p \subset \text{Ker}L = \text{Im}P,$$

alors il existe

$$x \in \text{Dom}P \quad \text{tel que} \quad P(x) = u.$$

Comme  $P$  est un projecteur, on a

$$u = P(x) = P(P(x)) = P(u) = 0, \quad \text{car } u \in \text{Ker}P$$

ce qui montre que

$$\text{Ker}L_p = \{0\}.$$

Donc  $L_p$  est injective.

Montrons que  $\text{Im}L$  est surjective. On se donne  $z \in \text{Im}L$ , alors il existe  $u \in \text{Dom}L$  tel que  $z = L(u)$ . Puisque  $P : X \rightarrow X$  est un projecteur, alors  $X$  peut s'écrire comme somme directe

$$X = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P,$$

$$X = \text{Ker}P \oplus \text{Ker}L.$$

Alors il existe un unique élément  $f \in \text{Ker}P$  et  $g \in \text{Ker}L$  tels que  $u = f + g$ . On obtient

$$z = L(u) = L(f + g) = L(f) + L(g) = L(f) + 0.$$

Ce qui implique que

$$(f \in \text{Dom}L \quad \text{et} \quad z = L(f)) \Rightarrow \text{Ker}P \subset \text{Dom}L.$$

On en déduit que  $L_p$  est surjective.

Par conséquent  $L_p$  est bijective, donc  $L_p$  est inversible.

D'où

$$K_p : \text{Im}L \rightarrow \text{Dom}L \cap \text{Ker}P.$$

Maintenant soit  $u \in \text{Ker}P \cap \text{Dom}L$ , on a

$$\begin{aligned} L_p(u) = \dot{u}(t) \quad \text{et} \quad \int_0^1 u(s)ds = 0 \\ = z(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_p(u) = z(t) \Rightarrow L^{-1}(z) = u(t) \\ = \int_0^t z(s)ds + u(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(s)dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left( \int_0^t z(s)ds + u(0) \right) dt = 0 \\ \Rightarrow u(0) = - \int_0^1 \int_0^t z(s)dsdt. \end{aligned}$$

D'où en remplaçant  $u(0)$  par son expression, on obtient

$$K_p(z) = \int_0^t z(s)ds - \int_0^1 \int_0^t z(s)dsdt.$$

■

Soit  $N(u_1(t), u_2(t)) = F(u(t), t)$  avec  $F(u(t), t) = [F_1(s), F_2(s)]^T$ , où

$$F_1(u(t), t) = r(t) \left( 1 - \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right) - \frac{\alpha e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D},$$

$$F_2(u(t), t) = -d(t) + \frac{\beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t)e^{-u_2(t)}.$$

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

**Lemme 3.4.3** *L'application  $N$  est  $L$ -compact sur  $X$ .*

**Démonstration:**

L'application,  $QN : X \rightarrow X$  est donné par

$$\begin{aligned} QNu(t) &= (q_1, q_2)^T, \\ &= \left[ \int_0^1 F_1(u(s), s) ds, \int_0^1 F_2(u(s), s) ds \right]^T, \end{aligned}$$

où

$$Nu(s) = (F_1(t), F_2(s))^T.$$

De plus,  $K_p(I - Q)N : X \rightarrow X$  s'écrit sous la forme

$$K_p(I - Q)Nu = (\psi_1(u(t), t), \psi_2(u(t), t))^T$$

où

$$\psi_i(u(t), t) = \int_0^t F_i(u(s), s) ds - \int_0^1 \int_0^t F_i(u(s), s) ds dt + \left(\frac{1}{2} - t\right) \int_0^1 F_i(u(s), s) ds$$

pour  $i=1,2$ . En effet,

$$\begin{aligned} K_p(I - Q)Nu &= K_pNu(t) - K_pQNu(t), \\ &= \int_0^t F(u(s), s) ds - \int_0^1 \int_0^t F(u(s), s) ds dt - \int_0^t \int_0^1 F(u(s), s) ds ds \\ &+ \int_0^1 \int_0^t \int_0^1 F(u(s), s) ds ds dt, \\ &= \int_0^t F(u(s), s) ds - \int_0^1 \int_0^t F(u(s), s) ds dt - t \int_0^1 F(u(s), s) ds \\ &+ \int_0^1 t \int_0^1 F(u(s), s) ds dt \\ &= \int_0^t F(u(s), s) ds - \int_0^1 \int_0^t F(u(s), s) ds dt - t \int_0^1 F(u(s), s) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 F(u(s), s) ds \\ &= \int_0^t F(u(s), s) ds - \int_0^1 \int_0^t F(u(s), s) ds dt + \left(\frac{1}{2} - t\right) \int_0^1 F(u(s), s) ds. \\ &= (\psi_1(u(t), t), \psi_2(u(t), t))^T. \end{aligned}$$

Cependant, utilisons le théorème d'Arzela-Ascoli pour montrer que :  $K_p(I - Q)N : \bar{\Omega} \rightarrow X$  est une application compacte pour tout ouvert borné  $\Omega \subset X$  et  $QN(\bar{\Omega})$  est borné.

Montrons que  $K_p(I - Q)N$  et  $QN$  sont bornées. Pour tout  $u \in \bar{\Omega}$ , on a

$$\begin{aligned} \|QN u\| &\leq \max_{t \in (0,1)} \left\{ r(t) \left( 1 + \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} \right) + \frac{\alpha e^{u_2(t)} + \beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + d(t) + \Lambda(t)e^{-u_2(t)} \right\} = M^* \\ &\leq M^*. \end{aligned}$$

Alors  $QN(\bar{\Omega})$  est borné dans  $\mathbb{R}$ . D'où,  $QN u : \bar{\Omega} \rightarrow X$  est continue.

Pour tout  $z \in ImL$ .

$$\begin{aligned} \|K_p z\| &= \left\| \int_0^t z(s) ds - \int_0^1 \int_0^t z(s) ds dt \right\|, \\ &= \max_{t \in (0,1)} \left| \int_0^t z_1(s) ds - \int_0^1 \int_0^t z_1(s) ds dt \right| + \max_{t \in (0,1)} \left| \int_0^t z_2(s) ds - \int_0^1 \int_0^t z_2(s) ds dt \right|, \\ &\leq \max_{t \in (0,1)} \left( \left| \int_0^t z_1(s) ds \right| + \left| \int_0^1 \int_0^t z_1(s) ds dt \right| \right) + \max_{t \in (0,1)} \left( \left| \int_0^t z_2(s) ds \right| + \left| \int_0^1 \int_0^t z_2(s) ds dt \right| \right) \\ &\leq \max_{t \in (0,1)} |z_1(s)| \int_0^t ds + \max_{t \in (0,1)} |z_1(s)| \int_0^1 \int_0^t dt ds + \max_{t \in (0,1)} |z_2(s)| \int_0^t ds \\ &\quad + \max_{t \in (0,1)} |z_2(s)| \int_0^1 \int_0^t dt ds, \\ &\leq \max_{t \in (0,1)} |z_1(s)| + \frac{1}{2} \max_{t \in (0,1)} |z_1(s)| + \max_{t \in (0,1)} |z_2(s)| + \frac{1}{2} \max_{t \in (0,1)} |z_2(s)| \\ &\leq \frac{3}{2} \max_{t \in (0,1)} |z_1(s)| + \frac{3}{2} \max_{t \in (0,1)} |z_2(s)| \\ &\leq \frac{3}{2} \left( \max_{t \in (0,1)} |z_1(s)| + \max_{t \in (0,1)} |z_2(s)| \right) \\ &\leq \frac{3}{2} \|z\|. \end{aligned}$$

Alors pour tout  $u \in \bar{\Omega}$ , on a

$$\begin{aligned} \|K_p(I - Q)Nu\| &\leq \frac{3}{2} (\|Nu\| + \|QN u\|), \\ &\leq 3M^*. \end{aligned}$$

Donc  $K_p(I - Q)N$  et  $QN$  sont des applications bornées.

Montrons que  $K_p(I - Q)N(\bar{\Omega})$  est compact pour tout ensemble borné ouvert  $\Omega \subset X$ .

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

On note

$$K_p(I - Q)N(\bar{\Omega}) = \{K_p(I - Q)N(u), u \in \bar{\Omega}\}$$

Montrons que  $K_p(I - Q)N(\bar{\Omega}) \in C(\bar{\Omega}, X)$  est équicontinu. Comme  $K_p(I - Q)N$  et  $QN$  sont des composées d'applications continues sur  $X$ , alors elles sont donc continues sur  $X$ .

D'où l'ensemble  $K_p(I - Q)N(\bar{\Omega})$  est équicontinu et uniformément borné.

Ainsi, par le Théorème d'Arsela-Ascoli 1.11, on déduit que  $K_p(I - Q)N(\bar{\Omega})$  est compact.

De plus  $QN(\bar{\Omega})$  est borné pour tout ensemble  $\Omega \subset X$ .

Par conséquent, l'application  $N$  est L-compact d'après la définition 3.4.5. ■

Nous pouvons maintenant, présenter notre théorème qui assure l'existence d'au moins une solution positive, périodique du système (3.4)

**Théorème 3.4.2** *Supposons que (H1) du Théorème 3.3.2 est vérifiée et que la condition*

$$\bar{r} - \frac{\alpha \bar{\Lambda}}{D\bar{d} - \beta} e^{2\bar{d}} > 0 \quad (H5)$$

*est satisfaite, alors le système (3.4) admet au moins une solution 1-périodique, positive.*

**Preuve:**

Afin d'appliquer le théorème de continuation de Mawhin, nous cherchons d'abord un ouvert approprié  $\Omega$ . L'équation  $Lu = \lambda Nu$  avec  $\lambda \in (0, 1)$ , s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1(t)}{dt} = \lambda \left[ r(t) - r(t) \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} - \frac{\alpha e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D} \right], \\ \frac{du_2(t)}{dt} = \lambda \left[ -d(t) + \frac{\beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t) e^{-u_2(t)} \right]. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Supposons que  $(u_1, u_2)^T \in X$  est une solution de (3.21) pour un certain  $\lambda \in (0, 1)$ .

Alors il existe  $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$ , tel que :

$$u_1(\eta_1) = \max_{t \in [0, 1]} u_1(t), \quad u_2(\eta_2) = \max_{t \in [0, 1]} u_2(t),$$

$$u_1(\xi_1) = \min_{t \in [0,1]} u_1(t), \quad u_2(\xi_2) = \min_{t \in [0,1]} u_2(t).$$

En intégrant (3.21) sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on obtient :

$$\int_0^1 \left\{ r(t) - r(t) \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} - \frac{\alpha e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D} \right\} dt = 0,$$

et

$$\int_0^1 \left\{ -d(t) + \frac{\beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t) e^{-u_2(t)} \right\} dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^1 \left\{ r(t) \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} + \frac{\alpha e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D} \right\} dt = \bar{r}, \quad (3.24)$$

où

$$\bar{r} = \int_0^1 r(t) dt$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t) e^{-u_2(t)} \right\} dt = \bar{d}, \quad (3.25)$$

où

$$\bar{d} = \int_0^1 d(t) dt$$

De (3.21)-(3.25), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt &\leq \lambda \int_0^1 \left[ r(t) + r(t) \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} + \frac{\alpha e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D} \right] dt, \\ &\leq \lambda \int_0^1 r(t) dt + \lambda \int_0^1 \left\{ r(t) \frac{e^{u_1(t)}}{K(t)} + \frac{\alpha e^{u_2(t)}}{e^{u_1(t)} + D} \right\} dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1 \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt \leq 2\bar{r}\lambda.$$

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

Et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt &\leq \int_0^1 \lambda \left[ d(t) + \frac{\beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t) e^{-u_2(t)} \right] dt \\ &\leq \lambda \int_0^1 d(t) dt + \int_0^1 \lambda \left| \frac{\beta e^{u_1(t)}}{e^{u_1(t)} + D} + \Lambda(t) e^{-u_2(t)} \right| dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1 \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt \leq 2\bar{d}\lambda$$

Si  $\lambda < 1$ , on a

$$\int_0^1 \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt < 2\bar{r}, \quad (3.26)$$

et

$$\int_0^1 \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt < 2\bar{d}. \quad (3.27)$$

De plus, l'égalité (3.24) implique

$$\bar{r} \geq \int_0^1 \frac{r(t)}{K(t)} e^{u_1(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{r(t)}{K^m} e^{u_1(\xi_1)} dt.$$

Alors

$$u_1(\xi_1) \leq \ln K^m. \quad (3.28)$$

À partir de (3.25) on a aussi :

$$-\bar{d} + \beta + \int_0^1 \Lambda(s) e^{-u_2(\xi_2)} ds \geq 0.$$

De plus, on peut montrer que  $\bar{d} - \beta > 0$  puisque  $d^l - \beta > 0$  (voire (H1)) et  $\bar{d} > d^l$ .

$$u_2(\xi_2) \leq \ln \left( \frac{\Lambda}{\bar{d} - \beta} \right). \quad (3.29)$$

En utilisant l'égalité différentielle et les inégalités (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29), pour tout  $t \in (0, 1)$ , nous obtenons

$$u_1(t) \leq u_1(\xi_1) + \int_{\xi_1}^1 \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt \leq u_1(\xi_1) + \int_0^1 \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt < \ln K^m + 2\bar{r},$$

donc

$$u_1(t) < \ln K^m + 2\bar{r} =: M_1. \quad (3.30)$$

et

$$u_2(t) \leq u_2(\xi_2) + \int_{\xi_2}^1 \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt \leq u_2(\xi_2) + \int_0^1 \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt < \ln \left( \frac{\Lambda}{\bar{d} - \beta} \right) + 2\bar{d},$$

donc

$$u_2(t) < \ln \left( \frac{\Lambda}{\bar{d} - \beta} \right) + 2\bar{d} =: M_2. \quad (3.31)$$

D'une part, nous avons à partir de l'égalité (3.24) et (3.31), on a :

$$\bar{r} - \left( \frac{r}{K} \right) e^{u_1(\eta_1)} - \frac{\alpha}{D} e^{M_2} \leq 0,$$

alors

$$u_1(\eta_1) \geq \ln \left( \frac{1}{\left( \frac{r}{K} \right)} \left( \bar{r} - \frac{\alpha}{D} \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{d} - \beta} e^{2\bar{d}} \right) \right). \quad (3.32)$$

On a aussi d'après (3.25)

$$\int_0^1 \Lambda(t) e^{-u_2(t)} dt \leq \bar{d}, \quad \text{alors} \quad \int_0^1 \Lambda(t) e^{-u_2(\eta_2)} dt \leq \bar{d}.$$

Donc

$$u_2(\eta_2) \geq \ln \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{d}}. \quad (3.33)$$

En utilisant l'égalité différentielle et les inégalités (3.26), (3.27), (3.32) et (3.33), pour tout  $t \in (0, 1)$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} u_1(t) &\geq u_1(\eta_1) - \int_{\eta_1}^1 \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt \geq u_1(\eta_1) - \int_0^1 \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt \\ &> \ln \left( \frac{1}{\left( \frac{r}{K} \right)} \left( \bar{r} - \frac{\alpha}{D} \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{d} - \beta} e^{2\bar{d}} \right) \right) - 2\bar{r}, \end{aligned}$$

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

d'où

$$u_1(t) > \ln \left( \frac{1}{\left(\frac{r}{K}\right)} \left( \bar{r} - \frac{\alpha \bar{\Lambda}}{D \bar{d} - \beta} e^{2\bar{d}} \right) \right) - 2\bar{r} =: M_3. \quad (3.34)$$

Et

$$u_2(t) \geq u_2(\eta_2) - \int_{\eta_2}^1 \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt > u_2(\eta_2) - \int_0^1 \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt,$$

donc

$$u_2(t) \geq \ln \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{d}} - 2\bar{d} =: M_4. \quad (3.35)$$

De (3.30), (3.31), (3.34) et (3.35), on obtient :

$$|u_1(t)| < \max\{|M_1|, |M_3|\} =: \tilde{M}_1$$

et

$$|u_2(t)| < \max\{|M_2|, |M_4|\} =: \tilde{M}_2.$$

Il est clair que  $\tilde{M}_1$  et  $\tilde{M}_2$  sont tous deux indépendants de  $\lambda$ . On note  $\tilde{M} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 + C$ , où  $C$  soit suffisamment grand pour chaque solution  $(u_1^*, u_2^*)$  du système suivant

$$\begin{cases} \bar{r} - \left(\frac{r}{K}\right) e^{u_1} - \frac{\alpha e^{u_2}}{e^{u_1} + D} = 0, \\ -\bar{d} + \frac{\beta e^{u_1}}{e^{u_1} + D} + \bar{\Lambda} e^{-u_2} = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Satisfait  $\|(u_1^*, u_2^*)\| < \tilde{M}$ , à condition que (3.36) ait une solution. Maintenant on prend

$\Omega = \{(u_1, u_2) \in X : \|(u_1, u_2)\| < \tilde{M}\}$ , alors la première condition du Théorème 3.4.1 est vérifiée.

$\tilde{M}$  est choisi de telle sorte que chaque solution de (3.36) vérifie  $\|(u_1, u_2)\| < \tilde{M}$ .

Si  $(u_1, u_2) \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^2$ , alors  $(u_1, u_2)$  est un vecteur constant tel que  $\|(u_1, u_2)\| = \tilde{M}$ .

D'après la définition de  $\Omega$  et  $\tilde{M}$ , si  $(u_1, u_2) \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L$ , alors  $QN(u_1, u_2) \neq (0, 0)^T$ .

Donc la deuxième condition du Théorème 3.4.1 est satisfaite.

Prouvons maintenant la dernière condition du Théorème de continuité de Mawhin, c'est-à-dire

équivalent à prouver que lorsque  $(u_1, u_2) \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}^2$ ,  $\deg\{JQN(u_1, u_2), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T\} \neq 0$ . Pour cela, on applique la propriété d'homotopie d'invariance du degré de coïncidence. On définit une homotopie comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi : DomL \times [0, 1] &\rightarrow X \\ (u_1, u_2, \mu) &\mapsto \Psi(u_1, u_2, \mu), \\ \Psi(u_1, u_2, \mu) &= \begin{cases} \bar{r} - \left(\frac{r}{K}\right)e^{u_1} - \frac{\alpha e^{u_2}}{\mu e^{u_1} + D}, \\ -\bar{d} + \frac{\beta e^{u_1}}{e^{u_1} + \mu D} + \bar{\Lambda}e^{-u_2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque  $J$  est un isomorphisme d'applications, on prend  $J : ImQ \rightarrow KerL$ , i.e  $u \mapsto u$  on obtient

$$\begin{aligned} \deg\{JQN(u_1, u_2), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T\} &= \deg\{QN(u_1, u_2), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T\} \\ &= \deg\left\{\bar{r} - \left(\frac{r}{K}\right)e^{u_1} - \frac{\alpha e^{u_2}}{\mu e^{u_1} + D}, \right. \\ &\quad \left. -\bar{d} + \frac{\beta e^{u_1}}{e^{u_1} + \mu D} + \bar{\Lambda}e^{-u_2}, \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T\right\}. \end{aligned}$$

D'après la définition de  $\Omega$  on montre que si  $(u_1, u_2) \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}^2$ , alors soit

$$u\Psi(u_1, u_2, \mu) > 0 \quad \text{ou} \quad u\Psi(u_1, u_2, \mu) < 0.$$

Donc

$$\left(\Psi(u_1, u_2, \mu) \neq 0, \forall (u_1, u_2) \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}^2\right) \Leftrightarrow 0 \notin \Psi(\partial\Omega \cap \mathbb{R}^2, \mu).$$

Ainsi le  $\deg\{JQN(u_1, u_2), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T\}$  est bien défini i.e si  $\Psi(u_1, u_2, \mu) = 0$ , alors  $(u_1, u_2) \notin \partial\Omega \cap \mathbb{R}^2$ ,

$$\Psi(u_1, u_2, \mu) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{r} - \left(\frac{r}{K}\right)e^{u_1} - \frac{\alpha e^{u_2}}{\mu e^{u_1} + D} = 0, \\ -\bar{d} + \frac{\beta e^{u_1}}{e^{u_1} + \mu D} + \bar{\Lambda}e^{-u_2} = 0. \end{cases}$$

### 3.4. Existence d'une solution périodique

---

Nous obtenons  $|u_1| < \tilde{M}_1$  et  $|u_2| < \tilde{M}_2$ , ce qui contredit le fait que  $\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 = \tilde{M}$ .

Selon le degré topologique et le fait que  $\deg(\Psi(u, v, \mu))$  est indépendant de  $\mu$  (l'invariance par homotopie), il vient

$$\begin{aligned} & \deg \left\{ JQN(u_1, u_2)^T, \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T \right\}, \\ &= \deg \left\{ \Psi(u_1, u_2, 1), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T \right\}, \\ &= \deg \left\{ \Psi(u_1, u_2, 0), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T \right\} \\ &= \deg \left\{ QN(u_1, u_2), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T \right\}, \\ &= \deg \left\{ \bar{r} - \left( \frac{r}{K} \right) e^{u_1} - \frac{\alpha}{D} e^{u_2}, -\bar{d} + \beta + \bar{\Lambda} e^{-u_2}, \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T \right\} \end{aligned}$$

Nous rappelons que  $x = e^{u_1}, y = e^{u_2}$ . D'après l'hypothèse (H5) du Théorème 3.4.2, le système d'équation algébrique

$$\begin{cases} \bar{r} - \left( \frac{r}{K} \right) x - \frac{\alpha y}{D} = 0, \\ -\bar{d} + \beta + \frac{\bar{\Lambda}}{y} = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

admet une unique solution donnée par  $(x^*, y^*)$ ,

$$x^* = \frac{1}{\left( \frac{r}{K} \right)} \left( \bar{r} - \frac{\alpha}{D} \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{d} - \beta} \right) > 0 \quad \text{et} \quad y^* = \frac{\bar{\Lambda}}{\bar{d} - \beta} > 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \deg \left\{ JQN(u_1, u_2), \Omega \cap \mathbb{R}^2, (0, 0)^T \right\} &= \operatorname{sgn}_{(x^*, y^*) \in QN^{-1}\{(0,0)\}} \det (QN(x^*, y^*)), \\ &= \begin{vmatrix} -\left( \frac{r}{K} \right) x^* & -\frac{\alpha y^*}{D} \\ 0 & -\frac{\bar{\Lambda}}{y^*} \end{vmatrix}, \\ &= \operatorname{sgn} \left( \left( \frac{r}{K} \right) x^* \frac{\bar{\Lambda}}{y^*} \right), \\ &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de la dernière condition du Théorème 3.4.1. Par conséquent, le système (3.21) a au moins une solution 1-périodique, et alors le système (3.4) a au moins une Solution positive 1-périodique. Ceci complète la preuve du Théorème (3.4.2). ■

**Corollaire 3.4.2** *Si la solution 1-périodique du Théorème 3.4.2 satisfait les hypothèses du Théorème 3.3.4, alors elle est globalement asymptotiquement stable.*

**Démonstration:**

D'après le Théorème 3.4.2, le système (3.4) admet au moins une solution 1-périodique positive. Supposons que cette solution vérifie les hypothèses du Théorème 3.3.4. En choisissant la même fonction de Lyapunov, on montre que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = x^* \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y = y^*.$$

D'où la solution 1-périodique positive est globalement asymptotiquement stable. ■

## 3.5 Simulations numériques et discussions

**Exemple 3.5.1**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D} - h(t)x, \\ \dot{y}(t) = -d_1 y + \frac{\beta xy}{x + D} + \Lambda(t) - L(t)y. \end{cases} \quad (3.38)$$

Avec des conditions initiales

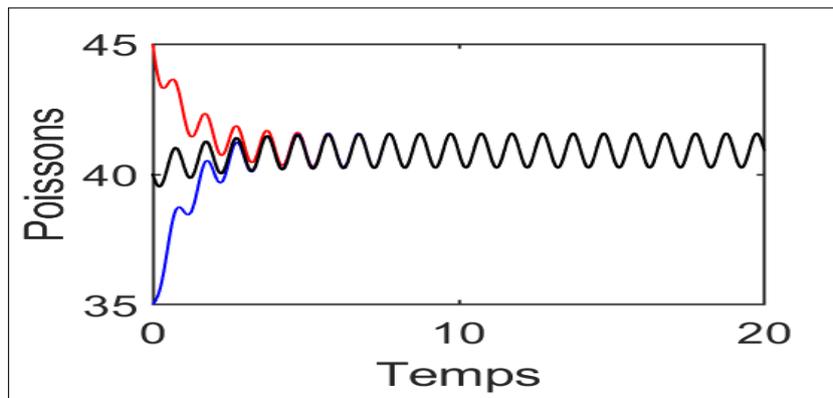
- (1)  $x(0) = 45, \quad y(0) = 5;$
- (2)  $x(0) = 35, \quad y(0) = 3;$
- (3)  $x(0) = 40, \quad y(0) = 8.$

Avec ces différentes conditions  $(x(0), y(0))$  et les paramètres  $r_1 = 1.2, K_1 = 50, \alpha = 0.16, h(t) = 0.2 + 0.1 \cos(2\pi t), d_1 = 0.1, \beta = 0.1, \Lambda(t) = 3 + \cos(2\pi t), L(t) = 0.5 + 0.3 \cos(2\pi t)$ , on pourrait vérifier que les hypothèses (H1) et (H5) sont satisfaites (voir Théorèmes 3.3.2 et 3.4.2), c'est-à-dire que le système (3.4) est permanent et a au moins une solution positive 1-périodique. De plus  $\mu_1 = 1.6 \cdot 10^{-2} > 0$  et  $\mu_2 = 3.17 \cdot 10^{-2} > 0$ , alors les hypothèses (H3) et (H4)

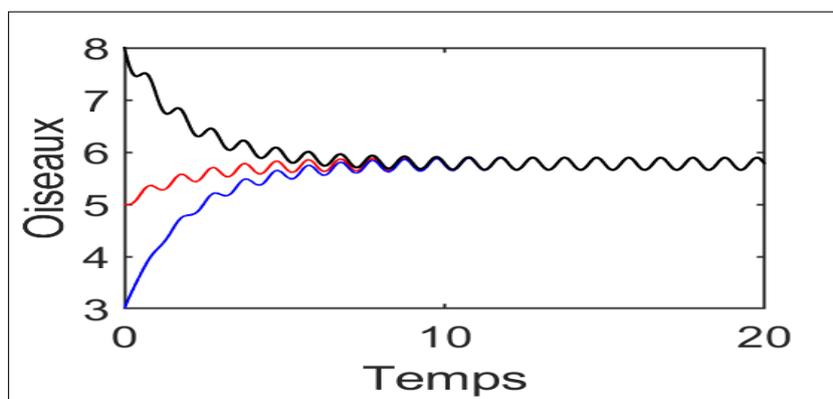
### 3.5. Simulations numériques et discussions

---

du Théorème 3.3.4 sont vérifiées, donc la solution positive périodique est globalement asymptotiquement stable. Figure.3.1 et 3.2 donnent la variation de poissons et oiseaux aquatiques respectivement, la Figure.3.3 correspond à la phase de la prédation en fonction des proies et la Figure.3.4, la phase du temps en fonction des proies-prédateurs. La figure 3.3 et 3.4 montrent la permanence du système (3.4) et la périodicité.



**Figure 3.1** – Variation de proies avec trois conditions initiales différentes.



**Figure 3.2** – Variation des prédateurs en fonction du temps avec trois conditions initiales différentes.

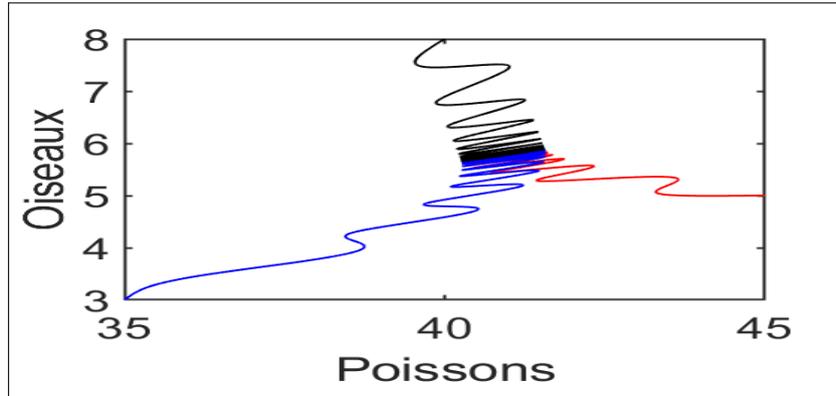


Figure 3.3 – Variation des prédateurs en fonction des proies.

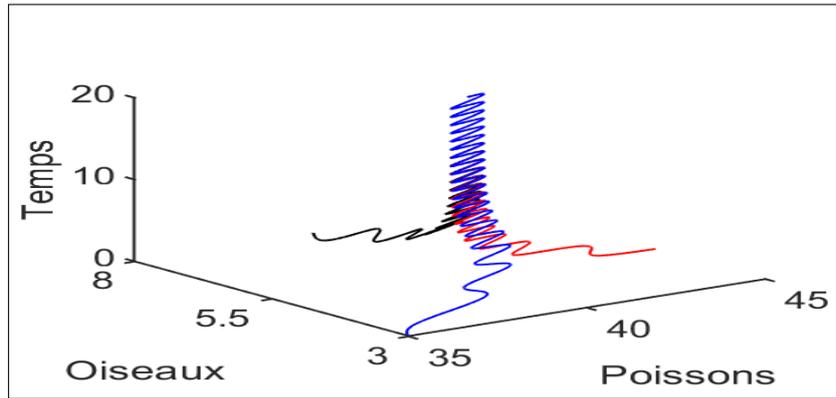


Figure 3.4 – Courbe d'évolution des proies-prédateurs en fonction des années.

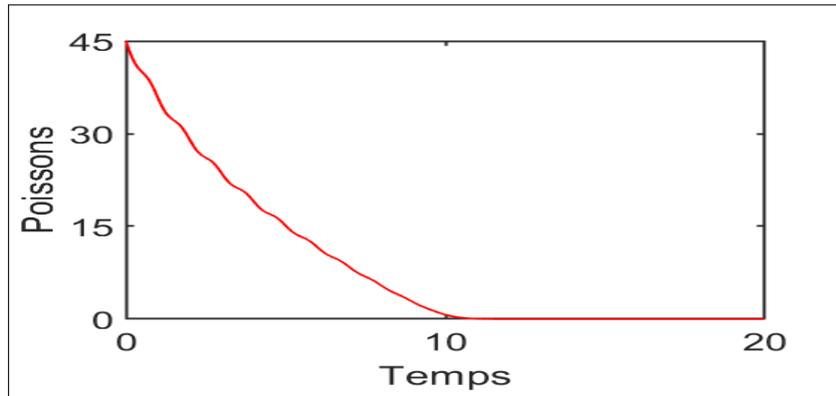
**Exemple 3.5.2** Ici, nous exposons le cas d'extinction des proies dans la zone humide. Nous considérons

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1 x \left(1 - \frac{x}{50}\right) - \frac{\alpha xy}{x + D} - (0.2 + 0.1 \cos(2\pi t))x, \\ \dot{y}(t) = -0.1y + \frac{0.1xy}{x + D} + (3 + \cos(2\pi t)) - (0.5 + 0.3 \cos(2\pi t))y. \end{cases} \quad (3.39)$$

Avec la condition initiale  $x(0) = 45$ ,  $y(0) = 5$  et les paramètres  $r_1 = 0.25$ ,  $D = 1$ ,  $\alpha = 0.6$ , l'hypothèse (H2) est vérifiée (voir Théorème 3.3.3), alors on a l'extinction des poissons. Voir Figure.3.5

### 3.5. Simulations numériques et discussions

---



**Figure 3.5** – Extinction des poissons dans la zone humide.

---

## Conclusion et perspectives

En conclusion, ce travail fournit quelques résultats sur le comportement asymptotique d'un modèle incorporant des proies et des prédateurs dans les zones humides. Les proies sont des espèces aquatiques et les prédateurs des oiseaux d'eau tels que le cormoran, le pélican blanc, la sauvagine dans le parc national Djoudj d'oiseaux du Sénégal. L'analyse mathématique présentée dans ce modèle montre que, selon les valeurs des coefficients, on peut faire des prédictions appropriées sur le comportement asymptotique du système proie-prédateur, y compris la permanence, la périodicité, la stabilité asymptotique globale et l'extinction d'espèces. Ces conclusions nous avertissent de prendre des décisions opportunes pour protéger les espèces dans notre système écologique.

Dans le chapitre 3, nous avons déterminé une condition suffisante d'existence de solutions périodiques dans le cas où  $\Lambda(t)$ ,  $L(t)$  et  $h(t)$  sont des solutions périodiques. Il serait donc plus intéressante dans la suite de chercher une solution périodique telle que toutes les solutions du système (3.4) convergent vers cette solution.

---

# Annexe

## Programmes

Dans cette partie de l'annexe, nous allons présenter les programmes écrits sur "Matlab" qui nous ont permis d'avoir les résultats de simulations.

```
%=====Moele de Malthus=====
%=====initialisation=====
N0=1; t0=0; tf=5; dt=0.005; r=-0.7;
t = t0:dt:tf; %on fixe la grille de temps
n=length(t);% nombre de boucle; N=zeros(1,n);
%=====on fixe la condition initiale=====
  N(1)=N0;
for i=1:n-1
  N(i+1) = N(i)+ dt*r*N(i);
end;
  N1=N;
%=====
r=0.5;
for i=1:n-1
  N(i+1) = N(i)+ dt*r*N(i);
end;
  N2=N;
%=====
r=0;
for i=1:n-1
```

---

```

    N(i+1) = N(i)+ dt*r*N(i);
end;
    N3=N;
%=====
plot(t,N1,'b',t,N2,'r',t,N3,'k','Linewidth',1.5)% enfoncer  courbe
xlabel('temps') % x-axis label
ylabel('solution','fontsize',20)
set(gca,'Linewidth',1.5,'fontsize',20,'xlim',[0 5],'xtick', 0:2:5)
set(gca,'ylim',[0 15],'ytick', 0:5:15)
legend('r>0','r<0','r=0')
%=====

```

```

function []=logistique(N1,N2,r,k)
    N=[];
    templim=200;
    deltat=0.01;
    Nbrbit=round(templim/deltat);
    t=0:deltat:templim;
    N(1)=N1;
    for i=1:Nbrbit
        N(i+1)=N(i)+deltat*(r*N(i)*(1-N(i)/k));
    end;
    m=N;
    N(1)=N2;
    for i=1:Nbrbit
        N(i+1)=N(i)+deltat*(r*N(i)*(1-N(i)/k));
    end;
    n=N;
    N(1)=k;
    for i=1:Nbrbit
        N(i+1)=N(i)+deltat*(r*N(i)*(1-N(i)/k));
    end;
    y=N;
plot(t,m,'b',t,n,'r',t,y,'k','Linewidth',1.5)% enfoncer  courbe

```

## Annexe

---

```
xlabel('temps') % x-axis label
ylabel('solution','fontsize',20)
legend('N0>K','N0<K','N0=K')
set(gca,'Linewidth',1.5,'fontsize',20,'xlim',[0 200],'xtick', 0:60:200)
end
%=====Appel de la fonction logistique=====
z1=logistique(20,5,0.05,10)

%=====Lotka-Volterra=====
function []=LotkaVolterra(x0,y0,t0,tf,dt,a,b,c,e)

%=====ininitialisation=====
t = t0:dt:tf; % on fixe la grille de temps
n = length(t); % le nombre de boucle
x=zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau x
y =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau y
%=====
% on fixe la condition initiale
x(1)= x0 ; y(1)= y0;
for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n
    %y(i+1) = y(i) + dt*f(t,y(i)); schéma numérique
    x(i+1) = x(i)+dt*( a*x(i) - b*x(i)*y(i) );
    y(i+1) = y(i)+dt*( -c*y(i) + e*b*x(i)*y(i) );
end;
%=====
plot(t,x,'b',t,y,'r','Linewidth',1.5)% enfoncer  courbe
%axis([0 100 0 20]);
legend('proie','prédateur')
xlabel('temps')
ylabel('solution','fontsize',20)
set(gca,'Linewidth',1.5,'fontsize',20,'xlim',[0 100],'xtick', 0:20:100)
set(gca,'Linewidth',1.5,'fontsize',20,'ylim',[0 16],'ytick', 0:4:16)
end
%=====Appel de la fonction lotkavolterra=====
```

---

```

z2=lotkavolterra(1,1,0,100,0.05,0.5,1,1,0.4)

%=====
function []=LotkaVolterra22(x0,y0,t0,tf,dt,a,b,c,e)

%initialisation

%=====

t = t0:dt:tf; % on fixe la grille de temps

n = length(t); % le nombre de boucle

x=zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau x

y =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau y

x0=1; y0=1; x(1)= x0; y(1)= y0;

%=====

% on fixe la condition initiale

for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n

    %y(i+1) = y(i) + dt*f(t,y(i)); schéma numérique

    x(i+1) = x(i)+dt*( a*x(i) - b*x(i)*y(i) );

    y(i+1) = y(i)+dt*( -c*y(i) + e*b*x(i)*y(i) );

end;

%=====

```

## Annexe

---

```
plot(x,y,'Linewidth',1.5)

xlabel('proie')

ylabel('prédateur','fontsize',20)

set(gca,'Linewidth',1.5,'fontsize',20,'xlim',[0 20],'xtick', 0:5:20)

set(gca,'Linewidth',1.5,'fontsize',20,'ylim',[0 8],'ytick', 0:4:16)

end

%=====Appel à la fonction lotkavolterra22 % % % % % % % % % % % %

z= LotkaVolterra22(2,3,0,100,0.05,0.5,1,1,0.4)

%=====

function [x,y]=HolIIpoisson(x0,y0,x1,y1,x2,y2,r,alpha,d,beta,D,K1,t0,tf,n)
    close all; clc;
%=====
dt=(tf-t0)/n; % le pas de temps
x =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau x
y =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau y
%===== On fixe les conditions initiales =====
x(1) = x0; y(1) = y0;
%=====
for i=1:n
    t(i)=t0+(i-1).*dt;
end;
%===== schéma numérique =====
for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n
    h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
    Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
```

---

```

x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
m1=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%===== On fixe la deuxième condition initiale =====
x(1) = x1; y(1) = y1;
for i=1:n-1
h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
y(i+1) =y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
m2=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%===== On fixe la dernière condition initiale =====
x(1) =x2;
y(1) =y2;
for i=1:n-1
h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
m3=y;
%===== la figure des proies en fonction du temps =====
plot(t,m1,'r',t,m2,'b',t,m3,'k','Linewidth',1.5); % enfoncer courbe
xlabel('Temps','fontsize',20) ;%enfoncer les nombres des axes: x-axis label
ylabel('Poissons','fontsize',25); % fontsize:enfoncer ''Poissons''
set(gca,'fontsize',25,'xlim',[0 20],'xtick',0:10:20)% enfonce nombres
set(gca,'Linewidth',1.5,'ylim',[35 45],'ytick', 35:5:45)% enfoncer axes''
end
%=====Appel de la fonction HolIIpoisson =====
z3=HolIIpoisson((45,5,35,3,40,8,1.2,0.16,0.1,0.1,10,50,0,20,1000)

```

## Annexe

---

```
function [x,y]=HolIIoiseaux(x0,y0,x1,y1,x2,y2,r,alpha,d,beta,D,K1,t0,tf,n)
    close all; clc;
    %=====
    dt=(tf-t0)/n; % le pas de temps
    x =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau x
    y =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau y

    %===== On fixe la première condition initiale =====
    x(1) = x0; y(1) = y0;
    %=====
    for i=1:n
        t(i)=t0+(i-1).*dt;
    end;
    %===== schéma numérique =====
    for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n
        h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
        Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
        x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
        y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
    end;
    w1=y;
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %===== On fixe la deuxième condition initiale =====
    x(1) = x1;
    y(1) = y1;
    for i=1:n-1
        h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
        Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
        x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
        y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
    end;
    w2=y;
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %===== On fixe la dernière condition initiale =====
```

---

```

x(1) = x2; y(1) = y2;
for i=1:n-1
h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
w3=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%===== la figure des prédateurs en fonction du temps =====
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
plot(t,w1,'r',t,w2,'b',t,w3,'k.-','Linewidth',1.5);
xlabel('Temps','fontsize',20) % x-axis label
ylabel('Oiseaux','fontsize',20) %y-axis label
set(gca,'fontsize',20,'xlim',[0 20],'xtick',0:10:20)
set(gca,'Linewidth',1.5,'ylim',[3 8],'ytick', 3:1:8)
%end
%=====Appel de la fonction HolIIoiseaux =====
z4=HolIIoiseaux(45,5,35,3,40,8,1.2,0.16,0.1,0.1,10,50,0,20,1000)

function [x,y]=HolIII(x0,y0,x1,y1,x2,y2,r,alpha,d,beta,D,K1,t0,tf,n)
close all; clc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dt=(tf-t0)/n; % le pas de temps
x =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau x
y =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%===== On fixe la première condition initiale =====
x(1) = x0; y(1) = y0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:n
t(i)=t0+(i-1).*dt;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%===== schéma numérique =====
for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n

```

## Annexe

---

```
h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
m1=x; w1=y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%===== On fixe la deuxième condition initiale =====
x(1) = x1; y(1) = y1;
for i=1:n-1 %i+1 ne doit donc pas dépasser n
h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
m2=x; w2=y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%===== On fixe la dernière condition initiale =====
x(1) = x2; y(1) = y2;
for i=1:n-1
h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
m3=y; w3=x;

%===== la figure des prédateurs en fonction des poissons =====
plot(m1,w1,'r',m2,w2,'b',m3,w3,'k','Linewidth',1.5)
xlabel('Poissons') % x-axis label
ylabel('Oiseaux') %y-axis label
set(gca,'fontsize',25,'xlim',[35 45],'xtick',35:5:45) % enfonce nombres
set(gca,'Linewidth',1.5,'ylim',[3 8],'ytick', 3:1:8) % enfonce axes
end
%=====Appel de la fonction HolII=====
```

---

```
z5=HolIII(45,5,35,3,40,8,1.2,0.16,0.1,0.1,10,50,0,20,1000)
```

```
function [x,y]=HolIIIplot3D(x0,y0,x1,y1,x2,y2,r,alpha,d,beta,K1,D,t0,tf,n)
    close all; clc;
    %=====
    dt=(tf-t0)/n; % le pas de temps
    x =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau x
    y =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau y
    %===== On fixe la première condition initiale =====
    x(1) = x0; y(1) = y0;
    %=====
    for i=1:n
        t(i)=t0+(i-1).*dt;
    end;
    %===== schéma numérique =====
    for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n
        h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
        Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
        x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
        y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
    end;
    m1=x; w1=y;
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %===== On fixe la deuxième condition initiale =====
    x(1) = x1;
    y(1) =y1;
    for i=1:n-1
        h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
        Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
        x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
        y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
    end;
    m2=x; w2=y;
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

## Annexe

---

```
%===== On fixe la dernière condition initiale =====
x(1) = x2; y(1) = y2;
for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n
    h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
    Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
    x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
    y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
m3=y; w3=x;
%===== Phase en temps en fonction des proies prédateur =====
plot3(m1,w1,t,'r',m2,w2,t,'b',m3,w3,t,'k','Linewidth',1.5)
xlabel('Poissons')
ylabel('Oiseaux')
zlabel('Temps')
set(gca,'fontsize',20,'xlim',[35 45],'xtick',35:5:45) %enfonce nombres
set(gca,'Linewidth',1.5,'ylim',[3 8],'ytick', 3:2.5:8) % enfonce axes
set(gca,'zlim',[0 20],'ztick', 0:10:20)
end
%===== Appel de la fonction HolIplot3D =====
z3=HolIplot3D(45,5,35,3,40,8,1.2,0.16,0.1,0.1,50,10,0,20,1000)

function [x,y]=hollingextinction(x0,y0,r1,alpha,d1,beta,D,K1,t0,tf,n)
    close all; clc;
%=====
dt=(tf-t0)/n; % le pas de temps
x =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau x
y =zeros(1,n); % on fixe la taille du tableau y
%===== On fixe la première condition initiale =====
x(1) = x0; y(1) = y0;
%=====
for i=1:n
    t(i)=t0+(i-1)*dt;
end;
%===== schéma numérique =====
```

---

```

for i=1:n-1 % i+1 ne doit donc pas dépasser n
    h(i)=(0.2+0.1*cos(2*pi*t(i))); L(i)=(0.5+0.3*cos(2*pi*t(i)));
    Lambda(i)=(3+cos(2*pi*t(i)));
    x(i+1)= x(i)+dt*(r*x(i)*(1-x(i)/K1)-alpha*x(i).*y(i)/(x(i)+D)-h(i).*x(i));
    y(i+1) = y(i)+dt*(-d*y(i)+ beta*x(i)*y(i)/(x(i)+D)+Lambda(i)-L(i)*y(i));
end;
for i=1:n
    r(i)=r1-h(i);
    d(i)=d1+ L(i);
    K(i)=r(i)*K1;
end;
rmax=max(r);
rmin=min(r);
dmax=max(d)
Lambdamin=min(Lambda);
Kmax=max(K);
compare=(alpha*Lambdamin)/(rmax*(D+Kmax))
if dmax < compare;
    plot(t,x,'b','Linewidth',1.5)%enfonce la courbe
    xlabel('Temps','Linewidth',1.5) ;%enfonce nombres
    ylabel('Poissons'); % fontsize:enfonce ''Poissons''
    set(gca,'fontsize',20,'xlim',[0 20],'xtick',0:10:20)% enfonce nombres
    set(gca,'Linewidth',1.5,'ylim',[0 45],'ytick', 0:15:45)% enfonce axes
else
    disp('le theoreme 3 n''est pas verifié')
end;
end
%===== Appel de la fonction hollingextinction =====
z4=hollingextinction(45,5,0.105,0.6,0.1,0.1,1,50,0,20,1000)

%=====

```

---

## Références bibliographiques

- [1] Herbert Amann. *Ordinary differential equations. An introduction to nonlinear analysis. Transl. from the German by Gerhard Metzen*, volume 13. Berlin etc. : Walter de Gruyter, 1990.
- [2] Amina Dahaoui. *Stabilité Globale d'un modèle Ratio-Dépendant Structuré en*. PhD thesis, 2014.
- [3] Egotanda Dieudonné. Mixing for positive operators in Banach lattices. *J. Math. Anal. Appl.*, 279(2) :756–767, 2003.
- [4] Oumar Diop, Ali Moussaoui, and Abdou Sène. Positive periodic solution of an augmented predator-prey model with seasonal harvest of prey and migration of predator. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 52(1-2) :417–437, 2016.
- [5] HI Freedman and JH Wu. Persistence and global asymptotic stability of single species dispersal models with stage structure. *Quarterly of Applied Mathematics*, 49(2) :351–371, 1991.
- [6] Robert E. Gaines and Jean L. Mawhin. *Coincidence degree, and nonlinear differential equations.*, volume 568. Springer, Cham, 1977.
- [7] Shujing Gao, Fumin Zhang, and Yuying He. The effects of migratory bird population in a nonautonomous eco-epidemiological model. *Appl. Math. Modelling*, 37(6) :3903–3916, 2013.
- [8] Crawford Stanley Holling. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 97(S45) :5–60, 1965.
- [9] Benjamin Jourdain, Tony Lelièvre, and Raphaël Roux. Existence, uniqueness and convergence of a particle approximation for the adaptive biasing force process. *ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.*, 44(5) :831–865, 2010.

- [10] A. Ljapunoff. Allgemeines Problem von der Stabilität der Bewegung. Charkow : 245 pp. (1892)., 1892.
- [11] Thomas Robert Malthus. *An Essay on the Principle of Population, and A Summary View of the Principale of Population*. Penguin, Harmondsworth, England, 1798.
- [12] J. Mawhin. Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces. *J. Differ. Equations*, 12 :610–636, 1972.
- [13] Imene Meriem Mostefaoui and Ali Moussaoui. On a non-autonomous reaction-convection diffusion model to study the bacteria distribution in a river. *Int. J. Biomath.*, 10(6) :25, 2017. Id/No 1750077.
- [14] Francesco M. Scudo and James R. Ziegler, editors. *The golden age of theoretical ecology : 1923–1940. A collection of works by V. Volterra, V. A. Kostitzin, A. J. Lotka and A. N. Kolmogoroff.*, volume 22. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [15] Ruiqing Shi and Lansun Chen. The study of a ratio-dependent predator–prey model with stage structure in the prey. *Nonlinear dynamics*, 58(1-2) :443, 2009.
- [16] Horst R Thieme. Uniform persistence and permanence for non-autonomous semiflows in population biology. *Mathematical Biosciences*, 166(2) :173–201, 2000.
- [17] Pierre-François Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.*, 10 :113–126, 1838.
- [18] Zhijun Zeng. Dynamics of a non-autonomous ratio-dependent food chain model. *Applied Mathematics and Computation*, 215 :1274–1287, 10 2009.